חיפוש לעומק – DFS (Depth First Search) (בגרף מכוון)

אנו יודעים ש-BFS מחזיר לנו עץ מסלולים קצרים ביותר כאשר אורך נמדד לפי מספר הקשתות.
מה DFS עושה?

שימושים

- מציאת מעגל מכוון [אם יש]
- מיון טופולוגי [אם אין מעגלים מכוונים]
- מציאת רכיבים קשירים היטב
- האכלת ריריות צהובות

פעולות

- בונה יער עומק עם קשתות מהסוג $(\pi[v], v)$
- מתחזק שדה צבע:

$$col(v)=\begin{cases} \text{לבן} & \text{עוד לא גילינו את } v \\ \text{אפור} & \text{גילינו את } v \text{ אבל } v \text{ עדיין בטיפול} \\ \text{שחור} & \text{סיימנו עם } v \text{ ועם כל התת-עץ של } v \end{cases}$$

[[אני אסמן את הצבעים ע"י W, G ו- B בהתאמה]]

- מתחזק שדות $d[v]$ [= זמן התחלה/גילוי של v] ו- $f[v]$ [= זמן סיום הטיפול ב- v]

האלגוריתם

<u>$\text{DFS}(G)$:</u>

- <u>אתחול:</u>
  - לכל $v \in V$:
    - $col[v] \leftarrow W$
    - $\pi[v] \leftarrow \text{Null}$
    - $time \leftarrow 1$
- <u>לולאה מרכזית:</u>
  - נעבור על כל הקדקודים בסדר כלשהו, ולכל קדקוד $v \in V$:
    - אם $col[v] = W$
    - אזי נבצע $\text{DFS-Visit}(v)$

<u>$\text{DFS-Visit}(u)$:</u>

- $col[u] \leftarrow G$
- $\left.\begin{array}{l} d[u] \leftarrow time \\ time \leftarrow time+1 \end{array}\right\}$

- סריקה רקורסיבית:
  - עוברים על כל השכנים של u בסדר כלשהו, ולכל שכן w של u:
    - אם $col[w]=W$ אזי:
      - $\pi[w]\leftarrow u$ (הקשת (u,w) תהיה קשת בעץ DFS)
      - $\text{DFS-Visit}(w)$
- סיום:
  - $col[u]\leftarrow B$
  - $\left.\begin{matrix} f[u]\leftarrow time \\ time\leftarrow time+1 \end{matrix}\right\}$

[[אנחנו מציינים את הפעולות שנוגעות לזמן ביחד כדי להדגיש שמיד לאחר שאנו קוראים את הזמן הנוכחי אנו משנים אותו, ולכן לא נקבל שבשני ערכי זמן שונים (שני $d[\cdot]$ או $f[\cdot]$) יהיה את אותו הערך.]]

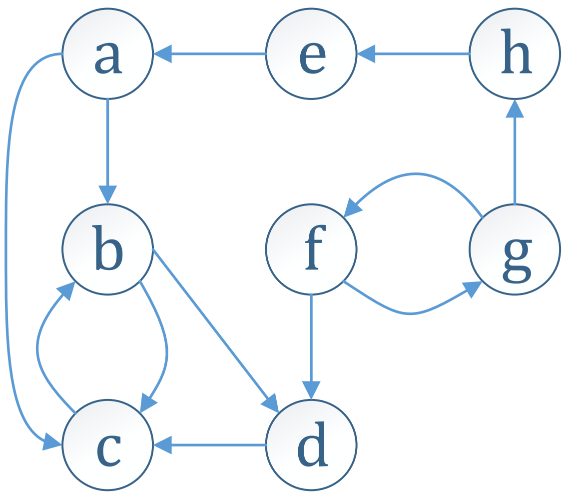
[[הערה: בהמשך נתייחס במספר מקומות לדברים שקורים "בזמן x" כזה או אחר. הכוונה לכך היא למשך הזמן בריצת האלגוריתם בו $time=x$.]]

להלן תמונת מצב לדוגמה באמצע ריצת האלגוריתם:

[תמונת מצב]

דוגמה

ניקח את הגרף:



סדר הקדקודים עבור הסריקה:

$$a,b,c,d,e,f,g,h$$

[להוסיף ציורים של כל ההרצה]

[מיד נסביר את הצבעים שנתנו לקשתות]

זמן ריצה

- עבור כל קדקוד מבצעים DFS-Visit אחד.
- זמן לקריאות לא רקורסיביות ב-$\text{DFS-Visit}(u)$: $O(1+\deg(u))$ [ה-$1+$ הוא כי יכול להיות של-u אין שכנים כלל]
- סה"כ:

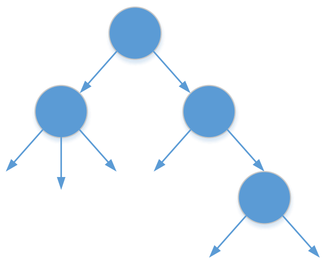
$$O\left(\sum_{u\in V}(1+\deg(u))\right)=O\Big(\underbrace{\sum_{u\in V}1}_{=|V|}\Big)+O\Big(\underbrace{\sum_{u\in V}\deg(u)}_{=|E|}\Big)=O(|V|+|E|)$$

[הדרגות הנספרות הן דרגות יציאה; סכום דרגות היציאה בגרף מכוון שווה בדיוק למספר הקשתות בגרף]

הגדרה [יער מכוון]

יער מכוון הוא אוסף של עצים מושרשים, זרים בקדקודים.

[תזכורת: עץ מושרש הוא גרף עם שורש בו כל המסלולים יוצאים מהשורש לכיוון הקדקודים האחרים:



]

<u>הגדרה שקולה</u>: גרף שבו יש לכל היותר קשת נכנסת אחת, ואין מעגלים מכוונים.

טענה [עץ DFS הוא יער מכוון]

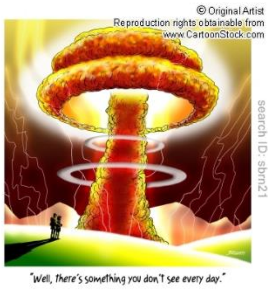
הגרף $\left(V,\left\{(\pi[v],v)\,\middle|\,\pi[v]\neq \text{Null}\right\}\right)$ הוא יער מכוון.

<u>אבחנה</u>: לכל קשת (u,v) כך ש-$\pi[v]=u$ השדה $\pi[v]$ מתעדכן רק פעם אחת (במסגרת $\text{DFS-Visit}(u)$) ולכן $d[v]>d[u]$.

<u>הוכחת הטענה</u>:
צריך להוכיח שאין מעגלים מכוונים.
נוכיח בשלילה: אם יש מעגל מכוון $C=(v_1,v_2,\ldots,v_k,v_1)$ בגרף שהגדרנו, אזי לפי האבחנה מתקיים:

$$d\left[v_1\right] > d\left[v_k\right] > d\left[v_{k-1}\right] > \cdots > d\left[v_2\right] > d\left[v_1\right]$$

בסתירה.



"Well, There's something you don't see every day."

הסבר לגבי צבעי הקשתות

סוג קשת	צבע + דוגמאות	הגדרה	איך מגלים
• קשת עץ	שחורות	$\pi[v]=u$	מיידי
• קשת אחורה	ירוקות (c,b) (g,f)	v אב קדמון של u בעץ DFS	בזמן $\text{DFS-Visit}(u)$ רואים ש- $col(v)=G$ [בגרף לא מכוון צריך להתקיים בנוסף ש- $v\neq\pi[u]$]
• קשת קדימה	סגולות (a,c)	v צאצא של u בעץ DFS (אבל לא בן של u)	בזמן $\text{DFS-Visit}(u)$, $col(v)=B$ ובנוסף $d[v]>d[u]$
• קשת חוצה	אדומות	u,v בעצים או ענפים שונים	התנאים הנ"ל לא מתקיימים

תכונת הסוגריים

אם נעבור על הזמנים, ונצמיד
לכל זמן התחלה $d[v]$ את הסוגר $(_v$
ולכל זמן סיום $f[v]$ את הסוגר $)_v$
– נקבל ביטוי סוגריים חוקי.

פורמלית:
נגדיר $I_v=\left[d[v],f[v]\right]$.
<u>טענה</u>: לכל u,v, מתקיים אחד התנאים הבאים:

1. $I_v\subseteq I_u$ או $I_u\subseteq I_v$
2. I_u,I_v קטעים זרים

יתר על-כן,

1. $I_v\subseteq I_u \Leftrightarrow v$ צאצא של u בעץ DFS
2. I_v,I_u זרים $\Leftrightarrow v,u$ בעצים או ענפים שונים.

לא נוכיח את תכונה זו [אתם מוזמנים לעשות זאת בבית; היא נובעת ממבנה הרקורסיה].

מסקנה [מחליפים צבע רק לצאצאים בעץ]

במהלך קטע הזמן $\left(d[u], f[u]\right)$, **<u>רק</u>** צאצאים של u בעץ יכולים להחליף צבע.

משפט המסלול הלבן

[[המסלול הלבן = "!You shall not path" (צפלין למי שהבין את ה-reference ☺)]]

v צאצא של u בעץ DFS

$\Updownarrow$

בזמן $d[u]$, קיים מסלול מ- u ל- v שבו **<u>כל</u>** הקדקודים לבנים [[מלשון white]] פרט ל- u.

<u>הוכחה</u>:

- <u>$\Leftarrow$</u>:
  אם v צאצא של u, ניקח את המסלול מ- u ל- v בעץ; כל קדקודי המסלול הם צאצאים של u (פרט ל- u עצמו).
  לפי תכונת הסוגריים כל קדקוד x כזה מקיים $d[x] > d[u]$, ולכן בזמן $d[u]$, x עדיין לבן.

- <u>טענת עזר</u>: אם קיים מסלול לבן בזמן $d[u]$ מ- u ל- v, יהי u' השכן הראשון בסריקת השכנים של u שדרכו עובר מסלול כזה.
  אזי בזמן שסריקת השכנים תגיע לשכן u', אותו מסלול עדיין יהיה לבן.
  [[כלומר לא יכול להיות שצבענו קדקודים במסלול הזה לפני שהגענו ל-u'.]]

  <u>הוכחה</u>: בשלילה.
  אם קדקוד x במסלול כבר נצבע, אזי הוא צאצא של u דרך שכן אחר u'' שנסרק לפני u', לכן לפי הכיוון $\Leftarrow$ בהוכחה היה מסלול לבן מ- u ל- x דרך u'' בזמן $d[u]$ – נקרא לו p'.
  אזי p' משורשר עם הסיפא מ- x ל- v של המסלול המקורי [[המסלול המסומן בכתום בציור]] היה לבן בזמן $d[u]$, בסתירה לכך ש-u' הוא שכן ראשון של u שדרכו עובר מסלול כזה.

- <u>$\Rightarrow$</u>: באינדוקציה על u בסדר יורד של זמני $d[\cdot]$.
  - <u>בסיס</u>:
    עבור u עם $d[u]$ מקסימלי הטענה נכונה באופן ריק, כי גילינו כבר את שאר הקדקודים, ולכן אין קדקודים לבנים.
  - <u>צעד אינדוקטיבי</u>: נניח נכונות לכל u' כך ש-$d\left[u'\right] > d[u]$.
    יהיו v, u' כמו בטענת העזר.
    בזמן $d[u]$, u' עדיין לבן, ולכן $d\left[u'\right] > d[u]$, ואז לפי טענת העזר, כשנגיע ל-u' עדיין יהיה מסלול לבן מ- u ל- v דרך u'.

לכן נבצע $\pi[u'] \leftarrow u$ ונקרא ל-$\text{DFS-Visit}(u')$, כאשר עדיין יש מסלול לבן מ-u' ל-v.
לפי הנחת האינדוקציה, v יהיה צאצא של u', ומשום ש-u' בן של u, קיבלנו ש-v יהיה צאצא של u.

$\square$