№4

Лемма Даламбера. Основная теорема алгебры (схема доказательства)

① (Даламбера)

Пусть $f(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg f\geq 1$ и $f(z_0)\neq 0$

Тогда в $\forall\,\varepsilon$-окр-ти $U_\varepsilon(z_0)$ найдется $z\in U_\varepsilon(z_0)$:

$|f(z)|<|f(z_0)|$

Д-во)

Разделим $f(z)$ на $(z-z_0)$ с остатком

$f(z)=q_1(z)(z-z_0)+r_1;\ r_1=f(z_0)$

Разделим $q_1(z)$ на $(z-z_0)$

$q_1(z)=q_2(z)(z-z_0)+r_2,\ r_2=f'(z_0)$

Продолжим пока $q_i(z)$ не к-та.

$f(z)=f(z_0)+\alpha(z-z_0)^k+o((z-z_0)^k)$, где

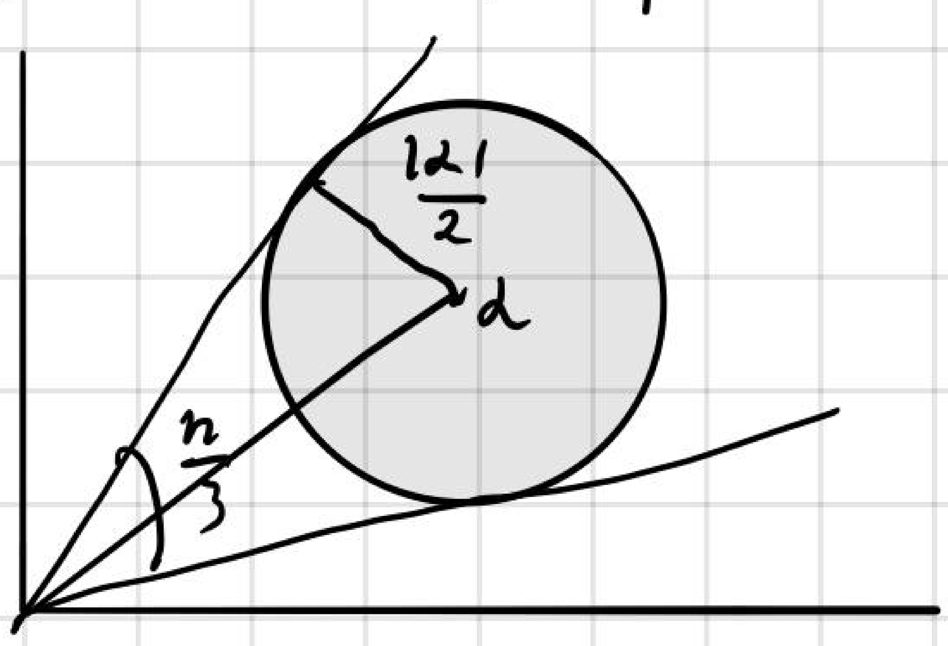
$\alpha(z-z_0)^k$ - первое ненул. сл-е

$o((z-z_0)^k)$ - мн-н, делящийся на $(z-z_0)^k$

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)^k\left(\alpha+\frac{o((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right)$$

При $z=z_0$

$$\left|\frac{o((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right|=0\Rightarrow\exists\,U_\eta(z_0):\left|\frac{o((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right|<\frac{|\alpha|}{2}$$



Ар-т сл-ки лежит на отр-ке, содержащем $\arg(\alpha)$ длиной $\frac{\pi}{3}$

Пусть $z-z_0=re^{it}$, $r<\varepsilon$.

$z=z_0+re^{it}$ - т-ка, которая вр-ся вокруг z_0

$\arg(z-z_0)^k = k\varphi$

Тогда ясно, что ар-т $(z-z_0)^k\left(\alpha + \frac{O((z-z_0)^k)}{(z-z_0)^k}\right)$ неогр ⊠

Th (ОТА, 1799)

Всякий мн-н из $\mathbb{C}[z]$ $\deg f \geq 1$

имеет хотя бы один корень

<u>Д-во</u>

Пусть $A = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$

По опр т. нит. грани $\exists z_n : |f(z_n)| \to A$

извлечём подп-ть z_k : либо $\left[\begin{array}{l} z_k \to z_0 \\ z_k \to \infty \ ?! \ (f(z_n) \to \infty) \end{array}\right.$

Тогда $f(z_k) \to f(z_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z_k)| \to |f(z_0)| = A$

Тем самым д-ли, что inf достигается

Если предположить $A \neq 0$, то

$\exists$ в $U_\varepsilon(z_0)$ такие z $|f(z)| < |f(z_0)| = A$, но A - inf ?!

Тогда $A = 0 \Rightarrow \exists z_0 : |f(z_0)| = 0 \Rightarrow f(z_0) = 0$ ⊠