№11 р1	Аннулирующий и минимальный мн-н линейного оп-ра. Связь минимального мн-на с ЖНФ.
См билет 8.	

Утв. Пусть μ – мин. мн-н опер-ра φ

P – произв-й анн мн-н

Тогда $P \vdots \mu$

Д-во.

$P = Q \cdot \mu + R$

Пусть $R \neq 0$

$\Rightarrow \deg R < \deg \mu \Rightarrow R(\varphi) = 0$?! $\blacksquare$

Утв. Пусть $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$

Пр-ва V_i инв-ны относ φ

Пусть $\psi_i = \varphi|_{V_i}$. Тогда $\mu_\varphi \vdots \mu_{\psi_i}$ $\forall i = 1..k$.

Д-во.

$\mu_\varphi = 0$

$\mu_\varphi(\varphi)|_{V_i} = \mu_\varphi(\psi_i) = 0 \Rightarrow \mu_\varphi$ – анн мн-н для

оп-ра $\psi_i \Rightarrow \mu_\varphi \vdots \mu_{\psi_i}$ $\blacksquare$

Утв. Пусть $J_k(\lambda)$ – жорд клетка пор-ка k, отвеч соб. зн λ.

Тогда ее мин мн-н $(x-\lambda)^k$

Д-во.

$$\chi = \begin{vmatrix} \lambda - x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda - x \end{vmatrix} = (\lambda - x)^k$$

$\Rightarrow d(x) = (x-\lambda)^m,\ m \le k$

Если $m < k$, то $(\varphi - \lambda I)^m \neq 0$

$\Rightarrow (x-\lambda)^m$ – не анн $\blacksquare$

Т. Пусть $\varphi: V \to V$ лин. грамм λ. оп-р

Тогда его min мн-н имеет вид:

$\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{l_i}$, где $\lambda_1 .. \lambda_k$ – попарно разл-е соб зн-я

оп-ра φ. l_i – макс. пор-к ЖК, отвеч соб. зн λ_i

Д-во

$V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$

на подпр-ве V^{λ_i} ℓ имеет вид $\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_i)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{m_\ell}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$

$\mu_{\varphi_i} = \text{НОК}\left((x-\lambda_i)^{m_1} \dots (x-\lambda_i)^{m_\ell}\right) =$

$= (x-\lambda_i)^{\ell_i}$

Т.к. для р-х корн. пр-в мн-ны вида

$(x-\lambda_i)^{\ell_i}$ попарно вз-но просты $\Rightarrow$ НОК = пр-ю ■