

№ 26

Унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного преобразования.

см билет № 23.

1. Пусть V - эрмитово, $f: V \rightarrow V$ - ун. о.н.н.

Тогда \exists о.н.б. ε в V : $A_\varepsilon = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $|\lambda_i| = 1$

до-во.

Инд-я по $\dim V$:

Пусть $\dim V = 1 \Rightarrow \forall x \neq 0 \ f(x) = \lambda x$, x - с.в.

$e_1 = \frac{x}{|x|}$, $|e_1| = 1$

$(e_1, e_1) = 1 = (f(e_1), f(e_1)) = (\lambda e_1, \lambda e_1) = |\lambda|^2 (e_1, e_1) = 1$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$

Пусть для н-б V : $\dim V = n$ верно.

До-м для $\dim V = n+1$

$\exists U$, $\dim U = 1$, U - унб о.н.б. $\{u\}$ - о.н.б. U , $|e_1| = 1$, $f(e_1) = \lambda e_1$, $|\lambda| = 1$

По упр. 5 U^\perp унб о.н.б. $\{u\}$ $\dim U^\perp = n-1$

По упр. 6 в $U^\perp \exists$ о.н.б. e_2, \dots, e_n : $f|_{U^\perp} = \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ - о.н.б. u $A_\varepsilon = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 