[[ זהו שיעור השלמה בעקבות פורים, וזו קבוצה שונה מזו שאני בד"כ הולך אליה, אז סביר שיש פער כלשהו. ]]

## אלגוריתם Prim למציאת MST

- ראינו סכמה שבכל איטרציה מוסיפה צלע קלה ביותר שמחברת בין העץ שנבנה עד אותו שלב לשאר הגרף.
- הגדרנו מימוש שמשתמש בערימת מינימום של קדקודים.
- בחרנו קדקוד התחלתי, $v \in V$, והגדרנו:
  - $key(v)=0$
  - $\forall u \neq v \qquad key(u)=\begin{cases} w(v,u), & (v,u)\in E \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $e(u)=(u,v) \quad \forall u \neq v$ (כלומר עבור $u \in V$ כך ש- $(v,u)\in E$, $e(u)$ מאותחלת כ- $(v,u)$, ועבור $u$ שאינו שכן של $v$, מאתחלים $e(u)=\text{NULL}$)

### הוכחת נכונות

נסמן:

- $F_1=(\{v\},\varnothing)$
- $F_i$ – הפרגמנט בתחילת האיטרציה ה- $i$-ית. [פרגמנט = תת-עץ (קשיר) של MST]
- $H_i$ – קבוצת הקדקודים היושבים בערימה בתחילת האיטרציה ה- $i$-ית.

נוכיח:

- <u>טענה ראשית</u>:
  לכל $i \in \{1,2,\dots,n\}$:
  (א) $F_i$ הוא פרגמנט בן $i$ קדקודים.
  (ב) $H_i$ מכילה את כל הקדקודים של $V \setminus V(F_i)$ ורק אותם.
  (ג) לכל צומת $z \in H_i$:

$$0 \neq key(z)=\bar{d}_G(V(F_i),z)$$

[[ כלומר המפתח של $z$ שווה למרחק הקדקוד $z$ מ- $F_i$, שזה משקל הקשת הקלה ביותר שמחברת אותו לקדקוד מ- $F_i$, אם יש כזו, ו- $\infty$ אחרת. ]]
וכן אם $key(z)<\infty$ אז $e(z)$ היא צלע במשקל $key(z)$.

<u>הוכחה</u>:

באינדוקציה על $i$.

- <u>בסיס</u>: $i=1$
אז $V\left(F_1\right)=\{v\}$ וְ- $H_1=V\setminus\{v\}$.
א' וב' מתקיימים – ברור.
נוכיח את ג'.

אם $\left(z,v\right)\in E$ אזי $key(z)=w\left(z,v\right)$ (לפי האתחול) וְ- $e(z)=\left(z,v\right)$.
לכן $\bar{d}_G\left(V\left(F_1\right),z\right)=\bar{d}_G\left(v,z\right)=w\left(v,z\right)$.

אם $\left(z,v\right)\notin E$ אזי $key(z)=\infty$ (לפי האתחול) וכן $\bar{d}_G\left(V\left(F_1\right),z\right)=\infty$ (לפי הגדרה).

- <u>שלב</u>:
$\left|V\left(F_i\right)\right|=i$, $H_i=V\setminus V\left(F_i\right)$.
יהי $z$ הקדקוד שמוציאים מהערימה בשלב ה- $i$-י.
צ"ל כי $e(z)$ הינה הקשת הקלה ביותר המחברת בין $z$ לבין הפרגמנט $F_i$.
נסמן $e(z)=\left(z,u\right)$.
(ידוע ש- $key(z)<\infty$ כי אם לא אז לפי טענה ג' של הנחת האינדוקציה, לכל קדקוד $y\in H_i=V\setminus V\left(F_i\right)$ מתקיים כי $\bar{d}_G\left(V\left(F_i\right),y\right)=\infty$. דהיינו, אין צלעות בין $V\left(F_i\right)$ לבין $V\setminus V\left(F_i\right)$ – ולכן הגרף לא קשיר, בסתירה.)
כיוון ש-$w\left(e(z)\right)=key(z)=\bar{d}_G\left(V\left(F_i\right),z\right)$ (לפי הנחת האינדוקציה, ג'), לכל צלע אחרת $\left(z,u'\right)$ (עבור $u'\in V\left(F_i\right)$) מתקיים:

$$w\left(z,u'\right)\geq w\left(z,u\right)=e(z)$$

בנוסף, לכל $z'\in V\setminus V\left(F_i\right)=H_i$:

$$key\left(z'\right)=\bar{d}_G\left(V\left(F_i\right),z'\right)\geq w\left(e(z)\right)=key(z)$$

וְ- $z$ הוא בעל $key$ הכי קטן בערימה, ולכן לכל צלע חוצה אחרת $e'=\left(u',z'\right)\in OE\left(F_i\right)$:

$$w\left(e'\right)\geq w(e)$$

לכן $e=MWOE\left(F_i\right)$ [כלומר זו הקשת הקלה ביותר שמקשרת בין הפרגמנט לשאר הגרף].
זה מוכיח את א' (מסתמך על האלגוריתם הכחול).

ב':

$$H_{i+1}=V\setminus V\left(F_i\right)\setminus\{z\}=V\setminus V\left(F_{i+1}\right)$$

ג':

אם ל- $z \in H_{i+1} = V \setminus V\left(F_{i+1}\right)$ אין לו צלעות ל- $V\left(F_{i+1}\right)$ אזי:

$$\bar{d}_G\left(V\left(F_{i+1}\right), z\right) = key(z) = \infty$$

אחרת יש צלעות בין $z'$ ל- $V\left(F_{i+1}\right)$.

אם אין צלע $\left(z, z'\right)$ אזי:

$$\bar{d}_G\left(V\left(F_i\right), z'\right) = \bar{d}_G\left(V\left(F_{i+1}\right), z'\right) = \min\left\{\bar{d}_G\left(V\left(F_i\right), z'\right), \underbrace{\bar{d}_G\left(z, z'\right)}_{=\infty}\right\}$$

כמו-כן, $key\left(z'\right)$ לא השתנה כי יכלו להשתנות רק מפתחות של קדקודים שיש להם צלע ל- $z$. גם לא השתנתה $e\left(z'\right)$.

אחרת $\left(z, z'\right) \in E$, ולכן:

$$key_{i+1}\left(z'\right) = \bar{d}_G\left(V\left(F_{i+1}\right), z'\right) = \min\left\{\underbrace{\bar{d}_G\left(V\left(F_i\right), z'\right)}_{=key_i\left(z'\right)}, \underbrace{\bar{d}_G\left(z, z'\right)}_{=w\left(z, z'\right)}\right\}$$

והאלגוריתם אכן עושה את החישוב הזה.

$\square$

## אלגוריתם קרוסקל למציאת MST

הרעיון: במקום לבנות פרגמנט אחד ולהגדיל אותו עד שהו מכסה את כל הגרף, בונים הרבה פרגמנטים ומאחדים אותם.

- $F_1, F_2, \ldots, F_h$ – חלוקה של $G$ לפרגמנטים זרים בקדקודים של אותו MST.
- ממיינים מראש את כל הצלעות מהקלה ביותר לכבדה ביותר, ועוברים עליהן בסדר עולה.
- כאשר בוחנים צלע $e = \left(u, v\right)$, בוחנים לאילו פרגמנטים שייכים $u$ ו- $v$ – נסמנם $F_u$ ו- $F_v$.
- אם $F_u = F_v$ אז מתעלמים מהצלע [ממשיכים לאיטרציה הבאה].
- אם $F_u \neq F_v$ אזי $e = \left(u, v\right)$ היא הצלע הכי קלה שחוצה בין איזשהו זוג פרגמנטים בחלוקה שלנו. בפרט, $e = MWOE\left(F_u\right) = MWOE\left(F_v\right)$ ולכן "ניתן להוסיף אותה," לפי הכלל הכחול.
- האלגוריתם ימזג את $F_u$ ו- $F_v$ ויצרף את $e$ לפרגמנט $F_{u,v} = F_u \cup F_v \cup \left\{e\right\}$ המאוחד.

לשם המימוש נשתמש במבנה נתונים בשם Union-Find, אשר מחזיק אוסף של איברים מחולקים לקבוצות, ויודע לבצע פעולת find, שמחזירה מזהה (נציג קנוני) של הקבוצה אליה שייך איבר, ופעולת union, שמאחדת שתי קבוצות יחד (בהינתן הנציגים שלהן).

סיבוכיות הפעולות של מבנה הנתונים היא $\alpha(n)$ לפעולה, שזו Inverse-Ackermann Function – זו פונקציה שעולה מאוד לאט.

סיבוכיות האלגוריתם של קרוסקל: זמן המיון + $\mathrm{O}(m \log n) = \mathrm{O}(m \cdot \alpha(n))$.

## הוכחת נכונות

- טענה: אחרי ההוספה ה-$i$-ית ($i = 0,1,\ldots,n-1$) של צלע ע"י האלגוריתם, הגרף מתחלק ל-$(n-i)$ פרגמנטים זרים בקדקודים שמכסים את כל הגרף, $F_1, F_2, \ldots, F_{n-i}$ (של אותו MST).
- טענת עזר: יהיו $F, F'$ שני פרגמנטים של אותו MST $T$, תהי $e = MWOE(F) = MWOE(F')$ שמחברת ביניהם ותהי $F, F', F_1, \ldots, F_k$ חלוקה של $G$ לפרגמנטים.
אזי קיים MST $T'$ כך ש-$F \cup F' \cup \{e\}, F_1, F_2, \ldots, F_k$ גם היא חלוקה של $G$ לפרגמנטים של $T'$.

הוכחה:

[[ באינדוקציה על $i$. ]]

- בסיס: $i = 0$
בשלב זה הגרף מתחלק ל-$n$ פרגמנטים זרים. ✓

- שלב:
נניח את נכונות הטענה עבור $i \le n-2$ כלשהו.
תהי $e = (u, w)$ צלע קלה ביותר שמחברת זוג פרגמנטים שונים, $F_u \ne F_w$.
$e = MWOE(F_u) = MWOE(F_w)$.
[[ לפי טענת העזר, קיים MST $T'$ שמכיל את כל הפרגמנטים ]]

הוכחת טענת העזר:
אם $e \in T$ אזי סיימנו.

אחרת $e \notin T$, לכן $T \cup \{e\}$ מכילה מעגל $C$ שמכיל את $e$.
המעגל מכיל לפחות צלע אחת אחרת $e'$ שיוצאת מ-$F$.
נחליף:

$$T' = T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$$

מכך ש- $e,e' \in OE(F)$ וגם $e = MWOE(F)$ נובע ש- $w(e) \le w(e')$, ולכן $w(T') \le w(T)$.

לכן $T'$ הוא MST שמכיל את כל הפרגמנטים $F_1,\dots,F_k$ וגם את $F \cup F' \cup \{e\}$ (זה תת-עץ קשיר של ה-MST $T'$ ולכן הוא פרגמנט).

מספר הפרגמנטים בחלוקה קטן ב-1 ממה שהיה.

$\square$