פרטים אדמיניסטרטיביים מעניינים

- מוסיפים שעות קבלה ביום ג' בערב, בשעות 23:00 – 1:00
- עוד לא בטוח אם זה יהיה כל שבוע
  - [[סביר להניח שזה לא יהיה בלילות שבהם זה יפריע למרצה, כמו בליל ירח מלא או כשהוא יוצא להיות Batman]]

סיום נושא תכנון דינאמי: בעיית Super Mario – המשך

- מופע:
  - גרף מכוון $G=(V,E)$
  - משקלים $w:E\to\mathbb{R}$
  - נקודת התחלה: $s\in V$
  - נקודת סיום: $t\in V$
- פתרון חוקי: מסלול מ- s ל- t
- יש למצוא: מסלול חוקי $p:s\rightsquigarrow t$ עם משקל $\sum_{(u,v)\in p} w(u,v)$ מקסימלי

תת-בעיות

- הגדרנו: לכל $v\in V$:

משקל מקסימלי של מסלול מ- s ל- v = $OPT(v)$

- מס' התת-בעיות: $|V|$
- בעיה מקורית: $OPT(t)$

הגדרת נוסחה

- מקרה כללי:

אם $v\neq s$ וקיימות קשתות נכנסות ל- v:

$$OPT(v)=\max_{u:(u,v)\in E}\{OPT(u)+w(u,v)\}$$

- מקרי קצה:
  - אם $v\neq s$ ואין קשתות נכנסות ל- v:

    במקרה זה נרצה להשתמש בנוסחה הכללית, אבל שהקדקוד הזה לא ייחשב ב- max, לכן נבחר:

$$OPT(v)=-\infty$$

  - אם $v=s$:

    נבחר:

$$OPT(v)=\max\left(\{0\}\cup\{OPT(u)+w(u,s)|(u,s)\in E\}\right)$$

[ה- $\{0\}$ מייצג את המסלול המנוון (s), ומשמעות החלק השני הוא שאם s נמצא על מעגל, אז נעדיף אולי לבצע את המעגל.]

הגדרת סדר

<u>הערה</u>: אם יש מעגל בגרף, לא ניתן להגדיר סדר תקין.

לדוגמה:

[ציור]

במקרה זה, לכל סדר $\pi : V \to \{1,\dots,|V|\}$ צריך להתקיים:

$$\pi(v_k) < \pi(v_0) < \cdots < \pi(v_{k-2}) < \pi(v_{k-1}) < \pi(v_k)$$

וזו סתירה.
[גם אין פתרון אופטימלי במקרה זה, כי ניתן לחזור על המעגל כמה פעמים שרוצים ולהגדיל את הערך המצטבר – אלא אם כן המעגל הוא בעל משקל כולל שלילי, ואז כן ניתן להחליט שעדיף לא לעשותו כלל. בכל מקרה, במצב זה איננו יכולים לעשות תכנון דינאמי כרגיל.]

<u>הערה נוספת</u>: אם אין מעגלים, אפשר לסדר את הקדקודים:

[ציור]

כך שלכל קשת (v_i, v_j) מתקיים $i < j$.

[לא נמשיך את הדוגמה עד הסוף; רק רצינו להציג אותה.]

מסלולים קצרים ביותר

עכשיו נרצה לדבר על בעיה נוספת: Luigi, אחיו של Mario, רוצה לסיים את המשחק עם אג'נדה אחרת: לסיים את המשחק בזמן הקצר ביותר.
ניתן להגדיר את הגרף כך שהמשקלים על הקשתות מייצגים את הזמן שלוקח לעבור את קטע זה, ואז נרצה למצוא מסלול בעל משקל **מינימלי** מ- s ל- t.
על בעיה זו נדבר כעת.

הגדרות וכו'

- נדבר על גרפים מכוונים
- תהיה לנו פונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$
- נגדיר פונקציית מרחק δ:

$$\delta(v_1, v_2) = \begin{cases} \infty & \nexists p : v_1 \rightsquigarrow v_2 \\ \min\limits_{p : v_1 \rightsquigarrow v_2} w(p) & \exists p : v_1 \rightsquigarrow v_2 \end{cases}$$

[[כלומר $\delta(v_1,v_2)=\infty$ אם לא קיים מסלול מ- v_1 ל- v_2, ואם כן אז זהו משקל המסלול הקל ביותר שיש ביניהם]], כאשר אם $p:u_1 \rightsquigarrow u_k$ מסלול מ- u_1 ל- u_k, כלומר $p=(u_1,u_2,\dots,u_k)$, אז:

$$w(p)=w(u_1,u_2)+w(u_2,u_3)+\cdots+w(u_{k-1},u_k)$$

- אם יש מעגל ממשקל שלילי במסלול בין v_1 ל- v_2 אז $\delta(v_1,v_2)$ לא מוגדר
  - אבל אם יש מעגל ממשקל חיובי, אנחנו כן רוצים להתמודד עם זה (בניגוד לדוגמא של Super Mario)!
- כשאנו אומרים "מסלול קצר ביותר" אנחנו מתכוונים ל-"מסלול במשקל מינימלי"

בעיית מסלולים קצרים ביותר עם מקור יחיד

- <u>מופע</u>: גרף מכוון $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ וקדקוד מקור $s\in V$.
- <u>יש למצוא</u>: מסלול קצר ביותר מ- s ל- v לכל $v\in V$.
- <u>מקרה פרטי</u>: כל המשקלים $w(e)=c$ עבור קבוע c כלשהו.

  $\Leftarrow$ עושים BFS, כי מרחק / משקל = מס' צלעות $\cdot c$.
- נניח שכל הקדקודים נגישים מ- s (נניח שבדקנו זאת עם BFS).
- אם אין מעגלים שליליים אז לכל v יש מק"ב [= מסלול קצר ביותר] שהוא מסלול **<u>פשוט</u>**.
  - למה? כי אם יש מעגל, ניתן להוריד אותו ולקבל מסלול לא פחות טוב.

טענה [תת מסלול של מק"ב הוא מק"ב]

תת מסלול של מסלול קצר ביותר הוא גם מסלול קצר ביותר.

<u>הוכחה</u>:

יהי p מק"ב מ- s ל- v ו- $y \rightsquigarrow x$ תת-מסלול שלו.

$$p: s \underset{p_1}{\rightsquigarrow} x \underset{p_2}{\rightsquigarrow} y \underset{p_3}{\rightsquigarrow} v$$

צ"ל: לכל מסלול $p_2': x\rightsquigarrow y$, $w(p_2)\le w(p_2')$.

אם נציב את p_2' במקום p_2, נקבל מסלול $p'=p_1\circ p_2'\circ p_3$ מ- s ל- v.

לכן, כיוון ש- p מק"ב:

$$\cancel{w(p_1)}+w(p_2)+\cancel{w(p_3)}=w(p)\le w(p')=\cancel{w(p_1)}+w(p_2')+\cancel{w(p_3)}$$
$$\Downarrow$$
$$w(p_2)\le w(p_2')$$

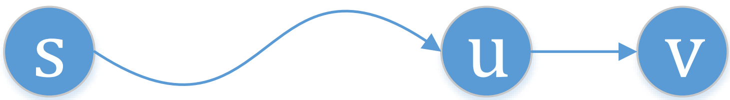
□

מסקנה [רישא של מק"ב]

רישא של מק"ב היא גם מק"ב.

בפרט, אם (u,v) קשת אחרונה במסלול קצר ביותר מ- s, אז:

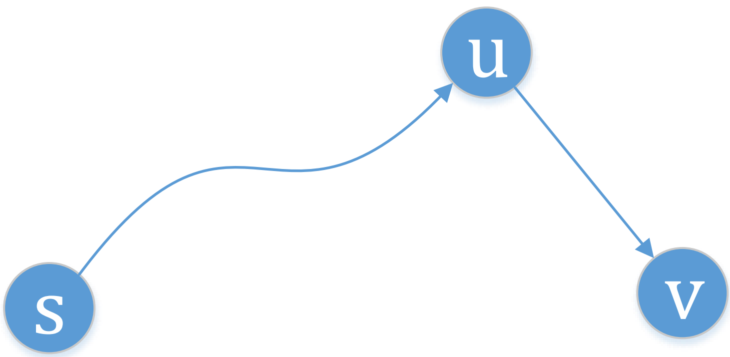
$$\delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v)$$



הערה

<u>**לכל**</u> קשת (u,v) מתקיים:

$$\delta(s,v)\leq\delta(s,u)+w(u,v)$$



[[הסבר: $s\rightsquigarrow u\rightsquigarrow v$ הוא מסלול שמשקלו הוא לפחות $\delta(s,u)+w(u,v)$, לכן משקלו $\geq$ משקל המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v, שהוא $\delta(s,v)$.]]

אלגוריתם!

<u>הקדמה</u>:

- נְתַחְזֵק לכל $v\in V$ שדה $d[v]=$ הניחוש העדכני לערך $\delta(s,v)$.
- נגדיר פונקציה שפועלת על קשת (u,v):

<u>$\text{Relax}(u,v)$:</u>

  - אם $d[v]>d[u]+w(u,v)$,
    - אזי $d[v]\leftarrow d[u]+w(u,v)$

[אם מבצעים שורה זו, נקרא לקריאה לפונקציה "Relax אפקטיבי"]

- <u>אבחנה</u>: הערך $d[v]$ יכול רק לרדת.
- <u>אבחנה</u>: אחרי פעולת $\text{Relax}(u,v)$ מתקיים:

$$\underset{\text{new value}}{d[v]} = \min\left\{ \underset{\text{old value}}{d[v]}\ , d[u]+w(u,v) \right\}$$

אלגוריתם גנרי לבעיית מק"ב ממקור s

- <u>אתחול</u>:
  - $d[s] \leftarrow 0$
  - $d[v] \leftarrow \infty \quad \forall v \neq s$
- <u>צעד</u>:
  - נבחר קשת (u,v) ונבצע $\text{Relax}(u,v)$.
- <u>תנאי סיום</u>:
  - נסיים כאשר לא ניתן לעשות Relax אפקטיבי עבור אף קשת.
  כלומר, לכל $(u,v) \in E$ מתקיים:

$$d[v] \leq d[u]+w(u,v)$$

- <u>סיום</u>: נחזיר את $d[v] \quad \forall v$.

[עוד לא אמרנו איך אנחנו בוחרים קשתות – ישנם מספר אלגוריתמים שנראה שהם אדפטציות של אלגוריתם זה.]

טענה [הערכים של d לא מונפצים]

בכל שלב, לכל $v \in V$, אם $d[v] < \infty$ אזי $d[v]$ אורך/משקל של מסלול כלשהו מ- s ל- v.

<u>מסקנה מהטענה</u>: בכל שלב מתקיים $\delta(s,v) \leq d[v]$ [[כי $\delta(s,v) \geq$ אורך כל מסלול, ולכן בפרט הוא $\geq d[v]$]].

<u>הוכחת הטענה</u>:
באינדוקציה על מס' הצעדים.

- <u>בסיס</u>: [[לאחר 0 צעדים, כלומר רק לאחר האתחול]]
  $d[s]=0$, שזהו משקל המסלול המנוון (s), ו- $d[v]=\infty$ לכל v אחר.

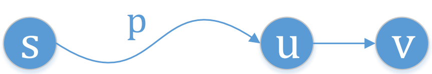
- <u>צעד אינדוקטיבי</u>:
  נניח שהטענה התקיימה לפני ביצוע $\text{Relax}(u,v)$ עבור קשת (u,v) כלשהי.
  אם ה- Relax לא היה אפקטיבי, אין מה להוכיח (ערכי $d[\cdot]$ לא השתנו).

  אחרת, שינינו רק את $d[v]$.

במקרה זה ה- Relax היה אפקטיבי, כלומר בתחילת ה- Relax התקיים $d[v]>d[u]+w(v,u)$ ולכן התקיים $d[u]<\infty$.

לכן, לפי הנחת האינדוקציה, התקיים $d[u]=$ אורך של מסלול $p:s\rightsquigarrow u$ כלשהו.

אחרי ה- Relax קיבלנו:



$$d[v]=d[u]+w(u,v)=w(p)+w(u,v)$$

וזהו ערכו של המסלול $p\circ(u,v)$, שהוא מסלול מ- s ל- v.

□

משפט נכונות-מרחקים של האלגוריתם הגנרי

תנאי הסיום מתקיים $\Leftrightarrow$ לכל $v\in V$ מתקיים $d[v]=\delta(s,v)$.

<u>הוכחה:</u>

- <u>$\Leftarrow$</u>:

נניח שתנאי הסיום מתקיים.

צ"ל: לכל $v\in V$ ולכל מסלול $p:s\rightsquigarrow v$ מתקיים $d[v]\le w(p)$.

(מכאן נסיק שקיים מסלול קצר ביותר מ- s ל- v (כלומר יש חסם תחתון) וְ- $d[v]\le\delta(s,v)$, ומהטענה נקבל כי $d[v]=\delta(s,v)$.)

יהי $p=\underbrace{v_0}_{=s}\to v_1\to\cdots\to\underbrace{v_k}_{=v}$ מסלול מ- s ל- v.

נוכיח לכל v_i באינדוקציה על i [[ש- $w(s=v_0,v_1,\ldots,v_i)\le d[v_i]$]].

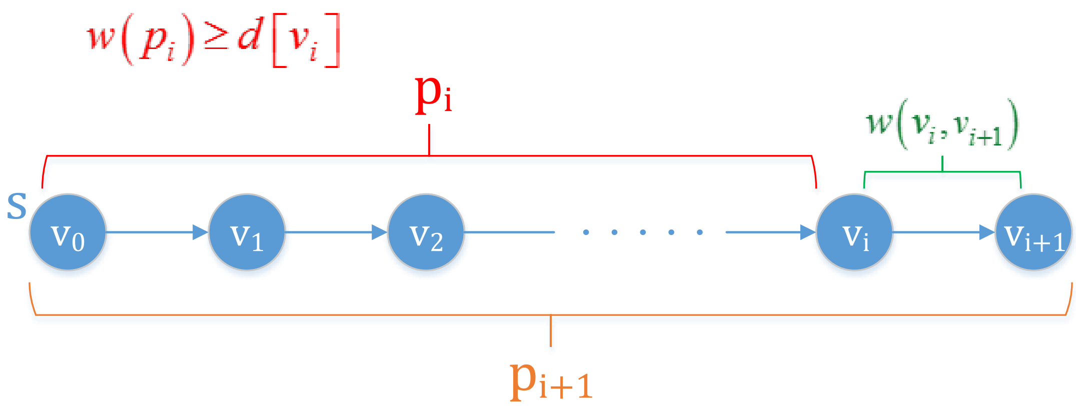
- <u>מקרה בסיס</u>: $i=0$ ($v_i=s$)

אתחלנו את $d[s]$ להיות 0, ולפי האבחנה ערך זה יכול רק לרדת, לכן $d[s]\le 0$

[[ומשקל המסלול המנוון (s) הוא 0]].

- <u>צעד אינדוקטיבי</u>:

נניח ש- $d[v_i]\le w(p_i)$ כאשר $p_i=$ הרישא $v_0\to v_1\to\cdots\to v_i$.



אז:

$$w\left(p_{i+1}\right)=w\left(p_i\right)+w\left(v_i,v_{i+1}\right)\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\geq} d\left[v_i\right]+w\left(v_i,v_{i+1}\right)\underset{\text{תנאי הסיום עבור הקשת } \left(v_i,v_{i+1}\right)}{\geq} d\left[v_{i+1}\right]$$

- $\underline{\Rightarrow}$:

נניח ש-$d[v]=\delta\left(s,v\right)$ לכל קדקוד $v\in V$.

לפי ההערה שראינו, מתקיים:

$$\underbrace{\delta\left(s,v\right)}_{d[v]} \leq \underbrace{\delta\left(s,v\right)+w\left(u,v\right)}_{d[u]+w\left(u,v\right)}$$

$$d[v] \leq d[u]+w\left(u,v\right)$$

□