w24

Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.

T2 Пусть V - эвкл (эрм) лин пр-во

$\varphi: V \to V$

Тогда $\varphi = \psi \cdot \theta$, ψ - самосопр оп-р с неотр

соб. зн-ми (действ), θ - орт (унит)

Д-во

$\eta = \varphi^* \cdot \varphi$, η - самосопр лин оп-р.

$\eta^* = (\varphi^* \varphi)^* = \varphi^* \varphi = \eta$

$\exists$ ОНБ $\mathcal{E}$ в к-ром η диаг с действ с. зн

$\mathcal{E}$ - первый сингулярный базис φ

$e_i \in \mathcal{E} \Rightarrow \eta(e_i) = \lambda_i e_i$. Покажем, что $\lambda_i \geq 0$

$(\varphi(e_i), \varphi(e_i)) \geq 0$

$(\varphi^*(\varphi(e_i)), e_i) = (\eta(e_i), e_i) = (\lambda_i e_i, e_i) = \lambda_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_i \geq 0$

Пусть $f_i = \varphi(e_i)$, $i = 1 .. n$

Тогда в-ра f_i попарно ор-ны

$(f_i, f_j) = (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (\eta(e_i), e_j) = \lambda_i \delta_{ij} \Rightarrow |f_i| = \sqrt{\lambda_i}$

Переупорядочим в-ры б-са $\mathcal{E}$, чтобы

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .. \geq \lambda_n$

Пусть $\lambda_1 .. \lambda_k$ - ненул с. зн. $\lambda_{k+1} .. \lambda_n$ - нулевые

Тогда $g_i = \frac{f_i}{|f_i|} = \frac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, $i = 1 .. k$ - попарно орт и норм

Рассмотрим $\langle g_1 .. g_k \rangle^\perp$ и в нем выберем

$g_{k+1} \dots g_n$ - ОНБ.

Тогда $G = (g_1 \dots g_n)$ - ОНБ в V - второй син. базис для ℓ

$f_i = \sqrt{\lambda_i}\, g_i \quad i = \overline{1..n}$

Есть 2 ОНБ $\mathcal{E}$ и g.

Пусть Θ - оп-р переводящий $\mathcal{E}$ в g, $\Theta(e_i) = g_i$

$\Psi(g_i) = f_i = \sqrt{\lambda_i}\, g_i$

$\Psi_g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ - диаг. вид в ОНБ g

$\Rightarrow \Psi$ - самосопр с неотр с. зн.

$\ell \overset{?}{=} \Psi\Theta$

$\Psi\Theta(e_i) = \Psi(g_i) = f_i = \ell(e_i)$ ■

Сл-е 1.

$\exists$ р-я вида $\Theta\Psi = \ell$, Θ - орт, Ψ - самосопр с $\geq$ с. зн.

Д-во.

Применим Th к $\ell^* = \Psi\Theta \Rightarrow \ell = \Theta^*\Psi$ ■

Сл-е 2.

Если ℓ невыр и $\ell = \Psi\Theta$, тогда

Ψ пол опр самосопр оп-р, т.е. $(\Psi(x), x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Причем оба м-ты Ψ и Θ опр од-но ■

Сл-е 3.

$\dim V = 1$, V над $\mathbb{C}$

Тогда $\ell = re^{il}$, $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$

Note. Пусть $\ell = \Psi \cdot \Theta = \Theta\Psi$

Тогда $\ell^*\ell = \Psi^*\Theta^*\Theta\Psi = \Psi^*\Psi = \Psi^2 = \Psi\Theta(\Psi\Theta)^* = \ell\ell^*$

Def. ℓ – нормальный оператор в эрм пр-ве если $\ell\ell^* = \ell^*\ell$

Утв. (б/д)

ℓ в эрм пр-ве нормален $\Leftrightarrow \exists$ ОНБ, в к-ром ℓ прив к диаг виду