Семинар №3

Пространство $\mathbb{R}^n$

Def. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ — множество элементов (точек) $x = \underbrace{(x_1,\ x_2, \dots, x_n)}_{x_i - \text{координаты}}$ с заданным расстоянием между ними:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \text{ (евклидова метрика)}$$

Свойства $\rho(x,y)$:

1)$\rho(x,y) \geqslant 0$; $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$;

2)$\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3)$\forall z \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$; (неравенство $\triangle$)

Замечание. $\mathbb{R}$ можно рассматривать как метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ при $n = 1$; в нем $\rho(x,y) = |y - x|$.

Def. В $\mathbb{R}^n$ вводятся операции $x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ и $\lambda x \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.
$\mathbb{R}^n$ — линейное пространство

Def. (Шаровая) ε — окрестность точки $x^{(0)}$: $\mathrm{U}_\varepsilon(x^{(0)}) = \left\{x \mid \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\right\}$.

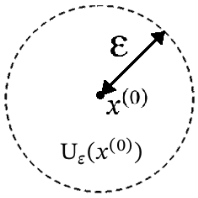


Рис. 1. ε — окрестность точки $x^{(0)}$

Замечание. Аналогично можно ввести прямоугольную, квадратную и другие окрестности.

Def. $\mathring{\mathrm{U}}_\varepsilon(x^{(0)}) = \mathrm{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \setminus \left\{x^{(0)}\right\}$

Def. Последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ — отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ($\forall m \in \mathbb{N}$ поставлена в соответсвие точка $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$)

Def. $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N \hookrightarrow \underbrace{\rho(x^{(m)}, x^{(0)}) < \varepsilon}_{\left(x^{(m)} \in \mathring{\mathrm{U}}_\varepsilon(x^{(0)})\right)}$$

Замечание. $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)} \Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \underbrace{\rho(x^{(m)}, x^{(0)})}_{\text{числовая последовательность}} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i^{(0)}}_{\text{пределы n числовых последовательностей}}$, $i = 1, \dots, n$.

Def. $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, если $\rho(x^{(m)}, 0) = \infty$.

Задача. Д-ть: $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, a) = \infty$

Доказательство:

"$\Rightarrow$" пусть $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, 0) \overset{\text{н-во } \triangle}{\geqslant} \rho(x^{(m)}, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(x^{(m)}, a) \geqslant \underbrace{\rho(x^{(m)}, 0)}_{\downarrow m\to\infty \atop \infty} - \underbrace{\rho(a, 0)}_{\| \atop const} \Rightarrow \rho(x^{(m)}, a) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$;

"$\Leftarrow$" пусть $\forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, a) = \infty$. Возьмем $a = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty$. ■

Def. $\{x^{(m)}\}$ называется ограниченной, если <u>числовая</u> последовательность $\{\rho(x^{(m)}, 0)\}$ ограничена.

Th (Больцано-Вейерштрасса).

Из $\forall$ ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Th (Критерий Коши сходимости последовательности).

$\{x^{(m)}\}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) < \varepsilon$.

Классификация множеств в $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{I}}$ **Открытые множества.**

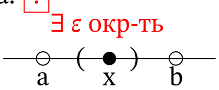
Def. x называется внутренней точкой м-ва $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\exists \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset E$.

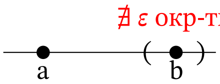
Def. Внутренность мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$: $intE = \{x \mid x$— внутренняя т. $E\}$.

Пример: $int[1;2] = (1;2)$ (внутренность отрезка — интервал)

Def. Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall x \in E$ является внутренней т. E, т.е. $\boxed{intE = E}$

Замечание. $\varnothing, \mathbb{R}^n$ — открытые множества. $\boxed{!}$

Примеры. $n = 1$: (a, b) — открытое мн-во 

$[a, b]$ — не открытое мн-во  (a,b не являются внутренними точками)

$n = 2$:

$\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ — открытое

$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ — не открытое

Рис. 2

Th. A, B — открытые мн-ва $\Rightarrow \underbrace{A \cup B}_{\text{а)}}$ открытое и $\underbrace{A \cap B}_{\text{б)}}$ открытое.

Доказательство: (см. Рис. 3)

а) пусть $x \in A \cup B \Rightarrow x \in a$ или $x \in B$. Если $x \in A$, то $\exists \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset A \subset A \cup B \Rightarrow$
$\Rightarrow x$— внутренняя точка $A \cup B$. Аналогично при $x \in B$.

б) если $A \cap B = \varnothing$ очев. Пусть $A \cap B \neq \varnothing$. Пусть $x \in A \cap B \to x \in A$ и $x \in B$.
x — внутр. для A $\Rightarrow \exists \mathrm{U}_{\varepsilon_A}(x) \subset A$;
x — внутр. для B $\Rightarrow \exists \mathrm{U}_{\varepsilon_B}(x) \subset B$.
Возьмем $\varepsilon = min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$. Тогда $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset A \cap B \Rightarrow x$ — внутренняя для $A \cap B$. ■

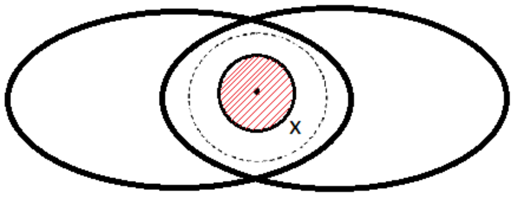


Рис. 3. Иллюстрация к доказательству **Th.**

Следствие. $\cup$ <u>любого</u> числа открытых множеств — открытое множество.
$\cap$ <u>конечного</u> числа открытых множеств — открытое множество*

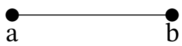
Замечание. Для бесконечного числа открытых множеств * выполняется не всегда.

Def. $\forall$ открытое мн-во, содержащее т.x, называется окрестностью т.x и обозн. $\mathrm{U}(x)$. Аналогично $\mathring{\mathrm{U}}(x)$. $\boxed{!}$

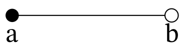
$\boxed{\text{II}}$ Замкнутые множества.

Def. $x \in \mathbb{R}^n$ — т. прикосновения мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \mathrm{U}(x) \cap E \neq \varnothing$.

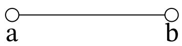
Def. Замыкание множества $E \subset \mathbb{R}^n$: $\overline{E} = \{x \mid x$ — т. прикосновения E$\}$

Примеры. $n = 1$: 

замкнутое, не открытое



не замкнутое, не открытое



не замкнутое, открытое

$n = 2$ (см. Рис. 4): E = открытый круг $\cup$ отдельная точка;
$\overline{E}$ = круг, включая границу $\cup$ отдельная точка.

E $\qquad$ $\overline{E}$

Рис. 4

Замечание. $\varnothing$, $\mathbb{R}^n$ — замкнутые множества (и одновременно открытые) $\boxed{!}$

Def. $\mathbb{R}^n \backslash E$ называется дополнением множества E.

Th. E открыто $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \backslash E$ замкнуто. (E замкнуто $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \backslash E$ открыто)

Th (законы де Моргана).

$$\mathbb{R}^n \backslash \Big(\bigcup_i E_i\Big) = \bigcap_i \big(R^n \backslash E_i\big)$$
$$\mathbb{R}^n \backslash \Big(\bigcap_i E_i\Big) = \bigcup_i \big(R^n \backslash E_i\big)$$

Следствие. A,B — замкнутые множества $\Rightarrow$ $A \cap B$ замкнуто и $A \cup B$ замкнуто.

Следствие. $\cap$ <u>любого</u> числа замкнутых множеств — замкнутое множество.
$\cup$ <u>конечного</u> числа замкнутых множеств — замкнутое множество*

Замечание. Для бесконечного числа замкнутых множеств * выполняется не всегда.

Пример: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]}_{\text{зам.}} = \underbrace{(-1,1)}_{\text{не зам.}}$

$\boxed{\text{III}}$ Изолированные и предельные точки.

Def. $x \in E$ — изолированная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\exists \mathring{U}_\varepsilon(x) : \mathring{U}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$.

Пример:

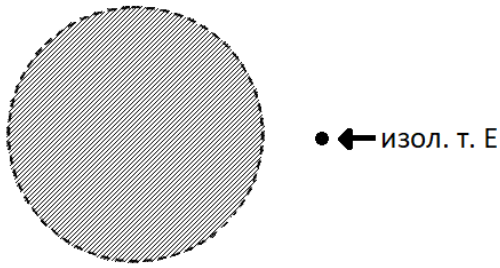


Рис. 5

Def. x — предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall\, \mathring{U}(x) \cap E \neq \varnothing$

Замечание. x — предельная точка E $\Leftrightarrow$ $\exists$ последовательность Гейне $x^{(m)} \subset E$, сходящаяся к x.

Замечание. $\forall$ мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n \hookrightarrow$ {т-ки прикосновения} = {предельные т-ки} $\cup$ {изолированные т-ки}, причем {предельные т-ки} $\cap$ {изолированные т-ки} = $\varnothing$.

$\boxed{\text{IV}}$ Границы множеств.

Def. x — граничная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall$U(x) содержит как точки из E, так и из $\mathbb{R}^n \backslash E$.

Def. Граница множества $E \subset \mathbb{R}^n$: $\partial E = \{x \mid$ x — граничная точка $E\}$.

Пример: граница круга и изолированной точки

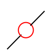
Рис. 6

Примеры. E-? : 1)$\partial E \subset$ и $\partial E \neq E$ — замкнутый круг

2)$\partial E = E$ — окружность, точка

3)$\partial E \cap E = \varnothing$ — открытый круг

4)$\partial E = \varnothing$ — $\mathbb{R}^n$

5)$\partial E \supset E$ и $\partial E \neq E$ — $\mathbb{Q}$;  .

$\boxed{\text{V}}$ **Связность множества. Области и компакты.**

Напоминание.

Непрерывная (параметрически заданная) кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек, заданное как непрерывное отображение отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$:

$$\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) | t \in [\alpha, \beta]\}$$

Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется <u>линейно связным</u>, если $\forall$ его 2 точки можно соединить непрерывной кривой $\Gamma \subset E$.

Замечание. Множество, состоящее из 1 точки, считается линейно связным.

Пример:

линейно связно не линейно связно

Рис. 7

Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется областью, если оно открыто и линейно связно.

Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n\ :\ E \neq \varnothing$, называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Примеры. Интервал – область, отрезок — компакт.

Дополнение к множествам в $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{I}}$ **Def.** Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется <u>связным</u>, если $\forall$ его разбиения $E = \underset{\neq\varnothing}{A} \cup \underset{\neq\varnothing}{B}$, $A \cap B = \varnothing \hookrightarrow A \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

Пример: связное, но не линейно связное множество : $E = \left\{(x, y) | x \geqslant 0, y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}\right\}$.

E — график функции, имеющей точки разыва II рода $\Rightarrow$ не линейно связное;

но $\{(0,0)\} \cap \overline{E \backslash \{(0,0)\}} = \{(0,0)\} \neq \varnothing \Rightarrow$ E связно.

Замечание. E линейно связно $\Rightarrow$ E связно.

$\boxed{\text{II}}$ **Th (лемма Гейне-Бореля).** Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — его $\overbrace{\text{покрытие}}^{K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k}$ открытыми мн-ми. Тогда из $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить <u>конечное</u> подпокрытие $\{G_k\}_{k=1}^{m}$ компакта K.

Доказательство: для $\mathbb{R}$ и случая $K = [a, b]$

Предположим обратное $\Rightarrow$ одну из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, a\right]$ нельзя покрыть конечным подпокрытием. Делим этот отрезок пополам и т.д. Получаем СВО с длиной $\to 0$, стягивающуюся к $x_0 \in [a, b]$. $x_0 \in$ одному из G_k $\Rightarrow$ начиная с некоторого шага деления отрезок целиком $\subset G_k$?! ■

<u>Примеры использования:</u> 1) доказательство Th Кантора о РН $f(x)$ на [a,b]

2)задача: доказать, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \text{U}_{\frac{1}{2^k}}(q_k) \neq \mathbb{R}$

Задача (&2 9.2). Является ли область определения $f(x,y)=\sqrt{x\sin y}$ замкнутым? открытым? областью?

Утверждение. $\overline{E} = intE \cap \partial E$

Доказательство: Пусть $x \in \overline{E} \Rightarrow \forall \mathrm{U}(x)$ содержит $x_1 \in E$. Либо $\exists \mathrm{U}^{(1)}(x)$, целиком $\subset E$, либо $\forall \mathrm{U}(x)$ содержит $x_2 \notin E$. В первом случае $x \in intE$, во втором x $\in \partial E$ ■

Следствие. $\partial E \subset E \Rightarrow \overline{E} = E. \left(\overline{E} = \underbrace{intE}_{\substack{\cap \\ E}} \cup \partial E\right)$

Решение:

Обозначим область определения D. $\partial D = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2\pi n) \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\} \subset D \Rightarrow \overline{D} = D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **D замкнуто.**

$\begin{cases} \partial D \subset D \\ \partial D \neq \varnothing \end{cases}$ $\Rightarrow$ **D не является открытым** $\Rightarrow$**D не область.**

Замечание. D линейно связно

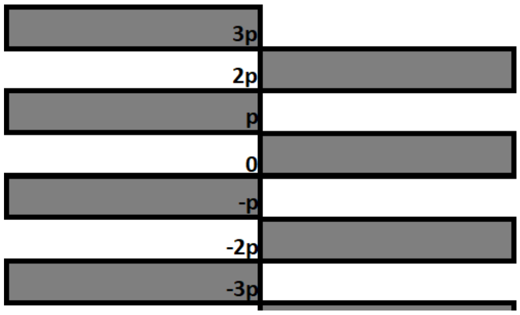


Рис. 8. Иллюстрация к задаче &2 9.2

Задача (&1 13). $f \in \mathbb{C}\,(\mathbb{R}),\ y_0 \in \mathbb{R}$. **Доказать:** $S = \{x \mid f(x) > y_0\}$ открыто.

План: берем $x_0 \in S$, берем $\varepsilon = \frac{f(x_0)-y_0}{2}$, показываем, что $x_0 \in intS$.

Функции многих переменных

Def. $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — отображение $X \to \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество определения.

Рассмотрим $f(x)$ на множестве $E \subset X$; пусть $x^{(0)}$ — предельная точка E.

Def. (предел $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по множеству E)

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = a, \text{ если } \left[\begin{array}{l} \text{по Гейне: } \forall \{x^{(m)}\} \subset E \setminus \{x^{(0)}\} : \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)} \hookrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = a \\ \text{по Коши: } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{\mathrm{U}}_\delta(x^{(0)}) \cap E \hookrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \end{array}\right.$$

Обозначения: $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim\limits_{\substack{\rho(x, x^{(0)}) \to 0 \\ x \in E}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n \to x_n^{(0)} \\ (x_1, \dots, x_n) \in E}} f(x).$

Пример: функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{I} \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} D(x) = 1,\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{I}}} D(x) = 0.$

Замечание. в $\mathbb{R}^n$ сохраняются основные свойства пределов (**Th** об арифметический действиях, свойства, связанные с неравенствами, понятия бесконечно малых и бесконечно больших функций).

Def. (предел $f(x)$ в точке $x^{(0)}$)

Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\mathring{\mathrm{U}}(x^{(0)})$.

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in \mathring{\mathrm{U}}(x^{(0)})}} f(x)$$

.

Th. Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\mathring{U}(x^{(0)})$. $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \forall E \subset X$: $x^{(0)}$ — предельная точка $E \hookrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = a$