אלגוריתמים חמדנים

נפתח בדוגמה:

נניח שאנו פותחים מסעדה [[למשל, לאחר שוויתרנו על תואר ראשון במדעי המחשב]], שתפריטה כולל:

תפריט
סלט ירקות
סלט קינואה
מרק עדשים
מרק ירקות
פסטה
חומוס עם טחינה
מג'דרה
סלט פירות
סורבה שוקולד וקוקוס

עכשיו נניח שאנו רוצים לאכול את הדברים הטעימים ביותר, כל עוד יש לנו מקום.

פתרון ראשון: נתחיל לאכול, וכל פעם נבחר את המנה הבאה לפי מה נראה לנו הכי טעים ושיש לנו מקום עבורו באותו רגע.

נניח בחרנו לאכול, לפי הסדר:

1	מרק עדשים
2	פסטה
3	סלט ירקות

עכשיו בתור קינוח נרצה לאכול את הסורבה – למעשה, זה הדבר הכי טעים בתפריט מבחינתנו. אבל – כבר אין לנו מקום!
אם היינו מראש משאירים לנו מקום לסוף בשביל הסורבה, היינו מקבלים ארוחה טעימה יותר, גם אם היינו נאלצים להתפשר על בחירה פחות טעימה בשלב קודם.

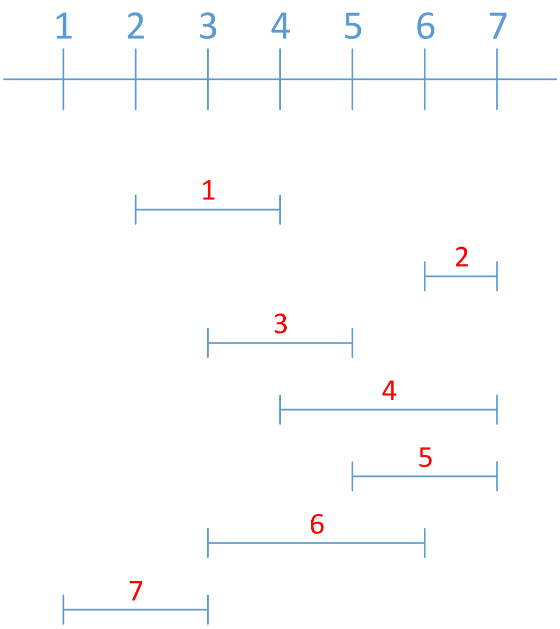
אלגוריתם כנ"ל, שבוחר בכל פעם את האפשרות הטובה ביותר לאותו הרגע נקרא **אלגוריתם חמדן**, וכפי שראינו כעת, זהו לא תמיד הפתרון הטוב ביותר.

בעיית הפעילויות

- <u>מופע</u>: אוסף של n קטעים פתוחים (להם נקרא "זמני הפעילויות").
  כל פעילות $i=$ קטע פתוח (s_i, f_i) (עבור $i\in\{1,\dots,n\}$).
- <u>פתרון חוקי</u>: תת-קבוצה $I\subseteq\{1,\dots,n\}$ כך שהקטעים $\{(s_i, f_i)|i\in I\}$ זרים – כלומר $\forall i\neq j\in I \quad (s_i, f_i)\cap(s_j, f_j)=\varnothing$.
- <u>יש למצוא</u>: קבוצה חוקית I בגודל $|I|$ מירבי.

דוגמה

i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	2	6	3	4	5	3	1
f_i	4	7	5	7	7	6	3



[[שימו לב: הקטעים הנתונים יכולים להיחתך; אנו רוצים שהקטעים **__בפתרון__** לא יחתכו.]]

[__הערה__: הקטעים פתוחים, לכן למשל $(1,2)$ ו-$(2,3)$ לא נחתכים, למרות שיש להם "גבול משותף".]

פתרונות חוקיים:

$$\{6,7\}$$
$$\{1,4\}$$

פתרונות אופטימליים:

$$\{2,3,7\}$$
$$\{2,6,7\}$$

אלגוריתם נאיבי

- לעבור על כל תתי-הקבוצות $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$
- לבדוק עבור כל אחת האם היא חוקית
- להחזיר את הגדולה ביותר

סיבוכיות: לפחות $O\left(2^n\right)$ [[כי זה מספר תתי-הקבוצות של $\{1,\ldots,n\}$]].

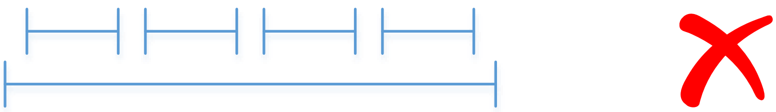
אלגוריתם חמדן

- נתַחְזק:
  - $I=$ הפתרון הנוכחי
  - $S=$ כל הקטעים שאפשר עוד להוסיף (כלומר שאינם ב- I ולא נחתכים עם אף קטע ב- I
- אתחול:
  - $I \leftarrow \varnothing$
  - $S \leftarrow \{1,\dots,n\}$
- צעד:
  - כל עוד $S \neq \varnothing$:
    - נבחר קטע $i \in S$ לפי כלל בחירה מסוים [מיד נדון באפשרויות]
    - נוסיף את הקטע $I \leftarrow I \cup \{i\}$
    - נסיר מ- S את i ואת כל הקטעים שנחתכים עם i **
- סיום:
  - אם $S=\varnothing$, נחזיר את I

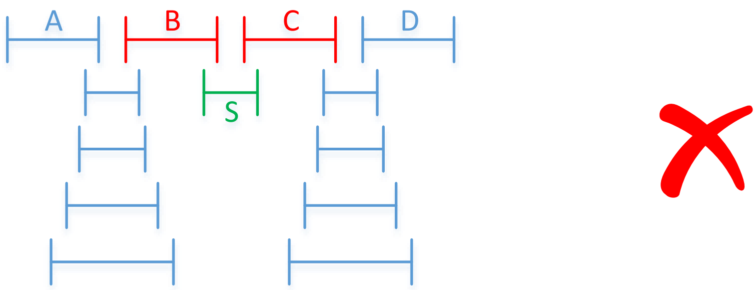
כללי בחירה אפשריים [ודוגמאות נגדיות לאלה שלא עובדים]:

- הקטע הכי קצר:

- הקטע שמתחיל ראשון:



- הקטע שנחתך עם מספר מינימלי של קטעים אחרים (ב- S):



כאן, לפי כלל הבחירה, יש לבחור תחילה ב-S, ולכן לא ניתן לבחור ב-B או ב-C.

כל בחירה נוספת תניב לכל היותר קבוצה בת 3 קטעים, אך אם לא היינו בוחרים ב-S, היינו יכולים ליצור קבוצה של ארבעה קטעים ($\{A,B,C,D\}$).

- הקטע שמסתיים ראשון:
✓ פה אין לנו דוגמה נגדית, וזה באמת עובד.

דוגמת ריצה

- אתחול:
  - $I \leftarrow \varnothing$
  - $S \leftarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- צעד 1:
  - $I \leftarrow \{7\}$
  - $S \leftarrow \{2,3,4,5,6\}$
- צעד 2:
  - $I \leftarrow \{3,7\}$
  - $S \leftarrow \{2,5\}$
- צעד 3:
  - $I \leftarrow \{2,3,7\}$
  - $S \leftarrow \varnothing$
- נחזיר: $I = \{2,3,7\}$

[שימו לב: ישנם פתרונות אופטימליים אחרים, אך עלינו להחזיר רק אחד מהם.
ספציפית בדוגמה זו, אלגוריתם חמדן לא יחזיר את הפתרון $\{2,6,7\}$, למרות שהוא אופטימלי.]

הוכחת נכונות

- משפט 1: האלגוריתם מחזיר קבוצה חוקית.
(זה לפי צעד $\boxed{**}$)
- משפט 2: האלגוריתם מחזיר פתרון אופטימלי.

"הוכחה" נכונות שגויה [לאלגוריתם חמדן]

"בכל שלב האלגוריתם מבצע בחירה טובה ביותר (משאיר זמן מירבי לפעילויות נוספות) ולכן הפתרון שמוחזר הוא אופטימלי."

יכולנו לומר את הנ"ל על כל אחד מהאלגוריתמים השגויים שראינו.
למעשה, ישנן בעיות שניתן לפתור בצורה יעילה ואופטימלית [כלומר שנמצאות ב- P], אך לא קיים אלגוריתם חמדן שעושה זאת [כלומר שפותר אותן בזמן פולינומיאלי], ועדיין ניתן לומר עליו את הנ"ל.

גישה נכונה

להשוות את הפלט I לפתרון אופטימלי (לא ידוע) O.

מימוש לא נכון של גישה זו: לנסות להוכיח כי $I=O$ [למשל בדוגמה הנ"ל, אם ה-O שלקחנו הוא הפתרון האופטימלי $\{2,6,7\}$, אז בוודאות הפתרון שהאלגוריתם מחזיר **שונה ממנו** – אבל הוא **לא פחות טוב ממנו**.]

מימוש כן נכון [לבעיה שלנו]: נוכיח כי $|I|=|O|$.

- טענת עזר: בכל שלב באלגוריתם יש פתרון אופטימלי O שמכיל את I.

הוכחת משפט 2 לפי טענת העזר

[אנו תמיד קודם מוכיחים את המשפטים המרכזיים ואז את טענות העזר]

ע"פ טענת העזר, עבור הפלט I (כלומר I בשלב האחרון) קיים פתרון אופטימלי O' כך ש-$I\subseteq O'$.
צ"ל: $I\supseteq O'$ (ואז נובע כי $I=O'$ [ראו הערה בסוף]).

נניח בשלילה שקיים קטע $k\in O'$ כך ש-$k\notin I$.
בסוף האלגוריתם, $S=\varnothing$, לכן $k\notin S$ [[ולכן $k\in\overline{S}$ (המשלים של S)]].
לפי האפיון של S, אנו יודעים ש-$\overline{S}=\{$ קטעים שהם או ב-I או נחתכים עם קטע ב-I $\}$.
$k\notin I$, לכן k נחתך עם קטע $i\in I$.
אבל $I\subseteq O'$, לכן $i\in O'$, ואז יש שני קטעים שנחתכים ב-O': i וְ-k.
זאת בסתירה לכך ש-O' פתרון חוקי.

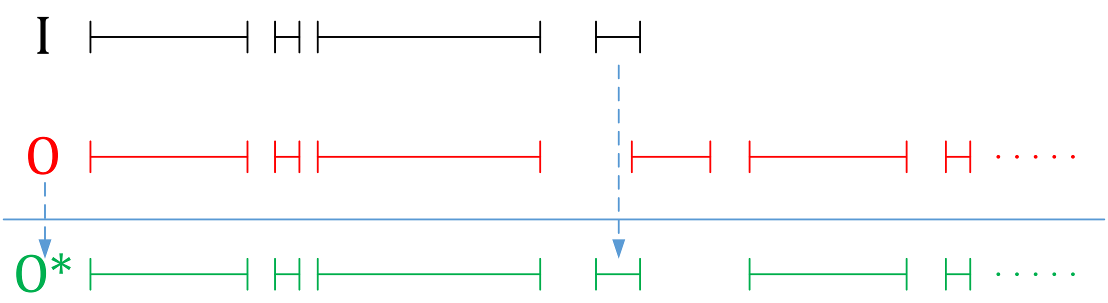
[הערה: אמרנו שבאופן כללי לא כדאי לנסות להוכיח כי $I=O$ כאשר O פתרון אופטימלי כללי.
מה שאנחנו עושים כאן זה להוכיח **שקיים** פתרון אופטימלי O' ששווה ל-I – ולכן I הוא פתרון אופטימלי. כיוון שכל הפתרונות האופטימליים לבעיה הזו הם באותו הגודל, אנו מקבלים שאם נבחר פתרון אופטימלי כללי כלשהו, O, אזי $|O|=|O'|=|I|$.]

[[הסבר על ההוכחה:
אם יש קטע שנמצא ב-O' ולא ב-I, זה אומר שהוא לא נחתך עם אף אחד מהקטעים ב-I – אבל אז לא הייתה לנו שום סיבה להוציא אותו מ-S בכל שלבי האלגוריתם, אז בסופו של דבר היינו אמורים להוסיף גם אותו. זה מה שמביא אותנו לסתירה הנ"ל.]]

הוכחת טענת העזר

באינדוקציה על מספר הצעדים ($|I|$).

[הסבר מראש:
מה שנעשה זה לקחת פתרון אופטימלי O שהקטעים הראשונים שלו זהים לשל I פרט לאחרון, ולבנות פתרון O^* שמכיל את האחרון של I במקום זה שנמצא במקומו ב-O.



[

- <u>בסיס:</u>
  $I=\varnothing$ – כל פתרון מכיל את I, בפרט $O\subseteq I$ לכל פתרון אופטימלי O.

- <u>צעד אינדוקטיבי:</u>
  נניח נכונות עבור $|I|=l-1$ ונוכיח עבור $|I|=l$.
  נסמן $I=I_l$ בצעד ה-l (אחרי הוספת l איברים).
  בצעד ה-l הוספנו קטע i כלשהו וקיבלנו $I_l=I_{l-1}\cup\{i\}$.
  לפי הנחת האינדוקציה, קיים פתרון אופטימלי O כך ש-$I_{l-1}\subseteq O$.

  - <u>מקרה א':</u> $i\in O$
    אזי $I_{l-1}\subseteq O$ וכן $\{i\}\subseteq O$ ולכן $I_l=I_{l-1}\cup\{i\}\subseteq O$.

  - <u>מקרה ב':</u> $i\notin O$
    יהי j הקטע עם זמן הסיום (f_j) המינימלי מתוך $O\setminus I_{l-1}$.
    כלומר $j\in O\setminus\left(I_l\setminus\{i\}\right)$.

  <u>טענה:</u> $O^*=\left(O\setminus\{j\}\right)\cup\{i\}$ הוא פתרון חוקי ואופטימלי, ומכיל את I_l.
  נוכיח את שלושת הדברים:

  - <u>$I_l\subseteq O^*$:</u>
    ראשית, $I_{l-1}\subseteq O^*$ (כי לא הסרנו מ-O אף איבר שנמצא ב-I_{l-1}).
    $j\notin I_l$ וכן $i\in O^*$, ולכן $I_l=I_{l-1}\cup\{i\}\subseteq O^*$.

  - <u>הפתרון הוא אופטימלי:</u>
    צ"ל: $\left|O^*\right|=|O|$.
    הסרנו $j\in O$ והוספנו $i\notin O$ ולכן $\left|O^*\right|=|O|-1+1=|O|$.

  - <u>הפתרון הוא חוקי:</u>
    תחילה נסביר ב**נפנוף ידיים** ☺:
    j בא לפני שאר הקטעים ב-O (מהגדרת j).

i בא לפניו (מהגדרת האלגוריתם).
לכן i בא לפני שאר הקטעים ב- O.

<u>הוכחה אמיתית</u>:
צ"ל: i לא נחתך עם אף קטע ב- $O\setminus\{j\}$.
יהי $k\in O\setminus\{j\}$.

- <u>מקרה א'</u>: $k\in I_{l-1}$
במקרה זה, $i,k\in I_l$, וְ- I_l חוקי, לכן i,k לא נחתכים.

- <u>מקרה ב'</u>: $k\notin I_{l-1}$, כלומר $k\in O\setminus I_{l-1}$
במקרה זה, בחרנו את $j\in O\setminus I_{l-1}$ להיות הראשון מבחינת זמן סיום, כלומר $f_j\le f_k$.
בתחילת השלב ה- l, j היה קטע חוקי (כלומר $j\in S$), כי לפי חוקיות O, j לא נחתך עם אף קטע ב- I_{l-1}.
לפי הגדרת כלל הבחירה, i היה קטע ב- S שמסתיים ראשון – כלומר $f_i\le f_j\quad(\le f_k)$.

<u>טענה</u>: הקטע k מתחיל אחרי הקטע i, כלומר $s_i\le s_k$.
מכאן ינבע ש- $(s_i,f_i)\cap(s_k,f_k)=\varnothing$ ובכך נסיים.

<u>הוכחת הטענה</u>:
O חוקי, לכן $f_j\le s_k$ (כי אחרת $s_k\le f_j(\le f_k)$, ואז יש נקודות בקטע j שנמצאות בתוך הקטע k).
[[כלומר, j מסתיים ראשון מתוך הקטעים ב- $O\setminus I_{l-1}$, לכן אם k הוא לא j, אז הקטע k חייב להתחיל אחרי ש- j מסתיים, אחרת שני הקטעים היו נחתכים.]]
אבל אנחנו יודעים ש- $f_i\le f_j$, ולכן $f_i(\le f_j)\le s_k$.

□