№ 2 P. 1	Неприводимость многочленов. ОТА для многочленов.

Def. Мн-н $f \in F[x]$, F-поле, $\deg f > 0$ наз-ся неприводимым над F если из условия $f = a \cdot b$, $a, b \in F[x] \Rightarrow \deg a = 0$ или $\deg b = 0$

Note. $A \mid P$, P неприводим $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A \sim 1 \\ A \sim P \end{array}\right.$

Note. $\forall B \in F[x]$, P-непр над $F \Rightarrow$ НОД$(P, B) = \{1, P$

Утв. Пусть P - неприводим над F

$P, B, C \in F[x]$

Пусть $B \cdot C \,\vdots\, P \Rightarrow B \,\vdots\, P$ или $C \,\vdots\, P$

Д-во. (от противного)

Пусть $B \not\vdots\, P$ и $C \not\vdots\, P$

$\Rightarrow$ НОД$(P, B) = 1$, НОД$(P, C) = 1$

$\Rightarrow \exists\, u_1, v_1, u_2, v_2$:

$1 = u_1 \cdot P + v_1 \cdot B$

$1 = u_2 \cdot P + v_2 C$

$$1 = (u_1 P + v_1 B)(u_2 \cdot P + v_2 C) = \underbrace{(u_1 u_2 P + u_1 v_2 C + v_1 u_2 B) P}_{\vdots P} + \underbrace{v_1 \cdot v_2 \cdot B \cdot C}_{\vdots P} \Rightarrow 1 \,\vdots\, P \ ?! \ \boxtimes$$

Th (Основная Th арифметики в кольце мн-в над F)

Пусть $A \in F[x]$, $A \neq 0$. Тогда $\exists \alpha \in F^*$ и неприв. $p_1 \cdots p_n$: $A = \alpha p_1 \cdots p_n$

Более того, если

$A = \alpha p_1 \cdots p_n = \beta \cdot q_1 \cdots q_m$, то $m = n$ и $\exists\, \sigma \in S_n$: $p_i \sim q_{\sigma(i)}$

Д-во.

a) Если $\deg A = 0$ $A = \alpha \in F^*$ д-но

б) Пусть $\deg A \geq 1$. Д-м инд-ей.

Если A - неприв. над F, то $A = P$ д-но

Если A - прив, то $A = B \cdot C$, где $\deg B < \deg A$

$\deg C < \deg A$

Тогда для B и C вып-ся предп. инд-ии

в) Д-м единственность

$\alpha P_1 P_2 \ldots P_n = \beta Q_1 \ldots Q_m$

Д-во инд-ей по n

$\beta Q_1 \ldots Q_m \vdots P_n \Rightarrow \exists j : Q_j \vdots P_n$

$\Rightarrow \exists \gamma \in F^* : Q_j = \gamma P_n$

$\alpha P_1 P_2 \ldots P_n = \beta \gamma Q_1 \ldots \widehat{Q_j} \ldots Q_m \cdot P_n$

$\alpha P_1 P_2 \ldots P_{n-1} = \beta \gamma Q_1 \ldots \widehat{Q_j} \ldots Q_m$

Т.е. мн-н слева р-ся в пр-е n-1 мн-на

$\Rightarrow$ к нему применимо предп. инд-ии ☒