[הערת תחילת השיעור: אין אלוהים.]

הגדרות שראינו:

- רשת זרימה $N=((V,E),s,t,c)$
- זרימה f
  - אילוצי קיבול
  - אנטי-סימטריה
  - שימור זרימה
- גודל זרימה (ברשת)
- רשת שיורית
  - קיבול = הפרש בין קיבול מקורי לזרימה
  - צלעות: כל צלע בה הקיבול $0<$
  - [הערה: איך נראית רשת שיורית עבור $f\equiv 0$? בדיוק כמו הגרף המקורי.]

אלגוריתם פורד פולקרסון

1. $\forall u,v\in V \qquad f(u,v)=0$
2. Construct N_f
3. While t is reachable from s in N_f :
   3.1. Find a path p from s to t
   3.2. $\forall(u,v)\in p$ set: $\begin{cases} f'(u,v)=c_f(p) \\ f'(v,u)=-c_f(p) \end{cases}$
   3.3. $f'(u,v)=0 \qquad \forall(u,v)\notin p$
   3.4. $f=f+f'$
   3.5. Construct N_f

דוגמה:

[שרטוטים של דוגמת הריצה]

אלגוריתם Edmond-Karp

זהה לזה של פורד-פולקרסון, עם תוספת אחת: בחיפוש מסלול, מחפשים את המסלול הפשוט הקצר ביותר:

1. $\forall u,v\in V \qquad f(u,v)=0$
2. Construct N_f
3. While t is reachable from s in N_f :
   3.1. Find a simple, shortest path p from s to t

3.2. $\forall(u,v)\in p$ set: $\begin{cases} f'(u,v)=c_f(p) \\ f'(v,u)=-c_f(p) \end{cases}$

3.3. $f'(u,v)=0 \quad \forall(u,v)\notin p$

3.4. $f=f+f'$

3.5. Construct N_f

מה הסיבוכיות כאן?

- בניית N_f – $O(|E|)$ (בונים אותה רק לפי הקשתות בגרף).
- מציאת מסלול קצר ביותר – $O(|E|)$ בעזרת BFS [זה בד"כ $O(|V|+|E|)$ עקב צביעת הקדקודים, אבל במקרה שלנו שבו אנו מעוניינים רק במסלול אחד מ- s ל- t אפשר לשנות את האלגוריתם כך שזה ייחסך]
- תיקון הזרימה – $O(|E|)$ (גם כי עושים זאת רק לפי הקשתות).

משפט [זמן הריצה של EK]

ריצה של EK על G תבצע לכל היותר $O(|V|\cdot|E|)$ שיפורי זרימה.

טענת עזר

אם מריצים EK על G אזי לכל $v\in V\setminus\{s,t\}$, $\delta_f(s,v)$ ברשת G_f גדל מונוטונית עם כל שיפור זרימה.

[למה זה נכון?
בבניית $G_{f'}$ (כלומר הרשת השיורית לאחר השינוי ב- f), מבצעים שתי פעולות:

[תרשים משולשי של הפעולות]

[להשלים]

[

הוכחה

<u>הגדרה</u>: קשת ברשת שיורית נקראת קשת קריטית אם היא צוואר בקבוק של מסלול שיפור p.

נניח שהקיבול של (u,v) היא קיבול P.

לאחר שיפור הזרימה, קשת שיורית אחת לפחות נעלמת מהרשת השיורית. כמה פעמים (u,v) יכולה להיות קריטית?

- אם $(u,v)\notin\{(s,x),(x,s),(t,x),(x,t)|x\in V\}$:

בפעם הראשונה ש-(u,v) קריטית, $\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$ [כי u מופיע בדיוק לפני v במסלול קצר ביותר מ-s ל-t].
מרגע שיפור הזרימה, (u,v) נעלמת מהרשת השיורית, ותופיע רק כאשר הקשת ההפוכה (v,u) תופיע במסלול שיפור.
אם f' היא הזרימה ב-G כאשר נבחר המסלול הזה אז $\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1$ [כי הפעם v הוא הקדקוד "הקודם" מבין u,v במסלול שנבחר].
ע"פ טענת העזר, $\delta_f(s,v)\le\delta_{f'}(s,v)$.
לכן:

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1\ge\delta_f(s,v)+1=\delta_f(s,u)+2$$
$$\Downarrow$$
$$\delta_{f'}(s,u)\ge\delta_f(s,u)+2$$

[כלומר בכל פעם שקשת הופכת לקריטית, מרחק של קדקוד u גדל לפחות ב-2. כיוון שמרחק של קדקוד u מ-s יכול להיות לכל היותר $|V|-1$ פעמים (למעשה אפילו $|V|-2$ אם $u\neq t$), כי מרחק הוא אורך של מסלול פשוט.]
אזי (u,v) יכולה להיות קריטית לכל היותר $\frac{1}{2}|V|$ פעמים ($O(|V|)$).

- נטפל בשאר המקרים באופן פרטני:
  - (t,x): צלע יוצאת מ-t לא תהיה חלק ממסלול פשוט ל-t ולכן לעולם לא תהיה קריטית.
  - (x,t): יכולה להיות קריטית פעם אחת, כי ע"מ שתחזור עלינו לבחור את (t,x), ומהמקרה הקודם אנו יודעים שזה לא אפשרי.
  - (s,x): יכולה להיות קשת קריטית פעם אחת לכל היותר מכיוון שכדי שניקח אותה בפעם הבאה היינו צריכים לקחת את (x,s), וזה לא אפשרי מאותה הסיבה שרשמנו במקרה של (t,x).
  - (x,s): לא יכולה להיות קשת קריטית מהנימוק של המקרה (t,x).

משפט Hall

<u>תזכורות:</u>

- גרף $G=(V,E)$ ייקרא דו-חלקי אם קיימות $R,L\subseteq V$ כך ש:

$$V = R \cup L$$
$$R \cap L = \varnothing$$
$$E \subseteq \{(u \in R \wedge v \in L) \vee (u \in L \wedge v \in R)\}$$

[[כלומר $E \subseteq L \times R \cup R \times L$ – ז"א שיש קשתות רק בין קדקודים ב"צדדים" שונים (אין קשתות בין שני קדקודים באותו הצד).]]

- שידוך חוקי $M \subseteq E$ של גרף דו-חלקי $G = (R \cup E, E)$ ייקרא שידוך מושלם אם"ם $|R| = |L| = |M|$.

המשפט:

קיים שידוך מושלם אם"ם לכל $A \subseteq L$ מתקיים $|A| \leq |N(A)|$ (סימטרי ל-R).

[צריך לדרוש גם ש-$|R| = |L|$, או לחילופין שזה יתקיים גם עבור L וגם עבור R – אבל בכל מקרה בגרפים בהם $|R| \neq |L|$ אין לנו עניין, כי בהם אף פעם אין שידוך מושלם ממילא.]

[כלומר: יש שידוך מושלם אם"ם כאשר אנו בוחרים תת-קבוצה A של L, מספר האיברים ב-A קטן או שווה למספר השכנים שיש לכולם יחד (שימו לב: לא מספר הצלעות, מספר השכנים) – וזה צריך להתקיים **לכל** תת-קבוצה A שניקח; אם יש תת-קבוצה אחת שבה זה לא קורה, אז אין שידוך מושלם.]

[דוגמאות]

הוכחה:

1. אם קיים שידוך מושלם אז לכל $A \subseteq L$ מתקיים $|A| \leq |N(A)|$ [[זה ברור, כי שידוך מושלם מתאים לכל קדקוד מ-L קדקוד אחר מ-R, לכן לכל קדקוד ב-A יש בתור שכן לפחות את בן-הזוג שלו]].

2. אם לכל $A \subseteq L$ מתקיים $|A| \leq |N(A)|$:

   נבצע רדוקציה לבעיית הזרימה ונשתמש ב-Min-Cut-Max-Flow ובהוכחה מתרגול 6 כי זרימה בגודל n גוררת שידוך בגודל n.

   [שרטוט הגרף]

   נביט בחתך (S,T) כלשהו.

   אם יש עליו צלע בקיבול ∞ אזי קיבולו גדול מ-$|L|$.

   אחרת כל הצלעות החוצות אותו בעלות קיבול סופי.
   נסמן את איברי הקבוצות הבאות:

$$S\cap L=\{x_1,\dots,x_k\}$$
$$T\cap L=\{x_{k+1},\dots,x_n\}$$
$$S\cap R=\{y_1,\dots,y_j\}$$
$$T\cap R=\{y_{k+1},\dots,y_n\}$$

[שרטוט החתך]

כל השכנים של $S\cap L$ חייבים להיות ב-$S\cap R$ [כי אחרת יש צלע שחוצה את החתך עם קיבולת אינסופית].

[הערה: החצים המסומנים ב<צבע שבו אני יום אחד אסמן אותם כשיהיה לי זמן להוסיף את הציורים להרצאות> עם קיבולת ∞ שהולכים מ-$S\cap L$ ל-$T\cap R$ **לא** נחשבים לקיבול של החתך, כי הקיבול של החתך הוא סכום הקיבולות של הקשתות מ-S ל-T בלבד.]

הצלעות שחוצות את החתך הן:

- $n-k$ צלעות מ-S ל-$T\cap L$ [אלה כל הצלעות שיוצאות מ-s ישירות ל-T (אלה הצלעות המחוברות לקדקודים x_i שנמצאים ב-T)].
- j צלעות מ-$S\cap R$ ל-T

מכיוון שלכל $A\subseteq L$ מתקיים ש-$|A|\le|N(A)|$, הרי:

$$k=\underbrace{|S\cap L|}_{A}\le|N(S\cap L)|\le|S\cap R|=j$$

[[הסבר לגבי אי-השוויון האחרון, המסומן באדום: אמרנו שאין קשתות בקיבול ∞ בין S ל-T, וכל הקשתות המחברות איבר מ-$S\cap L$ לשכנים שלו הן עם קיבול ∞. לכן כל הקשתות שמחברות בין איבר x_i ב-$S\cap L$ לשכן שלו נמצאות בתוך S – כלומר השכן של x_i מ-$S\cap L$ חייב להיות ב-$S\cap R$. זה אומר ש-$N(S\cap L)\subseteq S\cap R$. לכן, כיוון שאלה קבוצות סופיות, $|N(S\cap L)|\le|S\cap R|$.

אנחנו לא רוצים להוכיח שזה שווה ממש, כי אין לנו צורך בכך.]]

לכן $k\le j$, ולכן קיבול החתך (S,T), אשר כולל רק צלעות עם קיבולת של 1 החוצות אותו, שווה לכמות הצלעות הללו:

$$c(S,T)=n-k+j\ge n-k+k=n$$