עצים פורשים מינימליים

בכל הדיון שלנו היום נדבר על גרפים **לא מכוונים**.

הגדרות [מעגל (פשוט) בגרף לא מכוון, גרף חסר-מעגלים, עץ פורש]

- מעגל בגרף זו סדרת קדקודים $(v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ כך שכל (v_i, v_{i+1}) צלע.
- מעגל פשוט הוא מעגל בו לא חוזרים על אותה צלע פעמיים [[או יותר]].
- גרף נקרא חסר-מעגלים אם אין בו מעגל פשוט.
- יהא $G=(V,E)$ גרף. תת-גרף $T=(V,E_T)$ של G נקרא עץ פורש אם T קשיר וחסר-מעגלים.

משפט 1 [תנאים שקולים לעץ]

יהא $T=(V,E)$ גרף.

אזי התנאים הבאים שקולים:

1. T קשיר וחסר-מעגלים.
2. T קשיר ו-$|E|=|V|-1$.
3. T חסר-מעגלים ו-$|E|=|V|-1$.

משפט 2 [סגירת מעגל, החלפת צלע בעץ פורש]

יהא $G=(V,E)$ גרף, $T=(V,E_T)$ עץ פורש ו-$e \in E \setminus E_T$.

אז ב-$(V, E_T \cup \{e\})$ יש מעגל C, ולכל $e' \in C$, $T' = (V, (E_T \cup \{e\}) \setminus \{e'\})$ הינו עץ פורש.

הערה [דגש בעקבות מועד ב' של שנה שעברה]

הצלע שמורידים **חייבת להיות מתוך המעגל** C.

עץ פורש מינימלי

נניח שיש לנו את הגרף הבא:

[שרטוט]

יהא $G=(V,E)$ גרף ותהי $w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית "משקל".

בהינתן עץ פורש $T=(V,E_T)$ נגדיר את המשקל של T להיות:

$$w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$$

T נקרא MST (Minimum Spanning Tree, עץ פורש מינימלי) אם הוא עץ פורש במשקל מינימלי [יכולים להיות מספר עצים באותו משקל מינימלי, אבל בהכרח קיים עץ פורש מינימלי, כי תמיד יש עץ פורש לגרף קשיר וקבוצת כל העצים הפורשים היא סופית ולכן קבוצת משקלם כוללת מינימום].

בעיה 1 [הגדלת המשקלים בקבוע]

יהא $G=(V,E)$ גרף עם פונקציית משקל w ו- $T=(V,E_T)$ MST.

נגדיר $w':E\to\mathbb{R}$ ע"י $w'(e)=w(e)+c$ (c קבוע כלשהו).

הוכיחו / הפריכו: T הוא MST של G גם ביחס ל- w'.

<u>הערה</u>: אם יש בין שני קדקודים מסוימים מסלול זול ביותר, לאחר הוספת c למשקל הקשתות, הוא לאו דווקא נשאר מסלול זול ביותר. לדוגמה:

[שרטוט]

ואם נוסיף 2 למשקלי הקשתות:

[שרטוט]

עם זאת, המשפט כן נכון, כי מספר הצלעות בכל עץ פורש הוא $|V|-1$, לכן אם מגדילים את משקלי כל הקשתות ב- c, משקל **כל** עץ פורש גדל ב- $(|V|-1)\cdot c$.

<u>הוכחה</u>:

ניקח $T'=(V,E_T)$ עץ פורש כלשהו [לאו דווקא מינימלי] ונראה ש- $w'(T)\le w'(T')$.

נשים לב שלכל עץ פורש $H=(V,E_H)$ מתקיים:

$$w'(H)=\sum_{e\in E_H}w'(e)=\sum_{e\in E_H}(w(e)+c)=(|V|-1)\cdot c+w(H)$$

לכן:

$$w'(T)=(|V|-1)\cdot c+w(T)\overset{T\text{ is an MST}}{\le}(|V|-1)\cdot c+w(T')=w'(T')$$

בעיה 2

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר [עד עכשיו לא ציינו שהגרפים קשירים כי היה נתון שיש עץ פורש, ואז בהכרח הגרף קשיר] ופונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$.

מצאו עץ פורש מקסימלי [[כלומר עץ פורש שמשקלו מקסימלי]].

<u>פתרון</u>: עם רדוקציה לבעיית MST.

- <u>תרגום הקלט</u>: נבנה $G=(V,E)$ [זה אותו הגרף] ופונקציית משקל $w':E\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$w'(e)=-w(e)$$

- (קופסה שחורה עבור MST)
- <u>תרגום הפלט</u>: נחזיר מה שהחזירה הקופסה השחורה

<u>הוכחה</u>:

- <u>טענה ראשית</u>: האלגוריתם מחזיר עץ פורש מקסימלי עבור $w, G=(V,E)$.
- <u>טענת עזר</u>: יהיו $T_1=(V,E_1)$ וְ- $T_2=(V,E_2)$ עצים פורשים כלשהם. אזי $w(T_1)\ge w(T_2) \Leftrightarrow w'(T_1)\le w'(T_2)$.

<u>הוכחת הטענה הראשית</u>:

יהא T' עץ פורש כלשהו – אזי $w'(T)\le w'(T')$.

אז לפי טענת העזר, $w(T)\ge w(T')$ ולכן T עץ פורש מקסימלי עבור w.

<u>הוכחת טענת העזר</u>:

עבור עץ פורש $T=(V,E_T)$ מתקיים:

$$w'(T)=\sum_{e\in E_T} w'(e)=\sum_{e\in E_T} -w(e)=-\sum_{e\in E_T} w(e)=-w(T)$$

לכן עבור עצים פורשים T_1,T_2 מתקיים:

$$\begin{gathered} w'(T_1)\le w'(T_2) \\ \Updownarrow \\ -w'(T_1)\ge -w'(T_2) \\ \Updownarrow \\ w(T_1)\ge w(T_2) \end{gathered}$$

בעיה 3 [MST הכולל את e]

יהא $G=(V,E)$, w פונקציית משקל וְ- $e\in E$.

T הוא MST_e אם:

1. e צלע ב- T.

2. T עץ פורש במשקל מינימלי מבין אלו שמקיימים את 1.

מצאו MST_e של e.

רעיונות לפתרון עם רדוקציה:

1. נהפוך את e להיות בעלת המשקל הקטן ביותר בגרף [פשוט מוצאים מה המשקל המינימלי m ונותנים ל- e את המשקל $m-1$] ואז נריץ אלגוריתם למציאת MST.
2. אם $e=(u,v)$, נאחד את הקדקודים u וְ- v לאחד, עם כל הקשתות שחלות בכל אחד הקדקודים u וְ- v [אם יש ל- u ול- v שכן משותף, לוקחים את הקשת בעלת המשקל הקטן יותר], מוצאים MST ומפצלים בחזרה את הקדקוד המאוחד [תוך ששמים לב לזכור מאיזה קדקוד הגיעה כל קשת של הקדקוד המאוחד].

אנו נפתור דווקא בלי רדוקציה, בעזרת גרסה מותאמת האלגוריתם של קרוסקל:

אלגוריתם

(איטרציה 1) 1. $E_T \leftarrow \{e\}$, $E \leftarrow E \setminus \{e\}$

(איטרציות 2 (עד $|E|$))
2. כל עוד $E \neq \varnothing$:
 2.1. $e \to$ צלע מינימלית ב- E
 2.2. אם e לא סוגרת מעגל עם E_T , $E_T \leftarrow E_T \cup \{e\}$
 2.3. $E \leftarrow E \setminus \{e\}$

3. החזר $T=(V,E_T)$

הוכחת נכונות

- <u>טענה ראשית</u>: האלגוריתם מחזיר MST_e.
- <u>טענת עזר</u>: נסמן ב- E_i את אוסף הצלעות שנבחרו לאחר i איטרציות.

 אז יש MST_e כלשהו $T=(V,E_T)$ כך ש- $E_i \subseteq E_T$.

הערות

1. מדוע אין בגרף המוחזר מעגל?
 זה נובע ישירות משורה 2.2 באלגוריתם.

2. מדוע מוחזר גרף קשיר?
 אם נניח בשלילה שב- T המוחזר יש יותר מרכיב קשירות אחד, אזי ישנה לפחות צלע אחת ב- G שחוצה רכיבי קשירות ב- T, שכן G קשיר. אם כך, צלע זו לא יכולה לסגור מעגל ב- T.
 [ציור]
 לכן האלגוריתם היה מוסיף אותה לעץ בשלב כלשהו, שכן הוא עובר על **כל** הצלעות ב- G.

הוכחת הטענה הראשית

T עץ פורש (כמו בהרצאה).

לפי טענת העזר יש MST_e כלשהו $T'=\left(V,E_{T'}\right)$ כך ש-$E_T \subseteq E_{T'}$.
אבל:

$$\left|E_T\right|=\left|E_{T'}\right|=\left|V\right|-1$$

לכן $E_T=E_{T'}$ ולכן $T=T'$ ו-T הינו MST_e, כנדרש.

הוכחה לטענת העזר

באינדוקציה על i.

- <u>בסיס</u>: $i=1$
  $E_1=\{e\}$ וברור שהטענה נכונה.

- <u>צעד</u>: נניח ש-$E_i \subseteq E_T$ כך ש-T הוא MST_e, ונוכיח עבור E_{i+1}.
  נניח שבאיטרציה ה-$i+1$ נבחרת בשורה 2.1 הצלע e'.
  נסמן ב-A את קבוצת הצלעות E לאחר האיטרציה ה-i.

  נחלק למקרים:
  - <u>מקרה א'</u>: לא הוספנו את e' ל-E_T.
    אז $E_{i+1}=E_i \subseteq E_T$.

  - <u>מקרה ב'</u>: הוספנו את e' וכן $e' \in E_T$.
    אז ברור כי $E_{i+1} \subseteq E_T$.

  - <u>מקרה ג'</u>: הוספנו את e' אבל $e' \notin E_T$.
    נוסיף את e' ל-E_T – אז ב-$E_T \cup \{e'\}$ יש מעגל C [לפי משפט 2].
    $e' \in E_{i+1}$ ו-C מעגל.
    E_{i+1} לא מכיל מעגלים, לכן יש צלע $\hat{e}$ ב-C שאינה ב-E_{i+1} [[כלומר קיימת $\hat{e} \in C \setminus E_{i+1}$]].
    [ציור]
    נסתכל על $T'=\left(V,\left(E_T \cup \{e'\}\right)\setminus\{\hat{e}\}\right)$.
    לפי משפט 2, T' עץ פורש ו-$E_{i+1} \subseteq E_{T'}$.
    צ"ל ש-T' הוא MST_e.
    [לשם כך יש להראות ש-$e \in E_{T'}$ וכן שמשקלו הוא מינימלי מבין כל העצים המכילים את e.]
    $E_{i+1} \subseteq E_{T'}$ ∋ e, לכן $e \in E_{T'}$.

    לאחר האיטרציה ה-i, $\hat{e} \in A$.

הסבר:
נניח בשלילה שבחרנו את $\hat{e}$ באיטרציה קודמת, $j+1<i$.

$\hat{e}$ לא סוגרת מעגל עם הצלעות ב- $E_T \setminus \{\hat{e}\}$, אבל $E_j \subseteq E_i \subseteq E_T \setminus \{\hat{e}\}$.

אז $\hat{e}$ לא סוגרת מעגל עם E_j.

אז הוספנו אותה (לפי שורה 2.2) באיטרציה ה- $j+1 \Leftarrow$ $\hat{e} \in E_i$, בסתירה.

[[ובמילים אחרות:
אילו צלעות **לא** נמצאות ב- A?
אלה כל הצלעות שעברנו עליהן – ואז או שהן סגרו מעגל ולכן לא הוספנו אותן, או שהן לא סגרו מעגל ואז כן הוספנו אותן.
לכן, כיוון ש- $\hat{e}$ לא סוגרת מעגל עם הצלעות של E_i (זאת משום שגם $\hat{e}$ וגם כל הצלעות של E_i נמצאות ב- E_T (קבוצת הצלעות של T), וְ- T הוא עץ ולכן חסר מעגלים), וכיוון ש- $\hat{e}$ לא נמצאת ב- E_i – היא חייבת עדיין להיות ב- A.]]

מכיוון שבחרנו באיטרציה ה- $i+1$ את e', וְ- $\hat{e} \in A$, נקבל משורה 2.1 כי $w(e') \le w(\hat{e})$.

לכן $w(T') \le w(T)$.

אבל T הוא MST_e, ולכן יש שוויון.

מסקנה: T' הוא MST_e וכן $E_{i+1} \subseteq E_{T'}$.

בעיה 5 [טיעון החלפה שגוי לפרים]

- אינווריאנטה: $E_i \subseteq E_T$ וְ- T הוא MST [נשארה זהה].
- טיעון החלפה: נניח שבחרנו צלע e.
  - מקרה א': $e \in E_T$, אז $E_{i+1} \subseteq E_T$.
  - מקרה ב': $e \notin E_T$.

e מחברת בין הקדקודים שבחרנו, S, לבין קדקוד ב- $V \setminus S$.
יש צלע ב- E_T שמחברת את S עם $V \setminus S$; נסמנה e'.
לפי הבחירה החמדנית, $w(e) \le w(e')$.
לכן $T' = (V, (E_T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ הוא MST וְ- $E_{i+1} \subseteq E_{T'}$.

[ציור]

דוגמה נגדית:

[ציור]

מה הסיבה לבעיה?
שהצלע שהורדנו לאו דווקא נמצאת על המעגל שסגרה הוספת הצלע e.
בטיעון ההחלפה המקורי (הנכון), בוחרים את e' להיות צלע ב- E_T **שנמצאת על המעגל שנסגר**.