Теория групп. Лекция 9

Штепин Вадим Владимирович

31 октября 2019 г.

1 Критерий разрешимости группы

Теорема (критерий разрешимости в терминах нормальной подгруппы)
Пусть $K \triangleleft G$. Тогда G — разрешима $\Leftrightarrow$ K и G/K разрешимы.

Доказательство

1. Необходимость. Пусть $G^{(n)} = \{e\}$. $K \triangleleft G \Rightarrow K' \triangleleft G' \Rightarrow K^{(n)} \triangleleft G^{(n)} = \{e\} \Rightarrow K$ разрешима.

   Обозначим $\overline{G} = G/K$. Пусть $p : G \to \overline{G}$ — канонический гомоморфизм. $p\restriction_{G'} : G' \to \overline{G}'$, т.е. $p(G') \subset \overline{G}'$, так как гомоморфизм сохраняет коммутаторы.

   Всякий коммутатор элементов из $\overline{G}$ — образ коммутатора элементов из G. В силу сюръективности получаем $p(G^{(n)}) = \overline{G}^{(n)}$, но $G^{(n)} = \{e\} \Rightarrow \overline{G}^{(n)} = \{e\}$ и $\overline{G}$ разрешима.

2. Достаточность.

   Пусть K и $\overline{G}$ разрешимы. Пусть $K^{(n)} = \{e\}$ и $\overline{G}^{(l)} = \{e\}$. $p : G \to \overline{G}$ — канонический гомоморфизм. $p(G^{(l)}) = \overline{G}^{(l)} = \{e\} \Rightarrow G^{(l)} \subset Ker(p) = K \Rightarrow G^{(l+n)} \subset K^{(n)} = \{e\} \Rightarrow$ G — разрешима.

Следствие
Пусть $|G : H| = 2$. Тогда G разрешима $\Leftrightarrow$ H — разрешима.
Доказательство
$H \triangleleft G$ как группа индекса 2. $G/H \simeq C_2$ — разрешима (абелева)

Пример
$H = \langle R \rangle \leq D_n,\ H \simeq C_n$ — разрешима и $|D_n : H| = 2$. Значит, D_n разрешима.

Следствие
Пусть G — конечна, $K_1, K_2 \triangleleft G$ и разрешимы. Тогда K_1K_2 нормальная и разрешимая.
Доказательство
$K_1K_2 \triangleleft G$ — было доказано. $K_1K_2/K_2 \simeq K_1/(K_1 \cap K_2)$ по первой теореме об изоморфизме. $K_1/(K_1 \cap K_2)$ разрешима, так как K_1 разрешима. По критерию, K_1K_2 так же разрешима.

Теорема
Пусть G — конечная группа. Тогда в G найдется наибольшая нормальная разрешимая подгруппа S. Более того, G/S не содержит нетривиальных разрешимых подгрупп.
Доказательство

Пусть $K_1, ..., K_s$ — все нормальные разрешимые подгруппы G. Положим $S = \langle K_1 \cup K_2 ... \cup K_s \rangle$. По следствию, S нормальная и разрешимая, причем S — максимальная такая подгруппа.

Пусть в G/S есть нетривиальные ($\neq \{e\}$) разрешимые нормальные подгруппы: $L/S \triangleleft G/S \Rightarrow L \triangleleft G$ по второй теореме об изоморфизме. Так как $S, L/S$ нормальные и разрешимые группы, то и L нормальная и разрешимая по критерию в терминах нормальной подгруппы. Значит, $S \triangleleft L \triangleleft G$, причем, в силу нетривиальности, $L \neq S$ — противоречие с максимальностью S.

Опр. Построенная наибольшая нормальная разрешимая подгруппа — **разрешимый радикал** $S(G)$

Теорема (критерий разрешимости)
Следующие условия эквивалентны:

1. G — разрешима
2. В G $\exists$ цепочка подгрупп $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = \{e\}$ со свойствами $G_k \triangleleft G$ и G_k/G_{k+1} абелева.
3. В G $\exists$ цепочка подгрупп $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = \{e\}$ со свойствами $G_{k+1} \triangleleft G_k$ и G_k/G_{k+1} абелева.

Доказательство

1. $1 \Rightarrow 2$ Положим $G_k = G^{(k)}$ — производный ряд. Если $K \triangleleft G$, то $K' \triangleleft G$ по свойству производной. Значит $G_k \triangleleft G$.

   По свойствам коммутанта G/G' абелева, значит G_k/G_{k+1} абелева.
2. $2 \Rightarrow 3$ Очевидно, $G_{k+1} \triangleleft G_k$
3. $3 \Rightarrow 1$ Покажем, что $\forall k$ $G^{(k)} \leq G_k$ индукцией по k.

   База: $G_0 = G \subset G$

   Переход: Пусть $G^{(k)} \subset G_k$. Тогда $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] \subset [G_k, G_k]$. G_k/G_{k+1} абелева $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in G_k [xG_{k+1}, yG_{k+1}] = \{G_{k+1}\}$. $[x, y]G_{k+1} = [xG_{k+1}, yG_{k+1}] = G_{k+1} \Leftrightarrow [x, y] \in G_{k+1} \Rightarrow [G_k, G_k] \subset G_{k+1}$

Напоминание
Конечная группа G — это p-группа, если $|G| = p^n$, p — простое.
Теорема
Всякая p-группа G разрешима
Доказательство
Было доказано, что всякая p-группа имеет нетривиальный центр $Z = Z(G) \neq \{e\}$

1. Если $Z = G$, то G абелева и разрешима.
2. Докажем индукцией по n:

   База: Пусть $|G| = p \Rightarrow G$ — циклична по теореме Лагранжа и разрешима.

   Переход: Пусть $\forall G: \ |G| < p^n$ доказано. Пусть $\{e\} < Z < G \Leftrightarrow |G/Z| < p^n \Leftrightarrow G/Z$ разрешима ($|G/Z| = p^m, \ m < n$). Z разрешима, так как абелева. $Z \triangleleft G$, так как $\forall x \in G$ $xZ = Zx$. Значит, G разрешима.

Следствие
Если G — p-группа, то $G' \neq G$
Доказательство
Если $G' = G$, то $\forall n\ G^{(n)} = G$ — противоречие с разрешимостью.

Теорема (о подгруппах в конечной p-группе)
Пусть G — p-группа и $|G| = p^n$.
Тогда $\forall k, 1 \leq k \leq n$ в G есть подгруппа H мощности p^k.
Доказательство
Индукция по k.
База: $k = 0,\ H = \{e\}$
Переход: Пусть $\exists$ подгруппа $H_k,\ |H_k| = p^k,\ k \leq n$. Покажем, что в G есть подгрупаа порядка p^{k+1} $(k+1 \leq n)$. Пусть $Z = Z(G)$.
$\exists a \in Z,\ a \neq e \Rightarrow \langle a \rangle \subset Z \Rightarrow ord(a) = p^l \Rightarrow$ в $\langle a \rangle$ есть элемент порядка p. Пусть $ord(z) = p$. $L = \langle z \rangle \triangleleft G$ (так как $z \in Z$). Рассмотрим G/L: $|G/L| \geq p^k$. По предположению индукции, в G/L есть подгруппа порядка p^k. Пусть H/L — подгруппа порядка p^k. Тогда $|H| = p^{k+1}$

2 Простые группы

Опр. Группа G — **простая**, если она не имеет нетривиальных нормальных подгрупп.

Теорема (об описании простых абелевых групп)
Среди абелевых групп простые только C_p при простом p.
Доказательство

1. C_p простая по теореме Лагранжа
2. Если группа G абелева и $|G| = n$ — составное число, то G не простая. Возьмем $a \neq e$ и рассмотрим $|\langle a \rangle| = k \vdots p$ — простое. Тогда $(a^{\frac{k}{p}})^p = e \Rightarrow ord(a^{\frac{k}{p}}) = p \Rightarrow \langle a^{\frac{k}{p}} \rangle \neq G$ и $\langle a^{\frac{k}{p}} \rangle \triangleleft G$, так как G абелева.
   Если $|G| = \infty$, и $\exists a :\ ord(a) = k$, то $\langle a \rangle \neq G$.
   Если $\forall a\ ord(a) = \infty$, то $\exists H \simeq Z,\ H = \langle a \rangle$. Тогда $\langle a^2 \rangle \leq H$ и $\langle a^2 \rangle \neq G$.

Лемма
Пусть $|G : H| = 2$, G — конечная группа. Тогда

1. Если $C_G(h) \neq C_H(h)$, то $h^G = h^H$
2. Если $C_G(h) = C_H(h)$, то $|h^H| = \frac{|h^G|}{2}$, где $h^G = \{g^{-1}hg \mid g \in G\}$

Доказательство

1. Пусть $a \in C_G(h) \setminus C_H(h) \Rightarrow ah = ha \Leftrightarrow a \in G \setminus H \Rightarrow G = H \cup aH$
   $h^G = h^{(H \cup aH)} = h^H \cup h^{aH} = h^H \cup (h^a)^H = h^H \cup h^H = h^H$
2. Пусть $C_G(h) = C_H(h)$. Тогда $|h^G| = \frac{|G|}{|C_G(h)|} = \frac{2|H|}{|C_H(h)|} = 2|h^H|$

Замечание
Если $G = H \cup aH$, $a \notin H$ во втором случае, то $h^G = h^H \cup (h^a)^H$ и $(h^a)^H \neq h^H$, но $|(h^a)^H| = |h^H|$