№9 р.1	ЖНФ и ж. базис (Тh сущ-я)

Нильпотентные операторы

Опр. $\ell: V \to V$

Оп-р ℓ наз-ся нильпот, если $\exists\, k \in \mathbb{N}: \ell^k = 0$.

Пусть $x: \ell^h(x) = 0,\ \ell^{k-1}(x) \neq 0$

$\Rightarrow h$ - высота в-ра x.

Цикл подпр-во

ℓ - нильпот. оп-р в V

$\ell^k x = 0 \quad \ell^{k-1} x \neq 0$

$U = \langle x, \ell(x) \dots \ell^{k-1}(x) \rangle$

Опр. Построенное U - цикл подпр-во порожд x

Утв. В цикл подпр-ве $U = \langle x, \ell(x) \dots \ell^{k-1}(x) \rangle$ порожд в-ром x, высоты k в-ры $x, \ell(x) \dots \ell^{k-1}(x)$ образуют базис

Д-во

Проверим ЛНЗ

Пусть $\alpha_j \ell^j(x) + \dots \alpha_{k-1} \ell^{k-1}(x) = 0$, где α_j - перв. ненул коэф

К обоим частям применим ℓ^{k-1-j}

$\alpha_j \underset{\neq 0}{\ell^{k-1}(x)} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$?! $\boxed{\text{В}}$

Сл-е В таком базисе, в-ры в котором выстроены по возр-ю высоты матрица нильп. оп-ра имеет вид Жорд. клетки пор-ка k.

Th (о дополнении цикл подпр-ва для нильп. оп-ра)

Пусть $\ell: V \to V$, ℓ - нильп. высоты k.

Пусть x - в-р наибольшей высоты, U - пор. им цикл пр-во.

$U = \langle x, \ell(x), \dots \ell^{k-1}(x) \rangle$

Тогда $\exists$ инв отн ℓ подпр-во $V = U \oplus W$

Д-во

I. Нужно ~~[illegible]~~: W – инв отн ℓ и

а) $U \cap W = \{\bar{o}\}$

б) $U + W = V$.

Если обращать внимание только на инв и на а),

то W $\exists$, например $\{\bar{o}\}$

Пусть теперь W – максимальное по р-ти подпр-во в V,

которое инв отн ℓ и $U \cap W = \{\bar{o}\}$.

Покажем, что условие б вып-се авт-ти.

От противного: пусть $U + W \subset V$

Пусть $z \notin U + W$. По условию $\ell^k(z) = 0$

$\Rightarrow \exists \underset{min}{\ell} \in \mathbb{N} : \ell^{\ell}(z) \in U + W$

Переоб-е $\ell^{\ell-1}(z)$ через z можем считать,

что $\ell = 1$

Т.е. $z \notin U + W$, но $\ell(z) \in U + W$.

$\ell(z) = \underbrace{\sum \alpha_s \ell^s(x)}_{U} + \underbrace{w}_{W}$

II. Покажем, что $\alpha_0 = 0$

Применим ℓ^{k-1}

$\bar{o} = \ell^k(z) = \alpha_0 \cdot \underbrace{\ell^{k-1}(x)}_{U} + 0 \ldots + \underbrace{\ell^{k-1}(w)}_{W}$

Т.к. по постр U и W ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_0 \ell^{k-1}(x) = 0$ и $\ell^{k-1}(w) = 0$

$\Rightarrow \alpha_0 = 0$

III. $\ell(z) = \sum\limits_{s=1}^{k-1} \alpha_s \ell^s(x) + w$

Пусть $y = z - \sum\limits_{S=1}^{k-1} \alpha_s \ell^{s-1}(x) \notin U + W$

$\ell(y) = \ell(z) - \sum\limits_{S=1}^{k-1} \alpha_s \ell^s(x) = w \in W$

$W' = w + \langle y \rangle$ инв относ ℓ подпр-во, т.к. $\ell(y) \in W'$

~~[illegible]~~

IV. Покажем, что $U \cap W' = \{\bar{o}\}$.

От пр-го. Пусть $\exists$ в-р $\underset{\neq \bar{o}}{u} \in U \cap W'$

w9
p.2

Тогда $u=\overline{w}+\lambda y,\ \lambda\neq 0$

$\Rightarrow y=\frac{1}{\lambda}u-\frac{1}{\lambda}\overline{w}\in u+w$?! $(y\notin u+w)$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $u\cap w'=\{0\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$?! т.к. $w'\supset w$

Th (о р-ии в пр-ю сумму цикл. от-в)

Пусть $l: V\to V$, l - нильп.

Тогда V р-ся в пр-ю сумму $V=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_e$

где V_i - цикл подпр-ва относ l

Число сл-х: $e=\dim\operatorname{Ker} l=\operatorname{geom}(0)$

Д-во

Индукция по $\dim V$

Пусть $\dim V=1\Rightarrow l=0$ и V - цикл

Пусть для $V: \dim V<n$ утв спр-во

Д-м для пр-ва $V: \dim V=n$

Пусть x - в-р максимальной высоты

$U=\langle x, l(x), \dots, l^{k-1}(x)\rangle$

По пред Th $\exists W$ инв отн $l: V=U\oplus W$

Но W по предп ин-ии р-мо: $W=V_2\oplus V_3\oplus\dots\oplus V_e$,

где V_i - цикл подпр-ва отн. l

Тогда $V=\underset{U}{\underset{\parallel}{V_1}}\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_e$.

$\operatorname{Ker} l|_V=\operatorname{Ker} l|_{V_1}\oplus\dots\oplus\operatorname{Ker} l|_{V_e}$

$\dim\operatorname{Ker} l|_{V_i}=1\Rightarrow e=\dim\operatorname{Ker} l|_V=\operatorname{geom}(0)$

Df Жордановой матрицей наз-ся блочно-диаг. м-ца вида

$$\begin{pmatrix}\boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_s)}\end{pmatrix},$$ где $J_{k_i}(\lambda_i)$ - клетка Жордана

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

Th (Жордана)

Пусть $\ell: V \to V$ над F, ℓ — линейно факт. над F

Тогда $\exists$ базис в V, в котором ℓ имеет жорданову матрицу

Note, базис — жор. базис

матрица — ЖНФ

Д-во,

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_k$ — с. зн. оп-ра ℓ. (попарно р-е)

$\chi_\ell(x) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - x)^{m_i}$, где $m_i = alg(\lambda_i)$

~~[illegible]~~

По Th о р-ии в сумму корневых $V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$

На V^{λ_i} $(\ell - \lambda_i I)^{m_i} \equiv 0$

По Th о р-ии в сумму цикл $V^{\lambda_i} = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{is_i}$

На каждом ц. подпр-ве V_{ij} $\ell|_{V_{ij}} = J_{k_j}(\lambda_i)$ ■