אלגוריתם דיניץ

רשת שכבות

[להשלים שרטוטים]

באלגוריתם יש לולאה חיצונית ולולאה פנימית.
בתרגול זה אנו נקרא לאיטרציות של הלולאה החיצונית **שלב** או **פאזה**, ולאיטרציה בלולאה הפנימית **צעד**.

האלגוריתם

1. $f \leftarrow 0$
2. בנה את N_f
3. כל עוד יש מסלול מ- s ל- t ב- G_f:
   1. 3.1. בנה רשת שכבות
   2. 3.2. מצא זרימה חוסמת b
   3. 3.3. $f \leftarrow f + b$
   4. 3.4. בנה רשת שיורית

צעדים

שלב / פאזה

[תזכורת: זרימה חוסמת = זרימה שלא קיים עבורה מסלול שיפור **בגרף עצמו** (יכול להיות שקיים מסלול שיפור ברשת השיורית). זה שקול לכך שבכל מסלול מ- s ל- t ב- G קיימת קשת רוויה.]

<u>מציאת זרימה חוסמת</u>:

1. כל עוד דרגת הכניסה של $t > 0$:
   1. 1.1. התחל מ- t, ו"לך אחורה" עד ל- s.
   2. 1.2. העבר זרימה מקסימלית במסלול p שהתקבל [[לשם כך רק צריך למצוא את צוואר הבקבוק של המסלול ולהעביר בכל הקשתות במסלול את הערך שירווה אותו]].
   3. 1.3. מחק צלעות רוויות מ- p.
   4. 1.4. "נקה קדימה" [[את כל הקדקודים במסלול]]

<u>נקה קדימה (v)</u>: [מתרחש ברשת השכבות]

1. אם קדקוד v בעל דרגת כניסה 0:
   1. 1.1. הסר אותו.
   2. 1.2. נקה קדימה את שכניו.

[דוגמת ריצה]

[שימו לב: בדוגמה זו האלגוריתם עבד ממש מהר כי כל הקיבולות זהות, לכן כאשר מרווים מסלול מוחקים את **כל** הקשתות בו.]

זמן ריצה

- אתחול: $O(|E|)$ (בניית רשת שיורית)
- לולאה ראשית: רצה $O(|V|)$ פעמים
  - בניית רשת שכבות: $O(|E|)$ (בעזרת BFS מיוחד, שמתייחס רק לרכיב הקשיר ולכן לא צריך לעבור על קדקודים שלא נגישים)
  - מציאת זרימה חוסמת: $O(|V|\cdot|E|)$ [[ראו הסבר למטה]]
  - סכימת הזרימות: $O(|E|)$
  - בניית הרשת השיורית: $O(|E|)$

סה"כ:

$$O\left(|V|^2|E|\right)$$

הסבר לגבי סיבוכיות מציאת זרימה חוסמת:

- מציאת מסלול: $O(|V|)$ [[פשוט בוחרים כל פעם קשת נכנסת כלשהי עד שמגיעים ל- s]]
- ניקוי קדימה: $O(|V|)$ [[כי יכול להיות שנצטרך למחוק הרבה קדקודים אם למישהו יש הרבה שכנים]]
- שני הנ"ל מתבצעים לכל היותר $|E|$ פעמים, כי בכל פעם שמבצעים זאת מרווים (ולכן מוחקים) לפחות קשת אחת
- סה"כ $O(|V|\cdot|E|)$

מקרה פרטי: קיבול 1

נדבר כעת על המקרה הפרטי של גרפים בעלי קיבול 1 בכל הקשתות, ונראה שבמקרה זה אלגוריתם דיניץ עובד בסיבוכיות של $O\left(|E|\sqrt{|E|}\right)$.

נראה שעלות שלב היא $O(|E|)$ – לשם כך יש להראות שתהליך מציאת זרימה חוסמת מתבצע ב- $O(|E|)$ (כי כל שאר הדברים בשלב מתבצעים ב-$O(|E|)$).

אבל את זה למעשה כבר הזכרנו קודם – זה כי במקרה בו כל הקשתות הן בעלות אותו הקיבול (ובפרט כאשר כל הקיבולות שוות ל-1):

- בכל מציאת מסלול **כל** הקשתות רוויות
- כל הקשתות במסלול שנמצא מוסרות
- כל קשת תוסר לכל היותר פעם אחת
- לכן מתבצעים לכל היותר $|E|$ צעדים

במקרה שבו אנו דנים זה צריך להיזהר מהבעיה הבאה: יתכן בגרף שכל הקיבולות בו הן 1 שתתקבל ברשת השיורית קשת בקיבול של 2, מה שדי הורס לנו את הקטע שכל הקשתות בעלות אותו הקיבול. ע"מ להימנע מכך ניתן לעבור להשתמש במולטי גרף, ולומר שבמקום שתהייה לנו קשת בקיבול 2, תהיינה לנו שתי קשתות בקיבול אחד.

[[החלק המסומן כאן מכיל מספר ניסיונות כושלים להוכיח שעלות שלב היא $O(|E|)$.
החלטנו לוותר על העניין כעת ולהמשיך הלאה; יתפרסם באתר הסבר מלא.]]

לא ניכנס לעניין זה ממש; נראה במקום זאת <u>אלטרנטיבה להוכחה הנ"ל</u>:

נניח ש- b זרימה כלשהי.
נגדיר את $sum(b)$ להיות סך הזרימה שעוברת בכל צלע וצלע ברשת השיורית.

[לדוגמה, ברשת הזרימה $s \xrightarrow{2/2} a \xrightarrow{2/2} t$, נקבל $b = 2+2 = 4$.]
באופן דומה, נגדיר את $sum_m(b)$ שווה לזרימה בכל צלע וצלע ברשת השכבות, כאשר [[נניח כי]] ברשת יש m שכבות.

אזי $sum_m(b) \le sum(b)$

קיבול כל צלע ברשת השיורית הוא 1 או 2.
לכן $sum_m(b) \le 2|E|$ [[כי אם **כל** הצלעות בעלות קיבול 2, ומעבירים **בכולן** מקסימום זרימה, מקבלים לכל היותר ערך של $2 \cdot |E|$]].

- בפאזה m יש ברשת השכבות לפחות m שכבות [[כי כפי שאמרנו, בכל פאזה המרחק מ- s ל- t גדל, לכן המרחק מ- s ל- t לאחר m פאזות הוא לפחות m]].
- [נשים לב שבגרף השכבות אין צלע שעוברת משכבה מס' i לשכבה שמספרה $\le i+2$, שכן אחרת הקדקוד בסוף קשת זו היה נמצא בשכבה $i+1$.]
- החתכים המפרידים בין שכבה i לשכבה $i+1$ זרים בצלעות [כלומר כל חתך שמפריד בין שכבה i לשכבה $i+1$ לא כולל אף צלע שמפריד בין שכבה j לשכבה $j+1$ עבור $j \ne i$].
- בחתך המינימלי מבין הנ"ל יש לכל היותר $\frac{|E|}{m-1}$ צלעות [לפי עיקרון שובך היונים, כי כל החתכים זרים בצלעות, יש $m-1$ כאלה ויש $|E|$ צלעות (צלעות = יונים, חתכים = שובכים)].
- לכן נותר למצוא $\frac{|E|}{m-1}$ זרימה,
- לכן יש לכל היותר $\frac{|E|}{m-1}$ פאזות לפנינו (כי בכל פאזה הזרימה גדלה).

- כלומר מס' הפאזות עד כה היה m, ונותר לנו עוד לכל היותר $\frac{|E|}{m-1}$ פאזות, לכן מס' הפאזות הכולל הוא לכל היותר $\frac{|E|}{m-1}$ (וזה נכון לכל m) – כלומר החסם העליון עבור מס' הפאזות הוא $m+\frac{|E|}{m-1}$.
- הדבר הזה נכון לכל m, ואנו רוצים למצוא את הערך הקטן ביותר שאנו יכולים מתוך כל החסמים העליונים שאנו יודעים שיש למס' הפאזות. לכן נגדיר פונקציה $f(m)=m+\frac{|E|}{m-1}$ ונרצה למצוא מתי היא מקבלת את הערך הקטן ביותר, שכן לכל m הערך $f(m)\leq$ מס' הפאזות. לשם כך גוזרים את הפונקציה ובודקים מתי $f'(m)=0$.
- מקבלים שזה קורה עבור $m=\sqrt{|E|}$ (בערך), ושאז ערך הפונקציה הוא גם בערך $\sqrt{|E|}$ (יחד עם כמה קבועים לא מעניינים), ולכן מס' הפאזות הוא לכל היותר $O\left(\sqrt{|E|}\right)$.