

# Теория групп. Лекция 7

Штепин Вадим Владимирович

17 октября 2019 г.

## 1 Полупрямое произведение групп

**Утв.**

$A \rtimes B$  — группа.

**Доказательство**

Очевидно, что  $A \rtimes B$  замкнуто относительно произведения. Проверим ассоциативность:

$$((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1 I_{b_1}(a_2), b_1 b_2)(a_3, b_3) = (a_1 I_{b_1}(a_2) I_{b_1 b_2}(a_3), b_1 b_2 b_3)$$

$$(a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)) = (a_1, b_1)(a_2 I_{b_2}(a_3), b_2 b_3) = (a_1 I_{b_1}(a_2 I_{b_2}(a_3)), b_1 b_2 b_3)$$

$$\text{Так как } I_{b_1} \text{ — гомоморфизм } \Rightarrow (I_{b_1}(a_2 I_{b_2}(a_3))) = I_{b_1}(a_2) I_{b_1 b_2}(a_3)$$

Ассоциативность доказана.

Нейтральный элемент  $(e, e) \in A \rtimes B$ , так как  $\forall b \in B \ I_b(e) = e$ .

Обратный элемент  $(a, b)^{-1} = (I_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})$ . Проверим это:

$$(I_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}) I_{b^{-1} b}(a), b^{-1} b) = (I_{b^{-1}}(e), e) = (e, e)$$

**Теорема (о свойствах полупрямого произведения)**

Пусть  $A, B$  вложены в  $A \rtimes B$  естественным образом:  $A \simeq A \times e$ ,  $B \simeq e \times B$

Тогда:

1.  $A \triangleleft A \rtimes B$
2.  $(A \rtimes B)/A \simeq B$
3.  $A \rtimes B \simeq AB$ , причем  $A \cap B = \{e\}$

**Доказательство**

1. Пусть  $(a, b) \in A \rtimes B$  и  $(a', e) \in A$ . Тогда  $(a, b)^{-1}(a', e)(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})(a', e)(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}) I_{b^{-1}}(a'), b^{-1})(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}) I_{b^{-1}}(a') I_{b^{-1}}(a), e) \in A$
2.  $\phi_i : A \rtimes B \rightarrow B$ ,  $\phi(a, b) = b$   
 $\phi((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = b_1 b_2 = \phi(a_1, b_1) \phi(a_2, b_2)$  — гомоморфизм. Очевидно,  $\phi$  сюръективен.  
 $\text{Ker}(\phi) = \{(a, b) \mid \phi(a, b) = e\} = A$ . По теореме об гомоморфизме  $\text{Im}(\phi) = B \simeq (A \rtimes B)/A$
3.  $(a, e)(e, b) = (a I_e(e), b) = (a, b)$

**Теорема (о разложении группы в полупрямое произведение подгрупп)**

Пусть  $A, B$  — подгруппы в  $G$  и

1.  $A \cap B = \{e\}$

2.  $A \triangleleft G$

3.  $AB = G$

Тогда  $G \simeq A \rtimes B$ , где  $I_b(a) = bab^{-1}$

#### Доказательство

Пусть  $\phi : A \rtimes B \rightarrow G$ ,  $\phi(a, b) = ab$ .  $\phi$  — гомоморфизм, так как  $\phi(a_1, b_1)\phi(a_2, b_2) = a_1b_1a_2b_2 = a_1b_1a_2b_1^{-1}b_1b_2 = \phi((a_1, b_1)(a_2, b_2))$ .  $I_{b_1}(a_2) \in A$  так как  $A$  — нормальная.

$\phi$  сюръективен, так как  $\forall x \in G \exists a \in A, b \in B$ , что  $x = ab = \phi(a, b)$ .  $\text{Ker}(\phi) = \{e\}$ , так как  $A \cap B = \{e\}$ .

Значит,  $G \simeq A \rtimes B$ .

#### Примеры:

1.  $S_n = A_n \rtimes \langle (12) \rangle$

#### Доказательство

$G = S_n$ ,  $A_n \triangleleft G$ , так как  $|S_n : A_n| = 2$ .  $A_n * \langle (12) \rangle = A_n * \{e, (12)\}$  — это объединение всех четных и всех нечетных подстановок, так как их поровну. Значит,  $S_n = A_n \rtimes \langle (12) \rangle$

2.  $S_n = V_4 \rtimes S_3$ , где  $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  — четверная группа Клейна.  $V_4 \triangleleft S_4$  так как  $V_4$  представляет собой дизъюнктное объединение классов сопряженных элементов.  $V_4 \cap S_3 = \{e\}$ ,  $|V_4| = 4$ ,  $|S_3| = 6$ . Проверим, что все произведения элементов этих групп различны. Пусть  $a_1, a_2 \in V_4, b_1, b_2 \in S_3$  и  $a_1b_1 = a_2b_2$ . Значит  $b_1b_2^{-1} = a_1^{-1}a_2 \in V_4 \cap S_3 = \{e\}$  и  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ .

**Упражнение.** Придумать группу  $G$ , что  $G = H \triangleleft S_4$ , где  $|H| = 8$ ,  $H$  — обобщение группы Клейна.

## 2 Коммутант. Основная теорема о коммутанте

Опр. Пусть  $G$  — мультипликативная группа. Тогда  $\forall a, b \in G$  формальное произведение  $\overline{[a, b]} = aba^{-1}b^{-1}$  — **коммутатор** элементов  $a, b$ .

#### Утв. (о свойствах коммутатора)

1.  $xy = [x, y]yx$

2.  $xy = yx \Leftrightarrow [x, y] = e$

3.  $[x, y]^{-1} = [y, x]$

4.  $\forall a \in G [x^a, y^a] = [x, y]^a$

#### Доказательство

1. Первое равенство означает, что коммутатор — это корректирующий множитель, необходимый для перестановки  $xy$  на  $yx$ .

2.  $xy = yx \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e$

3.  $[x, y]^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$

$$4. [x^a, y^a] = [a^{-1}xa, a^{-1}ya] = a^{-1}xaa^{-1}yaa^{-1}x^{-1}aa^{-1}y^{-1}a = [x, y]^a$$

**Опр. Коммутант группы (производная подгруппа)** группы  $G$  — это подгруппа  $G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$

**Замечание**  $G' = \{[x_1, y_1] \dots [x_k, y_k] \mid x_i, y_i \in G, k \in \mathbb{N}\}$

**Утв.**

Пусть  $\phi : G \rightarrow H$  — гомоморфизм групп. Тогда  $\phi(G') \leq H'$ . Если  $\phi$  сюръективен, то  $\phi(G') = H'$

**Доказательство**

$\forall x, y \in G \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ , так как  $\phi$  — гомоморфизм. Поскольку  $\phi(x), \phi(y) \in H$ , то и  $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \in H$ , значит  $\phi(G') \leq H'$ , так как образ подгруппы — это всегда подгруппа.

Пусть теперь  $\phi$  сюръективен. Покажем, что  $H' \leq \phi(G')$ . Пусть  $h_1, h_2 \in H$ . Тогда  $\exists x_1, x_2 \in G \phi(x_1) = h_1, \phi(x_2) = h_2$ . Значит,  $[h_1, h_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \phi([x_1, x_2])$  и  $H' \leq \phi(G')$ .

**Следствие**

Если  $\phi$  — гомоморфизм  $G$  в абелеву группу  $H$ , то  $\phi(G') = \{e\}$ .

**Доказательство**

$$\phi(G') \leq H' = \{e\}$$

**Следствие**

Если  $K \triangleleft G$ , то  $K' \triangleleft G$

**Доказательство**

$\phi : K \rightarrow G, \phi(k) = k^x$  для некоторого фиксированного  $x \in G$  — гомоморфизм (внутренний автоморфизм).

$\phi : K \rightarrow K$  сюръективен, так как  $K \triangleleft G$ . Значит,  $\phi(K') = K' \Rightarrow \forall a \in K', \forall x \in G a^x \in K' \Rightarrow K' \triangleleft G$ .

**Следствие**

$\forall G$  (группа) верно  $G' \triangleleft G$  (в предыдущем утв. положим  $K = G$ ).