№17	Пол. опр-е кв ф-мы. Критерий Сильвестра.
p.1	Кососим. бил ф-ии, приведение их к канон виду

См билет 15

Th (Критерий Сильвестра)

Пусть q - кв ф-ма в V над $\mathbb{R}$ и

B - матр ф-мы в некот. базисе.

Тогда

1) q пол опр-на $\Leftrightarrow$ все гл миноры B полож

2) q отр опр-на $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 < 0$
$\Delta_2 > 0$
$\vdots$

Д-во

① $\Rightarrow$ Пусть q пол. опр

$B \overset{(*)}{=} A^T \cdot A$, где A - нев м-ца

$\Delta_n = |B| = |A^T \cdot A| = |A|^2 > 0$

Δ_k - ? $q|_U$, $U = \langle e_1 \ldots e_k \rangle$

$q|_U$ - пол опр $\Rightarrow \Delta_k > 0 \; \forall k$

$\Leftarrow$ Пусть $\Delta_1 \ldots \Delta_n > 0$

$\Rightarrow$ В Δ_i нет перемен зн-в $\Rightarrow q = 0 \Rightarrow p = n \Rightarrow$ пол опр-на

② q пол опр $\Leftrightarrow$ $-q$ отр опр

$-q = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$\Delta_k|_{-q} = (-1)^k \Delta_k|_q$ ☒

(*) - сл-е из з-на инерции. см билет 15

Df Бил. ф-я f наз-ся кососим, если

а) $f(x, y) = -f(y, x)$

б) $f(x, x) = 0 \; \forall x \in V$

Df f - кососим б. ф-я на V, V над F.

Базис $e_1 \ldots e_n = E$ в V

наз-ся симплектическим, если

$f(e_{2k-1}, e_{2k}) = 1$, $k = 1, 2 \ldots s$

а все ост. $f(e_i, e_j) = 0$

Th (о $\exists$-ии симп. б-са)

Пусть f - кососим. бил. ф-я в V над F

Тогда в V $\exists$ ст. симпл. базис

Д-во

Инд-я по р-ти $V = n$

База, $n=1$, $f(e_1, e_1) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Переход

Если $f \equiv 0 \Rightarrow f$ ч.о

Пусть $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, e_1', e_2' \in V: f(e_1', e_2') = 1$ (кокомут-тос => поделим)

$\Rightarrow U = \langle e_1', e_2' \rangle$

$f|_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - не выр

Тогда $V = U \oplus U^\perp$ $\dim U^\perp = n-2$

к $f|_{U^\perp}$ применимо предп инд-ии

$\Rightarrow \exists$ симпл. б-с $e_3' \ldots e_n'$

$\Rightarrow$ в V сущ б-с $\mathcal{E}' = e_1' \ldots e_n'$ ☐