

# Теория групп. Лекция 5

Штепин Вадим Владимирович

3 октября 2019 г.

## 1 Классические действия групп на множествах

Следствия утв.  $Shift(\omega, \omega') = St(\omega')s = sSt(\omega)$ ,  $s \in Shift(\omega, \omega')$  — произвольный элемент.

### Следствие.

Если  $\omega, \omega'$  — элементы одной орбиты, то  $St(\omega)$  и  $St(\omega')$  сопряжены.

### Доказательство

$\exists s : s(\omega) = \omega'$  и  $st(\omega') = sSt(\omega)s^{-1}$  ч.т.д.

### Следствие.

Пусть  $G(\omega)$  — орбита элемента  $\omega$ .

$|G(\omega)| = |G : St(\omega)| = \frac{|G|}{|St(\omega)|}$ . Последнее равенство верно при условии, что  $G$  — конечно.

### Доказательство

Фиксируем  $\omega \in \Omega$ .

Тогда,  $aSt(\omega) \rightarrow a(\omega) \in G(\omega)$  — биекция, так как  $aSt(\omega) = bSt(\omega) \Leftrightarrow a^{-1}b \in St(\omega) \Leftrightarrow a^{-1}b(\omega) = \omega \Leftrightarrow a(\omega) = b(\omega)$ .

Значит, число левых смежных классов равно  $|G(\omega)|$ .

Два левых смежных класса по стабилизатору  $\omega$  совпадают тогда, и только тогда, когда соответствующие им элементы  $\Omega$  равны ( $a(\omega) = b(\omega)$ ).

**Упражнение.** Проверить, что мощность орбиты не зависит от выбора представителя.

## 2 Формула орбит

Пусть  $|\Omega| < \infty$

Пусть  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_s$  — разбиение на попарно различные классы (орбиты).

В каждой орбите выберем по представителю  $a_i \in \Omega_i$ .

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^s |\Omega_i| = \sum_{i=1}^s |G : St(a_i)|$$

### Классические действия

1. Действие  $G$  на себя левыми сдвигами.  $\Omega = G$ ,  $I_a(x) = ax$  — левый сдвиг.

$I_a$  — действие, так как  $I_{ab} = I_a(I_b(x)) = abx$ .

$\text{Ker} I = \{a \in G \mid ax = x\} = \{e\} \Rightarrow I$  — точное (эффетивное).

$I$  — свободное, так как  $\forall a \neq e \ a\omega = \omega$  — не выполнено  $\forall \omega \in G$ .

Пусть не так, значит  $a\omega = \omega$ . Умножим на  $\omega^{-1} \Rightarrow a = e$ . Противоречие.

$$ImI \sim G/KerI = G \Rightarrow G \leq S(G).$$

Если  $|G| = n$ ,  $S(G) \sim S_n$ .

Вывод. Конечная группа  $G \sim G' \leq S_n$  — теорема Кэли.

2. Действие  $G$  на себя сопряжением.

$I_a : G \rightarrow S(G)$ ,  $I_a(x) = axa^{-1} = x^{a^{-1}}$ . Это действие, так как  $I_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = I_a(I_b(x))$ .

$G(x) = \{I_a(x) \mid a \in G\} = axa^{-1} \mid G = x^G$  — класс сопряженных элементов, порожденный  $x$ .

$St(x) = \{a \in G \mid axa^{-1} = x\} = \{a \in G \mid ax = xa\} = C_G(x)$  — централизатор элемента  $x \in G$ .

Опр. **Централизатор элемента  $x$**  — стационарная подгруппа  $x$  при действии сопряжением.

$|G(x)| = |G : St(x)| \Rightarrow |x^G| = |G : C_G(x)|$  — мощность класса сопряженных элементов равна индексу централизатора любого элемента этого класса.

$$KerI = \{a \in G \mid axa^{-1} = x \forall x \in G\} = \{a \in G \mid ax = xa \forall x \in G\}.$$

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \forall x \in G\}. \text{ Тогда } Z(G) \triangleleft G$$

**Утв.**  $C_G(x)$  — наибольшая подгруппа  $H$  в  $G$ , что  $x \in Z(H)$

$I$  — точное  $\Leftrightarrow G$  имеет тривиальный центр.

$I$  никогда не бывает свободна, так как  $\forall a \in G \ I_a(e) = e$

**Утв.** Если  $G$  — конечно, то  $\frac{G}{ord(x)} : |x^G|$

**Доказательство**

$$|x^G| = |G : C_G(x)|. \langle x \rangle \leq G \text{ — конечно.}$$

$|\langle x \rangle| = ord(x)$ , очевидно  $\langle x \rangle \leq C_G(x) \Rightarrow |C_G(x)| : ord(x) \Rightarrow C_G(x) = n \cdot ord(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  — по теореме Лагранжа.

$$|x^G| = \frac{|G|}{n \cdot ord(x)}$$

### 3 Автоморфизм

Опр. Всякий изоморфизм  $\phi : G \rightarrow G$  называется **автоморфизм** группы  $G$ .

Очевидно, что множество автоморфизмов группы — группа относительно композиции.

$Aut(G)$  — группа автоморфизмов.

$I_a(x) = axa^{-1}$  — автоморфизм.

$$I_a(xy) = I_a(x)I_a(y), \text{ так как } I_a(xy) = (xy)^{a^{-1}} = y^{a^{-1}}x^{a^{-1}} = I_a(x)I_a(y)$$

Опр. Множество всех автоморфизмов вида  $I_a(x) = axa^{-1}$  — внутренние автоморфизмы.

Было проверено, что множество внутренних автоморфизмов образует группу относительно композиции.

$$\text{Утв. } Inn(G) \sim G/Z(G)$$

**Доказательство**

$$Z(G) = KerI, ImI = \{I_a \mid I_a(x) = axa^{-1}\} = Inn(G).$$

$I : G \rightarrow S(G)$ ,  $I : G \rightarrow Inn(G)$ ,  $a \rightarrow I_a$ . По основной теореме о гомоморфизме  $Inn(G) \sim G/Z(G)$

**Замечание** Группы  $Aut(G)$  и  $Im(G)$  могут быть различны.

**Пример.**

Пусть  $G$  — абелева. Тогда  $I_a(x) = axa^{-1} = x$ . Однако автоморфизм, сопоставляющий числу его обратное, не является внутренним.

**Замечание**

В случае неабелевой группы  $J_a(x) = x^a$  — не действие.

## 4 Формула классов

**Утв.**  $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r |G : C_G(a_i)|$ , где  $a_i$  — представитель тех классов сопряженных элементов, содержащих  $> 1$  элемент.

**Доказательство**

$x \in Z(G) \Rightarrow |x^G| = 1$ ,  $x^G = \{axa^{-1} \mid a \in G\} = x$ .

Пусть  $x \notin Z(G)$ . Покажем, что  $|x^G| > 1$ .

$\exists a \in G : ax \neq xa \Leftrightarrow axa^{-1} \neq x$  и  $axa^{-1} \in x^G$ .

Пусть в  $G$  имеется  $r$  классов сопряженных, содержащих  $> 1$  элемент.

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r |G : C_G(a_i)|.$$

Опр. Конечная группа  $G$  — это  **$p$ -группа**, если  $\exists k \in \mathbb{N}$ ,  $|G| = p^k$ ,  $p$  — простое.

**Теорема**

Всякая  $p$ -группа имеет нетривиальный центр  $Z(G) \neq \{e\}$

**Доказательство.**

1.  $G = Z(G) \Rightarrow Z(G)$  — нетривиален.
2.  $G \neq Z(G) \Rightarrow r \geq 1$  в формуле классов. Значит,  $C_G(a_i) \leq G \Rightarrow |C_G(a_i)| = p^{l_i}$ ,  $0 \leq l_i < n$  — мощность централизатора (теорема Лагранжа). Или, что эквивалентно, орбита элемента  $a_i$  нетривиальна.

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{i=1}^r \frac{p^n}{p^{l_i}} = |G| - \sum_{i=1}^r p^{n-l_i} \text{ — делится на } p. \text{ Значит, } |Z(G)| \text{ делится на } p.$$

$$|Z(G)| \neq 0, \text{ так как } e \in Z(G).$$

**Теорема**

Если  $G$  — неабелева конечная группа, то  $G/Z(G)$  не циклическая.

**Доказательство**

Пусть  $Z = Z(G)$  и  $G/Z = \langle aZ \rangle$ ,  $aZ$  — порождающий элемент. Пусть  $x, y \in G$  — произвольные.  $x \in a^l Z$ ,  $y \in a^k Z \Rightarrow \exists z_1 \in Z, z_2 \in Z$  и  $xy = a^l z_1 a^k z_2 = yx$  — противоречие.

**Теорема**

Если  $|G| = p^2$ , то  $G$  — абелева

**Доказательство**

Если  $G = Z(G) \Rightarrow G$  — абелева.

Пусть  $Z(G) \neq G \Rightarrow Z(G) \triangleleft G$ , значит либо

1.  $|Z(G)| = p$  Тогда  $|G/Z(G)| = p$  — циклическая  $\Rightarrow G$  абелева (так как в противном случае  $G/Z(G)$  не циклическа)
2.  $|Z(G)| = p^2$ . Тогда  $G = Z(G)$