

# Теория групп. Лекция 3

Штепин Вадим Владимирович

19 сентября 2019 г.

## Теорема о гомоморфизмах и изоморфизмах

**Замечание** Если  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомоморфизм, то  $Im(\phi) \leq G_2$ ,  $Ker(\phi) \triangleleft G_1$

Опр. Сюръективный гомоморфизм называется **эпиморфизмом**

Опр. Инъективный гомоморфизм называется **мономорфизмом**

Опр. Гомоморфизм  $\phi : G \rightarrow G$  называется **эндоморфизмом**

**Примеры:**

1.  $G \rightarrow \{e\} \subset G_2$  — тривиальный гомоморфизм
2.  $\phi : Z \rightarrow Z_n$ ,  $\phi(x)$  — класс вычетов по модулю  $n$ , которому принадлежит  $x$
3.  $GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^*$ ,  $\phi(A) = \det(A)$ . Очевидно,  $ker(\phi) = SL_n(\mathbb{F}) \triangleleft GL_n(F)$
4.  $\epsilon : S_N \rightarrow \{\pm 1\}$  — четность подстановки.  $Ker(\phi) = A_n \triangleleft S_n$
5.  $Aff(\mathbb{R}^2)$  — группа аффинных преобразований в плоскости.  $\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .  
Групповая операция — композиция.  $T : Aff(\mathbb{R}^2) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ ,  $T(\phi)$  — матрица  $A$  (матрица преобразования).

**Упражнение.** Проверить, что это гомоморфизм.

$Ker(T) = \{\phi \mid T(\phi) = E\}$  — группа параллельных переносов на плоскости (или группа сдвигов).

**Вывод:** Группа сдвигов — нормальная в группе аффинных преобразований.

## 1 Определение факторгруппы

**Теорема** Пусть  $H \triangleleft G$ . Тогда множество смежных классов  $G/H$  — группа относительно операции умножения подмножеств.

**Доказательство**

1. Определенность операции.  $(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)H \in G/H$ , так как  $H \triangleleft G$

2. Ассоциативность. Мы показали, как умножаются смежные классы по  $H$ , порожденные элементами  $G$ . Тогда очевидно, что  $((aH)(bH))(cH) = ((ab)H)(cH) = (ab)cH = a(bc)H = (aH)((bH)(cH))$
3. Нейтральный элемент — это  $eH = H$ , так как  $(eH)(aH) = (aH)(eH) = (aH)$
4. Обратный элемент.  $(aH)^{-1} = a^{-1}H$ , так как  $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = H = (aH)(a^{-1}H)$ .

Опр. Построенная группа называется **факторгруппой**  $G$  по  $H$  и обозначается  $G/H$ .

**Утв.** Пусть  $G$  — группа и  $H \triangleleft G$ . Тогда  $p : G \rightarrow G/H$ , определяемое равенством  $p(a) = aH$  является сюръективным гомоморфизмом  $G$  на  $G/H$  и  $\text{Ker}(p) = H$ .

#### Доказательство

$\forall a, b \in G : p(a)p(b) = aHbH = abH = p(ab)$  — гомоморфизм.

$\forall aH \in G/H \exists a \in G p(a) = aH$  — сюръективность.

$\text{Ker}(p) = \{a \in G \mid p(a) = H\} = \{a \in G \mid aH = H\} = H$ .

Опр. Построенный сюръективный гомоморфизм — **канонический эпиморфизм (каноническая сюръекция)** группы на факторгруппу

#### Теорема (основная теорема о гомоморфизме)

Пусть  $G, K$  — группы,  $\phi : G \rightarrow K$  — гомоморфизм,  $H = \text{Ker}(\phi) \triangleleft G$ . Тогда  $\text{Im}(\phi) \simeq G/H$ , причем существует изоморфизм  $\psi : \text{Im}(\phi) \rightarrow G/H$ , при котором  $\psi \circ \phi = p$  (канонический эпиморфизм, построенный выше).

#### Доказательство

1. Построение  $\psi : \text{Im}(\phi) \rightarrow G/H$ .

Пусть  $k \in \text{Im}(\phi)$ . Тогда  $\exists a \in G \phi(a) = k$ . Определим  $\psi(k) = \phi^{-1}(k) = \{a \in G \mid \phi(a) = k\}$  — полный прообраз. Покажем, что  $\phi^{-1}(k) = aH$ .

$\phi(aH) = \phi(a)\phi(H) = \phi(a) * e_2 = k \Rightarrow aH \subset \phi^{-1}(k)$ .

Обратно, пусть  $b \in \phi^{-1}(k)$  — произвольный элемент. Тогда  $\phi(b) = k$ , но  $\phi(a) = k$ . Значит,  $\phi(a^{-1}b) = e_2$  — нейтральный элемент  $K \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow b \in aH \Rightarrow \phi^{-1}(k) \subset aH$

2.  $\psi$  — гомоморфизм  $\text{Im}(\phi)$  в  $G/H$ .

Пусть  $k_1, k_2 \in \text{Im}(\phi)$  и  $\phi(a_1) = k_1, \phi(a_2) = k_2 \Rightarrow \psi(k_1) = a_1H, \psi(k_2) = a_2H$ . Тогда  $\phi(a_1a_2) = k_1k_2 \Rightarrow \psi(k_1k_2) = a_1a_2H = \psi(k_1)\psi(k_2)$ .

3.  $\psi$  — инъективно

Пусть  $k_1 \neq k_2$  и  $\psi(k_1) = \psi(k_2)$ . Тогда  $\psi(k_1) = a_1H = a_2H = \psi(k_2)$ , где  $a_1, a_2$  — прообразы  $k_1, k_2$ . Значит,  $\phi(a_1H) = \phi(a_2H) \Rightarrow \phi(a_1) = \phi(a_2) \Rightarrow k_1 = k_2$

4.  $\psi$  — сюръективно.

Пусть  $aH \in G/H$ . Тогда  $\phi(a) = k \in \text{Im}(\phi) \Rightarrow \psi(k) = aH$

Делаем вывод, что  $\psi$  — изоморфизм.

5. Условие  $\psi \circ \phi = p$

Пусть  $a \in G$ .  $\phi(a) = k \Rightarrow \psi(k) = \phi^{-1}(k) = aH$ . Значит,  $(\psi \circ \phi)(a) = \psi(k) = aH = p(a)$

Для запоминания теоремы полезно следующее четверостишие:

Гомоморфный образ группы  
В честь победы коммунизма  
Изоморфен факторгруппе  
По ядру гомоморфизма

**Пример:** Построить факторгруппу  $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$  и найти, какой известной группе она изоморфна.  $H = SL_n(\mathbb{R}) : AH = BH, A, B$  — матрицы  $\Leftrightarrow A^{-1}B \in H \Leftrightarrow \det(A) = \det(B)$ . Класс смежности состоит из матриц с одинаковым определителем и параметризуется ненулевым числом  $d$ .

Пусть  $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*, \phi(A) = \det(A)$ , причем  $\phi$  сюръективен, так т.к.  $\forall d \in \mathbb{R}^* \exists A \in GL_n(\mathbb{R}), \det(A) = d$

По основной теореме о гомоморфизме  $\text{Ker}(\phi) = SL_n(\mathbb{R})$  и  $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \text{Im}(\phi) = \mathbb{R}^*$ .

### Теорема (первая теорема об изоморфизме)

Пусть  $G$  — группа,  $H \triangleleft G, K \leq G$ . Тогда:

1.  $HK = KH \leq G$
2.  $(H \cap K) \triangleleft K$
3.  $HK/H \simeq K/(H \cap K)$

### Доказательство

1. Было доказано
2. Очевидно, что  $(H \cap K) \leq K$ . Пусть  $a \in H \cap K, x \in K$ . Проверим, что  $a^x = x^{-1}ax \in H \cap K$ . Поскольку  $H$  — нормальная, то  $a^x \in H$ . Поскольку  $x \in K$ , то  $x^{-1} \in K$  и  $a^x \in K$ . Значит,  $a^x = x^{-1}ax \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \triangleleft K$

3. Рассмотрим  $\phi : HK \rightarrow HK/H$  (очевидно,  $H \triangleleft HK$ , т.к.  $H \triangleleft G$ )

$\phi(HK) = \phi(H)\phi(K) = e\phi(K) = \phi(K) \Rightarrow \phi|_K : K \rightarrow HK/H$  — сюръективно.

$\text{Ker}(\phi|_K) = \{a \in K \mid aH = H\} = \{a \in K \mid a \in H\} = H \cap K$

По основной теореме о гомоморфизме:

$\text{Im}(\phi) = HK/H \simeq K/(H \cap K) = K/\text{Ker}(\phi)$

### Теорема (вторая теорема об изоморфизме; теорема о соответствии)

Пусть  $\text{Sub}(G)$  — множество подгрупп  $G$ .  $\text{Inter}(H, G)$  — множество подгрупп, занимающих промежуточное положение между  $H$  и  $G$ .  $\text{Inter}(H, G) = \{K \leq G \mid H \leq K \leq G\}$ . Пусть  $H \triangleleft G$  и  $H \leq K \leq G$ . Тогда

1.  $K/H \leq G/H$
2. Отображение  $\phi : \text{Inter}(H, G) \rightarrow \text{Sub}(G/H) \phi(K) = K/H$  — осуществляет взаимнооднозначное соответствие между  $\text{Inter}(H, G)$  и  $\text{Sub}(G/H)$ , причем  $\phi$  сохраняет включение (но не обязательно является гомоморфизмом)

3. Отображение  $\phi$  сохраняет отношение нормальности:  $K \triangleleft G \Leftrightarrow (K/H) \triangleleft (G/H)$  Причем, если верно одно из этих эквивалентных условий, то имеет место изоморфизм  $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$

#### Доказательство

1.  $\forall k_1, k_2 \in K \ k_1 H * k_2 H = k_1 k_2 H \in K/H$  — замкнуто относительно композиции  
 $\forall k \in K \ (kH)^{-1} = k^{-1}H \in K/H$  — замкнуто относительно взятия обратного
2.  $K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_1/H \leq K_2/H$  — сохраняет включение (доказывается аналогично пункту 1)  
 1) Проверим, что  $\phi(K_1) = \phi(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2$ . Пусть  $\phi(K_1) = \phi(K_2)$ . Тогда, поскольку  $\phi$  сохраняет включение, верно  $K_1 \leq K_2$  и  $K_2 \leq K_1$ , значит  $K_2 = K_1$  — инъективность.

Проверим сюръективность. Пусть  $S \leq G/H, p : G \rightarrow G/H$  — канонический эпиморфизм. Тогда  $p^{-1}(S)$  — искомый прообраз  $S$  при отображении  $\phi$ . Проверим, что  $p^{-1}(S)$  — подгруппа.

$$\forall a, b \in p^{-1}(S) \Rightarrow p(a), p(b) \in S \Rightarrow p(ab) \in S \Rightarrow ab \in p^{-1}(S).$$

$$\forall a \in p^{-1}(S) \Rightarrow p(a^{-1}) \in S \Rightarrow a^{-1} \in p^{-1}(S).$$

$p^{-1}(eH) = H = eH$  нейтральный в факторгруппе  $G/H$ . Поскольку  $S \leq G/H$ , то  $eH \in S$  и  $H \leq p^{-1}(S) \Rightarrow H \leq p^{-1}(S) \leq G \Rightarrow p^{-1}(S) \in \text{Inter}(H, G)$

Причем,  $\phi(p^{-1}(S)) = S$ , так как  $p^{-1}(S)$  — подгруппа элементов, которым сопоставляются смежные классы из  $S$ . Тогда, факторизуя  $p^{-1}(S)$  по  $H$  мы получаем  $S$ .

3. Последний пункт будет доказан на следующей лекции