דף עבודה — פרק 1: מושג הגבול והגדרת הנגזרת

חשבון דיפרנציאלי · פרק 1 — מיתר ומשיק, גבול, הנגזרת מן ההגדרה ומשוואת המשיק

שם: _____ כיתה: _____ תאריך: _____

הגדרת הנגזרת: $f'(x) = \lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x)) / h$. משוואת המשיק בנקודה $x = a$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. זכרו — לפני ההצבה $h \to 0$ יש לצמצם את h מהמכנה.

שאלה 1 — חישוב גבולות פשוטים קל

חשבו את הגבול (הציבו בדמיון h קטן והולך):

a. $\lim_{h\to 0} (4 + h) =$ _____

b. $\lim_{h\to 0} (2x + h) =$ _____

c. $\lim_{h\to 0} (h^2 + 3) =$ _____

d. $\lim_{h\to 0} (6 + 2h) =$ _____

שאלה 2 — מנת ההפרשים קל

עבור $f(x) = x^2$ כתבו וצמצמו את מנת ההפרשים $(f(x+h) - f(x)) / h$:

פתחו $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$, חסרו x^2, חלקו ב-h וכתבו את התוצאה לפני ההשאפה.

.....

.....

.....

.....

שאלה 3 — נגזרת של פונקציה קווית — מן ההגדרה בינוני

מצאו מן ההגדרה את הנגזרת:

a. $f(x) = 5x$

b. $f(x) = -3x$

c. $f(x) = 7$ (קבוע)

.....

.....

.....

שאלה 4 — נגזרת של פרבולה — מן ההגדרה בינוני

מצאו מן ההגדרה את הנגזרת של $f(x) = x^2 + 2x$, והציבו כדי למצוא את $f'(1)$.

שאלה 5 — שיפוע המשיק קל

ידוע ש-$(x^2)' = 2x$. מהו שיפוע המשיק לגרף $f(x) = x^2$ בנקודות:

a. $x = 4$ ⟵ _____

b. $x = 5$ ⟵ _____

c. $x = -1$ ⟵ _____

d. $x = 0$ ⟵ _____

שאלה 6 — משמעות פיזיקלית בינוני

מקום גוף נתון על ידי $s(t) = t^2$ (מטרים, שניות), והמהירות היא $s'(t) = 2t$. מהי המהירות הרגעית ברגעים $t = 3$ ו-$t = 5$?

שאלה 7 — משוואת המשיק בינוני

מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 1$ (השתמשו ב-$f(1)$ וב-$f'(1) = 2$).

שאלה 8 — משיק בנקודה נוספת מאתגר

מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 3$. שרטטו בקצרה מה מייצג השיפוע.

שאלה 9 — נגזרת של פונקציה רציונלית מאתגר

מצאו מן ההגדרה את הנגזרת של $f(x) = 1/x$ (עבור $x \neq 0$). רמז: מכנה משותף במונה.

שאלה 10 — נכון או לא נכון — נמקו בינוני

קבעו נכון/לא נכון ונמקו:

a. הנגזרת בנקודה שווה לשיפוע המשיק באותה נקודה.
b. מותר להציב $h = 0$ ישירות במנת ההפרשים.
c. הנגזרת של פונקציה קבועה היא אפס.

שאלה 11 — אתגר — נקודה עם שיפוע נתון מאתגר

עבור $f(x) = x^2$ (כאשר $f'(x) = 2x$): באיזו נקודה שיפוע המשיק שווה ל-10? ובאיזו נקודה המשיק אופקי (שיפוע 0)?

© כל הזכויות שמורות ליאיר כהנא

🔑 דף פתרונות למורה — פרק 1: מושג הגבול והגדרת הנגזרת

לא לחלוקה לתלמידים

שאלה 1. א. 4 ב. 2x ג. 3 ד. 6

שאלה 2. $(x+h)^2 - x^2) / h = (2xh + h^2) / h = 2x + h$. כאשר $h \to 0$ מקבלים 2x.

שאלה 3. א. $(5(x+h) - 5x)/h = 5h/h = 5$ ב. −3 ג. 0 (קבוע — מנת ההפרשים $0/h = 0$)

שאלה 4. $(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x) / h = (2xh + h^2 + 2h)/h = 2x + h + 2 \to f'(x) = 2x + 2$, ולכן $f'(1) = 4$.

שאלה 5. א. 8 ב. 10 ג. −2 ד. 0

שאלה 6. $s'(3) = 6$ מ׳/ש׳, $s'(5) = 10$ מ׳/ש׳.

שאלה 7. $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$. המשיק: $y = 2x - 1 \to y - 1 = 2(x - 1)$.

שאלה 8. $f(3) = 9$, $f'(3) = 6$. המשיק: $y = 6x - 9 \to y - 9 = 6(x - 3)$. השיפוע 6 = קצב עליית הגרף בנקודה.

שאלה 9. $(1/(x+h) - 1/x) / h = (-h / (x(x+h))) / h = -1 / (x(x+h)) \to$ כאשר $h \to 0$: $f'(x) = -1/x^2$.

שאלה 10. א. נכון. ב. לא נכון — חלוקה באפס; מותר רק להשאיף $h \to 0$ אחרי צמצום. ג. נכון — לגרף אופקי שיפוע 0.

שאלה 11. $x = 5 \to 2x = 10$. משיק אופקי: $x = 0 \to 2x = 0$ (קדקוד הפרבולה).

© כל הזכויות שמורות ליאיר כהנא