המשך בעיית זרימה מקסימלית

<u>רוצים להוכיח</u>: אם Ford-Fulkerson עוצר אז הוא מחזיר זרימה מקסימלית.

<u>תנאי העצירה</u>: עוצרים אם אין מסלול שיפור.

הגדרה [מסלול שיפור]

מסלול שיפור (ביחס לזרימה f ברשת זרימה עם קיבולת c) הוא סדרה $p = s \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to t$ כך שלכל זוג קדקודים עוקבים $(u,v) \in p$ מתקיים $c(u,v) - f(u,v) = c_f(u,v) > 0$.

הגדרה [זרימה לא ניתנת לשיפור]

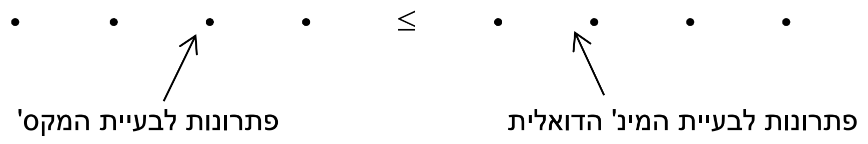
זרימה f היא לא ניתנת לשיפור אם לא קיים מסלול שיפור עבורה.

התוכנית

- נמצא חסם עליון על זרימה מקסימלית.
- נוכיח שהחסם הדוק.
- מתוך ההוכחה נראה גם שזרימה שלא ניתנת לשיפור היא מקסימלית.

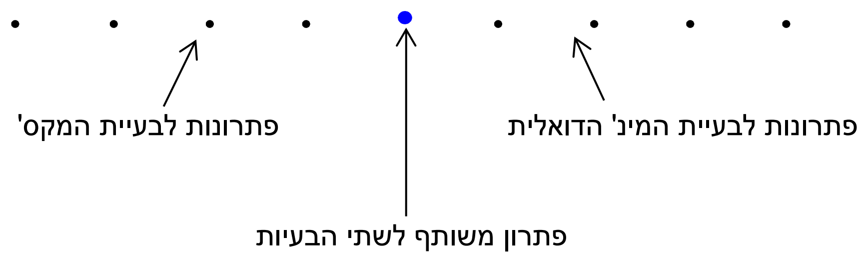
[זה חלק מתופעה מאוד גדולה במתמטיקה (שלא קשורה לבעיית הזרימה) – תופעת הדואליות: לא ניכנס לפורמליות של זה – בגדול, כאשר יש בעיית מקס' ניתן לתאר בעזרתה בעיית מינ'.
כלומר: בעיית מקס' $\Leftarrow$ בעיה דואלית שהיא בעיית מינ'.

דואליות חלשה:



(כלומר כל הפתרונות של בעיית המינ' "גדולים" מהפתרונות לבעיית המקס'.)

דואליות חזקה:



(כלומר אותו הדבר, רק שגם קיים פתרון משותף. אז מוצאים פתרון מינימלי לבעיית המינ' ומקבלים פתרון מקסימלי לבעיית המקס'.)]

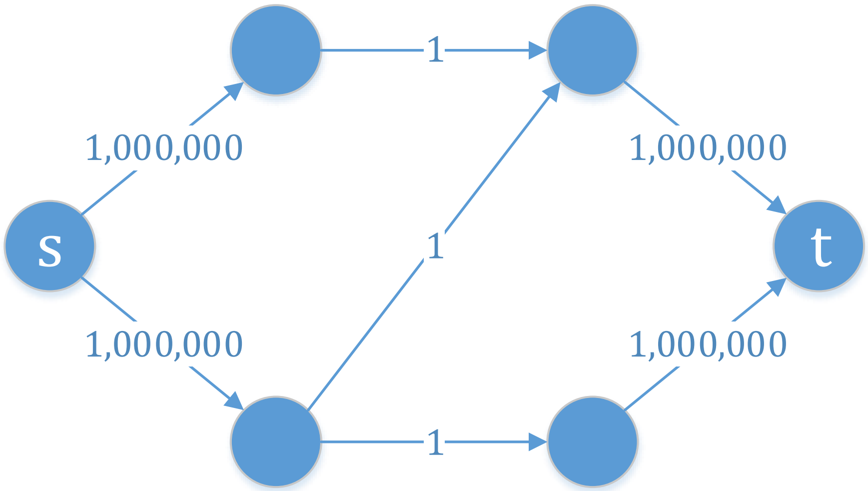
חסמים אפשריים

- סכום כל הקיבולות של כל הקשתות בגרף.

← ברור שאין זרימה שגודלה יעלה על מספר זה, אבל הוא חסם הרבה יותר מדי גדול.

- המינימום מבין סכום כל הקיבולות של הקשתות שיוצאות מ- s וסכום כל הקיבולות של הקשתות שנכנסות ל- t.

← נראה למה זה גם לא מספיק טוב עם דוגמה:



בדוגמה זו הסכומים הנ"ל שניהם בעלי הערך $2{,}000{,}000$, אך הזרימה המקסימלית היא בעלת גודל 3.

הגדרה [חתך s-t]

חתך $s-t$ הוא חלוקה של V לשתי קבוצות זרות S,T (כלומר $S\cap T=\varnothing, S\cup T=V$) ומקיימת $t\in T, s\in S$.

הגדרה [קיבולת של חתך]

קיבולת של חתך (S,T) מוגדרת ע"י:

$$c(S,T)=\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} c(u,v)$$

בעיית החתך המינימלי

בהינתן קשת זרימה G,s,t,c יש למצוא חתך $s-t$, (S,T), עם קיבולת $c(S,T)$ מינימלית.

[בין בעיית הזרימה המקסימלית לבעיית החתך המינימלית מתקיימת דואליות חזקה כפי שהזכרנו קודם; נראה שכל גודל זרימה תמיד ≥ לקיבולת כל חתך $s-t$, וכן שקיימת וקיים חתך כך שגודל הזרימה שווה לקיבולת החתך.]

טענה: חסם עליון ("דואליות חלשה")

לכל חתך $s-t$, (S,T), וזרימה f ברשת זרימה N מתקיים:

$$\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} f(u,v)=|f|$$

[[<u>כלומר</u>: סכום הזרימה שעוברת בחתך **כלשהו** שווה לגודל הזרימה.
למה? כי חתך מפריד בין חלק בגרף שמכיל את s לבין חלק שמכיל את t, וכל ערך הזרימה אמור לעבור מהצד הראשון לצד השני.]]

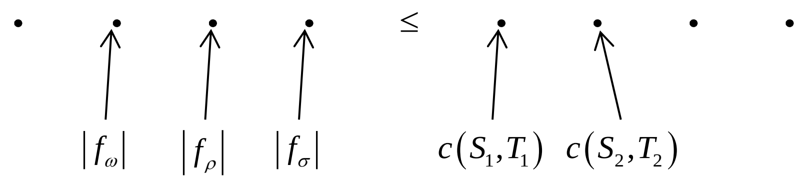
מסקנה – למה [גודל זרימה חסום ע"י קיבולת חתך]

לכל חתך (S,T) וזרימה f באותה רשת מתקיים:

$$|f|\le c(S,T)$$

<u>הוכחת הלמה</u>:

$$|f|\overset{\text{מהטענה}}{=}\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} f(u,v)\underset{\text{אילוצי קיבולת}}{\le}\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} c(u,v)=c(S,T)$$



הוכחת הטענה

$$|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)\overset{(1)}{=}\sum_{u=s}\sum_{v\in V} f(u,v)+\overbrace{\sum_{u\in S\setminus\{s\}}\sum_{v\in V} f(u,v)}^{=0}\overset{(2)}{=}$$

$$=\sum_{u\in S}\overbrace{\sum_{v\in V} f(u,v)}^{=0\,\forall s\neq u\in S}\overset{(3)}{=}\sum_{u\in S}\sum_{v\in S} f(u,v)+\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)\overset{(4)}{=}$$

$$=\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} f(u,v)$$

[הסברים:

- מעבר (1): משימור זרימה, $\sum_{v\in V} f(u,v)=0$ לכל $u\neq s,t$. הסכום המסומן פועל רק עבור $u\in S$, לכן כיוון ש- $t\notin S$, הקדקוד היחיד עבורו ערך זה איננו 0 הוא $s\in S$.
  [[שני הסכומים המסומנים בסגול שווים.]]
- מעבר (2): איחדנו את שני הסכומים החיצוניים יחדיו.
- מעבר (3): פיצלנו את הסכום הפנימי, שעובר על כל $v\in V$, למעבר על $v\in S$ ועל $v\in T$ בנפרד.
- בביטוי המסומן באדום, כל זוג u,v מופיע פעמיים: פעם אחת בתור $f(u,v)$ ופעם נוספת בתור $f(v,u)$; מאנטי-סימטריה, סכומם הוא $f(u,v)+f(v,u)=0$.
- מעבר (4): איחדנו את שני הסכומים לסכום אחד [[כלומר שני הסכומים המסומנים בכחול שווים]].

]

משפט "דואליות חזקה" (זרימה מקס' – חתך מינ') (Max-Flow-Min-Cut)

$$\max_{\text{flow } f}|f|=\min_{\text{cut } (S,T)} c(S,T)$$

[כלומר המקסימום בין כל ה-$|f|$ עבור זרימה חוקית f מ-s ל-t ב-N שווה למינימום בין כל ה-$c(S,T)$ עבור (S,T) חתך $s-t$ ברשת N.]

טענת עזר מרכזית [שקילות תנאים]

התנאים הבאים שקולים:

(א) $|f|$ זרימה מקס' (בגודל מקס')

(ב) f לא ניתנת לשיפור (תנאי העצירה של F-F)

(ג) קיים חתך (S,T) כך ש-$|f|=c(S,T)$

מסקנה: אם F-F עוצר, הוא מחזיר זרימה מקסימלית.

טענת קיום

קיימת זרימה מקסימלית (f חוקית עם $|f|$ מקסימלי).

הוכחת המשפט

לפי טענת הקיום קיימת זרימה מקסימלית f, ולפי טענת העזר המרכזית קיים חתך (S,T) כך ש-$|f|=c(S,T)$.

מכאן נובע ש:

$$\max_f |f| \geq \min_{(S,T)} c(S,T)$$

[כי $\max|f| \geq |f| = c(S,T) \geq \min c(S,T)$].

אבל מהדואליות החלשה נובע:

$$\max_f |f| \leq \min_{(S,T)} c(S,T)$$

ולכן יש שוויון.

□

הוכחת טענת הקיום

<u>הוכחה I (לבהות ולא לזכור) (הוכחת חדו"א)</u>:

$\{|f|\}$ חסומה מלמעלה ע"י דואליות חלשה.

לכן קיים $\varphi = \sup_f \{|f|\} < \infty$.

תהי $\{f_n\}$ סדרת זרימות כך ש- $\lim_{n\to\infty} |f_n| = \varphi$.

לכל (u,v), $f(u,v) \in [-c(v,u), c(u,v)]$

$\Leftarrow$ יש תת-סדרה מתכנסת של f (מקומפקטיות) ... וכו' ...

[[לא עשינו כאן הוכחה פורמלית מלאה כי אף אחד לא מצפה מסטודנטים לקרוא מרצון הוכחה שהכותרת שלה היא "הוכחת חדו"א". די התאכזבתי; זה נראה מעניין. ☹]]

<u>הוכחה II</u>:

נראה [בעתיד] מימוש של F-F (דיניץ) שעוצר [תמיד, גם במקרה הכללי], ולכן יש זרימה שלא ניתנת לשיפור, ולפי טענת העזר המרכזית זו זרימה מקסימלית.

הוכחת טענת העזר המרכזית

- <u>(א)⇐(ב)</u>: (נוכיח NOT(ב) ⇐ NOT(א))

  נניח ש- f ניתנת לשיפור.

  אזי קיים מסלול שיפור p עם צוואר בקבוק $\Delta > 0$.

  ראינו שבאלגוריתם F-F הוספת המסלול לזרימה (עם זרימה Δ) נותנת זרימה חוקית חדשה f' עם $|f'| = |f| + \Delta$, ולכן f לא מקסימלית.

- <u>(ב)⇐(ג)</u>:

תהי f זרימה לא ניתנת לשיפור ותהי N_f הרשת השיורית עם קיבולות c_f (יש קשת $c_f(u,v)>0 \Leftrightarrow (u,v)\in E_f$).

מכיוון ש- f לא ניתנת לשיפור, אין מסלול מ- s ל- t בגרף $G_f=(V,E_f)$.

נגדיר:

$$S_f := \left\{ v\in V \middle| \exists p: s\rightsquigarrow v \text{ in } G_f \right\}$$
$$T_f := V\setminus S_f$$

[כלומר S_f הוא קבוצת כל הקדקודים ב- V אליהם ניתן להגיע מ- s ב- G_f, ו- T_f הוא קבוצת כל שאר הקדקודים.]

אזי לפי הגדרה $s\in S_f$, ולפי ההנחה $t\notin S_f$, כלומר $t\in T_f$.

<u>אבחנה</u>: לכל $u\in S_f, v\in T_f$ מתקיים $f(u,v)=c(u,v)$.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- $f(u,v)<c(u,v)$, כלומר $c_f(u,v)>0 \Leftarrow (u,v)\in E_f$. לפי הגדרת S_f קיים מסלול $p:s\rightsquigarrow u$ ב- G_f ולכן $p\circ(u,v)$ הוא מסלול ב- G_f מ- s ל- v, בסתירה להגדרת S_f,T_f.

אזי מתקיים:

$$|f| \overset{\text{לפי טענת חסם עליון}}{=} \sum_{\substack{u\in S_f\\ v\in T_f}} f(u,v) = \sum_{\substack{u\in S_f\\ v\in T_f}} c(u,v) \underset{\text{לפי הגדרה}}{=} c(S_f,T_f)$$

- <u>(ג)⇐(א)</u>:

  יהיו (S,T) ו- f כך ש- $|f|=c(S,T)$.

  לכל זרמה אחרת f' מתקיים לפי דואליות חלשה:

$$|f'|\le c(S,T)=|f|$$

ולכן f מקסימלית.

□

[זה שהאלגוריתם עוצר זה ממש לא טריוויאלי – למעשה, ניתן למצוא דוגמה בה לא רק שהוא לא יעצור לעולם, אלא גם ככל שמתבצעות יותר איטרציות כך הוא יותר יתקרב לתשובה **שגויה**.

ישנם שני אלגוריתמים אחרים שכן תמיד עוצרים:

- <u>Edmonds-Karp ('72)</u>: רץ בזמן $O\left(|V|\cdot|E|^2\right)$.

- (70') אלגוריתם של דיניץ (מהאוניברסיטה שלנו): רץ בזמן $O\left(|V|^2\cdot|E|\right)$.
- (13') אלגוריתם של Orlin (הוצג בכנס בשנה שעברה): רץ בזמן $O\left(|V|\cdot|E|\right)$.

[

[[IT WORKS FOR PIIIIIIIIIIGS!]]