

# Теория групп. Лекция 13

Штепин Вадим Владимирович

28 ноября 2019 г.

## Теорема (вторая теорема Силова)

Пусть  $|G| = p^n m$ ,  $m$  не делится на  $p$ ,  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа в  $G$ . Тогда  $\forall p$ -подгруппы  $Q \leq G \exists x \in G Q \leq P^x$ . То есть, любая  $p$ -подгруппа в  $G$  вкладывается в силовскую  $p$ -подгруппу (группа, сопряженная силовской сама силовская).

### Доказательство

Рассмотрим действие  $Q$  на  $G/P$  — множество левых смежных классов.

$Q(aP) = QaP$  — действие левыми сдвигами. Пусть  $\Omega = G/P$ ,  $|\Omega| = \frac{|G|}{|P|} = m$ . По формуле орбит:

$m = |\Omega| = |Q(a_{i_1})P| + \dots + |Q(a_{i_s})P|$ , где  $s$  — количество орбит действия.

$|Q(a_{i_j})P| = \frac{|Q|}{|St(a_{i_j})|}$  по формуле размера орбиты. Так как  $|Q|$  — степень  $p$ , то  $|Q(a_{i_j})P|$  — тоже степень  $p$ . Если в формуле орбит все слагаемые делятся на  $p$ , то и  $m$  делится на  $p$ , а это противоречие.

Значит,  $\exists$  орбита  $Q(a_{i_j})P$  мощности 1. Для нее верно  $Qa_{i_j}P = a_{i_j}P \Rightarrow Qa_{i_j}Pa_{i_j}^{-1} = a_{i_j}Pa_{i_j}^{-1} = P^x$ , где  $x = a_{i_j}$ .  $QP^x = P^x \Leftrightarrow Q \subset P^x$ ,  $|P^x| = |P|$ , так как сопряжение — это автоморфизм.

### Следствие

Все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены между собой и  $N_p = |G : N_G(P)|$  (число силовских  $p$ -подгрупп), где  $P$  — произвольная силовская  $p$ -подгруппа.

### Доказательство

Пусть  $Q = P$  во второй теореме Силова, тогда  $P = P_1^x$  — некоторая силовская  $p$ -подгруппа. Значит, все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены некоторой подгруппе.  $N_p = \frac{|G|}{|N_G(P)|}$ , если рассмотреть  $N_p$  как размер орбиты  $P$  при действии сопряжениями,  $N_G(P)$  — нормализатор  $P$  (т.е. стабилизатор при действии сопряжениями)

### Следствие

$|G| = p^n m$ ,  $p$  — простое и  $m$  не делится на  $p$ . Тогда  $m \vdots |N_p|$ .

### Доказательство

$N_p = \frac{|G|}{|N_G(P)|}$ , причем  $P \leq N_G(P)$ , так как  $\forall a \in P aP = Pa$ . Значит,  $|N_G(P)| = t|P|$ ,  $t$  — натуральное число. Тогда  $N_p = \frac{p^n m}{p^n t} = \frac{m}{t}$  и  $m$  делится на  $N_p$ .

### Пример

Всякая группа порядка 15 абелева

### Доказательство

$|G| = 3 * 5 \Rightarrow$  в  $G$  есть силовские 3- и 5-подгруппы, причем  $N_3 \equiv 1 \pmod{3}$  и  $5 \nmid 5$ . Значит,  $N_3 = 1$ . Аналогично получаем, что  $N_5 = 1$ . Больше силовских подгрупп в  $G$  нет. Значит, существует не более двух элементов порядка 3 (элементы силовской 3-подгруппы без нейтрального), не более четырех элементов порядка 5 (элементы силовской 5-подгруппы без нейтрального), и ровно один элемент порядка 1 (нейтральный). По теореме Лагранжа порядки всех элементов — это делители порядка группы. Значит, в  $G$  есть элементы порядка 15 (и их минимум 8), а группа  $G$  циклическая.

### Замечание

В общем случае для  $pq$ -групп (групп из  $pq$  элементов, где  $p, q$  — простые) утверждать абелевость нельзя, но можно доказать разрешимость.

### Теорема

Пусть  $p, q$  — различные простые числа,  $p < q$  и  $|G| = pq$ . Тогда  $G \simeq C_q \rtimes C_p$ . Следовательно,  $G$  разрешима.

### Доказательство

$\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $P$  и  $q$ -подгруппа  $Q$  в  $G$ . Так как порядки групп  $P$  и  $Q$  — простые числа, то  $P \simeq C_p$ ,  $Q \simeq C_q$ . Покажем, что  $Q \triangleleft G$ .

$N_q \equiv 1 \pmod{q}$  и  $p \nmid N_q$ , причем  $p < q$  и простое. Значит,  $N_q = 1$  и  $\forall x \in G \quad Q^x = Q$  и  $Q \triangleleft G$  по определению.

$P \cap Q = \{e\}$ , так как  $P \cap Q \leq P$  и  $P \cap Q \leq Q$ . По теореме Лагранжа,  $|P \cap Q| = 1$ .

По теореме о произведении нормальной подгруппы на подгруппу  $PQ = QP \leq G$ , причем  $|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = |G|$  и  $PQ = G$ . По теореме о разложении группы в полупрямое произведение получаем  $G \simeq C_q \rtimes C_p$ . Тогда,  $G/C_q \simeq C_p$  — абелева и разрешима,  $C_q$  так же абелева и разрешима. По критерию разрешимости в терминах нормальной подгруппы,  $G$  разрешима.

Если  $P \triangleleft G$ , то по теореме о разложении в прямое произведение верно  $G \simeq P \times Q$ , а значит  $G$  циклическа и абелева (это верно в случае, если  $N_p = 1$ ). При этом верна эквивалентность  $G$  абелева  $\Leftrightarrow N_p = 1$ .

### Замечание

Если  $N_p > 1$ , то  $N_p = q = 1 + \alpha p$ ,  $\alpha \geq 1$  и  $q - 1 \nmid p$

### Пример неабелевой $pq$ -группы.

Пусть  $G = \{A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mid \det(A) \neq 0 \ b \in Z_q, \ a \in Z_q^* = Z_q \setminus \{0\}\}$ .

$|Z_q^*| = q - 1 \nmid p$  — абелева, и, по первой теореме Силова в  $Z_q^*$  найдется силовская  $p$ -подгруппа, причем она обязательно циклическая и порождается элементом порядка  $p$ .

Пусть это подгруппа  $H = \langle a \rangle$ . Положим теперь  $G = \{A = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mid \det(A) \neq 0 \ b \in Z_q, \ a \in Z_q^* = H\}$ , и  $G$  — неабелева.

### Теорема (о разложении группы в прямое произведение силовских подгрупп)

Пусть  $|G| = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$  — попарно различные простые числа.

Тогда

1. силовская  $p$ -подгруппа нормальна в  $G \Leftrightarrow N_p = 1$
2.  $G = P_1 \times \dots \times P_s \Leftrightarrow \forall i \ P_i \triangleleft G$

### Доказательство

1.  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа,  $P \triangleleft G \Leftrightarrow \forall x \in G P^x = P \Leftrightarrow N_p = 1$
2. **Достаточность.** Пусть  $P_1, \dots, P_s$  — силовские  $p_i$ -подгруппы и  $P_i \triangleleft G$ .

Индукция по  $s$ .

База: Для  $s = 1$  очевидно. Переход: Пусть теорема верна для всех  $G$ , что  $|G| = p_1^{k_1} \dots p_{s-1}^{k_{s-1}}$ . Рассмотрим произведение первых  $s-1$  групп:  $P_1 \dots P_{s-1} \triangleleft G$ ,  $P_s \triangleleft G$ , причем  $P_s \cap (P_1 \dots P_{s-1}) = \{e\}$ , так как  $\forall z \in P_s \cap (P_1 \dots P_{s-1}) \text{ ord}(z) = 1 \Rightarrow z = e$ . Значит,  $G = (P_1 \dots P_{s-1}) \times P_s$  по теореме о разложении группы в прямую сумму. К  $P_1 \dots P_{s-1}$  применимо предположение индукции, и значит  $G = P_1 \times \dots \times P_s$

**Необходимость.** Пусть  $G = P_1 \times \dots \times P_s$ .  $|P_1 \times \dots \times P_s| = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} \Rightarrow$  слева присутствуют все силовские подгруппы в  $G$ . По определению прямого произведения,  $\forall i P_i \triangleleft G$ .

### Упражнение

Пусть  $G = A \times B$  — внутреннее прямое произведение подгрупп ( $A \cap B = \{e\}$  по определению внутреннего прямого произведения). Доказать, что всякая силовская  $p$ -подгруппа в  $G$  раскладывается в прямое произведение силовских  $p$ -подгрупп в  $A$  и  $B$

### Идея доказательства

$\forall x \in G X = x_A x_B$ ,  $x_A \in A$ ,  $x_B \in B$  и разложение единственно. Рассмотрим гомоморфизмы  $\phi : G \rightarrow A$ ,  $\phi(x) = x_A$  и  $\psi : G \rightarrow B$ ,  $\psi(x) = x_B$ . Если  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа, то  $\phi(P) \leq A$  и  $\psi(P) \leq B$ . Очевидно, что  $P \leq \phi(P) \times \psi(P)$ . Осталось доказать равенство  $P = \phi(P) \times \psi(P)$ .