דוגמה למשפט: זרימה מקס' – חתך מינ'

נראה דוגמה לזרימה שלא ניתנת לשיפור ונתבונן על החתכים ביחס אליה.

[ציור]

[ברשת השיורית החלק המשורטט בשחור הוא כל הגרף אליו ניתן להגיע מ- s , והחלק המשורטט באדום הוא כל השאר.]

אלגוריתם שגוי

ראינו בעבר אלגוריתם שגוי, שהוא כמו F-F, אבל מחפשים מסלול שיפור רק באמצעות קשתות G .

[שרטוט דוגמאות נגדיות]

זה לא עוזר לנו כפתרון ישיר, אבל אנחנו כן יכולים להשתמש ברעיון כמרכיב בפתרון אחר.
לשם כך ניתן תחילה שם לזרימה כזו:

הגדרה [זרימה חוסמת]

ברשת זרימה N , זרימה f נקראת זרימה חוסמת אם אין מסלול שיפור שמורכב **רק** מקשתות N .

[לדוגמה, בציור הקודם, הזרימה $\bullet \xrightarrow{3} \bullet \xrightarrow{3} \bullet \xrightarrow{3} \bullet$ הינה זרימה חוסמת, למרות שיש מסלול שיפור עבורה, כי הוא לא כולל רק קשתות של N :

[ציור]

<u>הערה</u>: אם בוחרים רק מסלולים כאלה [שמורכבים רק מהקשתות המקוריות], מוצאים זרימה חוסמת תוך $|E|$ איטרציות [איטרציה = מציאת מסלול אחד] (כי כל איטרציה מורידה קשת).

[לכן תהליך החיפוש הזה הינו פולינומי (בניגוד לדוגמה שראינו עם קיבולות M , שהראתה שזמן הריצה של F-F יכולה לקחת זמן התלוי בקיבולות של הגרף, מה שיכול להיות הקבה יותר גדול ממספר הקדקודים והקשתות).]

האלגוריתם של דיניץ

[הרעיון: לעשות שימוש יותר יעיל במידע שמתקבל מ-BFS שמריצים בשביל למצוא מסלול שיפור.]

- <u>אתחול</u>: $f \leftarrow 0$
- כל עוד יש מסלול שיפור (נבדוק ע"י בניית רשת שיורית $N_f = \left(G_f = \left(V, E_f\right), s, t, c_f\right)$):
  - נבנה רשת שכבות L_f [[נגדיר מיד]]
  - נמצא ב- L_f זרימה חוסמת g
  - $f \leftarrow f + g$

כמו ב-F-F או E-K (שראינו בתרגול), אבל בוחרים כמה מסלולים בבת-אחת

- סיום: מחזירים את f

הגדרה [רשת שכבות]

רשת שכבות L_f היא איחוד של כל המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל- t ב- G_f.

[G_f הוא הגרף שמורכב מהקשתות ברשת השיורית (הרשת, N_f, מורכבת מהגרף, מקדקוד המקור והיעד ומהקיבולת השיורית).]

הערה [חוקיות הזרימה]

האלגוריתם של דיניץ מתחזק זרימה חוקית.

הסבר:

כמו ב-F-F: (זרימה חוקית ב- N) + (זרימה חוקית ב- N_f) = זרימה חוקית ב- N.

מציאת רשת שכבות

[אלגוריתם BFS מסתכל בכל שלב רק על קדקודים לבנים (אלה שעדיין לא סיימנו איתם ושעדיין לא הוכנסו לתור). אנו נשנה את האלגוריתם כך שהוא גם יתייחס לאפורים.]

- צעד 1: מריצים BFS "משוכלל" מ- s
  - כל פעם שמוציאים קדקוד u מהתור, מוסיפים את כל הקשתות (u,v) כך ש- v לא שחור (כלומר לבן או אפור)

  קיבלנו: כל המקק"ב מ- s =: L

- צעד 2: נשחלף את L' (נהפוך את הקשתות) ונריץ שוב BFS משוכלל מ- t.

  [זאת ע"מ לצמצם את המסלולים לאלה שמסתיימים ב- t.

  וצריך גם לשחלף את התוצאה חזרה.]

דוגמה:

[ציור ($G_f \Rightarrow L_f$)]

[ניתן הסבר מקיף יותר לגבי איך הבניה מתבצעת בשיעור הבא.]

הערה: רשת השכבות L_f בנויה מסדרת שכבות $L_0,L_1,\ldots,L_k \subseteq V$, כאשר $L_0=\{s\},L_k=\{t\}$

וכל הקשתות הן מהסוג (u,v) עבור $u\in L_i, v\in L_{i+1}$.

דוגמה לאלגוריתם דיניץ

[בגלל כמות זרימה ...גרגרגר-גרף!]

[שימו לב שבצעד 2 בחרנו זרימה חוסמת שהיא לא מקסימלית (ניתן למצוא זרימה חוסמת אחרת עם ערך של 3 במקום 2). האלגוריתם לא דורש למצוא זרימה מקסימלית, אלא רק זרימה חוסמת.]

אינטואיציה לשיעור הבא

- איטרציה אחת:
  - בונים N_f, L_f
  - מוצאים זרימה חוסמת g ב- L_f
- איטרציה הבאה:
  - בונים N_{f+g}, L_{f+g}

<u>המטרה:</u>

משפט [המרחק בין s ל-t גדל בכל איטרציה]
עבור f, g כנ"ל מתקיים:

$$d_{N_{f+g}}(s,t) \geq d_{N_f}(s,t)+1$$

<u>מסקנה:</u>
דיניץ רץ לכל היותר $|V|-1$ איטרציות ועוצר [[טוב, נו, בגיל כזה... ☺]].

קשתות שנמחקות ונוספות

נסמן:

קשתות שנוספות לרשת השיורית	$E_+ = E_{f+g} \setminus E_f$
קשתות שנמחקות מהרשת השיורית	$E_- = E_f \setminus E_{f+g}$

[מחיקת קשתות יכולה רק לגרום למרחקים לגדול.
הוספת קשתות אולי יכולה לעשות ההיפך, אך למעשה נוספות קשתות בכיוון הנגדי לכיווני המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל- t, לכן גם זה לא מקטין את המרחק בין שני קדקודים אלה.]