זרימה

הגדרות

רשת זרימה היה רביעייה $N=((V,E),c,s,t)$ כך ש:

- G גרף מכוון
- $s\in V$ קדקוד מקור [[= לא נכנסות אליו קשתות]]
- $t\in V$ קדקוד בור [[= לא יוצאות ממנו קשתות]]
- $c:E\to\mathbb{R}$ פונקציית קיבול [[capacity]] המקיימת:
  - $c(e)\geq 0$ לכל $e\in E$
  - $c(u,v)=0$ לכל $(u,v)\notin E$ [לכן בעצם $c:V\times V\to\mathbb{R}$, אבל אנחנו לא מתמטיקאים כאן, ולא נקפיד על סימונים כ"כ פורמליים – כאשר ניתן לפונקציה c צלע e נתכוון לצורה הרגילה, וכאשר נכניס זוג (u,v) נתכוון בד"כ לזוג שלא נמצא ב- E].

[הפואנטה של רשת זרימה היא שאנו מוגבלים בכמה אנו יכולים לעבור מ- s ל- t ע"י צוואר הבקבוק בגרף (ראינו לגבי צוואר בקבוק בתרגול קודם).]

זרימה f היא פונקציה $f:V\times V\to\mathbb{R}$ המקיימת:

- <u>אילוצי קיבול</u>:
  לכל $u,v\in V$,

$$f(u,v)\leq c(u,v)$$

- <u>אנטי סימטריה</u>:

$$\forall u,v\in V \qquad f(v,u)=-f(u,v)$$

- <u>שימור זרימה</u>:
  לכל $u\in V\setminus\{s,t\}$ מתקיים:

$$\sum_{v\in V} f(u,v)=0$$

[הרעיון הוא שכל צומת שאינו s או t מוציא בדיוק כמה שנכנס אליו.
חשוב להפריד את s וְ- t, כי מ- s רק יוצאות קשתות ול- t רק נכנסות קשתות.
אם לא היינו מפרידים זאת, הזרימה החוקית היחידה הייתה זרימה של 0 בכל קשת.]

גודל זרימה היא אחד משני הדברים [[השווים]] הבאים:

- סך הזרימה היוצאת מ- s: $|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)$
- סך הזרימה הנכנסת ל- t: $|f|=\sum_{v\in V} f(v,t)$

קיבול מסלול הוא הקיבולת המינימלית של צלעות המסלול.

חתך ברשת זרימה הוא זוג (S,T) כך ש- $T=V\setminus S$, $s\in S$ ו- $t\in T$.

[ההגדרה זהה להגדרת חתך בגרף שלמדנו בעבר, פרט לכך שאנחנו מגבילים אותו כך ש- s ו- t נמצאים בחתכים שונים.]

[ציור]

משפטים

- Max flow = Min Cut [[חתך מינימלי = זרימה מקסימלית]]:
אם ניקח את סכום הקיבולות של כל הקשתות בכל אחד מהחתכים, אז הקיבול הקטן ביותר שיש לחתך (כלומר הקיבול של החתך עם הקיבול הקטן ביותר) שווה לזרימה המקסימלית שניתן להעביר ברשת הזרימה.
- בהינתן זרימה, ניתן לקבל את גודלה ע"י סך הזרימה היוצאת מ- s או ע"י סך הזרימה הנכנסת ל- t. איך עוד אפשר?
אם נסכום את הזרימה בכל הקשתות של חתך **כלשהו** שניקח, נקבל גם את גודל הזרימה.

בעיית השידוך המקסימלי

נתונה קבוצת בנים $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

וקבוצת בנות $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$,

ונתונות לנו התאמות אפשריות בין בנים ובנות – זו קבוצה $X\times Y\supseteq P$.

<u>הגדרה</u>: $Z\subseteq P$ הוא שידוך חוקי אם"ם לכל בן משודכת בת אחת לכל היותר.

<u>צריך למצוא</u>: שידוך מקסימלי בגודלו.

[תמונה של גרף דו"צ]

[הערה: אנו מצטערים, אנחנו לא תומכים בזוגות חד-מיניים או בפוליגמיה כאן.]]

<u>פתרון</u>:

האלגוריתם

[נבנה רשת זרימה בעזרת הגרף שמייצג את ההתאמות האפשריות:
נחבר קדקוד מקור לכל ה-x_i, קדקוד יעד מכל ה-y_i, ונהפוך את כל הקשתות מ-x_i ל-y_j להיות מכוונות מה-x ל-y. על כל הקשתות של s ו-t נשים קיבולת של 1, וננסה למצוא זרימה מקסימלית. לקשתות בין ה-x-ים ל-y-ים ניתן גם לתת קיבולת של 1, אך יהיה לנו יותר קל אם ניתן קיבולת אינסופית (נסביר למה בהמשך).]

- <u>ממיר קלט</u>:
נבנה רשת זרימה $N=((V,E),c,s,t)$.

$$E_1=\{(s,x)|x\in X\}$$
$$E_2=\{(x,y)|\langle x,y\rangle\in P\} \qquad [[E_2=P]]$$
$$E_3=\{(y,t)|y\in Y\}$$
$$c(u,v)=\begin{cases}1, & (u,v)=(s,x):x\in X\\ 1, & (u,v)=(y,t):y\in Y\\ \infty, & (u,v)=(x,y):\langle x,y\rangle\in P\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- <u>הפעלת קופסה שחורה</u>: מצא זרימה מקסימלית <u>**בשלמים**</u> על N.
[כלומר זרימה שבכל קשת יש ערך שלם, ע"מ למנוע שמקדקוד x_i תהיה זרימה למשל של $\frac{1}{2}$ לקדקוד אחד ועוד $\frac{1}{2}$ לקדקוד אחר.]

- <u>ממיר פלט</u>: פלוט את השידוך המושרה ע"י צלעות E_2 בהן הזרימה חיובית.

הוכחת נכונות

- <u>טענה ראשית</u>: השידוך המתקבל **חוקי** ו**מקסימלי**.

<u>הוכחה</u>:

- <u>חוקיות</u>:
לכל $x\in X$ מס' הצלעות מ-E_2 אשר יוצאות מ-x ובהן יש זרימה גדולה מ-0 – היא לכל היותר 1. נוכיח זאת:
יהי $x\in X$. ע"פ הבניה, צלע אחת בלבד נכנסת ל-x וקיבולה 1.
הזרימה חוקית ובשלמים, ולכן יוצאת מ-x זרימה של 1 בדיוק, ולכן רק צלע אחת היוצאת מ-x תקבל זרימה חיובית.

[ובאותו אופן עבור $y\in Y$.]

- מקסימליות:
  - טענת עזר 1: תהי Z הקבוצה המוחזרת ע"י האלגוריתם וְ- f הזרימה המוחזרת ע"י הקופסה השחורה. אזי $|f|=|Z|$.
  - טענת עזר 2: אם קיים שידוך בגודל k לבעיה אזי קיימת זרימה בגודל k עבור N.

נוכיח:
  - הוכחת טענה ראשית:
    יהי P פתרון מקסימלי כלשהו.
    ע"פ סעיף 2, קיימת זרימה f כך ש- $|f|=|P|$.
    ע"פ טענה 1, האלגוריתם מחזיר קבוצה כך ש- $|Z|=|f|$.
    $\Leftarrow$ הפתרון אופטימלי.

  - הוכחת טענת עזר 1:
    יהיו f,Z כמו בטענה – כבר הוכחנו כי Z חוקית.
    ע"פ הגדרה, $|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)$.
    כיוון ש- s מחובר רק לקדקודים ב- x, מתקיים:
    $$|f|=\sum_{x\in X} f(s,x)$$
    ע"פ שימור הזרימה [[ומכך שהזרימה היא בשלמים]], לכל $x\in X$ עבורו $f(s,x)=x$ קיים קדקוד $y\in Y$ כך ש- $f(x,y)=1$.
    מכך שע"פ הבניה לכל $y'\in Y$ מתקיים $c(y',t)=1$ [[ואין עוד קשתות היוצאות מ- y']] נובע שה- x המדובר הינו היחיד עבורו $f(x,y)=1$ [כלומר y יכול לקבל זרימה **רק** מאותו ה- x, ולא משום מקור אחר].

    מסקנה: גודל הזרימה **שווה** למס' הזוגות עבורם $f(x,y)=1$, ולכן $|Z|=|f|$.

  - הוכחת טענת עזר 2:
    בהינתן שידוך Z בגודל k נתאים לו זרימה f כך:
    - $f(s,x)=1$ אם x משודך וְ- $f(s,x)=0$ אחרת.
    - $f(y,t)=1$ אם y משודכת וְ- $f(y,t)=0$ אחרת.
    - $f(x,y)=1$ אם x וְ- y משודכים זה לזה, וְ- $f(x,y)=0$ אחרת.

    בנוסף, הזרימה בכיוונים ההופכיים לנ"ל שווה למינוס הזרימה [[בכיוון הרגיל]].
    כל שאר ערכי הפונקציה הם 0.

    נוכיח שהזרימה חוקית:
    - אילוצי קיבול: טריוויאלי – $f(u,v)\le 1$ לכל u,v וְ- $c(u,v)\ge 1$ לכל u,v [[כך ש- $(u,v)\in E_1\cup E_2\cup E_3$]].

- אנטי סימטריה: ישירות מהבניה.
- שימור זרימה:

עבור $x \in X$, הצלע היחידה הנכנסת ל- x היא (s,x), והצלעות היוצאות הן ב- E_2.

מתקיים:

- אם x לא משודך אזי $f(s,x)=0$.

  x לא משודך לכל y ולכן $f(x,y)=0$ לכל $y \in Y$. לכן סך הזרימה היוצאת גם 0.
- אם x משודך אזי $f(s,x)=1$.

  מכיוון שהשידוך חוקי, הוא משודך ל- y אחד בדיוק, עבורו $f(x,y)=1$. לכן סך הזרימה היוצאת מ- x הוא 1 בדיוק.

$\Leftarrow$ שימור זרימה מתקיים לכל $x \in X$.

בדומה עבור $y \in Y$.

[לגבי ה- ∞:
נשים לב שכל חתך שכולל אחת מהצלעות שהקיבולת שלהן היא ∞ מקבל מיד קיבולת אינסופית.
לכן חתך מינימלי יכול להתקבל רק מהצלעות המחוברות ל- s ו/או ל- t.
זה מקל על הקופסה השחורה [[למרות שאנחנו לא ממש אמורים לדאוג לגבי זה]] למצוא זרימה מקסימלית.]

בעיית מסלולים זרים

[תמוווווווונה. לא של פרה. סתם תמונה.]

בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וקדקודים $a,b \in V$:

א. פתרון חוקי הוא קבוצה של מסלולים זרים בצלעות בין a וְ- b.
ב. פתרון אופטימלי הוא פתרון חוקי בגודל מקסימלי.

פתרון:

האלגוריתם

נבצע רדוקציה לבעיית זרימה.

- ממיר קלט:

  נבנה:

$$N=\left(G'=\left(V',E'\right),c,s,t\right)$$
$$V'=V$$
$$E'=\left\{\left(u,v\right),\left(v,u\right)\middle|\left\{u,v\right\}\in E\right\}$$
$$c\left(u,v\right)=\begin{cases}1, & \left(u,v\right)\in E'\\0, & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$s=a$$
$$t=b$$

[[הפכנו את הגרף הלא מכוון לגרף מכוון]]

- <u>הפעלת הקופסה השחורה</u>:
  נמצא זרימה מקסימלית בשלמים f^* ב- N.

- <u>ממיר פלט</u>:
  נתבונן ב-"G המושרה ע"י הצלעות המכוונות ב- G' אשר הזרימה בהן לפי f^* היא 1.
  נבצע $\left|f^*\right|$ פעמים:
  - נמצא מסלול בין a ל- b ב-"G כך:
    - נבחר צלע היוצאת מ- a, $e=\left(a,v\right)$.
    - נבחר בצלע היוצאת מ- v ... [[וכן הלאה]] עד b [[פשוט בוחרים שכן אחר שכן אחר שכן עד שמגיעים ל- b]].
    - לאחר בחירת צלע, נסמן אותה ע"מ לא לבחור בה בשנית.
  - נוסיף את המסלול ל- P.

הוכחת נכונות

- אבחנה: לכל $v\in V\setminus\left\{s,t\right\}$ מתקיים $\deg\_\text{in}(v)=\deg\_\text{out}(v)$ ב-"G.
  אם $\left|F\right|>0$ אזי $\deg\_\text{out}(s)>0$.
- <u>טענה ראשית</u>: האלגוריתם עובד.
- <u>טענה 1</u>: עבור קבוצה P שנבנתה ע"י האלגוריתם מהזרימה f^* מתקיים $\left|P\right|=\left|f^*\right|$.
- <u>טענה 2</u>: לכל קבוצת מסלולים חוקית P קיימת זרימה f כך ש- $\left|P\right|=\left|f\right|$.

<u>הוכחות</u>:

- <u>טענה ראשית</u>:
  תהי P^* קבוצת מסלולים אופטימלית.
  ע"פ טענה 2 קיימת זרימה f כך ש- $\left|P^*\right|=\left|f\right|$.
  ע"פ טענה 1, $\left|f^*\right|=\left|P\right|$.

ממקסימליות f^* מתקיים $\left|f^*\right| \geq \left|f\right|$,

וממקסימליות P^* מתקיים $\left|P^*\right| \geq \left|P\right|$.

בסה"כ:

$$\left|P\right| = \left|f^*\right| \geq \left|f\right| = \left|P^*\right| \geq \left|P\right|$$
$$\Downarrow$$
$$\left|P\right| = \left|P^*\right|$$

- <u>טענה 1</u>:

  כל מסלול בין a ל-v נכנס לקדקוד ויוצא ממנו מספר זהה של פעמים (למעט a,b).

  נסמן ב-f את הזרימה המוגדרת ע"י G".

  בכל שלב של האלגוריתם נבחין שבתום כל איטרציה הערך $\left|f\right|$ יורד בנקודה אחת בלבד.

  לכן בתחילת כל איטרציה $\left|f\right| > 0$.

  נוכיח כי כל איטרציה מצליחה [באינדוקציה על רגל אחת].

  בכל שלב נסמן ב-v את הקדקוד האחרון במסלול שנבנה.

  - אם $v \notin \{a,b\}$ משמעות הדבר היא ש"נכנסנו" ל-v פעם אחת יותר מש"יצאנו" ממנו.
    לכן ע"פ שימור זרימה קיימת צלע יוצאת ולכן תהליך יצירת המסלול נמשך.
  - אם $v = a$ אזי המסלול נכנס ל-a מס' זהה של פעמים כפי שיצא ממנו.
    אך מכיוון ש-$\left|f\right| > 0$, קיימת לפחות צלע נוספת שיוצאת מ-a ב-G" ולכן התהליך נמשך.
  - בסה"כ האפשרות היחידה לקדקוד סיום היא b.

- <u>טענה 2</u>:

  תהי Z קבוצת הצלעות של מסלולים חוקיים.

  נגדיר זרימה ב-G' כך:

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} 1, & \left(x,y\right) \in Z \\ -1, & \left(y,x\right) \in Z \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

[לא הספקנו את השאר בשיעור]