פרטים אדמיניסטרטיביים

- מתרגל: בועז ערד [הוא המתרגל האחראי של הקורס]
- מייל: boazar@cs.bgu.ac.il
- מייל הקורס: algo142@cs.bgu.ac.il
  - כל פניה מנהלית נא לבצע למייל זה; לפנות למרצים / למתרגלים רק בשאלות מקצועיות
  - הורו למתרגלים להתעלם מכל פניה מנהלתית שמגיעה אליהם למייל
- אתר הקורס: www.cs.bgu.ac.il/~algo142
  - להתעדכן באופן שוטף עם ה-announcements שמפורסמים שם (מומלץ להירשם ל-RSS Feed שלהם)
- עבודות:
  - את ההגשה יש לעשות ב-hard copy לתא הגשת העבודות של הקורס
  - עם זאת, **מאוד מומלץ** להגיש **גם** ל-Submission System, למרות שזו לא העבודה שתיבדק
  - לפתוח קבוצה ב-Submission System ברגע שהעבודה מתפרסמת, ולא לפני ההגשה
  - מי שמגיש עם קבוצה "מבוטח" מבחינת הגשת עבודות וציונים (אם קורה ויש בעיה בציון, או איבדו את העבודה שלכם, יש תיעוד להגשות של קבוצות ב- Submission System – אז אם אין לכם קבוצה או לא הגשתם גם שם, נדפקתם)
  - **תוודאו שמה שאתם מגישים תקין**
    - [[אני ממליץ להוריד את הקובץ שאתם מעלים ל-Submission System ולוודא שהוא עובד ותקין]]
  - כרגע הוחלט שלוקחים את הציונים מ-5 העבודות הטובות ביותר, אך ייתכן שיחשיבו את העבודה האחרונה כבונוס (אם כן, יודיעו על כך באתר)
- אפשר ומומלץ להציע לבועז הצעות לשיפור
- המבחן יהיה אמריקאי
  - **סתם**, הוא לא ☺

הגדרות ותזכורות

<u>בעיות</u>:

נתעסק עם שני סוגי בעיות בקורס:

- <u>בעיות הכרעה</u>: להכריע האם **קיים** פתרון
- <u>בעיות אופטימיזציה</u>: למצוא את הפתרון **הטוב ביותר** (או **יותר טוב** מפתרון אחר שמצאנו)

<u>אלגוריתם</u>:

- אלגוריתם פועל על מופע [[מופע = דוגמה לקלט]]
- יש להוכיח נכונות של כל אלגוריתם
- יש לשים לב שמכסים את כל האופציות כאשר מחלקים למקרים

<u>O Notation</u>:
כפי שלמדנו בקורס מבני נתונים:

- <u>דוגמאות</u>:

$$20 \cdot n = O(n)$$

$$1000 \cdot n = O(n)$$

$$10^{10} \cdot n + 2\log n = O(n)$$

$$n^2 + 4n^4 + 10^{10} n^2 = O(n^4)$$

- <u>שמות</u>:

$O(n)$ – ליניארי

$O(\log n)$ – לוגריתמי

$O(n^c)$ עבור $c \in N$ – פולינומי

$O(2^{nc})$ – אקספוננציאלי

<u>פתרון בעיה</u>:
בפתרון בעיה יש להציג:

- אלגוריתם
- הוכחת נכונות
- ניתוח זמן ריצה

זה תקף לעבודות, מבחנים וכל דבר אחר.
יתכן שלעתים ייאמר שאין צורך להוכיח נכונות או לנתח זמן ריצה – אך כל עוד לא נאמר אחרת, יש לעשות הכל.

רדוקציות

תיאור סכמטי של פתרון בעיה א' בעזרת רדוקציה לבעיה ב':

בעיית SEP [מסלול זוגי קצר ביותר]

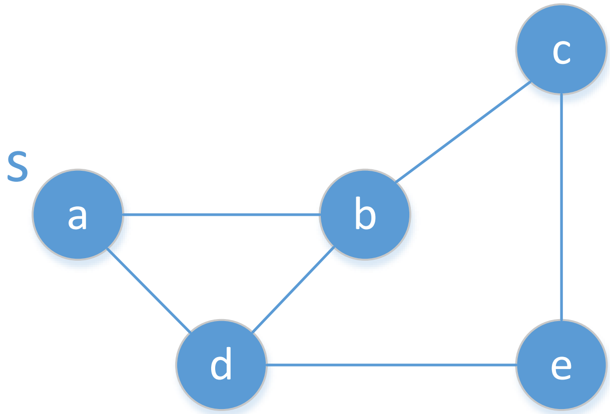
נתון גרף $G=(V,E)$ וקדקוד $s\in V$.

מצא מסלול **<u>זוגי</u>** קצר ביותר מ- s לכל $u\in V$.

נתון אלגוריתם לבעיית SP [שמוצא מסלולים קצרים ביותר, בלי קשר לזוגיות אורכי המסלולים].

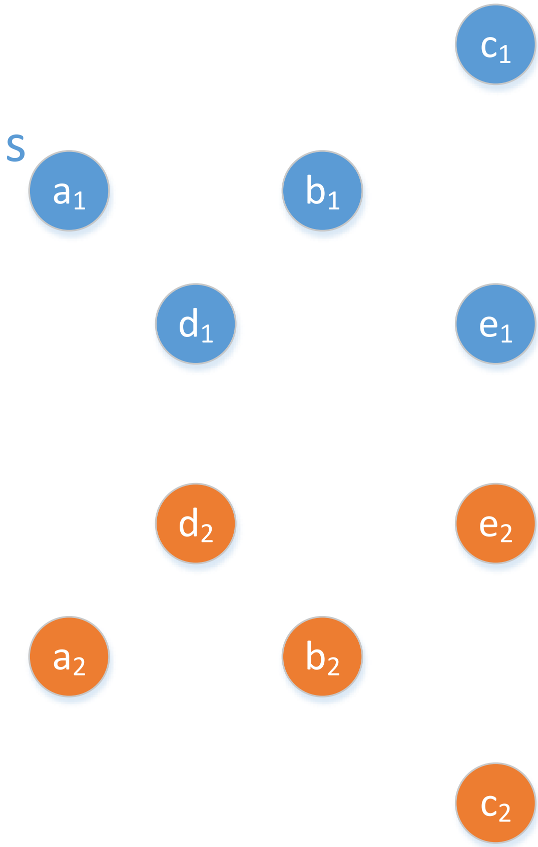
<u>פתרון:</u>

נסביר בעזרת דוגמה.
נניח שיש לנו את הגרף:

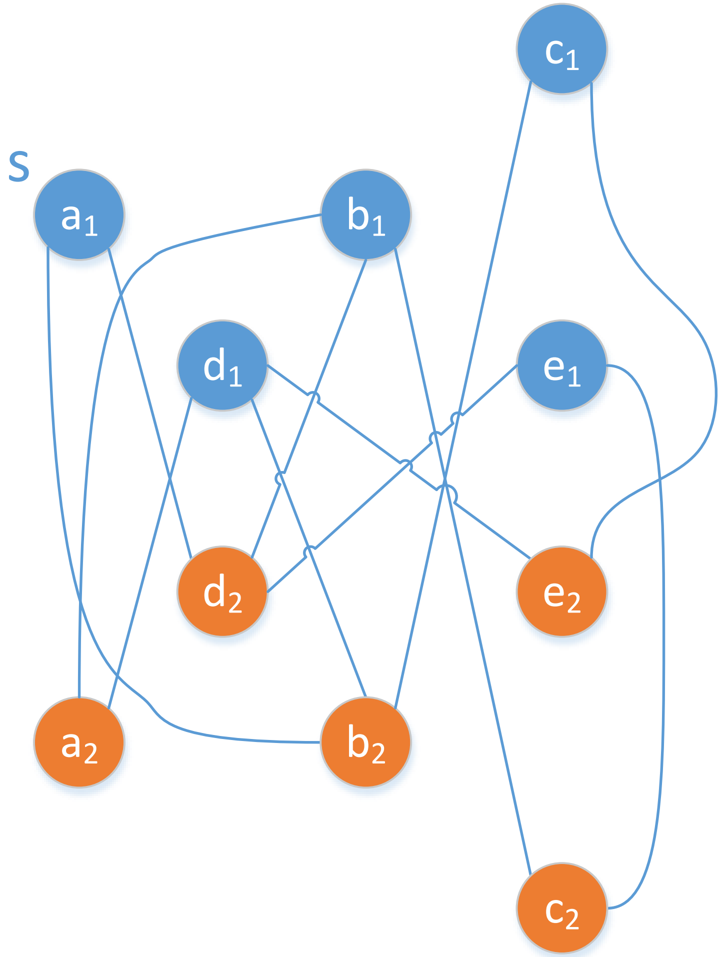


ע"מ למצוא מסלולים זוגיים, ניצור גרף באופן הבא:

1. נשכפל את קדקודי הגרף:



2. נחליף כל צלע בין קדקודים $\{u,v\}$ בשתי צלעות – אחת בין u בגרף הראשון ל-v בגרף השני, ואחת בין v בגרף הראשון ל-u בגרף השני:



3. נריץ את הקופסה השחורה שלנו על הגרף החדש.
4. המסלולים המתקבלים בין s לבין u_1 לכל $u \in V$ הם המסלולים המבוקשים.

פתרון פורמלי

הגדרת הרדוקציה

יהיו $G=(V,E)$, $s \in V$.

- תרגום הקלט:

נבנה $G'=(V',E')$ כך:

$$V^1=\left\{v^1\middle|v\in V\right\}$$
$$V^2=\left\{v^2\middle|v\in V\right\}$$
$$V'=V^1\cup V^2$$
$$E'=\left\{\left(v^1,u^2\right)\middle|\left(v,u\right)\in E\right\}$$

[[הסימונים v^1,v^2 הם דרכים להבדיל בין קדקודים בחלק הראשון של הגרף לקדקודים בחלק השני של הגרף. אין קשר לחזקות.]]

קיבלנו מופע עבור SP:

$$\left\langle s^1,G'\right\rangle$$

- <u>תרגום הפלט</u>:
  לכל $u\in V$:

$$d'\left(s^1,u^1\right)=d\left(s,u\right)$$

כאשר d פונקציית מרחק זוגי קצר ביותר ב- G,
ו- d' פונקציית מרחק קצר ביותר ב- G'.

הוכחת נכונות

בד"כ בהוכחת נכונות של אלגוריתם ננסח משפט (שלרוב יאמר "האלגוריתם עובד"), וטענות עזר שיהפכו את הוכחת המשפט להרבה יותר פשוטה.

- <u>טענה ראשית</u>: לכל $v\in V$, אורך המסלול הזוגי המינימלי מ- $s\in V$ ל- v שווה ל- $d\left(s^1,v^1\right)$ ב- G'.
- <u>טענת עזר</u>: קיים מסלול ב- G באורך $2m$ בין $s\in V$ ל- $v\in V$ אם"ם קיים ב- G' מסלול באורך $2m$ מ- s^1 ל- v^1 ($s^1,v^1\in V$).

באופן כללי, עדיף קודם להוכיח את הטענה הראשית בעזרת טענות העזר ורק אז להוכיח את טענות העזר – זאת משום שבעת ההוכחה הראשית יתכן שנגלה שאנו צריכים טענות עזר שונות, ואז חבל על העבודה המיותרת שהיינו עושים בהוכחת טענת עזר שאנחנו לא צריכים.

<u>אבחנה</u>: [שזה משהו שהמתרגל לא מוכיח אך מצפה שאנחנו כן]
אורך כל מסלול מ- $s^1\in V^1$ ל- $v^1\in V^1$ כלשהו הוא זוגי.

<u>הוכחת הטענה הראשית</u>:

יהי $2m$ אורך המסלול הזוגי המינימלי מ- s ל- v ב- G.
מטענת העזר קיים מסלול זוגי באורך זהה בין s^1 ל- v^1 ב- G'.

נניח בשלילה שקיים ב-G' מסלול זוגי בין s^1 ל-v^1 באורך קצר מהמסלול ב-G בין s ל-v, באורך $2k$ [כאשר $2k<2m$].
מטענת העזר קיים מסלול זוגי באורך $2k$ בין s ל-v ב-G, בסתירה להנחה [הנחנו שאורך המסלול הזוגי המינימלי מ-s ל-v ב-G הוא $2m$, אז אם יש מסלול כזה באורך $2k<2m$, זו סתירה].

<u>הוכחת טענת העזר:</u>

סדרת הקדקודים $p=(s,u_1,u_2,\dots,u_{2m-1},v)$ היא מסלול באורך $2m$ ב-G

$$\Updownarrow$$

בין כל שני קדקודים ב-$p=(s,u_1,u_2,\dots,u_{2m-1},v)$ יש צלע ב-G

$$\Updownarrow$$

בין כל שני קדקודים סמוכים ב-$p'=(s^1,u_1^2,u_2^1,u_3^2,\dots,u_{2m-1}^2,v^1)$ יש צלע ב-G'

$$\Updownarrow$$

סדרת הקדקודים $p'=(s^1,u_1^2,u_2^1,u_3^2,\dots,u_{2m-1}^2,v^1)$ היא מסלול מ-s^1 ל-v^1 ב-G'

ניתוח סיבוכיות

- ממיר קלט: $O(|V|+|E|)$
- הפעלת הקופסה השחורה על G': $O(2|V|+2|E|)=O(|V|+|E|)$

  [הערה: לא תמיד נחשב את הסיבוכיות של הקופסה השחורה, כי לא תמיד נדע בכלל מה המימוש שלה; כאשר יתנו לנו קופסה שחורה כנתון, נצטרך להחשיב את הסיבוכיות שלה רק אם אומרים לנו מהי. בניתוח הסיבוכיות כאן אנו מניחים שהקופסה השחורה מריצה את אלגוריתם BFS, שהסיבוכיות שלו היא $O(|V^*|+|E^*|)$, עבור גרף נתון $G=(V^*,E^*)$ (אצלנו זה הגרף $G'=(V',E')$, ומתקיים $|V'|=2|V|$ וכן $|E'|=2|E|$).]
- ממיר פלט: $O(|V|)$

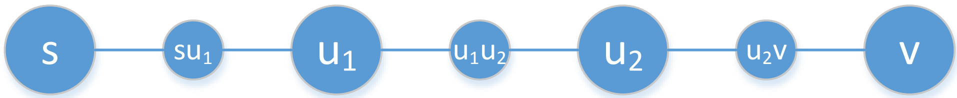
רדוקציה מ-SP ל-SEP

כעת נרצה לעשות את הכיוון ההפוך – יש לנו קופסה שחורה שפותרת את SEP [[**שימו לב**: היא לאו דווקא עושה זאת עם האלגוריתם שכתבנו מקודם!]], וצריך לפתור את SP [[כלומר למצוא מסלול קצר ביותר בלי קשר לזוגיות]].

<u>פתרון:</u>

נפצל כל קשת ל-2.
נדגים עם דוגמה:

יהפוך להיות:



כך למעשה בין הקדקודים המקוריים, בגרף החדש כל המסלולים יהיו באורך כפול, ולכן הקופסה השחורה של SEP תמצא אותם.
בסוף נחלק את אורך המסלול ב-2 ונקבל את אורך המסלול הקצר ביותר בין s ל-v בגרף המקורי.

[הצעה נוספת לפתרון:
להוסיף לכל קדקוד v קדקוד חדש, v', המחובר רק ל-v, ואז להריץ את הקופסה השחורה על הגרף המתקבל, ולקחת את המסלול הקצר מבין המסלול ל-v והמסלול ל-v'.
באופן דומה, ניתן להוסיף קדקוד נוסף יחיד, s', המחובר רק ל-s, ואז להריץ את הקופסה השחורה פעמיים – פעם אחת מ-s ופעם שניה מ-s', ולקחת את התוצאה הטובה ביותר עבור כל קדקוד v.]

פתרון פורמלי

הגדרת הרדוקציה

- <u>תרגום קלט</u>:
  נבנה G' מ-G בצורה הבאה:

$$V^* = \{uv | (u,v) \in E\}$$
$$V' = V \cup V^*$$
$$E' = \{(u,uv) | (u,v) \in E\}$$
$$G' = (V', E')$$

- <u>תרגום פלט</u>:

$$d(s,v) = \frac{d'(s,v)}{2}$$

הוכחת נכונות

- <u>טענה ראשית</u>: אורך מסלול מינימלי מ-s ל-v ב-G שווה למחצית אורך מסלול זוגי מינימלי מ-s ל-v ב-G'.
- <u>אבחנה</u>: אורך כל מסלול (אם קיים) מ-$s \in V$ ל-$v \in V$ ב-G' הינו זוגי.
- <u>טענת עזר</u>: קיים ב-G מסלול פשוט באורך d בין s ל-v אם"ם קיים ב-G' מסלול פשוט באורך $2d$ בין s ל-V.

<u>הוכחת הטענה הראשית</u>:

יהי $2m$ אורך מסלול מינימלי מ- $s \in V$ ל- $v \in V$ ב- G'.
עפ"י טענת העזר, קיים מסלול פשוט ב- G באורך m בין s ל- v.

נניח בשלילה שקיים מסלול פשוט ב- G יותר קצר בין s ל- v באורך k, כאשר $k < m$.
מטענת העזר נובע שקיים מסלול פשוט באורך $2k$ בין s ל- v ב- G'.
זו סתירה למינימליות המסלול ב- G'.

[[התחלנו ממסלול מינימלי באורך $2m$ ב- G', מזה הסקנו שיש מסלול באורך m ב- G.
אנחנו רוצים להראות שמסלול זה מינימלי ב- G.
הנחנו בשלילה שיש מסלול קצר יותר, באורך $k < m$.
אז הסקנו, שוב מטענת העזר, שיש מסלול מתאים ב- G' באורך $2k$ – אבל $2k < 2m$, ואז קיבלנו ב- G' מסלול בקצר יותר, בסתירה למינימליות המסלול ממנו התחלנו.

שימו לב שע"מ לעשות את המעבר ממסלול ב- G חזרה למסלול ב- G', היינו צריכים שטענת העזר תהיה **דו-כיווניות**.]]

הערה [Shortest Odd Path]

ע"מ לפתור את בעיית ה-shortest **odd** path (כלומר למצוא מסלול קצר ביותר באורך **אי**-זוגי), היינו יכולים לעשות בדיוק את אותה הבניה כמו ב-SEP (ההוכחה הראשונה שעשינו בשיעור זה), ולשנות את ממיר הפלט כך שישתמש במסלול מ- s^1 ל- v^2 במקום במסלול מ- s^1 ל- v^1.

הערה חשובה ביותר!

שימו לב לכיוון הרדוקציה!

הניסוח הוא:

רדוקציה **מ-**<מה שרוצים לפתור> **ל-**<מה שאנחנו יודעים לפתור>

היו המון מקרים בשנים קודמות שסטודנטים פתרו רדוקציה בכיוון ההפוך, שהיא פעמים רבות **הרבה יותר קשה**.