№15 р1	Индексы инерции кв формы в действ лин. пр-ве. З-н инерции

V — лин пр-во над $\mathbb{R}$

Def. кв ф-я $q(x)$ на V наз-ся положительно (отриц.) опр-й, если $\forall x\ x \neq 0 \Rightarrow q(x) > 0$ ($q(x) < 0$)

Def. кв ф-я q на V наз-ся полож (отр) полуопр, если $\forall x \in V \Rightarrow q(x) \geq 0$ ($q(x) \leq 0$)

Пусть q — кв ф-я в канон базисе $\mathcal{E}$

$q(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2$, $p + q = \operatorname{rk} q$

Def. Тогда p — полож, q — отр индекс инерции q в базисе $\mathcal{E}$

Th (З-н инерции в $\mathbb{R}$)

Пусть q — кв ф-я в V над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$

$\mathcal{E}$ — канон б-с

p и q — ин. инерции

Тогда:

а) $p = \max\{\dim U \mid U \leq V,\ q|_U \text{ — пол опр}\}$

б) $q = \max\{\dim U \mid U \leq V,\ q|_U \text{ — отр опр}\}$

в) Инд-сы ~~[illegible]~~ ин-ии не зависят от выбора $\mathcal{E}$

Д-во.

а) В $\mathcal{E}$ имеем $q(x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2$

$U_0 = \langle e_1, \ldots e_p \rangle$ $W_0 = \langle e_{p+1} \ldots e_n \rangle$

$\dim U_0 = p$ $\dim W_0 = n - p$

$q|_{U_0}$ — пол опр

Пусть $k = \max\{\dim U \mid U \leq V \text{ и } q|_U \text{ пол опр}\}$

$k \geq p$ (очевидно)

Пусть $k > p$. $\Rightarrow \exists U : q|_U$ пол опр и $k = \dim U > p$

$\dim(U \cap W_0) = \dim U + \dim W_0 - \dim(U + W_0) =$

$= k + n - p - \dim(U + W_0) \geq k + n - p - n \geq k - p \geq 1$

Тогда $\exists\ z \neq 0 : z \in U \cap W_0$.

Но $q(z) \leq 0$?!

б) аналогично

в) сл-е а) и б) ■

Сл-е, $B \in M_n(\mathbb{R})$ пол опр-на $\Leftrightarrow$ найдется нев $A \in M_n(\mathbb{R})$: $B = A^T \cdot A$

Д-во,

$\Rightarrow$, Пусть B пол опр $\Rightarrow$ $\exists$ кв ф-я q, для которой B – ее м-ца.

Тогда если S – м-ца пер-да к канон б-су для q

$E = S^T B S$

$B = (S^T)^{-1} \cdot S^{-1}$

$\Leftarrow$, $B = A^T \cdot A$, A нев.

$B^T = (A^T A)^T = A^T \cdot A = B \Rightarrow B$ – сим.

Пусть q – кв ф-я м-цы B.

Пусть $S = A^{-1}$ – переход к б-су

$B' = S^T B S = (A^{-1})^T A^T \cdot A \cdot A^{-1} = E$ ■