№5 p. 1	Инвариантные подпр-ва. Собственные в-ры и соб. зн-я. Хар. мн-н и его св-ва. Инв. следа и опр-ля матрицы оператора

Remind.

V - лин. пр-во над F

$\varphi: V \to V$ - лин. оператор, если

a) φ - адд.

б) φ - однородный

$(e_1 e_2 \dots e_n) = \varepsilon \quad \dim V = n$

$\varphi(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$

$A = (\underset{\varphi(e_1)}{A_1} \dots \underset{\varphi(e_n)}{A_n}) \Rightarrow \varphi(e_i) = \varepsilon \cdot A_i$

$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon \cdot A$

$x \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \alpha$, т. е. $x = \varepsilon \cdot \alpha$

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(\varepsilon) \cdot \alpha = \varepsilon \cdot A \cdot \alpha$

Пусть ε и g в V. $\varphi \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} A$

$\varphi \underset{g}{\longleftrightarrow} B$

Тогда $B = S^{-1} A S$, $S_{\varepsilon \to g}$ - м. пер.

Note. Матр. пер-да всегда не выр.

$\mathcal{L}(V)$ - пр-во всех л. о. действующих в V

$\varphi + \psi$, $\lambda \varphi$.

$\mathcal{L}(V)$ - лин пр-во над F, $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$

$(\varphi \cdot \psi)(x) \overset{def}{=} \varphi(\psi(x))$

$\mathcal{L}(V)$ - кольцо

$\Rightarrow \mathcal{L}(V)$ - алгебра

def. Подпр-во $U \subset V$ наз-ся инв. относ φ,

если $\forall x \in U \Rightarrow \varphi(x) \in U$

Note. $\underset{\text{вложено}}{\varphi(U) \subseteq U} \Leftrightarrow \varphi(U) \underset{\text{подпр-во}}{\leq} U$

def. $\varphi: V \to V$, U ~~[illegible]~~ подпр-во

Базис ε наз-ся согл. с U, если

$(e_1 \dots e_k)$ - базис в U

$(e_1, \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$ - базис V

Утв1. $\varphi: V \to V$, U - инв. подпр-во φ <=>
в базисе e, согл. с U A_φ имеет вид
$$\varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Д-во.
$\dim U = k$ $(e_1 \dots e_k)$ - базис U <=>
<=> e_i - инв φ <=> $\varphi(e_i) = e \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ■

Т2 (мн-во инв подпр-в φ, з-то относ $\cap, +$)
U_1, U_2 - инв отн φ, => $\begin{matrix} U_1 \cap U_2 \\ U_1 + U_2 \end{matrix}$ - инв. отн. φ.

Д-во.
$\varphi(U_1 \cap U_2) \subseteq \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \subseteq U_1 \cap U_2$
$\varphi(U_1 + U_2) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2) \subseteq U_1 + U_2$ ■

Утв. (первое утв о комм. оп-рах)
Если φ и ψ - комм. оп-ры ($\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$), то
$\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$, $\operatorname{Ker} \psi$, $\operatorname{Im} \psi$ - инв относ. каждого
из операторов.

Д-во.
Если ядро или образ того же оп-ра, то тривиально.
Покажем, что $\operatorname{Im} \varphi$, $\operatorname{Ker} \varphi$ инв отн ψ.
Пусть $x \in \operatorname{Ker} \varphi$.
$\psi(x) \overset{?}{\in} \operatorname{Ker} \varphi$.
$\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(x) \in \operatorname{Ker} \varphi$
Пусть $y \in \operatorname{Im} \varphi$, т.е. $y = \varphi(x)$, $x \in V$
Покажем, что $\psi(y) \in \operatorname{Im} \varphi$
$\psi(y) = \psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(x')$, $x' \in V$ ■

Опр. Ненул. в-р x, удовл. $\varphi(x) = \lambda x$, $\lambda \in F$
наз-ся собств. в-ром для φ с соб. зн. λ

Опр. Эл-т $\lambda \in F$ наз-ся соб. зн., если ему отвечает
какой-то собств. в-р.

№5 р.2

Note. $\ell(x)=\lambda x$, x — с.в. с с.зн. λ.

$P(x)\in F[x]$

$P(\ell)(x)=P(\lambda x)$

В частн., если $P(\ell)=0$, то $\forall$ с.зн. λ

$\hookrightarrow P(\lambda)(x)=0 \Rightarrow P(\lambda)=0$

Вывод. Если P аннулирует оператор ℓ, то $\forall$ с.зн. — корень P.

Def. Пр-во $V_\lambda=\operatorname{Ker}(\ell-\lambda \mathrm{Id})$ наз-ся собственным пр-м для ℓ, отвечающим λ.

Утв. $V_\lambda\neq\{\bar 0\} \Leftrightarrow \lambda$ — с.зн. оп-ра ℓ.

Д-во.

а) Необх. $V_\lambda\neq\{\bar 0\} \Rightarrow \exists x\neq 0: x\in V_\lambda$

$(\ell-\lambda I)x=0 \Rightarrow \ell(x)=\lambda I x=\lambda x \Rightarrow x$ с.в. λ — с.зн.

б) Дост. Пусть λ — с.зн. $\Rightarrow \exists x\neq 0: \ell(x)=\lambda x$

$\Rightarrow (\ell-\lambda I)x=0 \Rightarrow x\subseteq V_\lambda$. ▪

Def. $A\in M_n(F)$

Тогда мн-н $\chi_A(x)=\det(A-\lambda E)$ наз-ся хар. мн-н матрицы A

$\chi_A(x)=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}x^{n-1}\cdot \operatorname{tr} A+\ldots+\det A$

Утв 4 (о св-х хар мн-на)

а) Корни хар. мн-на и только они явл-ся соб зн. оператора ℓ (корни из F)

б) Хар. мн-н оп-ра ℓ не зависит от выбора базисов V

Д-во.

а) λ_0 — корень $\chi_A(\lambda) \Rightarrow \det(A-\lambda_0 E)=0$

Тогда $\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & \ddots \\ & & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1\\ \vdots \\ \lambda x_n\end{pmatrix}$

при $\lambda=\lambda_0$ имеет ненул реш. $x_0 \Rightarrow x_0$ — с.в. λ_0 — с.зн.

λ_0 — с.зн. $\exists x_0$ $\ell(x_0)=\lambda_0 x_0 \Rightarrow \det(A-\lambda_0 E)=0 \Rightarrow \lambda_0$ — корень χ_A

б) $B=S^{-1}AS$

$\chi_B(x)=\det(S^{-1}AS-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-S^{-1}(\lambda E)S)=$

$= \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E) \det S = \chi_A(\lambda)$ ☒

Сл-е 1, Если V - л. пр-во над $\mathbb{C}$, то $\forall$ оператор φ в V имеет хотя бы один собств в-р

Сл-е 2, От выбора базиса в пр-ве V не зависят коэф в $\chi(A)$ ($\operatorname{tr} A$ и $\det A$)