№23

Ортогональные преобразования и их свойства. Канонический вид ортогонального преобразования.

V - лин пр-во со скал произв.

$\varphi: V \to V$

Def. φ - ортогональный (унитарный) (эрм. сл), если

$\forall x, y \in V \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

Утв1. φ - орт $\Leftrightarrow \forall x \in V \ |\varphi(x)| = |x|$

Д-во.

$|x| = \sqrt{(x,x)}$. Если $\forall x, y \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

то $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$ и $|\varphi(x)| = |x|$

Поскольку соотв-е между кв. ф-ми и симм билл. ф-ми взаимнооднозн, то верно и обратное $\boxtimes$

Утв2.

$\varphi: V \to V$ - орт. (унит) $\Leftrightarrow \varphi^* = \varphi^{-1}$

Д-во.

$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

$\parallel$

$(x, \varphi^*(\varphi(y))) = (x, y) \Rightarrow \forall y \in V \ \varphi^*(\varphi(y)) = y$

$\boxtimes$

Утв3. φ - орт (унит) $\Leftrightarrow \forall$ ОНБ в V $\varphi \underset{\mathcal{E}}{\leftrightarrow} A$,

где A - орт-я

Д-во.

$\varphi^* = \varphi^{-1}$ (утв 2)

$A^* = \overline{A}^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^* A = E \Leftrightarrow A$ - орт (унит) $\boxtimes$

Утв 4.

$l: V \to V$ - лин. оп. и $\mathcal{E}$ - ОНБ в V и $\mathcal{E}' = l(\mathcal{E})$. Тогда $\mathcal{E}'$ - ОНБ в $V \Leftrightarrow l$ - орт.

Д-во.

$\mathcal{E}'$ - ОНБ в $V \Leftrightarrow G(\mathcal{E}') = E$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E}A$

$G(\mathcal{E}') = A^T G(\mathcal{E}) \bar{A} = A^T \bar{A}$

$\mathcal{E}'$ - ОНБ в $V \Leftrightarrow G(\mathcal{E}') = E \Leftrightarrow A^T\bar{A} = E \Leftrightarrow$

$A^* A = E \Leftrightarrow A^* = A^{-1} \Leftrightarrow l$ - орт (ун)

Сл-е. Если l - орт (унит), то $|\det l| = 1$

Д-во.

В ОНБ $A^*A = E \Rightarrow \overline{\det A} \cdot \det A = 1 \Rightarrow |\det A| = 1$

Сл-е. В V есть 2 ОНБ: $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}' \Rightarrow \exists!$ орт. оп l : $\mathcal{E}' = l(\mathcal{E})$

Утв 5. Пусть l - орт (ун) оператор в V

Пусть $U \subseteq V$: U инв отн l. Тогда $U^\perp$ - инв отн l

Д-во.

$l|_U$ - орт (ун) оп-р в U. l - невыр $\Rightarrow l$ - сюръективный на U

$\forall x \in U \ \exists z \in U : x = l(z)$

Пусть $y \in U^\perp$

$\forall x \in U \quad \exists z : l(z) = x. \quad (z, y) = 0 \quad (l(z), l(y)) = 0$

$(x, l(y)) = 0$

Th V — эвкл. пр-во, φ — орт. оп-р в V

Тогда $\exists$ ОНБ ε в V, что

$$\varphi_\varepsilon = \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & R_{\alpha_k} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha_i} \text{ — блоки } 2\times 2$$

Д-во

Было д-но, что $\forall \varphi$ в V $\exists$ одномерное или двумерное инв подпр-во

Пусть U — одном (если $\exists$) или двумерное

I) U — одномерное

e_1 — базис U, $|e_1|=1$

$\varphi(e_1)=\lambda e_1$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$1=(e_1,e_1)=(\varphi(e_1),\varphi(e_1))=\lambda^2(e_1,e_1)=1 \Rightarrow |\lambda|=1$

$\varphi|_U=(\pm 1)$

Далее к $U^\perp$ предп инд-ии

II) U — двумерно, $\varepsilon=(e_1,e_2)$ — ОНБ

$A=\varphi|_U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ — орт м-ца $AA^T=E$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=1\end{matrix} \Rightarrow \text{в-ра } \begin{pmatrix} a \\ c\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} b \\ d\end{pmatrix} \text{ —}$$

единичны и орт-ны

Если м-ца орт-на, то в ОНБ квадрат длины каждого ст-ца — единица и столбцы попарно орт-ны

Пусть $a=\cos\alpha$ $d=\cos\beta$ $c=\sin\alpha$ $b=-\sin\beta$

$$-\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=0 \Rightarrow \sin(\alpha-\beta)=0 \Rightarrow \left[\begin{matrix}\beta=\alpha\pm\pi \\ \alpha=\beta\end{matrix}\right.$$

Покажем, что $\beta=\alpha\pm\pi$ приводит к ?!

$$\varphi|_U=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$b = -\sin\beta = -\sin(\alpha \pm \pi) = \sin\alpha$

$a = \cos\beta = \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tr} A = 0$, $|A| = -1$, $\chi_\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ у $\chi_\varphi(\lambda)$ есть действ корень $\pm 1 \Rightarrow$ у φ есть одн инв подпр-во ?!

Тогда $\varphi|_U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha$

Применим предп к $U^\perp$