№7 P1	Приведение матрицы преобр-я к Δ виду. Th Г-К

$\varphi: V \to V$ над F

Утв 1. След усл-я экв-ны

а) U инв относ φ

б) $\exists \lambda \in F$: U инв относ $\varphi - \lambda I$

в) $\forall \lambda \in F$ U инв отно $\varphi - \lambda I$

Д-во.

а) => в) $\forall x \in U \hookrightarrow \varphi(x) \in U$

$x \in U$ $(\varphi - \lambda I)(x) = \varphi(x) - \lambda x \in U$

в) => б) очевидно

б) => а) $\forall x \in U \hookrightarrow (\varphi - \lambda I)x \in U$

$\varphi = (\varphi - \lambda I) + \lambda I$

$\varphi(x) = (\varphi - \lambda I)x + \lambda x \in U$ ▨

Утв 2.

Пусть φ – л. факт л.о. в V, $\dim V = n$

Тогда найдется $(n-1)$-мерное подпр-во в V, инв относ φ

Д-во.

$\chi_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - x)(\lambda_n - x)$, $\lambda_n \in F$, λ_n – с. зн. φ

$(\varphi - \lambda_n I)V_{\lambda_n} = \{0\}$

$\dim \operatorname{Ker}(\overset{*}{\mathring{\varphi}} - \lambda_n I) \geq 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda_n I) \leq n-1$

Пусть U – $\forall$ подпр.-во : $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda_n I) \subseteq U$

n-мн(n-1)

Покажем, что построенное подпр-во U инв отн φ

Пусть $x \in U$

$(\varphi - \lambda_n I)x \in \operatorname{Im}(\varphi - \lambda_n I) \subseteq U$

Т.е. U инв относ $(\varphi - \lambda_n I) \Rightarrow U$ инв отн φ по Утв 1 ▨

Th4 Всякий лин. факт. опер. можно привести к верхн Δ виду

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Д-во,

$\varphi: V \to V$, φ лин. факт

Индукция по $\dim V$

<u>База,</u> $\dim V = 1$ (λ) д-но

<u>Переход,</u> Пусть для $\varphi: V \to V$, $\dim V \leq n-1$ спр-во

Пусть $\dim V = n$.

Будем строить цепочку подпр-в $0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq V$

и все инв и $\dim U_k = k$

По утв 2 $\exists\, U \leq V$: U-инв отн φ и $\dim U = n-1$

Заметим $\psi = \varphi|_U$ $\chi_\psi \mid \chi_\varphi$ => разл на лин. мн-ли

~~[illegible]~~

χ_ψ явл-ся пр-ем лин. мн-ей, входящих в χ_φ

=> для $\psi: U_{n-1} \to U_{n-1}$

$\to \; 0 \subseteq \underbrace{U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots}_{\text{инв относ } \psi} \subseteq \underset{U}{\underset{\|}{U_{n-1}}} \subseteq V$

=> U_i инв относ φ

Пусть ε - базис, согл с $U_1 \ldots U_{n-1}$

$A_\varphi = \begin{pmatrix} \overline{}| & & \\ 0 & \sqcup & \\ & 0 & \ldots \end{pmatrix}$ => φ прив к верхн Δ ■

Л-е,

В условиях Th спр-во включения

$(\varphi - \lambda_{k+1} I)(\varphi - \lambda_{k+2} I) \ldots (\varphi - \lambda_n I) V \subseteq U_k$

$\forall k = 0 \ldots n-1$

1) $k = n-1$:

$(\varphi - \lambda_n I) V \overset{?}{\subseteq} U_{n-1}$

$V = U_{n-1} \oplus \langle e_n \rangle$

$x = x_{n-1} + \lambda e_n$

$(\varphi - \lambda_n I) x = (\varphi - \lambda_n I)(x_{n-1} + \lambda e_n) = \underset{U_{n-1}}{\underset{\cap}{x'_{n-1}}} + \underset{U_{n-1}}{\underset{\cap}{y_{n-1}}}$

w7
p2 | чк $= n-2$

$$(\ell-\lambda_{n-1}I)(\ell-\lambda_n I)v \subseteq U_{n-2}$$

$$\Updownarrow \qquad ?$$

$$(\ell-\lambda_{n-1}I)U_{n-1} \subseteq U_{n-2}$$

$$U_{n-1} = U_{n-2} \oplus \langle e_{n-1}\rangle$$

$$\overset{\in}{x} = x_{n-2} + \beta e_{n-1}$$

$$(\ell-\lambda_{n-1}I)(x) = (\ell-\lambda_{n-1}I)(x_{n-2}+\beta e_{n-1}) \in U_{n-2}$$ ■

Th (Гамильтона-Кэли)

а) Пусть ℓ − лин. факт оп-р. $V \to V$
Тогда $\chi_\ell(\ell)=0$

б) Пусть $A \in M_n(F)$, $\chi_A(x)$ − хар. мн-н м-цы A
Тогда $\chi_A(A)=0$

Д-во

$$(\ell-\lambda_1 I)(\ell-\lambda_2 I)\ldots(\ell-\lambda_n I)v \subseteq U_0 = \{0\}$$

$$\chi_\ell(x) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - x)$$

$$\chi_\ell(\ell) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\ell-\lambda_i)$$

$$(-1)^n \chi_\ell(\ell)V = \{0\} \Rightarrow \chi_\ell(\ell) = 0$$ ■

Note, Условие линейной ф-ти оп-ра лишнее
$\chi_\ell(x)$ не р-ся над F на лин. мн. $\Rightarrow \exists$ расширение
$F \subset K$, в котором $\chi_\ell(x) = \prod(\lambda_i - x)$