אלגוריתמים חמדניים

אלגוריתם חמדן הוא אלגוריתם שבכל שלב מבצע בחירה ולא מתחרט עליה לאחר-מכן.
אלגוריתם שכזה מתחיל לבנות פתרון, וכל חלק מהפתרון שנבחר יהיה בפתרון הסופי.

בעיית הפעילויות

יש לנו אודיטוריום אחד, וצריך לשבץ לו קבוצת פעילויות כך שרק פעילות אחת תתרחש בכל זמן נתון.

- מופע:
  - קבוצת פעילויות $A=\{1,\ldots,n\}$
  - זמני התחלה/סיום f_i, s_i לכל פעילות.
- התנגשות: נגדיר כי שתי פעילויות $i,j\in A$ אינן מתנגשות אם $s_i\geq f_j$ או $s_j\geq f_i$.
- פתרון: תת-קבוצה חוקית ואופטימלית של A:
  - חוקית: תת-קבוצה נקראת חוקית אם אין בה זוג פעילויות שמתנגשות.
  - אופטימלית: תת-קבוצה נקראת אופטימלית אם היא מקסימלית בגודלה – כלומר אין קבוצה חוקית אחרת שהיא גדול יותר.

אלגוריתם איטרטיבי לפתרון

$\text{Activity\_iter}(A)$:

1. $G\leftarrow\varnothing$
2. $S\leftarrow A$
3. While $S\neq\varnothing$:
   3.1. $i\leftarrow$ הפעילות הראשונה שמסתיימת
   3.2. $S\leftarrow S\setminus \text{Collide}(i)$
   3.3. $G\leftarrow G\cup\{i\}$
4. Return G

הפונקציה $\text{Collide}(i)$ מחזירה את כל הפעילויות שמתנגשות עם הפעילות i.
[נשים לב שאנו בונים פתרון ולעולם לא מורידים אפשרויות שנבחרו, ולכן זהו אלגוריתם חמדן.]

ראינו הוכחה אחת בהרצאה [[מס' 3]].
כעת נראה הוכחה נוספת.

הוכחה נוספת לזו שהייתה בהרצאה

נסמן:

- $G=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ – הפתרון "שלנו"
- $O=\{j_1,j_2,\ldots,j_m\}$ – פתרון אופטימלי כלשהו

נניח ש-O,G ממוין ע"פ זמני הסיום כך ש:

$$f_{j_1} \le f_{j_2} \le \cdots \le f_{j_m}$$
$$f_{i_1} \le f_{i_2} \le \cdots \le f_{i_k}$$

[[אם הוא לא, ניתן למיין אותו, או לשנות את האינדקסים כך שכן יהיה ממוין, וזה עדיין יהיה אותו הפתרון.]]

- טענה ראשית: הקבוצה G חוקית ומקסימלית.
- טענת עזר: לכל $l \in \{1,\ldots,\min\{m,k\}\}$ מתקיים $f_{i_l} \le f_{j_l}$.

הוכחת הטענה הראשית

- חוקיות:
לאחר הוספת פעילות ל- G מוסרות מ- S כל הוספת פעילות ל- G מוסרות מ- S כל הפעילויות שמתנגשות בה, אזי לא ייתכן של- G הוספו זוג פעילויות שמתנגשות.

- מקסימליות:
מאופטימליות O נובע כי $k \le m$.
מטענת העזר ידוע כי $f_{i_k} \le f_{j_k}$.
נניח בשלילה כי קיימת $j_{k+1} \in O$.
אזי $f_{j_k} \le s_{j_{k+1}}$ (מחוקיות O), ולכן $f_{i_k} \le s_{j_{k+1}}$.
אזי האלגוריתם היה בוחר ב- j_{k+1}, בסתירה לכך ש- G היא תוצאה של האלגוריתם.
[[כלומר, אם יש ב- G פעילות נוספת אחרי הפעילות ה- k-ית, היא בהכרח מתחילה גם אחרי כל הפעילויות שנמצאות ב- G, ולכן היא לא מתנגשת עם אף אחת מהן; במקרה זה, האלגוריתם היה אמור לבחור גם את הפעילות הנוספת הזו, ואז ב- G היו לפחות $k+1$ פעילויות.]]

הוכחת טענת העזר

באינדוקציה על l:

- בסיס: $l=1$
הפעילות i_1 היא הפעילות בעלת זמן הסיום הקטן ביותר.
לכן $f_{i_1} \le f_{j_1}$.

- צעד:
נניח $f_{i_r} \le f_{j_r}$ לכל $r \in \{1,\ldots,k\}$ ונוכיח $f_{i_{k+1}} \le f_{j_{k+1}}$.
היות ו- O חוקית, מהנחת האינדוקציה אנו מקבלים:

$$f_{i_k} \le f_{j_k} \le s_{j_{k+1}}$$

אזי j_{k+1} נמצאת ב- S בשלב ה- k בהרצת האלגוריתם.

לכן האלגוריתם יבחר את j_{k+1} או פעילות המסתיימת לפני j_{k+1}.

אזי:

$$f_{i_{k+1}} \leq f_{j_{k+1}}$$

ניתוח זמן ריצה

- לולאה: $O(n)$
  - הפעלת Collide: תלוי במימוש של Collide. עבור אלגוריתם נאיבי: $O(n)$
- סה"כ: $O(n^2)$

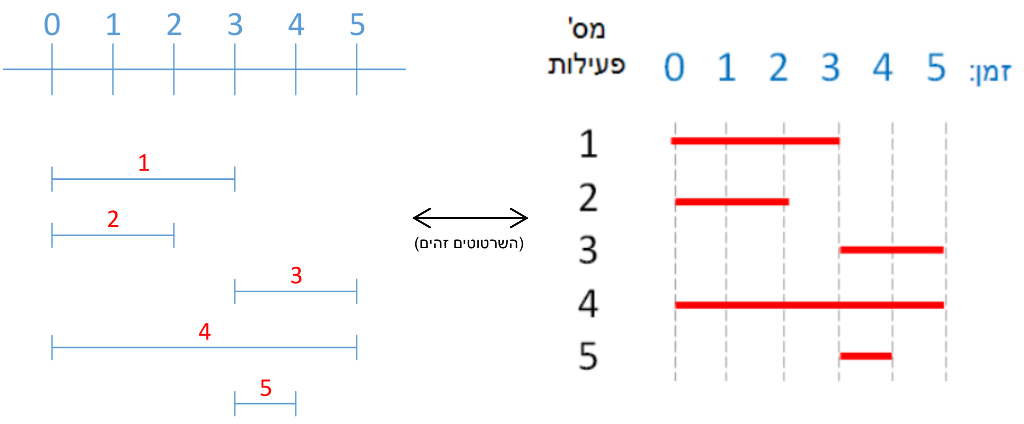
כמובן, ניתן לייעל זאת.

אלגוריתם רקורסיבי לפתרון

$\underline{\text{Activity\_rec}(A):}$

1. If $A = \varnothing$
   1.1. Return $\varnothing$
2. Else
   2.1. $i \leftarrow$ הפעילות שנגמרת ראשונה
   2.2. $A \leftarrow A \setminus \text{Collide}(i)$
3. Return $\{i\} \cup \text{Activity\_rec}(A)$

<u>דוגמת ריצה:</u>



i	1	2	3	4	5
s_i	0	0	3	0	3
f_i	3	2	5	5	4

סדר הפעולות שמתבצעות:

1. $\text{Activity\_rec}(\{1,2,3,4,5\})$:
   - 1.1. $i \leftarrow 2$
   - 1.2. $A \leftarrow A \setminus \{1,2,4\}$
   - 1.3. Return $\{2\} \cup \text{Activity\_rec}(\{3,5\})$:
     - 1.3.1. $i \leftarrow 5$
     - 1.3.2. $A \leftarrow A \setminus \{3,5\}$
     - 1.3.3. Return $\{5\} \cup \text{Activity\_rec}(\varnothing)$:
       - 1.3.3.1. Return $\varnothing$
     - 1.3.4. [$\{5\} \cup \varnothing = \{5\}$ is returned]
   - 1.4. [$\{2\} \cup \{5\} = \{2,5\}$ is returned]

[[בכל קריאה רקורסיבית יש A מקומי אחר; סימנתי בכל שלב את הקבוצה שאיתה מפעילים את הפונקציה בצבע ייחודי, ואת כל השימושים באותה קבוצה באותו הצבע, ע"מ שניתן יהיה להפריד בין ה-A-ים השונים.]]

תוצאה סופית: $\{2,5\}$.

הוכחה

- <u>טענה עיקרית</u>: האלגוריתם מחזיר קבוצה חוקית ומקסימלית.
- <u>טענה 1 – נכונות הבחירה החמדנית</u>:

  תהי B קבוצת פעילויות לא ריקה ותהי $j \in B$ הפעילות עם זמן הסיום המוקדם ביותר ב-B.

  אזי קיימת קבוצה חוקית מקסימלית P^*, $P^* \subseteq B$, המכילה את j.
- <u>טענה 2</u>:

  תהי B קבוצת פעילויות לא ריקה, תהי P^* קבוצה חוקית מקסימלית, $P^* \subseteq B$, ותהי $x \in P^*$ פעילות כלשהי.

  אזי תת-הפתרון $P^* \setminus \{x\}$ היא קבוצה חוקית מקסימלית עבור $B \setminus \text{Collide}(x)$.

  [למשל, עבור הדוגמה הקודמת, אם נבחר $P^* = \{2,5\}$ ו-$x = 5$, אז נקבל כי $A \setminus \text{Collide}(5) = \{1,2\}$. טענה זו אומרת ש-$P^* \setminus \{5\} = \{2\}$ הוא פתרון אופטימלי עבור $\{1,2\}$.]

הוכחת הטענה הראשית

באינדוקציה שלמה:

- <u>הנחה</u>: נניח שהטענה נכונה לכל קלט A כך ש-$|A| < k$.

- <u>צעד</u>: עבור $|A|=k$:

נסמן ב- i את הפעילות שנבחרה בצעד הראשון.

נסמן ב- Q^* את הפלט של האלגוריתם על $A \setminus \text{Collide}(i)$.

נוכיח חוקיות ואופטימליות:

  - <u>חוקיות</u>:

  Q^* תת קבוצה מקסימלית בגודלה עבור $A \setminus \text{Collide}(i)$.

  מהגדרתה, Q^* חוקית.

  i לא מתנגשת עם אף פעילות ב- Q^*, שכן Q^* הינה תת-קבוצה של פעילויות שלא מתנגשות עם A.

  - <u>אופטימליות</u>:

  נסמן ב- P^* קבוצה חוקית מקסימלית המכילה את i (קיימת כזו מטענה 1).

  מטענה 2 נובע כי $P^* \setminus \{i\}$ היא קבוצה חוקית מקסימלית עבור הבעיה $A \setminus \text{Collide}(i)$.

  אזי הקריאה הרקורסיבית תחזיר Q^* כך ש:

$$|Q^*| = |P^* \setminus \{i\}|$$

  אזי $|G| = |Q^*| + 1$ [כאשר G הוא הפתרון הנבחר ע"י האלגוריתם (הפתרון "שלנו")].

  לכן:

$$|P^* \setminus \{i\}| = |Q^*|$$
$$\Downarrow$$
$$|P^*| = |Q^*| + 1$$
$$\Downarrow$$
$$|G| = |P^*|$$

  ולכן G אופטימלית.

הוכחת טענה 1

יהי $B \supseteq P^{**}$ פתרון אופטימלי.

אם P^{**} מכילה את j – סיימנו.

אם P^{**} לא מכילה את j אזי הפעילות הראשונה בה (i) מסתיימת **אחרי** פעילות j (או באותו הזמן).

אזי $\{j\} \cup \left(P^{**} \setminus \{i\}\right)$ חוקית ואופטימלית.

הוכחת טענה 2

תהי $B \supseteq P^*$ קבוצה חוקית מקסימלית המכילה את x.

- <u>חוקיות:</u>
  $P^* \setminus \{x\}$ חוקית שכן P^* חוקית [והסרת פעילויות לא פוגעת בחוקיות].

- <u>אופטימליות:</u>
  נניח בשלילה כי $P^* \setminus \{x\}$ אינה פתרון אופטימלי ל-$B \setminus \text{Collide}(x)$.
  אזי קיים פתרון Q ל-$B \setminus \text{Collide}(x)$ כך ש-$|Q| > |P^* \setminus \{x\}|$.
  אף פעילות ב-Q אינה מתנגשת עם x, לכן $Q \cup \{x\}$ חוקית.
  אזי:

$$|Q \cup \{x\}| > |P^* \setminus \{x\}| + 1$$
$$\Downarrow$$
$$|Q \cup \{x\}| > |P^*|$$

בסתירה לאופטימליות של P^*.

ניתוח זמן ריצה

במקרה הגרוע ביותר, שבו אין התנגשויות כלל, הפונקציה מתבצעת n פעמים ובכל פעם הקריאה ל-Collide לוקחת $\mathrm{O}(n)$.

ליתר דיוק, זמני הריצה של Collide בכל הקריאות הרקורסיביות הן סכום הסדרה החשבונית:

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(1+n)n}{2} = \mathrm{O}(n^2)$$

[ושוב, כמובן, ניתן לייעל זאת.]

אלגוריתם איטרטיבי נוסף

<u>$\text{Activity\_iter\_2}(A)$:</u>

1. $G \leftarrow \varnothing$
2. $S \leftarrow A$
3. $f \leftarrow 0$
4. While $S \neq \varnothing$:
   4.1. $i \leftarrow$ הפעילות המסתיימת ראשונה
   4.2. $S \leftarrow S \setminus \{i\}$

4.3. If $s_i > f$:

4.3.1. $G \leftarrow G \cup \{i\}$

4.3.2. $f \leftarrow f_i$

5. Return G

המשתנה f מייצג את זמן הסיום של הפעילות האחרונה שנבחרה עד כה (ולכן הוא למעשה מציין מאיזו שעה האודיטוריום שלנו פנוי).

- אם הרשימה ממוינת, הלולאה מתבצעת בסיבוכיות של $O(n)$ (כי מציאת הפעילות המסתיימת ראשונה מתבצעת ב-$O(1)$)
- מיון רשימת הפעילויות מראש מתבצעת בסיבוכיות של $O(n\log n)$
- לכן ניתן לבצע את האלגוריתם הנ"ל בסיבוכיות כוללת של $O(n\log n)$

המלצה לשיעורי הבית

נסו לחשוב כיצד אתם מיישמים את השיטות שנלמדו בכיתה בבעיות הנתונות.
99% מהבעיות שניתנות בשיעורי הבית פתירות כך; לא מצפים מהסטודנטים למצוא שיטות חדשות לפתירת השאלות.