№18 P1	Евклидово и эрмитово пр-во. Выр. скал пр-я в коорд. Матрица Грама с-мы в-ров и ее св-ва. Нер-во Коши-Буня.

Def. Евклид пр-м над $\mathbb{R}$ наз-ся лин. пр-во над $\mathbb{R}$ с опр на нем полож. опр. симм билин ф-ей — скал пр-ем

$(x, y) = g(x, y)$

Def. (1,5-лин ф-я)

Пусть V — лин пр-во над $\mathbb{C}$

ф-я $g: V \times V \to \mathbb{C}$ наз-ся 1,5-линейной, если

1. $g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
3. $g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2)$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $g(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$

Утв 1. Пусть g — 1,5 лин ф-я в пр-ве V

ε-базис в V, $x \underset{\varepsilon}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \underset{\varepsilon}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Тогда $g(x, y) = x^T A \overline{y}$

Утв 2. Пусть в V выбрано два базиса $\varepsilon, \mathcal{B}$

$S = S_{\varepsilon \to \mathcal{B}}$ Тогда если $g \underset{\varepsilon}{\leftrightarrow} A$

$g \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} B$

$B = S^T A \overline{S}$

Def. 1,5 лин ф-я наз-ся эрмитовой, если

$\forall x, y \in V \hookrightarrow g(x, y) = \overline{g(y, x)}$

Def. Эрмитовым пр-м наз-ся лин пр-во над $\mathbb{C}$, на котором определена эрмитова 1,5 лин ф-я $(\cdot, \cdot)$ — ск. пр. е

Def. Пусть V — пр-во со скал пр-ем

Пусть $a_1, a_2 \ldots a_k \in V$

Тогда матр Грама с-мы $a_1 \ldots a_k$ наз-ся м-ца

$G(a_1 \ldots a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \ldots \\ \vdots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}$

Th (о св-х м-цы Г)

а) $\det G(a_1 \dots a_k) \geq 0$

б) $\det (a_1 \dots a_k) = 0 \iff a_1 \dots a_k$ ЛЗ

Д-во)

Пусть $a_1 \dots a_k$ ЛЗ

б.о.о. $a_k = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{k-1} a_{k-1}$

умножим строку i на λ_i и вычтем из посл все

$\Rightarrow$ нижняя строка будет $(0 \dots 0) \Rightarrow \det G = 0$

Пусть $a_1 \dots a_k$ – ЛНЗ

$U = \langle a_1 \dots a_k \rangle$ $a_1 \dots a_k$ базис $U \subseteq U$

$x, y \in U$

$(x, y) = x^T G \bar{y}$

$(x, x) = x^T G \bar{x}$

$\Rightarrow G$ – м-ца скал пр-я на U

$\Rightarrow G$ пол опр $\Rightarrow \det G > 0$ ■

Сл-е) $\dim V = n$ $G(a_1 \dots a_n)$ пол опр $\iff a_1 \dots a_n$ – базис.

Th (нер-во Коши-Буняковского)

Пусть V – пр-во со скал пр-ем

$\forall x, y \in V \hookrightarrow |(x,y)^2| \leq (x,x)(y,y)$

Д-во)

Если $x = 0$ или $y = 0$, то н-во очев.

Пусть x и y пропорц. $y = \lambda x$

$|(x,y)|^2 = |(x, \lambda x)|^2 = |\lambda|^2 |(x,x)|^2 = |\lambda|^2 (x,x)^2$

$(x,x)(y,y) = (x,x)(\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x,x)^2 = |\lambda|^2 (x,x)^2$

Пусть x и y не проп $\Rightarrow x, y$ ЛНЗ

$\det \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix} > 0$ ■