№ 1 Р. 1	кольцо многочленов над полем. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Лин. выражение НОД.

Опр Многочленом над $\mathbb{R}$ наз-ся алгебр. выражение вида

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $a_n x_n$ — старший член мн-на

$\deg f = n$

$(f \cdot g) \cdot h = f(g \cdot h)$

$(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$.

Опр Пусть R — комм. кольцо с 1

многочленом из R наз-ся посл-ть $(a_0 \ldots a_n \ldots)$

такие, что $\exists N : \forall n > N \to a_n = 0$ — финитные посл-ти

Опр $A(a_i)\ B(a_i)$

$A + B = C(a_i + b_i)$

Опр $A \cdot B = C$, $C_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Опр λA, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A = (\lambda a_i)$

Утв $R[x]$ — комм.

Д-во

① Относ сложения $R[x]$ — мн. пр-во

$0 = (0 \ldots 0 \ldots)$

$A(a_i) \Rightarrow -A(-a_i)$

② Асс. умн-я

$(AB)C \overset{?}{=} A(BC)$

$(A)_k$ — k-й коэф. A

$$((AB)C)_k = \sum_{n=0}^{k} (AB)_n C_{k-n} = \sum_{n=0}^{k} \sum_{i=0}^{n} A_i B_{n-i} C_{k-n} \quad (1)$$

$$(A(BC))_k = \sum_{n=0}^{k} A_n (BC)_{k-n} = \sum_{n=0}^{k} A_n \sum_{i=0}^{k-n} B_i C_{k-n-i} =$$

github.com/yaishenka

$= \sum_{l=0}^{k} \sum_{n=0}^{k-l} A_l B_i C_{k-n-i} = \sum_{i+j+e=k} A_i B_j C_e = (1)$

Аналогично

$(A+B)C = AC + BC$

$AB = BA$

$1 = (1 \dots 0 \dots)$ ■

Опр. Комм. кольцо наз. ся обл-ю целостности или цел. кольцом, если

$\forall a, b \in R : a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$

Опр. P – мн $(a_0 \dots a_n \dots)$

$\deg P - \max\{n \mid a_n \neq 0\}$

$a_n x^n = (0 \dots a_n)$ – старший член

$HT(P) = a_n x^n$

Note. Здесь $x = (0, 1 \dots)$

Note. $\deg(0) = -\infty$

Утв. $\forall P, Q \in R[x]$, R – ком. кольцо с 1

а) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

б) $\deg(PQ) \leq \deg P + \deg Q$

в) Если R – цел. кольцо, то $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

Д-во

а) Пусть $\deg P = a$, $\deg Q = b$

Пусть $n > \max(a, b)$

$(P+Q)_n = a_n + b_n = 0 \Rightarrow \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

б) Пусть $n > a+b$ $(P \cdot Q)_n \overset{?}{=} 0$

$(P \cdot Q)_n = \sum_{i=0}^{n} P_i Q_{n-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{a} P_i Q_{n-i}}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=a+1}^{n} P_i Q_{n-i}}_{=0} = 0$

в) $(PQ)_{a+b} = \sum_{i=0}^{a+b} P_i Q_{a+b-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{a-1} P_i Q_{a+b-i}}_{=0} + P_a Q_b + \sum_{i=a+1}^{a+b} P_i Q_{a+b-i} =$

$= P_a Q_b \neq 0$ ■

Сл-е. Если R – обл. цел., то кольцо мн-в $R[x]$ – обл. цел.

Д-во

$P \neq 0, Q \neq 0$

$\deg P \geq 0, \deg Q \geq 0 \rightarrow \deg(P \cdot Q) \geq 0 \rightarrow P \cdot Q \neq 0$ ■

№1 Р2

Th (св-во унив. кольца многочленов)

Пусть A - кольцо, сод-е R.

Пусть $\forall a \in A, \forall r \in R \; ar = ra$

Тогда $\exists!$ гомоморфизм $\varphi_a : R[x] \to A$:

а) $\varphi_a(x) = a \in A$

б) $\varphi_a(r) = r \; \forall r \in R$

Д-во

а) Д-м единственность φ_a в предположении, что он $\exists$.

φ_a гомоморфизм $\Leftrightarrow$

$\varphi_a(\sum p_i x^i) = \sum_i \varphi_a(p_i)\varphi_a(x)^i = \sum_i p_i a^i \quad (*)$

б) Покажем, что опр. таким образом φ_a - гомоморфизм.

$\varphi_a(P+Q) = \varphi_a(\sum (p_i+q_i) x^i) \overset{*}{=} \varphi_a(P) + \varphi_a(Q)$

$\varphi_a(PQ) = \varphi_a(\sum_i p_i q_{n-i} x^i) = \varphi_a(P) \cdot \varphi_a(Q)$ ■

Note Св-во унив. позволяет определить значение мн-на

Def Пусть P - мн-н из $R[x]$ $R \subset A$.

Тогда знач. мн-на P на $a \in A$

наз-ся $P(a) \overset{def}{=} \varphi_a(P)$

Th (о $\exists$ деления с остатком в $F[x]$) (F-поле)

а) Пусть $A, B \in F[x]$, $B \neq 0$. Тогда $\exists$ Q и $R \in F(x)$:

$A = Q \cdot B + R$, где либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg B$

б) Мн-ны Q и R опр-ны однозначно

Д-во

а) Инд-я по $\deg A$

База. Если $A = 0$, или $\deg A < \deg B$

$\Rightarrow A = 0 \cdot B + A$ вып.

Инд. Пусть $\deg A \geq \deg B$. Пусть $\deg A = a$, $\deg B = b$

$HT(A) = \alpha x^a, \alpha \neq 0$

$HT(B) = \beta x^b, \beta \neq 0$

Рассм $M : HT(A) = M \cdot HT(B)$

$M = \frac{\alpha}{\beta} x^{a-b}$

$A' = A - MB$

При вычитании $M\,T(A)$ сокр-ся

$\deg A' < \deg A$

$\exists\, Q', R' \in F[x]: A' = Q'B + R'$, где $R' = 0$ либо $\deg R' < \deg B$

$A = Q' + MB + R' = (Q' + M)B + R' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ часть A д-на

б) Пусть $A = Q_1 B + R_1 = Q_2 B + R_2$

$\deg R_1 < \deg B$ $\Rightarrow \deg(R_1 \pm R_2) < \deg B$

$\deg R_2 < \deg B$

$R_1 - R_2 = (Q_2 - Q_1)B \Rightarrow (R_1 - R_2) = \deg(Q_2 - Q_1) + \deg B \geq B$?!

Def Если $\exists\, Q: A = QB$ (т.е. $R = 0$)

$\Rightarrow A$ делится на B

Def Если $A \vdots B$ и $B \vdots A$, то

A и B наз-ся ассоц. мн-ми

$A \sim B$

Def Пусть $f, g \in F[x]$, причем $f, g \neq 0$.

Мн-н $d \in F[x]$ - НОД(f, g), если

а) $f \vdots d$ и $g \vdots d$

б) Если d' - общ. делитель, то $d \vdots d'$

Th3 Для $\forall$ двух $f, g \in F[x]: f, g \neq 0$

$\exists\, d = \text{НОД}(f, g)$

Более того, $\exists\, u, v \in F[x]: uf + v \cdot g = d$

Д-во

а) Если $f = 0$

Тогда $d = g = 0 \cdot f + 1 \cdot g$

б) 1) $f = q_1 \cdot g + r_1$, где либо $r_1 = 0$ либо $\deg r_1 < \deg g$

2) $g = q_2 \cdot r_1 + r_2$, где либо $r_2 = 0$ либо $\deg r_2 < \deg r_1$

3) $r_1 = q_3 r_2 + r_3$ —//—.

Заметим, поздно остаток будет равен 0

$\vdots$

n) $r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$, $r_n \neq 0$ - посл-й ненул. ост-к

n+1) $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$

№1 Р3 Покажем, что $f \vdots r_n$, $g \vdots r_n$

$r_n \mid r_{n-1}$

из р-ва n) r_n - делитель r_{n-2}

...

r_n - делитель g, f.

Проверим, что если $d' \mid f$, $d' \mid g \Rightarrow d' \mid r_n$

из $1 \Rightarrow d' \mid r_1 \Rightarrow d' \mid r_2 \ldots \Rightarrow d' \mid r_n \Rightarrow d = НОД(f, g)$

в) 2-ю часть д-м индукцией по числу шагов в ал-ме Евклида

из д-го $НОД(f, g) \overset{1}{=} НОД(g, r_1) \overset{2}{=} НОД(r_1, r_2) =$

$\ldots = НОД(r_{n-1}, r_n) \overset{n}{=} r_n$

База

$n=1$ $r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n \Rightarrow r_n = 0 \cdot r_{n-1} + 1 \cdot r_n$

Предп инд-ии (для ал-ма из n-1 шага)

$z_n = d = u_1 g + v_1 \cdot r_1 = | r_1 = f - q_1 g | =$

$= u_1 g + v_1 (f - q_1 g) = v_1 f + (u_1 - v_1 q_1) g$ ■

№ 2 P. 1	Неприводимость многочленов. ОТА для многочленов.

Def Мн-н $f \in F[x]$, F-поле, $\deg f > 0$
наз-ся неприводимым над F если из условия
$f = a \cdot b$, $a, b \in F[x] \Rightarrow \deg a = 0$ или $\deg b = 0$

Note $A \mid P$, P неприводим $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A \sim 1 \\ A \sim P \end{array}\right.$

Note $\forall B \in F[x]$, P-мн над $F \Rightarrow$ НОД$(P, B) = \left[\begin{array}{l} 1 \\ P \end{array}\right.$

Утв Пусть P – неприводим над F
$P, B, C \in F[x]$
Пусть $B \cdot C \vdots P \Rightarrow B \vdots P$ или $C \vdots P$

Д-во (от противного)
Пусть $B \not\vdots P$ и $C \not\vdots P$
$\Rightarrow$ НОД$(P, B) = 1$, НОД$(P, C) = 1$
$\Rightarrow \exists\, u_1, v_1, u_2, v_2$:
$1 = u_1 \cdot P + v_1 \cdot B$
$1 = u_2 \cdot P + v_2 C$
$1 = (u_1 P + v_1 B)(u_2 \cdot P + v_2 C) = \underbrace{(u_1 u_2 P + u_1 v_2 C + v_1 u_2 B) P}_{\vdots P} +$
$+ \underbrace{v_1 \cdot v_2 \cdot B \cdot C}_{\vdots P} \Rightarrow 1 \vdots P$?! ■

Th (Основная Th арифметики в кольце мн-в над F)
Пусть $A \in F[x]$, $A \neq 0$. Тогда $\exists \alpha \in F^*$ и
неприводимые $p_1 \cdots p_n$: $A = \alpha p_1 \cdots p_n$
Более того, если
$A = \alpha \beta_1 \cdots p_n = \beta \cdot q_1 \cdots q_m$, то $m = n$ и $\exists\, \sigma \in S_n$: $p_i \sim q_{\sigma(i)}$

Д-во
а) Если $\deg A = 0$ $A = \alpha \in F^*$ д-но
б) Пусть $\deg A \geq 1$. Д-м инд-ей.
Если A - неприводим. над F, то $A = P$ д-но
Если A - прив, то $A = B \cdot C$, где $\deg B < \deg A$
$\deg C < \deg A$

github.com/yaishenka

Тогда для B и C вып-ся предп. инд-ии

в) Д-м единственность

$\alpha P_1 P_2 \dots P_n = \beta Q_1 \dots Q_m$

Д-во инд-ей по n

$\beta Q_1 \dots Q_m \vdots P_n \Rightarrow \exists j : Q_j \vdots P_n$

$\Rightarrow \exists \gamma \in F^* : Q_j = \gamma P_n$

$\alpha P_1 P_2 \dots P_n = \beta \gamma Q_1 \dots \widehat{Q_j} \dots Q_m \cdot P_n$

$\alpha P_1 P_2 \dots P_{n-1} = \beta \gamma Q_1 \dots \widehat{Q_j} \dots Q_m$

Т.е. мн-н слева р-ся в пр-е $n-1$ мн-на

$\Rightarrow$ к нему применимо предп. инд-ии $\boxtimes$

№ 3 Р. 1	Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни

Remind (см билет 1)

$\exists$ гомоморфизм $\ell_c : F[x] \to F : \ell_c(x) = c$ и $\forall a \in F \ \ell_c(a) = a$

Def Зн-е мн-на на эл-те $f(c) = \ell_c(f)$

Утв Зн-е мн-на f на эл-те $c \in F$ равно остатку от деления f на $x-c$ - линейный двучлен

Д-во

$f(x) = q(x)(x-c) + r(x)$, где $\deg r < \deg(x-c)$ или $r(x) = 0$

$r(x) = r \in F$

$f(x) = q(x)(x-c) + r$

$f(c) = r$ ∎

Def Эл-т $c \in F$ наз-ся корнем $f \in F[x]$ если $f(c) = 0$

Th (Безу)

Эл-т $c \in F$ явл корнем $f(x) \iff f \vdots x-c$

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть c - корень $\Rightarrow f(c) = r = 0 \Rightarrow f(x) \vdots (x-c)$

$\Leftarrow$ Пусть $f(x) = q(x)(x-c) \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow c$ - корень ∎

Def $0 \not\equiv f \in F[x]$, F - поле

Эл-т c поля F наз-ся корнем мн-на f кр-ти k, если $f \vdots (x-c)^k$, но $f \not\vdots (x-c)^{k+1}$

Утв Пусть $f \in F[x]$, $\deg f = n$

Тогда сумма всех кр-тей корней мн-на $f \leq n$

github.com/yaishen

Д-во Пусть $c_1 \dots c_s$ – попарно р-е корни f

и $k_1 \dots k_s$ – их кр-ти.

$f \vdots (x-c_1)^{k_1} \dots f \vdots (x-c_s)^{k_s}$

$x-c_i$ и $x-c_j$ неприводимы и не асс. др. с другом

Тогда $f \vdots (x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_s)^{k_s}$

Тогда $\sum k_i \le n = \deg f$ ■

Note Если поле F заменить на кольцо R с 1, тоут в ст-ся неверным.

Def $F[x]$, F – поле

Базис $1, x, x^2 \dots$

Ф-й производной $\frac{d}{dx}$ наз-ся линейный оператор в алгебре $F[x]$ опр-й на базисных в-рах

$$\frac{d}{dx}(x^k) = k x^{k-1}$$

Утв Если $f(x)$ и $g(x) \in F[x]$, F – поле

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

Д-во

Пусть $f(x) = x^n$ $g(x) = x^m$

$(x^{n+m})' = (n+m) x^{n+m-1}$

$f'g + g'f = (n+m) x^{n+m-1}$ ■

Т4 $f(x) \in F[x]$, F – поле, $c \in F$

Тогда:

а) c – кр-й корень $f \iff f(c) = f'(c) = 0$

б) c – корень кр-ти $k \iff f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$

в) Если в добавление к а, б $\operatorname{char} F = 0$, или $\operatorname{char} F > k$, то $f^{(k)}(c) \neq 0$

Д-во

c – корень $f \Rightarrow f(x) = q(x)(x-c)$

$f' = q'(x-c) + q \Rightarrow f'(c) = q(c)$

а) 1) c – кр корень $\Rightarrow q(x) \vdots x-c \overset{\text{Безу}}{\Rightarrow} q(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0$

2) $f'(c) = 0 \Rightarrow q(c) = 0 \overset{\text{Безу}}{\Rightarrow} q(c) \vdots x-c$

W3
P2

б) $f(x) \vdots (x-c)^k$

$f(x) = q(x)(x-c)^k \Rightarrow f'(x) = q'(x)(x-c)^k + kq(x)(x-c)^{k-1} =$

$= (x-c)^{k-1}(q'(x)(x-c) + kq(x))$

$\Rightarrow$ кр-ть c у $f' \geq k-1$

c у $f'' \geq k-2$

$\vdots$

c у $f^{(k-1)} \geq k-(k-1) = 1 \Rightarrow f^{(k-1)}(c) = 0$

в) $(q'(x)(x-c) + kq(x))\Big|_{x=c} = \underset{\neq 0}{k}\,\underset{\neq 0}{q(c)} \neq 0$

$\Rightarrow c$ - корень f' кр-ти в т-ти $k-1$

c - корень $f^{(k-1)}$ кр 1 $\Rightarrow c$ - простой корень у $f^{(k-1)}$

При этом $f^{(k)}(c) \neq 0$ ■

(иначе c - корень кр-ти два)

№4

Лемма Даламбера. Основная теорема алгебры (схема доказательства)

Л (Даламбера)

Пусть $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg f \geq 1$ и $f(z_0) \neq 0$

Тогда в $\forall \varepsilon$-окр-ти $U_\varepsilon(z_0)$ найдется $z \in U_\varepsilon(z_0)$:

$|f(z)| < |f(z_0)|$

Д-во

Разделим $f(z)$ на $(z-z_0)$ с остатком

$f(z) = q_1(z)(z-z_0) + r_1$; $r_1 = f(z_0)$

Разделим $q_1(z)$ на $(z-z_0)$

$q_1(z) = q_2(z)(z-z_0) + r_2$, $r_2 = f'(z_0)$

Продолжим пока $q_i(z)$ не к-та.

$f(z) = f(z_0) + \alpha(z-z_0)^k + o((z-z_0)^k)$, где

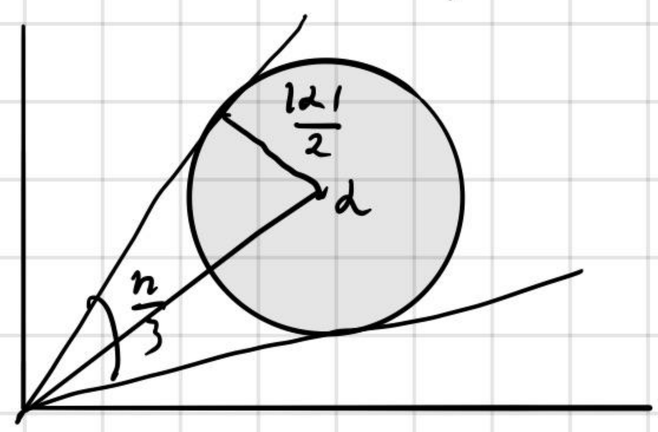
$\alpha(z-z_0)^k$ - первый ненул сл-е

$o((z-z_0)^k)$ - мн-н, делящийся на $(z-z_0)^k$

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^k\left(\alpha + \frac{o((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right)$$

При $z = z_0$

$$\left|\frac{o((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right| = 0 \Rightarrow \exists\, U_\eta(z_0): \left|\frac{o((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right| < \frac{|\alpha|}{2}$$



Ар-т ск-ки лежит на отр-ке, содержащем $\arg(\alpha)$ длиной $\frac{\pi}{3}$

Пусть $z - z_0 = re^{i\varphi}$, $r < \varepsilon$.

$z = z_0 + re^{i\varphi}$ - т-ка, которая вер-ся вокруг z_0

$\arg(z-z_0)^k = k\varphi$

Тогда ясно, что ар-т $(z-z_0)^k\left(\alpha + \frac{O((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right)$ непр. ■

Th (ОТА, 1799)

Всякий мн-н из $\mathbb{C}[z]$ $\deg f \geq 1$

имеет хотя бы один корень

Д-во

Пусть $A = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$

По опр т. нит. грани $\exists\, z_n : |f(z_n)| \to A$

извлечем подп-ть z_k : либо $\left[\begin{array}{l} z_k \to z_0 \\ z_k \to \infty \ ?! \ (f(z_n) \to \infty) \end{array}\right.$

Тогда $f(z_k) \to f(z_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z_k)| \to |f(z_0)| = A$

Тем самым д-ли, что inf достигается

Если предположить $A \neq 0$, то

$\exists$ в $U_\varepsilon(z_0)$ такие z $|f(z)| < |f(z_0)| = A$, но A - inf ?!

Тогда $A = 0 \Rightarrow \exists\, z_0 : |f(z_0)| = 0 \Rightarrow f(z_0) = 0$ ■

№ 5 Р. 1	Инвариантные подпр-ва. Собственные в-ры и соб. зн-я. Хар. мн-н и его св-ва. Инв. следа и опр-ля матрицы оператора

Remind

V - лин. пр. во над F

$\ell: V \to V$ - лин. оператор, если

а) ℓ - адд.

б) ℓ - однородный

$(e_1 e_2 \dots e_n) = \varepsilon$ $\dim V = n$

$\ell(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$

$A = (\underset{\ell(e_1)}{A_1} \dots \underset{\ell(e_n)}{A_n}) \Rightarrow \ell(e_i) = \varepsilon \cdot A_i$

$\ell(\varepsilon) = \varepsilon \cdot A$

$x \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} \alpha$, т. е. $x = \varepsilon \cdot \alpha$

$\Rightarrow \ell(x) = \ell(\varepsilon) \cdot \alpha = \varepsilon \cdot A \cdot \alpha$

Пусть ε и f в V. $\ell \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} A$

$\ell \underset{f}{\longleftrightarrow} B$

Тогда $B = S^{-1} A S$, $S_{\varepsilon \to f}$ - м. пер.

Note, Матр. пер-ия всегда не вырожд.

$\mathcal{L}(V)$ - пр-во всех л. о. действующих в V

$\ell + \psi$, $\lambda \ell$.

$\mathcal{L}(V)$ - лин пр-во над F, $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$

$(\ell \cdot \psi)(x) \overset{def}{=} \ell(\psi(x))$

$\mathcal{L}(V)$ - кольцо

$\Rightarrow \mathcal{L}(V)$ - алгебра

def, Подпр-во $U \subset V$ наз-ся инв. относ ℓ,

если $\forall x \in U \Rightarrow \ell(x) \in U$

Note, $\underset{\text{включено}}{\ell(U) \subseteq U} \Leftrightarrow \ell(U) \underset{\text{подпр-во}}{\leq} U$

def, $\ell: V \to V$, U ~~...~~ подпр-во

Базис ε наз-ся согл. с U, если

$(e_1 \dots e_k)$ - базис в U

$(e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$ - базис V

Утв 1 $\ell: V \to V$, U - инв. подпр-во $\ell \iff$ в базисе e, сов. с U A_ℓ имеет вид

$$\ell \underset{E}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Д-во

$\dim U = k$ $(e_1 \dots e_k)$ - базис $U \iff$

$\iff e_i$ - инв $\ell \iff \ell(e_i) = E \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ■

Th (мн-во инв подпр-в ℓ, з-то относ $\cap, +$)

U_1, U_2 - инв отн $\ell, \Rightarrow U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$ - инв. отн. ℓ.

Д-во

$\ell(U_1 \cap U_2) \subseteq \ell(U_1) \cap \ell(U_2) \subseteq U_1 \cap U_2$

$\ell(U_1 + U_2) = \ell(U_1) + \ell(U_2) \subseteq U_1 + U_2$ ■

Утв (первое утв о хар. опер-ра)

Если ℓ и ψ - комм. опер-ры ($\ell \cdot \psi = \psi \cdot \ell$), то $\operatorname{Ker} \ell$, $\operatorname{Im} \ell$, $\operatorname{Ker} \psi$, $\operatorname{Im} \psi$ - инв относ. каждого из операторов.

Д-во

Если ядро или образ того же опер-ра, то тривиально.

Покажем, что $\operatorname{Im} \ell$, $\operatorname{Ker} \ell$ инв отн ψ.

Пусть $x \in \operatorname{Ker} \ell$.

$\psi(x) \overset{?}{\in} \operatorname{Ker} \ell$.

$\ell(\psi(x)) = \psi(\ell(x)) = \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(x) \in \operatorname{Ker} \ell$

Пусть $y \in \operatorname{Im} \ell$, т.е. $y = \ell(x)$, $x \in V$

Покажем, что $\psi(y) \in \operatorname{Im} \ell$

$\psi(y) = \psi(\ell(x)) = \ell(\psi(x)) = \ell(x')$, $x' \in V$ ■

Опр Ненул. в-р x, удовл. $\ell(x) = \lambda x$, $\lambda \in F$ наз-ся собств. в-ром для ℓ с соб. зн. λ

Опр Эл-т $\lambda \in F$ наз-ся соб. зн., если ему отвечает какой-то собств. в-р.

№5 p.2

Note $\ell(x)=\lambda x$, x - с.в. с с. зн. λ.

$P(x)\in F[x]$

$P(\ell)(x)=P(\lambda x)$

В частн., если $P(\ell)=0$, то $\forall$ с. зн. λ

$\hookrightarrow P(\lambda)(x)=0 \Rightarrow P(\lambda)=0$

Вывод Если P аннулирует оператор ℓ, то $\forall$ с. зн. - корень P.

Def Пр-во $V_\lambda=\operatorname{Ker}(\ell-\lambda Id)$ наз-ся собственным пр-м для ℓ, отвечающим λ.

Утв $V_\lambda\neq\{\bar{0}\} \Leftrightarrow \lambda$ - с. зн. оп-ра ℓ.

Д-во

а) Необх. $V_\lambda\neq\{\bar{0}\} \Rightarrow \exists x\neq 0 : x\in V_\lambda$

$(\ell-\lambda I)x=0 \Rightarrow \ell(x)=\lambda I x=\lambda x \Rightarrow x$ с.в. λ - с. зн.

б) Дост. Пусть λ - с. зн. $\Rightarrow \exists x\neq 0 : \ell(x)=\lambda x$

$\Rightarrow (\ell-\lambda I)x=0 \Rightarrow x\in V_\lambda$. ■

Def $A\in M_n(F)$

Тогда мн-н $\chi_A(x)=\det(A-\lambda E)$ наз-ся хар. мн-н матрицы A

$\chi_A(x)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\cdot tr A+\ldots+\det A$

Утв 4 (о св-х хар мн-на)

а) Корни хар. мн-на и только они явл-ся соб зн. оператора ℓ (корни из F)

б) Хар. мн-н оп-ра ℓ не зависит от выбора базисов V

Д-во

а) λ_0 - корень $\chi_A(\lambda) \Rightarrow \det(A-\lambda_0 E)=0$

Тогда $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}$

при $\lambda=\lambda_0$ имеет ненул реш. $x_0 \Rightarrow x_0$ - с. в. λ_0 - с. зн.

λ_0 - с. зн. $\exists x_0\ \ell(x_0)=\lambda_0 x_0 \Rightarrow \det(A-\lambda_0 E)=0 \Rightarrow \lambda_0$ - корень χ_A

б) $B=S^{-1}AS$

$\chi_B(x)=\det(S^{-1}AS-\lambda E)=\det(S^{-1}AS-S^{-1}(\lambda E)S)=$

$= \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E) \det S = \chi_A(\lambda)$ ■

Сл-е 1, Если V - л. пр-во над $\mathbb{C}$, то $\forall$ оператор ℓ в V имеет хотя бы один собств в-р

Сл-е 2, От выбора базиса в пр-ве V не зависят коэф в $\chi(A)$ ($\operatorname{tr} A$ и $\det A$)

№6 P1	ЛНЗ с.в с попарно разл. с. зн. Алгебраическая и геометрическая кратность с. зн. Условия диаг. линейного оператора

Th (О ЛНЗ соб. пр-в, отв разным собст. зн)

Пусть $\ell \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ - попарно р-е с. зн.

Тогда $V_{\lambda_1}, \dots V_{\lambda_k}$ - ЛНЗ

Д-во.

Пусть $\exists$ ненул. комб: их сумма 0.

Из всех таких контрпримеров выберем с меньшим числом сл-х.

j-наим, $j \geq 2$

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_j = 0$, $x_i \neq 0$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_j x_j = \ell(x) = 0$

$-\ \lambda_j x_1 + \dots + \lambda_j x_j = \lambda_j x = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_j) x_1 + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) x_{j-1} = \bar{0}$?! (j-min)

Сл-е Если $\lambda_1 \dots \lambda_k$ - пот. р-е с. зн, то

$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Th (Критерий диаг. Л.О.)

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_k$ - попарно разл. соб. зн. оп-ра

след. усл. эк-в-ны

а) ℓ - диаг. Л.О

б) $\exists$ базис в V, состоящий из собств в-ров Л.О. ℓ.

в) Пр-во V р-ся в $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Д-во.

а) => б)

$\exists\ \mathcal{E}: A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\ell(e_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\ell(e_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ... => $\mathcal{E}$ - базис из С.В.

б) ⇒ в)

Упорядочим с.в так, чтобы сначала шла гр-па соб. с. зн.

$\{e_{11} \dots e_{1m_1}\}_{\lambda_1}$, $\{e_{21} \dots e_{2m_2}\}_{\lambda_2} \dots \{\dots\}_{\lambda_n}$

$\langle e_{11} \dots e_{1m_1} \rangle = V_{\lambda_1}$ $\quad$ $\langle e_{21} \dots e_{2m_2} \rangle = V_{\lambda_2}$

⇒ т.к. все баз в-ры сост базис, то сумма оболочек $= V$.

Была С. подпр-во, отвеч р. собств ЗНЗ

$\Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$.

в) ⇒ а)

В V_{λ_1} : $e_{11}, e_{12} \dots e_{1m_1}$

В V_{λ_2} : $e_{21} \dots \dots e_{2m_2}$

Тогда $A_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ $\updownarrow m_1$, $\updownarrow m_2$ ■

Def Если $\chi(\ell)$, $\ell: V \to V$, V над F разлагается на лин. мн-ли (над F) то такой оп-р линейно фактор-й

Пусть λ - с.зн. (λ - корень $\chi_\ell(x)$)

Def $\dim V_\lambda$ - геом кр-ть с соб зн. $\lambda \geq 1$ $geom(\lambda)$

Def Кратность λ как корня $\chi_\ell(x)$ - алг. кратность соб. зн. λ $alg(x)$

Th (об. инв подпр-х)

$\ell \in \mathcal{L}(V)$, U - инв отн ℓ подпр-во $U \subseteq V$

Если $\psi = \ell|_U \in \mathcal{L}(U)$, то $\chi_\ell \vdots \chi_\psi$

Д-во

Пусть $\mathcal{E}$ - базис V, сонач с U

$A_\ell = \begin{array}{c} \\ k \updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ $\quad B \xleftrightarrow[(e_1 \dots e_k)]{} \psi$

w6 P2 $\chi_\ell = \det(A_\ell - \lambda E) = \det\left(\begin{array}{c|c} B-\lambda E_k & C \\ \hline 0 & D-\lambda E_{k'} \end{array}\right) =$

$k' = n-k$

$= \det(B-\lambda E_k)\det(D-\lambda E_{k'}) = \chi_\varphi \det(D-\lambda E_{k'})$ ■

Ut-e λ - с зн ℓ $V \to V$

Тогда $geom(\lambda) \le alg(\lambda)$

Д-во

$U = V_\lambda$ инв подпр. $\varphi = \ell|_U = \lambda \cdot I = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}}^{k}$

$\chi_\varphi(x) = (\lambda - x)^k$

здесь $k = \dim V_\lambda = geom(\lambda)$

По Th2 $\chi_\varphi(x) \mid \chi_\ell(x) \Rightarrow \chi_\ell(x) \vdots (\lambda - x)^k = 0$

$\Rightarrow alg(\lambda) \ge k = geom(\lambda)$ ■

Th3 Пусть $\ell \in \mathcal{L}(V)$

Тогда ℓ - диаг $\Leftrightarrow \chi_\ell(x)$ р-ся на лин мн-ли над F

$\forall$ λ - с. зн. опер $\ell \Rightarrow geom(\lambda) = alg(\lambda)$

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть ℓ - диаг. $\Rightarrow A_\ell = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - x)$

$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Тогда $\dim V = \sum_{i=1}^{k} geom(\lambda_i) \le \sum_{i=1}^{k} alg(\lambda_i) = \deg \chi_\ell = n$

$\Leftarrow$ ℓ - линейно диаг

и $alg(\lambda_i) = geom(\lambda_i)$

$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \le V$

$\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} geom(\lambda_i) =$

$= \sum_{i=1}^{k} alg(\lambda_i) = \deg \chi_\ell(x) = n$

Тогда $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$

$\Rightarrow$ по пред. Th ℓ диаг ■

№ 7 Р 1	Приведение матрицы преобр-я к Δ виду. ТК Г-К

$l: V \to V$ над F

Утв 1. След усл-я экв-ны

а) U инв относ l

б) $\exists \lambda \in F$: U инв относ $l - \lambda I$

в) $\forall \lambda \in F$ U инв отно $l - \lambda I$

Д-во

а) => в) $\forall x \in U \hookrightarrow l(x) \in U$

$x \in U$ $(l - \lambda I)(x) = l(x) - \lambda x \in U$

в) => б) очевидно

б) => а) $\forall x \in U \hookrightarrow (l - \lambda I)x \in U$

$l = (l - \lambda I) + \lambda I$

$l(x) = (l - \lambda I)x + \lambda x \in U$ ■

Утв 2.

Пусть l - л. оператор л.о. в V, $\dim V = n$

Тогда найдется $(n-1)$-мерное подпр-во в V, инв относ l

Д-во

$\chi_l(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - x)(\lambda_n - x)$, $\lambda_n \in F$, λ_n - с. зн. l

$(l - \lambda_n I)v_{\lambda_n} = \{0\}$

$\dim \operatorname{Ker}(l - \lambda_n I) \geq 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(l - \lambda_n I) \leq n-1$

Пусть U - $\forall$ подпр. во : $\operatorname{Im}(l - \lambda_n I) \subseteq U$

$n-\dim(n-1)$

Покажем, что построенное подпр-во U инв отн l

Пусть $x \in U$

$(l - \lambda_n I)x \in \operatorname{Im}(l - \lambda_n I) \subseteq U$

Т.е. U инв относ $(l - \lambda_n I) \Rightarrow U$ инв отн l по Утв 1 ■

Th4 Всякий лин. факт. опер. можно привести к верхн Δ виду

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Д-во

$l: V \to V$, l лин. факт

Индукция по $\dim V$

<u>База</u>, $\dim V = 1$ (λ) g-но

<u>Переход</u>, Пусть для $l: V \to V$, $\dim V = n-1$ утв-во

Пусть $\dim V = n$.

Будем строить цепочку подпр-в $0 \le U_1 \le U_2 \le \ldots \le V$

и $\dim U_k = k$

По утв 2 $\exists\, U \le V$: U-инв отн l и $\dim U = n-1$

Рассм $\varphi = l|_U$ $\mathcal{I}_\varphi \mid \mathcal{I}_l \Rightarrow$ разл на лин. мн-ли

~~по ~~ик ~~ор~~ ~~ги~~на~~

$\mathcal{I}_\varphi$ явл-ся пр-ем лин. мн-ей, входящим в $\mathcal{I}_l$

$\Rightarrow$ для $\varphi: U_{n-1} \to U_{n-1}$

$$\to \underbrace{0 \le U_1 \le U_2 \le \ldots \le U_{n-1}}_{\text{инв относ } \varphi} \le V$$

$U_{n-1} = U$

$\Rightarrow U$ инв относ l

Пусть E - базис, сонл с $U_1 \ldots U_{n-1}$

$A_l = \begin{pmatrix} \boxed{} & \\ 0 & \boxed{} \ldots \end{pmatrix} \Rightarrow l$ прив к верхн Δ ■

Л-е

В условиях Th спр-во включение

$(l - \lambda_{k+1} I)(l - \lambda_{k+2} I) \ldots (l - \lambda_n I) V \subseteq U_k$

$\forall k = 0 \ldots n-1$

1) $k = n-1$: $\quad (l - \lambda_n I) V \overset{?}{\subseteq} U_{n-1}$

$V = U_{n-1} \oplus \langle e_n \rangle$

$x = x_{n-1} + \lambda e_n$

$(l - \lambda_n I) x = (l - \lambda_n I)(x_{n-1} + \lambda e_n) = \underset{\substack{\Uparrow \\ U_{n-1}}}{x'_{n-1}} + \underset{\substack{\Uparrow \\ U_{n-1}}}{y_{n-1}}$

$\frac{w\ 7}{p\ 2}$ $4k = n-2$

$(\ell - \lambda_{n-1} I)(\ell - \lambda_n I) V \subseteq U_{n-2}$

$\Updownarrow \qquad ?$

$(\ell - \lambda_{n-1} I) U_{n-1} \subseteq U_{n-2}$

$U_{n-1} = U_{n-2} \oplus \langle e_{n-1} \rangle$

$x = x_{n-2} + \beta e_{n-1}$

$(\ell - \lambda_{n-1} I)(x) = (\ell - \lambda_{n-1} I)(x_{n-2} + \beta e_{n-1}) \in U_{n-2}$ ■

Th (Гамильтона-Кэли)

а) Пусть ℓ – лин. фикс. оп-р. $V \to V$

Тогда $\chi_\ell(\ell) = 0$

б) Пусть $A \in M_n(F)$, $\chi_A(x)$ – хар. мн-н м-цы A

Тогда $\chi_A(A) = 0$

Д-во

$(\ell - \lambda_1 I)(\ell - \lambda_2 I) \dots (\ell - \lambda_n I) V \subseteq U_0 = \{0\}$

$\chi_\ell(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$

$\chi_\ell(\ell) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\ell - \lambda_i)$

$(-1)^n \chi_\ell(\ell) V = \{0\} \Rightarrow \chi_\ell(\ell) = 0$ ■

Note Условие линейной ф-ти оп-ра лишнее

$\chi_\ell(x)$ не р-ся над F на лин. мн $\Rightarrow \exists$ расширение

$F = K$, в котором $\chi_\ell(x) = \prod(\lambda_i - x)$

W8 р.1	Корневое подпр-во мин. оп-ра. Свойства корневых подпр-в. Разложение пр-ва в прямую сумму корневых подпр-в (случай, когда хар. мн-н р-ля на мин. мн-ли)

Опр. Мн-н $f \in F[x]$ F — поле
наз-ся аннулирующим для ℓ, если $f(\ell)=0$

Опр. μ_ℓ — мн-н мин. степени, анн. ℓ.

Th (о взаимно простых мн-х, явл-ся делителями анн-а мн-в)

$\ell: V \to V$, f аннулирует ℓ

$f = f_1 \cdot f_2$, где f_1 и f_2 — взаимно простые НОД$(f_1, f_2)=1$

Введем об-е $V_i = \ker f_i(\ell)$

Тогда $V = V_1 \oplus V_2$, причем V_1 и V_2 — инв отн ℓ.

Д-во.

а) $f_i(\ell)$ коммутирует с ℓ

По перв. утв. о комм. оп-ров (билет №5)

$\Rightarrow \ker f_i(\ell)$ — инв отн ℓ.

f_1 и f_2 взаимно просты $\Rightarrow \exists\, u(x), v(x) \in F(x)$

: $u(x) f_1(x) + v(x) f_2(x) = 1$

$Id = u(\ell) f_1(\ell) + v f_2(\ell)$

б) Покажем, что $\operatorname{Im} f_1(\ell) \subseteq V_2$ $\operatorname{Im} f_2(\ell) \subseteq V_1$?

Д-м второе

Пусть $y \in \operatorname{Im} f_2(\ell) \Rightarrow \exists\, x : y = f_2(\ell) x$

$f_1(\ell) y = f_1(\ell) f_2(\ell) x = f(\ell) x = 0 \Rightarrow x = 0$

в) $V = V_1 + V_2$?

$x = x_1 + x_2$

$1 = f_2(x) v(x) + f_1(x) u(x)$

$Id = f_2(\ell) v(\ell) + f_1(\ell) u(\ell)$

$x = Id\, x = \underbrace{f_2(\ell) x'}_{\in \operatorname{Im} f_2(\ell) \subseteq V_1} + \underbrace{f_1(\ell) x''}_{\in V_2} = f_2(\ell) x' + f_1(\ell) x'' \Rightarrow x_1 + x_2 = x.$

2) $V \subseteq V_1 \oplus V_2$?

Пусть $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f_1(\ell)$

$x = Id x = u(\ell) f_1(\ell)x + v(\ell) f_2(x) = 0$ ■

Ут-е

$\ell: V \to V$, f аннулирует ℓ и $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$,

где $f_1 \dots f_n$ - попарно взаимно простые

Пусть $V_i = \operatorname{Ker} f_i(\ell)$

Тогда $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$

Д-во индукция по n

База, $n=2$ - д-но

Пусть для $n-1$ верно

Переход

$f = (f_1 \dots f_{n-1}) f_n$

вз-но пр-е.

$$V = \underbrace{\operatorname{Ker}(f_1(\ell) \dots f_{n-1}(\ell))}_{V'} \oplus \underbrace{V_n}_{= \operatorname{Ker} f_n(\ell)}$$

V' инв отн ℓ, т.к. $f_1(\ell) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(\ell)$ комм с ℓ

$f_1(\ell) \dots f_{n-1}(\ell)|_{V'}$ ан. ℓ, т.к. ан. ℓ на всем V

$f_1(\ell) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(\ell)$ - аннулирующий

$\Rightarrow$ по предп инд-ии к оп-ру $\ell|_{V'}$ и мн-ну $f_1(x) \dots f_{n-1}(x)$

$V' = \operatorname{Ker} f_1(\ell)|_{V'} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} f_{n-1}(\ell)|_{V'}$

Тогда $V = \operatorname{Ker} f_1(\ell)|_{V'} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} f_{n-1}(\ell)|_{V'} \oplus V_n$

$\operatorname{Ker} f_i(\ell)|_{V'} \overset{?}{=} V_i$

$V_i \subseteq V'$

$x \in V_i \Leftrightarrow f_i(\ell)x = 0 \Rightarrow (f_1(\ell) \dots f_{n-1}(\ell))x = 0$

$\operatorname{Ker} f_i(\ell)|_{V'} = V_i$ ■

W8 P2

Def $\ell : V \to V$

Вектор $x \in V$ наз-ся корневым для оп-ра ℓ, отвечающим числу $\lambda \in F$, если $\exists k : (\ell - \lambda I)^k x = 0$

наименьшее k, удовл ур-ю, называется высотой x

Note Мн-во всех корн. в-ров, отвеч. λ для ℓ - подпр-во в V

Def V^λ - корневое для ℓ, отвеч $\lambda \in F$

Утв 2 $V^\lambda \neq \{0\} \iff \lambda$ - соб. зн. оп-ра ℓ

Д-во

а) Пусть λ - с. зн. ℓ

$V_\lambda \neq \{\bar{0}\}$, но очев $V_\lambda \subseteq V^\lambda$

б) Пусть λ - не соб зн. ℓ

Покажем, что $V^\lambda = \{0\}$

Пусть $\exists\, x \neq 0 : x \in V^\lambda$

$\Rightarrow \exists \min k : (\ell - \lambda I)^k x = 0$

Пусть $y = (\ell - \lambda I)^{k-1} x \neq 0$

$(\ell - \lambda I) y = (\ell - \lambda I)^k x = 0$

$\Updownarrow$

$\ell y = \lambda y$

$\Downarrow$

λ - с. зн ?! ■

Утв Св-ва корневых подпр-в

Пусть $\ell : V \to V$, V^λ - корн. подпр-во для ℓ, отвеч. с. зн λ

Тогда

а) V^λ инв отн ℓ.

б) на V^λ оператор ℓ имеет ед. соб зн λ

в) Если W - инвар. относ ℓ дополн. к V^λ пр-во

[т. е. $V = V^\lambda \oplus W$]

То $\ell - \lambda I$ невырожд на I

Д-во

а) Пусть m - наибольшая из высот в-ров оп-ра ℓ на V^λ

Тогда $V^\lambda = \ker (\ell - \lambda I)^m$

$\ell - \lambda I$ комм с $\ell \Rightarrow V^\lambda$ инв отн ℓ

б/ От пр-го. Пусть на V^λ ℓ имеет с. зн $\mu \neq \lambda$

$\Rightarrow \exists\, x \in V^\lambda : \ell(x) = \mu x$

Тогда $(\ell - \lambda I)x = \ell(x) - \lambda x = (\mu - \lambda \overset{\neq 0}{x})\, x$

$\Rightarrow (\ell - \lambda I)^m x = (\mu - \lambda)^m x \neq 0$?!

в/ $V = V^\lambda \oplus W$

$\mathcal{E}$ - базис соотв разложению в $\oplus$

$$\ell = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

$$\ell - \lambda I = \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda E & 0 \\ \hline 0 & B - \lambda E \end{array}\right)$$

$\det(B - \lambda E) \overset{?}{\neq} 0$

Пусть $|B - \lambda E| = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rk}(B - \lambda E) < \dim W \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(B - \lambda E) < \dim W$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda E) \geq 1 \Rightarrow \exists\, y \in W \neq 0 : (\ell - \lambda I)y = 0$

$\Rightarrow y \in V^\lambda \Rightarrow$?! (прямая сумма)

Т2 (О р-ии пр-ва V в пр-ю сумму инв. подпр-в)

$\ell : V \to V$, ℓ - лин. опер над F

Тогда $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_k}$, где

$\lambda_1 \ldots \lambda_k$ - попарно р-е соб. зн. оп-ра ℓ

Д-во.

$\chi_\ell = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - x)^{m_i}$, $m_i = \operatorname{alg}(\lambda_i)$

Тогда мн-ны $(\lambda_1 - x)^{m_1}, (\lambda_2 - x)^{m_2} \ldots (\lambda_k - x)^{m_k}$

попарно взаимно просты

$$V = \underbrace{\operatorname{Ker}(\ell - \lambda_1 I)^{m_1}}_{V^{\lambda_1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(\ell - \lambda_k I)^{m_k}}_{V^{\lambda_k}}$$

Покажем, что $V^{\lambda_1} \ldots V^{\lambda_k}$ линейно нез-имы

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$

$x_i \in V^{\lambda_i} \overset{?}{\Rightarrow} x_i = 0$

б.о.о. $x_1 \neq 0$

№8 (P3)

$V^{\lambda_1} \ni -x_1 = \sum_{i=2}^{k} x_i = x' \in V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_k}$

$(\ell - \lambda_1 I)^{m_1} x_1 = 0$ и $\prod_{i=1}^{k} (\ell - \lambda_i I)^{m_i} x' = 0$

$(x - \lambda_1)^{m}$ и $\prod_{i=2}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i}$ – взаимно просты

$\exists\, u(x), v(x)$:

$1 = u(x)(x - \lambda_i)^{m_1} + v(x) \prod_{i=2}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i}$

$Id = u(\ell)(\ell - \lambda_i Id)^{m_1} + v(\ell) \prod_{i=2}^{k} (\ell - \lambda_i Id)^{m_i}$

$x_1 = u(\ell)(\ell - \lambda_i Id)^{m_1} + v(\ell)(M) = 0$

$\overset{\shortparallel}{0}$ $\quad \overset{\shortparallel}{0}$

№9 р.1	жнф и ж. базис (Th сущ-я)

Нильпотентные операторы

Опр. $\ell: V \to V$

Оп-р ℓ наз-ся нильпот, если $\exists\, k \in \mathbb{N} : \ell^k = 0$.

Пусть $x : \ell^k(x) = 0,\ \ell^{k-1}(x) \neq 0$

$\Rightarrow k$ - высота в-ра x.

Цикл подпр-во

ℓ - нильпот. оп-р в V

$\ell^k x = 0 \quad \ell^{k-1} x \neq 0$

$U = \langle x, \ell(x) \dots \ell^{k-1}(x) \rangle$

Опр. Построенное U - цикл подпр-во порожд x

Утв. В цикл подпр-ве $U = \langle x, \ell(x) \dots \ell^{k-1}(x) \rangle$ порожд в-ром x, высотыk в-ры $x, \ell(x) \dots \ell^{k-1}(x)$ образуют базис

Д-во

Проверим ЛНЗ

Пусть $\alpha_j \ell^j(x) + \dots \alpha_{k-1} \ell^{k-1}(x) = 0$, где α_j - перв. ненул коэф

К обоим частям применим ℓ^{k-1-j}

$\alpha_j \ell^{k-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$?! ⊠

$\neq 0$

Сл-е В таком базисе, в-ры в котором выстроены по возр-ю высоты матрица нильп. оп-ра имеет вид жорд. клетки пор-ка k.

Th (о дополнении цикл подпр-ва для нильп. оп-ра)

Пусть $\ell: V \to V$, ℓ - нильп. высоты k.

Пусть x - в-р наибольшей высоты, U - пор. им цикл пр-во.

$U = \langle x, \ell(x), \dots \ell^{k-1}(x) \rangle$

Тогда $\exists$ инв отн ℓ подпр-во $V = U \oplus W$

Д-во

I Нужно ~~показ~~: W – инв отн ℓ и

а) $U \cap W = \{\bar{0}\}$

б) $U + W = V$.

Если обращать внимание только на инв и на а),

то W $\exists$, например $\{\bar{0}\}$

Пусть теперь W – максимальное по р-ти подпр-во в V,

которое инв отн ℓ и $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

Покажем, что условие б вып-ся авт-ти.

От противного: пусть $U + W \subset V$

Пусть $z \notin U + W$. По условию $\ell^k(z) = 0$

$\Rightarrow \exists \underset{\min}{\ell} \in \mathbb{N} : \ell^{\ell}(z) \in U + W$

Переоб-м $\ell^{\ell-1}(z)$ через z нужно считать,

что $\ell = 1$

Т.е. $z \notin U + W$, но $\ell(z) \in U + W$.

$$\ell(z) = \underbrace{\sum \alpha_s \ell^s(x)}_{U} + \underbrace{w}_{W}$$

II Покажем, что $\alpha_0 = 0$

Применим ℓ^{k-1}

$$\bar{0} = \ell^k(z) = \underbrace{\alpha_0 \cdot \ell^{k-1}(x)}_{\in U} + 0 \ldots + \underbrace{\ell^{k-1}(w)}_{\in W}$$

Т.к. по гипотезе U и W ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_0 \ell^{k-1}(x) = 0$ и $\ell^{k-1}(w) = 0$

$\Rightarrow \alpha_0 = 0$

III $\ell(z) = \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \ell^s(x) + w$

Пусть $y = z - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \ell^{s-1}(x) \notin U + W$

$\ell(y) = \ell(z) - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \ell^s(x) = w \in W$

$W' = W + \langle y \rangle$ инв относ ℓ подпр-во, т.к. $\ell(y) \in W'$

~~[illegible]~~

IV Покажем, что $U \cap W' = \{\bar{0}\}$.

От пр-го. Пусть $\exists$ в-р $\underset{\neq 0}{u} \in U \cap W'$

№9 р.2 Тогда $u = \tilde{w} + \lambda y$, $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\lambda} u - \frac{1}{\lambda} \tilde{w} \in U + W$?! ($y \notin U + W$)

$\Rightarrow$ ~~?! т.к. $W' \Rightarrow$~~ $U \cap W' = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$?! т.к. $W' \supset W$ ■

Th (о р-ии в пр-ве сумму цикл. оп-в)

Пусть $l: V \to V$, l - нильп.

Тогда V р-ся в пр-ве сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_\ell$

где V_i - цикл подпр-ва относ l

Число сл-х: $\ell = \dim \operatorname{Ker} l = \operatorname{geom}(0)$

Д-во:

Индукция по $\dim V$

Пусть $\dim V = 1 \Rightarrow l = 0$ а V - цикл

Пусть для V: $\dim V < n$ утв спр-во

Д-м для пр-ва V: $\dim V = n$

Пусть x - в-р максимальной высоты

$U = \langle x, l(x), \dots, l^{k-1}(x) \rangle$

По пред Th $\exists W$ инв отн l: $V = U \oplus W$

Но W по предп ин-ии р-ло: $W = V_2 \oplus V_3 \oplus \dots \oplus V_\ell$,

где V_i - цикл подпр-ва опер. l

Тогда $V = \underset{\substack{\| \\ U}}{V_1} \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_\ell$.

$\operatorname{Ker} l|_V = \operatorname{Ker} l|_{V_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} l|_{V_\ell}$

$\dim \operatorname{Ker} l|_{V_i} = 1 \Rightarrow \ell = \dim \operatorname{Ker} l|_V = \operatorname{geom}(0)$ ■

Def Жордановой матрицей наз-ся блочно-диаг. м-ца вида

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_\ell}(\lambda_\ell)} \end{pmatrix}$$, где $J_{k_i}(\lambda_i)$ - клетка Жордана

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Th (Жордана)

Пусть $\ell: V \to V$ над F, ℓ – линейно факт. над F

Тогда $\exists$ базис в V, в котором ℓ имеет жорданову матрицу

Note: базис – жор. базис

матрица – ЖНФ

Д-во:

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – с. зн. оп-ра ℓ. (попарно р-е)

$J_\ell(x) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - x)^{m_i}$, где $m_i = alg(\lambda_i)$

~~[illegible]~~

По Th о р-ии в сумму корневых $V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$

На v^{λ_i} $(\ell - \lambda_i I)^{m_i} \equiv 0$

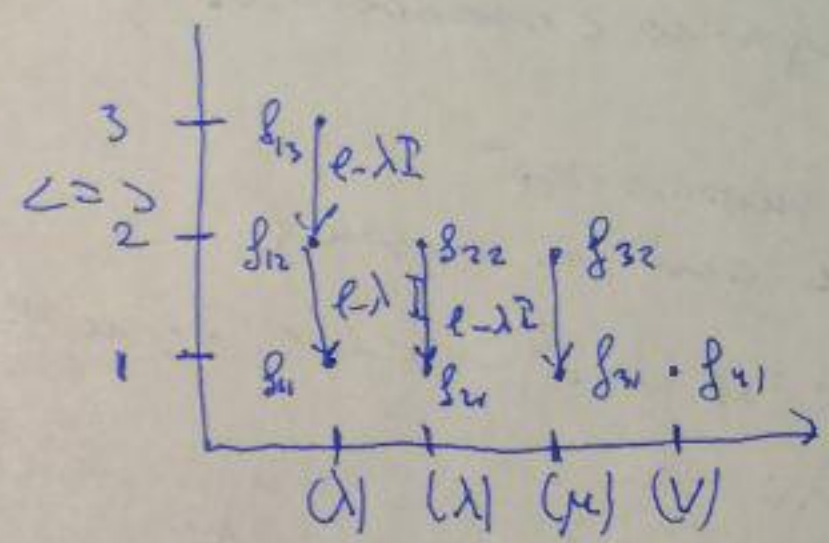
По Th о р-ии в сумму цикл $v^{\lambda_i} = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{is_i}$

На каждом из подпр-в V_{ij} $\ell|_{V_{ij}} = J_{k_j}(\lambda_j)$ ■

№ 10 P1	жорд. диаг. метод ее постр без доказа т. б. Th о ед-ти т. дл. ф с точ до пер на клеток

жорд. диаг.

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{matrix} & \\ & & & \boxed{\nu} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{41} \end{matrix}$$



Def т.д. наз-ся набор точек на пл-ти, в котором (i,j) соотв. в-ру f_{ij} ЖБ.
Под каждым ст-цом ЖФ стоит соотв-е соб. зн.

Св-ва ЖФ

① $\exists$ вз. одн. соотв. между ж м-ми и т. д-ми

② каждый столбец ЖФ содержит в-ры ЖБ, отвеч. данной ж. кл.

③ В-ры f_{2j}, р-е. на в-тв j ЖФ это векторы цепи пр-в, имеющих высоту j
т.е. $(\ell - \lambda I)^j f_{ij} = 0$ $(j = \min)$
В г-ти в-ра не в-те 1 $\{f_{1,j}\}$ – соб. в-ры от-ра ℓ.

④ Обыд от. в ЖФ, отвеч с. зн λ_i дает базис в корневом пр-ве V^{λ_i}

⑤ Действуя $(\ell - \lambda I)$ на вышележ. в-р получим в-р, расп. непоср. под ним

Note Если λ – с.зн. опер ℓ, то
$\{0\} \subset \operatorname{Ker}(\ell - \lambda I) \subset \operatorname{Ker}(\ell - \lambda I)^2 \subset \dots \subset \underset{V^{\lambda}}{\operatorname{Ker}(\ell - \lambda I)^{e}}$

Пусть $n_i = \dim \operatorname{Ker}(\ell - \lambda I)^i$

$\Rightarrow n_1 < n_2 < \dots < n_e = n_{e+1} \dots$

$\forall \lambda$ посл-ть n_i – строго возр. и стаб. с нек момента

Если d_i - длина i-й строки, то $d_i = n_i - n_{i-1}$ ($n_0 = n_0$)

Th (о ед-ти)

ЖНФ линейного оператора ℓ (ℓ - лин. факт.) опр-на одн-но с точностью до пер-ки ж. клеток

Д-во:

Пусть зафи-м жб

λ_i - пр-е соб. зн. оп-ра ℓ

Пусть $\{f_{ij}(\lambda_i)\}$ - все с. в-ры жб, отвеч. соб. зн λ_i.

$f_{ij}(\lambda_i)$ - корневые, отвеч λ_i

$\langle f_{ij}(\lambda_i) \rangle \subseteq V^{\lambda_i}$

$V = \langle f_{ij}(\lambda_1) \rangle \oplus \dots \oplus \langle f_{ij}(\lambda_k) \rangle$

$\qquad\quad \cap \qquad\qquad\qquad\qquad \cap$

$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}$

Тогда $\forall s$ $\langle f_{ij}(\lambda_s) \rangle = V^{\lambda_s}$

=> длина ~~вся~~ для всех ст-в ЖБ, отв λ_s = $\dim V^{\lambda_s}$ и не зависит от в-ра жб.

Осталось д-ть Th о ед-ти для сл-я, когда оп-р имеет одно с. зн => ро-ры клеток не зависят от выбора б-са.

λ - единств собств зн.

$\ell \to \ell - \lambda I$. Можем считать, что ℓ - нильпот и имеет с. зн $\lambda = 0$.

Ту часть ЖБ, которая отвеч. выбр-му с. зн. р-м так, чтобы длины ст-в не возр-ли.

Если столбцы расположить в порядке не возр их длин, то ЖБ полностью опр р-ми строк d_i, которые нез-ят от базиса

№ 11 Р 1	Аннулирующий и минимальный мн-н линейного оп-ра. Связь минимального мн-на с хн ф.

См билет 8.

Утв. Пусть μ – мин. мн-н опер-ра ℓ

P – произв-й анн мн-н

Тогда $P \vdots \mu$

Д-во.

$P = Q \cdot \mu + R$

Пусть $R \neq 0$

$\Rightarrow \deg R < \deg \mu \Rightarrow R(\ell) = 0$?! ■

Утв. Пусть $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$

Пр-ва V_i инв-ны относ ℓ

Пусть $\psi_i = \ell|_{V_i}$. Тогда $\mu_\ell \vdots \mu_{\psi_i}$ $\forall i = 1..k$.

Д-во.

$\mu_\ell = 0$

$\mu_\ell(\ell)|_{V_i} = \mu_\ell(\psi_i) = 0 \Rightarrow \mu_\ell$ – анн мн-н для

оп-ра $\psi_i \Rightarrow \mu_\ell \vdots \mu_{\psi_i}$ ■

Утв. Пусть $J_k(\lambda)$ – жорд клетка пор-ка k, отвеч соб. зн λ.

Тогда ее мин мн-н $(x-\lambda)^k$

Д-во.

$$\chi = \begin{vmatrix} \lambda - x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda - x \end{vmatrix} = (\lambda - x)^k$$

$\Rightarrow d(x) = (x-\lambda)^m, m \leq k$

Если $m < k$, то $(\ell - \lambda I)^m \neq 0$

$\Rightarrow (x-\lambda)^m$ – не анн ■

Th Пусть $\ell: V \to V$ мн. фиит л. оп-р

Тогда его min мн-н имеет вид:

$\mu_\ell = \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{\ell_i}$, где $\lambda_1 .. \lambda_k$ – попарно разл-е соб зн-я

оп-ра ℓ. ℓ_i – макс. пор-к жк, отвеч соб. зн λ_i

Д-во

$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$

на подпр-ве V^{λ_i} l имеем вид $\begin{pmatrix} \underline{J_{m_1}(\lambda_i)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{m_l}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$

$\mu_{\varphi_i} = \text{НОК}\left((x-\lambda_i)^{m_1} \dots (x-\lambda_i)^{m_l}\right) =$

$= (x-\lambda_i)^{l_i}$

Т.к. для р-я корн. пр-в мн-ны вида $(x-\lambda_i)^{l_i}$ попарно вз-ны просты => НОК = пр-ю ■

№12

Линейные реккуренты. Общий вид линейной реккуренты над произвольным полем (случай, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).

Расм посл-ти $a_0, a_1, \dots a_i \in \mathbb{F}$

Мн-во таких посл-тей - F^{∞}

Пусть $p = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \dots + p_1 x + p_0 \in F[x]$

Опр Посл-ть $a_0, \dots, a_n$ - лин. р-ма с хар-м мн-ном p, если верно

(1) $a_{n+s} + p_{s-1}a_{n+s-1} + \dots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0$, $p_0 \neq 0$

Р-во (1) позволяет подсчитать $n+s$-й член посл-ти по s пред.

Утв 1 Пусть V_p - мн-во реккурент с хар мн-м p. Тогда V_p - лин пр-во над F и $\dim V_p = \deg p = s$

Д-во

З-ть относ сложения и умножения на $\lambda \in \mathbb{F}$ очев.

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= (\overbrace{1 \dots 0}^{s}, -p_0, \dots) \\ e_1 &= (\overbrace{0 1 \dots 0}^{s}, -p_1, \dots) \\ &\vdots \\ e_{s-1} &= (\overbrace{0 \dots 1}^{s}, -p_{s-1}, \dots) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{базис в } V_p$$

$\blacksquare$

Пусть l - оп-р левого сдвига в F^{∞}

$l(a_0 \dots) = (a_1, a_2 \dots)$

Пусть $\varphi_p = l|_{V_p}$

Утв 2 V_p - ядро $p(l)$

Д-во

Пусть $b \in \operatorname{Ker} p(\ell) \Leftrightarrow p(\ell)(b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\ell^s + p_{s-1}\ell^{s-1} + \dots + p_1\ell + p_0)(b_n) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_{n+s} + p_{s-1} b_{n+s-1} + \dots + p_1 b_{n+1} + p_0 b_n = 0 \quad (1)$ ■

Сл-е $p(\psi_p) = 0$, т.е. p – анн. мн-н для ψ_p

Утв 3 (о мин мн-не для ψ_p)

$\mu_{\psi_p} = p$

Д-во

p – анн для $\psi_p \Rightarrow p \vdots \mu_{\psi_p} = \mu$

Покажем, что $\deg \mu = \deg p$

Пусть $\deg \mu < \deg p$. Тогда р-ты с мн-ми р-р-ты с мн-ми $\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow V_p \leq V_\mu$ (т.к. $\mu(\psi_p)|_{V_p} = 0$)

$\dim V_\mu = \deg \mu < \deg p = V_p$?! ■

Опр Сопутствующая матрица для р-ма $A_p \in M_{s\times s}(F)$,

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & & -p_{s-1} \end{pmatrix} \Big\uparrow s$$

$\xleftrightarrow{\quad s \quad}$

Утв 4 A_ℓ в базисе $(e_0 \dots e_{s-1})$: $A_\ell = A_p$

Д-во

$\ell(e_0) = -p_0 e_{s-1}$; $\ell(e_1) = (e_0 - p_1 s_{-1})$

... $\boxed{2}$

Утв 5 $\chi_{A_p} = \chi_{\psi_p} = (-1)^s p$

Д-во

$$\chi_{A_p} = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ -p_0 & & & -p_{s-1}-x \end{pmatrix} = (-1)^s p(x)$$

По инд-ии

База: $s=2$ $\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -p_0 & -p_{-1}-x \end{vmatrix} = x^2+p_1x+p_0 = (-1)^2 p(x)$

Шаг: $M^{12\dots s-1}_{12\dots s-1} = (-1)^{s-1} p(x)$

Разложим по п-му ст-бцу:

$$\chi_{A_p}(x) = (-x)\left((-1)^{s-1}(x^{s-1}+p_{s-1}x^{s-2}+\dots+p_1)\right) +$$
$$+ (-p_0)\, x^{s-1} \begin{vmatrix} 1 & & \\ -x & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ & & -x \end{vmatrix} = (-1)^s p(x) \quad \boxed{2}$$

Th (от Th о лин. р-к)

Пусть $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{e_i}$ – мн-н линейно факт

Тогда $\forall$ рек-та $a_n \in V_p$ единственным обр-м пред-ся в виде $a_n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{e_i} c_{is} C_n^{s-1} \lambda^{n+1-s}$, где $c_{is} \in \mathbb{F}$

Д-во

Пусть соб. зн-ю λ_i отвечает Жорданова цепочка $b_1^{(i)} \dots b_{e_i}^{(i)}$, где нижний индекс – высота корн. в-ра

Тогда

1) $(\ell - \lambda_i I) b_1^{(i)} = 0$

2) $(\ell - \lambda_i I) b_s^{(i)} = b_{s-1}^{(i)} \quad \forall i, \forall s$

$\Rightarrow \forall i \forall j \prod_{i=1}^{k} (\ell - \lambda_i I)^{e_i} = p(\ell)$ дает $b_j^{(i)} \Rightarrow b_j^{(i)} \in \operatorname{Ker} p(\ell) = V_p$

Будем строить для фикс i посл-ть

$b_1 \dots b_l$

$(l-\lambda I) b_1 = 0 (1)$

$(l-\lambda I) b_s = b_{s-1} \quad \forall s \geq 1$

$b_1 = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty} = (1, \lambda, \lambda^2 \dots)$ - собств в-р цепочки

$(l-\lambda I) b_1 = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3 \dots) - (\lambda, \lambda^2 \dots) = 0$

Пусть $b_{s-1} = \{f_{s-1}(n)\lambda^n\}$

найдем $b_s = \{f_s(n)\lambda^n\}$

т.к. $b_1 = \lambda^n$, то $f_1(n) \equiv n$

$(l-\lambda I) b_s = f_s(n+1)\lambda^{n+1} - \lambda f_s(n)\lambda^n = f_{s-1}(n)\lambda^n \quad (2)$

$\lambda \neq 0$, т.к. $p_0 \neq 0$

$f_s(n+1) - f_s(n) = \dfrac{f_{s-1}(n)}{\lambda} \quad (3)$

(3) при $\lambda = 1$

$f_s(n+1) = f_s(n) + f_{s-1}(n)$

$C_{n+1}^{s-1} = C_n^{s-1} + C_n^{s-2}$

Легко видеть, что $f_s(n) = C_n^{s-1}$

В общем сл-е ищем реш-е (3)

$f_s(n) = C_n^{s-1} \lambda^{\alpha(s)} \quad (\alpha(1) = 0)$

$(3): C_{n+1}^{s-1} \cdot \lambda^{\alpha(s)} - C_n^{s-1} \lambda^{\alpha(s)} = C_n^{s-2} \lambda^{\alpha(s-1)-1}$

$\alpha(s) = \alpha(s-1) - 1 \Rightarrow \alpha(2) = -1, \alpha(3) = -2$

$\alpha(s) = 1 - s$

$\Rightarrow f_s(n) = C_n^{s-1} \lambda^{1-s}$ и $b_s = C_n^{s-1} \lambda^{n+1-s}$ $\blacksquare$

№13 р.1	Билинейные ф-ии. коорд з-сь бил. ф-ии. матрица бил ф-ии и её изм при замене б-са. Орт дап-е к подпр-ву отн симм (кососим.) бил ф-ии и его св-ва

V - лин. пр-во над F

Опр Бил. формой на V наз-ся ф-я $f(x,y)$ $(x,y) \in V \times V$ со зн. в F:

F лин по каждому арг-ту

Утв1 Пусть $f(x,y)$ - бил ф-я на V, $\dim V = n$

Пусть $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ - базис в V.

$x \xleftrightarrow[\mathcal{E}]{} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \xleftrightarrow[\mathcal{E}]{} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$f(x,y) = x^T A y = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$, где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$

Д-во

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $y = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$

$f(x,y) = f(\sum, \sum) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j)$ ■

Опр Двойная сумма $(1) = x^T A y$ назыв. бил. ф-ей от координат векторов x, y.

A - м-ца бил ф-ии

Утв2 Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы V.

$S = S_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, т.е. $\mathcal{E}' = \mathcal{E} S$

Тогда $f \xleftrightarrow[\mathcal{E}]{} A \Rightarrow f \xleftrightarrow[\mathcal{E}']{} S^T A S$

Д-во

$f(x,y) = x^T A y$

$f(x,y) = (x')^T A y' = (Sx)^T A S y = x^T (S^T A S) y$ ■

Опр Бил. ф-я наз-ся симм.,

если $\forall x, y \in V \Rightarrow f(x,y) = f(y,x)$

Опр Бил ф-я наз-ся кососим, если

а) $f(x,y) = -f(y,x)$

б) $f(x,x) = 0 \ \forall x \in V$

Note б) $\Rightarrow$ а)

$B^+(V)$ – пр-во сим бил ф-й

$B^-(V)$ – пр-во кососим бил ф-й

Опр. Пусть $U \subseteq V$. Орт. доп к U отн f наз-ся $U^\perp = \{y \in V \mid f(x,y)=0, \forall x \in U\}$

Утв. $f \in B^\pm(V)$, $\operatorname{char} F \neq 2$

Тогда $\forall U \subseteq V$, $U^\perp \subseteq V$, причем

$\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$.

Более того, если f невырожд на U, то имеет место р-во

$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

Д-во

а) $y \in U^\perp \iff \forall x \in U \hookrightarrow f(x,y)=0$ (1)

Пусть $(e_1 \dots e_k)$ – базис U

$(e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$ – базис V

$(1) \iff f(e_i, y) = 0 \ \forall i = 1 \dots k$

$$(2)\begin{cases} \overbrace{1, 0 \dots 0}^{k}\ 0 \dots 0 \quad Ay=0 \\ \overbrace{0 \dots 1}^{k}\ 0 \dots 0 \quad Ay=0 \end{cases}$$

i-ю

Умножение e_i на A „выредает" из A строку

$\underset{\sim}{A} = A$, в которой оставили k верхних строк

$(2) \iff \underset{\sim}{A}\, y = 0$

$\dim U^\perp = \dim V - \operatorname{rk} \underset{\sim}{A} \geq \dim V - k = \dim V - \dim U$ ($\operatorname{rk} \underset{\sim}{A} \leq k$)

б) Пусть $f|_U$ невыр.

$M^{1\dots k}_{1\dots k} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A = k \Rightarrow$ р-во в-но $\boxed{2}$

Def. Пусть $f \in B^\pm$. Подпр-во U невыр отн-но f, если сужение $f|_U$ – невыр. ф-я

Утв. $V = U \oplus U^\perp \iff U$ не вырожд относ. f

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть $V = U \oplus U^\perp$ и $f|_U$ – вырожд бил ф-я

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f|_U \neq \{0\} \Rightarrow \exists y \neq 0 : y \in \operatorname{Ker} f|_U$. $\forall x \in U \hookrightarrow f(x,y)=0 \Rightarrow y \in U^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in U \cap U^\perp$?!

№13 p.2 $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $f|_U$ невырожд.

$\Rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$ (иначе $\operatorname{Ker} f|_U \neq \{0\}$)

Покажем, что $V = U + U^\perp$

$\dim(U+U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) \geq$

$\geq \dim U + \dim V - \dim U = \dim V \Rightarrow U + U^\perp = V$ ∎

W14 P1	Симм. бил. кв. форм. Метод Л-та приведения формы к канон. виду

см. билет 13

Утв $f \in B(V)$

f явл. симм. $\Leftrightarrow A = A^T$ $\forall e$ в V

Д-во

$\Rightarrow$ $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$

$\Leftarrow$ Пусть $A = A^T$

$f(x, y) = x^T A y$

$f(y, x)^T = f(y, x) = (y^T A x)^T = (y^T A x)^T = x^T A^T y$ ■

Пусть $f \in B^+(V)$

$f: V \times V \to F$

Рассм. подмн-во пар $\{(x,x) \mid x \in V\} = \Delta_V$ – диагональ декартового пр-я

Опр Кв. ф-ей на пр-ве V наз-ся сужение симм. бил. ф-ии f на Δ_V

$f|_{\Delta_V}$ т.е. $q(x) \overset{def}{=} f(x,x)$.

Т1 (Лагранжа)

В пр-ве V сущ-ет базис $\mathcal{E}$, в котором всякая симм. бил. ф-ия (кв) имеет диаг. вид*

(*) $f = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n$

$q = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$

Д-во

Индукция по $\dim V$

База $\dim V = 1 \Rightarrow f$ – то

Переход $\dim V = n$

Если $f = 0$, очев

Если $f \neq 0 \Rightarrow q \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, e_1 \in V : q(e_1) \neq 0$

$q(e_1) = f(e_1, e_1)$ $U = \langle e_1 \rangle$ и $f|_U$ не вырожд.

Тогда $\exists\, V = \underset{U}{\underset{\shortparallel}{\langle e_1 \rangle}} + \underset{U^\perp}{\underset{\shortparallel}{\langle e_1 \rangle^\perp}}$

B^+ тем орт базис $e_2 \dots e_n$ (порядок ин-ии)

$\mathcal{E} = e_1 e_2 \dots e_n$ – орт базис

Утв. $Q(V) \cong B^+(V)$

$f(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$ – нат. м-во

Метод Лагранжа

$$q(x) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

Выбираем сл-е с x_1 и собираем полный кв-т

и т.д.

№15 P1	Индексы инерции кв формы в действ лин. пр-ве. З-н инерции

V - лин пр-во над $\mathbb{R}$

Опр Кв ф-я $q(x)$ на V наз-ся положительно (отриц.) опр-й, если $\forall x\ x \neq 0 \Rightarrow q(x) > 0$ ($q(x) < 0$)

Опр Кв ф-я q на V наз-ся полож (отр) полуопр,

если $\forall x \in V \Rightarrow q(x) \geq 0$ ($q(x) \leq 0$)

Пусть q - кв ф-я в канон базисе ε

$q(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2$, $p+q = \operatorname{rk} q$

Опр Тогда p - полож индекс инерции q в базисе ε

q - отр

ТК (З-н инерции в $\mathbb{R}$)

Пусть q - кв ф-я в V над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$

ε - канон б-с

p и q - ин. инерции

Тогда:

а) $p = \max\{\dim U \mid U \leq V, q|_U$ - пол опр$\}$

б) $q = \max\{\dim U \mid U \leq V, q|_U$ - отр опр$\}$

в) Инд-ы ~~[illegible]~~ ин-ии не зависят от выбора ε

Д-во

а) В ε имеем $q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2$

$U_0 = \langle e_1, \ldots e_p \rangle$ $W_0 = \langle e_{p+1} \ldots e_n \rangle$

$\dim U_0 = p$ $\dim W_0 = n-p$

$q|_{U_0}$ - пол опр

Пусть $K = \max\{\dim U \mid U \leq V$ и $q|_U$ пол опр$\}$

$K \geq p$ (очевидно)

Пусть $K > p$. $\Rightarrow \exists U : q|_U$ пол опр и $K = \dim U > p$

$\dim(U \cap W_0) = \dim U + \dim W_0 - \dim(U + W_0) =$

$= K + n - p - \dim(U + W_0) \geq K + n - p - n \geq K - p \geq 1$

Тогда $\exists z \neq 0 : z \in U \cap W_0$.

но $q(z) \leq 0$?!

б) аналогично

в) сл-е а) и б) ■

Сл-е $B \in M_n(\mathbb{R})$ пол опр-на $\Leftrightarrow$ найдется нев $A \in M_n(\mathbb{R}) : B = A^T \cdot A$

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть B пол опр $\Rightarrow \exists$ кв фр-я q, для которой B – ее м-ца.

Тогда если S – м-ца пер-да к канон б-су для q

$E = S^T B S$

$B = (S^T)^{-1} \cdot S^{-1}$

$\Leftarrow$ $B = A^T \cdot A$, A нев.

$B^T = (A^T A)^T = A^T \cdot A = B \Rightarrow B$ – симм.

Пусть q – кв фр-я м-цы B.

Пусть $S = A^{-1}$ – переход к б-су

$B' = S^T B S = (A^{-1})^T A^T \cdot A \cdot A^{-1} = E$ ■

№16 р. 1	Алгор. обл и кв ф-ии. Метод Якоби

См билет 14.

Th (Якоби)

Пусть $q(x)$ – кв. ф-я в действ л.п.

$\mathcal{E}$ – пр-й базис в V, $\dim V = n$

$1 = \Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_n$ – гл миноры м-цы A ф-ии q отл-ны от 0.

Тогда $q(x)$ можно пр-ти к диаг виду:

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \dots \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2 \quad (1)$$

Более того: матрица пер-да будет верхне треуг.

Д-во, Инд-я по $n = \dim V$

База, $n = 1$ $q(x) = a_{11}x_1^2$

$e_1' = \frac{1}{a_{11}} e_1$ $q(e_1') = f(e_1', e_1') = \frac{1}{a_{11}^2} a_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{\Delta_1}$

Переход, Пусть утв-во для V: $\dim V = n$

Д-м для n.

$U = \langle e_1 \dots e_{n-1} \rangle$

$q|_U$ – прим предп инд-ии

$$q|_U = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}\xi_{n-1}^2$$

Матр пер-да $S = \begin{pmatrix} s_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & s_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$ к базису $e_1' \dots e_{n-1}'$ в U.

$q|_U$ невыр $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

$\dim U^\perp = 1$.

Выберем в $U^\perp$ б-й в-р e_n' так, чтобы

$f(e_n, e_n') = 1$

Д-м, что базис $\mathcal{E}' = (e_1' \dots e_n')$ – искомый

$(e_1 \dots e_n) \to (e_1' \dots e_{n-1}', e_n')$

в-ры $e_1' \dots e_{n-1}'$ очевидно имеют нул. координату при e_n

$$\Rightarrow S = \left(\begin{array}{ccc|c} s_{11} & \dots & s_{n-1\,n-1} & \\ \hline 0 & 0 \; 0 \dots & 0 & \end{array}\right) \; e_n'$$

Пусть $e_n' = S_{1n} e_1 + \dots S_{n-1,n} e_{n-1} + S_{nn} e_n$ (*)

По постр $e_n' \perp U$

$$\begin{cases} f(e_1, e_n') = f(e_1, *) = 0 \\ \vdots \\ f(e_{n-1}, e_n') = 0 \\ f(e_n, e_n') = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} S_{1n} + a_{12} S_{2n} + \dots + a_{n1} S_{nn} = 0 \\ \vdots \\ a_n S_{1n} + \dots \quad + a_{nn} S_{nn} = 1 \end{cases}$$

$\Delta_n \neq 0 \Rightarrow S_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$.

Найдем коэф при ξ_n^2

$f(e_n', e_n') = f(*, e_n') = f(S_{nn} e_n, e_n') = S_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$ ■

№17 Р.1	Пол. опр-е кв ф-лы. Критерий Сильвестра. Кососим. бил ф-ии, приведение их к канон виду

См билет 15

Th (Критерий Сильвестра)

Пусть q-кв ф-ла в V над $\mathbb{R}$ и

B-матр ф-лы в некот. базисе.

Тогда

1) q пол опр-на $\Leftrightarrow$ все гл миноры в B полож

2) q отр опр-на $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\vdots$

Д-во

① $\Rightarrow$ Пусть q пол. опр

$B \overset{(*)}{=} A^T \cdot A$, где A – нев м-ца

$\Delta_n = |B| = |A^T \cdot A| = |A|^2 > 0$

Δ_k – ? q $|_U$, $U = \langle e_1 \dots e_k \rangle$

$q|_U$ – пол опр $\Rightarrow \Delta_k > 0 \ \forall k$

$\Leftarrow$ Пусть $\Delta_1 \dots \Delta_n > 0$

$\Rightarrow$ В Δ_i нет перемен зн-в $\Rightarrow q = 0 \Rightarrow p = n \Rightarrow$ пол опр-на

② q пол опр $\Leftrightarrow$ $-q$ отр опр

$-q = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$\Delta_k L_q = (-1)^k \Delta_k |_q$ ■

(*) – см-е из знако инерции. см билет 15

Опр Бил. ф-я f наз-ся кососим, если

а) $f(x,y) = -f(y,x)$

б) $f(x,x) = 0 \ \forall x \in V$

Опр f-кососим б. ф-я на V, V над F

Базис $e_1 \dots e_n = E$ в V

наз-ся симплектическим, если

$f(e_{2k-1}, e_{2k}) = 1$, $k = 1, 2 \dots s$

а все ост. $f(e_i e_j) = 0$

Th (о 7-ми симм. б-са)

Пусть f – косос. бил ф-я в V над F

Тогда в V $\exists$ ет симм базис

Д-во

Инд-я по р-ти $V=n$

Базис $n=1$, $f(e_1, e_1)=0 \Rightarrow f \equiv 0$

Переход

Если $f \equiv 0 \Rightarrow f$ что

Пусть $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, e_1', e_2' \in V : f(e_1', e_2') = 1$ (каноич-ть $\Rightarrow$ гладкости)

$\Rightarrow U = \langle e_1', e_2' \rangle$

$f|_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – не вырожд

Тогда $V = U \oplus U^\perp$ $\dim U^\perp = n-2$

к $f|_{U^\perp}$ применимо предп инд-ии

$\Rightarrow \exists$ симм. б-с $e_3' \dots e_n'$

$\Rightarrow$ в V сущ б-с $\varepsilon' = e_1' \dots e_n'$ ■

№18 Р1	Евклидово и эрмитово пр-во. Выр. с скал пр-я в коорд. матрица Грама с-мы в-ров и ее св-ва. Нер-во коши-Бун.

Опр Евклид пр-м над $\mathbb{R}$ наз-ся лин. пр-во над $\mathbb{R}$ с отр на нем полож. отр. симм билин ф-ей - скал пр-ем

$(x,y) = f(x,y)$

Опр (1,5-лин ф-й)

Пусть V - лин пр. во над $\mathbb{C}$

ф-я $f: V \times V \to \mathbb{C}$ наз-ся 1,5-линейной, если

① $f(x_1+x_2, y) = f(x_1,y) + f(x_2,y)$

② $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$

③ $f(x, y_1+y_2) = f(x,y_1) + f(x,y_2)$

④ $\forall x \in \mathbb{C}$ $f(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$

Утв 1 Пусть f - 1,5 лин ф-я в пр-ве V

$\mathcal{E}$-базис в V, $x \underset{\mathcal{E}}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \underset{\mathcal{E}}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Тогда $f(x,y) = x^T A \bar{y}$

Утв 2 Пусть в V выбраны два базиса $\mathcal{E}, \mathcal{B}$

$S = S_{\mathcal{E} \to \mathcal{B}}$ Тогда если $f \underset{\mathcal{E}}{\leftrightarrow} A$

$f \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} B$

$$B = S^T A \bar{S}$$

Опр 1,5 лин ф-я наз-ся эрмитовой, если

$\forall x, y \in V$ $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$

Опр Эрмитовым пр-м наз-ся лин пр-во над $\mathbb{C}$, на котором определена эрмитова 1,5 лин ф-я $(\cdot,\cdot)$ - ск. пр. с

Опр Пусть V - пр-во со скал пр-ем

Пусть $a_1, a_2 .. a_k \in V$

Тогда матр Грама с-мы $a_1 .. a_k$ наз-ся м-ца

$$G(a_1 .. a_k) = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (a_k,a_k) \end{pmatrix}$$

Th (о св-х м-цы Г)

а) $\det G(a_1 \dots a_k) \geq 0$

б) $\det (a_1 \dots a_k) = 0 \iff a_1 \dots a_k$ ЛЗ

Д-во:

Пусть $a_1 \dots a_k$ ЛЗ

Б.о.о. $a_k = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1}$

Умножим строку i на λ_i и вычтем из нее все

$\Rightarrow$ нижняя строка будет $(0 \dots 0) \Rightarrow \det G = 0$

Пусть $a_1 \dots a_k$ – ЛН

$U = \langle a_1 \dots a_k \rangle$ $a_1 \dots a_k$ базис $U \subseteq U$

$x, y \in U$

$(x, y) = x^T G \bar{y}$

$(x, x) = x^T G \bar{x}$

$\Rightarrow G$ – м-ца скал пр-я на U

$\Rightarrow G$ пол опр $\Rightarrow \det G > 0$ ■

Сл-е: $\dim V = n$ $G(a_1 \dots a_n)$ пол опр $\iff a_1 \dots a_n$ – базис.

Th (нер-во Коши – Буняковского)

Пусть V – пр-во со скал пр-ем

$\forall x, y \in V \Rightarrow |(x, y)^2| \leq (x, x)(y, y)$

Д-во:

Если $x = 0$ или $y = 0$, то н-во очев.

Пусть x и y пропорц. $y = \lambda x$

$|(x, y)|^2 = |(x, \lambda x)|^2 = |\lambda|^2 |(x, x)|^2 = |\lambda^2| (x, x)^2$

$(x, x)(y, y) = (x, x)(\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x, x)^2 = |\lambda|^2 (x, x)^2$

Пусть x и y не пропор $\Rightarrow x, y$ ЛН3

$\det \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{pmatrix} > 0$ ■

№19

Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Существование ортонормированного базиса в пространстве скалярным произведением. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряженного к нему

Def Два вектора называются **орт-ми**, если их ск-е пр-е равно 0

Сис-ма в-ров орт-на $\Leftrightarrow (a_i, a_j) = 0, i \neq j$

С-ма в-ров ортонорм $\Leftrightarrow (a_i, a_j) = \delta_{ij}$

Утв Пусть подпр-ва $U_1 \dots U_k$ - орт-я с-ма. Тогда $U_1 + \dots + U_k$ - прямая

Д-во

$U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U}_i + \dots + U_k) \overset{?}{=} \{\vec{0}\}$

Пусть $\exists x_i \in U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U}_i + \dots + U_k)$

$(x_i, x_i) = (x_i, x_1 + \dots + \hat{x}_i + \dots + x_k) = 0$?! ⊠

Сл-е $a_1 \dots a_k$ - орт. с-ма ненул в-ров $\Rightarrow a_1 \dots a_k$ - ЛНЗ

Def Базис ε в пр-ве V со скал пр-ем $(,)$ наз-ся **орт** (**ортонорм**), если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$
$(= \delta_{ij})$

Утв Пусть V - пр-во со ск. пр-ем. Тогда в V $\exists$ ОНБ.

Д-во

Скал пр-е явл-ся симм. пол опр (эрмитовой 1,5 лин) ф-ей и может быть приведено к канон. виду ∎

Def Матрица $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ наз-ся **орт**, если $A^T A = E$

Def Матрица $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ наз-ся **унитарной**, если $\bar{A}^T \cdot A = E$

Утв Пусть V - пр-во со скаляр. пр-ем. ε - ОНБ в V.

Тогда f - ОНБ в V $\Leftrightarrow$ $S = S_{e \to f}$ орт. (унит)

Д-во

$G(e_1 \dots e_n) = E$

В базисе f

$E = G(f_1 \dots f_n) = S^T G(e) \bar{S} = S^T \cdot \bar{S}$

$\Leftrightarrow S^* S = E \Leftrightarrow S$ унит ∎

Сл-е Мн-во всех орт. м-ц $GL_n(\mathbb{R})$ (всех унит $GL_n(\mathbb{C})$) явл-ся подгруппой $GL_n(\mathbb{R})$ ($GL_n(\mathbb{C})$)

Д-во

A, B - унит $\Rightarrow A \cdot B$ унит

A^{-1} унит

(как переход от ОНБ к ОНБ) ☒

Опр Пусть V_1, V_2 - два евклидова (эрм) пр-ва. Отображением $f: V_1 \to V_2$ наз-ся **изоморфизмом**, если: а) f - изоморфизм $V_1 \to V_2$ (лин пр-ва)

б) f сохр скал пр-е

Т2 Пусть V_1 и V_2 - два евкл (эрмит) пр-ва. Тогда $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Д-во

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V_1 = \dim V_2$

Выберем $\forall$ ОНБ $\mathcal{E}$ в V_1 и $\mathcal{F}$ в V_2

Пусть $f: V_1 \to V_2 : f(e_i) = f_i$

Тогда $\exists!$ лин. от с т-ми св-ми

$x = \sum x_i e_i$

$f(x) = \sum x_i f_i$

а в-ся с д-ва для лин. пр-в)

Покажем, что f сохр пр-е

$$x \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$(x, y) = x^T \bar{y}$

$$f(x) \underset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(y) \underset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$(f(x), f(y)) = (x, y)$ ∎

Пусть V - евкл пр-во, V^* - сопр

Утв Соотв-е $y \to f_y(x) = (x, y)$ явл-ся **изоморфизмом** V на V^*

Д-во

$y_1 + y_2 \to f_{y_1+y_2}(x) = (x, y_1+y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$
$= f_{y_1}(x) + f_{y_2}(x)$

λy аналогично

Проверим биективность

$\dim V = \dim V^*$

$\operatorname{Ker} \overset{?}{=} \{\bar{0}\}$

$V \ni y \mapsto f_y(x) = 0 \iff (x, y) = 0 \ \forall x \in V \Rightarrow$
$y = 0$ ∎

№20

Ортогональное дополнение к подпространству. Задача об ортогонализации проекции и ортогональной составляющей. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Объем параллелепипеда.

см билет 13.

Def Пусть $U \leq V$

$U^{\perp} = \{ y \in V \mid f(x, y) = 0 \ \forall x \in U \}$

Утв Пусть $\varphi: V \to V^*$ - кан. из-м

Пусть $U \leq V$

Тогда $U^{\perp} = \varphi(U^0)$, U^0 - аннулятор в V^*

Д-во

$y \in U^{\perp} \iff \forall x \in U \ (x, y) = 0 \iff f_y(x) = 0 \ \forall x \in U$

$\iff f_y \in U^0 \iff y \in \varphi(U^0)$ ∎

Сл-е (о св-х орт доп)

Пусть $U \leq V$ (V - евклид)

Тогда а) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

б) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

в) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

Д-во

а) $U \overset{?}{=} (U^{\perp})^{\perp}$

$x \in U \Rightarrow (x, y) = 0 \ \forall y \in U^{\perp} \Rightarrow x \in (U^{\perp})^{\perp}$

$V = U \oplus U^{\perp} \Rightarrow \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$

$\dim (U^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim U^{\perp} = \dim V - \dim V$

$+ \dim U = \dim U$

б) $(U+W)^{\perp} = \varphi((U+W)^{0}) = \varphi(U^{0} \cap W^{0}) =$

$= \varphi(U^{0}) \cap \varphi(W^{0}) = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

в) аналогично $\blacksquare$

Note $V = U \oplus U^{\perp}$

$\Rightarrow x = \tilde{x} + x^{0}$

$\tilde{x} = pr_{U} x$

$\overset{0}{x} = ort_{U} x$

Задача об орт. пр-ии и орт сост состоит в поиске $\tilde{x}$ и $\overset{0}{x}$

1 случай

В U-ОНБ в $U^{\perp}$-ОНБ $\dim U = k$

$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \Rightarrow \overset{0}{x} = x - \tilde{x}$

2 случай

В U-орт базис, в $U^{\perp}$-орт б-с

$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - ОНБ $e_i' = \frac{e_i}{|e_i|}$

$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i') e_i' = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \frac{1}{(e_i, e_i)}$

3 случай В U - $\forall$ базис, в $U^{\perp}$ - $\forall$ б-с

$U \ni \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$U^{\perp} \ni x^{0} = x - \tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$$\begin{cases} (\overset{0}{x}, e_1) = 0 & (x, e_1) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i, e_1) = 0 \\ (\overset{0}{x}, e_k) = 0 & (x, e_k) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i, e_k) = 0 \end{cases}$$

Th.1 (Грам-Шмидт)

Пусть $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_k)$ — ∀ базис V

Тогда ∃ орт базис f в V т.ч.

$\forall k \quad \langle e_1 \dots e_k \rangle = \langle f_1 \dots f_k \rangle \ (k = \overline{1..n})$

и $S: e \to f$ унитарна $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Д-во

1) База $f_1 = e_1$

2) Предп инд-ии: $f_1 \dots f_{k-1}$: $\begin{cases} (f_i, f_j) = 0, \ i \neq j \\ \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle = \langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle \end{cases}$

Пусть $f_k = \text{ort}_{\langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle} e_k \Rightarrow f_k \perp f_i, \ i < k$

a) $f_k \overset{?}{\neq} 0$

$\text{ort}_{\langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle} e_k = 0 \Leftrightarrow \text{ort}_{\langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle} e_k = 0 \Rightarrow (e_1 \dots e_{k-1})$ — ЛЗ?!

б) $\langle e_1 \dots e_k \rangle \overset{?}{=} \langle f_1 \dots f_k \rangle$

$f_k = \overset{\circ}{e}_k = e_k - \tilde{e}_k, \ \tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle$

$\Rightarrow e_k = f_k + \tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_k \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathcal{E} \rangle \subset \langle f \rangle$

$\tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle = \langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle$

$f_k = e_k - \tilde{e}_k \in \langle e_1 \dots e_k \rangle \Rightarrow \langle f_1 \dots f_k \rangle \subseteq \langle e_1 \dots e_k \rangle$

$f_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i \ (\tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle) \ (=)$

$f_1 \dots f_{k-1}$ — орт базис $\langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle = \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle$

$(=) \ e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i, \ k \geq 2$ (ф-ла Г-Ш)

в/ Покажем, что S - линейн.

$f_k = e_k + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1}$ ∎

Сл-е 1 Пусть $U \leq V$

Тогда $\forall$ орт б-е U можно дополнить до б-са V

Д-во

$\langle e_1 \dots e_k \rangle$ $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$

дополним до $(e_1 \dots e_n)$ - б-с V

Построим $(f_{k+1} \dots f_n)$ ∎

Сл-е 2

$U \leq V$, ОНБ в U можно дополнить до ОНБ в V

Def $U \leq V$, Тогда р-е от x до U

$$\rho(x, U) = \inf_{u \in U} |x - u|$$

Утв $\rho(x, U) = |\mathrm{ort}_U x| = |\mathring{x}|$

Д-во

$|x - u| \geq |(\mathring{x} - u)| = |\mathring{x} - \mathring{u}| = |\mathring{x}|$ ∎

Def V - евкл пр-во, $x_1 \dots x_k \in V$

$V_k(x_1 \dots x_k)$ - опр-ся инд-вно

$V_1(x_1) = |x_1|$

$V_k(x_1 \dots x_k) \overset{def}{=} V_{k-1}(x_1 \dots x_k)\, \rho(x_k, \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle)$

Note $V_k(x_1 \dots x_k) = 0 \iff x_i^{\circ} = 0$ для нек $i \iff$

$\iff x_i \in \langle x_1 \dots x_{i-1} \rangle \iff$ с-ма ЛЗ

Th (Общая ф-ла опр Грама)

$$V_k^2(x_1 \dots x_k) = |G(x_1 \dots x_k)|$$

Д-во

1) Если $x_1 \dots x_k$ ЛЗ р-во верно

2) Пусть $x_1 \dots x_k$ ЛНЗ

$(x_1 \dots x_k) \xrightarrow{\text{ТА Г-Ш}} (y_1 \dots y_k) : (y_i, y_j) = 0 \ i \neq j$

$(y_1 \dots y_k) = (x_1 \dots x_k) S$, S - унитр $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$G(y_1 \dots y_k) = S^T G(x_1 \dots x_k) \bar{S}$

$\det G(y_1 \dots y_k) = \det(G(x_1 \dots x_k))$

Инд-я по k

$V_k^2(y_1 \dots y_k) \overset{?}{=} V_k^2(x_1 \dots x_k)$

$k=1$ $|y_1|^2 = |x_1|^2$ - верно

k, Пусть $V_{k-1}(y_1 \dots y_{k-1}) = V_{k-1}(x_1 \dots x_{k-1})$

$V_k(y_1 \dots y_k) = V_{k-1}(y_1 \dots y_{k-1}) \rho(y_k, \langle y_1 \dots y_{k-1} \rangle) =$

$= V_{k-1}(x_1 \dots x_{k-1}) \rho(x_k - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle) =$

$= V_{k-1}(x_1 \dots x_{k-1}) \rho(x_k, \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle) = V_k(x_1 \dots x_k)$

3) д-во для $y_1 \dots y_k$

$V_k^2(y_1 \dots y_k) = V_{k-1}^2(y_1 \dots y_{k-1}) \rho^2(\underbrace{y_k}_{|y_k^{\circ}|^2}, \langle y_1 \dots y_{k-1} \rangle) =$

$= V_{k-1}^2(y_1 \dots y_{k-1}) |y_k|^2 = \prod_{i=1}^{k} |y_i|^2 = \det \begin{pmatrix} (y_1, y_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (y_k, y_k) \end{pmatrix} = \det G(y_1 \dots y_k)$

$\blacksquare$

Сл-е Пусть V - пр-во со скал пр-ем

$\mathcal{E}=(e_1 \dots e_n)$ - базис V

Пусть $(x_1 \dots x_n)=(e_1 \dots e_n)S$

Тогда $V_n(x_1 \dots x_n) = |\det S|\, V(e_1 \dots e_n)$

Д-во

$$\det G(x_1 \dots x_n) = \det(S^T G(e_1 \dots e_n) S) = |\det S|^2 \det G(e)$$

$\boxtimes$

Сл-е 2

Пусть $U \leq V$, V - пр-во со ск. пр-ем

В U зафф б-с $\langle e_1 \dots e_k \rangle$

Тогда $\rho(x, U) = \sqrt{\dfrac{G(x, e_1 \dots e_k)}{G(e_1 \dots e_k)}}$

Д-во

$$\rho(x, U) = \frac{V(x, e_1 \dots e_k)}{\sqrt{(e_1 \dots e_k)}}$$

$\boxtimes$

№21

Преобразование, сопряженное данному. Существование и единственность такого преобразования. Теорема Фредгольма.

V - пр-во со скал пр-ем

$\theta = 2$ в евкл, $\theta = \frac{3}{2}$ в эрмитовом

$B_\theta(V)$ - пр-во θ-лин ф-ий на V

$\ell : V \to V$

Def $f_\ell(x,y) \overset{def}{=} (\ell(x), y)$

Утв Пусть $\mathcal{E}$ - ОНБ в V

A - матрица ℓ в $\mathcal{E}$.

Тогда матрицей ф-ии f_ℓ в $\mathcal{E}$ есть A^T

Д-во

$x \overset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \overset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$f_\ell(x,y) \overset{def}{=} (\ell(x), y) = (Ax, y) = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y}$

$\Rightarrow f_\ell \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} A^T$ ∎

Сл-е Соотв-е $\ell \in \mathcal{L}(V) \Leftrightarrow f_\ell \in B_\theta(V)$

явл биективным и линейным

$\lambda \ell \longleftrightarrow f_{\lambda \ell}(x,y) = (\lambda \ell(x), y) = \lambda(\ell(x), y) = \lambda f_\ell(x,y)$ ∎

Построим другое соотв-е

$\ell \longleftrightarrow g_\ell(x,y) \overset{def}{=} (x, \ell(y))$

Утв2 Пусть $\mathcal{E}$ - ОНБ в V, $\ell \overset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} A$. Тогда

$g_\ell \longleftrightarrow \tilde{A}$

Д-во

$g_\ell(x,y) = (x, \ell(y)) = (x, Ay) = x^T \bar{A} \bar{y}$ ∎

Сл-е Соотв-е явл-ся биективным и (Θ-1) лин.

Def (Сопр оп-р)

Пусть V – пр-во со ск. пр-ем

Оператор $\ell^*: V \to V$ наз сопр к ℓ,

если $f_\ell = g_{\ell^*}$ $\forall x, y$ $(\ell(x), y) = (x, \ell^*(y))$

Сл-е (из утв 1 и 2)

Если $\mathcal{E}$ – ОНБ, $\ell \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} A$, то $\ell^* \longleftrightarrow \bar{A}^T = A^*$

Утв 3 $\ell, \psi \in \mathcal{L}(V)$

а) $(\ell + \psi)^* = \ell^* + \psi^*$

б) $(\lambda \ell)^* = \bar{\lambda} \ell^*$

в) $\ell^{**} = \ell$

г) $(\ell \psi)^* = \psi^* \ell^*$

Утв 4

$\overline{\chi_\ell(x)} = \chi_{\ell^*}(\bar{x})$

Д-во

$\chi_{\ell^*}(\bar{x}) = \det(\bar{A}^T - \bar{x}E) =$

$= \det(A^T - xE) = \det(A - xE) = \overline{\chi_\ell(x)}$ ☒

Сл-е 1 Если λ – соб. зн. ℓ, то $\bar{\lambda}$ – с. зн ℓ^*

Сл-е 2 $\operatorname{rk} \ell^* = \operatorname{rk} \ell$

Т1 Пусть $U \leq V$

U – инв относ $\ell \Rightarrow U^\perp$ инв относ ℓ^*

Д-во

$y \in U^{\perp}$, x – пр-и в-р из U

$(x, f^*(y)) = (f(x), y) \Rightarrow \forall x \in U \Rightarrow f^*(y) \perp x \Rightarrow$

$\Rightarrow f^*(y) \in U^{\perp}$ ∎

Th (Фредгольма)

a) $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$

б) $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

Д-во

б) $\Rightarrow$ а) $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f^*)^{\perp}$

б) 1) $\operatorname{Im} f^* \overset{?}{\subseteq} (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

$y \in \operatorname{Im} f^* \Rightarrow \exists y_0 \in V : y = f^*(y_0)$

$x \in \operatorname{Ker} f$

$(x, y) = (x, f^*(y_0)) = (f(x), y_0) = (0, y_0) = 0$

$y \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

2) $\dim \operatorname{Im} f^* \overset{?}{=} \dim (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

$\dim \operatorname{Im} f^* = \operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} f$

$\dim (\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f =$

$= \dim V + \dim \operatorname{Im} f - \dim V = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} f$ ∎

№22

Самосопряженное линейное преобразование. Свойства самосопряженных преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самоспоряженного линейного преобразования.

V - пр-во со скал пр-ем

Def $\ell: V \to V$ - самосопр, если

$\ell^* = \ell$

м-ца с.с. оператора - $A = A^T$ (в Евкл)

$A = A^*$ (в эрм)

ТЛ Пусть ℓ - лин. оп-р $\ell: V \to V$

а) Если V над $\mathbb{C}$, то у ℓ $\exists$ одном. инв под-во

б) Если V над $\mathbb{R}$, то у ℓ $\exists$ либо 1-мерное либо 2-мерное инв подпр-во

Д-во

а) очевидно

б) $\chi_\ell(\lambda) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \chi_\ell(\lambda) = p_1(\lambda) p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda)$

$\deg p_i \leq 2$

По ТЛ Г-К $\chi_\ell(\ell) = 0 = p_1(\ell) \dots p_s(\ell)$

Тогда $\exists i$: $p_i(\ell)$ - вырожд

$\Rightarrow$ 1) $\deg p_i = 1$

$p_i(\ell) = a(\ell - \lambda I)$

$\exists x \neq 0 : a(\ell - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x$ с.в., λ - с.зн.

2) $\deg p_i = 2$

$p_i(\ell) = a\ell^2 + b\ell + I$

$\exists x \neq 0 \quad (a\ell^2 + b\ell + I)x = 0$

$W = \langle x, \ell(x) \rangle \overset{?}{=}$ инв-ом ℓ

$\ell(\ell(x)) = \ell^2(x) = \dfrac{a\ell^2(x)}{a} = \dfrac{-b\ell(x) - c(x)}{a}$

$\dim W \overset{?}{=} 2$

Пусть $\dim = 1 \Rightarrow \ell(x) = \lambda x$, λ – с зн ?! $\boxtimes$

Th5 (обл Th0 с.с. оп-ра)

V – евкл (эрм) пр-во

$\ell: V \to V$ с.с. $\Rightarrow$ в V $\exists$ ОНБ, в

котором ℓ диаг. с действ зн-ми на диаг.

Д-во

$\Leftarrow$ Пусть $\exists$ такой ОНБ.

Пусть $x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(\ell(x), y) = (\ell(\sum x_i e_i), \sum y_i e_i) =$

$= (\sum x_i e_i \lambda_i, \sum y_i e_i) = \sum\sum \lambda_i x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) =$

$= \sum\sum \lambda_i x_i \overline{y_j} \delta(i,j)$

$(x, \ell(y))$ ан-но

$\Rightarrow$ П-м, что все с.зн $\ell \in \mathbb{R}$ и ℓ нм.

ф-м над F

Эрм сл-й, Пусть x – с.в для ℓ

λ – с.зн. $\ell(x) = \lambda x$

$(\ell(x), x) = (x, \ell(x))$

$\lambda = \overline{\lambda}$

Евкл сл-й,

$\mathcal{E}$-ОНБ $\Rightarrow A = \bar{A}^T \Rightarrow A = \bar{A}^T$, A - эрм-ва

$\exists \mathcal{C}^n$ $\varphi \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} A \Rightarrow \varphi$ - с.с. $\Rightarrow$ л.ф. и

$\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{X}_\varphi = \mathcal{X}_A$ р-ся на лин мн-ли

$\in \mathbb{R}[x]$

Покажем, что ℓ - диаг в нек ОНБ

Инд-я по $\dim V$

База: $\dim V = 1$

$\dim V = n$

Пусть λ_1 - с зн, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

V_{λ_1} - соб подпр-во отвеч λ_1

$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_1}^{\perp}$

К $V_{\lambda_1}^{\perp}$ прим предп инд-ии

$\ell|_{V_{\lambda_1}^{\perp}}$ - с.с. $\Rightarrow \exists$ базис $e_1^{\perp}$ - ОНБ

в котором ℓ - диаг.

$\ell|_{V_1} = \lambda_1 I$ ■

Утв. Соб подпр-во самосопр оп-ра, отвечающие попарно р-м с.зн ортогональны

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$

Д-во

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$x \in V_{\lambda_1}$ $y \in V_{\lambda_2}$

$$(\ell(x), y) = (x, \ell(y))$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ (\lambda_1 x, y) & & (x, \lambda_2 y) \\ \| & & \| \\ \lambda_1 (x, y) & & \lambda_2 (x, y) \end{array}$$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$ ■

№23

Ортогональные преобразования и их свойства. Канонический вид ортогонального преобразования.

V - лин пр-во со скал произв.

$\ell: V \to V$

Опр. ℓ - ортогональный (унитарный) (эрм. сл), если $\forall x, y \in V \ (\ell(x), \ell(y)) = (x, y)$

Утв 1. ℓ - орт $\Leftrightarrow \forall x \in V \ |\ell(x)| = |x|$

Д-во.

$|x| = \sqrt{(x,x)}$. Если $\forall x, y \ (\ell(x), \ell(y)) = (x, y)$

то $(\ell(x), \ell(x)) = (x, x)$ и $|\ell(x)| = |x|$

Поскольку соотв-е между кв. ф-ми и симм. билин. ф-ми взаимооднозн, то верно и обратное ☒

Утв 2.

$\ell: V \to V$ - орт (унит). $\Leftrightarrow \ell^* = \ell^{-1}$

Д-во.

$(\ell(x), \ell(y)) = (x, y)$

$\Updownarrow$

$(x, \ell^*(\ell(y))) = (x, y) \Rightarrow \forall y \in V \ \ell^*(\ell(y)) = y$ ☒

Утв 3. ℓ - орт (унит) $\Leftrightarrow \forall$ ОНБ в V $\ell \overset{\mathcal{E}}{\Leftrightarrow} A$, где A - орт - ая

Д-во.

$\ell^* = \ell^{-1}$ (утв 2)

$A^* = \overline{A}^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^* A = E \Leftrightarrow A$ - орт (унит) ☒

Утв 4.

$l: V \to V$ – лин. оп и $\mathcal{E}$ – онб в V и $\mathcal{E}' = l(\mathcal{E})$. Тогда $\mathcal{E}'$ – онб в $V \Leftrightarrow l$ – орт.

Д-во.

$\mathcal{E}'$ – онб в $V \Leftrightarrow G(\mathcal{E}') = E$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E}A$

$G(\mathcal{E}') = A^T G(\mathcal{E}) \bar{A} = A^T \bar{A}$

$\mathcal{E}'$ – онб в $V \Leftrightarrow G(\mathcal{E}') = E \Leftrightarrow A^T \bar{A} = E \Leftrightarrow$

$A^* A = E \Leftrightarrow A^* = A^{-1} \Leftrightarrow l$ – орт (ун) ∎

Сл-е. Если l – орт (унит), то $|\det l| = 1$

Д-во.

В онб $A^* A = E \Rightarrow \overline{\det A} \cdot \det A = 1 \Rightarrow |\det A| = 1$ ∎

Сл-е. В V есть 2 онб: $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}' \Rightarrow \exists!$ орт. оп l : $\mathcal{E}' = l(\mathcal{E})$

Утв 5. Пусть l – орт (ун) оператор в V. Пусть $U \leq V$: U инв отн l. Тогда $U^\perp$ – инв отн l

Д-во.

$l|_U$ – орт (ун) оп-р в U. l – невыр $\Rightarrow l$ – сюръективный на U

$\forall x \in U \ \exists z \in U : x = l(z)$

Пусть $y \in U^\perp$

$\forall x \in U \ \exists z : l(z) = x$. $(z, y) = 0$ $(l(z), l(y)) = 0$

$(x, l(y)) = 0$ ∎

Th V - евкл. пр-во, ℓ - орт, оп-р в V

Тогда $\exists$ ОНБ ε в V, что

$$\ell_\varepsilon = \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & R_{\alpha_k} & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha_i} \text{ - блоки } 2\times 2$$

Д-во

Было д-но, что $\forall \ell$ в U $\exists$ одномерное или двумерное инв подпр-во

Пусть U - одном (если $\exists$) или двумерное

I) U - одномерное

e_1 ~ базис U, $|e_1| = 1$

$\ell(e_1) = \lambda e_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$1 = (e_1, e_1) = (\ell(e_1), \ell(e_1)) = \lambda^2 (e_1, e_1) = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

$\ell|_U = (\pm 1)$

Далее к $U^\perp$ предп инд-ии

II) U - двумерно, $\varepsilon = (e_1, e_2)$ - ОНБ

$A = \ell|_U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - орт м-ца $AA^T = E$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 1 \end{matrix} \Rightarrow$ в-ра $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ - единичны и орт-ны

Если м-ца орт-на, то в ОНБ квадрат длины каждого ст-ца - единица и столбцы попарно орт-ны

Пусть $a = \cos\alpha$ $d = \cos\beta$ $c = \sin\alpha$ $b = -\sin\beta$

$-\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta = 0 \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \beta = \alpha \pm \pi \\ \alpha = \beta \end{matrix} \right.$

Покажем, что $\beta = \alpha \pm \pi$ приводит к ?!

$\ell|_U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$b = -\sin\beta = -\sin(\alpha \pm \pi) = \sin\alpha$

$a = \cos\beta = \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tr} A = 0$, $|A| = -1$, $\chi_\rho(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ у $\chi_\rho(\lambda)$ есть действ корень $\pm 1 \Rightarrow$ у ρ есть одн инв подпр-во ?!

Тогда $\rho|_U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha$

Применим предп к $U^\perp$

№24

Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.

Т2 Пусть V - эвкл (эрм) лин пр-во

$\ell: V \to V$

Тогда $\ell = \psi \cdot \theta$, ψ - самосопр оп-р с неотр

соб. зн-ми (действ), θ - орт (унит)

Д-во

$\eta = \ell^* \cdot \ell$, η - самосопр лин оп-р.

$\eta^* = (\ell^* \ell)^* = \ell^* \ell = \eta$

$\exists$ ОНБ $\mathcal{E}$ в к-ром η диаг с действ с. зн.

$\mathcal{E}$ - первый сингулярный базис ℓ

$e_i \in \mathcal{E} \Rightarrow \eta(e_i) = \lambda_i e_i$. Покажем, что $\lambda_i \geq 0$

$(\ell(e_i), \ell(e_i)) \geq 0$

$\parallel$

$(\ell^*(\ell(e_i)), e_i) = (\eta(e_i), e_i) = (\lambda_i e_i, e_i) = \lambda_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_i \geq 0$

Пусть $f_i = \ell(e_i)$, $i = 1 \dots n$

Тогда в-ра f_i попарно орт-ны

$(f_i, f_j) = (\ell(e_i), \ell(e_j)) = (\eta(e_i), e_j) = \lambda_i \delta_{ij} \Rightarrow |f_i| = \sqrt{\lambda_i}$

Переупорядочим в-ры б-са $\mathcal{E}$, чтобы

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_k$ - ненул с. зн. $\lambda_{k+1} \dots \lambda_n$ - нулевые

Тогда $g_i = \dfrac{f_i}{|f_i|} = \dfrac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, $i = 1 \dots k$ - попарно орт и норм

Рассмотрим $\langle g_1 \dots g_k \rangle^\perp$ и в нем выберем

$g_{k+1} \dots g_n$ - ОНБ.

Тогда $G = (g_1 \dots g_n)$ - ОНБ в V - возьмем сист. базис для l

$f_i = \sqrt{\lambda_i}\, g_i \quad i = \overline{1..n}$

Есть 2 ОНБ E и g.

Пусть Θ - оп-р переводящий E в g, $\Theta(e_i) = g_i$

$\Psi(g_i) = f_i = \sqrt{\lambda_i}\, g_i$

$\Psi_g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ - диаг. вид в ОНБ g

$\Rightarrow \Psi$ - самосопр с неотр с. зн.

$l \overset{?}{=} \Psi\Theta$

$\Psi\Theta(e_i) = \Psi(g_i) = f_i = l(e_i)$ ∎

Сл-е 1.

$\exists$ р-я вида $\Theta\Psi = l$, Θ - орт, Ψ - самосопр с $\geq$ с. зн.

Д-во.

Применим Th к $l^* = \Psi\Theta \Rightarrow l = \Theta^*\Psi$ ∎

Сл-е 2.

Если l невыр и $l = \Psi\Theta$, тогда

Ψ пол опр самосопр оп-р, т.е. $(\Psi(x), x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Причем обе к-ты Ψ и Θ опр ор-но ∎

Сл-е 3.

$\dim V = 1$, V над $\mathbb{C}$

Тогда $l = re^{i\varphi}$, $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$

Note. Пусть $l = \Psi \cdot \Theta = \Theta\Psi$

Тогда $l^* l = \Psi^*\Theta^*\Theta\Psi = \Psi^*\Psi = \Psi^2 = \Psi\Theta(\Psi\Theta)^* = ll^*$

Опр. ℓ - нормальный оператор в эвм пр-ве если $\ell\ell^* = \ell^*\ell$

Утв. (б/д)

ℓ в эвм пр-ве нормален $\Leftrightarrow$ $\exists$ онб, в к-ром

ℓ прив к диаг виду

№25

Приведение квадратичной формы к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.

Т1 V – эвкл (эрм) пр-во

$q(x)$ – кв ф-ма над V

Тогда $\exists$ ОНБ $\mathcal{E}$ в V, в к-ром м-ца ф-мы q диагональна

Д-во

$f(x,y)$ – полярная к q симм бил. (1,5-лин) ф-я

$\exists \ell: f(x,y) = (\ell(x), y)$

Эвкл. сл-й

$(\ell(x), y) = f(x,y) = f(y,x) = (\ell(y), x) = (x, \ell(y)) \Rightarrow \ell$ самосопр

Эрм сл-й

$(\ell(x), y) = f(x,y) = \overline{f(y,x)} = \overline{(\ell(y), x)} = (x, \ell(y)) \Rightarrow \ell$ самосопр

$\exists$ ОНБ в к-ром ℓ имеет диаг вид

с действ с. зн. на диаг.

$A_f = A_q = \ell_{\mathcal{E}}^T$ ☒

Т1 Пусть V – действ. лин. пр-во

q_1, q_2 – две квадр ф-ии (ф-мы) над V

Причем хоть одна из них пол опр-на

Тогда $\exists$ $\mathcal{E}$ – ОНБ: q_1 и q_2 одн диаг

Д-во

Пусть q_2 – пол. опр на V $\Leftrightarrow$ $f_2(x,y)$ пол опр
симм бил ф-я

(V, f_2) – эвкл пр-во

Приведем q_1 к диаг виду. (т.к. $\exists$ ОНБ с отн f_2)

$f_2|_{\xi} \leftrightarrow E$ как гл. пр-е $\boxtimes$

Утв две отр опр кв ф-ии не всегда можно привести одн к диаг виду

Пример

$\dim V = 2$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – обе отр опр.

Пусть можно привести об-но

$\Rightarrow B_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists\ \alpha B_1' + \beta B_2'$ – вырожд

$\Rightarrow \exists\ \alpha, \beta : \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = -\alpha^2 - \beta^2 < 0$?! $\boxtimes$

№26

Унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного преобразования.

см билет № 23.

Т1 Пусть V - эрмитово, $l: V \to V$ - ун. опер

Тогда $\exists$ ОНБ $\mathcal{E}$ в V: $A_l = diag(\lambda_1 .. \lambda_n)$, $|\lambda_i| = 1$

Д-во

Инд-я по $\dim V$:

Пусть $\dim V = 1 \Rightarrow \forall x \neq 0$ $l(x) = \lambda x$, x - с.в.

$e_1 = \frac{x}{|x|}$, $|e_1| = 1$

$(e_1, e_1) = 1 = (l(e_1), l(e_1)) = (\lambda e_1, \lambda e_1) = |\lambda|^2 (e_1, e_1) = 1$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$

Пусть для пр-в V: $\dim V < n$ верно.

Д-м для $\dim V = n > 1$

$\exists U$, $\dim U = 1$, U - инв отн l и e_1 - базис в U, $|e_1| = 1$, $l(e_1) = \lambda e_1$, $|\lambda| = 1$

Поэтому $U^\perp$ инв отн l и $\dim U^\perp = n-1$

По предп в $U^\perp$ $\exists$ ОНБ $e_2 .. e_n$: $l|_{U^\perp} = diag(\lambda_2 .. \lambda_n)$

$\mathcal{E} = (e_1 .. e_n)$ - ОНБ и $A_l = diag(e_1 .. e_n)$ ■