Теория групп. Лекция 8

Штепин Вадим Владимирович

24 октября 2019 г.

1 Основная теорема о коммутанте

Опр. **Взаимный коммутант** $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$, $H, K \leq G$.

Замечание. Если $H, K \triangleleft G$, то $[H, K] \triangleleft G$.
Доказательство
$\forall h \in H, k \in K, g \in G$ $g[h, k]g^{-1} = [ghg^{-1}, gkg^{-1}] \in [H, K]$ в силу нормальности H и K.

Утв. (критерий нормальности)
$H \triangleleft G \Leftrightarrow [H, G] \subset H$
Доказательство

1. Пусть $H \triangleleft G$. Тогда $[h, x] = hxh^{-1}x^{-1} \in H$, так как $xh^{-1}x^{-1} \in H$. Значит, $[H, G] \subset H$
2. Пусть $[H, G] \in H$. Рассмотрим $a \in H, x \in G$. $a^x = x^{-1}ax = aa^{-1}x^{-1}ax = a[a^{-1}x^{-1}] \in H$. По критерию нормальности, $H \triangleleft G$

Теорема (основная теорема о коммутанте)
Пусть G — группа, G' — коммутант. Тогда:

1. G/G' — абелева
2. $H \triangleleft G, G/H$ — абелева $\Leftrightarrow G' \leq H \leq G$

Доказательство

1. $G' \triangleleft G$ по следствию. Пусть $p : G \to G/G'$ — каноническая сюръекция. $\forall x, y \in G$ $[p(x), p(y)] = p([x, y])$, так как p — гомоморфизм. $[x, y] \in G' = Ker(p) \Rightarrow p([x, y]) = e \Rightarrow p(x)p(y) = p(y)p(x)$. По сюръективности: $\forall a, b \in G/G' \exists x, y \in G'$ $p(x) = a, p(y) = b$ и $ab = ba$.
2. Пусть $H \triangleleft G$ и G/H абелева. $\forall x, y \in G$ верно $xHyH = yHxH \Leftrightarrow xyH = yxH \Leftrightarrow [x, y]H = H \Leftrightarrow [x, y] \in H$ и $G' \subset H$.

   Пусть $G' \leq H \leq G$.

   $[H, G] \subset G' \leq H \Rightarrow H \triangleleft G$

   $G' \leq H \Rightarrow \forall x, y \in G$ $[x, y] \in H \Rightarrow [x, y]H = H \to xyH = yxH \Rightarrow xHyH = yHxH$ и G/H — абелева.

Следствие
Коммутант — наименьшая нормальная подгруппа в G, что факторгруппа по ней абелева. Коммутант можно рассматривать как меру неабелевости. Чем больше в группе коммутаторов, отличных от e, тем больше она отлична от абелевой.

2 Нормальная подгруппа, порожденная множеством

Напоминание. Если $M \subset G$, то $\langle M \rangle = \cap_{H \leq G, M \subset H} H$

Опр. **Нормальная подгруппа, порожденная множеством** M — это группа $\langle M \rangle_n = \cap_{H \triangleleft G, M \subset H} H$

Замечание. $M \subset \langle M \rangle_n \triangleleft G$

Теорема (об описании нормальной подгруппы, порожденной множеством)
$\langle M \rangle_n = \langle m^x \mid m \in M, x \in G \rangle$

Доказательство

Обозначим $\langle M^G \rangle = \langle m^x \mid m \in M, x \in G \rangle$.

Покажем, что $\langle M^G \rangle \subset \langle M \rangle_n$.

$\forall m \in M$ $m \in \langle M \rangle_n \Leftrightarrow \forall x \in G m^x \in \langle M \rangle_n$. Значит, $\langle M^G \rangle \subset \langle M \rangle_n$.

Проверим, что $\langle M^G \rangle \triangleleft G$. Пусть $x \in G$. $\langle M^G \rangle^x = \langle m^{yx} \mid m \in M, y \in G \rangle \subset \langle M^G \rangle \Rightarrow \langle M^G \rangle \triangleleft G \Rightarrow \langle M^G \rangle = \langle M \rangle_n$

Теорема

Пусть $G = \langle M \rangle$. Тогда $G' = \langle [m_1, m_2] \mid m_1, m_2 \in M \rangle_n$

Доказательство

Обозначим $H = \langle [m_1, m_2] \mid m_1, m_2 \in M \rangle_n \subset G'$.

$\forall m_1, m_2 \in M$ $[m_1, m_2]^x \in G'$, так как $[m_1, m_2] \in G' \triangleleft G$. Значит, $H \leq G'$ (по предыдущей теореме).

Пусть $p : G \to G/H$ — каноническая сюръекция. $G/H = \langle p(M) \rangle$. $\forall m_1, m_2 \in M$ $[p(m_1), p(m_2)] = p([m_1, m_2]) = e$, так как $[m_1, m_2] \in H = Ker(p)$. Значит, G/H порождена взаимно коммутирующими элементами и G/H абелева. По основной теореме о коммутанте $G' \leq H$.

Пример.

$S_n' = A_n$

Доказательство

$S_n = \langle (i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$.

Значит, $S_n' = \langle [(i, j), (k, l)] \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq n \rangle_n$. Если i, j, k, l не содержат общих элементов, то $[(i, j), (k, l)] = e$. Так же, $[(i, j), (i, k)] = (i, j)(i, k)(i, j)(i, k) = (i, j, k)$

$S_n' = \langle (i, j, k) \rangle_n = \langle (i, j, k) \rangle$, так как сопряженный к циклу длины 3 — это цикл длины 3. Любую четную подстановку можно разложить в четное число транспозиций и $(i, j)(k, l) = (i, j, k)(j, k, l)$, если транспозиции не пересекаются. Значит, $A_n = \langle (i, j, k) \rangle = A_n$.

3 Разрешимые и нильпотентные подгруппы

Обозначим $G^{(0)} = G, G^{(1)} = G' = [G, G], ..., G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$.

Замечание.

$\forall n$ $G^{(n)} \triangleleft G$

Доказательство $G' \triangleleft G$ — доказано. Пусть $G^{(n-1)} \triangleleft G$. Тогда $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \triangleleft G$.

Опр. $G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} ...$ — **производный ряд** группы G.

Опр. Группа G **разрешима**, если $\exists n \in N$ $G^{(n)} = \{e\}$, то есть ряд обрывается на единичной подгруппе.

Опр. $G_0 = G, G_1 = G' = [G, G_0], ..., G_k = [G, G_{k-1}], ...$

$G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright ...$ — **нижний центральный ряд**.

Опр. Группа G **нильпотентна**, если $\exists n \in N$ $G_n = \{e\}$, то есть нижний центральный ряд обрывается на единичной подгруппе.

Опр. Наименьшее n в определениях — ступень разрешимости (нильпотентности).

Утв.

Всякая нильпотентная группа разрешима.

Доказательство

Покажем, что $\forall n \in N\ G^{(n)} \subset G_n$.

База индукции: $G_1 = G'$.

Переход индукции: Если $G^{(n-1)} \subset G_{n-1}$, то $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \leq [G, G^{(n-1)}] \subset [G, G_{n-1}] = G_n$

Если группа нильпотентна, то $G_n = \{e\}$ для некоторого n и $G^{(n)} \leq \{e\}$. Значит, $G^{(n)} = \{e\}$.

Примеры

1. Разрешимая группа ступени 0 — абелева.

   Опр. Разрешимая группа степени 1 — **метабелева**.

2. D_n — метабелева. Напомним, что D_n — это группа вращений правильного n-угольника (группа диэдра). $D_n = \langle S, R \rangle$, где S — симметрия относительно оси, проходящей через центр многоугольника и некоторую его вершину, а R — поворот на угол $\frac{2\pi}{n}$. Можно показать, что $SRS^{-1} = R^{n-1}$. Тогда $[S, R] \leq \langle R \rangle \Leftarrow D_n' \subset \langle R \rangle$ — абелева, так как $D_n'' = \{e\}$