Dijkstra

האלגוריתם של דיקסטרה הוא אלגוריתם למציאת המרחקים של כל הקדקודים בגרף עם משקלות אי-שליליות על הקשתות (כאשר מרחק מ- s ל- v מבחינתנו הוא משקל המסלול הקל ביותר ביניהם).

מתחזקים:

- $d[v]$ – משקל המסלול הקצר ביותר עד כה
- $\pi[v]$ – הקדקוד "הקודם" במסלול

האלגוריתם הינו כדלקמן:

<u>$ISS(G,s)$:</u> [[פונקציית אתחול]]

1. For each $v \in V[G]$: [[$V[G]=V=$ קדקודי הגרף]]
   1.1. $d[v]=\infty$
   1.2. $\pi[v]=nil$ [[$nil=null=$ כלום]]
2. $d[s]=0$

<u>$\text{Relax}(u,v,w)$:</u>

1. If $d[v]>d[u]+w(u,v)$:
   1.1. $d[v]=d[u]+w(u,v)$
   1.2. $\pi[v]=u$

<u>$\text{Dijkstra}(G,w,s)$:</u>

1. $ISS(G,s)$
2. $S \leftarrow \varnothing$
3. $Q \leftarrow V[G]$
4. While $Q \neq \varnothing$:
   4.1. $u \leftarrow \text{extract\_min}(Q)$
   4.2. $S \leftarrow S \cup \{u\}$
   4.3. For each $v \in Q$ such that $v \in \text{Adj}[u]$:
      4.3.1. $\text{Relax}(u,v,w)$

בעיית צוואר הבקבוק

הגדרות

יהי G גרף מכוון ויהי $p=(v_0,\ldots,v_k)$ מסלול בגרף.

נגדיר את צוואר הבקבוק של p, ונסמנו $bn(p)$, להיות משקל הקשת המינימלית ב- p, כלומר:

$$bn(p)=\min\left\{w(v_i,v_{i+1})\middle|0\le i\le k-1\right\}$$

כמו-כן, עבור זוג קדקודים $s,u\in V$ נגדיר $\beta(s,v)$ להיות גודל צוואר הבקבוק המקסימלי של כל המסלולים בין s ל- v:

$$\beta(s,v)=\begin{cases}\infty, & s=u\\ \max\left\{\left\{bn(p)\middle|p:s\rightsquigarrow v\right\}\cup\{-\infty\}\right\}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

[[$p:s\rightsquigarrow v$ משמעותו אצלי "p מסלול מ- s ל- v".]]

לדוגמה, בגרף הבא:

[ציור]

מתקיים $\beta(s,v)=2$.

אם נעשה את השינוי הבא:

[ציור]

נקבל כי $\beta(s,v)=4$.

ואם עכשיו נעשה עוד שינוי:

[ציור]

עדיין $\beta(s,v)=4$.

[להסביר]

הגדרת הבעיה

עבור גרף G וקדקוד s, ברצוננו לקבל את $\beta(s,v)$ לכל $v\in V$.

פתרון

נכתוב גרסאות חדשות לאלגוריתם של דיקסטרה.
במקום $d[\cdot]$ נשמור $b[\cdot]$, אשר ישמור עבור כל קדקוד את צוואר הבקבוק הגדול ביותר שמצאנו עבור כל קדקוד עד כה.

$\mathrm{BRelax}(u,v,w)$:

1. If $b[v] < \min\{b[u], w(u,v)\}$:
   1.1. $b[v] \leftarrow \min\{b[u], w(u,v)\}$

$\mathrm{Bottleneck}(G,w,s)$:

1. For each $v \in V[G]$:
   1.1. $b[v] \leftarrow -\infty$
2. $b[s] = \infty$
3. $S \leftarrow \varnothing$
4. $Q \leftarrow V[G]$
5. While $Q \neq \varnothing$:
   5.1. $u \leftarrow \mathrm{extract\_max}(Q)$ [[מוציא קדקוד עם ערך מקסימלי של $b[\cdot]$]]
   5.2. $S \leftarrow S \cup \{u\}$
   5.3. For each $v \in Q$ such that $v \in \mathrm{Adj}[u]$:
      5.3.1. $\mathrm{BRelax}(u,v,w)$

הוכחת נכונות

- טענה עיקרית: לאחר הרצת $\mathrm{Bottleneck}(G,w,s)$ מתקיים $b[u] = \beta(s,u)$ לכל $u \in V$.
- טענת עזר 1: עבור צלע (u,v) מתקיים תמיד כי $\beta(s,v) \geq \min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$ [[כלומר תמיד מתקיים שצוואר בקבוק של מסלול שנגמר בקשת (u,v) גדול או שווה למשקל הקשת הזו (בעצם זה נכון לכל קשת במסלול, כי צוואר בקבוק מוגדר להיות המשקל של הקשת הקלה ביותר במסלול)]].
- טענת עזר 2: בכל שלב, לכל קדקוד v מתקיים $b[v] \leq \beta(s,v)$.
- אבחנה: לאחר הוספת v ל- S הערך $b[v]$ לא משתנה במהלך הריצה [[זאת משום שכאשר מוסיפים אותו ל- S, מוציאים אותו מ- Q, וה- BRelax מתבצע רק עם קדקודים מתוך Q]].

הוכחת הטענה העיקרית:

לכל $u \in V$ בעת הכנסתו ל- S מתקיים $b[u] = \beta(s,u)$.

נחלק למקרים:

1. $u = s$: אזי $b[u] = \infty \Leftarrow$ מתקיים. ✓
2. אין מסלול מ- s ל- u: אזי ע"פ טענה 2, בכל שלב $b[u] \leq \beta(s,u) = -\infty$ וסיימנו.
3. יש מסלול בין s ל- u ו- $s \neq u$: נוכיח באינדוקציה על סדר הכנסת הצמתים.

נניח שמתקיים עבור כל הצמתים שהוכנסו לפני u.

ע"פ טענה 2, $b[u] \le \beta(s,u)$.

יהי p מסלול מ-s ל-u המקיים $bn(p)=\beta(s,u)$.

קדקוד המקור s כבר ב-S ולכן קיימת צלע $(x,y)\in p$ כך ש-$x\in S$ וְ-$y\notin S$.

ברגע הכנסת u, כיוון שבחרנו ב-u ולא ב-y, מתקיים $b[u]\ge b[y]$.

כמו-כן, כיוון ש-x כבר ב-S, ע"פ ההנחה $b[x]=\beta(s,x)$.

לכן (כיוון שכבר בוצע BRelax):

$$b[y]\ge \min\{\beta(s,x),w(x,y)\}$$

p עובר דרך (x,y), לכן:

$$\beta(s,u)=bn(p)\le \min\{\beta(s,x),w(x,y)\}$$

כעת ניתן לבנות בעזרת הנתונים והמסקנות הנ"ל מגהזורד של אי-שוויון:

$$b[u]\le \beta(s,u)\le \min\{\beta(s,x),w(x,y)\}\le b[y]$$
$$\Downarrow$$
$$b[u]=b[y]$$

הוכחת טענה 1:

אחד המסלולים האפשריים אל v הוא המסלול בעל צוואר הבקבוק הגדול ביותר ל-u.

[ציור]

[אנו מניחים כאן באופן לא מפורש שיש מסלול בין s ל-u.
למעשה ניסוח מדויק יותר הוא שאחד מצווארי הבקבוק האפשריים מ-s ל-u הוא בהתאם לצוואר הבקבוק מ-s ל-u.]

צוואר הבקבוק של המסלול הזה הוא $\min\{\beta(s,u),w(u,v)\}$ ולכן $\beta(s,v)\ge \min\{\beta(s,u),w(u,v)\}$.

הוכחת טענה 2:

אם $b[v]=-\infty$ בהכרח $\beta(s,v)\ge b[v]$.

אחרת, נראה באינדוקציה על מספר האיטרציות שלכל קדקוד $v\in V$ כך ש-$b[v]>-\infty$ קיים מסלול מ-s ל-v בעל צוואר בקבוק $b[v]$ [**שימו לב**: אם רשום עבור $v\in V$ כלשהו $b[v]=-\infty$, מבחינתנו זהו משקל של "אין מסלול" מ-s ל-v, שמבחינתנו גם נחשב כאופציה אפשרית למסלול; זה ע"מ לחסוך במקרים, וזה מאוד מבלבל.]

- <u>בסיס:</u>
  לאחר 0 איטרציות רק $b[s] > -\infty$ ← טריוויאלי.

- <u>צעד:</u>
  נניח כי הטענה נכונה עבור k איטרציות ונוכיח עבור האיטרציה ה-$k+1$.

  יהי $v \in V$ קדקוד כך שלאחר k איטרציות מתקיים $b[v] \leq \beta(s,v)$.
  אם באיטרציה ה-$k+1$ ערכו של $b[v]$ לא השתנה אזי ההנחה מתקיימת.
  אחרת $b[v]$ השתנה באיטרציה ה-$k+1$, כלומר קיים קדקוד u כך ש-
  $b[v] = \min\{b[u], w(u,v)\}$.
  נשים לב ש-$b[u] > -\infty$ שכן ערך $b[v]$ השתנה.
  מהנחת האינדוקציה, קיים מסלול מ-v ל-u כך ש-$b[u]$ מייצג צוואר בקבוק במסלול זה.
  לכן ערכו החדש של $b[v]$ מייצג צוואר בקבוק מ-s ל-v גם כן.

<u>הוכחה אלטרנטיבית לטענה 2:</u>
נניח בשלילה כי הטענה אינה מתקיימת.

יהי v הראשון כך שעדכון $b[v]$ מקיים $\beta(s,v) < b[v]$.
נביט בפעולת ה-BRelax שגרמה לבעיה ונקבל:

$$b[v] = \min\{b[u], w(u,v)\} > \beta(s,v)$$

כיוון ש-v הוא הקדקוד הראשון שמפא את הטענה, $b[u] \leq \beta(s,u)$, ולכן:

$$\min\{\beta(s,u), w(u,v)\} \overset{\beta(s,u)\geq b[u]}{\geq} \min\{b[u], w(u,v)\} = b[v] > \beta(s,v) \geq \min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$$

קיבלנו כי $\min\{\beta(s,u), w(u,v)\} > \min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$, בסתירה.