№6 Р1	ЛНЗ с.в с попарно разл. с. зн. Алгебраическая и геометрическая кратность с. зн. Условия диаг. линейного оператора

Th (О ЛНЗ соб. пр-в, отв разным собст. зн.)

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – попарно р-е с. зн.

Тогда $V_{\lambda_1}, \dots V_{\lambda_k}$ – ЛНЗ

Д-во.

Пусть $\exists$ нетрив. комб: их сумма 0.

Из всех таких контрпримеров выберем с меньшим числом сл-х.

j-наим, $j \geq 2$

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_j = 0$, $x_i \neq 0$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_j x_j = \varphi(x) = 0$$

$$- \quad \lambda_j x_1 + \dots \quad \dots + \lambda_j x_j = \lambda_j x = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_j) x_1 + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) x_{j-1} = \bar{0} \quad ?! \ (j - \min) \ \boxtimes$$

Сл-е Если $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – поп. р-е с. зн, то

$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Th (Критерий диаг. л.о.)

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_k$ – попарно разл. соб. зн. оп-ра

след. усл. экв-ны

а) φ – диаг. л.о

б) $\exists$ базис в V, состоящий из собств в-ров л. о. φ.

в) Пр-во V р. ся в $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Д-во.

а) => б)

$\exists\ \varepsilon : A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(e_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ... => ε – базис из с. в.

б) => в)

Упорядочим С.В так, чтобы сначала шла гр-па соб. с. зн.

$\{e_{11} \ldots e_{1m_1}\}$, $\{e_{21} \ldots e_{m_2}\} \ldots \{\ldots\}$
λ_1 λ_2 λ_n

$\langle e_{11} \ldots e_{1m_1} \rangle$ $\langle e_{21} \ldots e_{2m_2} \rangle$
$\parallel$ $\parallel$
V_{λ_1} V_{λ_2}

=> т.к. все баз в-ры сост базис, то сумма оболочек $= V$.
Была С. подпр-во, отвеч р. соб зн λ НЗ
$\Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}$.

в) => а)

В V_{λ_1}: $e_{11}, e_{12} \ldots e_{1m_1}$

В V_{λ_2}: $e_{21} \ldots \ldots e_{2m_2}$

Тогда $A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix} \updownarrow m_1 & \\ \hline & \begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix} \updownarrow m_2 \\ & \ddots \end{array}\right)$ $\boxed{\text{ч}}$

Def Если $\exists(\varphi)$, $\varphi: V \to V$, V над F разложим на лин. мн-и (над F) то такой оп-р линейно факт-й

Пусть λ - с. зн. (λ - корень $\chi_\varphi(x)$)

Def $\dim V_\lambda$ - геом кр-ть с соб зн. $\lambda \geq 1$ $geom(\lambda)$

Def Кратность λ как корня $\chi_\varphi(x)$ - алг. кратность соб. зн. λ $alg(x)$

Th (об. инв подпр. x)
$\varphi \in \mathcal{L}(V)$, U - инв отн φ подпр-во $U \leq V$
Если $\psi = \varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$, то $\chi_\varphi \vdots \chi_\psi$

Д-во

Пусть $\underset{\leftrightarrow}{E_k}$ - базис V, сост с U

$A_\varphi = {}^{k\updownarrow}\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ $B \underset{(e_1 \ldots e_k)}{\longleftrightarrow} \psi$

w6 P2

$\chi_\varphi = \det(A_\varphi - \lambda E) = \det\left(\begin{array}{c|c} B-\lambda E_k & C \\ \hline 0 & D-\lambda E_{k'} \end{array}\right) =$

$= \det(B-\lambda E_k)\det(D-\lambda E_{k'}) = \chi_\psi \det(D-\lambda E_{k'})$, $k' = n-k$ ■

Сл-е. λ - с зн φ $V \to V$

Тогда $geom(\lambda) \le alg(\lambda)$

Д-во.

$U = V_\lambda$ инв подпр. $\psi = \varphi|_U = \lambda \cdot I = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}}^{k}$

$\chi_\psi(x) = (\lambda - x)^k$

Здесь $k = \dim V_\lambda = geom(\lambda)$

По Th 2 $\chi_\psi(x) \mid \chi_\varphi(x) \Rightarrow \chi_\varphi(x) \vdots (\lambda - x)^k \Rightarrow$

$\Rightarrow alg(\lambda) \ge k = geom(\lambda)$ ■

Th 3 Пусть $\varphi \in L(V)$

Тогда φ - диаг $\Leftrightarrow$ $\chi_\varphi(x)$ р-ся на лин мн-ли над F

$\forall \lambda$ - с. зн. опер $\varphi \Rightarrow geom(\lambda) = alg(\lambda)$

Д-во.

$\Rightarrow$) Пусть φ - диаг. $\Rightarrow A_\varphi = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$

$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Тогда $\dim V = \sum_{i=1}^{k} geom(\lambda_i) \le \sum_{i=1}^{k} alg(\lambda_i) = \deg \chi_\varphi = n$

$\Leftarrow$) φ - линейно факт

и $alg(\lambda_i) = geom(\lambda_i)$

$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \le V$

$\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} geom(\lambda_i) =$

$= \sum_{i=1}^{k} alg(\lambda_i) = \deg \chi_\varphi(x) = n$

Тогда $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$

$\Rightarrow$ по пред. Th φ диаг ■