

# Теория групп. Лекция 4

Штепин Вадим Владимирович

26 сентября 2019 г.

## Теорема (вторая теорема об изоморфизме; теорема о соответствии)

Пусть  $Sub(G)$  — множество подгрупп  $G$ .  $Inter(H, G)$  — множество подгрупп, занимающее промежуточное положение между  $H$  и  $G$ .  $Inter(H, G) = \{K \leq G \mid H \leq K \leq G\}$ . Пусть  $H \triangleleft G$  и  $H \leq K \leq G$ . Тогда

1.  $K/H \leq G/H$
2. Отображение  $\phi : Inter(H, G) \rightarrow Sub(G/H)$   $\phi(K) = K/H$  — осуществляет взаимнооднозначное соответствие между  $Inter(H, G)$  и  $Sub(G/H)$ , причем  $\phi$  сохраняет включение (но не обязательно является гомоморфизмом)
3. Отображение  $\phi$  сохраняет отношение нормальности:  $K \triangleleft G \Leftrightarrow (K/H) \triangleleft (G/H)$ . Причем, если верно одно из этих эквивалентных условий, то имеет место изоморфизм  $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$

## Доказательство(продолжение)

$(K/H) \triangleleft (G/H)$ . Пусть  $k \in K$ ,  $x \in G$  — произвольные. Тогда  $(kH)^{xH} \in K/H \Leftrightarrow (xH)^{-1}(kH)(xH) \in K/H \Leftrightarrow (x^{-1}H)(kH)(xH) \in K/H \Leftrightarrow (x^{-1}kx)H \in K/H \Leftrightarrow k^x H \in K/H \Leftrightarrow k^x \in K$ . Значит,  $(K/H) \triangleleft (G/H) \Leftrightarrow K \triangleleft G$ .

Рассмотрим  $p : G \rightarrow G/H$ ,  $\psi : G/H \rightarrow (G/H)/(K/H)$  — канонические эпиморфизмы. Тогда  $\psi \circ p : G \rightarrow (G/H)/(K/H)$  — сюръекция.

$Ker(\psi \circ p) = (\psi \circ p)^{-1}(e) = (p^{-1} \circ \psi^{-1})(e) = p^{-1}(K/H)$ , так как  $\psi^{-1}(e) = Ker(\psi) = K/H$ .  $p^{-1}(K/H) = K$ .

По теореме о гомоморфизме:  $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$ .

## Примеры:

1. Первая теорема об изоморфизме

$G = S_4$ ;  $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\} \simeq S_3$ .  $V_4 = K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4$  — четверная группа Клейна. Так как  $|K| = 4$ , то  $K$  абелева.  $K$  — нормальная, так как является дизъюнктивным объединением классов сопряженных элементов  $S_4$ . Очевидно, что  $H \cap K = \{e\}$ . Все произведения  $hk$ , где  $h \in H$ ,  $k \in K$  попарно различны. Докажем это. Пусть не так, значит  $h_1 k_1 = h_2 k_2 \Rightarrow h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}$ . Очевидно,  $h_2^{-1} h_1 \in H$ ,  $k_2 k_1^{-1} \in K$ . Значит,  $h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} = e$ , так как оба произведения лежат в  $H \cap K = \{e\}$ .

Значит, всего таких произведений  $|HK| = |H||K| = 24$  и  $HK = S_4$ . По первой теореме получаем:  $S_4/V_4 = S_3/e = S_3$ .

2. Теорема о соответствии

$G = (Z, +)$ ,  $H = nZ$ ,  $G/H = Z_n$ . Пусть  $n$  делится на  $k$ . Рассмотрим подгруппу  $kZ_n \leq Z_n$  — группа кратных  $k$  вычетов.

Вопрос: Какая подгруппа  $K \in \text{Inter}(H, G)$  соответствует подгруппе  $kZ_n$ ?

У циклической группы всякая подгруппа и всякая факторгруппа является циклической.

Используем теорему о соответствии:  $G/K \simeq Z_n/kZ_n$ , а  $|kZ_n| = \frac{n}{k}$

$|Z_n/kZ_n| = \frac{n}{(\frac{n}{k})} = k$ , причем  $G/K$  — циклическая  $\Rightarrow G/K \simeq Z_k$ . Чтобы получить группу из  $k$  элементов, нужно факторизовать по  $K = kZ$ .

## 1 Действие группы на множество

Пусть  $G$  — группа,  $\Omega$  — непустое множество.

Опр. **Действие**  $G$  на  $\Omega$  — это отображение  $G \times \Omega \rightarrow \Omega$ , которое действует так:  $(a, \omega) \rightarrow a\omega = a(\omega)$

Причем отображение удовлетворяет аксиомам:

1. Групповой операции соответствует композиция действий:  $\forall a, b \in G \ (ab)\omega = a(b(\omega))$
2.  $e \in G$  действует тождественным образом.

Опр. Пусть  $G$  — группа и  $\Omega$  — непустое множество,  $S(\Omega)$  — группа биекций  $\Omega$  на себя относительно композиции. **Действие**  $G$  на  $\Omega$  — произвольный гомоморфизм  $I : G \rightarrow S(\Omega)$

**Теорема (эквивалентность определений)** Определения действия эквивалентны  
**Доказательство**

1.  $1 \Rightarrow 2$

Пусть  $I_a(\omega) = a\omega$ . Покажем, что  $I_a$  — биекция. Для этого явно предъявим единственный обратный элемент:  $(I_{a^{-1}} \circ I_a)(\omega) = I_{a^{-1}}(I_a(\omega)) = a^{-1}a\omega = e\omega = \omega$ . Аналогично,  $(I_a \circ I_{a^{-1}})(\omega) = \omega$ .

Проверим условие гомоморфизма:  $I_{ab} = I_a I_b$ , так как  $I_{ab}(\omega) = ab\omega = I_a(I_b(\omega)) = (I_a \circ I_b)(\omega)$

2.  $2 \Rightarrow 1$

Построим отображение, соответствующее первому определению.  $(a, \omega) \rightarrow I_a(\omega)$ . Причем  $\forall \omega \in \Omega \ I_{ab}(\omega) = I_a(\omega)I_b(\omega)$ ,  $I_e(\omega) = \omega$

Опр. Пусть  $I \rightarrow S(\Omega)$  — действие. Тогда  $I_a \in S(\Omega)$  — **действие элемента**  $a$  на  $\Omega$ .

Опр. **Ядро действия**  $\text{Ker}(I) = \{a \in G \mid \forall \omega \in \Omega \ a\omega = \omega\}$ .  $\text{Ker}(I) \triangleleft G$  как ядро гомоморфизма.

**Замечание.** Всякая нормальная подгруппа является ядром канонического гомоморфизма  $p : G \rightarrow G/H$

Опр. Действие  $I$  **эффективное(точное)**, если  $\text{Ker}(I) = \{e\}$

Опр. Действие  $I$  — **свободное**, если  $\forall a \neq e \in G$  и  $\forall \omega \in \Omega$   $a(\omega) \neq \omega$ .

Замечание. Если  $I$  свободное, то  $I$  эффективно. Обратное неверно

**Примеры:**

1. Пусть  $G = SO(2)$  — группа вращений плоскости. Тожественное преобразование  $e \in SO(2)$  — нейтральный элемент, значит действие группы  $G$  на точки плоскости эффективно.  $A \in SO(2) \exists \omega = (0, 0)$ , что  $A(0, 0) = 0$ , значит оно не свободно.

2. Опр. Пусть  $V$  — линейное пространство над  $F$ . **Линейное представление** группы  $G$  в  $V$  — произвольный гомоморфизм  $T : G \rightarrow GL(V)$ , где  $GL(V)$  — группа невырожденных преобразований в  $V$ .

Матричное представление:  $T : G \rightarrow GL_n(F)$ .

Легко видеть, что матричное представление — частный случай действия.

3. Пусть  $G \subset GL_n(F)$ .

Стандартное представление  $G$  в пространство  $F^n$  — представление, задаваемое равенством  $T(A)(x) = Ax$

4. Пусть  $G = S_n$ ,  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ .  $I_\sigma(k) = \sigma(k)$  — действие группы  $S_n$ .

5.  $G$  — группа,  $\Omega = H \leq G$ ,  $G/H$  — множество левых смежных классов,  $I_a(gH) = agH \in G/H$ .

$$I_{ab}(gH) = abgH = I_a(I_b(gH)) = (I_a \circ I_b)(gH).$$

Этот пример универсальный, так как всякое действие есть действие над множеством левых смежных классов.

Опр. Пусть  $I : G \rightarrow S(\Omega)$  — действие. **Орбита** элемента  $\omega$  — множество  $G(\omega) = \{a(\omega) \mid a \in G\}$

**Пример.**

Если  $G = SO(3)$  — группа вращений пространства,  $\omega$  — точка в  $R^3$ , то  $G(\omega)$  — сфера радиуса, равного расстоянию от  $\omega$  до начала координат.

Опр.  $\omega_1 \sim \omega_2$ , если  $\omega_2 \in G(\omega_1)$

**Утв.**

$\sim$  — отношение эквивалентности.

**Доказательство**

1.  $\omega \sim \omega$ , так как  $e(\omega) = \omega$
2.  $\omega_2 \sim \omega_1 \Rightarrow \omega_2 \in G(\omega_1) \Rightarrow \exists a \in G \omega_2 = a\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = a^{-1}\omega_2 \Rightarrow \omega_1 \in G(\omega_2) \Rightarrow \omega_1 \sim \omega_2$
3.  $\omega_1 \sim \omega_2, \omega_2 \sim \omega_3 \Rightarrow \exists a, b \in G : \omega_2 = a\omega_1, \omega_3 = b\omega_2 = ba\omega_1 \Rightarrow \omega_3 \in G(\omega_1) \Rightarrow \omega_1 \sim \omega_3$

Опр. Классы эквивалентности — **орбиты** действия. Множество всех орбит обозначается  $\Omega/G$

Опр. **Стационарная подгруппа**  $I : G \rightarrow S(\Omega)$ . Пусть  $\omega$  — фиксированная.  $St(\omega) = \{a \in G \mid a\omega = \omega\}$  — **стационарная подгруппа (стабилизатор  $\omega$ )**.

**Опр.** Пусть  $\omega_2 \in G(\omega_1)$  Множество  $Shift(\omega_1, \omega_2) = \{a \in G \mid a(\omega_1) = \omega_2\}$  — все элементы, сдвигающие первую точку во вторую.

**Утв.**

Пусть  $\omega' \in G(\omega)$ . Тогда  $Shift(\omega, \omega') = St(\omega')s = sSt(\omega)$ , где  $s$  — произвольный элемент из  $Shift(\omega, \omega')$ .

**Доказательство**

1.  $St(\omega')s \subset Shift(\omega, \omega')$  и  $sSt(\omega) \subset Shift(\omega, \omega')$ , так как  $St(\omega') * s(\omega) = St(\omega')(\omega') = \omega'$  и  $sSt(\omega)(\omega) = s(\omega) = \omega'$

Проверим обратное, то есть что  $Shift(\omega, \omega') \subset St(\omega')s \Leftrightarrow Shift(\omega, \omega')s^{-1} \subset St(\omega')$ .

Это верно, так как  $Shift(\omega, \omega')s^{-1}(\omega') = \omega'$

Верно и то, что  $Shift(\omega, \omega') \subset sSt(\omega) \Leftrightarrow s^{-1}Shift(\omega, \omega') \subset St(\omega)$ , так как  $s^{-1}Shift(\omega, \omega')(\omega) = \omega$

**Следствие** Если  $\omega \sim \omega'$ , то  $\forall s \in Shift(\omega, \omega') \ St(\omega') = sSt(\omega)s^{-1}$