Теория групп. Лекция 13

Штепин Вадим Владимирович

28 ноября 2019 г.

Теорема (вторая теорема Силова)

Пусть $|G| = p^n m$, m не делится на p, P — силовская p-подгруппа в G. Тогда $\forall p$-подгруппы $Q \leq G$ $\exists x \in G$ $Q \leq P^x$. То есть, любая p-подгруппа в G вкладывается в силовскую p-подгруппу (группа, сопряженная силовской сама силовская).

Доказательство

Рассмотрим действие Q на G/P — множество левых смежных классов.

$Q(aP) = QaP$ — действие левыми сдвигами. Пусть $\Omega = G/P$, $|\Omega| = \frac{|G|}{|P|} = m$. По формуле орбит:

$m = |\Omega| = |Q(a_{i_1})P| + ... + |Q(a_{i_s})P|$, где s — количество орбит действия.

$|Q(a_{i_j})P| = \frac{|Q|}{|St(a_{i_j}|}$ по формуле размера орбиты. Так как $|Q|$ — степень p, то $|Q(a_{i_j})P|$ — тоже степень p. Если в формуле орбит все слагаемые делятся на p, то и m делится на p, а это противоречие.

Значит, $\exists$ орбита $Q(a_{i_j})P$ мощности 1. Для нее верно $Qa_{i_j}P = a_{i_j}P \Rightarrow Qa_{i_j}Pa_{i_j}^{-1} = a_{i_j}Pa_{i_j}^{-1} = P^x$, где $x = a_{i_j}$. $QP^x = P^x \Leftrightarrow Q \subset P^x$, $|P^x| = |P|$, так как сопряжение — это автоморфизм.

Следствие

Все силовские p-подгруппы сопряжены между собой и $N_p = |G : N_G(P)|$ (число силовских p-подгрупп), где P — произвольная силовская p-подгруппа.

Доказательство

Пусть $Q = P$ во второй теореме Силова, тогда $P = P_1^x$ — некоторая силовская p-подгруппа. Значит, все силовские p-подгруппы сопряжены некоторой подгруппе. $N_p = \frac{|G|}{|N_G(P)|}$, если рассмотреть N_p как размер орбиты P при действии сопряжениями, $N_G(P)$ — нормализатор P (т.е. стабилизатор при действии сопряжениями)

Следствие

$|G| = p^n m$, p — простое и m не делится на p. Тогда $m \vdots |N_p|$.

Доказательство

$N_p = \frac{|G|}{|N_G(P)|}$, причем $P \leq N_G(P)$, так как $\forall a \in P$ $aP = Pa$. Значит, $|N_G(P)| = t|P|$, t — натуральное число. Тогда $N_p = \frac{p^n m}{p^n t} = \frac{m}{t}$ и m делится на N_p.

Пример

Всякая группа порядка 15 абелева

Доказательство

$|G| = 3 * 5 \Rightarrow$ в G есть силовские 3- и 5-подгруппы, причем $N_3 \equiv 1 \ (mod\ 3)$ и $5 \vdots 5$. Значит, $N_3 = 1$. Аналогично получаем, что $N_5 = 1$. Больше силовских подгрупп в G нет. Значит, существует не более двух элементов порядка 3 (элементы силовской 3-подгруппы без нейтрального), не более четырех элементов порядка 5 (элементы силовской 5-подгруппы без нейтрального), и ровно один элемент порядка 1 (нейтральный). По теореме Лагранжа порядки всех элементов — это делители порядка группы. Значит, в G есть элементы порядка 15 (и их минимум 8), а группа G циклическая.

Замечание

В общем случае для pq-групп (групп из pq элементов, где p, q — простые) утверждать абелевость нельзя, но можно доказать разрешимость.

Теорема

Пусть p, q — различные простые числа, $p < q$ и $|G| = pq$. Тогда $G \simeq C_q \rtimes C_p$. Следовательно, G разрешима.

Доказательство

$\exists$ силовская p-подгруппа P и q-подгруппа Q в G. Так как порядки групп P и Q — простые числа, то $P \simeq C_p,\ Q \simeq C_q$. Покажем, что $Q \lhd G$.

$N_q \equiv 1 \ (mod\ q)$ и $p \vdots N_q$, причем $p < q$ и простое. Значит, $N_q = 1$ и $\forall x \in G\ Q^x = Q$ и $Q \lhd G$ по определению.

$P \cap Q = \{e\}$, так как $P \cap Q \leq P$ и $P \cap Q \leq Q$. По теореме Лагранжа, $|P \cap Q| = 1$.

По теореме о произведении нормальной подгруппы на подгруппу $PQ = QP \leq G$, причем $|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = |G|$ и $PQ = G$. По теореме о разложении группы в полупрямое произведение получаем $G \simeq C_q \rtimes C_p$. Тогда, $G/C_q \simeq C_p$ — абелева и разрешима, C_q так же абелева и разрешима. По критерию разрешимости в терминах нормальной подгруппы, G разрешима.

Если $P \lhd G$, то по теореме о разложении в прямое произведение верно $G \simeq P \times Q$, а значит G циклична и абелева (это верно в случае, если $N_p = 1$). Причем верна эквивалентность G абелева $\Leftrightarrow N_p = 1$.

Замечание

Если $N_p > 1$, то $N_p = q = 1 + \alpha p, \alpha \geq 1$ и $q - 1 \vdots p$

Пример неабелевой pq-группы.

Пусть $G = \{A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mid det(A) \neq 0\, b \in Z_q,\ a \in Z_q* = Z_q \setminus \{0\}\}$.

$|Z_q *| = q - 1 \vdots p$ — абелева, и, по первой теореме Силова в Z_q* найдется силовская p-подгруппа, причем она обязательно циклическая и порождается элементом порядка p. Пусть это подгруппа $H = \langle a \rangle$. Положим теперь $G = \{A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mid det(A) \neq 0\, b \in Z_q,\ a \in Z_* = H\}$, и G — неабелева.

Теорема (о разложении группы в прямое произведение силовских подгрупп)

Пусть $|G| = p_1^{k_1} ... p_s^{k_s}$ — попарно различные простые числа.

Тогда

1. силовская p-подгруппа нормальна в $G \Leftrightarrow N_p = 1$
2. $G = P_1 \times ... \times P_s \Leftrightarrow \forall i\ P_i \lhd G$

Доказательство

1. P — силовская p-подгруппа, $P \triangleleft G \Leftrightarrow \forall x \in G \ P^x = P \Leftrightarrow N_p = 1$

2. **Достаточность**. Пусть $P_1, ..., P_s$ — силовские p_i-подгруппы и $P_i \triangleleft G$.

   Индукция по s.

   База: Для $s = 1$ очевидно. Переход: Пусть теорема верна для всех G, что $|G| = p_1^{k_1}...p_{s-1}^{k_{s-1}}$. Рассмотрим произведение первых $s-1$ групп: $P_1...P_{s-1} \triangleleft G$, $P_s \triangleleft G$, причем $P_s \cap (P_1...P_{s-1}) = \{e\}$, так как $\forall z \in P_s \cap (P_1...P_{s-1})$ $ord(z) = 1 \Rightarrow z = e$. Значит, $G = (P_1...P_{s-1}) \times P_s$ по теореме о разложении группы в прямую сумму. К $P_1...P_{s-1}$ применимо предположение индукции, и значит $G = P_1 \times ... \times P_s$

   Необходимость. Пусть $G = P_1 \times ... \times P_s$. $|P_1 \times ... \times P_s| = p_1^{k_1}...p_s^{k_s} \Rightarrow$ слева присутствуют все силовские подгруппы в G. По определению прямого произведения, $\forall i$ $P_i \triangleleft G$.

Упражнение

Пусть $G = A \times B$ — внутреннее прямое произведение подгрупп ($A \cap B = \{e\}$ по определению внутреннего прямого произведения). Доказать, что всякая силовская p-подгруппа в G раскладывается в прямое произведение силовских p-подгрупп в A и B

Идея доказательства

$\forall x \in G$ $X = x_A x_B$, $x_A \in A$, $x_B \in B$ и разложение единственно. Рассмотрим гомоморфизмы $\phi : G \to A$, $\phi(x) = x_A$ и $\psi : G \to B$, $\psi(x) = x_B$. Если P — силовская p-подгруппа, то $\phi(P) \leq A$ и $\psi(P) \leq B$. Очевидно, что $P \leq \phi(P) \times \psi(P)$. Осталось доказать равенство $P = \phi(P) \times \psi(P)$.