

Семинар №3

Пространство \mathbb{R}^n

Def. Метрическое пространство \mathbb{R}^n — множество элементов (точек) $x = \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{x_i - \text{координаты}}$ с заданным расстоянием между ними:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \text{ (евклидова метрика)}$$

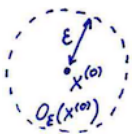
Свойства $\rho(x, y)$:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\forall z \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$; (неравенство \triangle)

Замечание. \mathbb{R} можно рассматривать как метрическое пространство \mathbb{R}^n при $n = 1$; в нем $\rho(x, y) = |y - x|$

Def. В \mathbb{R}^n вводятся операции $x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ и $\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$
 \mathbb{R}^n — линейное пространство

Def. (Шаровая) ε — окрестность точки $x^{(0)}$: $U_\varepsilon(x^{(0)}) = \{x \mid \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\}$



Замечание. Аналогично можно ввести прямоугольную, квадратную и другие окрестности.

Def. $\dot{U}_\varepsilon(x^{(0)}) = U_\varepsilon(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}$

Def. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ — отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\forall m \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие точка)

Def. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N \hookrightarrow \rho(x^{(m)}, x^{(0)}) < \varepsilon$ ($x^{(m)} \in \dot{U}_\varepsilon(x^{(0)})$)

Замечание. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\rho(x^{(m)}, x^{(0)})}_{\text{числовая последовательность}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{x_i^{(m)} = x_i^{(0)}}_{\text{пределы } n \text{ числовых последовательностей}}, i = 1, \dots, n$

Def. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$, если $\rho(x^{(m)}, 0) = \infty$

Задача. Д-ть: $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, a) = \infty$

Доказательство:

” \Rightarrow ” пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, 0) \geq \rho(x^{(m)}, 0) \Rightarrow \rho(x^{(m)}, a) \geq \rho(x^{(m)}, 0) - \rho(a, 0) \Rightarrow \rho(x^{(m)}, a) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$;

” \Leftarrow ” пусть $\forall a \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, a) = \infty$. Возьмем $a = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty$; ■

Def. $\{x^{(m)}\}$ называется ограниченной, если числовая последовательность $\{\rho(x^{(m)}, 0)\}$ ограничена.

Th (Больцано-Вейерштрасса). Из \forall ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Th (Критерий Коши сх. посл-ти). $\{x^{(m)}\}$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) < \varepsilon$

Классификация множеств в \mathbb{R}^n

I Открытые множества.

Def. x называется внутренней точкой м-ва $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\exists U_\varepsilon(x) \subset E$.

Def. Внутренность мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$: $\text{int} E = \{x | x \text{ — внутренняя т. } E\}$.

Пример: $\text{int}[1; 2] = (1; 2)$ (внутренность отрезка — интервал)

Def. Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall x \in E$ является внутренней т. E , т.е. $\text{int} E = E$

Замечание. \emptyset, \mathbb{R}^n — пустые множества. !

ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Th. A, B — открытые мн-ва $\Rightarrow \underbrace{A \cup B}_a$ открытое и $\underbrace{A \cap B}_b$ открытое.

Доказательство:

а) пусть $x \in A \cup B \Rightarrow x \in a$ или $x \in B$. Если $x \in A$, то $\exists U_\varepsilon(x) \subset A \subset A \cup B \Rightarrow x$ — внутренняя точка $A \cup B$. Аналогично при $x \in B$.

б) если $A \cap B = \emptyset$ очев. Пусть $A \cap B \neq \emptyset$. Пусть $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ и $x \in B$.

x — внутр. для $A \Rightarrow \exists U_{\varepsilon_A}(x) \subset A$; x — внутр. для $B \Rightarrow \exists U_{\varepsilon_B}(x) \subset B$. Возьмем $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$.

Тогда $U_\varepsilon(x) \subset A \cap B \Rightarrow x$ — внутренняя для $A \cap B$. ■

ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Следствие. \cup любого числа открытых множеств — открытое множество.

\cap конечного числа открытых множеств — открытое множество*

Замечание. Для бесконечного числа открытых множеств *) выполняется не всегда.

Def. \forall открытое мн-во, содержащее т.х, называется окрестностью т.х и обозн. $U(x)$. Аналогично $\dot{U}(x)$. !

II Замкнутые множества.

Def. $x \in \mathbb{R}^n$ — т. прикосновения мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall U(x) \cap E \neq \emptyset$.

Def. Замыкание множества $E \subset \mathbb{R}^n$: $\bar{E} = \{x | x \text{ — т. прикосновения } E\}$

ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Def. Мн-во $E \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если $\bar{E} = E$

Замечание. \emptyset, \mathbb{R}^n — замкнутые множества (и одновременно открытые) !

Def. $\mathbb{R}^n \setminus E$ называется дополнением множества E .

Th. E открыто $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$ замкнуто. (E замкнуто $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$ открыто)

Th (законы де Моргана).

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_i E_i \right) = \bigcap_i (\mathbb{R}^n \setminus E_i)$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_i E_i \right) = \bigcup_i (\mathbb{R}^n \setminus E_i)$$

Следствие. A, B — замкнутые множества $\Rightarrow A \cap B$ замкнуто и $A \cup B$ замкнуто.

Следствие. \cap любого числа замкнутых множеств — замкнутое множество.

\cup конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество*

Замечание. Для бесконечного числа замкнутых множеств * выполняется не всегда.

Пример $\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]}_{\text{зам.}} = \underbrace{(-1, 1)}_{\text{не зам.}}$

III Изолированные и предельные точки.

Def. $x \in E$ — изолированная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\exists \dot{U}_\varepsilon(x) : \dot{U}_\varepsilon(x) \cap E = \emptyset$.

ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Def. x — предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \dot{U}(x) \cap E \neq \emptyset$

Замечание. x — предельная точка $E \Leftrightarrow \exists$ последовательность Гейне $x^{(m)} \subset E$, сходящаяся к x .

Замечание. \forall мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n \hookrightarrow \{\text{т-ки прикосновения}\} = \{\text{предельные т-ки}\} \cup \{\text{изолированные т-ки}\}$
причем $\{\text{предельные т-ки}\} \cap \{\text{изолированные т-ки}\} = \emptyset$.

IV Границы множеств.

Def. x — граничная точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall U(x)$ содержит как точки из E , так и из $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Def. Граница множества $E \subset \mathbb{R}^n : \partial E = \{x \mid x \text{ — граничная точка } E\}$.


ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Примеры. E : 1) $\partial E \subset E$ и $\partial E \neq E$ — замкнутый круг

2) $\partial E = E$ — окружность, точка

3) $\partial E \cap E = \emptyset$ — открытый круг

4) $\partial E = \emptyset$ — \mathbb{R}^n

5) $\partial E \supset E$ и $\partial E \neq E$ — \mathbb{Q} , 

V Связность множества. Области и компакты.

Напоминание. Непрерывная (параметрически заданная) кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — множество точек, заданное как непрерывное отображение отрезка $\alpha \leq t \leq \beta$:

$$\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если \forall его 2 точки можно соединить непрерывной кривой $\Gamma \subset E$.

Замечание. Множество, состоящее из 1 точки, считается линейно связным.

ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется областью, если оно открыто и линейно связно.

Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n : E \neq \emptyset$, называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Примеры. интервал — область, отрезок — компакт.

Дополнение к множествам в \mathbb{R}^n

I Def. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если \forall его разбиения $E = \underbrace{A \cup B}_{\emptyset \neq A, B} , A \cap B = \emptyset \hookrightarrow A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Пример связного, но не линейно связного множества : $E = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}\}$.

E — график функции, имеющей точки разрыва II рода \Rightarrow не линейно связное;

но $\{(0, 0)\} \cap \overline{E \setminus \{(0, 0)\}} = \{(0, 0)\} \neq \emptyset \Rightarrow E$ связно.

Замечание. E линейно связно $\Rightarrow E$ связно.

II Th (лемма Гейне-Бореля). Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — его $\overbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k}^{K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k}$ покрытие открытыми мн-ми. Тогда из $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{G_k\}_{k=1}^m$ компакта K .

Доказательство: для \mathbb{R} и случая $K = [a, b]$

Предположим обратное \Rightarrow одну из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ нельзя покрыть конечным подпокрытием. Делим этот отрезок пополам и т.д. Получаем СВО с длиной $\rightarrow 0$, стягивающуюся к $x_0 \in [a, b]$. $x_0 \in$ одному из $G_k \Rightarrow$ начиная с некоторого шага деления отрезок целиком $\subset G_k$?! ■

Примеры использования: 1) доказательство Th Кантора о РН $f(x)$ на $[a, b]$

2) задача: доказать, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\frac{1}{2^k}} (q_k) \neq \mathbb{R}$

Задача (&2 9.2). Является ли область определения $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$ замкнутой? открытой? областью?

ВСТАВИТЬ ПРИМЕРЫ С РИСУНКАМИ!!!

Утверждение. $\bar{E} = \text{int} E \cup \partial E$

Доказательство: Пусть $x \in \bar{E} \Rightarrow \forall U(x)$ содержит $x_1 \in E$. Либо $\exists U^{(1)}(x)$, целиком $\subset E$, либо $\forall U(x)$ содержит $x_2 \notin E$. В первом случае $x \in \text{int} E$, во втором $x \in \partial E$ ■

Следствие. $\partial E \subset E \Rightarrow \bar{E} = E. \left(\bar{E} = \underbrace{\text{int} E \cup \partial E}_E \right)$

Обозначим область определения D . $\partial D = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 2\pi n) \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\} \subset D \Rightarrow \bar{D} = D \Rightarrow D$ замкнуто.

$\partial D \subset D \Rightarrow D$ не является открытым $\Rightarrow D$ не область. **Замечание.** D линейно связно $\partial D \neq \emptyset$

Задача (&1 13). $f \in C(\mathbb{R})$, $y_0 \in \mathbb{R}$. **Доказать:** $S = \{x \mid f(x) > y_0\}$ открыто.

План: берем $x_0 \in S$, берем $\varepsilon = \frac{f(x_0) - y_0}{2}$, показываем, что $x_0 \in \text{int} S$.

Функции многих переменных

Def. $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — отображение $X \rightarrow \mathbb{R}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество определения.

Рассмотрим $f(x)$ на множестве $E \subset X$; пусть $x^{(0)}$ — предельная точка E .

Def. (предел $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ по множеству E)

$\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = a$, если $\left\{ \begin{array}{l} \text{по Гейне: } \forall \{x^{(m)}\} \subset E \setminus \{x^{(0)}\} : \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}) = a \\ \text{по Коши: } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\delta}(x^{(0)}) \cap E \Leftrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \end{array} \right.$

Обозначения: $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim_{\substack{\rho(x, x^{(0)}) \rightarrow 0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n \rightarrow x_n^{(0)} \\ (x_1, \dots, x_n) \in E}} f(x).$

Пример функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} D(x) = 1, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{I}}} D(x) = 0.$

Замечание. в \mathbb{R}^n сохраняются основные свойства пределов (**Th** об арифметический действиях, свойства, связанные с неравенствами, понятия бесконечно малых и бесконечно больших функций).

Def. (предел $f(x)$ в точке $x^{(0)}$)

Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\dot{U}(x^{(0)})$. $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in \dot{U}(x^{(0)})}} f(x).$

Th. Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\mathring{U}(x^{(0)})$. $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \forall E \subset X :$

$$x^{(0)} \text{ — предельная точка } E \hookrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = a$$