

Теория групп. Лекция 3

Штепин Вадим Владимирович

19 сентября 2019 г.

Теорема о гомоморфизмах и изоморфизмах

Замечание Если $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ — гомоморфизм, то $Im(\phi) \leq G_2$, $Ker(\phi) \triangleleft G_1$

Опр. Сюръективный гомоморфизм называется **эпиморфизмом**

Опр. Инъективный гомоморфизм называется **мономорфизмом**

Опр. Гомоморфизм $\phi : G \rightarrow G$ называется **эндоморфизмом**

Примеры:

1. $G \rightarrow \{e\} \subset G_2$ — тривиальный гомоморфизм
2. $\phi : Z \rightarrow Z_n$, $\phi(x)$ — класс вычетов по модулю n , которому принадлежит x
3. $GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^*$, $\phi(A) = \det(A)$. Очевидно, $ker(\phi) = SL_n(\mathbb{F}) \triangleleft GL_n(F)$
4. $\epsilon : S_N \rightarrow \{\pm 1\}$ — четность подстановки. $Ker(\phi) = A_n \triangleleft S_n$
5. $Aff(\mathbb{R}^2)$ — группа аффинных преобразований в плоскости. $\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
Групповая операция — композиция. $T : Aff(\mathbb{R}^2) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $T(\phi)$ — матрица A (матрица преобразования).

Упражнение. Проверить, что это гомоморфизм.

$Ker(T) = \{\phi \mid T(\phi) = E\}$ — группа параллельных переносов на плоскости (или группа сдвигов).

Вывод: Группа сдвигов — нормальная в группе аффинных преобразований.

1 Определение факторгруппы

Теорема Пусть $H \triangleleft G$. Тогда множество смежных классов G/H — группа относительно операции умножения подмножеств.

Доказательство

1. Определенность операции. $(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)H \in G/H$, так как $H \triangleleft G$

2. Ассоциативность. Мы показали, как умножаются смежные классы по H , порожденные элементами G . Тогда очевидно, что $((aH)(bH))(cH) = ((ab)H)(cH) = (ab)cH = a(bc)H = (aH)((bH)(cH))$
3. Нейтральный элемент — это $eH = H$, так как $(eH)(aH) = (aH)(eH) = (aH)$
4. Обратный элемент. $(aH)^{-1} = a^{-1}H$, так как $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = H = (aH)(a^{-1}H)$.

Опр. Построенная группа называется **факторгруппой** G по H и обозначается G/H .

Утв. Пусть G — группа и $H \triangleleft G$. Тогда $p : G \rightarrow G/H$, определяемое равенством $p(a) = aH$ является сюръективным гомоморфизмом G на G/H и $\text{Ker}(p) = H$.

Доказательство

$\forall a, b \in G : p(a)p(b) = aHbH = abH = p(ab)$ — гомоморфизм.

$\forall aH \in G/H \exists a \in G p(a) = aH$ — сюръективность.

$\text{Ker}(p) = \{a \in G \mid p(a) = H\} = \{a \in G \mid aH = H\} = H$.

Опр. Построенный сюръективный гомоморфизм — **канонический эпиморфизм (каноническая сюръекция)** группы на факторгруппу

Теорема (основная теорема о гомоморфизме)

Пусть G, K — группы, $\phi : G \rightarrow K$ — гомоморфизм, $H = \text{Ker}(\phi) \triangleleft G$. Тогда $\text{Im}(\phi) \simeq G/H$, причем существует изоморфизм $\psi : \text{Im}(\phi) \rightarrow G/H$, при котором $\psi \circ \phi = p$ (канонический эпиморфизм, построенный выше).

Доказательство

1. Построение $\psi : \text{Im}(\phi) \rightarrow G/H$.

Пусть $k \in \text{Im}(\phi)$. Тогда $\exists a \in G \phi(a) = k$. Определим $\psi(k) = \phi^{-1}(k) = \{a \in G \mid \phi(a) = k\}$ — полный прообраз. Покажем, что $\phi^{-1}(k) = aH$.

$\phi(aH) = \phi(a)\phi(H) = \phi(a) * e_2 = k \Rightarrow aH \subset \phi^{-1}(k)$.

Обратно, пусть $b \in \phi^{-1}(k)$ — произвольный элемент. Тогда $\phi(b) = k$, но $\phi(a) = k$. Значит, $\phi(a^{-1}b) = e_2$ — нейтральный элемент $K \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow b \in aH \Rightarrow \phi^{-1}(k) \subset aH$

2. ψ — гомоморфизм $\text{Im}(\phi)$ в G/H .

Пусть $k_1, k_2 \in \text{Im}(\phi)$ и $\phi(a_1) = k_1, \phi(a_2) = k_2 \Rightarrow \psi(k_1) = a_1H, \psi(k_2) = a_2H$. Тогда $\phi(a_1a_2) = k_1k_2 \Rightarrow \psi(k_1k_2) = a_1a_2H = \psi(k_1)\psi(k_2)$.

3. ψ — инъективно

Пусть $k_1 \neq k_2$ и $\psi(k_1) = \psi(k_2)$. Тогда $\psi(k_1) = a_1H = a_2H = \psi(k_2)$, где a_1, a_2 — прообразы k_1, k_2 . Значит, $\phi(a_1H) = \phi(a_2H) \Rightarrow \phi(a_1) = \phi(a_2) \Rightarrow k_1 = k_2$

4. ψ — сюръективно.

Пусть $aH \in G/H$. Тогда $\phi(a) = k \in \text{Im}(\phi) \Rightarrow \psi(k) = aH$

Делаем вывод, что ψ — изоморфизм.

5. Условие $\psi \circ \phi = p$

Пусть $a \in G$. $\phi(a) = k \Rightarrow \psi(k) = \phi^{-1}(k) = aH$. Значит, $(\psi \circ \phi)(a) = \psi(k) = aH = p(a)$

Для запоминания теоремы полезно следующее четверостишие:

Гомоморфный образ группы
В честь победы коммунизма
Изоморфен факторгруппе
По ядру гомоморфизма

Пример: Построить факторгруппу $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ и найти, какой известной группе она изоморфна. $H = SL_n(\mathbb{R} : AH = BH, A, B$ — матрицы $\Leftrightarrow A^{-1}B \in H \Leftrightarrow \det(A) = \det(B)$. Класс смежности состоит из матриц с одинаковым определителем и параметризуется ненулевым числом d .

Пусть $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*, \phi(A) = \det(A)$, причем ϕ сюръективен, так т.к. $\forall d \in \mathbb{R}^* \exists A \in GL_n(\mathbb{R}), \det(A) = d$

По основной теореме о гомоморфизме $Ker(\phi) = SL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq Im(\phi) = \mathbb{R}$.

Теорема (первая теорема об изоморфизме)

Пусть G — группа, $H \triangleleft G, K \leq G$. Тогда:

1. $HK = KH \leq G$
2. $(H \cap K) \triangleleft K$
3. $HK/H \simeq K/(H \cap K)$

Доказательство

1. Было доказано
2. Очевидно, что $(H \cap K) \leq K$. Пусть $a \in H \cap K, x \in K$. Проверим, что $a^x = x^{-1}ax \in H \cap K$. Поскольку H — нормальная, то $a^x \in H$. Поскольку $x \in K$, то $x^{-1} \in K$ и $a^x \in K$. Значит, $a^x = x^{-1}ax \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \triangleleft K$
3. Рассмотрим $\phi : HK \rightarrow HK/H$ (очевидно, $H \triangleleft HK$, т.к. $H \triangleleft G$)

$\phi(HK) = \phi(H)\phi(K) = e\phi(K) = \phi(K) \Rightarrow \phi|_K : K \rightarrow HK/H$ — сюръективно.

$Ker(\phi|_K) = \{a \in K \mid aH = H\} = \{a \in K \mid a \in H\} = H \cap K$

По основной теореме о гомоморфизме:

$Im(\phi) = HK/H \simeq K/(H \cap K) = K/Ker(\phi)$

Теорема (вторая теорема об изоморфизме; теорема о соответствии)

Пусть $Sub(G)$ — множество подгрупп G . $Inter(H, G)$ — множество подгрупп, занимающих промежуточное положение между H и G . $Inter(H, G) = \{K \leq G \mid H \leq K \leq G\}$. Пусть $H \triangleleft G$ и $H \leq K \leq G$. Тогда

1. $K/H \leq G/H$
2. Отображение $\phi : Inter(H, G) \rightarrow Sub(G/H) \phi(K) = K/H$ — осуществляет взаимнооднозначное соответствие между $Inter(H, G)$ и $Sub(G/H)$, причем ϕ сохраняет включение (но не обязательно является гомоморфизмом)
3. Отображение ϕ сохраняет отношение нормальности: $K \triangleleft G \Leftrightarrow (K/H) \triangleleft (G/H)$ Причем, если верно одно из этих эквивалентных условий, то имеет место изоморфизм $G/K \simeq (G/H)/(K/H)$

Доказательство

1. $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 H * k_2 H = k_1 k_2 H \in K/H$ — замкнуто относительно композиции
 $\forall k \in K \quad (kH)^{-1} = k^{-1}H \in K/H$ — замкнуто относительно взятия обратного
2. $K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_1/H \leq K_2/H$ — сохраняет включение (доказывается аналогично пункту 1)
1) Проверим, что $\phi(K_1) = \phi(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2$. Пусть $\phi(K_1) = \phi(K_2)$. Тогда, поскольку ϕ сохраняет включение, верно $K_1 \leq K_2$ и $K_2 \leq K_1$, значит $K_2 = K_1$ — инъективность.
Проверим сюръективность. Пусть $S \leq G/H, p : G \rightarrow G/H$ — канонический эпиморфизм. Тогда $p^{-1}(S)$ — искомый прообраз S при отображении ϕ . Проверим, что $p^{-1}(S)$ — подгруппа.
 $\forall a, b \in p^{-1}(S) \Rightarrow p(a), p(b) \in S \Rightarrow p(ab) \in S \Rightarrow ab \in p^{-1}(S)$.
 $\forall a \in p^{-1}(S) \Rightarrow p(a^{-1}) \in S \Rightarrow a^{-1} \in p^{-1}(S)$.
 $p^{-1}(eH) = H = eH$ нейтральный в факторгруппе G/H . Поскольку $S \leq G/H$, то $eH \in S$ и $H \leq p^{-1}(S) \Rightarrow H \leq p^{-1}(S) \leq G \Rightarrow p^{-1}(S) \in \text{Inter}(H, G)$
Причем, $\phi(p^{-1}(S)) = S$, так как $p^{-1}(S)$ — подгруппа элементов, которым сопоставляются смежные классы из S . Тогда, факторизуя $p^{-1}(S)$ по H мы получаем S .
3. Последний пункт будет доказан на следующей лекции