Теория групп. Лекция 7

Штепин Вадим Владимирович

17 октября 2019 г.

1 Полупрямое произведение групп

Утв.

$A \rtimes B$ — группа.

Доказательство

Очевидно, что $A \rtimes B$ замкнуто относительно произведения. Проверим ассоциативность:
$((a_1,\ b_1)(a_2,\ b_2))(a_3,\ b_3) = (a_1 I_{b_1}(a_2),\ b_1 b_2)(a_3,\ b_3) = (a_1 I_{b_1}(a_2) I_{b_1 b_2}(a_3),\ b_1 b_2 b_3)$
$(a_1,\ b_1)((a_2,\ b_2)(a_3,\ b_3)) = (a_1,\ b_1)(a_2 I_{b_2}(a_3),\ b_2 b_3) = (a_1 I_{b_1}(a_2 I_{b_2}(a3)),\ b_1 b_2 b_3)$
Так как I_{b_1} — гомоморфизм $\Rightarrow (I_{b_1}(a_2 I_{b_2}(a_3)) = I_{b_1}(a_2) I_{b_1 b_2}(a_3)$
Ассоциативность доказана.
Нейтральный элемент $(e, e) \in A \rtimes B$, так как $\forall b \in B\ I_b(e) = e$.
Обратный элемент $(a, b)^{-1} = (I_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})$. Проверим это:
$(I_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}) I_{b^{-1}}(a), b^{-1} b) = (I_{b^{-1}}(e), e) = (e, e)$

Теорема (о свойствах полупрямого произведения)
Пусть A, B вложены в $A \rtimes B$ естественным образом: $A \simeq A \times e$, $B \simeq e \times B$
Тогда:

1. $A \triangleleft A \rtimes B$
2. $(A \rtimes B)/A \simeq B$
3. $A \rtimes B \simeq AB$, причем $A \cap B = \{e\}$

Доказательство

1. Пусть $(a, b) \in A \rtimes B$ и $(a', e) \in A$. Тогда $(a, b)^{-1}(a', e)(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})(a', e)(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}) I_{b^{-1}}(a'), b^{-1})(a, b) = (I_{b^{-1}}(a^{-1}) I_{b^{-1}}(a') I_{b^{-1}}(a), e) \in A$
2. $\phi_i : A \rtimes B \to B,\ \phi(a, b) = b$

   $\phi((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = b_1 b_2 = \phi(a_1, b_1)\phi(a_2, b_2)$ — гомоморфизм. Очевидно, ϕ сюръективен.

   $Ker(\phi) = \{(a, b) \mid \phi(a, b) = e\} = A$. По теореме об гомоморфизме $Im(\phi) = B \simeq (A \rtimes B)/A$
3. $(a, e)(e, b) = (a I_e(e), b) = (a, b)$

Теорема (о разложении группы в полупрямое произведение подгрупп)
Пусть A, B — подгруппы в G и

1. $A \cap B = \{e\}$

2. $A \triangleleft G$

3. $AB = G$

Тогда $G \simeq A \rtimes B$, где $I_b(a) = bab^{-1}$

Доказательство

Пусть $\phi : A \rtimes B \to G$, $\phi(a,b) = ab$. ϕ — гомоморфизм, так как $\phi(a_1,b_1)\phi(a_2,b_2) = a_1b_1a_2b_2 = a_1b_1a_2b_1^{-1}b_1b_2 = \phi((a_1,b_1)(a_2,b_2))$. $I_{b_1}(a_2) \in A$ так как A — нормальная.

ϕ сюръективен, так как $\forall x \in G\ \exists a \in A,\ b \in B$, что $x = ab = \phi(a,b)$. $Ker(\phi) = \{e\}$, так как $A \cap B = \{e\}$.

Значит, $G \simeq A \rtimes B$.

Примеры:

1. $S_n = A_n \rtimes \langle(12)\rangle$

   Доказательство

   $G = S_n$, $A_n \triangleleft G$, так как $|S_n : A_n| = 2$. $A_n * \langle(12)\langle = A_n * \{e,(12)\}$ — это объединение всех четных и всех нечетных подстановок, так как их поровну. Значит, $S_n = A_n \rtimes \langle(12)\rangle$

2. $S_n = V_4 \rtimes S_3$, где $V_4 = \{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ — четверная группа Клейна. $V_4 \triangleleft S_4$ так как V_4 представляет собой дизъюнктное объединение классов сопряженных элементов. $V_4 \cap S_3 = \{e\}$, $|V_4| = 4$, $|S_3| = 6$. Проверим, что все произведения элементов этих групп различны. Пусть $a_1, a_2 \in V_4, b_1, b_2 \in S_3$ и $a_1b_1 = a_2b_2$. Значит $b_1b_2^{-1} = a_1^{-1}a_2 \in V_4 \cap S_3 = \{e\}$ и $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$.

Упражнение. Придумать группу G, что $G = H \triangleleft S_4$, где $|H| = 8$, H — обобщение группы Клейна.

2 Коммутант. Основная теорема о коммутанте

Опр. Пусть G — мультипликативная группа. Тогда $\forall a,b \in G$ формальное произведение $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ — **коммутатор** элементов a,b.

Утв. (о свойствах коммутатора)

1. $xy = [x,y]yx$

2. $xy = yx \Leftrightarrow [x,y] = e$

3. $[x,y]^{-1} = [y,x]$

4. $\forall a \in G\ [x^a, y^a] = [x,y]^a$

Доказательство

1. Первое равенство означает, что коммутатор — это корректирующий множитель, необходимый для перестановки xy на yx.

2. $xy = yx \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e$

3. $[x,y]^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$

4. $[x^a, y^a] = [a^{-1}xa, a^{-1}ya] = a^{-1}xaa^{-1}yaa^{-1}x^{-1}aa^{-1}y^{-1}a = [x,y]^a$

Опр. **Коммутант группы (производная подгруппа)** группы G — это подгруппа $G' = \langle [x,y] \mid x, y \in G \rangle$

Замечание $G' = \{[x_1, y_1]...[x_k, y_k] \mid x_i, y_i \in G,\ k \in N\}$

Утв.

Пусть $\phi : G \to H$ — гомоморфизм групп. Тогда $\phi(G') \leq H'$. Если ϕ сюръективен, то $\phi(G') = H'$

Доказательство

$\forall x, y \in G$ $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, так как ϕ — гомоморфизм. Поскольку $\phi(x), \phi(y) \in H$, то и $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)] \in H$, значит $\phi(G') \leq H'$, так как образ подгруппы — это всегда подгруппа.

Пусть теперь ϕ сюръективен. Покажем, что $H' \leq \phi(G')$. Пусть $h_1, h_2 \in H$. Тогда $\exists x_1, x_2 \in G$ $\phi(x_1) = h_1,\ \phi(x_2) = h_2$. Значит, $[h_1, h_2] = [\phi(x_1), \phi(x_1)] = \phi([x_1, x_2])$ и $H' \leq \phi(G')$.

Следствие

Если ϕ — гомоморфизм G в абелеву группу H, то $\phi(G') = \{e\}$.

Доказательство

$\phi(G') \leq H' = \{e\}$

Следствие

Если $K \triangleleft G$, то $K' \triangleleft G$

Доказательство

$\phi : K \to G$, $\phi(k) = k^x$ для некоторого фиксированного $x \in G$ — гомоморфизм (внутренний автоморфизм).

$\phi : K \to K$ сюръективен, так как $K \triangleleft G$. Значит, $\phi(K') = K' \Rightarrow \forall a \in K',\ \forall x \in G\ a^x \in K' \Rightarrow K' \triangleleft G$.

Следствие

$\forall G$ (группа) верно $G' \triangleleft G$ (в предыдущем утв. положим $K = G$).