עצים פורשים מינימליים

דוגמה

נדבר על עוד תכנית מגירה של המרצה: סחר בסמים.

[שרטוט]

במידה והמרצה יחליט להיכנס לעסק יוקרתי זה, הוא יצטרך למצוא את הדרך הטובה ביותר להעביר את החומר שלו לרחבי הארץ.
במפה מתוארת העלות של העברת החומר בנתיבים שונים (הרי יש עלויות משלוח, תעריפי שוחד וכו').

ע"מ למצוא את הדרך הזולה ביותר, נרצה למחוק קשתות יקרות ושהגרף עדיין יהיה קשיר.
אבל כיוון שאנו רוצים לקחת את הקשתות הטובות ביותר, נלך בכיוון ההפוך: נתחיל בלי קשתות, וכל פעם נבחר איזו קשת לקחת, כאשר אנו בוחרים את הזולה ביותר בכל פעם שמקשר בין שתי ערים שעדיין אין ביניהן דרך הגעה בעזרת הקשתות שנבחרו.

מעבר לתכנית המגירה הנ"ל, יש שימושים רבים במדעי המחשב למציאת עץ פורש מינימלי של גרף ממושקל [למשל, קישור רשת בעזרת נתבים וכבלים בצורה היעילה ביותר].

מושגים בסיסיים

בכל פרק זה נדבר על גרפים לא מכוונים וקשירים [אין משמעות בדיון בעץ פורש מינימלי של גרף שאיננו קשיר (ניתן לבדוק קשירות בקלות בעזרת אלגוריתם BFS בזמן ליניארי)].

- מסלול: סדרה של קדקודים $v_1, v_2, \dots, v_t$ כך שכל זוג (v_i, v_{i+1}) הינה קשת בגרף.
- מסלול פשוט: מסלול שבו אף קדקוד לא מופיע פעמיים.
- מעגל: מסלול $v_1, v_2, \dots, v_t = v_1$ $(t \geq 4)$ שבו אף קדקוד ב- $\{v_1, \dots, v_{t-1}\}$ לא מופיע יותר מפעם אחת [[פרט לראשון, שהוא גם האחרון, אך אינו יכול להופיע שוב באמצע המסלול]].
- אורך מסלול = מספר הקשתות במסלול.
- גרף קשיר: גרף שבו בין כל שני קדקודים יש מסלול.
- חתך: בגרף $G = (V, E)$, חתך מוגדר ע"י חלוקה של הצמתים V לשתי קבוצות (זרות), (S, T), כך ש- $S \cup T = V$ ו- $S \cap T = \varnothing$. בהינתן חלוקה שכזו, הקשתות בחתך (S, T) הן כל הקשתות עם קצה אחד ב- S וקצה שני ב- T.
- ייצוג של גרף:
  ניתן לייצג גרף בכמה דרכים:
  1. רשימת שכנויות:
     - לכל צומת יש רשימה מקושרת של השכנים שלו.
     - יתרונות: קל לעבור על שכנים של קדקוד, חסכוני בזיכרון.
     - חסרונות: קשה לבדוק אם קיימת קשת ספציפית.
  2. מטריצת שכנויות: מטריצה בגודל $n \times n$ [[כאשר $|V| = n$]] בה בתא (i, j) רשום 1 אם יש קשת בין צמתים i ו- j, ו-0 אם לא.
     - יתרונות: קל לבדוק אם קשת מסוימת נמצאת בגרף.

- חסרונות: לא יעיל מבחינת זיכרון (יתכן שיש הרבה פחות מ- n^2 קשתות בגרף).

- גרף ממושקל: גרף $G=(V,E)$ יחד עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$.
- עץ: גרף קשיר ללא מעגלים.
- יער: גרף ללא מעגלים (= אוסף של עצים)

הגדרה [עץ פורש]

עץ פורש של גרף קשיר $G=(V,E)$ הוא תת-גרף (V,T) קשיר (ביחס ל- V) וחסר מעגלים.

משפט 1 [תנאים שקולים לעץ פורש]

התנאים הבאים שקולים:

(1) T עץ פורש של G
(2) (V,T) קשיר ו- $|T|=|V|-1$
(3) (V,T) חסר מעגלים ו- $|T|=|V|-1$
(4) בין כל שני צמתים $u,v\in V$ יש בדיוק מסלול פשוט אחד

למה [מחיקת קשת ממעגל לא פוגעת בקשירות]

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ו- C מעגל בגרף.

אזי לכל קשת $e\in C$, הגרף $G'=(V,E\setminus\{e\})$ קשיר.

הוכחה:

נסמן את הקשת e ב- $e=(u,v)$.

יהיו $x,y\in V$ צמתים.
צ"ל: קיים מסלול בין x לבין y ב- G'.

יהי P מסלול בין x ל- y ב- G (קיים כזה כי G קשיר).

- מקרה א: $e\notin P$
אזי P מסלול גם ב- G' וסיימנו.

- מקרה ב: $e\in P$
[ציור ציורי ומצויר]
נחליף את הקשת $e\in P$ ע"י שאר המעגל, ואז ניתן להרכיב מסלול מ- $(P\setminus\{e\})\cup(C\setminus\{e\})$.

כלומר, אם $P = x \overset{P_1}{\leadsto} \bullet \overset{e}{-} \bullet \overset{P_2}{\leadsto} y$

נגדיר: [ציור]

□

הערה [קיום עץ פורש]

מהלמה נובע שלכל גרף קשיר יש עץ פורש.

<u>הסבר:</u>

כל עוד יש מעגל, אפשר למחוק קשת ולשמור על קשירות, עד שקיבלנו תת-גרף קשיר ללא מעגלים.

משפט 2 [החלפת קשת בתת-עץ פורש] ("טיעון החלפה")

יהי (V,T) עץ פורש בגרף $G=(V,E)$, ותהי $e \in E \setminus T$ קשת שאינה בעץ.

אזי בגרף $H=(V,T\cup\{e\})$ קיים מעגל C שכולל את e, ולכל קשת $e' \in C$, הגרף $(V,(T\setminus\{e'\})\cup\{e\})$ הוא עץ פורש של G.

<u>הוכחה:</u>

נסמן את הקשת e ע"י $e=(v,u)$.

(V,T) עץ פורש, ולכן כולל מסלול פשוט $p:u \leadsto v$.

כעת נוסיף את e ונקבל $C=p\cup\{e\}$ מעגל.

כעת, לפי הלמה, הגרף $(V,(T\setminus\{e'\})\cup\{e\})$ עדיין קשיר.

(V,T) עץ פורש $\Leftarrow |T|=|V|-1$, ומספר הקשתות בגרף החדש הוא:

$$|T|-|\{e'\}|+|\{e\}|=|T|$$

ואז לפי משפט 1 קיבלנו עץ פורש.

□

[משפט זה הולך להיות לב ההוכחה של נכונות האלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי שנראה מיד.]

בעיית עץ פורש מינימלי

- <u>מופע</u>: גרף ממושקל $G=(V,E)$ עם $w:E\to\mathbb{R}$.
- <u>יש למצוא</u>: עץ פורש (V,T) עם משקל $w(T)=\sum_{e\in T} w(e)$ מינימלי.

[ישנם שני אלגוריתמים עיקריים לפתרון בעיה זו: של פרים ושל קרוסקל.]

אלגוריתם פְּרִים

- <u>נתחזק</u>:
  - S – הקדקודים בעץ הנוכחי
  - B – הקשתות בעץ הנוכחי
- <u>אתחול</u>:
  - נבחר קדקוד $r\in V$ שרירותי
  - $S\leftarrow\{r\}$
  - $B\leftarrow\varnothing$
- <u>צעד</u>:
  - כל עוד $|B|<|V|-1$:
    - נבחר קשת זולה ביותר (עם $w(\cdot)$ מינימלי), $e=(u,v)$, בחתך $(S,V\setminus S)$ (כלומר כך ש- $u\in S$ ו- $v\notin S$), ונוסיף אותה:
    - $B\leftarrow B\cup\{e\}$
    - $S\leftarrow S\cup\{v\}$ [הקדקוד v עכשיו נמצא בעץ שבנינו עד כה]
- <u>סיום</u>:
  - נחזיר את (V,B)

הערה [עץ פורש]

האלגוריתם של פרים מחזיר עץ פורש.

<u>הסבר</u>:

- האלגוריתם לא נתקע: אם $S\neq V$, אזי החתך $(S,V\setminus S)$ **לא יכול להיות ריק** (אחרת לא יהיה מסלול בין צמתים ב- S לצמתים ב- $V\setminus S$, בסתירה לכך ש- G קשיר).
- הגרף (V,B) קשיר (לפי הבנייה) ומכיל $|V|-1$ צלעות (לפי מספר הצעדים).

הוכחה [עץ פורש *מינימלי*]

תחילה נשים לב לכך שזהו אלגוריתם חמדן (אנו בכל שלב מבצעים בחירה ולא מתחרטים עליה אח"כ).
נוכיח לפי הסכמה שלמדנו.

תזכורת לסכמה להוכחת אופטימליות של אלגוריתם חמדן:

- ניסוח טענת עזר: קיים פתרון בכל צעד שמכיל את מה שבחרנו עד כה.
- הוכחת המשפט.
- הוכחת הטענה: באינדוקציה – לוקחים פתרון אופטימלי ומבצעים שינוי מקומי

- <u>משפט</u>: האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי.
- <u>טענת עזר</u>: בכל צעד, קיים עץ פורש מינימלי (V,T) כך ש- $B\subseteq T$.

<u>הוכחת המשפט</u>:

לפי הטענה, בסוף האלגוריתם קיים עפ"מ [[= עץ פורש מינימלי]] T שמכיל את B, אבל $|B|=|V|-1=|T|$ (מס' צלעות בעץ פורש) ולכן $B=T$.

□

<u>הוכחת טענת העזר</u>:

באינדוקציה על השלבים.

- <u>בסיס האינדוקציה</u>: $B=\varnothing$

אזי כל עץ פורש מכיל את B, בפרט גם עפ"מ [וקיים עץ פורש מינימלי כי קיים עץ פורש, וכי מס' העצים הפורשים הוא סופי].

- <u>צעד אינדוקטיבי</u>:

בצעד ה- i, נניח שהוספנו קשת $e=(u,v)$.

לפי הנחת האינדוקציה, לפני הצעד ה- i היה עפ"מ (V,T) כך ש- $B\subseteq T$.

אחרי הצעד ה- i קיבלנו $B\cup\{e\}$.

צ"ל: קיים עפ"מ (V,T^*) כך ש- $B\cup\{e\}\subseteq T^*$.

- <u>מקרה א'</u>: $e\in T$

במקרה זה, $B\subseteq T,\{e\}\subseteq T \Leftarrow B\cup\{e\}\subseteq T$.

- <u>מקרה ב'</u>: $e\notin T$

[נמשיך בשיעור הבא.]