№22

Самосопряженное линейное преобразование. Свойства самосопряженных преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самоспоряженного линейного преобразования.

$V$ - пр-во со скал пр-ем

**Def.** $\varphi: V \to V$ - самосопр, если

$\varphi^* = \varphi$

м-ца с.с. оператора - $A = A^T$ (в Евкл)

$A = A^*$ (в эрм)

**Тh** Пусть $\varphi$ - лин. оп-р $\varphi: V \to V$

а) Если $V$ над $\mathbb{C}$, то у $\varphi$ $\exists$ одном. инв под-во

б) Если $V$ над $\mathbb{R}$, то у $\varphi$ $\exists$ либо 1-мерное либо 2-мерное инв подпр-во

**Д-во.**

а) очевидно

б) $\chi_\varphi(\lambda) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda) p_2(\lambda) \cdots p_s(\lambda)$

$\deg p_i \leq 2$

По Тh Г-К $\chi_\varphi(\varphi) = 0 = p_1(\varphi) \cdots p_s(\varphi)$

Тогда $\exists i$ : $p_i(\varphi)$ - вырожд

$\Rightarrow$ 1) $\deg p_i = 1$

$p_i(\varphi) = a(\varphi - \lambda I)$

$\exists x \neq 0 : a(\varphi - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x$ с.в., $\lambda$ - с.зн.

2) $\deg p_i = 2$

$p_i(\varphi) = a\varphi^2 + b\varphi + I$

$\exists x \neq 0 \quad (a\varphi^2 + b\varphi + I)x = 0$

$W = \langle x, \varphi(x) \rangle \stackrel{?}{-}$ инв отн $\varphi$

$\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x) = \frac{a\varphi^2(x)}{a} = \frac{-b\varphi(x) - c(x)}{a}$

$\dim W \stackrel{?}{=} 2$

Пусть $\dim = 1 \Rightarrow \varphi(x) = \lambda x$, $\lambda$ – с зн ?!

**Th5** (осн Th о с.с. оп-х)

$V$ - евкл (эрм) пр-во

$\varphi: V \to V$ с.с. $\Rightarrow$ в $V$ $\exists$ ОНБ, в

котором $\varphi$ диаг. с действ зн-ми на диаг.

**Д-во**

$\Leftarrow$ Пусть $\exists$ такой ОНБ.

Пусть $x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(\varphi(x), y) = (\varphi(\sum x_i e_i), \sum y_i e_i) =$

$= (\sum x_i e_i \lambda_i, \sum y_i e_i) = \sum\sum \lambda_i x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) =$

$= \sum\sum \lambda_i x_i \overline{y_j} \delta(i, j)$

$(x, \varphi(y))$ ан-но

$\Rightarrow$ Д-м, что все с. зн $\varphi \in \mathbb{R}$ и $\varphi$ инв.

ф-м над $F$

Эрм сл-й, Пусть $x$ – с.в для $\varphi$

$\lambda$ – с. зн. $\varphi(x) = \lambda x$

$(\varphi(x), x) = (x, \varphi(x))$

$\lambda = \overline{\lambda}$

Евкл сл-й,

?

$\varepsilon$-ОНБ $\Rightarrow A = \bar{A}^T \Rightarrow A = \bar{A}^T$, $A$ - эрмит-ва

В $\mathbb{C}^n$ $\varphi \underset{\varepsilon}{\longleftrightarrow} A \Rightarrow \varphi$ - с.с. $\Rightarrow$ 1-л. факт и

$\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \hookrightarrow \chi_\varphi = \chi_A$ р-ся на лин мн-ли

$\in \mathbb{R}[x]$

Покажем, что $\varphi$ - диаг в нек ОНБ

Инд-я по $\dim V$

База: $\dim V = 1$

$\dim V = n$

Пусть $\lambda_1$ - с зн, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_1}$ - соб подпр-во отвеч $\lambda_1$

$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_1}^\perp$

К $V_{\lambda_1}^\perp$ прим предп инд-ии

$\varphi|_{V_{\lambda_1}^\perp}$ - с.с. $\Rightarrow \exists$ базис $e_1^\perp$ - ОНБ

в котором $\varphi$ - диаг.

$\varphi|_{V_1} = \lambda_1 I$ ☒

**Утв.** Соб подпр-во самосопр оп-ра, отвечающие попарно р-м с. зн ортогональны

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$

**Д-во**

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$x \in V_{\lambda_1}$, $y \in V_{\lambda_2}$

$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

$$(\varphi(x), y) = (\lambda_1 x, y) = \lambda_1 (x, y)$$

$$(x, \varphi(y)) = (x, \lambda_2 y) = \bar{\lambda}_2 (x, y)$$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$ ☒