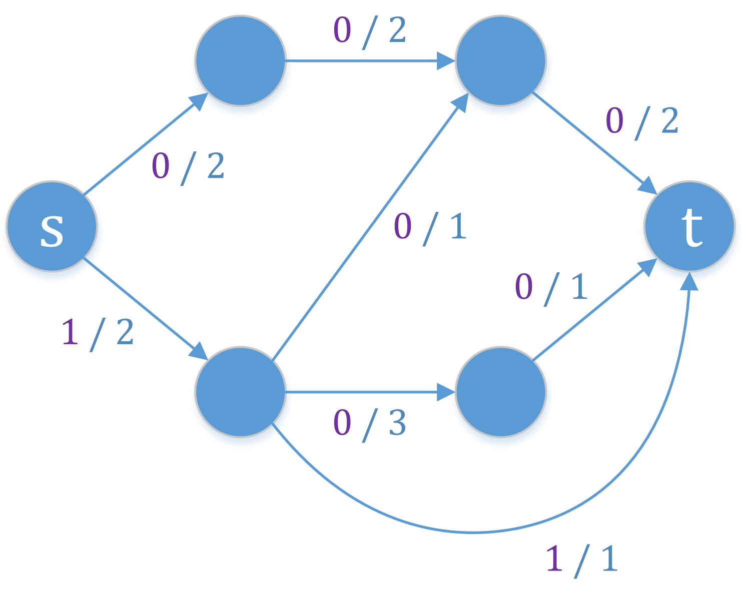
☺ Happy Towel Day! ☺

אלגוריתם דיניץ

- <u>אתחול</u>: $f \leftarrow 0$
- <u>לולאה</u>:
  - בונים את הרשת השיורית $N_f = \left(G_f = \left(V, E_f\right), s, t, c_f\right)$
  - אם אין מסלול $s \rightsquigarrow t$ ב- G_f אזי נעצור ונחזיר את f
  - אחרת:
    - בונים את רשת השכבות L_f = כל המק"ב מ- s ל- t
    - ברשת L_f מוצאים זרימה חוסמת g
    - מעדכנים את הזרימה: $f \leftarrow f + g$

<u>דוגמה</u>:

זרימה נוכחית f :



רשת שיורית L_f :

[ציור]

רוצים להוכיח:

משפט [גדילת המרחק מ- s ל- t]
בכל איטרציה מתקיים:

$$d_{G_{f+g}}(s,t) \geq d_{G_f}(s,t)+1$$

<u>מסקנה</u>: האלגוריתם מבצע $|V| >$ איטרציות.

הוכחה

נסתכל על איטרציה אחת.

נסמן:

קשתות שנוספות לרשת השיורית	$E_+ = E_{f+g} \setminus E_f$
קשתות שנמחקות מהרשת השיורית	$E_- = E_f \setminus E_{f+g}$

לצורך ההוכחה נסתכל על גרף ביניים:

$$G_f^+ = \left(V, \underbrace{E_f \cup E_{f+g}}_{=E_f \cup E_+} \right)$$

נטען:

- <u>טענה 1</u>: כל מק"ב (מ- s ל- t) ב- G_f כולל קשת ב- E_-.
- <u>טענה 2</u>: כל מק"ב מ- s בגרף G_f^+ הוא מק"ב בגרף G_f.

<u>הוכחת המשפט</u>:

יהי p מק"ב מ- s ל- t בגרף G_{f+g}.

בפרט זהו מסלול בגרף הביניים G_f^+.

p לא יכול להיות יותר קצר מ- $d_{G_f}(s,t)$, כי אז היה מק"ב ב- G_f^+ שהוא לא מק"ב ב- G_f, בסתירה לטענה 2.

נניח בשלילה ש- p באורך $d_{G_f}(s,t)$ בדיוק.

כיוון ש- p מסלול ב- G_f^+, הוא בעצם מק"ב ב- G_f^+, ולכן לפי טענה 2, הוא מק"ב ב- G_f.

אבל לפי טענה 1, p חייב לכלול קשת מ- E_-, בסתירה לכך ש- p מורכב מקשתות ב- $(E_f \cup E_+) \setminus E_-$.

$\square$

<u>הוכחת טענה 1</u>:

g זרימה חוסמת, לכן כל מסלול ב- L_f (מ- s ל- t) כולל קשת (u,v) רוויה:

$$g(u,v) = c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$
$$\Downarrow$$
$$(f+g)(u,v) = c(u,v)$$

לכן מתקיים:

$$c_{(f+g)}(u,v)=c(u,v)-(f+g)(u,v)=0$$

ומכאן ש- $(u,v)\notin E_{f+g}$.

$\square$

<u>הוכחת טענה 2</u>:

- <u>אבחנה 1</u>: לכל קשת $(u,v)\in E_f$ מתקיים $d_{G_f}(s,v)\le d_{G_f}(s,u)+1$
- <u>אבחנה 2</u>: כל קשת $(u,v)\in E_+$ מקיימת $d_{G_f}(s,u)=d_{G_f}(s,v)+1$

$$(u,v)\in E_f\cup E_+ \Leftarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$d_{G_f}(s,v)\le d_{G_f}(s,u)+1$$

<u>הסבר</u>: (u,v) נוספה לרשת השיורית N_{f+g} מכיוון ש:

$$\begin{cases}(u,v)\notin E_f & \Rightarrow f(u,v)=c(u,v)\\ (u,v)\in E_{f+g} & \Rightarrow f(u,v)+g(u,v)<c(u,v)\end{cases}$$

כלומר $f(u,v)+g(u,v)<f(u,v)$, לכן $g(u,v)<0$, ומאנטי סימטריה אנו מקבלים כי:

$$g(v,u)=-g(u,v)>0$$

מכאן שהוספנו זרימה במהלך האיטרציה, ולכן (v,u) שייכת לרשת השכבות.
כלומר מתקיים:

$$d_{G_f}(s,u)=d_{G_f}(s,v)+1$$

(משום ש- (v,u) שייכת למק"ב בגרף G_f).

[[כל הקשתות מהצורה (a,b) ברשת השכבות הן קשתות משכבה של קדקודים במרחק d לשכבה הבאה, של קדקודים במרחק $d+1$ – כלומר $d(s,b)=d(s,a)+1$.]]

יהי p מסלול $s\rightsquigarrow t$ ב- G_f^+.

(א) אם p מק"ב שלא כולל קשתות מ- E_+ אזי לפי הגדרה זהו מק"ב ב- G_f.

(ב) אם p כולל קשת $(u,v)\in E_+$, אז לפי אבחנה 2 קיים $0\le k\le d_{G_f}(s,t)-1$ כך ש:

$$d_{G_f}(s,u)=k+1$$
$$d_{G_f}(s,v)=k$$

p מורכב מתת-מסלולים $p: \underset{s\rightsquigarrow u}{p_1} \circ (u,v) \circ \underset{v\rightsquigarrow t}{p_2}$.

מאבחנות 1+2, כל קשת ב-$E_f \cup E_+$ מעלה את המרחק ב-1 לכל היותר, ולכן מתקיים:

$$|p_1| \geq d_{G_f}(s,u) - d_{G_f}(s,s) = k+1$$
$$|p_2| \geq d_{G_f}(s,t) - d_{G_f}(s,v) = d_{G_f}(s,t) - k$$

לכן בסה"כ:

$$|p| \geq \overbrace{\cancel{k}+1}^{p_1} + \underbrace{1}_{(u,v)} + d_{G_f}(s,t) - \cancel{k} = d_{G_f}(s,t)+2$$

ולכן p אינו מקז"ב מ-s ל-t ב-G_f^+.

$\square$

מימוש וזמן ריצה

- <u>ראינו</u>: מס' איטרציות $< |V|$
- מה זמן איטרציה?

$$s \bullet\!\!\to\to \underset{u}{\bullet} \to \underset{v}{\bullet} \to\to\!\!\bullet t$$

[להשלים ציור]

- $(u,v) \in$ מקז"ב מ-s $\Leftarrow d(s,v) = d(s,u)+1$

אלגוריתם לבניית רשת שכבות בגרף H

- נבצע BFS מ-s ב-H ונקבל מרחקים $d_H(s,v)$ $\forall v \in V$.
- נבצע BFS מ-t בגרף המשוחלף H^t ונקבל מרחקים $d_{H^t}(t,v) = d_H(v,t)$ $\forall v \in V$.
- נבנה את הרשת השיורית:

$$L \leftarrow \left\{ (u,v) \in E(H) \middle| \begin{array}{l} \left(d_H(s,u) + d_H(u,t) = d_H(s,v) + d_H(v,t)\right) \wedge \\ \left(d_H(s,v) = d_H(s,u)+1\right) \end{array} \right\}$$

(בונים ע"י מעבר על כל הקשתות ב-$E(H)$ ובדיקת שלושת התנאים).

אלגוריתם למציאת זרימה חוסמת ב-L_f

<u>הרעיון</u>: למצוא כל מסלול בזמן $O(|V|)$ במקום $O(|V|+|E|)$.

[[כיוון שזהו גרף של מק"ב מ- s ל- t, ע"מ למצוא בו מק"ב מ- s ל- t, ניתן פשוט להתחיל מ- s ובכל פעם לבחור קשת כלשהי ומובטח לנו שנקבל מק"ב שמגיע ל- t – אבל זה לא יעבוד אחרי שנמחק את המסלול הראשון, שכן יכול להיות שנגיע לקדקוד שע"מ לצאת ממנו צריך קשת שמחקנו. לכן נצטרך לעשות משהו נוסף כדי לוודא שנוכל להמשיך לעשות את אותו הטריק. לשם כך נגדיר תכונה נשמרת של הגרף שתוודא שהמצב הבעייתי הנ"ל לא יקרה.]]

<u>נשמר אינווריאנטה</u>: בכל שלב יש לנו $H=(V_H,E_H)$, תת-גרף של L_f, כך שלכל קדקוד $V_H\setminus\{t\}$ יש לפחות קשת יוצאת אחת.

<u>האלגוריתם</u>:

- <u>אתחול</u>:
  - $H\leftarrow L_f$
  - $g\leftarrow 0$
- <u>לולאה</u>:
  - אם ל- s אין קשת יוצאת, נדווח "מצאנו זרימה חוסמת" ונחזיר את g
  - אחרת:
    - <u>מציאת מסלול</u>:
      - $p\leftarrow s$
      - כל עוד הגענו רק ל- $u\neq t$, נבחר קשת (u,v) ונוסיף אותה ל- p
    - <u>עדכון זרימה</u>:
      - נחשב את צוואר הבקבוק:
        $$\Delta=\min_{e\in p}\{c_f(e)-g(e)\}$$
      - ונעדכן לכל $(u,v)\in p$:
        $$g(u,v)\leftarrow g(u,v)+\Delta$$
        $$g(v,u)\leftarrow g(v,u)-\Delta$$
    - <u>ניקיון</u>: לכל קשת רוויה $(u,v)\in p$ כך ש- $g(u,v)=c_f(u,v)$ נבצע $\text{Clean-up}(u,v)$

<u>$\text{Clean-up}(u,v)$:</u>

- נמחק את הקשת: $E_H\leftarrow E_H\setminus\{(u,v)\}$
- אם עכשיו אין קשתות יוצאות מ- u:
  - נמחק את u: $V_H\leftarrow V_H\setminus\{u\}$
  - ואת הקשתות הנכנסות ל- u:
    - לכל (w,u) נבצע $\text{Clean-up}(w,u)$

דקה על זמן ריצה

- <u>מציאת מסלול אחד</u>: $O(|V|)$
- <u>מס' המסלולים שנבחר</u>: $O(|E|)$
(כי אחרי כל מסלול שמצאנו מחקנו לפחות קשת אחת)
- $\Leftarrow$ <u>מציאת כל המסלולים</u>: $O(|V|\cdot|E|)$
- כל פעולות ה-Clean-up ביחד: $O(\text{מס' הקשתות שנמחקו}) = O(|E|)$
(כי כל Clean-up מוחק קשת אחת בדיוק)

<u>סיכום דיניץ</u>:

- $|V|$ איטרציות
- כל איטרציה:
  - מציאת L_f: $O(\text{BFS}) = O(|V|+|E|)$
  - מציאת זרימה חוסמת: $O(|V|\cdot|E|+|E|) = O(|V|\cdot|E|)$
  - לכן **כל האיטרציה** לוקחת $O(|V|\cdot|E|)$

- $\Leftarrow$ זמן ריצה כולל:

$$O(|V|^2\cdot|E|)$$

בזה סיימנו את נושא הזרימה.