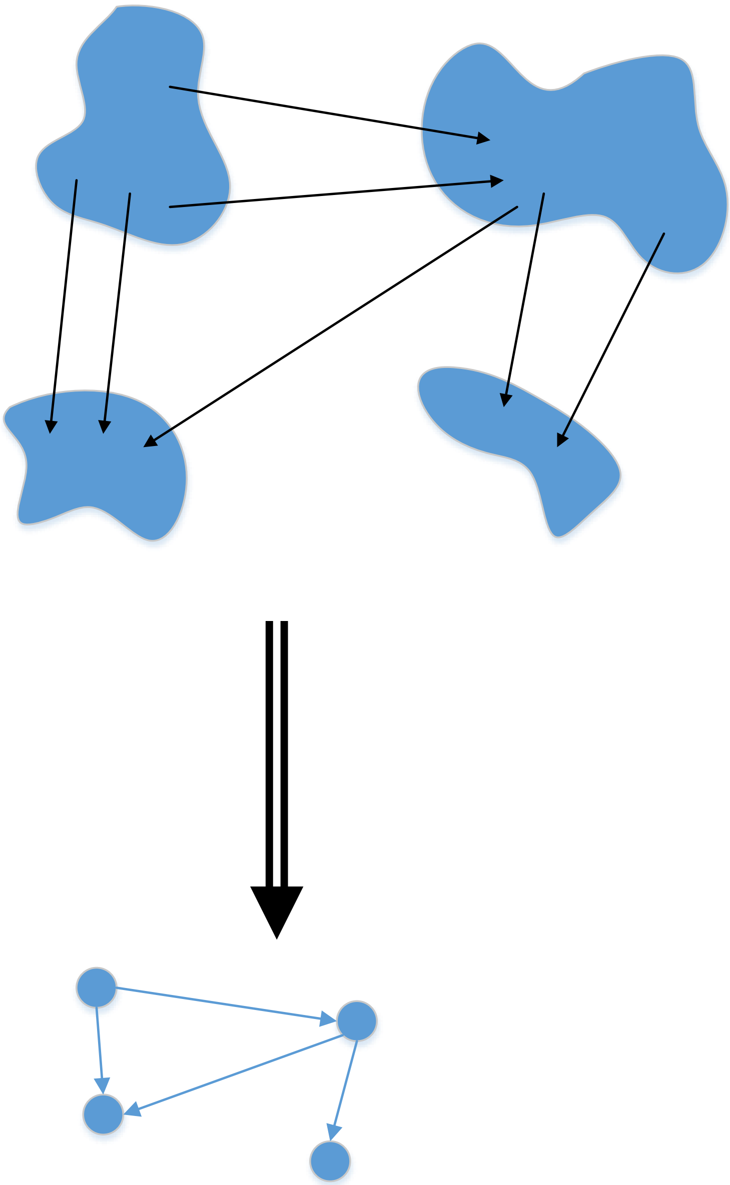
[היום אנו מתחילים את החצי השני של הקורס.
חצי מבחינת חלקים, ולא מבחינת אורך או כמות או כל דבר אחר שאפשר לומר עליו "חצי". ._.
אבל קודם, משהו קטן ששכחנו...]

רכיבים קשירים היטב (Strongly Connected Components)

רק"ה (רכיב קשיר היטב) הוא קבוצה מקסימלית של קדקודים C כך שלכל $u,v\in C$ יש מסלולים $v\rightsquigarrow u$ וְ- $u\rightsquigarrow v$.

הגדרה [גרף רכיבים קשירים היטב]

עבור גרף מכוון $G=(V,E)$, גרף רכיבים קשירים היטב, G^{SCC}, הוא הגרף $G^{SCC}=\left(V^{SCC},E^{SCC}\right)$ כך ש- V^{SCC} הם הרק"ה של G, ולכל שני רכיבים C_1,C_2 יש קשת $(C_1,C_2)\in E^{SCC}$ $\Leftrightarrow$ קיימים $v_1\in C_1, v_2\in C_2$ כך ש- $(v_1,v_2)\in E$.



טענה [שקילות]

לכל שני רכיבים $C_1,C_2 \in V^{SCC}$,
התנאים הבאים שקולים:

(1) קיים מסלול מכוון $C_1 \rightsquigarrow C_2$ ב- G^{SCC}.
(2) **לכל** $u \in C_1, v \in C_2$ קיים מסלול $u \rightsquigarrow v$ ב- G.
(3) **קיימים** קדקודים $u \in C_1, v \in C_2$ כך שיש מסלול $u \rightsquigarrow v$ ב- G.

מסקנה [גרף רכיבים קשירים הוא חסר מעגלים]

הגרף G^{SCC} חסר מעגלים (מכוונים).

<u>הסבר</u>:
אם יש מעגל מכוון שכולל רכיבים C_1,C_2 אזי יש מסלולים מכוונים $C_1 \rightsquigarrow C_2 \rightsquigarrow C_1$, ואז לכל $u \in C_1, v \in C_2$ קיימים מסלולים $\begin{matrix} u \rightsquigarrow v \\ v \rightsquigarrow u \end{matrix}$ ב- G ואז u,v באותו רק"ה. 
סתירה

הוכחת הטענה [בציור]

- <u>$(1) \Rightarrow (2)$</u>:
  [ציור]
- <u>$(2) \Rightarrow (3)$</u>: ברור כי כל רק"ה איננו ריק.
- <u>$(3) \Rightarrow (1)$</u>:
  [ציור]

זרימה

המרצה רוצה להעביר 50 ₪ למרצה אחרת (מיכל שמש) במידה והוא יפסיד בהתערבות על כך שהממוצע בבוחן של הסטודנטים שלומדים אצלו יהיה גבוה מהממוצע של הסטודנטים שלומדים אצלה.

אך הדרך בין המשרדים שלהם סבוכה ומלאה סכנות [[the road is dark and full of terror]], וישנם כמה אילוצים בצורה בה ניתן להעביר את הכסף ממנו אליה בעזרת מרצים אחרים.
נציג את המצב בגרף:

[גרף]

מס' אדום = כמה כסף x יכול להעביר ל- y.

אבל נשים לב שמצב כזה:

[ציור]

כלומר, אם אלקין מעביר לטייג/שטמר 20 ₪, ומצד שני טייג/שטמר מעבירים לאלקין 30 ₪, אז יש כאן פעולות מיותרות – אפשר פשוט ש-טייג/שטמר יעבירו לאלקין 10 ₪ וזהו.
נתאר את המצב בכך שנאמר שמטייג/שטמר עוברים 10 ₪ לאלקין, ובאופן שקול, מאלקין לטייג/שטמר עוברים 10- ₪.

[ציור]

נחיל זאת על כל הגרף:

[גרף מעודכן]

נשים לב: מקסימום 50 ₪ יכולים לעבור מהקבוצה {אני, דיניץ} לשאר המרצים [דרך שלוש הקשתות המסומנות (שנמצאות בחתך הכתום), שערכן 20, 10, 20].

מוטיבציה [פחות פיקטיבית]

[[נרצה למצוא "זרימה מקסימלית" בגרף (כלומר כמה יחידות ניתן להעביר מנקודה אחת לנקודה אחרת עם הקיבולות הנתונות). זה יכול לשמש לבעיות למציאת זרימה מקסימלית בתחומים כגון:]]

- רשתות תקשורת
- רשתות מים / חשמל
- כבישים
- הברחת DVD-ים של *גבירתי הנאווה*

<u>שימושים אלגוריתמיים:</u>

- שידוכים...

הגדרה [רשת זרימה]

רשת זרימה ניתנת ע"י גרף מכוון $G=(V,E)$, קדקוד מקור $s\in V$, קדקוד יעד $t\in V$ ופונקציית קיבולת $c:E\to\mathbb{R}_+$.

- אם זוג סדור $(u,v)\notin E$, נגדיר $c(u,v)=0$ ($c=0\equiv$ אין קשת).

הגדרה [זרימה]

[אלה המספרים שסימנו בירוק בדוגמה הראשונה]

זרימה f ברשת זרימה כנ"ל היא פונקציה $f:V\times V\to\mathbb{R}$ שמקיימת:

- אנטי-סימטריה: $f(u,v)=-f(v,u) \qquad \forall u,v\in V$
- שימור זרימה: לכל קדקוד $s,t\neq$ יש יתרה 0 (לא מייצר / סופג זרימה):

$$\forall u\neq s,t: \qquad \sum_{v\in V} f(u,v)=0$$

- קיבולות: $f(u,v)\le c(u,v) \quad \forall u,v:$

[שימו לב שזרימה יכולה להיות שלילית, אז יכולה להיות זרימה שלילית כאשר אין קשת]

[שיעורי בית: לראות את גבירתי הנאווה (My Fair Lady) עד סוף הסמסטר.]

דוגמה – מיכאל אלקין:

[ציור]

אבחנה:

$$\sum_{v\in V} f(u,v)$$
$$||$$
$$\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)>0}} f(u,v)+\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)<0}} f(u,v)$$
$$||\leftarrow \text{anti}-\text{symmetry}$$
$$\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)>0}} f(u,v)+\sum_{\substack{v\in V\\ f(v,u)>0}} \left(-f(v,u)\right)$$

לגבי הקיבולות:

[ציור של זרימה כאשר אין קשת]

מסקנה [משמעות שימור זרימה]

$$\forall u \neq s,t \qquad \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\ f(u,v)>0}} f(u,v)}_{\text{זרימה חיובית יוצאת}} = \underbrace{\sum_{\substack{v\in V\\ f(v,u)>0}} f(v,u)}_{\text{זרימה חיובית נכנסת}}$$

טענה 1 [אין זרימה אם אין קשתות בשני הכיוונים]

אם $(u,v)\notin E,(v,u)\notin E$ אזי $f(u,v)=f(v,u)=0$.

<u>הוכחה:</u>
לפי אילוץ קיבולות:

$$f(u,v)\leq c(u,v)=0$$

$$0\leq -f(u,v) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{anti-symmetry}}}{=} f(v,u)\leq c(v,u)=0$$

לכן $f(u,v)=f(v,u)=0$.

טענה 2 [הזרימה היוצאת מ-s שווה לזרימה הנכנסת ל-t]

$$\sum_{u\in V} f(s,u)=\sum_{u\in V} f(u,t)$$

<u>הוכחה:</u>

מתכונת שימור הזרימה:

שינוי סדר סכימה

$$0=\sum_{u\neq s,t}\sum_{v\in V} f(u,v) = \sum_{u\neq s,t}\sum_{v\in\{s,t\}} f(u,v) = \sum_{v\in\{s,t\}}\sum_{u=s,t} f(u,v) = \sum_{u\neq s} f(u,t)+\sum_{u\neq t} f(u,s)=$$

$$=\sum_{u\neq s} f(u,t)-\sum_{u\neq t} f(s,u)=\underbrace{\sum_{u\neq s} f(u,t)+f(s,t)}-\underbrace{\sum_{u\neq t} f(s,u)-f(s,t)}=$$

$$=\sum_{u\in V} f(u,t)-\sum_{u\in V} f(s,u)$$

[סכמנו כאן את כל הסכומים שמופיעים בתכונה].

[[<u>הסבר לגבי המעבר המסומן באדום</u>: בסכום זה, לכל שני קדקודים $u,v\notin\{s,t\}$, קיים המחובר $f(u,v)$ וגם המחובר $f(v,u)$. כיוון ש-$f(u,v)=-f(v,u)$, ערכים אלה מצטמצמים ל-0, ולכן נותרים רק ערכים שכוללים את s או את t.]]

$\square$

הגדרה [גודל זרימה]

גודל זרימה f מוגדר בתור:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) \overset{\text{לפי טענה 2}}{=} \sum_{v \in V} f(v,t)$$

בעיית זרימה מקסימלית (Max Flow)

בהינתן רשת זרימה, יש למצוא זרימה חוקית f ברשת עם גודל זרימה $|f|$ מקסימלי.

<u>דוגמאות לזרימה:</u>

- מסלול מכוון מ-s ל-t:
  [ציור]
- מסלולים זרים מ-s ל-t:
  [ציור]
- סכום מסלולים מ-s ל-t:
  [ציור]

[בכל קשת לה אנו נותנים ערך x אנו נותנים את הערך $-x$ לקשת ההפוכה, לכן ודאי שתתקיים אנטי-סימטריה. יש להקפיד ששאר הדברים גם יתקיימו.]

<u>ניסיונות למצוא אלגוריתם לפתרון הבעיה:</u>

- רעיון 1:
  - נתחיל מ-$f \equiv 0$.
  - בכל צעד נחפש מסלול זר למסלולים הקודמים ונזרים דרכו כמה שאפשר.
  - דוגמה נגדית:
    [ציור]
    אם נתחיל במסלול העליון, נקבל רק זרימה של 1, בעוד ניתן לבנות זרימה של 3.
- רעיון 2:
  - נקרא למסלול $p : s \rightsquigarrow t$ לא רווי אם לכל קשת $(u,v) \in p$ מתקיים $f(u,v) < c(u,v)$.
  - בכל צעד נחפש מסלול לא רווי, ונוסיף לזרימה כמה שאפשר (כלומר נוסיף את $\min\limits_{(u,v) \in p} \{c(u,v) - f(u,v)\}$).

- דוגמה נגדית:
  [ציור]
  נבחר מסלולים:
  (1) $s \to a \to b \to t$ – מוסיף 1 לזרימה
  (2) $s \to b \to t$ – מוסיף 1 לזרימה
  (3) $s \to a \to t$ – מוסיף 1 לזרימה
  קיבלנו זרימה בגודל 3.
  לעומת זאת, אם היינו בוחרים את הזרימה הבאה:
  [ציור]
  היינו מקבלים זרימה בגודל 4.

לא מספיק לנו כאן לנקוט בגישה חמדנית, כי אלגוריתם שלא מתחרט פשוט לא עובד במקרה זה.

[נמשיך בפעם הבאה.]