DFS

$DFS(G)$:

1. For each $u \in V$:
   1.1. $color[u] \leftarrow White$
   1.2. $\pi[u] \leftarrow NULL$
2. $time \leftarrow 0$
3. For each $u \in V$:
   3.1. If $color[u] = White$:
      3.1.1. $\text{DFS-Visit}(u)$

$\text{DFS-Visit}(u)$:

1. $color[u] \leftarrow Gray$
2. $time \leftarrow time + 1$
3. $d[u] \leftarrow time$
4. For each $v \in \text{Adj}(u)$:
   4.1. If $color[u] = White$:
      4.1.1. $\pi[v] \leftarrow u$
      4.1.2. $\text{DFS-Visit}(v)$
5. $color[u] \leftarrow Black$
6. $time \leftarrow time + 1$
7. $f[u] \leftarrow time$

[להשלים: קוד של מיון טופולוגי]

תרגיל חימום [קדקוד אחרון בכל מיון טופולוגי]

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ וקדקוד $v \in V$ כך שבכל מיון טופולוגי של G, v הוא הקדקוד האחרון במיון.

מה ניתן לומר על v?

<u>פתרון</u>:

I) לכל $u \in V$, לא קיים מסלול מ-v ל-u.
II) לכל $u \in V$, קיים מסלול מ-u ל-v.

<u>הוכחה</u>:

I) נניח בשלילה שקיים $u \neq v$ כך שיש מסלול מ- v ל- u.
נתבונן בריצת DFS המתחילה ב- v.
ממשפט המסלול הלבן, u צאצא של v בעץ ה-DFS; בפרט יתקיים $f[u] < f[v]$ ולכן u יופיע לאחר v במיון הטופולוגי, בסתירה.

II) נניח בשלילה שקיים u ממנו אין מסלול ל- v.
נתבונן בריצת DFS המתחילה ב- u.
ממשפט המסלול הלבן נקבל כי נסיים לטפל ב- u לפני שנגלה את v – כלומר $f[u] < d[v] < f[v]$, ולכן u יופיע לאחר v במיון הטופולוגי, בסתירה.

בעיית הכיתה המופרעת

בכיתה מסוימת נוהגים התלמידים להשליך מטוסי נייר אחד על השני. לכל תלמיד קיימת קבוצה של תלמידים עליהם הוא משליך מטוסים (משאר התלמידים הוא פוחד, ולא רוצה להסתבך איתם), במידה והשורה בה יושב התלמיד המשליך רחוקה יותר מהלוח מאשר השורה בה יושבת מטרתו או ששניהם יושבים באותה השורה [כלומר הוא מוכן לזרוק מטוסים רק על חלק מהתלמידים, ורק אם הם לא יושבים מאחוריו].

- סידור חוקי של תלמידי הכיתה הוא הושבה של התלמידים באופן כזה בו אף מטוס לא יושלך במהלך השיעור.
- סידור אופטימאלי הוא סידור חוקי בעל מספר מינימאלי של שורות.

הערה: ניתן להניח ששורות הכיתה אינן מוגבלות במספר מקומות ישיבה.

בהינתן מופע לבעיה, נרצה לענות על שתי השאלות:

1. האם קיים סידור חוקי?
2. במידה וקיים סידור חוקי, מהו הסידור האופטימלי?

פתרון:

[נמדל את הבעיה בעזרת גרף: הקדקודים יהיו התלמידים, ונשים קשת מתלמיד x ל- y אם x רוצה לזרוק מטוס על y.
קל לראות שאם יש מעגל בגרף, אז לא ניתן למצוא סידור חוקי (כי תמיד יהיה מישהו שיכול לזרוק על מישהו אחר מהמעגל). אם אין מעגל, נבצע מיון טופולוגי, וזה ייתן לנו סידור חוקי. משם נצטרך רק לצמצם את כמות השורות בשביל פתרון אופטימלי.]

נייצג את הבעיה בעזרת גרף, $G = (V, E)$.
קדקודי הגרף הם התלמידים, ועבור זוג תלמידים x, y כך ש- x רוצה לזרוק מטוס על y נוסיף קשת מכוונת (x, y).

פתרון בעיית קיום סידור חוקי

אלגוריתם:

- נריץ אלגוריתם למציאת מיון טופולוגי על G.
- אם נמצא מיון כנ"ל נחזיר כי קיים סידור חוקי.

- אחרת נחזיר כי לא קיים סידור חוקי.

<u>הוכחת נכונות:</u>

- נניח וקיים מיון טופולוגי על G – $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$.

נתבונן בסידור של הכיתה כך שתלמיד v_i יושב בשורה i.

יהיו x,y תלמידים כך ש-x רוצה לזרוק מטוס על y.

אזי מהגדרת G קיימת קשת $(x,y)\in E$ ולכן מהגדרת מיון טופולוגי, x מופיע לפני y במיון, ולכן x יושב לפני y בכיתה, כנדרש.

- נניח ולא קיים מיון טופולוגי – אזי קיים מעגל $C=(v_1,\dots,v_k,v_{k+1}=v_1)$ ב-G.

נניח בשלילה שקיים סידור חוקי של תלמידי הכיתה; נקרא לו P.

לכל $1\le i\le k$ קיימת קשת (v_i,v_{i+1}), כלומר v_i רוצה לזרוק מטוס על v_{i+1}.

לכן מחוקיות p, v_i יושב לפני v_{i+1}. בפרט נקבל כי v_1 יושב לפני v_k.

בנוסף קיימת קשת (v_k,v_1) ולכן v_k צריך לשבת לפני v_1 ב-P, בסתירה.

[[אינטואיטיבית:

v_1 רוצה לזרוק מטוס על v_2, לכן v_1 צריך לשבת לפני v_2.

v_2 רוצה לזרוק מטוס על v_3, לכן v_2 צריך לשבת לפני v_3.

.

.

.

v_{k-1} רוצה לזרוק מטוס על v_k, לכן v_{k-1} צריך לשבת לפני v_k.

v_k רוצה לזרוק מטוס על v_1, לכן v_k צריך לשבת לפני v_1.

אז v_1 צריך לשבת לפני v_k וגם v_k צריך לשבת לפני v_1, וזו סתירה.]]

פתרון בעיית אופטימיזציה

[אם יש לנו סדרה של חמישה תלמידים שנמצאים במסלול, (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5), אז אנחנו חייבים לשים את כולם בשורות שונות. נרצה לסדר איכשהו במקביל מסלולים שונים.

הרעיון של מה שנעשה:
נבצע מיון טופולוגי, ונגדיר בהתחלה שכל התלמידים יושבים בשורה מס' 1.
אז נעבור על הקדקודים לפי המיון, משמאל לימין, ועבור כל קדקוד עליו אנו עוברים נבדוק את כל השכנים. אם נמצא שכן שמס' השורה שלו $\geq$ למס' השורה שלנו, נשנה את מספר השורה שלו להיות המס' שלנו + 1. כך נוכל לדעת בוודאות שכל מי שניתן להגיע אליו במסלול כלשהו נמצא בשורה אחורית יותר.]

<u>אלגוריתם:</u>

- נריץ אלגוריתם למציאת מיון טופולוגי על G.

- [[אם לא קיים, נחזיר שאין פתרון.]]
- במידה וקיים מיון, נבצע:
  - נאתחל $line[v] \leftarrow 1$ לכל $v \in V$.
  - נעבור על כל הקדקודים לפי סדר המיון, ולכל $v \in V$:
    - לכל קשת (v,u) נעדכן:

$$line[u] \leftarrow \max\{line[u], line[v]+1\}$$

  - סיום: נשים כל תלמיד x בשורה $line[x]$.

הוכחת נכונות:

- אבחנה 1: כאשר מגיעים באלגוריתם לקדקוד v, ערך $line[v]$ לא ישתנה יותר.

  זאת משום שערך זה יכול להשתנות רק בעקבות קשת נכנסת (u,v), ואין כאלו מקדקודים שמופיעים לאחר v במיון.
- אבחנה 2: $line[v]$ יכול רק לגדול במהלך האלגוריתם.
- טענה עיקרית: הסידור המוחזר ע"י האלגוריתם הוא סידור חוקי המשתמש במספר מינימלי של שורות.
- טענת עזר: לכל תלמיד v ולכל פתרון חוקי P המושיב את v בשורה l מתקיים:

$$line[v] \le l$$

הוכחת חוקיות:

יהיו x,y תלמידים כך ש-x רוצה לזרוק מטוס על y.

לכן קיימת קשת $(x,y) \in E$, ולכן x מופיע לפני y במיון הטופולוגי.

נתבונן ברגע בו נבחן הקדקוד x.

מאבחנה 1, $line[x]$ לא משתנה מנקודה זו.

באיטרציה זו נבדקת הקשת (x,y) ולכן $line[y]$ יתעדכן **ללפחות** $line[x]+1$.

מאבחנה 2, $line[y]$ יכול רק לגדול, לכן בהכרח בסיום האלגוריתם מתקיים:

$$line[x] < line[y]$$

כלומר x יושב לפני y, כמו שרצינו.

הוכחת אופטימליות:

נניח והאלגוריתם שלנו משתמש ב-L שורות.

יהי v תלמיד כך ש-$line[v] = L$.

יהי P פתרון חוקי כלשהו כך שתלמיד v יושב בשורה l.

מטענת העזר מתקיים:

$$L \le line[v] \le l$$

כלומר P משתמש לפחות ב- L שורות.
לכן הסידור שלנו הוא אופטימלי.

<u>הוכחת טענת העזר</u>:
באינדוקציה שלמה על הקדקודים לפי סדר המיון.

- <u>בסיס</u>: v_1 לא מתעדכן במהלך הריצה, לכן $line\left[v_1\right]=1$ בסיום, וכל סידור חוקי מושיב את v_1 בשורה $1\le$.

- <u>צעד</u>: נניח נכונות לכל הקדקודים לפני v_k במיון, ונוכיח עבור v_k.

  - <u>מקרה I</u>: אין אף קשת שנכנסת ל- v_k.
    במקרה זה $line\left[v_k\right]$ מאותחל להיות 1, והוא לא ישתנה במהלך הריצה.
    ואכן כל סידור חוקי יושיב את v_k בשורה $1\le$.
  - <u>מקרה II</u>: קיימת קשת נכנסת ל- v_k.
    יהי u' קדקוד כך ש- $\left(u',v_k\right)$ וכן u' בעל ערך $line[\cdot]$ מקסימלי מבין כל הקדקודים מהם יש קשת הנכנסת ל- v_k.
    $line\left[v_k\right]$ היא (ה- $line$ של הקדקוד המקסימלי עם קשת נכנסת ל- v_k) + 1, לכן יתקיים:

$$\boxed{(1)}\ \boxed{line\left[v_k\right]=line\left[u'\right]+1}$$

יהי P פתרון חוקי המושיב את v_k בשורה l ואת u' בשורה l'.
$\left(u',v_k\right)\in E$, לכן מחוקיות P: $l'<l \Leftarrow$ $\boxed{k'+1\le l}\ \boxed{(2)}$
$\left(u',v_k\right)\in E$, לכן u' מופיע לפני v_k במיון.
לכן מהנחת האינדוקציה, $\boxed{line\left[u'\right]\le l'}\ \boxed{(3)}$.

אזי:

$$line\left[v_k\right]\overset{(1)}{=}line\left[u'\right]+1\overset{(3)}{\le} l'+1\overset{(2)}{\le} l$$

רכיבים קשירים היטב

נתון $G=(V,E)$ גרף מכוון.

מגדירים יחס R על קדקודי הגרף:

$(x,y)\in R$ אם קיים מסלול מ- x ל- y וקיים מסלול מ- y ל- x ב- G

יחס זה הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי – כלומר זהו יחס שקילות.

היחס מחלק את קדקודי G למחלקות שקילות הנקראות רכיבים קשירים היטב של G.

בין כל שני קדקודים באותו רכיב קשירות קיים מסלול (בשני הכיוונים), ועבור קדקוד ברכיב אחר, לא קיים מסלול לפחות בכיוון אחד.

גרף הרכיבים הקשירים היטב - G^{SCC}

קדקודי G^{SCC} הם הרכיבים הקשירים היטב של G.

קיימת קשת בין רכיבים X וְ- Y ב- G^{SCC} אם קיימים $x\in X$ וְ- $y\in Y$ כך ש- $(x,y)\in E$ [[E של G הרגיל]].

באופן כללי, G^{SCC} הוא גרף מכוון וחסר מעגלים, אך לא בהכרח עץ [[כלומר יכול להיות מעגל לא מכוון (למשל "יהלום" מקשתות בכיוון אחד)]].

טענה 1 [קיום מסלול בין קדקודים שבתוך הרכיבים]

קיים ב- G^{SCC} מסלול מ- X ל- Y אם"ם קיים ב- G מסלול מכל $x\in X$ לכל $y\in Y$.

[ציור הסברי / הסבר ציורי]

טענה 2 [גרק"ה הוא גמ"ל]

G^{SCC} הוא חסר מעגלים [[= גרף מכוון ללא מעגלים = DAG = Directed Acyclic Graph]].

[[זאת כי אם נניח בשלילה שיש מעגל, אז מכל קדקוד ברכיב אחד ניתן להגיע לכל קדקוד ברכיב אחר ולהיפך, ולכן הם צריכים להיות אותו רכיב.]]

בעיה (2000שנת , מועד א')

נתון $G=(V,E)$ גרף מכוון, ולכל קדקוד מותאם מספר $rating(u)$.

נגדיר פונקציה:

$$best(u)=\max\left\{rating(v)\middle|v\in V\wedge\exists p:u\rightsquigarrow v\right\}$$

רוצים לחשב את $best(u)$ לכל קדקוד בזמן ליניארי.

סעיף א' [הגרף חסר מעגלים]
G חסר מעגלים.

פתרון:
"כש- G חסר מעגלים, בד"כ התשובה כוללת בתוכה מיון טופולוגי.
אני ממליץ במקרה כזה לצייר דוגמה של מיון טופולוגי עם ערכים לדוגמה ולנסות לבצע את המבוקש."

- מתרגל אנונימי שהעביר את השיעור הנוכחי

פתרון:

רעיון: נמיין את G מיון טופולוגי, נעבור על הקדקודים בסדר הפוך [[מימין לשמאל]] ונעדכן את ערכי $best$ [[לפי ה- $\max$ של כל ה- $best$ של השכנים (שנמצאים כולם מימין) של הקדקוד הנוכחי, ושל ה- $rating$ של הקדקוד עצמו]].

אלגוריתם:

1. מיין את G מיון טופולוגי.
2. עדכן $best(u) \leftarrow rating(u)$ לכל $u \in V$.
3. עבור על הקדקודים בסדר הפוך למיון, ולכל קדקוד u בצע:
   3.1. לכל קשת $(u,v) \in E$ בצע:
      3.1.1. אם $best(u) < best(v)$ עדכן $best(u) \leftarrow best(v)$

הסבר על הנכונות:
כאשר נגיע בצעד 3 לקדקוד u, כל הקדקודים אחריו כבר עודכנו נכון (מוכיחים באינדוקציה).
לכן u יבחר את ה- $best$ מבין כל אלו המחובר אליהם בקשת, כולל ה- $rating$ של עצמו.
מכך שכל המסלולים היוצאים מ- u ממשיכים ימינה במיון נובעת נכונות הבחירה.

זמן ריצה:

1. $O(|V|+|E|)$
2. $O(|V|)$
3. עוברים על כל קדקוד פעם אחת ועל כל הקשתות היוצאות ממנו פעם אחת – בזמן $O(|V|+|E|)$.

סה"כ: $O(|V|+|E|)$.

סעיף ב' [הגרף לאו דווקא חסר מעגלים]
G כללי [[לאו דווקא חסר מעגלים]].

רעיון: נבנה את גרף הרכיבים הקשירים היטב של G [[וניתן לכל רכיב $rating$ ששווה למקסימום בין כל ערכי ה- $rating$ באותו רכיב]] ונריץ את האלגוריתם מהסעיף הקודם על G^{SCC}.

<u>אלגוריתם:</u>

1. בנה את G^{SCC}
2. לכל רכיב קשיר C עדכן:

$$rating(C) = \max\{rating(x) | x \in C\}$$

3. הרץ את האלגוריתם מסעיף א' על G^{SCC}
4. לכל רכיב קשיר C ולכל $x \in C$ עדכן:

$$best(x) \leftarrow best(C)$$

<u>הסבר על הנכונות:</u>

נשים לב כי עבור שני קדקודים x ו- y באותו רכיב קשירות, קבוצת הקדקודים אליהם ניתן להגיע מ- x היא אותה קבוצת קדקודים אליהם ניתן להגיע מ- y.

לכן מההגדרה יתקיים $best(x) = best(y)$.

האלגוריתם שלנו מוצא את $best$ של רכיב הקשירות כולו (זה נובע מהאתחול של $rating$ להיות המקסימלי של קדקוד בתוך רכיב הקשירות), ולכן ערך זה הוא ה- $best$ של כל אחד מקדקודי הרכיב.

[אם אתם רואים שאלה עם שני סעיפים, אחד על גרף ללא מעגלים והשני על גרף כללי, יש סיכוי טוב שמכוונים לכך שבסעיף הכללי תצטרכו ליצור את G^{SCC} ולהפעיל את הסעיף הספציפי יותר עליו.]

<u>זמן ריצה:</u>

1. $O(|V|+|E|)$
2. $O(|V|)$
3. $O(|V|+|E|)$ לינארי בגודל G^{SCC} – אך גודל זה חסום ע"י הגרף המקורי
4. $O(|V|)$

חשוב מאוד לרשום את זה!

סה"כ זמן ריצה: $O(|V|+|E|)$