№19

Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Существование ортонормированного базиса в пространстве скалярным произведением. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряженного к нему

Def Два вектора называются **орт-ми**, если их ск-е пр-е равно 0

Сис-ма в-ров орт-на $\Leftrightarrow (a_i, a_j) = 0, i \neq j$

С-ма в-ров ортонорм $\Leftrightarrow (a_i, a_j) = \delta_{ij}$

Утв Пусть подпр-ва $U_1 \dots U_k$ – ор-я с-ма. Тогда $U_1 + \dots + U_k$ – прямая

Д-во

$U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U}_i + \dots + U_k) \overset{?}{=} \{\bar{0}\}$

Пусть $\exists x_i \in U_i \cap (U_1 + \dots + \hat{U}_i + \dots + U_k)$

$(x_i, x_i) = (x_i, x_1 + \dots + \hat{x}_i + \dots + x_k) = 0$?!

Сл-е $a_1 \dots a_k$ – орт. с-ма ненул в-ров

$\Rightarrow a_1 \dots a_k$ – ЛНЗ

Def. базис $\mathcal{E}$ в пр-ве V со скал пр-ем $(,)$ наз-ся **ортог** (**ортонорм**), если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$
$(=\delta_{ij})$

Утв. Пусть V - пр-во со ск. пр-ем. Тогда в V $\exists$ ОНБ.

Д-во.

Скал пр-е явл-ся симм. пол опр (эрмитовой 1,5 лин) ф-ей и может быть приведена к канон. виду $\boxtimes$

Def. матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ наз-ся **ортог**, если $A^T A = E$

Def. матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ наз-ся **унитарной**, если $\overline{A}^T \cdot A = E$

Утв. Пусть V - пр-во со скаляр. пр-ем. $\mathcal{E}$ - ОНБ в V.

Тогда f - ОНБ в V $\Leftrightarrow$ $S = S_{e\to f}$ ортог. (унит)

Д-во.

$G(e_1 \ldots e_n) = E$

В базисе f

$E = G(f_1 \ldots f_n) = S^T G(e) \overline{S} = S^T \cdot \overline{S}$

$\Leftrightarrow S^* S = E \Leftrightarrow S$ унит $\boxtimes$

Сл-е. Мн-во всех ортог. м-ц $GL_n(\mathbb{R})$ (всех унит $GL_n(\mathbb{C})$) явл-ся подгруппой $GL_n(\mathbb{R})$ ($GL_n(\mathbb{C})$)

Д-во

A, B - унит $\Rightarrow$ $A \cdot B$ унит

A^{-1} унит

(как переход от ОНБ к ОНБ) ☒

Def Пусть V_1, V_2 - два евклидова (эрм) пр-ва. Отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ наз-ся **изоморфизмом**, если: а) φ - изоморфизм $V_1 \to V_2$ (лин пр-в)

б) φ сохр скал пр-е

T2 Пусть V_1 и V_2 - два евкл (эрмит) пр-ва. Тогда $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Д-во

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V_1 = \dim V_2$

Выберем $\forall$ ОНБ $\mathcal{E}$ в V_1 и f в V_2

Пусть $\varphi: V_1 \to V_2$: $\varphi(e_i) = f_i$

Тогда $\exists!$ лин. от с т-ми св-ми

$x = \sum x_i e_i$

$\varphi(x) = \sum x_i f_i$

а в-ся (д-по для лин. пр-в)

Покажем, что φ сохр пр-е

$x \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y \underset{\mathcal{E}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(x, y) = x^T \bar{y}$

$\varphi(x) \underset{f}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\varphi(y) \underset{f}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(f_1(x), f(y)) = (x, y)$ $\square$

Пусть V - евкл пр-во, V^* - сопр

Утв. Соотв-е $y \to f_y(x) = (x, y)$ явл-ся **изоморфизмом** V на V^*

Д-во.

$$y_1 + y_2 \to f_{y_1+y_2}(x) = (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$$
$$= f_{y_1}(x) + f_{y_2}(x)$$

λy аналогично

Проверим биективность

$\dim V = \dim V^*$

$\operatorname{Ker} \overset{?}{=} \{\bar{0}\}$

$V \ni y \mapsto f_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0 \ \forall x \in V \Rightarrow y = 0$ $\square$