Теория групп. Лекция 2

Штепин Вадим Владимирович

12 сентября 2019 г.

1 Нормальные подгруппы и их свойства

Опр. В случае конечной группы число левых смежных классов равно числу правых смежных классов и называется **индексом группы** — $|G/H|$

Утв. Пусть G — группа (конечная или бесконечная). Тогда $G/H \simeq H\backslash G$

Доказательство Пусть $aH \in G/H$. Тогда $(aH)^{-1} = Ha^{-1}$ $(H^{-1} = H)$ так как H — подгруппа. Операция взятия обратного элемента в группе инволютивна (обратна сама себе и в квадрате равна тождественному отображению), то полученное соответствие между левыми и правыми смежными классами - биекция.

Замечание Из этого утверждения не следует, что если $aH = bH$, то $Ha = Hb$. Контрпример: $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\},\ H = \langle(12)\rangle$. Тогда $(13)H = (123)H$, так как $(13)H = \{(13), (123)\}$ $(123)H = (13)H$, так как $(123) \in (13)H$ (первое свойство левых смежных классов). Однако $H(13) \neq H(123)$, так как $H(13) = \{(13), (132)\}$, $H(123) = \{(123), (23)\}$.

Упражнение: Доказать, что для конечной группы G $K \leq H \leq G$, то $|G : K| = |G : H||H : K|$

Опр. Пусть $H \leq G$. H — **нормальная группа (нормальный делитель, инвариантная подгруппа)**, если левостороннее разложение G по H совпадает с правосторонним: $\cup_{i\in I} x_i H = \cup_{j\in J} H y_j$, то есть разбиения состоят из одних и тех же подмножеств.

Условимся для нормальной подгруппы, говоря о смежных классах, опускать слова "левый"и "правый".

Обозначение $H \lhd G$

Теорема (критерий нормальности) Пусть $H \leq G$. Тогда $H \lhd G \Leftrightarrow \forall x \in G\ xH = Hx \Leftrightarrow x^{-1}Hx = H \Leftrightarrow xHx^{-1} = H$

Доказательство

1. Необходимость. $\forall x \in G\ \exists i \in I\ x \in x_i H;\ \exists j \in J\ x \in Hy_j$. В силу нормальности H, класс Hy_j является так же некоторым левым классом смежности. Так как $Hy_j \cap x_i H \neq \varnothing$, то по свойствам смежных классов они совпадают. Так как смежный класс порождается любым своим элементом: $xH = x_i H,\ Hx = Hy_j$. Значит, $xH = Hx$.

2. Достаточность. $\forall x \in G\ xH = Hx$, значит левостороннее и правостороннее разложения совпадают, и группа является нормальной.

Следствие. Во всякой абелевой группе всякая подгруппа является нормальной.

Следствие. Если $|G : H| = 2$, то $H \triangleleft G$

Доказательство Левостороннее разложение состоит из двух классов: $eH = H$ и $G \setminus H$ (разность множеств). Правостороннее разложение (аналогично) : $He = H$ и $G \backslash H$. Очевидно, эти разложения совпадают.

Примеры (нормальных подгрупп):

1. $A_n \triangleleft S_n$, так как $|S_n : A_n| = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$, так как есть поровну четных и нечетных подстановок.
2. $SL_n(F) \triangleleft GL_n(F)$

   Доказательство Пусть $A \in SL_n(F)$, $X \in GL_n(F)$. $X^{-1}AX \in SL_n(F)$, так как $det(X^{-1}AX) = det(X^{-1})det(A)det(X) = det(A) = 1$. По критерию нормальности, $SL_n(F)$ — нормальная.
3. Пусть τ — транспозиция из S_3. Тогда $\langle\tau\rangle \ntriangleleft S_3$

   Доказательство Транспозиции не коммутируют: $(ab)(bc) = (abc) \neq (acb) = (bc)(ab)$. Пусть $\sigma \in S_3$ — произвольная транспозиция, тогда $\sigma * \langle\tau\rangle \neq \langle\tau\rangle * \sigma$. По критерию нормальности $\langle\tau\rangle \ntriangleleft S_3$, так как $\langle\tau\rangle = \{e, \tau\}$.

Утв. Если $H_1 \triangleleft G$, $H_2 \triangleleft G$, то $H_1 \cap H_2 \triangleleft G$

Доказательство Очевидно, что $H_1 \cap H_2 \leq G$ (по критерию подгруппы). Пусть $h \in H_1 \cap H_2$ — произвольный. Проверим, что $x^{-1}hx \in H_1 \cap H_2$. Если H_1, H_2 — нормальные, то $x^{-1}hx \in H_1$ и $x^{-1}hx \in H_2$. Значит, $x^{-1}hx \in H_1 \cap H_2$.

Теорема (о произведении нормальной подгруппы на подгруппу) Пусть G — группа, $H \triangleleft G, K \leq G$, тогда $HK \leq G$. А если $K \triangleleft G$, то $HK \triangleleft G$.

Доказательство

1. Замкнутость относительно умножения. $HKHK = (HH)(KK) = HK$ - замкнуто, так $KH = \cup_{k \in K} kH = \cup_{k \in K} Hk = HK$, так как H — нормальная подгруппа.
2. Замкнутость относительно взятия обратного: $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$, так как $K, H \leq G$
3. Пусть $K \triangleleft G$. $\forall x \in G \; x^{-1}HKx = x^{-1}Hxx^{-1}Kx = HK$, так как $H, K \triangleleft G$. Значит, $HK \triangleleft G$

Замечание: Доказанная теорема верна и в случае умножения подгруппу на нормальную подгруппу.

2 Сопряжение в группе и его свойства

Опр. Пусть $a, x \in G$, тогда $a^x = x^{-1}ax$ — **сопряженный** к a.

Утв. (свойства операции сопряжения)

1. $a^{(xy)} = (a^x)^y$
2. $a^x b^x = (ab)^x$
3. Операции сопряжения и взятия обратного элемента коммутируют $(a^x)^{-1} = (a^{-1})^x$

Доказательство

1. $a^{(xy)} = (xy)^{-1}a(xy) = y^{-1}x^{-1}axy = y^{-1}a^x y = (a^x)^y$

2. $a^x b^x = x^{-1}axx^{-1}bx = x^{-1}abx = (ab)^x$

3. $(a^{-1})^x a^x = (a^{-1}a)^x = e^x = e$. В силу единственности обратного элемента, $(a^{-1})^x = (a^x)^{-1}$

Замечание Отношение сопряженности в группе — это отношение эквивалентности $a \sim b \Leftrightarrow \exists x \in G \ a = b^x$

Доказательство

1. Рефлексивность: $a^e = a$

2. Симметричность: $a \sim b \Rightarrow \exists x \in G a = b^x$. Тогда $b = a^{x^{-1}}$ и $b \sim a$

3. Пусть $a \sim b, b \sim c \Rightarrow \exists x, y \in G \ a = b^x, \ b = c^y \Rightarrow a = c^{xy} \Rightarrow a \sim c$

По теореме о классах эквивалентности, группа G разбивается в дизъюнктное объединение классов эквивалентности по отношению сопряженности.

Опр. Полученные классы называются **классами сопряженных элементов**.
Опр. $a^G = \{a^x \mid x \in G\}$ — класс сопряженных элементов, порожденный a

Пример (описание классов сопряженных элементов в S_n)

1. Пусть $\sigma \in S_n$ и $\sigma = (a_1...a_k)(b_1...b_l)....$ — произведение непересекающихся (независимых циклов) Пусть $\rho \in S_n$. $\rho^{-1}\sigma\rho = \rho^{-1}(a_1...a_k)\rho\rho^{-1}(b_1...b_l)\rho....\rho$ Посмотрим, как действует сопряжение на цикл длины k.

   Покажем, что $\rho^{-1}(a_1...a_k)\rho = (\rho^{-1}(a_1)...\rho^{-1}(a_k))$

   Доказательство

   Пусть $a_i \in \{1, ..., n\}$.

   $\rho^{-1}(a_1...a_k)\rho(\rho^{-1}(a_i)) = \rho^{-1}(a_1...a_k)(a_i) = \rho^{-1}(a_{i+1}) = (\rho^{-1}(a_1)...\rho^{-1}(a_i))(\rho^{-1}(a_i))$, если a_i присутствует в цикле. Иначе, если a_i не лежит в цикле, то $\rho^{-1}(a_1...a_k)\rho(\rho^{-1}(a_i)) = \rho^{-1}(a_i) = (\rho^{-1}(a_1)...\rho^{-1}(a_k))(\rho^{-1}(a_i))$

   То есть, сопряжение не изменяет тип цикла (количество элементов, которые цикл не переводит в самих себя). Если a имеет некоторый циклический тип (это определяется типами циклов в разложении a), то a^{S_n} состоит из всех подстановок такого циклического типа.

   Замечание. Пусть $P(n)X$ — число классов сопряженных элементов. Тогда оно равно числу разбиений n в сумму натуральных слагаемых (без учета порядка). Это верно, так как слагаемые в разбиении задают циклический тип (длины циклов в разбиении).

3 Гомоморфизм групп

Пусть $(G_1, *), (G_2, \circ)$ — группы.
Опр. $\phi : G_1 \to G_2$ — **гомоморфизм**, если $\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$
Утв.

1. При гомоморфизме $\phi(e_1) = e_2$, где e_1, e_2 — нейтральные элементы групп

2. ϕ коммутирует со взятием обратного элемента

Доказательство

1. $\phi(e_1 * e_1) = \phi(e_1) \circ \phi(e_1) = \phi(e_1)$. Умножим последнее равенство на $\phi(e_1)^{-1}$. Получаем $\phi(e_1) = e_2$

2. $\phi(a^{-1}) = \phi(a_1)^{-1}$, так как $\phi(a^{-1}) * \phi(a) = \phi(a^{-1}a) = \phi(e_1) = e_2$. В силу единственности обратного элемента $\phi(a^{-1}) = \phi(a_1)^{-1}$

Опр.

1. $Ker(\phi) = \{a \in G_1 \mid \phi(a) = e_2\}$

2. $Im(\phi) = \{\phi(a) \mid a \in G_1\}$

Утв. Пусть G_1, G_2 — мультипликативные группы (операция — произведение) и $\phi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм. Тогда:

1. $Im(\phi) \leq G_2$

2. $Ker(\phi) \vartriangleleft G_1$

Доказательство

1. Пусть $x, y \in Im(\phi) \Rightarrow \exists a, b \in G_1\ \phi(a) = x,\ \phi(b) = y \Rightarrow xy = \phi(ab) \Rightarrow xy \in Im(\phi)$. Если $x \in Im(\phi) \Rightarrow \exists a\ \phi(a) = x \Rightarrow \phi(a^{-1}) = x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in Im(\phi)$

2. Пусть $a, b \in Ker(\phi) \Rightarrow \phi(a) = \phi(b) = e_2 \Rightarrow \phi(ab) = e_2 \Rightarrow ab \in Ker(\phi)$. Если $a \in Ker(\phi) \Rightarrow \phi(a) = e_2 \Rightarrow \phi(a^{-1}) = e_2^{-1} = e_2 \Rightarrow a^{-1} \in Ker(\phi)$

   Проверим, что $Ker(\phi) \vartriangleleft G_1$. Пусть $x \in G_1, a \in Ker(\phi)$. Тогда $\phi(x^{-1}ax) = \phi(x^{-1})e_2\phi(x) = e_2 \Rightarrow x^{-1}ax \in Ker(\phi) \Rightarrow Ker(\phi) \vartriangleleft G_1$

Замечание Критерий нормальности можно сформулировать так: $H \vartriangleleft G \Leftrightarrow$ вместе с каждым элементом она содержит все его сопряженные: $\forall x \in G\ a \in H \Rightarrow a^x \in H$

Следствие Если $\phi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм и $H \leq G_1$, то $\phi(H) \leq G_2$
Доказательство $\phi\restriction_H : H \to G_2$ — гомоморфизм $\Rightarrow \phi(H) = Im(\phi\restriction_H) \leq G_2$

Упражнение Верно ли, что $H \vartriangleleft G_1$, то $\phi(H) \vartriangleleft G_2$?