תכנון אלגוריתמים 2016 עבודה 1
רדוקציות ואלגוריתמים חמדניים

הנחיות חשובות:

1. כאשר אתם נדרשים לתאר אלגוריתם, אלא אם צוין אחרת, תשובתכם צריכה לכלול:
   - תיאור מדויק של האלגוריתם.
   - הוכחת נכונות מלאה.
   - מימוש וניתוח זמן ריצה.
2. טענה לא מנומנקת לא תתקבל.

תאריך הגשה: 30.3, 11:59.
יש להגיש את העבודה לתאים 95,96 בקומת הכניסה בבניין 37. כמו כן, יש להגיש סריקה של העבודה למערכת ההגשה.

הגדרה: רדוקציה מבעיה א' לבעיה ב' תקרא רדוקציה בסיסית, אם היא משתמשת ב"קופסה השחורה" פעם אחת בלבד. על כן, במקרה זה תיאור אלגוריתם מבוסס רדוקציה בסיסית הוא תיאור של ממיר קלט וממיר פלט בלבד.

שאלה 1

נזכר כי בגרף $G=(V,E)$, עבור שני קודקודים u,v, $d(u,v)$ הוא אורך מסלול קצר ביותר מ u ל v. אם אין מסלול מ u ל v, $d(u,v)=\infty$.
נתונות שתי בעיות.

בעיה א' מופע: גרף **מכוון** $G=(V,E)$ ורשימת קודקודים $s_1,\ldots,s_k,t\in V$.
יש למצוא: אורך מסלול קצר ביותר המתחיל באחד מן הקודקודים $s_1,\ldots,s_k$ ומסתיים ב t.
כלומר, יש למצוא $\min\{d(s_1,t),d(s_2,t),\ldots,d(s_k,t)\}$.

בעיה ב' מופע: גרף **מכוון** $G=(V,E)$ וקודקוד מקור s.
יש למצוא: עבור כל קודקוד $v\in V$, $d(s,v)$.

ידוע שאת בעיה ב' ניתן לפתור בזמן $O(|V|+|E|)$ (ע"י BFS).
תכננו אלגוריתם מבוסס רדוקציה בסיסית מבעיה א' לבעיה ב' שבה ממיר הקלט משאיר את כל הקודקודים וכל הצלעות של הגרף המקורי, אך מוסיף עד $k+1$ קודקודים וצלעות. זמן ריצה נדרש: $O(|V|+|E|)$. תארו את האלגוריתם, הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן הריצה.
שימו לב: מספר הקודקודים k הוא פרמטר ולא קבוע.
הערה לסקרנותכם. קיימת רדוקציה אחרת לבעיה ב' בה ממיר הקלט מחזיר גרף עם אותו מספר צלעות ואותו מספר קודקודים כמו בגרף המקורי.

שאלה 2

תהא P מטריצה מסדר $n \times n$. שידוך ל P הוא רשימה של n זוגות בטווח $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$:

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$$

כך שכל מספר שורה מופיע ברשימה בדיוק פעם אחת וכל מספר עמודה מופיע ברשימה בדיוק פעם אחת.
כלומר, לכל $1 \leq k \leq n$, קיימים r_1, r_2, כך ש (k, r_1) ו (r_2, k) מופיעים ברשימת זוגות האינדקסים.
בהינתן שידוך $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$, ערך השידוך הוא המספר הקטן ביותר במטריצה $P_{i,j}$ כך שזוג האינדקסים (i, j) מופיע בשידוך. כלומר, ערך השידוך הוא: $\min\{P_{i_1,j_1}, P_{i_2,j_2}, \ldots, P_{i_n,j_n}\}$.
לדוגמה, נסתכל על המטריצה $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$. להלן שידוך שערכו -1 המסומן במטריצה בכחול:

$(1,1), (2,3), (3,2)$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

להלן שידוך שערכו 2 המסומן במטריצה באדום, זהו שידוך בעל ערך מקסימלי:

$(1,3), (2,1), (3,2)$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

נתונות 3 בעיות:

בעיה $A1$. מופע: מטריצה P מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{Z}$, ומספר $p_0 \in \mathbb{Z}$.
יש למצוא: שידוך $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$ כך שלכל זוג (i_r, j_r) בשידוך מתקיים: $p_0 \leq P_{i_r,j_r}$, אם קיים, או להודיע כי אין שידוך העונה על התנאי. כלומר, יש למצוא שידוך שערכו לפחות p_0, או להודיע שאין שידוך כזה.

בעיה B. מופע: מטריצה P מסדר $n \times n$ מעל $\{0, 1\}$.
יש למצוא: שידוך $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$ בעל ערך 1, או להודיע שאין שידוך כזה. כלומר, יש למצוא שידוך $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$ כך ש $P_{i_r,j_r} = 1$, לכל $1 \leq r \leq n$, ואם אין שידוך העונה על התנאי יש להודיע על כך.

ידוע שיש אלגוריתם לבעיה B הרץ בזמן $O(n^{2.5})$.

א. הציגו אלגוריתם מבוסס רדוקציה בסיסית מבעיה $A1$ לבעיה B. אין צורך בהוכחת נכונות, אך עליכם לספק ניתוח זמן ריצה. זמן ריצה נדרש: $O(n^{2.5})$.

ב. נגדיר בעיה נוספת.

בעיה $A2$. מופע: מטריצה P מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{Z}$.
יש למצוא: שידוך $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)$ בעל ערך מקסימלי.

הציגו אלגוריתם מבוסס רדוקציה מבעיה $A2$ לבעיה B. השתמשו ברדוקציה שאינה בסיסית. זמן ריצה נדרש: $O(n^{2.5} \log n)$. ספקו הסבר נכונות, אין צורך בהוכחה פורמלית ומפורטת. בהסבר הנכונות, הנכם רשאים להניח שהאלגוריתם מסעיף א' נכון ללא הוכחה.

שאלה 3

בהינתן בעיה A, לעיתים נגדיר בעיה דומה: A^+ שבה המופע כולל רק ערכים אי־שליליים. נשתמש בהגדרה זו עבור הבעיה $A2$ אשר הוגדרה בשאלה הקודמת, ונקבל בעיה חדשה $A2^+$ הזהה ל $A2$ פרט לכך שהמטריצה P מכילה כעת ערכים אי־שליליים בלבד.

א. חוקר הציע את הרדוקציה הבאה מ $A2$ ל $A2^+$:

<u>ממיר הקלט.</u> יהא c איבר שלילי במטריצה P בעל ערך מוחלט גדול ביותר, ואם אין איברים שליליים ב P, $c = 0$. נבנה מטריצה חדשה: P^+ על ידי: $P^+_{i,j} = P_{i,j} + |c| \geq 0$.

<u>ממיר הפלט.</u> נחזיר את השידוך שהקופסה השחורה מצאה עבור P^+.

הוכיחו את נכונות הרדוקציה.

ב. יהא $G = (V, E)$ גרף מכוון עם פונקציית משקל על הצלעות $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$. בהינתן מסלול P בגרף, נגדיר את משקל המסלול להיות סכום משקלי הצלעות במסלול. כלומר, אם $P = (v_0, \ldots, v_k)$ נגדיר $w(P) = \Sigma_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$. נתונות שתי בעיות:

SP_{ab}. בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל על הצלעות $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ וקודקודים a, b, יש למצוא מסלול פשוט מ a ל b, P כך ש $w(P)$ מינימלי.

SP^+_{ab}. בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל אי שלילית על הצלעות $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ וקודקודים a, b, יש למצוא מסלול פשוט מ a ל b בעל משקל מינימלי.

חוקר הציע את הרדוקציה הבאה מ SP_{ab} ל SP^+_{ab}:

<u>ממיר הקלט.</u> יהא c משקל שלילי של צלע בעל ערך מוחלט גדול ביותר, ואם אין משקלים שליליים, $c = 0$. נבנה פונקציית משקל חדשה w' על ידי: $w'(e) = w(e) + |c| \geq 0$.

<u>ממיר הפלט.</u> נחזיר מסלול בעל משקל מינימלי שהקופסה השחורה מצאה עבור הקלט: G, w', a, b.

הראו שהרדוקציה שגויה: מצאו דוגמה נגדית שבה יש בגרף לכל היותר חמישה קודקודים. <u>שימו לב:</u> קיימת דוגמה נגדית עם בדיוק שלושה קודקודים.

שאלה 4

בשאלה זו נתרגל הוכחת נכונות של אלגוריתם חמדן לפי המסגרת (סכימה) המומלצת שנלמדה בהרצאות (טיעון החלפה), עבור בעיה פשוטה.

עוגיפלצת הרעב מעוניין להשביע את רעבונו על ידי אכילת עוגיות, אך הוא מעוניין לאכול עוגיות עם ערך קלורי נמוך ככל האפשר. לפני עוגיפלצת יש n עוגיות, $1, 2, \ldots, n$. לכל עוגיה i יש נפח v_i, וערך קלורי c_i. על מנת לשבוע, על עוגיפלצת לאכול עוגיות בנפח כולל של לפחות W_0. ידוע שהנפח הכולל של כל העוגיות הוא לפחות W_0.

נתבונן במקרה פרטי של הבעיה הנ"ל, בה לכל עוגיה i, $c_i = 100$. נתון האלגוריתם החמדני הבא:

1. $S \leftarrow \{1, \ldots, n\}$, $G \leftarrow \emptyset$, $T \leftarrow 0$.
2. כל עוד $T < W_0$ בצע {
   - 2.1. הוצא מ S עוגיה בעלת נפח מקסימלי מבין העוגיות ב S ← x
   - 2.2. $T \leftarrow T + c_x$, $G \leftarrow G \cup \{x\}$ }
3. החזר את G.

עליכם להוכיח את נכונות האלגוריתם על פי סכמת ההוכחה אשר נלמדה בהרצאות (טיעון החלפה) ולנתח זמן ריצה. מלאו את הסעיפים הנדרשים בדף התשובות:

1. נסחו טענה ראשית.
2. נסמן ב G_r את קבוצת העוגיות שנבחרו לאחר r איטרציות.
   <u>טענת נשמרת:</u> לאחר ביצוע r איטרציות, קיים פתרון אופטימלי O_r כך ש $G_r \subseteq O_r$.
   הוכיחו את הטענה הראשית על סמך הטענה הנשמרת:
   - הוכיחו כי הלולאה מסתיימת ולכן האלגוריתם עוצר.
   - הוכיחו כי הפתרון המוחזר על ידי האלגוריתם הוא חוקי, כלומר הנפח הכולל הוא לפחות W_0.
   - הוכיחו כי הקבוצה המוחזרת היא אופטימלית. מומלץ להשתמש בטענה הנשמרת.
3. הוכיחו את הטענה הנשמרת באינדוקציה על r:
   - <u>בסיס.</u> הוכיחו עבור $r = 0$.
   - <u>צעד.</u> נניח שהטענה נכונה עבור r והאיטרציה ה $r+1$ מתבצעת. תהא j העוגיה שנבחרה על ידי האלגוריתם באיטרציה ה $r+1$:

   מקרה א'. נניח כי $j \in O_r$. הוכיחו את קיום קבוצה O_{r+1}.
   מקרה ב'. נניח כי $j \notin O_r$. הוכיחו את קיום קבוצה O_{r+1}. השתמשו בטיעון החלפה.

בהצלחה !!!