№21

Преобразование, сопряженное данному. Существование и единственность такого преобразования. Теорема Фредгольма.

V - пр-во со скал пр-ем

$\Theta = 2$ в евкл, $\Theta = \frac{3}{2}$ в эрмитовом

$B_\Theta(V)$ - пр-во Θ-лин ф-ий на V

$\varphi: V \to V$

Def. $f_\varphi(x, y) \overset{def}{=} (\varphi(x), y)$

Утв. Пусть ε - ОНБ в V

A - матрица φ в ε.

Тогда матрицей ф-ии f_φ в ε есть A^T

Д-во.

$x \overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$f_\varphi(x, y) \overset{def}{=} (\varphi(x), y) = (Ax, y) = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y}$

$\Rightarrow f_\varphi \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} A^T$ ☒

Сл-е. Соотв-е $\varphi \in \mathcal{L}(V) \longleftrightarrow f_\varphi \in B_\Theta(V)$

явл биективным и линейным

$\lambda\varphi \longleftrightarrow f_{\lambda\varphi}(x, y) = (\lambda\varphi(x), y) = \lambda(\varphi(x), y) = \lambda f_\varphi(x, y)$ ☒

Построим другое соотв-е

$\varphi \longleftrightarrow g_\varphi(x, y) \overset{def}{=} (x, \varphi(y))$

Утв2. Пусть ε - ОНБ в V, $\varphi \overset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} A$. Тогда

$g_\varphi \longleftrightarrow \bar{A}$

Д-во.

$g_\varphi(x, y) = (x, \varphi(y)) = (x, Ay) = x^T \bar{A} \bar{y}$ ☒

Сл-е, Соотв-е явл-ся биективным и (0-1) лин.

Def, (Сопр оп-р)

Пусть V - пр-во со ск. пр-ем

Оператор φ^* $V \to V$ наз сопр к φ, если $f_\varphi = g_{\varphi^*}$ $\forall x, y$ $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$

Сл-е, (из утв 1 и 2)

Если ε - ОНБ $\varphi \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} A$, то $\varphi^* \longleftrightarrow \bar{A}^T = A^*$

Утв 3, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$

а) $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$

б) $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$

в) $\varphi^{**} = \varphi$

г) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

Утв 4,

$\overline{\chi_\varphi(x)} = \chi_{\varphi^*}(\bar{x})$

Д-во,

$\chi_{\varphi^*}(\bar{x}) = \det(\bar{A}^T - \bar{x}E) = \overline{\det(A^T - xE)} = \overline{\det(A - xE)} = \overline{\chi_\varphi(x)}$ $\boxed{}$

Сл-е 1, Если λ - соб. зн. φ, то $\bar{\lambda}$ - с. зн φ^*

Сл-е 2, $\operatorname{rk}\varphi^* = \operatorname{rk}\varphi$

Т1 Пусть $U \leq V$

U - инв относ φ => $U^\perp$ инв относ φ^*

Д-во,

$y \in U^\perp$, x – пр-й в-р из U

$(x, \ell^*(y)) = (\ell(x), y) \Rightarrow \forall x \in U \hookrightarrow \ell^*(y) \perp x \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell^*(y) \in U^\perp$ $\boxtimes$

Th (Фредгольма)

а) $\operatorname{Ker} \ell^* = (\operatorname{Im} \ell)^\perp$

б) $\operatorname{Im} \ell^* = (\operatorname{Ker} \ell)^\perp$

Д-во.

б) $\Rightarrow$ а) $\operatorname{Ker} \ell = (\operatorname{Im} \ell^*)^\perp$

б) 1) $\operatorname{Im} \ell^* \overset{?}{\subseteq} (\operatorname{Ker} \ell)^\perp$

$y \in \operatorname{Im} \ell^* \Rightarrow \exists y_0 \in V : y = \ell^*(y_0)$

$x \in \operatorname{Ker} \ell$

$(x, y) = (x, \ell^*(y_0)) = (\ell(x), y_0) = (0, y_0) = 0$

$y \in (\operatorname{Ker} \ell)^\perp$

2) $\dim \operatorname{Im} \ell^* \overset{?}{=} \dim (\operatorname{Ker} \ell)^\perp$

$\dim \operatorname{Im} \ell^* = \operatorname{rk} \ell^* = \operatorname{rk} \ell$

$\dim (\operatorname{Ker} \ell)^\perp = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \ell =$

$= \dim V + \dim \operatorname{Im} \ell - \dim V = \dim \operatorname{Im} \ell = \operatorname{rk} \ell$ $\boxtimes$