Теория групп. Лекция 4

Штепин Вадим Владимирович

26 сентября 2019 г.

Теорема (вторая теорема об изоморфизме; теорема о соответствии)

Пусть $Sub(G)$ — множество подгрупп G. $Inter(H,G)$ — множество подгрупп, занимающее промежуточное положение между H и G. $Inter(H,G) = \{K \leq G \mid H \leq K \leq G\}$. Пусть $H \triangleleft G$ и $H \leq K \leq G$. Тогда

1. $K/H \leq G/H$
2. Отображение $\phi : Inter(H,G) \to Sub(G/H)$ $\phi(K) = K/H$ — осуществляет взаимнооднозначное соответствие между $Inter(H,G)$ и $Sub(G/H)$, причем ϕ сохраняет включение (но не обязательно является гомоморфизмом)
3. Отображение ϕ сохраняет отношение нормальности: $K \triangleleft G \Leftrightarrow (K/H) \triangleleft (G/H)$ Причем, если верно одно из этих эквивалентных условий, то имеет место изоморфизм $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$

Доказательство(продолжение)

$(K/H) \triangleleft (G/H)$. Пусть $k \in K$, $x \in G$ — произвольные. Тогда $(kH)^{xH} \in K/H \Leftrightarrow (xH)^{-1}(kH)(xH) \in K/H \Leftrightarrow (x^{-1}H)(kH)(xH) \in K/H \Leftrightarrow (x^{-1}kxH \in K/H \Leftrightarrow k^xH \in K/H \Leftrightarrow k^x \in K$. Значит, $(K/H) \triangleleft (G/H) \Leftrightarrow K \triangleleft G$.

Рассмотрим $p : G \to G/H$, $\psi : G/H \to (G/H)/(K/H)$ — канонические эпиморфизмы. Тогда $\psi \circ p : G \to (G/H)/(K/H)$ — сюръекция.

$Ker(\psi \circ p) = (\psi \circ p)^{-1}(e) = (p^{-1} \circ \psi^{-1})(e) = p^{-1}(K/H)$, так как $\psi^{-1}(e) = Ker(\psi) = K/H$. $p^{-1}(K/H) = K$.

По теореме о гомоморфизме: $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$.

Примеры:

1. Первая теорема об изоморфизме

   $G = S_4$; $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\} \simeq S_3$. $V_4 = K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4$ — четверная группа Клейна. Так как $|K| = 4$, то K абелева. K — нормальная, так как является дизъюнктным объединением классов сопряженных элементов S_4. Очевидно, что $H \cap K = \{e\}$. Все произведения hk, где $h \in H$, $k \in K$ попарно различны. Докажем это. Пусть не так, значит $h_1k_1 = h_2k_2 \Rightarrow h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1}$. Очевидно, $h_2^{-1}h_1 \in H$, $k_2k_1^{-1} \in K$. Значит, $h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} = e$, так как оба произведения лежат в $H \cap K = \{e\}$.

   Значит, всего таких произведений $|HK| = |H||K| = 24$ и $HK = S_4$. По первой теореме получаем: $S_4/V_4 = S_3/e = S_3$.

2. Теорема о соответствии

   $G = (Z, +)$, $H = nZ$, $G/H = Z_n$. Пусть n делится на k. Рассмотрим подгруппу $kZ_n \leq Z_n$ — группа кратных k вычетов.

   Вопрос: Какая подгруппа $K \in Inter(H, G)$ соответствует подгруппе kZ_n?

   У циклической группы всякая подргуппа и всякая факторгруппа является циклической.

   Используем теорему о соответствии: $G/K \simeq Z_n/kZ_n$, а $|kZ_n| = \frac{n}{k}$

   $|Z_n/kZ_n| = \frac{n}{(\frac{n}{k})} = k$, причем G/K — циклична $\Rightarrow G/K \simeq Z_k$. Чтобы получить группу из k элементов, нужно факторизовать по $K = kZ$.

1 Действие группы на множество

Пусть G — группа, Ω — непустое множество.

Опр. **Действие** G на Ω — это отображение $G \bigtimes \Omega \to \Omega$, которое действует так: $(a, \omega) \to a\omega = a(\omega)$

Причем отображение удовлетворяет аксиомам:

1. Групповой операции соответствует композиция действий: $\forall a, b \in G\ (ab)\omega = a(b(\omega))$
2. $e \in G$ действует тождественным образом.

Опр. Пусть G — группа и Ω — непустое множество, $S(\Omega)$ — группа биекций Ω на себя относительно композиции. **Действие** G на Ω — произвольный гомоморфизм $I : G \to S(\Omega)$

Теорема (эквивалентность определений) Определения действия эквивалентны
Доказательство

1. $1 \Rightarrow 2$

   Пусть $I_a(\omega) = a\omega$. Покажем, что I_a — биекция. Для этого явно предъявим единственный обратный элемент: $(I_{a^{-1}} \circ I_a)(\omega) = I_{a^{-1}}(I_a(\omega)) = a^{-1}a\omega = e\omega = \omega$. Аналогично, $(I_a \circ I_{a^{-1}})(\omega) = \omega$.

   Проверим условие гомоморфизма: $I_{ab} = I_a I_b$, так как $I_{ab}(\omega) = ab\omega = I_a(I_b(\omega)) = (I_a \circ I_b)(\omega))$

2. $2 \Rightarrow 1$

   Построим отображение, соответствующее первому определению. $(a, \omega) \to I_a(\omega)$. Причем $\forall \omega \in \Omega\ I_{ab}(\omega) = I_a(\omega) I_b(\omega),\ I_e(\omega) = \omega$

Опр. Пусть $I \to S(\Omega)$ — действие. Тогда $I_a \in S(\Omega)$ — **действие элемента** a на Ω.

Опр. **Ядро действия** $Ker(I) = \{a \in G \mid \forall \omega \in \Omega a(\omega) = \omega\}$. $Ker(I) \triangleleft G$ как ядро гомоморфизма.

Замечание. Всякая нормальная подгруппа является ядром канонического гомоморфизма $p : G \to G/H$

Опр. Действие I **эффективное(точное)**, если $Ker(I) = \{e\}$

Опр. Действие I — **свободное**, если $\forall a \neq e \in G$ и $\forall \omega \in \Omega$ $a(\omega) \neq \omega$.

Замечание. Если I свободное, то I эффективное. Обратное неверно

Примеры:

1. Пусть $G = SO(2)$ — группа вращений плоскости. Тождественное преобразование $e \in SO(2)$ — нейтральный элемент, значит действие группы G на точки плоскости эффективно. $A \in SO(2)$ $\exists \omega = (0,0)$, что $A(0,0) = 0$, значит оно не свободно.

2. Опр. Пусть V — линейное пространство над F. **Линейное представление** группы G в V — произвольный гомоморфизм $T : G \to GL(V)$, где $GL(V)$ — группа невырожденных преобразований в V.

   Матричное представление: $T : G \to GL_n(F)$.

   Легко видеть, что матричное представление — частный случай действия.

3. Пусть $G \subset GL_n(F)$.

   Стандартное представление G в пространство F^n — представление, задаваемое равенством $T(A)(x) = Ax$

4. Пусть $G = S_n,\ \Omega = \{1, 2, ..., n\}$. $I_\sigma(k) = \sigma(k)$ — действие группы S_n.

5. G — группа, $\Omega = H \leq G$, G/H — множество левых смежных классов, $I_a(gH) = agH \in G/H$.

   $I_{ab}(gH) = abgH = I_a(I_b(gH)) = (I_a \circ I_b)(gH)$.

   Этот пример универсальный, так как всякое действие есть действие над множеством левых смежных классов.

Опр. Пусть $I : G \to S(\Omega)$ — действие. **Орбита** элемента ω — множество $G(\omega) = \{a(\omega) \mid a \in G\}$

Пример.
Если $G = SO(3)$ — группа вращений пространства, ω — точка в R^3, то $G(\omega)$ — сфера радиуса, равного расстоянию от ω до начала координат.

Опр. $\omega_1 \sim \omega_2$, если $\omega_2 \in G(\omega_1)$

Утв.
$\sim$ — отношение эквивалентности.
Доказательство

1. $\omega \sim \omega$, так как $e(\omega) = \omega$

2. $\omega_2 \sim \omega_1 \Rightarrow \omega_2 \in G(\omega_1) \Rightarrow \exists a \in G\ \omega_2 = a\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = a^{-1}\omega_2 \Rightarrow \omega_1 \in G(\omega_2) \Rightarrow \omega_1 \sim \omega_2$

3. $\omega_1 \sim \omega_2,\ \omega_2 \sim \omega_3 \Rightarrow \exists a, b \in G:\ \omega_2 = a\omega_1,\ \omega_3 = b\omega_2 = ba\omega_1 \Rightarrow \omega_3 \in G(\omega_1) \Rightarrow \omega_1 \sim \omega_3$

Опр. Классы эквивалентности — **орбиты** действия. Множество всех орбит обозначается Ω/G

Опр. **Стационарная подгруппа** $I : G \to S(\Omega)$. Пусть ω — фиксированная. $St(\omega) = \{a \in G \mid a\omega = \omega\}$ — **стационарная подгруппа (стабилизатор ω)**.

Опр. Пусть $\omega_2 \in G(\omega_1)$ Множество $Shift(\omega_1, \omega_2) = \{a \in G \mid a(\omega_1) = \omega_2\}$ — все элементы, сдвигающие первую точку во вторую.

Утв.

Пусть $\omega' \in G(\omega)$. Тогда $Shift(\omega, \omega') = St(\omega')s = sSt(\omega)$, где s — произвольный элемент из $Shift(\omega, \omega')$.

Доказательство

1. $St(\omega')s \subset Shift(\omega, \omega')$ и $sSt(\omega) \subset Shift(\omega, \omega')$, так как $St(\omega') * s(\omega) = St(\omega')(\omega') = \omega'$ и $sSt(\omega)(\omega) = s(\omega) = \omega'$

   Проверим обратное, то есть что $Shift(\omega, \omega') \subset St(\omega')s \Leftrightarrow Shift(\omega, \omega')s^{-1} \subset St(\omega')$. Это верно, так как $Shift(\omega, \omega')s^{-1}(\omega') = \omega'$

   Верно и то, что $Shift(\omega, \omega') \subset sSt(\omega) \Leftrightarrow s^{-1}Shift(\omega, \omega') \subset St(\omega)$, так как $s^{-1}Shift(\omega, \omega')(\omega) = \omega$

Следствие Если $\omega \sim \omega'$, то $\forall s \in Shift(\omega, \omega')$ $St(\omega') = sSt(\omega)s^{-1}$