אלגוריתם Bellman-Ford: מציאת מעגל שלילי

אלגוריתם זה מניח שאין מעגלים שליליים בהוכחת הנכונות שלו.
נשתמש בכך כדי לכתוב אלגוריתם לבדיקת קיום מעגלים שליליים בגרף.
[[הערה: בהרצאות כבר ראינו את האלגוריתם בצורה שגם מזהה מעגל שלילי; פה אנחנו מעמידים פנים שלא ראינו זאת.]]

$\text{Find-Negative-Cycles}(G, w, s)$:

- For each $v \in V$:
  - $d[v] \leftarrow \infty$
  - $\pi[v] \leftarrow nil$ [[$nil = \text{Null}$]]
- $d[s] \leftarrow 0$
- For $i \leftarrow 1$ to $|V|-1$ do:
  - For each $(u,v) \in E$:
    - $\text{Relax}(u,v,w)$
- For each $(u,v) \in E$:
  - $d' \leftarrow d[v]$
  - $\text{Relax}(u,v,w)$
  - If $d' > d[v]$:
    - Return (v, π) מעגל שלילי
- Return אין מעגלים שליליים

[[הרעיון הוא שאם אין מעגלים שליליים אז נגיע בסופו של דבר למצב שבו כל פעולות ה-Relax אינן אפקטיביות (לא משנות דבר), אבל אם יש מעגל שלילי אז תמיד ניתן למצוא קשת ש-Relax תבצע שינוי. בהוכחה רואים שאם אין מעגל שלילי, אז לאחר $|V|-1$ מחזורים של לעשות Relax על כל הקשתות נגיע למצב הסופי הזה, לכן אנו פשוט בודקים אם לאחר מכן עדיין יש Relax שמשפיע – אם כן, אז יש מעגל שלילי; אחרת, אין.]]

[ההוכחה של גרסה זו בקורס הייתה שגויה במשך הרבה שנים.
נלמד היום גרסה מתוקנת, אך עקב כך היא מסובכת יותר.]

הוכחת נכונות

Lemmas galore!

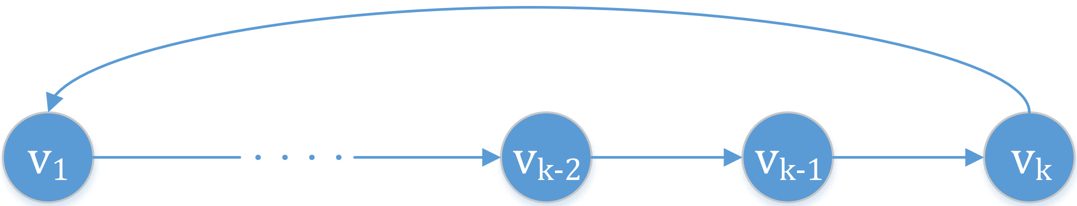
- <u>טענה א'</u>: קיים מעגל שלילי הנגיש מ-s ב-G אם"ם קיימת צלע $(u,v) \in E$ כך ש-$d' > d[v]$ עבורה.
- <u>טענה ב'</u>: אם קיים קדקוד v עבורו מתקיים התנאי $d' > d[v]$ אזי ניתן למצוא מעגל שלילי נגיש מ-s ע"י מעקב אחר המצביעים π, החל מ-v.

- טענה 1: מעבר על כל מערך המצביעים π החל מ-v אשר עבורו התקיים $d'>d[v]$ מוצא מעגל נגיש מ-s.
- טענה 2: כל מעגל שנוצר במערך π הוא שלילי.
- הגדרה: $\delta_k(s,v)=$ משקל המסלול הזול [[הקל]] ביותר מאורך k [[כלומר המכיל k קשתות]] מ-s ל-v.
- טענה 3: לאחר k איטרציות, $d[v]\le\delta_k(s,v)$ לכל $v\in V$, ואם v אינו נגיש מ-s אזי $d[v]=\infty$.
- טענה 4: יהי $p_\pi=(u_1,\dots,u_m)$. אם $d[s]=0$ אזי משקל המסלול מקיים $w(p_\pi)\le d[v]$.
- טענה 5: יהי p_π במערך π מ-u_1 ל-u_m ($m>1$) כך ש-$|p_\pi|>0$. אם מתקיים $\pi[u_1]=nil$ אזי $u_1=s$.

נוכיח את טענות 2-5 ובעזרתן את טענה ב'; אז נוכיח את טענה 1 ועם ב' וְ-1 נוכיח את טענה א'.

הוכחת טענה 2

נתבונן ברגע שנוצר מעגל $c=(v_1,\dots,v_k,v_1)$.



נניח בה"כ כי העדכון האחרון היה $p[v_1]\leftarrow v_k$ [אחרת ניתן להזיז את המעגל כך שהקדקוד "האחרון" הוא זה שמתעדכן].

נסמן ב-d' את הערך שהיה ב-$d[v_1]$ לפני העדכון.
[אנחנו מקפיאים את מצב הריצה ברגע שלפני העדכון הנ"ל].
[[לכן, כיוון שהתבצע Relax אפקטיבי:]]

$$d'>d[v_1]=d[v_k]+w(v_k,v_1)$$

נשים לב שעבור כל קדקוד u וקדקוד האב שלו p מתקיים $d[u]\ge d[p]+w(p,u)$.
[[זאת משום שמתישהו p נבחר להיות האב של u, וזה מתבצע רק אם ה-Relax רואה שניתן להגיע ל-u מ-p בצורה זולה יותר – מה שאומר שלפני הפעולה הזו $d[u]$ היה גדול לפחות כמו $d[p]+w(p,u)$.]]

השוויון התקיים ברגע העדכון כאשר $\pi[u]$ קיבל את p ולאחר מכן $d[p]$ יכול רק לקטון.
נסיק כי $d[v_2]\ge d'+w(v_1,v_2)$ ועבור $3\le i\le k$:

$$d[v_i]\ge d[v_{i-1}]+w(v_{i-1},v_i)$$

לכן:

$$d\left[v_k\right] \geq d\left[v_{k-1}\right] + w\left(v_{k-1}, v_k\right) \geq d\left[v_{k-2}\right] + w\left(v_{k-2}, v_{k-1}\right) + w\left(v_{k-1}, v_k\right) \geq \cdots \geq$$
$$\geq d' + \sum_{i=1}^{k-1} w\left(v_i, v_{i-1}\right)$$

כלומר:

$$d\left[v_k\right] \geq d' + \sum_{i=1}^{k-1} w\left(v_i, v_{i-1}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$d' > d\left[v_1\right] = d\left[v_k\right] + w\left(v_k, v_1\right) \geq d' + \left(\sum_{i=1}^{k-1} w\left(v_i, v_{i-1}\right) + w\left(v_k, v_1\right)\right)$$

והביטוי המסומן בכחול הוא בדיוק משקל המעגל.
[[כלומר אם נסמן את משקל המעגל ב- $w(c)$ אז קיבלנו כי:

$$d' > d' + w(c) \qquad / -d'$$
$$0 > w(c)$$

כלומר משקל המעגל שלילי.]]

הוכחת טענה 3

באינדוקציה [שלמה] על k.

- <u>בסיס:</u>
  המסלול היחיד באורך 0 הוא המסלול המנוון (s).
  $\delta_0\left(s, s\right) = 0$, $d[s] = 0$, ולכל $v \neq s$, $d[v] = \infty$.

- <u>צעד:</u>
  נניח שמתקיים עבור [ערכים הקטנים/שווים ל-] k ונוכיח עבור $k+1$.
  יהי $p = \left(s, \ldots, u, v\right)$ מסלול כך שאורכו $\geq k+1$ והוא מקיים כי $w(p) = \delta_{k+1}\left(s, v\right)$.
  [אם אורך המסלול קטן ממש מ-$k+1$ אזי מהנחת האינדוקציה סיימנו
  מכיוון ש-$\left(u, v\right)$ צלע, באיטרציה ה-$k+1$ ביצענו $\text{Relax}\left(u, v, w\right)$ [כי אנחנו עושים זאת עבור **כל** צלע בכל איטרציה].
  נסמן ב-t את הערך של $d[u]$ בזמן ה-Relax וב-$d_k[u]$ את הערך של $d[u]$ בסוף איטרציה k.
  נשים לב ש-$t \leq d_k[u]$ [[כי מתבצע עוד Relax אחד שמביא את הערך של $d[u]$ מ-$d_k[u]$ ל-t באיטרציה ה-$k+1$, לכן כיוון שהערך יכול היה רק לקטון, הערך החדש t קטן/שווה לערך הקודם $d_k[u]$]].

$$d[v]\le t+w(u,v)\le d_k[w]+w(u,v)\le \delta_k(s,u)+w(u,v)=w(p)=\delta_{k+1}(s,v)$$

לפי הנחת האינדוקציה

הוכחת טענה 4

באינדוקציה על אורך המסלול.

- <u>בסיס</u>:

  מסלול p באורך 0 יהיה מ- s ל- s [[$p=(s)$]].

  מסלול זה מקיים כי $w(p)=0$ וגם $d[s]=0$ [אנו מניחים זאת בתנאי הטענה].

  [[לכן $w(p)\le d[s]$.]]

- <u>צעד</u>:

  נניח שכל מסלול באורך $> i$ מקיים את הטענה ונסמן $p_i=(s,\ldots,\pi[v],v)$ באורך i וכן $p_{i-1}=(s,\ldots,\pi[v])$.

  משקל המסלול:

  [[לפי הנחת האינדוקציה]]

$$w(p_i)=w(p_{i-1})+w(\pi[v],v)\le d[\pi[v]]+w(\pi[v],v)\le d[v]$$

  נסמן ב- t' את $d[\pi[v]]$ בעת ביצוע ה- Relax שעדכן את $d[v]$.

  לאחר ביצוע פעולה זו ייתכן שביצענו Relax של $\pi[v]$ נוסף באיטרציה ה- $k+1$ וכתוצאה מכך:

$$d[v]=t'+w(\pi[v],v)\ge d[\pi[v]]+w(\pi[v],v)$$

הוכחת טענה 5

יהי $p_\pi=(u_1,\ldots,u_m)$ מסלול ב- π עם $m>1$ כך ש- $\pi[u_{i+1}]=u_i$ וְ- $\pi[u_1]=nil$.

מכיוון ש- $\pi[u_2]=u_1$, במהלך הפעלת ה- Relax המוצלח האחרון על u_2 התעדכן $\pi[u_2]$ וזה קורה אם"ם:

$$d[u_2]>d[u_1]+w(u_1,u_2)$$

כלומר $d[u_1]<\infty$.

מכיוון ש- $\pi(u_1)=nil$, לא קיין קדקוד a כך שיש צלע בין a ל- u_1 וגם $\text{Relax}(a,u_1,w)$ עדכן את $d[u_1]$.

הקדקוד היחיד שיש לו ערך התחלתי $>\infty$ הוא s ולכן $u_1=s$.

הוכחת טענה 1 + הסקת טענה ב'

יהי v קדקוד המקיים $d'>d[v]$ – כלומר קיימת צלע (u,v) כך שפעולת $\text{Relax}(u,v,w)$ באיטרציה ה- $|V|$ [[כלומר בלולאה שבסוף האלגוריתם]] עדכנה את $d[v]$ [[ואת $\pi[v]$]] כך:

$$d[v]\leftarrow d[u]+w(u,v)$$
$$\pi[v]\leftarrow u$$

אם מעבר על π החל מ- v מוצא מעגל, אז מטענה 2, הוא שלילי ולכן ב' מתקיים.

נניח בשלילה שהמעבר על π החל מ- v לא מוצא מעגל.
כלומר, המעבר מייצר מסלול p_π מ- u כלשהו ל- v ללא חזרה על אף קדקוד [אנחנו ממשיכים את המעבר ע"מ לקבל את המסלול הארוך ביותר שאנו יכולים].
בהכרח $|p_\pi|\le|V|-1$ אחרת היינו מקבלים מעגל.
נשים לב כי:

$$p_\pi=\left(\pi\left[\pi\left[\cdots\pi[v]\right]\right],\ldots,\pi[v],v\right)$$

כמו-כן מתקיים $\pi[u]=nil$ [אחרת היינו ממשיכים את המעבר שלנו].
$|p_\pi|>0$ ולכן עפ"י טענה 5, $u=s$.
מטענה 3 נקבל שאחרי $|V|-1$ איטרציות:

$$d[v]<d'\le\delta_{|V|-1}(s,v)\le w(p_\pi)$$

[נזכיר שאנו יודעים ש- p באורך של לכל היותר $|V|-1$ אחרת היה בו מעגל.]
מכיוון ש- $\pi[s]=nil$, $d[s]=0$, ולכן מטענה 4 נקבל:

$$w(p_\pi)\le d[v]$$

ולכן:

$$d[v]<d'\le w(p_\pi)\le d[v]$$

וזו סתירה.

[אנו משתמשים בטענה החזקה ביותר שלנו, טענה 3, כדי לומר ש- $d[v]\le\delta_{|V|-1}(s,v)$, ואז משתמשים בכך שבאיטרציה ה- $|V|$ (בסוף האלגוריתם) ניתן להקטין את המסלול אף יותר, ובכך אנו מקבלים שמשקל המסלול קטן יותר ממשקל המסלול הקל ביותר, שזו סתירה.]

בעיית הרמזורים

התברר לחברת אוטובוסים שכל לקוח, אם הוא מתישהו עולה על אוטובוס ועליו לחכות במהלך הנסיעה ביותר משני רמזורים, הוא ירד מהאוטובוס ולעולם לא יעלה על הקו הזה שנית.

<u>מופע:</u>

- גרף מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w:E\rightarrow\mathbb{R}$.
  הקדקודים מתארים צמתים, הצלעות כבישים.
- $S\subseteq V$ קבוצת צמתים מרומזרים.
- קדקוד התחלה + סיום, $s\in V\setminus S$ ו- $t\in V\setminus S$.

<u>צ"ל:</u>

- מסלול קצר ביותר בין s ל- t העובר לכל היותר ב-2 קדקודים מ- S.

<u>פתרון:</u>

רדוקציה למציאת מסלולים קצרים ביותר.

נשכפל את הגרף עוד פעמיים (אין צורך לשכפל את s).
בכל פעם שיוצאים מצומת מרומזר, עוברים לעותק הבא.
אם נכנסים לצומת מרומזר בעותק האחרון, נתקעים (אין לנו עניין במסלולים שמגיעים לשם).
מחפשים כך את המסלול הקצר ביותר מ- s לאחד העותקים של t.

[[הערה: ניתן גם לא לשכפל את t, ולעשות שכל העותקים של הקדקודים שיש להם קשת הנכנסת ל- t תיכנס ל- t המקורי – אבל זה באמת לא משנה הרבה. בכיתה אנחנו ביצענו פתרון עם עותק יחיד של t.]]

[שרטוט]

פורמלית, נבנה גרף:

$$V'=\{v_i | v\in V\setminus\{s\}, i\in\{0,1,2\}\}\cup\{s,t'\}$$
$$E_1=\{(x_i,y_i) | (x,y)\in E, y\notin S, i\in\{0,1,2\}\}$$
$$E_2=\{(x_i,y_{i+1}) | (x,y)\in E, y\in S, i\in\{0,1\}\}$$
$$E_3=\{(t_0,t'),(t_1,t'),(t_2,t')\}$$
$$G'=(V',E_1\cup E_2\cup E_3)$$

[שרטוט נוסף]

[[הערה: ניתן או לרדת רמה כשנכנסים לצומת מרומזר או כשיוצאים ממנו, וניתן לאחד את ה- t-ים השונים או שלא – זה לא משנה בהרבה. עשינו שני שרטוטים בכיתה, אחד בצורה אחת ואחד בצורה אחרת. הפתרון שמתאים להגדרה הפורמלית יורד בכניסה לצמתים ומשאיר את העותקים של t.]]