№20

Ортогональное дополнение к подпространству. Задача об ортогонализации проекции и ортогональной составляющей. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Объем параллелепипеда.

см билет 13.

**Def** Пусть $U \leq V$

$U^\perp = \{ y \in V \mid (x, y) = 0 \ \forall x \in U \}$

**Утв** Пусть $\psi: V \to V^*$ - кан. и-м

Пусть $U \leq V$

Тогда $U^\perp = \psi(U^0)$, $U^0$ - аннулятор в $V^*$

**Д-во**

$y \in U^\perp \Leftrightarrow \forall x \in U \ (x, y) = 0 \Leftrightarrow f_y(x) = 0 \ \forall x \in U$

$\Leftrightarrow f_y \in U^0 \Leftrightarrow y \in \psi(U^0)$ ∎

**Сл-е** (о св-х орт доп)

Пусть $U \leq V$ ($V$ - евклид)

Тогда а) $(U^\perp)^\perp = U$

б) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

в) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

**Д-во**

а) $U \overset{?}{\leq} (U^\perp)^\perp$

$x \in U \Rightarrow (x, y) = 0 \ \forall y \in U^\perp \Rightarrow x \in (U^\perp)^\perp$

$V = U \oplus U^\perp \Rightarrow \dim U^\perp = \dim V - \dim U$

$\dim (U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - \dim V$

$+ \dim U = \dim U$

б) $(U+W)^{\perp} = \psi((U+W)^0) = \psi(U^0 \cap W^0) =$
$= \psi(U^0) \cap \psi(W^0) = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

в) аналогично $\blacksquare$

Note $V = U \oplus U^{\perp}$
$\Rightarrow x = \tilde{x} + x^0$

$\tilde{x} = pr_U x$
$\overset{\circ}{x} = ort_U x$

Задача об орт. пр-ии и орт сост состоит в поиске $\tilde{x}$ и $\overset{\circ}{x}$

1 случай

В $U$ - ОНБ в $U^{\perp}$ - ОНБ $\dim U = k$

$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \Rightarrow x^0 = x - \tilde{x}$

2 случай

В $U$ - орт базис, в $U^{\perp}$ - орт б-с

$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - ОНБ $e_i' = \frac{e_i}{|e_i|}$

$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i') e_i' = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \frac{1}{(e_i, e_i)}$

3 случай В $U$ - $\forall$ базис, в $U^{\perp}$ - $\forall$ б-с

$U \ni \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$U^{\perp} \ni x^0 = x - \tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$$\begin{cases} (\overset{\circ}{x}, e_1) = 0 & (x, e_1) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i, e_1) = 0 \\ \quad \vdots \\ (\overset{\circ}{x}, e_k) = 0 & (x, e_k) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i, e_k) = 0 \end{cases}$$

## T2 (Грам-Шмидт)

Пусть $\mathcal{E}=(e_1 \dots e_k)$ – ∀ базис $V$

Тогда ∃ орт базис $f$ в $V$ т.ч.

$\forall k \quad \langle e_1 \dots e_k \rangle = \langle f_1 \dots f_k \rangle \; (k=\overline{1..n})$

и $S: e \to f$ унитреуг $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

**Д-во**

1) База $f_1 = e_1$

2) Предп инд-ии: $f_1 \dots f_{k-1}$: $\begin{cases} (f_i, f_j) = 0, \; i \neq j \\ \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle = \langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle \end{cases}$

Пусть $f_k = \mathrm{ort}_{\langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle} e_k \Rightarrow f_k \perp f_i, \; i<k$

а) $f_k \overset{?}{\neq} 0$

$\mathrm{ort}_{\langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle} e_k = \bar{0} \iff \mathrm{ort}_{\langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle} e_k = 0 \Rightarrow (e_1 \dots e_{k-1})$ – ЛЗ?!

б) $\langle e_1 \dots e_k \rangle \overset{?}{=} \langle f_1 \dots f_k \rangle$

$f_k = \overset{\circ}{e}_k = e_k - \tilde{e}_k, \; \tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle$

$\Rightarrow e_k = f_k + \tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_k \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathcal{E} \rangle \subset \langle f \rangle$

$\tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle = \langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle$

$f_k = e_k - \tilde{e}_k \in \langle e_1 \dots e_k \rangle \Rightarrow \langle f_1 \dots f_k \rangle \subseteq \langle e_1 \dots e_k \rangle$

$f_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i \; (\tilde{e}_k \in \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle) =$

$f_1 \dots f_{k-1}$ – орт базис $\langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle = \langle f_1 \dots f_{k-1} \rangle$

$= e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i, \; k \geq 2$ (ф-ла Г-Ш) в/ Покажем, что $S$ — унитарн.

$f_k = e_k + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1}$ ☒

**Сл-е 1,** Пусть $U \leq V$

Тогда $\forall$ ортн б-с $U$ можно доп-ть до б-са $V$

**Д-во,**

$\langle e_1 \dots e_k \rangle$ $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$

дополним до $(e_1 \dots e_n)$ — б-с $V$

Построим $(f_{k+1} \dots f_n)$ ☒

**Сл-е 2,**

$U \leq V$, ОНБ в $U$ можно доп-ть до ОНБ в $V$

**Def,** $U \leq V$, Тогда р-е от $x$ до $U$

$$\rho(x, U) = \inf_{u \in U} |x - u|$$

**Утв,** $\rho(x, U) = |\mathrm{ort}_U x| = |\mathring{x}|$

**Д-во,**

$$|x - u| \geq |(x - u)^{\circ}| = |\mathring{x} - \mathring{u}| = |\mathring{x}|$$ ☒

**Def,** $V$ — евкл пр-во, $x_1 \dots x_k \in V$

$V_k(x_1 \dots x_k)$ — опр-ся инд-вно

$V_1(x_1) = |x_1|$

$$V_k(x_1 \dots x_k) \overset{def}{=} V_{k-1}(x_1 \dots x_k)\, \rho(x_k, \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle)$$

**Note**, $V_k(x_1 \dots x_k) = 0 \Leftrightarrow x_i^\circ = 0$ для нек $i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_i \in \langle x_1 \dots x_{i-1} \rangle \Leftrightarrow$ с-ма ЛЗ

**Th** (объем сч-ся от Грама)

$$V_k^2(x_1 \dots x_k) = |G(x_1 \dots x_k)|$$

**Д-во**,

1) Если $x_1 \dots x_k$ ЛЗ р-во верно

2) Пусть $x_1 \dots x_k$ ЛНЗ

$(x_1 \dots x_k) \xrightarrow{\text{Th Г-Ш}} (y_1 \dots y_k) : (y_i, y_j) = 0 \ i \neq j$

$(y_1 \dots y_k) = (x_1 \dots x_k) S$, $S$ - унитреуг $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$G(y_1 \dots y_k) = S^T G(x_1 \dots x_k) S$

$\det G(y_1 \dots y_k) = \det(G(x_1 \dots x_k))$

Инд-я по $k$

$V_k^2(y_1 \dots y_k) \overset{?}{=} V_k^2(x_1 \dots x_k)$

$k=1$ $\quad |y_1|^2 = |x_1|^2$ – верно

$k$, Пусть $V_{k-1}(y_1 \dots y_{k-1}) = V_{k-1}(x_1 \dots x_{k-1})$

$V_k(y_1 \dots y_k) = V_{k-1}(y_1 \dots y_{k-1}) \rho(y_k, \langle y_1 \dots y_{k-1} \rangle) =$

$= V_{k-1}(x_1 \dots x_{k-1}) \rho(x_k - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle) =$

$= V_{k-1}(x_1 \dots x_{k-1}) \rho(x_k, \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle) = V_k(x_1 \dots x_k)$

3) д-во для $y_1 \dots y_k$

$V_k^2(y_1 \dots y_k) = V_{k-1}^2(y_1 \dots y_{k-1}) \underbrace{\rho^2(y_k, \langle y_1 \dots y_{k-1} \rangle)}_{= |y_k^\circ|^2} =$

$= V_{k-1}^2(y_1 \dots y_{k-1}) |y_k|^2 = \prod_{i=1}^{k} |y_i|^2 = \det \begin{pmatrix} (y_1, y_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (y_k, y_k) \end{pmatrix} = \det G(y_1 \dots y_k)$

∎

**Сл-е.** Пусть $V$ - пр-во со скал пр-ем

$E=(e_1, \dots e_n)$ - базис $V$

Пусть $(x_1 \dots x_n)=(e_1 \dots e_n)S$

Тогда $V_n(x_1 \dots x_n) = |\det S| \, V(e_1 \dots e_n)$

**Д-во.**

$$\det G(x_1 \dots x_n) = \det(S^T G(e_1 \dots e_n)\overline{S}) = |\det S|^2 \det G(e) \quad \blacksquare$$

**Сл-е 2.**

Пусть $U \leq V$, $V$ - пр-во со ск. пр-ем

В $U$ зад б-с $\langle e_1 \dots e_k \rangle$

Тогда $$\rho(x, U) = \sqrt{\frac{G(x, e_1 \dots e_k)}{G(e_1 \dots e_k)}}$$

**Д-во.**

$$\rho(x, U) = \frac{V(x, e_1 \dots e_k)}{V(e_1 \dots e_k)} \quad \blacksquare$$