פרטים אדמיניסטרטיביים (הבוחן)

ב-9 במאי יש בוחן בית.
הוא יהיה בוחן אמיתי מכל בחינה (נוכל לקבל תשובות לשאלות בזמן הבוחן, והוא ייבדק כמו כל בוחן אחר – אם כי לא תהיינה דודות [אפשר לנסות לסמלץ משהו]) אך אין לו השפעה על הציון הסופי.

מטרתו היא לתת לנו פידבק ולהראות לכל סטודנט מה מצבו.
המטרה היא שאנחנו נבדוק את עצמנו.
יש להגיש את הבוחן ביום שני (3 ימים לאחר מכן), אבל מאוד מומלץ לעשות אותו לבד עם מגבלת הזמן (כשעתיים וחצי) [כל המידע לגבי ההגשה (לאן מגישים ומתי) יופיעו באתר לקראת הבוחן עצמו].

אם אין לכם זמן ללמוד לבוחן, אתם יכולים להתמקד בנושא ספציפי וללמוד רק אליו ולהגיש אותו; חלק זה ייבדק ותקבלו פידבק, ואף אחד לא יבוא אליכם בתלונות.

בקיצור – תחשבו איך אתם יכולים ללמוד הכי הרבה מהבוחן ותעשו זאת.
הוא נטו בא לעזור לסטודנטים.

תזכורות + הסברים

<u>משפט הסוגריים</u>:

- v צאצא של $u \Leftrightarrow [d[v], f[v]] \subseteq [d[u], f[u]]$
- u צאצא של $v \Leftrightarrow [d[u], f[u]] \subseteq [d[v], f[v]]$
- אחרת [[כלומר אף אחד לא צאצא של השני]] (u,v בענפים / עצים שונים) הקטעים $[d[u], f[u]], [d[v], f[v]]$ זרים.

<u>משפט המסלול הלבן</u>:
[ברגע שמגלים קדקוד כלשהו, כל מי שנגיש מאותו הקדקוד ע"י מסלולים שעוברים רק בקדקודים שעדיין לא התגלו – יהיה צאצא של הקדקוד הזה שגילינו.]
לכל u,v: v צאצא של $u \Leftrightarrow$ קיים מסלול $u = u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_k = v$ כך שכל $u_1,\ldots,u_k$ לבנים בזמן $d[u]$ [הקדקוד $u = u_0$ עצמו אפור בזמן זה, לכן אנו לא כוללים אותו ברשימה הנ"ל].

<u>הסבר לגבי ההוכחה</u>:

- "$\Leftarrow$" נבע ממבנה הרקורסיה.
- "$\Rightarrow$" מספיק להוכיח שגילינו את $(u_k =)v$ במהלך קטע הזמן $[d[u], f[u]]$.
  [הערה: מגלים קדקוד כאשר עושים עבורו לראשונה DFS-Visit.]
  לכן אינדקצנו [[עשינו אינדוקציה]] על k:
  - <u>$k=0$</u>: את u מגלים בזמן $d[u]$.
  - <u>צעד אינדוקטיבי</u>: נניח עבור $k-1$.
  לפי הנחת האינדוקציה, נבצע $\text{DFS-Visit}(u_{k-1})$ במהלך קטע הזמן $[d[u], f[u]]$.

ובזמן סריקת השכן u_k, אם u_k כבר לא לבן, אזי כבר גילינו אותו (ולא לפני זמן $d[u]$, לפי ההנחה), ואם הוא לבן אזי מבצעים עכשיו $\text{DFS-Visit}(u_k)$ ומגלים את u_k.

□

שימושים של DFS

משפט [מציאת מעגל מכוון]

קיים מעגל (מכוון) ב- $G \Leftrightarrow$ DFS על G מגלה קשת אחורה.

[Tziyure eem tushim]

הוכחה:

- $\Leftarrow$:
  יהי c מעגל מכוון, ויהי v קדקוד ב- c עם זמן $d[v]$ ראשון.
  יהי u הקדקוד האחרון ב- c לפני v.
  לפי בחירת v, כל המסלול מ- v ל- u במעגל לבן בזמן $d[v]$ (פרט ל- v), ולכן לפי משפט המסלול הלבן, u יהיה צאצא של v בעץ DFS.
  אזי לפי הגדרה, (u,v) קשת אחורה.

- $\Rightarrow$:
  המסלול מ- v ל- u בעץ DFS + הקשת (u,v) מהווה מעגל מכוון.

□

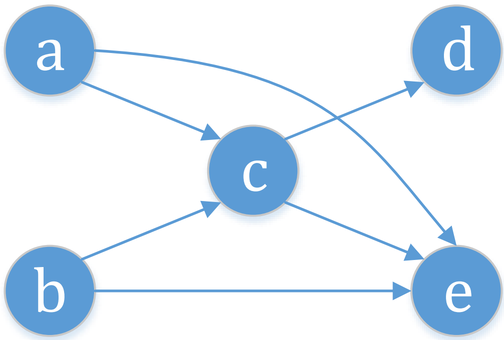
מיון טופולוגי

[נזכיר שכשדיברנו על Super Mario ורצינו לעשות תכנון דינמי עבור ערך מסלול מקסימלי, אמרנו שיש בעיה בהגדרת סדר הקדקודים במקרה ויש מעגל בגרף. אולי ציינו [[אני לא זוכר]] שאם אין מעגל, הדבר כן אפשרי. דבר זה נקרא מיון טופולוגי.]

הגדרה [מיון טופולוגי]

סידור של קדקודים בגרף G, $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ שעבורו לכל קשת (v_i, v_j) מתקיים $i<j$ נקרא מיון טופולוגי.

דוגמה:



מיונים אפשריים:

$$a,b,c,d,e$$
$$b,a,c,d,e$$
$$a,b,c,e,d$$
$$\vdots$$

אבחנה [קיום מיון טופולוגי]
אם יש מעגל מכוון אזי אין מיון טופולוגי.

טענה [מדוע זה אם"ם]
אם G חסר מעגלים מכוונים, אזי לכל קשת (u,v) מתקיים $f[u]>f[v]$.

<u>הוכחה:</u>

- <u>מקרה א'</u>: $d[v]<d[u]$
  לפי משפט הסוגריים, או ש-$(<f[u])$ $f[v]<d[u]$ ואז סיימנו,
  או שמתקיים $[d[u],f[u]]\subseteq[d[v],f[v]]$ – אבל זה לא יתכן, כי במצב כזה u צאצא של v, ואז (u,v) קשת אחורה וקיים מעגל מכוון.

- <u>מקרה ב'</u>: $d[v]>d[u]$
  אבל אז בזמן $d[u]$, הקשת (u,v) מהווה מסלול לבן, ואז לפי משפט המסלול הלבן, v יהיה צאצא של u.
  במקרה זה, לפי משפט הסוגריים מתקיים $[d[v],f[v]]\subseteq[d[u],f[u]]$, ובפרט $f[v]<f[u]$.

$\square$

מסקנה [DFS מוצא מיון טופולוגי]
אם נריץ DFS ונחזיר את הקדקודים לפי סדר יורד של זמני $f[\cdot]$ – נקבל מיון טופולוגי.

רכיבים קשירים היטב

הגדרה [R_G היחס]

נגדיר יחס R_G על קדקודים ב- G:

$u\,R_G\,v$

$\Updownarrow$

קיים מסלול מכוון מ- u ל- v ב- G
וגם
קיים מסלול מכוון מ- v ל- u ב- G

טענה [R_G הוא יחס שקילות]

R_G הוא יחס שקילות

הוכחה:

- רפלקסיביות: uR_Gu לכל u: מיידי (המסלול המנוון (u)).
- סימטריה: $uR_Gv \Rightarrow vR_Gu$: נובע מהסימטריה של ההגדרה [[ליתר דיוק, מהסימטריה של "וגם"]]
- טרנזיטיביות: $(xR_Gy)\wedge(yR_Gu) \Rightarrow xR_Gu$: נובע מחיבור המסלולים [[$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow u$, $u \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x$]]

הגדרה [מחלקות השקילות של היחס]

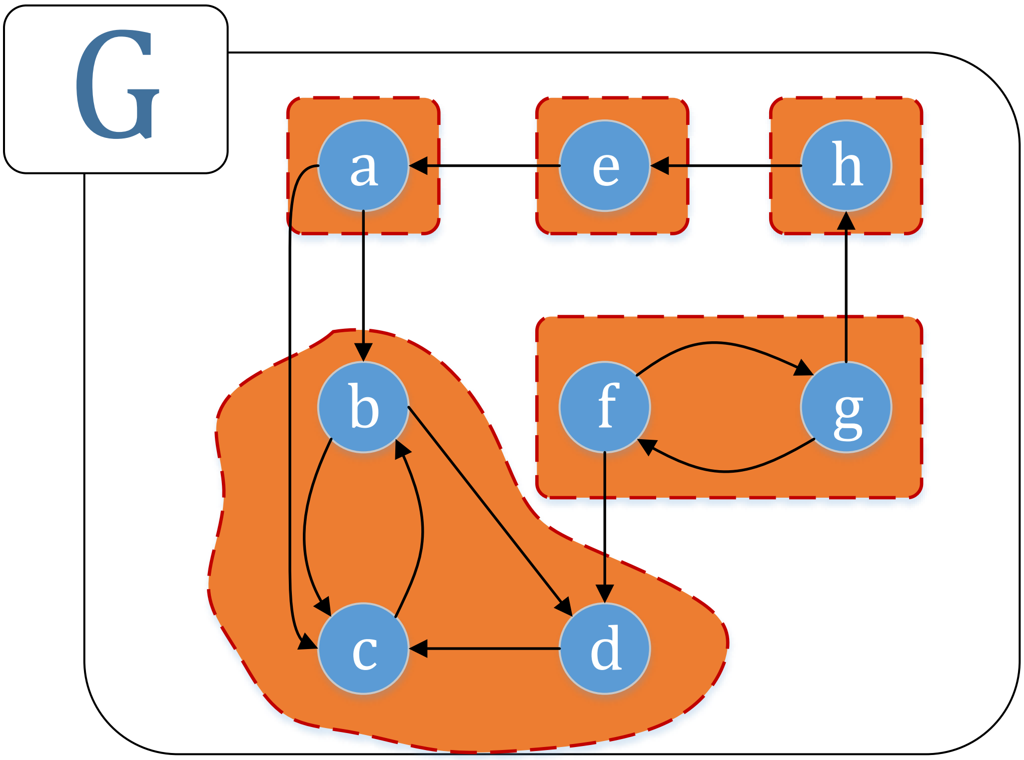
רכיבים קשירים היטב של גרף מכוון G הם מחלקות השקילות של R_G.

במילים פשוטות: רכיב קשיר היטב = קב' קדקודים מקסימלית כך שיש מסלול בשני הכיוונים בין כל שני קדקודים ברכיב.

הערה [רכיבי קשירות (גרף לא מכוון)]

אין הגדרה של "רכיבי קשירות" בגרף מכוון ואין הגדרה של "רכיבים קשירים היטב" בגרף לא מכוון.
אל תערבבו בין השניים.

דוגמה לרכיבים קשירים היטב (רק"ה)



[בדוגמה זו h, למשל, נמצא לבד כי אין קדקוד אחר שאפשר להגיע ממנו ל-h וגם מ-h אליו.]

האלגוריתם של קוסַרַג'ו-שריר (למציאת רק"ה)

נזכיר:

<u>DFS</u>: לולאה חיצונית:

- עוברים על כל הקדקודים, ולכל $v \in V$:
  - אם v עדיין לבן, מבצעים $\underbrace{\text{DFS-Visit}(v)}$.

בונה עץ DFS מ-v

הגדרה [בור, מקור]

רק"ה של גרף G הוא בור אם אין קשתות שיוצאות מהרכיב (לרכיבים אחרים).

רק"ה של גרף G הוא מקור אם אין קשתות שנכנסות לרכיב (מרכיבים אחרים).

[בדוגמה הנ"ל הרכיב $\{b,c,d\}$ הוא בור והרכיב $\{f,g\}$ הוא מקור.]

הגדרה [גרף משוחלף]

הגרף המשוחלף G^t עבור $G=(V,E)$ הוא הגרף:

$$G^t=\left(V,\left\{(u,v)\,\middle|\,(v,u)\in E\right\}\right)$$

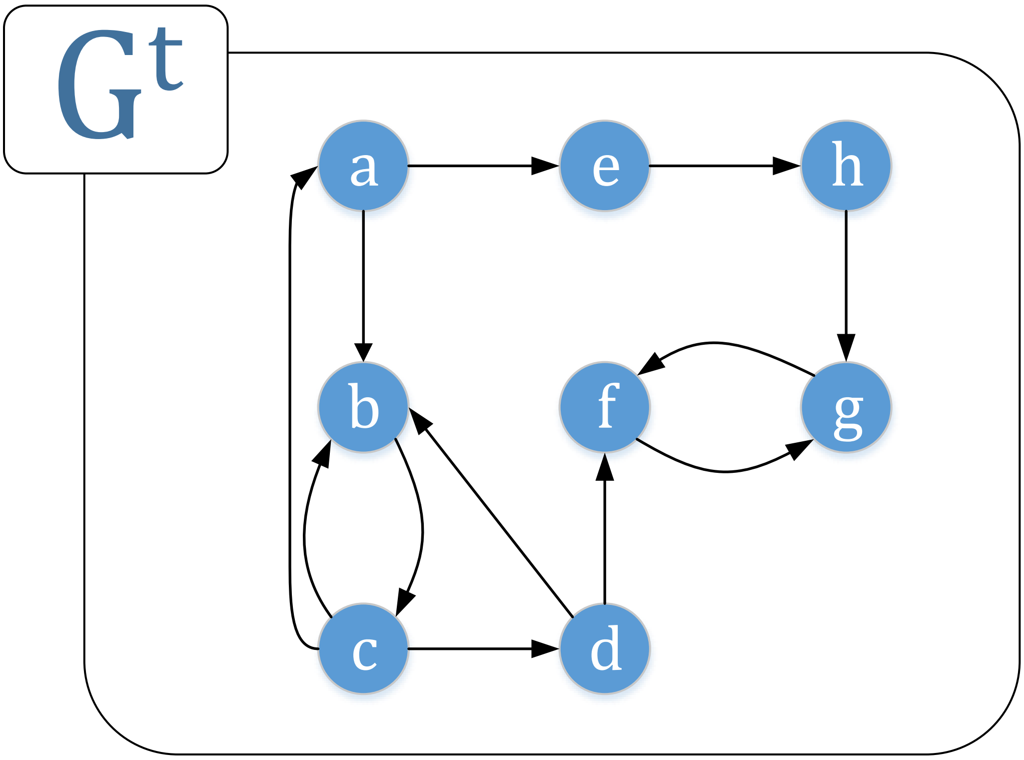
[כלומר זהו אותו הגרף כאשר הופכים את כיווני כל הקשתות.]

האלגוריתם

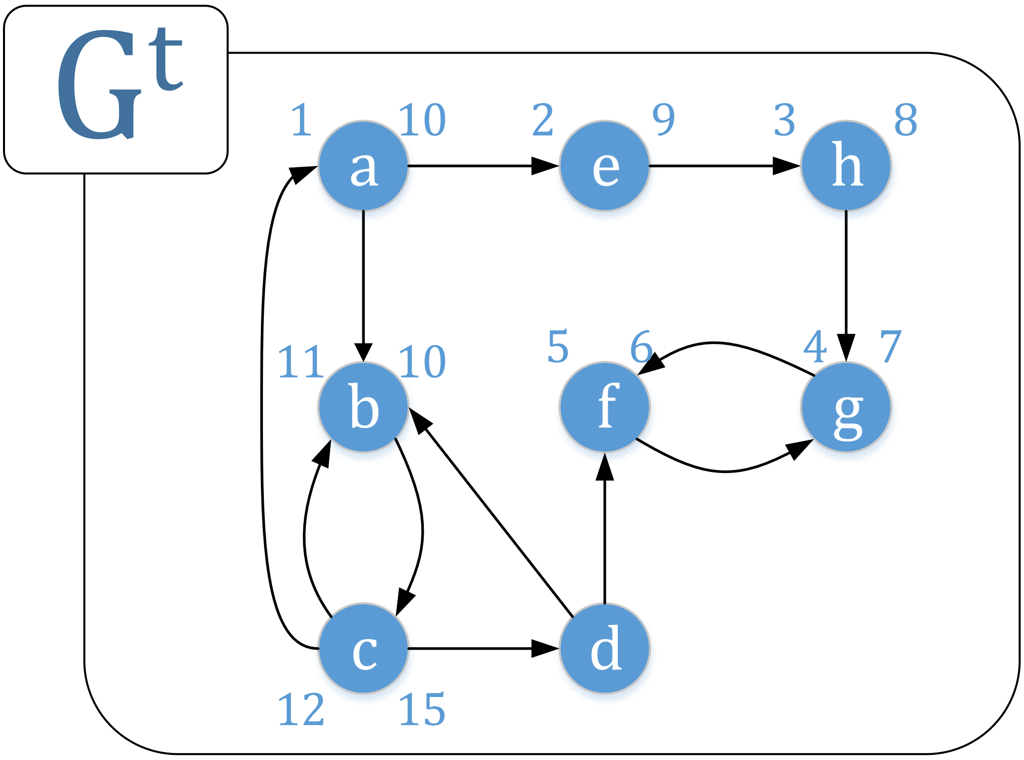
1. נבנה את הגרף G^t.
2. נריץ DFS על הגרף המשוחלף. ונשמור את סדר זמני הסיום $f[\cdot]$.
3. נריץ DFS על הגרף המקורי G, כאשר בלולאה החיצונית עוברים על הקדקודים לפי סדר יורד של $f[\cdot]$ מצעד 2.
4. לכל עץ DFS, נחזיר את קדקודיו כרק"ה של G.

דוגמת הרצה

נחשב את G^t:



לאחר הרצת ה-DFS הראשון נקבל זמני התחלה [משמאל] וזמני סיום [מימין]:



לכן נעבור כעת על G בריצת DFS עם הקדקודים בסדר:

$$b,c,d,a,e,h,g,f$$

- בבדיקת b נגלה את כל הרכיב $\{b,c,d\}$
- בבדיקת a נגלה רק את עצמו, $\{a\}$
- בבדיקת e נגלה רק את עצמו, $\{e\}$
- בבדיקת h נגלה רק את עצמו, $\{h\}$
- בבדיקת g נגלה את כל הרכיב $\{g,f\}$

אלה הם בדיוק כל רכיבי הקשירות של הגרף.

טענה [קדקוד שמסיים אחרון נמצא ברכיב מקור]

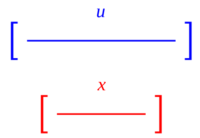
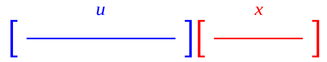
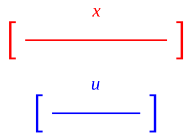
בכל גרף מכוון H, הקדקוד u בעל $f[u]$ מקסימלי (בריצת DFS על H) שייך לרכיב מקור ב- H.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל: לכל קדקוד x כך שקיימת קשת (x,y) עם y ברק"ה של u – גם x באותו רק"ה עם u.

לפי משפט הסוגריים יש 4 אפשרויות לקטעים $[d[x],f[x]],[d[u],f[u]]$:

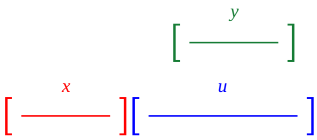
מצב	איור	מסקנה

(א)		$\Leftarrow x$ צאצא של u $\Leftarrow$ יש מסלול $u \rightsquigarrow x \to y$ (כי יש קשת $x \to y$) $\Leftarrow$ יש מסלול $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow u$ (כי y,u באותו רכיב קשירות)
(ב)		לא יתכן כי $f[u]$ מקסימלי
(ג)		גם לא יתכן כי $f[u]$ מקסימלי
(ד)		(ראו הסבר מתחת לטבלה)

<u>אבחנה</u>: מבין כל קדקודי הרכיב ש- u שייך אליו, הקדקוד u' עם $d[\ ]$ ראשון הוא אב קדמון של כל שאר הקדקודים ברכיב, ולכן יש לו $f[\ ]$ מקסימלי.

<u>הסבר לאבחנה</u>: כל המסלולים מ-u' לשאר הקדקודים ברכיב עדיין לבנים בזמן $d[u']$, ולכן הם יהפכו לצאצאים של u'.

<u>מסקנה</u>: u אב קדמון של y בעץ DFS, ולכן קיבלנו:



בתמונה זו, הקשת (x,y) היא מסלול לבן בזמן $d[x]$, ולכן y אמור להפוך לצאצא של x, בסתירה למשפט הסוגריים.

□

אינטואיציה לנכונות האלגוריתם

התחלנו DFS מקדקוד ששייך למקור ב-G^t – ולכן הוא שייך לבור ב-G.

לכן במהלך $\text{DFS-Visit}(u)$ נגלה **בדיוק** את הרק"ה ש-u שייך אליו.

[בתחילת הרצת DFS, כל הקדקודים עוד לבנים לכן כל הקדקודים שניתן להגיע אליהם מקדקוד המקור יהפכו לצאצאים שלו בעץ ה-DFS (לפי משפט המסלול הלבן) – ומיהם הקדקודים שניתן להגיע אליהם מקדקוד ששייך לרכיב שהוא בור? **כל** הקדקודים ברכיב **ורק** הקדקודים ברכיב – כלומר, **בדיוק** הקדקודים ברכיב.

לאחר מכן ממשיכים ולמעשה אפקטיבית מבצעים DFS "חדש" על שאר הגרף (כי כל הקדקודים שגילינו כבר סומנו בשחור), ואז אנו מתחילים מקדקוד השייך לרכיב בור של שאר הגרף (הגרף ללא הרכיב שכבר מצאנו), וכן הלאה.

לכן האלגוריתם מגלה בדיוק את רכיבי הקשירות ככל אחד מעצי ה-DFS שמתגלים.]