| | |
|---|---|
| w16 p.1 | Симм. бил и кв ф-ии. Метод Якоби |

См билет 14.

Th (Якоби)

Пусть $q(x)$ – кв. ф-я в действ л.п.

$\varepsilon$ – пр-й базис в $V$, $\dim V = n$

$1 = \Delta_0, \Delta_1 .. \Delta_n$ – гл миноры м-цы $A$ ф-ии $q$ отл-ны от

0.

Тогда $q(x)$ можно пр-ти к диаг виду:

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + .. \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2 \quad (1)$$

Более того: матрица пер-да будет верхне треуг.

Д-во, инд-я по $n = \dim V$

База, $n = 1$ $q(x) = a_{11}x_1^2$

$e_1' = \frac{1}{a_{11}} e_1$ $q(e_1') = g(e_1' e_1') = \frac{1}{a_{11}^2} a_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{\Delta_1}$

Переход, Пусть утв-во для $V$: $\dim V = n$

Д-м для $n$.

$U = \langle e_1 .. e_{n-1} \rangle$

$q|_U$ – прим предп инд-ии

$$q|_U = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + .. + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}}\xi_{n-1}^2$$

Матр пер-да $S = \begin{pmatrix} s_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & s_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$ к базису $e_1' ... e_{n-1}'$ в $U$.

$q|_U$ невыр $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

$\dim U^\perp = 1$.

Выберем в $U^\perp$ б-й в-р $e_n'$ так, чтобы

$g(e_n, e_n') = 1$

П-м, что базис $\varepsilon' = (e_1' .. e_n')$ – искомый

$(e_1 .. e_n) \to (e_1' ... e_{n-1}', e_n')$

в-ры $e_1' .. e_{n-1}'$ очевидно имеют нул. координату при

$e_n$

$$\Rightarrow S = \left(\begin{array}{ccc|c} s_{11} & \cdots & s_{n-1\,n-1} & \\ 0 & 0\ 0 & \cdots 0 & \underset{e_n'}{\square} \end{array}\right)$$

Пусть $e_n' = S_{1n} e_1 + \dots S_{n-1,n} e_{n-1} + S_{nn} e_n$ (*)

По постр $e_n' \perp U$

$$\begin{cases} f(e_1, e_n') = f(e_1, *) = 0 \\ \vdots \\ f(e_{n-1}, e_n') = 0 \\ f(e_n, e_n') = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} S_{1n} + a_{12} S_{2n} + \dots + a_{n1} S_{nn} = 0 \\ \vdots \\ a_n S_{1n} + \dots + a_{nn} S_{nn} = 1 \end{cases}$$

$\Delta_n \neq 0 \Rightarrow S_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$.

Найдем коэф при $\xi_n^2$

$f(e_n', e_n') = f(*, e_n') = f(S_{nn} e_n, e_n') = S_{nn} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$ ■