## תזכורות והערות

- הגדרה: שפה $B$ היא $NP$-קשה ($NP$-hard) אם לכל שפה $A\in NP$ מתקיים $A\leq_p B$.
- הגדרה: שפה $B$ היא $NP$-שלמה ($NP$-complete, $NPC$) אם:
  - $B$ היא $NP$-קשה.
  - $B\in NP$.

[ציור (minimap)]

[שימו לב לדברים הבאים:

- זה שבעיה (שפה) נמצאת ב-$NP$ לא אומר שהיא קשה – הרי $P\subseteq NP$.
- זה ששפה היא $NP$-קשה לא אומר כ"כ הרבה על הקושי שלה, שכן היא יכולה להיות אי-פתירה לחלוטין (כמו בעיית העצירה – שפת $L_{halt}$), ואז היא כלל לא מעניינת.
- קבוצת הבעיות שהן $NP$-שלמות מכילה את הבעיות הקשות ביותר ב-$NP$.

]

ראינו:

1. אם שפה $A$ היא $NP$-שלמה אזי $A\in P \Leftrightarrow P=NP$.
2. אם $A$ היא $NP$-קשה וגם $A\leq_p B$ אזי גם $B$ היא $NP$-קשה [כלומר מספיק להראות רדוקציה משפה **כלשהי** שהיא $NP$-קשה ל-$A$ כדי להראות שגם $A$ היא $NP$-קשה].

## בעיית קדקודים וכיסויים

[ישנן בעיות למציאת מקסימום/מינימום שאנו כבר יודעים שקשות (כגון מציאת חתך מקסימלי, או קבוצה בלתי-תלויה מקסימלית).
אם יש לנו אלגוריתם שיודע למצוא **האם** יש (למשל) קבוצה בלתי תלויה בגודל $\leq k$, היינו יכולים בעזרת חיפוש בינארי למצוא קבוצה בלתי תלויה מקסימלית (לא נסביר איך [[ נראה לי שזה בדומה לצורה שבה עושים חיפוש בינארי במערך אינסופי – בודקים את התא במקום $2^i$ עבור $i\in\{0,1,2,\ldots\}$ ]]).
לכן מעתה נדבר על מציאת "האם יש משהו כזה בגודל של לפחות (או לכל היותר) $k$."]

### בעיית קבוצה בלתי-תלויה (IS)

- $IS$ (Independent Set) $=$ כל הזוגות $(G=(V,E),k)$ כך שקיימת קב"ת [[ = קבוצה בלתי תלויה ]] $U\subseteq V$ בגודל $\leq k$.
- קבוצה בלתי תלויה: קבוצת קדקודים $U$ כך שלכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $u\notin U$ או $v\notin U$ (או שניהם).

## בעיית כיסוי קדקודים (VC)

- $VC=$ (Vertex Cover) כל הזוגות $\left(G=\left(V,E\right),t\right)$ כך שקיים כיסוי קדקודים $C\subseteq V$ בגודל $\geq t$.
- כיסוי קדקודים: קבוצת קדקודים $C\subseteq V$ כך שלכל קשת $\left(u,v\right)\in E$ מתקיים $u\in C$ או $v\in C$ (או שניהם).

<u>אבחנה</u>: $U$ קב"ת בגרף $G=\left(V,E\right)$ אם"ם $V\setminus U$ כיסוי קדקודים ב-$G$.

## רדוקציה ביניהם

<u>טענה</u>: קיימת רדוקציה $IS\leq_p VC$.

<u>הוכחה</u>:
נגדיר $f\left(G=\left(V,E\right),k\right)=\left(G,\left|V\right|-k\right)$.

- <u>זמן ריצה</u>:
  - להעתיק את $G$ לוקח זמן $O\left(\left|G\right|\right)$.
  - לחשב את $\left|V\right|-k$ לוקח זמן $O\left(\log\left|V\right|\right)$ [[ כי המספרים הללו בזיכרון מיוצגים ע"י $\log\left|V\right|$ סיביות ]]
- <u>נכונות</u>:

$\left(G,k\right)\in IS\Leftrightarrow$ קיימת קבוצה בלתי תלויה $U\subseteq V$ בגודל $\leq k$

$\Leftrightarrow$ קיימת קב"ת כך ש-$\left|V\setminus U\right|\leq\left|V-k\right|$

$\Leftrightarrow$ קיים כיסוי קדקודים $C\subseteq V$ כך ש-$\left|C\right|\leq\left|V\right|-k$.

מהאבחנה

$\square$

## בעיית הקליקה (CLIQUE)

- $CLIQUE=$ כל הזוגות $\left(G=\left(V,E\right),k\right)$ כך שקיימת קליקה $U\subseteq V$ בגודל $\leq k$.
- קליקה: קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ כך שלכל $u,v\in U$ ($u\neq v$), $\left(u,v\right)\in E$ קשת.

נשים לב שאת התנאי של קבוצה בלתי תלויה ניתן לרשום גם באחת משתי הדרכים הבאות:

- קבוצה בלתי תלויה: קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ כך שאם $\left(u,v\right)\in E$ קשת אז $\left\{u,v\right\}\not\subseteq U$.
- קבוצה בלתי תלויה: קבוצת קדקודים $U\subseteq V$ כך שאם $u\neq v$ ו-$\left\{u,v\right\}\subseteq U$ אזי $\left(u,v\right)$ לא קשת.

<u>אבחנה</u>: $U\subseteq V$ קבוצה ב"ת בגרף $G=\left(V,E\right)\Leftrightarrow U$ קליקה בגרף המשלים, $G^c=\left(V,E^c\right)$, כאשר:

$$E^c = \left\{ (u,v) \middle| \begin{array}{c} u \neq v \\ (u,v) \notin E \end{array} \right\}$$

<u>דוגמה</u>:

[ציור]

## רדוקציה בין קב"ת לקליקה

<u>טענה</u>: קיימת רדוקציה $IS \leq_p CLIQUE$.

<u>הוכחה</u>:

נביט בפונקציה $f(G,k) = (G^c, k)$.

- <u>זמן ריצה</u>: מיידי שניתן לחשב את $f(G,k)$ בזמן $O(|G,k|)$ [[ כלומר לינארית בגודל הקלט ]].
- <u>נכונות</u>: מיידי מהאבחנה.

## הקושי בחיים

נראה בהמשך כי $IS$ היא $NP$-קשה.
ראינו:

$$IS \leq_p VC$$
$$IS \leq_p CLIQUE$$

<u>מסקנה</u>: $VC, CLIQUE$ הן $NP$-קשות.

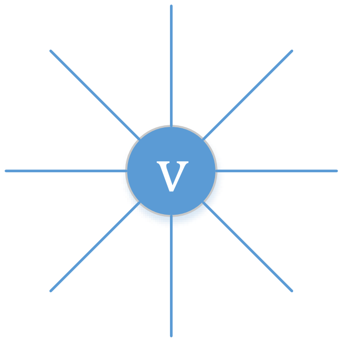
כדי להראות $NP$-שלמות, צ"ל שהבעיות הנ"ל $\in NP$.

(נשאיר זאת כתרגיל): בדיוק כמו עבור $IS$.

[צריך רק בקבלת מופע ופתרון לבדוק שהפתרון נכון (שזה בסה"כ אומר לוודא את התנאי לגבי הקשתות והקבוצה הנתונה).]

## בעיית כיסוי קבוצות (SC)

בכיסוי צמתים כל קדקוד $v$ יכול לכסות את כל הקשתות שחלות בו:




בעיית כיסוי קבוצות:

- $Set\ Cover =$ כל הקלטים מהסוג { קבוצה $U, C_1, \ldots, C_n \subseteq U$ ומספר $t$ } כך שקיים כיסוי קבוצות $\mathcal{C} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ בגודל $|\mathcal{C}| \leq t$.
- כיסוי קבוצות: $\mathcal{C}$ הוא כיסוי קבוצות אם $\bigcup_{i \in \mathcal{C}} C_i = U$.

<u>דוגמה:</u>

[ציור]

$$U = \{1, \ldots, 7\}$$
$$C_1 = \{1, 2, 7\}$$
$$C_2 = \{2, 3, 4\}$$
$$C_3 = \{1, 5\}$$
$$C_4 = \{5, 6\}$$
$$C_5 = \{2, 4, 7\}$$

$$C_1 \cup C_2 \cup C_4 = \{1, \ldots, 7\} = U$$

$\mathcal{C} = \{1, 2, 4\}$ הוא כיסוי קבוצות בגודל 3.

**טענה [VC הוא מקרה פרטי של SC]**

$Vertex\ Cover$ הוא מקרה פרטי של $Set\ Cover$.

<u>הוכחה:</u>

בהינתן גרף $G = (V, E)$ נגדיר:

$$C_v = \{(u, v) \mid (u, v) \in E\} \qquad \forall v \in V$$

[[ שזה כמו לכתוב $E \cap (V \times \{v\})$ ]]

<u>אבחנה:</u> לכל $U \subseteq V$:

$U$ כיסוי צמתים של $G \Leftrightarrow U$ כיסוי קבוצות של $E$

[כאשר הכוונה בכך ש- $U$ כיסוי קבוצות של $E$ היא ש- $\bigcup_{v\in U} C_v = E$.]

<u>ובכן:</u>
$U$ כיסוי צמתים
$\Leftrightarrow$ לכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in U$ או $v\in U$
$\Leftrightarrow$ כל קשת $(u,v)$ שייכת ל- $\bigcup_{v\in U} C_v$ – כי רק $C_u$ ו- $C_v$ מכילים את $(u,v)$.

### טענה [SC היא NP-קשה]
$Set\,Cover$ היא NP-קשה.

<u>הוכחה</u>: (הראינו ש- $VC$ קשה (בהנחה ש- $IS$ קשה))

הרדקוציה:

$$f:(G,t)\mapsto\left(E,\{C_v | v\in V\},t\right)$$

לפי הטענה הקודמת

- <u>נכונות:</u>
  $(G,t)\in VC$ $\Leftrightarrow$ קיים כיסוי צמתים $|U|\le t$ ב- $G$ $\Leftrightarrow$ קיים כיסוי קבוצות $|U|\le t$ ב- $f(G,t)$.

- <u>זמן ריצה:</u>
  - להעתיק את $E,t$: $O(|E|+\log t)$
  - לייצר את הקבוצות $C_v$: מספיק לעבור על רשימת השכנים של כל צומת $v\in V$ [לשם כך עוברים על כל קדקוד פעם אחת ועל כל קשת פעמיים] – $O(|V|+|E|)$
  - סה"כ: לינארי בגודל הקלט

### משפט [SC היא NP-שלמה]
$Set\,Cover$ היא $NP$-שלמה.

<u>הוכחה:</u>
ראינו ש- $SC$ היא $NP$-קשה.

[את הקטע הבא חשוב לכתוב (במבחן, למשל), ולא לשכוח]
$Set\,Cover\in NP$ כי בהינתן מופע $(U,C_1,\dots,C_n,t)$ ועד $w$ ניתן לבדוק בזמן פולינומי [[ בגודל הקלט והעד ]] ניתן לבדוק האם $w\subseteq\{1,\dots,n\}$, האם $\bigcup_{i\in w} C_i = U$ והאם $|w|\le t$.
[[ בשביל לבדוק זאת אפשר לעבור על כל האיברים בכל הקבוצות, לסמן כל איבר בקבוצה האוניברסלית כשנתקלים בו בתת-הקבוצה הנוכחית ובסוף לוודא שסימנו את כולם (או לספור את כמות האיברים החדשים שאנו מסמנים). ]]

□

## בעיית SAT (Satisfiability, ספיקות)

- נוסחת SAT היא נוסחה בוליאנית שמורכבת מפסוקיות $C_1,\dots,C_m$.
- פסוקית היא ביטוי מהסוג $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ כאשר כל $l_j$ הוא ליטרל.
- ליטרל הוא או משתנה, $x_t$, או שלילה של משתנה, $\overline{x}_t$ [[ניתן לסמן גם $\neg x_t$]].
- הנוסחה היא מהצורה $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$.

<u>דוגמה</u>:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)\wedge(\neg x_6)\wedge(x_2 \vee x_3 \vee \neg x_5)\wedge(\neg x_5 \vee \neg x_1)$$

$SAT=$ כל הנוסחאות $\varphi$ כנ"ל כך שקיימת השמה מספקת (השמה כך ש- $\varphi(\text{השמה})=\mathcal{T}$).

<u>למשל בדוגמה</u>:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)\wedge(\neg x_6)\wedge(x_2 \vee x_3 \vee \neg x_5)\wedge(\neg x_5 \vee \neg x_1)$$
$$\varphi(\mathcal{T},\mathcal{F},\mathcal{T},\mathcal{F},\mathcal{F},\mathcal{F})=(\mathcal{T} \vee \neg \mathcal{T} \vee \mathcal{F})\wedge(\neg \mathcal{F})\wedge(\mathcal{F} \vee \mathcal{T} \vee \neg \mathcal{F})\wedge(\neg \mathcal{F} \vee \neg \mathcal{T})=\mathcal{T}$$

### רדוקציה מ-SAT ל-IS

רוצים לקודד נוסחת SAT בתור גרף כך ש:

קבוצה בלתי תלויה $\equiv$ השמה מספקת

[ציור]

[נבחר רק ליטרל אחד להיות מסופק (זה מספיק לנו).]