המשך רשתות זרימה

<u>נזכיר:</u>

- **רשת זרימה** מורכבת מגרף $G=(V,E)$, קדקודי מקור ויעד $s,t\in V$ ופונקציית קיבולת $c:E\to\mathbb{R}_+$ (ומרחיבים אותה ע"י $c(u,v)=0$ עבור כך $u,v\in V$ ש- $(u,v)\notin E$).
- **זרימה** היא $f:V\times V\to\mathbb{R}$ המקיימת:
  - אילוץ קיבולת: $f(u,v)\le c(u,v) \quad \forall u,v\in V$
  - אנטי-סימטריה: $f(u,v)=-f(v,u) \quad \forall u,v\in V$
  - שימור זרימה: $\sum_{v\in V} f(u,v)=0 \quad \forall u\neq s,t:$
    - תנאי שקול: $\sum_{v:f(u,v)>0} f(u,v) = \sum_{v:f(v,u)>0} f(v,u)$
- גודל זרימה:

$$|f|=\sum_{v\in V} f(s,v) \overset{\text{הוכחנו}}{=} \sum_{u\in V} f(u,t)$$

<u>המטרה:</u>

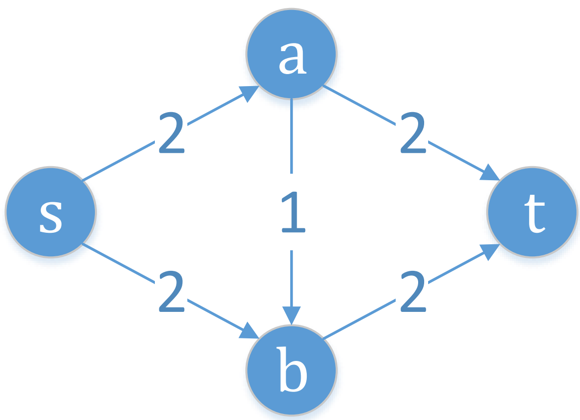
[[השתלטות על העולם. לשם כך הצבנו מטרת ביניים:]]

בהינתן רשת זרימה, למצוא זרימה f עם $|f|$ מקסימלי.

<u>רעיון שלא עבד:</u>

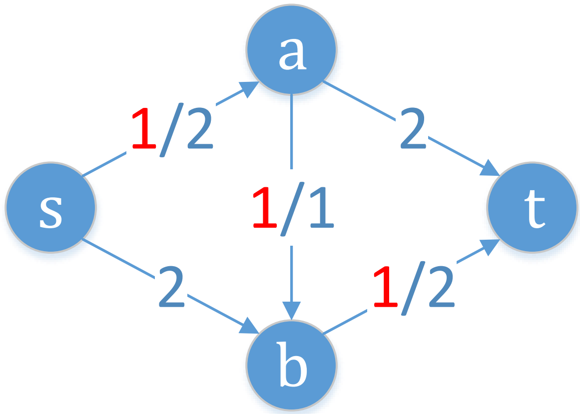
- נתחיל מ- $f\equiv 0$.
- כל עוד קיים מסלול $p:s\rightsquigarrow t$ ב- G כך ש- $f(e)<c(e)$ לכל קשת במסלול, נוסיף את "צוואר הבקבוק" לאורך כל p – כלומר, נוסיף: $\min_{e\in p}\{c(e)-f(e)\}$.
- נעצור אם אין מסלול כזה.

דוגמה נגדית:



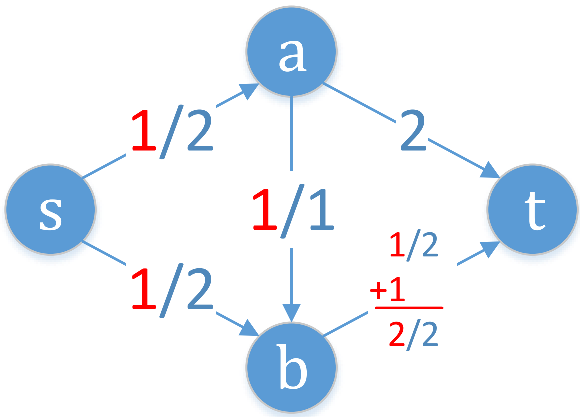
נזרים לאורך מסלולים:

1. $s \to a \to b \to t \quad (+1)$:

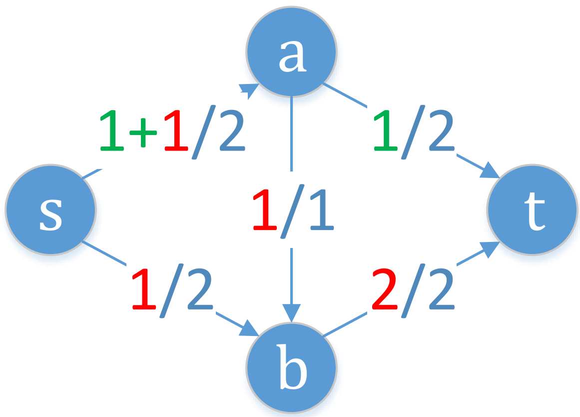


[[הערה: אם אנחנו כותבים רק בכיוון אחד זרימה, הכוונה היא שבכיוון השני יש מינוס של אותו הדבר. ואם אנו לא כותבים כלל, הכוונה היא שיש 0.]]

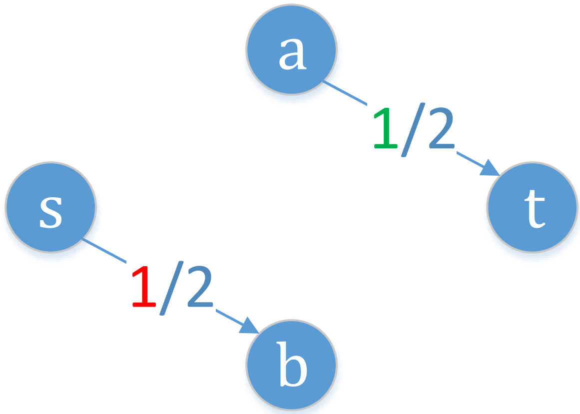
2. $s \to b \to t \quad (+1)$:



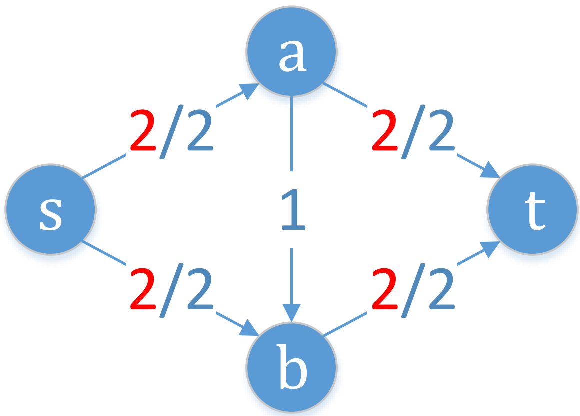
3. $s \to a \to t \quad (+1)$:



כעת הקשתות הלא רוויות שנותרו הן:



לכן מבחינת האלגוריתם סיימנו, והגענו לזרימה של 3 בסה"כ.
אבל אפשר להשיג זרימה גדולה יותר, של 4:

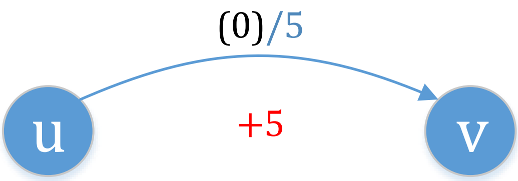


<u>הבעיה באלגוריתמים החמדנים</u>:
מה שהיה חסר לנו באלגוריתמים שראינו עבור הבעיה עד כה היא האפשרות להתחרט – לומר שלמרות שהחלטנו להזרים כמות מסוימת בקשת מסוימת מקודם, עכשיו אנו מחליטים להוריד את כמות זו.

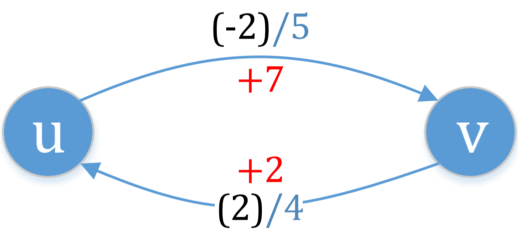
מציאת פתרון נכון

מתי אפשר להוסיף זרימה חיובית לאורך (u,v)? (וכמה?)

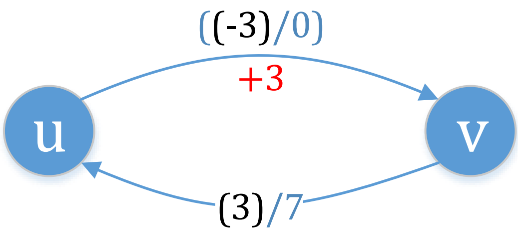
- קשת (u,v):
  - יש קשת רק בכיוון אחד:



- יש קשת בשני הכיוונים:



- (u,v) לא קשת:



הגדרה [קיבולת שיורית (residual capacity)]

לכל $u,v\in V$ (כשלא בהכרח קיימת הקשת (u,v) ב- E),

הקיבולת השיורית היא המקסימום שניתן להוסיף ל- $f(u,v)$ בלי להפר את אילוץ הקיבולת.

כלומר:

$$c_f(u,v):=c(u,v)-f(u,v)$$

הגדרה [צוואר בקבוק של + מסלול שיפור]

סדרה $p=s\to u_1\to\cdots\to u_k\to t$ [זה לא חייב להיות מסלול בגרף] היא מסלול שיפור אם לכל זוג קדקודים עוקבים $(u,v)\in p$ מתקיים:

$$f(u,v)<c(u,v)$$

או באופן שקול:

$$c_f(u,v)>0$$

צוואר הבקבוק של מסלול שיפור p הוא:

$$c_f(p) := \min_{(u,v)\in p} c_f(u,v)$$

הגדרה [הרשת השיורית]

הרשת השיורית N_f היא הרשת $G_f = (V, E_f), s, t$ עם הקיבולות השיוריות $c_f : V \times V \to \mathbb{R}$, כאשר:

$$E_f := \left\{(u,v) \in V^2 \middle| c_f(u,v) > 0\right\}$$

[שימו לב שהקשתות בגרף זה יכולות להיות שונות מהקשתות בגרף המקורי (בכל גרף יכולות להיות קשתות שאין בשני).]

האלגוריתם של Ford-Fulkerson

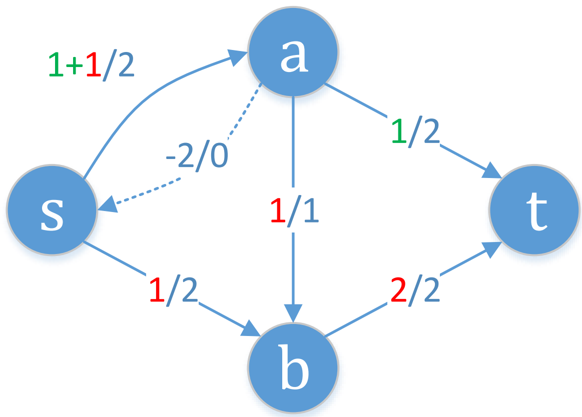
- נתחיל מ- $f \equiv 0$.
  (א) נמצא מסלול שיפור p (אם קיים).
  (ב) נמצא את צוואר הבקבוק $\Delta \leftarrow c_f(p)$.
  (ג) נעדכן את הזרימה:

$$\forall (u,v) \in p: \quad \begin{cases} f(u,v) \leftarrow f(u,v) + \Delta \\ f(v,u) \leftarrow f(v,u) - \Delta \end{cases}$$

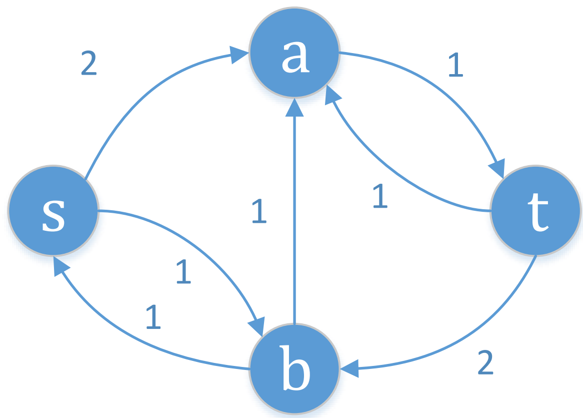
- נעצור אם אין מסלול כזה [[כלומר ממשיכים לעשות את (א) - (ג) עד אשר אין מסלול כזה]].

דוגמה

(נמשיך את אותה אחת ממקודם)



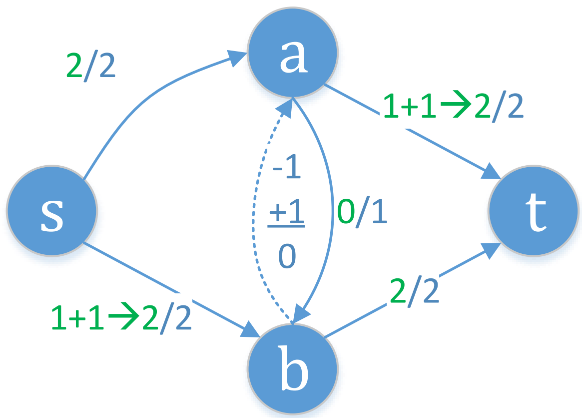
נבנה ממנו גרף של קיבולות שיוריות (זוהי הרשת השיורית):



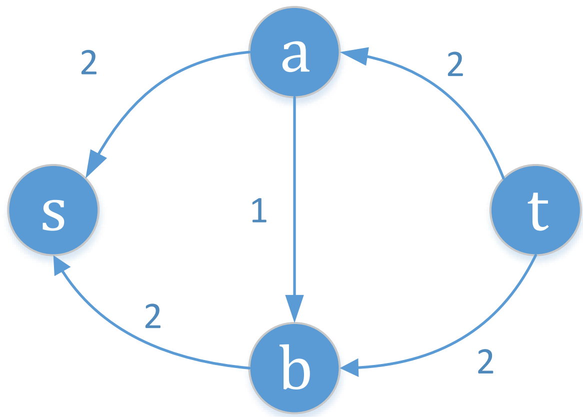
כעת נחפש מסלולי שיפור (כמו באלגוריתם הקודם) בגרף זה (אשר יכולים לכלול קשתות שלא מופיעות בגרף המקורי).

מסלול שיפור: $s \to b \to a \to t$.
צוואר בקבוק: 1

לאחר העדכון ב-(ג):



כעת הקיבולות השיוריות בגרף הן:



ולא קיים מסלול שיפור יותר (כאן האלגוריתם נגמר).

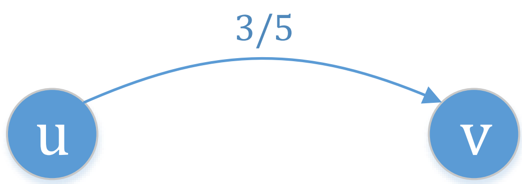
אבחנה [מציאת מסלולי שיפור]

מסלול שיפור הוא בדיוק מסלול $s \rightsquigarrow t$ בגרף G_f.

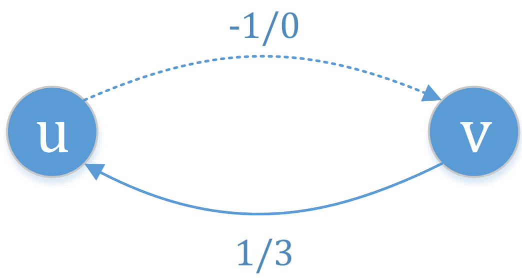
הקשתות ברשת השיורית

אילו קשתות יש ב- E_f?

- קשת $E \ni (u,v)$ שאינה רוויה ($f(u,v) < c(u,v)$):



- אנטי קשת (u,v) (כלומר קשת שיש רק את הקשת ההפוכה לה בגרף: $(u,v) \notin E$ וְ- $(v,u) \in E$) שעבורה $f(v,u) > 0$ ולכן $f(u,v) < 0 = c(u,v)$:



[לכן ע"מ למצוא מסלול שיפור כמתואר, עלינו רק למצוא מסלול מ- s ל- t ב- G_f – וזאת ניתן לעשות בעזרת BFS (או כל אלגוריתם אחר למציאת מסלולים בגרף).]

טענה [חוקיות הזרימה]

בכל שלב ב-F-F, f היא זרימה חוקית.

ההוכחה באינדוקציה. לשם כך נגדיר טענת עזר:

טענת עזר: אם f הייתה זרימה חוקית לפני צעד (ג), אזי היא זרימה חוקית גם אחרי העדכון, וגם גודל הזרימה נהיה $|f|+\Delta$.

היא נובעת מ:

טענה כללית [סכום זרימה עם זרימה שיורית]

אם f זרימה ברשת המקורית ו- g זרימה ברשת השיורית N_f, אזי $(f+g)(u,v) := f(u,v)+g(u,v)$ זרימה חוקית ב- N, וכן מתקיים $|f+g|=|f|+|g|$.

למה טענת העזר נובעת מכך?

נגדיר:

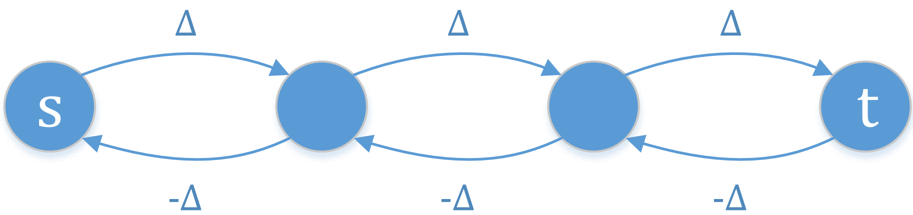
$$g(u,v)=\begin{cases} \Delta & (u,v)\in p \\ -\Delta & (v,u)\in p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אילוץ האנטי-סימטריה מתקיים מהגדרת g.

אילוץ הקיבולת עבור $(u,v)\in p$:

$$g(u,v)=\Delta=\min_{(u',v')\in p} c_f(u',v') \le c_f(u,v)$$

ואילוץ שימור הזרימה מתקיים כי כל קדקוד במסלול (פרט ל- s ו- t) מקבל Δ ומוציא Δ.



(וכל קדקוד אחר מקבל ומוציא 0.)

<u>הוכחת הטענה הכללית:</u>

[[ציינו ש- g זרימה חוקית; עכשיו צריך להראות ש- $(f+g)$ זרימה חוקית.]]

- <u>אילוץ קיבולת:</u>
  לכל $u,v\in V$:

$$g(u,v)\le c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$$
$$\Downarrow$$
$$(f+g)(u,v)\le c(u,v)$$

- <u>אנטי-סימטריה ושימור זרימה:</u>
  מלינאריות ההגדרה:

$$\begin{array}{rl} & f(u,v) = -f(v,u) \\ & + \\ & \underline{g(u,v) = -g(v,u)} \\ & (f+g)(u,v) = -(f+g)(v,u) \\ u \neq s,t: & \sum_{v\in V}(f+g)(u,v) = \sum_{v\in V} f(u,v) + \sum_{v\in V} g(u,v) \end{array}$$

<u>גודל הזרימה:</u>

$$|f+g| = \sum_{v\in V}(f+g)(s,v) = \sum_{v\in V} f(s,v) + \sum_{v\in V} g(s,v) = |f|+|g|$$

מאפייני עצירה של האלגוריתם

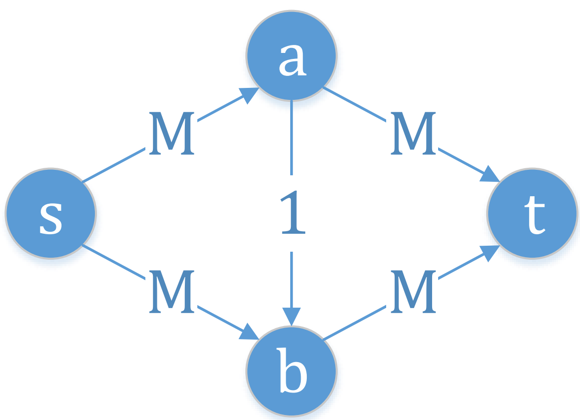
	קיבולות שלמות	קיבולות רציונליות	קיבולות כלליות
האם F-F עוצר?	כן, והזרימה שלמה	כן, והזרימה רציונלית	לא
אחרי כמה איטרציות?	אסון(*)	אסון	∞

(*) אסון = ניתן למצוא חסם עליון אבל הוא זוועתי.

אם בוחרים את p בחוכמה, האלגוריתם תמיד עוצר תוך מס' פולינומי של איטרציות.

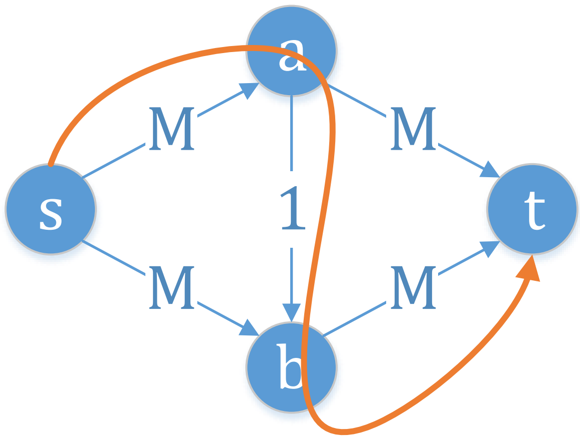
דוגמה למספר גדול של איטרציות

נגריל את הגרף הבא:



[[עבור M שלם כלשהו, גדול כרצוננו.]]

אם תמיד נבחר במסלול:



[להשלים ציור]

נקבל שהאלגוריתם מבצע $2M$ איטרציות.

נראה: **אם** האלגוריתם F-F עוצר, אז הזרימה f שהוא מחזיר היא בגודל $|f|$ מקסימלי.

[להשלים מסלולים בחלק מהציורים]