Теория групп. Лекция 6

Штепин Вадим Владимирович

10 октября 2019 г.

1 Лемма Бернсайда о неподвижных точках

Пусть $\Omega = Sub(G)$

Рассмотрим действие G на Ω сопряжением: $I_a(H) = aHa^{-1} \in Sub(G)$

Сопряжение — это автоморфизм, а значит образ подгруппы — это подгруппа.

Орбита $G(H) = \{aHa^{-1} \mid a \in G\}$ — множество подгрупп G, сопряженных H.

$St(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\} \in G$.

Опр. Полученная подгруппа — **нормализатор** подгруппы H в G. Обозначение: $N_G(H)$. $N_G(H) = \{a \in G \mid aH = Ha\}$. $H \leq N_G(H)$, так как $\forall h \in H \; hH = Hh = H$. По критерию нормальности получаем $H \triangleleft N_G(H)$.

Помимо нормализатора подгруппы существует и централизатор подгруппы H в G.

Опр. **Централизатор** подгруппы H в G — это множество $C_G(H) = \{a \in G \mid ah = ha \forall h \in H\} \leq G$.

Утв.

1. $C_G(H) \leq N_G(H)$
2. $N_G(H)$ — наибольшая подгруппа в G, что H в ней нормальная подгруппа

Доказательство

Провести самостоятельно.

Опр. Пусть $I : G \to S(G)$ — действие. I **транзитивно**, если у него есть всего одна орбита $\Leftrightarrow \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega \; \exists a \in G : \; a(\omega_1) = \omega_2$.

Теорема (лемма Бернсайда)

Пусть конечная группа G действует транзитивно на конечное Ω и $N(a)$ — число элементов Ω, которые неподвижны под действием a.

$N(a) = |\{\omega \in \Omega \mid a(\omega) = \omega\}|$.

Тогда $|G| = \sum\limits_{a \in G} N(a)$

Доказательство

Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда $|St(\omega)| = \frac{|G|}{|G(\omega)|} = \frac{|G|}{|\Omega|}$ в силу транзитивности

Пусть Δ — совокупность пар вида $(a, \omega) \in G \times \Omega$, что $a(\omega) = \omega$.

С одной стороны, $|\Delta| = \sum\limits_{\omega \in \Omega} |St(\omega)| = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{|G|}{|\Omega|} |\Omega| = |G|$.

С другой стороны, $|\Delta| = \sum\limits_{a \in G} N(a)$.

Значит, $|G| = \sum\limits_{a \in G} N(a)$

Следствие
Пусть конечная группа G действует на конечное Ω
Тогда $|\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{a \in G} N(a)$
Доказательство
Пусть $\Omega_1 ... \Omega_s$ — все попарно различные орбиты действия.
Пусть $N_i(a) = |\{\omega \in \Omega_i \mid a(\omega) = \omega\}|$ — количество неподвижных точек I_a в Ω_i.
Действие $I : G \to \Omega_i$ транзитивно по определению и $|G| = \sum\limits_{a \in G} N_i(a)$. Причем это верно для всех i. Просуммируем равенство по всем $i \in \{1, ..., s\}$.
$S|G| = \sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{a \in G} N_i(a) = \sum\limits_{a \in G} N(a)$.
Выражение $\frac{\sum\limits_{a \in G} N(a)}{|G|}$ называется **средним числом неподвижных точек**.

2 Элементы теории представлений

Опр. Пусть V — линейное пространство над F. **Линейное представление** G в пространство V — это произвольный гомоморфизм $T : G \to GL(V)$ — обратимые линейные преобразования в V. $GL(V) \subset S(V)$.

Опр. $dim(T) = dim_F(V)$ — размерность представления.
Будем считать, что F — это поле действительных или комплексных чисел.
Опр. Представление T **неприводимо**, если в V нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. $W \subset V$ — инвариантно относительно T, если $\forall g \in G \ T(g)W \subset W$

Опр. $T : G \to GL(V)$ **вполне приводимо**, если для каждого инвариантного относительно T подпространства W найдется инвариантное дополнение, т.е. $\exists U \leq V$ — инвариантно, и $V = W \bigoplus U$.
Тогда T можно рассмотреть на W и U.

Опр. $T = T_1 \bigoplus T_2$, где T_1, T_2 — сужения T на U и W соответственно.

Теорема(Машке)
Всякое представление $T : G \to GL(V)$, где G — конечна, V над R или C неприводимо или разлагается в прямую сумму неприводимых.
Основная задача теории представлений — разложить каждое представление на неприводимые, и описать все неприводимые представления.

Опр. Функция $X : G \to F$ — **характер представления** T, если $X(g) = tr(T_g)$.
Всякое представление задается, с точностью до изоморфизма, своим характером.
Пусть $T_1 : G \to GL(V_1)$ и $T_2 : G \to GL(V_2)$.
Изоморфизм представлений — линейное отображение $S : V_1 \to V_2$, что $S \circ T_1(G) = T_2(G) \circ S$.

Утв. Характер любого представления G постоянен на классах сопряженных элементов.

Доказательство $tr(T(axa^{-1})) = tr(T(a)T(x)T(a)^{-1}) = tr(T(x))$ по свойствам следа.

Пусть $F = C$ и $H_C(G)$ — множество всех комплекснозначных функций, постоянных на классах сопряженных элементов.

$dim(H_C(G))$ — количество таких классов.

Можно ввести скалярное произведение на $H_C(G)$: $(f,g) = \frac{\sum\limits_{a\in G} f(a)\overline{g(a)}}{|G|}$

Теорема
Характеры неприводимых представлений конечной группы образуют ОНБ в $H_C(G)$.
Следствие
$T : G \to GL(V)$ неприводимо $\Leftrightarrow (X_T, X_T) = 1$

Следствие $T = m_1T_1 \bigoplus m_2T_2 \bigoplus ... \bigoplus m_sT_s$ — попарно различные неприводимые представления.

Теорема (Бернсайда)
Если $T_1, ..., T_s$ — попарно неизоморфные неприводимые комплексные представления конечной группы и $n_i = dim(T_i)$, то $|G| = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i^2$

3 Прямые и полупрямые произведения групп

Опр. Пусть A, B — группы относительно произведения. **Внешнее прямое произведение** $A \times B$ — множество всех упорядоченных пар с операцией $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1, b_2) \in A \times B$.

Это множество является группой с нейтральным элементом (e, e) и обратным элементом $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$.

Если A, B — аддитивные группы, то это называется внешней прямой суммой.

Утв. (свойства внешнего прямого произведения)

1. в $A \times B$ есть подгруппы $A \times \{e\}$ и $\{e\} \times B$, изоморфные A и B.
2. $A \times \{e\} \triangleleft A \times B$, $\{e\} \times B \triangleleft A \times B$ и элементы этих групп коммутируют.
3. $(A \times \{e\}) \cap (\{e\} \times B) = \{(e, e)\}$ — пересечение тривиально
4. $(A \times \{e\}) * (\{e\} \times B) = A \times B$.

Доказательство

1. $(A \times \{e\}) \simeq A$. Изоморфизм: $(a, e) \to a$
2. Пусть $(a, b) \in A \times B$, $(a', e) \in A \times \{e\}$. Тогда $(a, b)^{-1}(a', e)(a, b) = (a^{-1}a'a, e) \in A \times \{e\}$. По критерию нормальности $A \times \{e\} \triangleleft A \times B$.

   $(a, e)(e, b) = (a, b) = (e, b)(a, e)$ — коммутируют.
3. в), г) очевидно.

Теорема (о разложении группы в прямое произведение подгрупп)
Пусть в G есть подгруппы A, B и

1. $A \cap B = \{e\}$

2. $A \lhd G, \ B \lhd G$

3. $AB = G$.

Тогда $G \simeq A \times B$
Доказательство

1. Покажем, что элементы из A и из B коммутируют между собой.

   $\forall a \in A, \forall b \in B$ верно $ab = ba$, так как $aba^{-1}b^{-1} \in B$ в силу нормальности B. Так же $aba^{-1}b^{-1} \in A$. Значит $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B = \{e\}$.

2. Рассмотрим отображение $\phi : A \times B \to G, \ \phi(a, b) = ab$. По пункту 1, ϕ — гомоморфизм, так как $\phi(a_1, b_1)\phi(a_2, b_2) = a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2b_1b_2 = \phi((a_1, b_1)(a_2, b_2))$. Причем ϕ сюръективно, так как $\forall x \in G \ x = ab, \ a \in A, b \in B$ по условию 3. Верно, что $Im(\phi) = G$.

   Проверим, что $ker(\phi) = \{(e, e)\}$. Если $\phi(a, b) = e$, то $ab = e$. Значит $a = b^{-1}$. Но $\in A, \ b^{-1} \in B$, значит $a = b = e$.

Опр. Группа G, удовлетворяющая всем условиям теоремы называется **внутренним прямым произведением** A и B.

Следствие
Внешнее прямое произведение подгрупп изоморфно внутреннему. Далее будем опускать слова "внешнее" и "внутреннее".

Опр. Пусть A, B — мультипликативные группы и задано действие B автоморфизмами группы A, т.е. $I : B \to Aut(A)$.

Множество $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ с операцией умножения пар $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 I_{b_1}(a_2), b_1b_2)$ — **полупрямое произведение** групп A и B. Обозначение: $A \rtimes B$