# Теория групп. Лекция 3

Штепин Вадим Владимирович

19 сентября 2019 г.

## Теорема о гомоморфизмах и изоморфизмах

**Замечание** Если $\phi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм, то $Im(\phi) \leq G_2,\ Ker(\phi) \triangleleft G_1$

Опр. Сюръективный гомоморфизм называется **эпиморфизмом**

Опр. Инъективный гомоморфизм называется **мономорфизмом**

Опр. Гомоморфизм $\phi : G \to G$ называется **эндоморфизм**

**Примеры:**

1. $G \to \{e\} \subset G_2$ — тривиальный гомоморфизм
2. $\phi : Z \to Z_n$, $\phi(x)$ — класс вычетов по модулю $n$, которому принадлежит $x$
3. $GL_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^*,\ \phi(A) = det(A)$. Очевидно, $ker(\phi) = SL_n(\mathbb{F}) \triangleleft GL_n(F)$
4. $\epsilon : S_N \to \{\pm 1\}$ — четность подстановки. $Ker(\phi) = A_n \triangleleft S_n$
5. $Aff(\mathbb{R}^2)$ — группа аффинных преобразований в плоскости. $\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Групповая операция — композиция. $T : Aff(\mathbb{R}^2) \to GL_n(\mathbb{R}), T(\phi)$ — матрица $A$ (матрица преобразования).

   **Упражнение.** Проверить, что это гомоморфизм.
   $Ker(T) = \{\phi \mid T(\phi) = E\}$ — группа параллельных переносов на плоскости (или группа сдвигов).

   **Вывод:** Группа сдвигов — нормальная в группе афинных преобразований.

## 1 Определение факторгруппы

**Теорема** Пусть $H \triangleleft G$. Тогда множество смежных классов $G/H$ — группа относительно операции умножения подмножеств.

**Доказательство**

1. Определенность операции. $(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)H \in G/H$, так как $H \triangleleft G$

2. Ассоциативность. Мы показали, как умножаются смежные классы по $H$, порожденные элементами $G$. Тогда очевидно, что $((aH)(bH))(cH) = ((ab)H)(cH) = (ab)cH = a(bc)H = (aH)((bH)(cH))$

3. Нейтральный элемент — это $eH = H$, так как $(eH)(aH) = (aH)(eH) = (aH)$

4. Обратный элемент. $(aH)^{-1} = a^{-1}H$, так как $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = H = (aH)(a^{-1}H)$.

Опр. Построеннная группа называется **факторгруппой** $G$ по $H$ и обозначается $G/H$.

**Утв.** Пусть $G$ — группа и $H \triangleleft G$ Тогда $p : G \to G/H$, определяемое равенством $p(a) = aH$ является сюръективным гомоморфизмом $G$ на $G/H$ и $Ker(p) = H$.

**Доказательство**
$\forall a, b \in G: \ p(a)p(b) = aHbH = abH = p(ab)$ — гомоморфизм.
$\forall aH \in G/H \ \exists a \in G \ p(a) = aH$ — сюръективность.
$Ker(p) = \{a \in G \mid p(a) = H\} = \{a \in G \mid aH = H\} = H$.

Опр. Построенный сюръективный гомоморфизм — **канонический эпиморфизм (каноническая сюръекция)** группы на факторгруппу

**Теорема (основная теорема о гомоморфизме)**
Пусть $G, K$ — группы, $\phi : G \to K$ — гомоморфизм, $H = Ker(\phi) \triangleleft G$. Тогда $Im(\phi) \simeq G/H$, причем существует изоморфизм $\psi : Im(\phi) \to G/H$, при котором $\psi \circ \phi = p$ (канонический эпиморфизм, построенный выше).

**Доказательство**

1. Построение $\psi : Im(\phi) \to G/H$.

   Пусть $k \in Im(\phi)$. Тогда $\exists a \in G \ \phi(a) = k$. Определим $\psi(k) = \phi^{-1}(k) = \{a \in G \mid \phi(a) = k\}$ — полный прообраз. Покажем, что $\phi^{-1}(k) = aH$.

   $\phi(aH) = \phi(a)\phi(H) = \phi(a) * e_2 = k \Rightarrow aH \subset \phi^{-1}(k)$.

   Обратно, пусть $b \in \phi^{-1}(k)$ — произвольный элемент. Тогда $\phi(b) = k$, но $\phi(a) = k$. Значит, $\phi(a^{-1}b) = e_2$ — нейтральный элемент $K \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow b \in aH \Rightarrow \phi^{-1}(k) \in aH$

2. $\psi$ — гомоморфизм $Im(\phi)$ в $G/H$.

   Пусть $k_1, k_2 \in Im(\phi)$ и $\phi(a_1) = k_1, \phi(a_2) = k_2 \Rightarrow \psi(k_1) = a_1H, \psi(k_2) = a_2H$. Тогда $\phi(a_1a_2) = k_1k_2 \Rightarrow \psi(k_1k_2) = a_1a_2H = \psi(k_1)\psi(k_2)$.

3. $\psi$ — инъективно

   Пусть $k_1 \neq k_2$ и $\psi(k_1) = \psi(k_2)$. Тогда $\psi(k_1) = a_1H = a_2H = \psi(k_2)$, где $a_1, a_2$ — прообразы $k_1, k_2$. Значит, $\phi(a_1H) = \phi(a_2H) \Rightarrow \phi(a_1) = \phi(a_2) \Rightarrow k_1 = k_2$

4. $\psi$ — сюръективно.

   Пусть $aH \in G/H$. Тогда $\phi(a) = k \in Im(\phi) \Rightarrow \psi(k) = aH$

   Делаем вывод, что $\psi$ — изоморфизм.

5. Условие $\psi \circ \phi = p$

   Пусть $a \in G$. $\phi(a) = k \Rightarrow \psi(k) = \phi^{-1}(k) = aH$. Значит, $(\psi \circ \phi)(a) = \psi(k) = aH = p(a)$

Для запоминания теоремы полезно следующее четверостишье:
Гомоморфный образ группы
В честь победы коммунизма
Изоморфен факторгруппе
По ядру гомоморфизма

**Пример:** Построить факторгруппу $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ и найти, какой известной группе она изоморфна. $H = SL_n(\mathbb{R} : AH = BH,\ A, B$ — матрицы $\Leftrightarrow A^{-1}B \in H \Leftrightarrow det(A) = det(B)$. Класс смежности состоит из матриц с одинаковым определителем и параметризуется ненулевым числом $d$.

Пусть $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*,\ \phi(A) = det(A)$, причем $\phi$ сюръективен, так т.к. $\forall d \in \mathbb{R}^* \exists A \in GL_n(\mathbb{R}),\ det(A) = d$

По основной теореме о гомоморфизме $Ker(\phi) = SL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq Im(\phi) = \mathbb{R}$.

**Теорема (первая теорема об изоморфизме)**
Пусть $G$ — группа, $H \triangleleft G, K \leq G$. Тогда:

1. $HK = KH \leq G$
2. $(H \cap K) \triangleleft K$
3. $HK/H \simeq K/(H \cap K)$

**Доказательство**

1. Было доказано
2. Очевидно, что $(H \cap K) \leq K$. Пусть $a \in H \cap K, x \in K$. Проверим, что $a^x = x^{-1}ax \in H \cap K$. Поскольку $H$ — нормальная, то $a^x \in H$. Поскольку $x \in K$, то $x^{-1} \in K$ и $a^x \in K$. Значит, $a^x = x^{-1}ax \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \triangleleft K$
3. Рассмотрим $\phi : HK \to HK/H$ (очевидно, $H \triangleleft HK$, т.к. $H \triangleleft G$)

   $\phi(HK) = \phi(H)\phi(K) = e\phi(K) = \phi(K) \Rightarrow \phi\restriction_K : K \to HK/H$ — сюръективно.

   $Ker(\phi\restriction_K) = \{a \in K \mid aH = H\} = \{a \in K \mid a \in H\} = H \cap K$

   По основной теореме о гомоморфизме:

   $Im(\phi) = HK/H \simeq K/(k \cap H) = K/Ker(\phi)$

**Теорема (вторая теорема об изоморфизме; теорема о соответствии)**
Пусть $Sub(G)$ — множество подгрупп $G$. $Inter(H, G)$ — множество подгрупп, занимающих промежуточное положение между $H$ и $G$. $Inter(H, G) = \{K \leq G \mid H \leq K \leq G\}$. Пусть $H \triangleleft\ G$ и $H \leq K \leq G$. Тогда

1. $K/H \leq G/H$
2. Отображение $\phi : Inter(H, G) \to Sub(G/H)$ $\phi(K) = K/H$ — осуществляет взаимнооднозначное соответствие между $Inter(H, G)$ и $Sub(G/H)$, причем $\phi$ сохраняет включение (но не обязательно является гомоморфизмом)
3. Отображение $\phi$ сохраняет отношение нормальности: $K \triangleleft G \Leftrightarrow (K/H) \triangleleft (G/H)$ Причем, если верно одно из этих эквивалентных условий, то имеет место изоморфизм $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$

**Доказательство**

1. $\forall k_1, k_2 \in K\ k_1H * k_2H = k_1k_2H \in K/H$ — замкнуто относительно композиции

   $\forall k \in K\ (kH)^{-1} = k^{-1}H \in K/H$ — замкнуто относительно взятия обратного

2. $K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_1/H \leq K_2/H$ — сохраняет включение (доказывается аналогично пункту 1) Проверим, что $\phi(K_1) = \phi(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2$. Пусть $\phi(K_1) = \phi(K_2)$. Тогда, поскольку $\phi$ сохраняет включение, верно $K_1 \leq K_2$ и $K_2 \leq K_1$, значит $K_2 = K_1$ — инъективность.

   Проверим сюръективность. Пусть $S \leq G/H, p : G \to G/H$ — канонический эпиморфизм. Тогда $p^{-1}(S)$ — искомый прообраз $S$ при отображении $\phi$. Проверим, что $p^{-1}(S)$ — подгруппа.

   $\forall a, b \in p^{-1}(S) \Rightarrow p(a), p(b) \in S \Rightarrow p(ab) \in S \Rightarrow ab \in p^{-1}(S)$.

   $\forall a \in p^{-1}(S) \Rightarrow p(a^{-1}) \in S \Rightarrow a^{-1} \in p^{-1}(S)$.

   $p^{-1}(eH) = H$ — $eH$ нейтральный в факторгруппе $G/H$. Поскольку $S \leq G/H$, то $eH \in S$ и $H \leq p^{-1}(S) \Rightarrow H \leq p^{-1}(S) \leq G \Rightarrow p^{-1}(S) \in Inter(H, G)$

   Причем, $\phi(p^{-1}(S)) = S$, так как $p^{-1}(S)$ — подгруппа элементов, которым сопоставляются смежные классы из $S$. Тогда, факторизуя $p^{-1}(S)$ по $H$ мы получаем $S$.

3. Последний пункт будет доказан на следующей лекции