אלגוריתם קרוסקל

- נתחזק:
  - C – קשתות שעדיין לא נבדקו
  - B – קשתות בעץ
- אתחול:
  - $C \leftarrow E$
  - $B \leftarrow \varnothing$
- צעד:
  - כל עוד $|B| < |V| - 1$:
    - נבחר קשת e קלה ביותר ב-C
    - $C \leftarrow C \setminus \{e\}$
    - אם הקשת לא סוגרת מעגל, נוסיף אותה: $B \leftarrow B \cup \{e\}$
- סיום:
  - נחזיר את B

הוכחת נכונות

- אבחנה: האלגוריתם לא נתקע ומחזיר עץ פורש.

הסבר:

אם כל קשת סוגרת מעגל אז כל קשת מוכלת ברכיב קשירות של (V,B)

$\Leftarrow$ רכיבי הקשירות של $(V,B)\equiv$ רכיבי הקשירות של G

$\Leftarrow$ יש רכיב קשירות אחד ב-(V,B), וכן אין מעגלים [[כי מוסיפים קשת רק אם היא לא סוגרת מעגל]] $\Leftarrow B$ הוא עץ פורש.

- משפט: האלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי.
- טענת עזר: בכל צעד באלגוריתם קיים עץ פורש מינימלי (V,T) כך ש-$B \subseteq T$.

[[הוכחת המשפט:

מידית מטענת העזר, שכן אם לאחר הצעד האחרון קיים עץ פורש מינימלי (V,T) כך ש-$B \subseteq T$, אזי מכך ש-$|T| = |V| - 1 = |B|$ נובע כי $B = T$.]]

הוכחת טענת העזר:

באינדוקציה על מספר הצעדים.

- בסיס: $B = \varnothing$

במקרה זה כל פתרון מכיל את B; בפרט, קיים עץ פורש מינימלי, והוא מכיל את $B = \varnothing$.

- צעד אינדוקטיבי:

נניח שבתחילת הצעד הנוכחי קיים עץ פורש מינימלי (V,T) כך ש- $B\subseteq T$, ובצעד זה אנו בוחנים את הקשת $e\in E$.

<u>צ"ל</u>: אם אחרי הצעד קיבלנו פתרון חלקי B' אזי קיים עץ פורש מינימלי (V,T^*) כך ש- $B'\subseteq T^*$.

- <u>מקרה א'</u>: e סוגרת מעגל
  במקרה זה $B'=B$ ואפשר לקחת $T^*=T$ ונקבל $B'=B\subseteq T=T^*$.

- <u>מקרה ב'</u>: e לא סוגרת מעגל וְ- $e\in T$
  אזי $\{e\}\subseteq T$.
  בסוף הצעד נקבל $B'=B\cup\{e\}$ ויודעים ש- $B\subseteq T$, לכן $B'=B\cup\{e\}\subseteq T$
  ושוב ניתן לקחת $T^*=T$.

- <u>מקרה ג'</u>: e לא סוגרת מעגל וְ- $e\notin T$
  במקרה זה, לפי משפט 2, e סוגרת מעגל C בעץ (V,T).
  אבל המעגל C לא יכול להיות מורכב רק מ- e ומקשתות ב- B (אחרת e הייתה סוגרת מעגל ולא היינו בוחרים להשתמש בה באלגוריתם).
  לכן קיימת קשת $e'\neq e$ במעגל C כך ש- $e'\in T\setminus B$.
  נסמן $T^*=T\cup\{e\}\setminus\{e'\}$. אזי לפי משפט 2, T^* הוא עץ פורש של G.

  מצאנו, אם כן, עץ פורש (V,T^*) כך ש- $B\cup\{e\}\subseteq T^*$.

  נותר להראות ש- T^* מינימלי.
  הקשת e' לא סוגרת מעגל ב- B כי היא לא סוגרת מעגל ב- T וְ- $B\subseteq T$.
  כיוון ששתי הקשתות e,e' לא סוגרות מעגל ב- B (ולא נמצאות בו), והאלגוריתם בצעד זה בוחר להשתמש בקשת e ולא e', ומכיוון שהאלגוריתם עובר על הקשתות לפי משקלן בסדר עולה, בוודאות $w(e)\le w(e')$ [[ולכן $\boxed{w(e)-w(e')\le 0}\boxed{*}$]].
  כעת, המשקל של T^* הוא:

$$w(T^*)=w(T\cup\{e\}\setminus\{e'\})=w(T)+\underbrace{w(e)-w(e')}_{\le 0 \text{ according to } \boxed{*}}\le w(T)\le w(T^*)$$

מהמינימליות של T

  כלומר $w(T^*)=w(T)$ ולכן T^* הוא עץ פורש מינימלי.

מימוש וזמן ריצה

צריכים לעשות שימוש במבנה הנתונים Union-Find.

<u>מימוש:</u>

- <u>אתחול:</u>
  - נמיין את כל הקשתות ונשים במערך.
  - $B \leftarrow \varnothing$.
  - לכל קדקוד $v \in V$ נעשה $\text{make\_set}(v)$.
- <u>צעד:</u>
  - נעבור על הקשתות לפי הסדר במערך.
    עבור הקשת הנוכחית $e=(v,u)$:
  - אם $\text{find\_set}(u) \neq \text{find\_set}(v)$ אז:
    - $\text{union}(v,u)$ [זה איחוד העצים של u ושל v]
    - $B \leftarrow B \cup \{e\}$

<u>זמן ריצה:</u>

- <u>מיון:</u> $O(|E|\log|E|)$ [[= $O(|E|\log|V|)$ כי $|E| = O(|V|^2)$]]
- <u>תזכורת:</u> m פעולות ב-Union-Find עם n איברים לוקחות סה"כ זמן של $O(m+n\log m)$.
- <u>צעדים:</u> $O(|E|+|V|\log|E|)$
- <u>סה"כ:</u> $O(|E|\log|V|)$.