№13 р.1	Билинейные ф-ии. Коорд. з-сь бил. ф-ии. Матрица бил ф-ии и её изм при замене б-са. Орт доп-е к подпр-ву отн симм (кососим.) бил ф-ии и его св-ва

V - лин. пр-во над F

Опр. Бил. формой на V наз-ся ф-я

$f(x, y)$ $(x, y) \in V \times V$ со зн. в F:

F лин по каждому ар-ту

Утв1. Пусть $f(x, y)$ - бил ф-я на V, $\dim V = n$

Пусть $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ - базис в V.

$x \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$f(x, y) = x^T A y = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$, где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$

Д-во

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ $y = \sum_{j=1}^n x_j e_j$

$f(x, y) = f(\sum, \sum) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j)$ ■

Опр. Двойная сумма $(1) = x^T A y$ назыв. бил. ф-ей от координат векторов x, y.

A - м-ца бил ф-мы

Утв2. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы V.

$S = S_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, т.е. $\mathcal{E}' = \mathcal{E} S$

Тогда $f \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} A \Rightarrow f \underset{\mathcal{E}'}{\longleftrightarrow} S^T A S$

Д-во

$f(x, y) = x^T A y$

$f(x, y) = (x')^T A y' = (Sx)^T A S y = x^T (S^T A S) y$ ■

Опр. Бил. ф-я наз-ся симм.,

если $\forall x, y \in V \hookrightarrow f(x, y) = f(y, x)$

Опр. Бил ф-я наз-ся кососим, если

а) $f(x, y) = -f(y, x)$

б) $f(x, x) = 0$ $\forall x \in V$

Note. б) $\Rightarrow$ а)

$B^+(V)$ – пр-во симм бил ф-й

$B^-(V)$ – пр-во кососимм бил ф-й

Def Пусть $U \leq V$. Орт. доп к U отн f наз-ся $U^\perp = \{ y \in V \mid f(x,y) = 0, \forall x \in U \}$

Утв $f \in B^\pm(V)$, char $F \neq 2$

Тогда $\forall U \leq V$, $U^\perp \leq V$, причем

$\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$.

Более того, если f невырожд на U, то имеет место р-во

$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

Д-во

а) $y \in U^\perp \Leftrightarrow \forall x \in U \hookrightarrow f(x,y) = 0$ (1)

Пусть $(e_1 \dots e_k)$ – базис U

$(e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$ – базис V

(1) $\Leftrightarrow f(e_i, y) = 0 \ \forall i = 1 \dots k$

$$(2) \begin{cases} \overset{k}{\overline{1, 0 \dots 0}}\ 0 \dots 0 \ Ay = 0 \\ \dots \\ \overset{k}{\overline{0 \dots 1}}\ 0 \dots 0 \ Ay = 0 \end{cases}$$

Умножение e_i на A „выдает" из A i-ю строку

$\underset{\sim}{A} = A$, в которой оставили k верхн строк

(2) $\Leftrightarrow \underset{\sim}{A}\, y = 0$

$\dim U^\perp = \dim V - \operatorname{rk} \overset{\leq k}{\underset{\sim}{A}} \geq \dim V - k = \dim V - \dim U$

б) Пусть $f|_U$ невыр.

$M^{1 \dots k}_{1 \dots k} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A = k \Rightarrow$ р-во в-но $\boxed{\text{Д}}$

Def Пусть $f \in B^\pm$. Подпр-во U невыр от-но f, если сужение $f|_U$ – невыр. ф-я

Утв $V = U \oplus U^\perp \Leftrightarrow U$ не вырожд относ. f

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть $V = U \oplus U^\perp$ и $f|_U$ – вырожд бил ф-я

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f|_U \neq \{0\} \Rightarrow \exists y \neq 0 : y \in \operatorname{Ker} f|_U.\ \forall x \in U \hookrightarrow f(x,y) = 0 \Rightarrow y \in U^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in U \cap U^\perp$?!

w13 p.2

$\Leftarrow$: Пусть $f|_U$ невырожд.

$\Rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$ (иначе $\operatorname{Ker} f|_U \neq \{0\}$)

Покажем, что $V = U + U^\perp$

$\dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) \geq$

$\dim(U + U^\perp) =$ $\quad$ $U + U^\perp = V$ $\blacksquare$

$\geq \dim U + \dim V - \dim U = \dim V \Rightarrow U + U^\perp = V$