№ 3	Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни
Р. 1	

Remind (см билет 1)

$\exists$ гомоморфизм $\varphi_c : F[x] \to F$: $\varphi_c(x)=c$ и $\forall a \in F$ $\varphi_c(a)=a$

Def Зн-е мн-на на эл-те $f(c)=\varphi_c(f)$

Утв. Зн-е мн-на f на эл-те $c\in F$ равно остатку от деления f на $x-c$ – линейный двучлен

Д-во

$f(x)=q(x)(x-c)+r(x)$, где $\deg r < \deg(x-c)$ или $r(x)=0$

$r(x)=r\in F$

$f(x)=q(x)(x-c)+r$

$f(c)=r$ $\boxtimes$

Def Эл-т $c\in F$ наз-ся корнем $f\in F[x]$ если $f(c)=0$

Th (Безу)

Эл-т $c\in F$ явл корнем $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $f \vdots x-c$

Д-во

$\Rightarrow$ Пусть c – корень $\Rightarrow f(c)=r=0 \Rightarrow f(x) \vdots (x-c)$

$\Leftarrow$ Пусть $f(x)=q(x)(x-c) \Rightarrow f(c)=0 \Rightarrow c$ – корень $\boxtimes$

Def $0\not\equiv f \in F[x]$, F – поле

Эл-т c поля F наз-ся корнем мн-на f кр-ти k, если $f \vdots (x-c)^k$, но $f \not\vdots (x-c)^{k+1}$

Утв. Пусть $f\in F[x]$, $\deg f = n$

Тогда сумма всех кр-ей корней мн-на $f \le n$

Д-во. Пусть $c_1 \dots c_s$ — попарно р-е корни f
и $k_1 \dots k_s$ — их кр-ти.
$f \vdots (x-c_1)^{k_1} \dots f \vdots (x-c_s)^{k_s}$
$x-c_i$ и $x-c_j$ неприводимые и не асс. др. с другом
Тогда $f \vdots (x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_s)^{k_s}$

Тогда $\sum k_i \leq n = \deg f$ ■

Note. Если поле F заменить на кольцо R с 1, то утв ст-ся неверным.

Def. $F[x]$, F-поле
Базис $1, x, x^2 \dots$
Ф-й производной $\frac{d}{dx}$ наз-ся
линейный оператор в алгебре $F[x]$ опр-й
на базисных в-рах

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$

Утв. Если $f(x)$ и $g(x) \in F[x]$, F-поле
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

Д-во.
Пусть $f(x) = x^n \quad g(x) = x^m$
$(x^{n+m})' = (n+m) x^{n+m-1}$
$f'g + g'f = (n+m) x^{n+m-1}$ ■

Th. $f(x) \in F[x]$, F-поле, $c \in F$

Тогда:
а) c — кр-й корень $f \iff f(c) = f'(c) = 0$
б) c — корень кр-ти $k \iff f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$
в) Если в добавление к а, б $\operatorname{char} F = 0$, или $\operatorname{char} F > k$,
то $f^{(k)}(c) \neq 0$

Д-во.
c-корень $f \Rightarrow f(x) = q(x)(x-c)$
$f' = q'(x-c) + q \Rightarrow f'(c) = q(c)$
а) 1) c-кр корень $\Rightarrow q(x) \vdots x-c \overset{\text{Безу}}{\Rightarrow} q(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0$
2) $f'(c) = 0 \Rightarrow q(c) = 0 \overset{\text{Безу}}{\Rightarrow} q(c) \vdots x-c$

w3
p2

б) $f(x) \vdots (x-c)^k$

$f(x) = q(x)(x-c)^k \Rightarrow f'(x) = q'(x)(x-c)^k + kq(x)(x-c)^{k-1} =$

$= (x-c)^{k-1}(q'(x)(x-c) + kq(x))$

$\Rightarrow$ кр-ть c у $f' \geq k-1$

c у $f'' \geq k-2$

$\vdots$

c у $f^{(k-1)} \geq k-(k-1) = 1 \Rightarrow f^{(k-1)}(c) = 0$

в) $(q'(x)(x-c) + kq(x))\big|_{x=c} = \underset{\neq 0}{k}\,\underset{\neq 0}{q(c)} \neq 0$

$\Rightarrow c$ - корень f' кр-ти в т-ти $k-1$

c - корень $f^{(k-1)}$ кр 1 $\Rightarrow c$ - простой корень у $f^{(k-1)}$

При этом $f^{(k)}(c) \neq 0$ ■

(иначе c - корень кр-ти два)