№8 р.1	Корневое подпр-во лин. оп-ра. Свойства корневых подпр-в. Разложение пр-ва в прямую сумму корневых подпр-в (случай, когда хар. мн-н р-ся на лин. мн-ли)

Оп. Мн-н $f \in F[x]$ F-поле
наз-ся аннулирующим для ℓ, если $f(\ell)=0$

Оп. μ_ℓ — мн-н мин. степени, анн. ℓ.

Т. (о взаимно простых мн-х, явл-ся делителями анн-х мн-в)

$\ell: V \to V$, f аннулирует ℓ

$f = f_1 \cdot f_2$, где f_1 и f_2 — взаимно простые $\text{НОД}(f_1, f_2)=1$

Введем об-е $V_i = \ker f_i(\ell)$

Тогда $V = V_1 \oplus V_2$, причем V_1 и V_2 — инв отн ℓ.

Д-во.

а) $f_i(\ell)$ коммутирует с ℓ

По перв. утв. о комм. оп-рах (билет №5)

$\Rightarrow \ker f_i(\ell)$ — инв отн ℓ.

f_1 и f_2 взаимно просты $\Rightarrow \exists\, u(x)\, v(x) \in F(x)$

$: u(x) f_1(x) + v(x) f_2(x) = 1$

$Id = u(\ell) f_1(\ell) + v f_2(\ell)$

б) Покажем, что $\operatorname{Im} f_1(\ell) \subseteq V_2$ $\operatorname{Im} f_2(\ell) \in V_1$?

Д-м второе

Пусть $y \in \operatorname{Im} f_2(\ell) \Rightarrow \exists\, x : y = f_2(\ell) x$

$f_1(\ell) y = f_1(\ell) f_2(\ell) x = f(\ell) x = 0 \Rightarrow 0 x = 0$

в) $V = V_1 + V_2$?

$x = x_1 + x_2$

$1 = f_2(x) v(x) + f_1(x) u(x)$

$1 = f_2(\ell) v(\ell) + f_1(\ell) u(\ell)$

$Id = f_2(\ell) v(\ell) + f_1(\ell) u(\ell) x'' \Rightarrow f_2(\ell) x' + f_1(\ell) x'' \Rightarrow x_1 + x_2 = x$.

$x = Id\, x = \underbrace{f_2(\ell) x'}_{\operatorname{Im} f_2(\ell) \subseteq V_1} + f_1 \ldots$

г) $V = V_1 \oplus V_2$?

Пусть $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f_1(\ell)$

$x = Id\, x = u(\ell) f_1(\ell) x + v(\ell) f_2(x) = 0$ ⊠

Ут-е

$\ell: V \to V$, f аннулирует ℓ и $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$,

где $f_1 \dots f_n$ – попарно взаимно простые

Пусть $V_i = \operatorname{Ker} f_i(\ell)$

Тогда $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$

Д-во индукция по n

База $n = 2$ – д-но

Пусть для $n-1$ верно

Переход

$f = (f_1 \dots f_{n-1}) f_n$

вз-но пр-е

$$V = \underbrace{\operatorname{Ker}(f_1(\ell) \dots f_{n-1}(\ell))}_{V'} \oplus \overbrace{V_n}^{= \operatorname{Ker} f_n(\ell)}$$

V' инв отн ℓ, т.к. $f_1(\ell) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(\ell)$ комм с ℓ

$f_1(\ell) \dots f_{n-1}(\ell)\big|_{V'}$ анн. ℓ, т.к. анн. ℓ на всем V

$f_1(\ell) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(\ell)$ – аннулирующий

$\Rightarrow$ по предп инд-ии к оп-ру $\ell|_{V'}$ и мн-ну $f_1(x) \dots f_{n-1}(x)$

$V' = \operatorname{Ker} f_1(\ell)|_{V'} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} f_{n-1}(\ell)|_{V'}$

Тогда $V = \operatorname{Ker} f_1(\ell)|_{V'} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} f_{n-1}(\ell)|_{V'} \oplus V_n$

$\operatorname{Ker} f_i(\ell)|_{V'} \overset{?}{=} V_i$

$V_i \subseteq V'$

$x \in V_i \Leftrightarrow f_i(\ell) x = 0 \Rightarrow (f_1(\ell) \dots f_{n-1}(\ell)) x = 0$

$\operatorname{Ker} f_i(\ell)|_{V'} = V_i$ ⊠

w8 p2

Def. $\ell : V \to V$

Вектор $x \in V$ наз-ся корневым для оп-ра ℓ, отвечающим числу $\lambda \in F$, если $\exists k : (\ell - \lambda I)^k x = 0$

наименьшее k, удовл. усл-м, называется высотой x

Note. Мн-во всех корн. в-ров, отвеч. λ для ℓ — подпр-во в V

Def. V^λ — корневое для ℓ, отвеч $\lambda \in F$

Утв 2. $V^\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ — соб. зн. оп-ра ℓ

Д-во.

а) Пусть λ — с. зн. ℓ

$V_\lambda \neq \{\bar{0}\}$, но т.к. $V_\lambda \subseteq V^\lambda$

б) Пусть λ — не соб. зн. ℓ

Докажем, что $V^\lambda = \{0\}$

Пусть $\exists\, x \neq 0 : x \in V^\lambda$

$\Rightarrow \exists \min k : (\ell - \lambda I)^k x = 0$

Пусть $y = (\ell - \lambda I)^{k-1} x \neq 0$

$(\ell - \lambda I) y = (\ell - \lambda I)^k x = 0$

$\Updownarrow$

$\ell(y) = \lambda y$

$\Downarrow$

λ — с. зн ?! $\blacksquare$

Утв. (о св-х корневых подпр-в)

Пусть $\ell : V \to V$, V^λ — корн. подпр-во для ℓ, отвеч. с. зн λ

Тогда

а) V^λ инв отн ℓ.

б) На V^λ оператор ℓ имеет ед. соб. зн λ

в) Если W — инвар. относ ℓ дополн. к V^λ пр-во

[т. е. $V = V^\lambda \oplus W$]

То $\ell - \lambda I$ невырожд на W

Д-во.

а) Пусть m — наибольшая из высот в-ров оп-ра ℓ на V^λ

Тогда $V^\lambda = \ker(\ell - \lambda I)^m$

$\ell - \lambda I$ комм с $\ell \Rightarrow V^\lambda$ инв отн ℓ

б) От пр-го. Пусть на V^λ l имеет с. зн $\mu \neq \lambda$

$\Rightarrow \exists x \in V^\lambda : l(x) = \mu x$ $\neq 0$

Тогда $(l - \lambda I)x = l(x) - \lambda x = (\mu - \lambda x)x$

$\Rightarrow (l - \lambda I)^m x = (\mu - \lambda)^m x \neq 0$?!

в) $V = V^\lambda \oplus W$

$\mathcal{E}$ - базис согл. с разложением в $\oplus$

$$l = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

$$l - \lambda I = \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda E & 0 \\ \hline 0 & B - \lambda E \end{array}\right)$$

$\det(B - \lambda E) \overset{?}{\neq} 0$

Пусть $|B - \lambda E| = 0$

$\Rightarrow \text{rk}(B - \lambda E) < \dim W \Rightarrow \dim \text{Im}(B - \lambda E) < \dim W$

$\Rightarrow \dim \text{Ker}(B - \lambda E) \geq 1 \Rightarrow \exists y \in W \neq 0 : (l - \lambda I)y = 0$

$\Rightarrow y \in V^\lambda \Rightarrow$?! (прямая сумма) ⊠

Т2 (Ор-ие пр-ва V в пр-ю сумму корн. подпр-в)

$l : V \to V$, l - лин. факт над F

Тогда $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$, где

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ - попарно р-е соб. зн. оп-ра l

Д-во

$\chi_l = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - x)^{m_i}$, $m_i = \text{alg}(\lambda_i)$

Тогда мн-ны $(\lambda_1 - x)^{m_1}, (\lambda_2 - x)^{m_2} \dots (\lambda_k - x)^{m_k}$

попарно взаимно просты

$$V = \underset{\overset{\wedge|}{V^{\lambda_1}}}{\text{Ker}(l - \lambda_1 I)^{m_1}} \oplus \dots \oplus \underset{\overset{\wedge|}{V^{\lambda_k}}}{\text{Ker}(l - \lambda_k I)^{m_k}}$$

Покажем, что $V^{\lambda_1} \dots V^{\lambda_k}$ линейно нез-мы

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$

$x_i \in V^{\lambda_i} \overset{?}{\Rightarrow} x_i = 0$

б.о.о. $x_1 \neq 0$

№8
р3

$V^{\lambda_1} \ni -x_1 = \sum_{i=2}^{k} x_i = x' \in V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_k}$

$(\ell - \lambda_1 I)^{m_1} x_1 = 0$ и $\prod_{i=1}^{k} (\ell - \lambda_i I)^{m_i} x' = 0$

$(x - \lambda_1)^{m}$ и $\prod_{i=2}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i}$ – взаимно просты

$\exists\, u(x), v(x):$

$1 = u(x)(x - \lambda_i)^{m_1} + v(x) \prod_{i=2}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i}$

$Id = u(\ell)(\ell - \lambda_i Id)^{m_1} + v(\ell) \prod_{i=2}^{k} (\ell - \lambda_i Id)^{m_i}$

$x_1 = u(\ell)\underbrace{(\ell - \lambda_i Id)^{m_1}}_{0} + v(\ell)\underbrace{(\prod)}_{0} = 0$