№12

Линейные реккуренты. Общий вид линейной реккуренты над произвольным полем (случай, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).

Рассм посл-ти $a_0, a_1, \dots \quad a_i \in \mathbb{F}$

Мн-во таких посл-тей $- F^{\infty}$

Пусть $p = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \dots + p_1 x + p_0 \in F[x]$

Оп. Посл-ть $a_0, \dots, a_n$ – лин. р-та

с хар-м мн-ном p, если верно

(1) $a_{n+s} + p_{s-1}a_{n+s-1} + \dots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0, \quad p_0 \neq 0$

Р-во (1) позволяет подсчитать $n+s$-й член

посл-ти по s пред.

Утв 1. Пусть V_p – мн-во реккурент с хар мн-м

p. Тогда V_p – лин пр-во над F и $\dim V_p = \deg p = s$

Д-во

З-ть относ сложения и умножения на $\lambda \in \mathbb{F}$ очев.

$$\left.\begin{array}{l} e_0 = (\overbrace{1 \dots 0}^{s}, -p_0, \dots) \\ e_1 = (\overbrace{0 1 \dots 0}^{s}, -p_1, \dots) \\ \vdots \\ e_{s-1} = (\overbrace{0 \dots 1}^{s}, -p_{s-1}, \dots) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{базис в } V_p$$

$\boxed{\text{тм}}$

Пусть l – оп-р левого сдвига в F^{∞}

$l(a_0 \dots) = (a_1, a_2 \dots)$

Пусть $\varphi_p = l|_{V_p}$

Утв 2. V_p – ядро $p(l)$

Д-во

Пусть $b \in \operatorname{Ker} p(\ell) \iff p(\ell)(b) = 0 \iff$

$\iff (\ell^{s} + p_{s-1}\ell^{s-1} + \dots + p_1\ell + p_0)(b_n) = 0 \iff$

$\iff b_{n+s} + p_{s-1} b_{n+s-1} + \dots + p_1 b_{n+1} + p_0 b_n = 0$ (1) ☒

Сл-е, $p(\varphi_p) = 0$, т.е. p – анн. мн-н для φ_p

Утв3, (о мин мн-не для φ_p)

$\mu_{\varphi_p} = p$

Д-во,

p – анн для $\varphi_p \Rightarrow p \,\vdots\, \mu_{\varphi_p} = \mu$

Покажем, что $\deg \mu = \deg p$

Пусть $\deg \mu < \deg p$. Тогда p-ты с мн-ми p – p-ты с мн-ми $\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow V_p \subseteq V_\mu$ (т.к. $\mu(\varphi_p) = 0|_{V_p}$)

$\dim V_\mu = \deg \mu < \deg p = V_p$?! ☒

Оп, Сопутствующая матрица для p – м-ца $A_p \in M_{s \times s}(F)$,

$$A_p = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & & -p_{s-1} \end{pmatrix}}_{s} \Big\updownarrow s$$

Утв4 A_ℓ в базисе $(e_0 \dots e_{s-1})$: $A_\ell = A_p$

Д-во,

$\ell(e_0) = -p_0 e_{s-1}$; $\ell(e_1) = (e_0 - p_1 s_{-1})$

... $\boxtimes$

Утв 5. $\chi_{A_p} = \chi_{\varphi_p} = (-1)^s p$

Д-во.

$$\chi_{A_p} = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -p_0 & & & -p_{s-1}-x \end{pmatrix} = (-1)^s p(x)$$

По инд-ии.

База. $s=2$ $\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -p_0 & -p_1-x \end{vmatrix} = x^2+p_1x+p_0 = (-1)^2 p(x)$

Шаг: $M^{12\ldots s-1}_{12\ldots s-1} = (-1)^{s-1} p(x)$

Разложим по н-му ст-бу!

$\chi_{A_p}(x) = (-x)\left((-1)^{s-1}(x^{s-1}+p_{s-1}x^{s-2}+\ldots+p_1)\right) +$
$+ (-p_0)\, x^{s-1} \begin{vmatrix} 1 & & \\ -x & \ddots & \\ & -x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^s p(x)$ $\boxtimes$

Th (от Th о мин. р-х)

Пусть $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{e_i}$ – мн-н линейно факт.

Тогда $\forall$ рек-та $a_n \in V_p$ единственным обр-м пред-ся в виде $a_n = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{e_i} c_{is}\, C_n^{s-1} \lambda^{n+1-s}$, где $c_{is} \in \mathbb{F}$

Д-во.

Пусть соб. зн-ю λ_i отвечает Жорданова цепочка $b_1^{(i)} \ldots b_{e_i}^{(i)}$, где нижний индекс – высота корн. в-ра

Тогда

1) $(\ell-\lambda_i I)\, b_1^{(i)} = 0$

2) $(\ell-\lambda_i I)\, b_s^{(i)} = b_{s-1}^{(i)}$ $\forall i, \forall s$

$\Rightarrow \forall i \forall j$ $\prod\limits_{i=1}^{k} (\ell-\lambda_i I)^{e_i} = p(\ell)$ анн $b_j^{(i)} \Rightarrow b_j^{(i)} \in \operatorname{Ker} p(\ell) = V_p$

Будем строить для фикс i посл-ть

$b_1 \dots b_l$

$(\ell - \lambda I) b_1 = 0$ (1)

$(\ell - \lambda I) b_s = b_{s-1}$ $\forall s > 1$

$b_1 = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty} = (1, \lambda, \lambda^2 \dots)$ – собств в-р цепочки

$(\ell - \lambda I) b_1 = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) - (\lambda, \lambda^2 \dots) = 0$

Пусть $b_{s-1} = \{f_{s-1}(n)\lambda^n\}$

найдем $b_s = \{f_s(n)\lambda^n\}$

т.к. $b_1 = \lambda^n$, то $f_1(n) \equiv n$

$(\ell - \lambda I) b_s = f_s(n+1)\lambda^{n+1} - \lambda f_s(n)\lambda^n = f_{s-1}(n)\lambda^n$ (2)

$\lambda \neq 0$, т.к. $p_0 \neq 0$

$f_s(n+1) - f_s(n) = \frac{f_{s-1}(n)}{\lambda}$ (3)

(3) при $\lambda = 1$

$f_s(n+1) = f_s(n) + f_{s-1}(n)$

$C_{n+1}^{s-1} = C_n^{s-1} + C_n^{s-2}$

Легко видеть, что $f_s(n) = C_n^{s-1}$

В общем сл-е ищем реш-е (3)

$f_s(n) = C_n^{s-1}\lambda^{\alpha(s)}$ $(\alpha(1) = 0)$

(3): $C_{n+1}^{s-1}\cdot\lambda^{\alpha(s)} - C_n^{s-1}\lambda^{\alpha(s)} = C_n^{s-2}\lambda^{\alpha(s-1)-1}$

$\alpha(s) = \alpha(s-1) - 1 \Rightarrow \alpha(2) = -1, \alpha(3) = -2$

$\alpha(s) = 1 - s$

$\Rightarrow f_s(n) = C_n^{s-1}\lambda^{1-s}$ и $b_s = C_n^{s-1}\lambda^{n+1-s}$ ■