# Теория групп. Лекция 11

Штепин Вадим Владимирович

14 ноября 2019 г.

## 1 Свободные группы

Известно, что циклическая группа $C_n = \{e, a, ..., a^{n-1}\}$ задается свойствами $a^n = e$ и $a^s a^t = a^{s+t}$ , если $s + t < n$ и $a^{s+t-n}$ иначе.

Пусть $G = (Z, +)$. Тогда существует гомоморфизм $\phi : Z \to C_n$, $\phi(1) = a$ и $\phi(k) = a^k$.

Тогда можно поставить следующую задачу: Построить семейство групп, что все конечные (и конечнопорожденные группы) являются гомоморфными образами этих групп (или их факторгруппами, что эквивалентно по теореме о гомоморфизме).

Опр. Группа $F$ **свободная ранга** $n$ со свободными порождающими $f_1, ..., f_n$ (ранг равен количеству порождающих), если верно:

1. $F = \langle f_1, ..., f_n \rangle$
2. $\forall G$ — группа и $g_1, ..., g_n \in G$ $\exists$ гомоморфизм $\phi : F \to G$, что $\phi(f_i) = g_i$. Это условие следует понимать так: $\exists$ изначальное отображение $\phi$ со свойствами $\phi(f_i) = g_i$, и его можно продолжить до гомоморфизма.

## 2 Конструкция свободных групп ранга $n$ с порождающими элементами

Пусть $f_1, ..., f_n$ заданы.

Опр. **Алфавит** — это множество $A = \{f_1, ..., f_n, f_1^{-1}, ..., f_n^{-1}\}$

Опр. **Слово** над алфавитом $A$ — это произвольное конечное выражение вида $f_{i_1}^{\epsilon_1} f_{i_2}^{\epsilon_2)} ... f_{i_k}^{\epsilon_k}$, $\epsilon_i \in \{1, -1\}$

Опр. **Полугруппа** — множество с определенной ассоциативной бинарной алгебраической операцией

Опр. **Моноид** — полугруппа с нейтральным элементом.

На множестве слов над алфавитом $A$ введем операцию умножения — конкатенация с последующим сокращением рядом стоящих взаимнообратных элементов

Опр. Слово **полностью редуцированно**, если произведены все сокращения рядом стоящих обратных элементов.

**Обозначение:** $F_n$ — множество всех полностью редуцированных слов над $A$ (пустое слово включено).

**Теорема**

$F_n$ — свободная группа ранга $n$ с $n$ порождающими элементами.

**Доказательство**

Обратное слово к слову $f_{i_1}^{\epsilon_1} f_{i_2}^{\epsilon_2} ... f_{i_k}^{\epsilon_k}$ — это $f_{i_k}^{-\epsilon_k} ... f_{i_1}^{-\epsilon_1}$. Покажем ассоциативность $F_n$.
Пусть $|w|$ — количество букв в полностью редуцированной записи слова (длина слова).
$a(bc) = (ab)c$. Проверим утверждение индукцией по длине $b$.
База: $|b| = 0: \ ab = a, \ bc = b$ и $a(c) = (a)c$
$|b| = 1 \Rightarrow b = f$ — буква.
Разберем случаи:

1. $a = a'f^{-1}, \ c = f^{-1}c'$. Тогда $(ab)c = a'f^{-1}c' = a(bc)$
2. $a = a'f^{-1}, \ c \neq f^{-1}c'$. Тогда $(ab)c = a'c = a(bc)$
3. $a \neq a'f^{-1}, \ c = f^{-1}c'$. Тогда $(ab)c = ac' = a(bc)$
4. $a \neq a'f^{-1}, \ c \neq f^{-1}c'$. Тогда $(ab)c = a(bc)$, так как буква $f$ не сократится.

Переход: Пусть для слов длины $\leq n-1$ доказано и $|b| = n$, $b = fb'$ и $|b'| = n-1$. Тогда $(ab)c = (a(fb'))c = ((af)b')c = (af)(b'c) = a(f(b'c)) = a((fb')c) = a(bc)$ так как ассоциативность верна для однобуквенных слов.

$F_n = \langle f_1, ..., f_n \rangle$.
Пусть $G$ — группа и $g_1, ..., g_n \in G$. Зададим гомоморфизм $\phi$: $\phi(f_{i_1}^{\epsilon_1} ... f_{i_k}^{\epsilon_k}) = g_{i_1}^{\epsilon_1} ... g_{i_k}^{\epsilon_k}$. Пусть $w_1 = af_i^{\epsilon} f_i^{-\epsilon} b$, $w_2 = ab$. Покажем, что $\phi(w_1) = \phi(w_2)$: $\phi(w_1) = \phi(af_i^{\epsilon} f_i^{-\epsilon} b) = \phi(a) g_i^{\epsilon} g_i^{-\epsilon} \phi(b) = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \phi(w_2)$, и, следовательно, $\phi$ корректно определен.

**Пример** $F_1 \simeq (Z, +), \ f_1 = 1$. Существует гомоморфизм $\phi : F_1 \to Z_n$, $\phi(1) = \overline{1}, \ \phi(k) = \overline{k}$
Пусть $G$ — произвольная группа и $g \in G$. Существует гомоморфизм $\phi : F_1 \to G$, что $\phi(1) = g$, $\phi(k) = g^k$.

## 3 Задание группы с помощью образующих и соотношений

Пусть $F_n$ — свободная группа ранга $n$ с порождающими $f_1, ..., f_n$, и $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$.

Тогда $\exists$ гомоморфизм $\phi : F_n \to G$, $\phi(f_i) = g_i$. Причем $\phi$ сюрьективен, так как у каждого порождающего группу $G$ элемента $g_i$ есть прообраз $f_i$. Гомоморфизм с данными условиями определяется единственным образом.

По основной теореме о гомоморфизме, $G \simeq F_n / ker(\phi)$

**Вывод:** Любая конечнопорожденная группа изоморфна факторгруппе свободной группы ранга $n$.

**Теорема**

Если $F_n$ и $G_n$ — свободные группы ранга $n$ с порождающими элементами $f_1, ..., f_n$ и $g_1, ...mg_n$ соответственно, то $F_n \simeq G_n$

**Доказательство**

По определению свободной группы, $\exists \phi : F_n \to G_n$ и $\psi : G_n \to F_n$ — гомоморфизмы, что $\phi(f_i) = g_i$ и $\phi(g_i) = f_i$. Тогда $\phi \circ \psi : G_n \to G_n$ — гомоморфизм и $\phi \circ \psi(g_i) = g_i \Rightarrow \phi \circ \psi$ — тождественное отображение, так как $g_i$ — порождающие элементы. Аналогично доказывается, что $\psi \circ \phi$ — тождественное отображение, а значит $\phi, \psi$ — взаимнообратные изоморфизмы групп.

Опр. Пусть $S \subset F_n$ (свободная группа ранга $n$) и $K = \langle S \rangle_n$. Тогда группа $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ — **группа с образующими** $g_1, ..., g_n$ **и соотношениями** $S$, если $\phi : F_n \to G$ — сюръективный гомоморфизм из определения свободной группы, причем $\phi(f_i) = g_i$ и $ker(\phi) = K$.

**Обозначение**: $G = \langle g_1, ..., g_n \mid S$.

**Замечание**: Принято в указании $S$ заменять вхождения $f_i$ на $g_i$.

**Пример.**

$Z \to C_n \simeq Z_n$ — гомоморфизм, значит $C_n = \langle a \mid a_n \rangle$, $\phi(k) = a^k$, $ker(\phi) = nZ$.

**Теорема (универсальное свойство группы, порожденной элементами и соотношениями)**

Пусть $G = \langle g_1, ..., g_n \mid S \rangle$, $H$ — группа с элементами $h_1, ..., h_n$, такая, что соотношения из $S$ тривиализуются на $H$, то есть $\forall w \in S$ $\theta(w) = \theta(h_1 ... h_k) = e$, где $\theta : F_n \to H$ — гомоморфизм из определения свободной группы.

Тогда $\exists$ гомоморфизм $\phi : G \to H$, что $\phi(g_i) = h_i$ $\forall i]in\{1, ..., n\}$.

**Доказательство**

Б.о.о. $H = \langle h_1, ..., h_n \rangle$, так как гомоморфизм можно расширить от $\langle h_1, ..., h_n \rangle$ до всего $H$.

По определению свободной группы, $\exists$ сюръективный гомоморфизм $\psi$, что $\psi(f_i) = g_i$, $ker(\psi) = K = \langle S \rangle_n$. Так же $\exists$ гомоморфизм $\theta : F_n \to H$: $\theta(f_i) = h_i$, $ker(\theta) = L \triangleleft F_n$. По условию, $\forall w \in S$, $\theta(w) = e \Rightarrow w \in ker(\theta) = L \Rightarrow K \subset L \Rightarrow K \triangleleft L \triangleleft F_n$.

По теореме о соответствии, $H \simeq F_n/L \triangleleft F_n/K \simeq G \Rightarrow H \simeq (F_n/K)/(L/K) \simeq G/G_1$, где $G_1 = L/K$.

В качестве $\phi$ можно взять канонический эпиморфизм $p : G \to G_1$.

**Примеры**

1. Задание $V_4$ образующими и соотношениями. $G = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$. Покажем, что $G \simeq Z_2 \times Z_2$.

   $ab = b^{-1}a^{-1} = ba$, так как $(ab) = e$, $a^2 = b^2 = e$, а значит $G$ абелева. $\forall x \in G$ $x = a^i b^j$, $i, j \in \{0, 1\}$ и $|G| \leq 4$. Пусть $a' = (1, 0)$, $b' = (0, 1) \in Z_2 \times Z_2$. Тогда $Z_2 \times Z_2 = \rangle a', b' \rangle$ и соотношения тривиализуются на $Z_2 \times Z_2$. По универсальному свойству, $\exists$ сюръективный гомоморфизм $\phi$. Тогда $Z_2 \times Z_2 \simeq \Im(\phi) \simeq G/ker(\phi) \Rightarrow |G| = |ker(\phi)||Z_2 \times Z_2| = 4|ker(\phi)|$. Так как $|G| \leq 4$, то $|ker(\phi)| = 1$ и $\phi$ инъективно. Причем, $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \simeq Z_2 \times Z_2$, а значит мы задали $V_4$ образующими и соотношениями.

2. Задание группы квантерионов образующими и соотношениями.

   $G = \langle a, b \mid a^4, a^2 b^{-2}, bab^{-1}a \rangle$. Пусть $x \in G$, $x = a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} ... a^{i_k} b^{j_k}$. Заменим все вхождения $a^2$ на $b^2$, так как $a^2 = b^2$. Тогда все $j_s \in \{0, 1\}$. Используем то, что $ba = a^{-1}b = a^3 b$: $x = a^i b^j$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j \in \{0, 1\}$. Значит, $|G| \leq 8$. Пусть $H \leq GL_2(C)$, $H = \langle A, B \rangle$, где $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   На $H$ соотношения из $S$ тривиализуются, так как $A^2 = B^S$, $A^4 = E$ и $BAB^{-1} = A^{-1}$. По универсальному свойству, $\exists$ гомоморфизм $\phi : G \to H \leq GL_2(C)$, причем $\phi$ сюръективно, так как $\phi(a) = A$ и $\phi(b) = B$. Значит, $|G| = 8$ (аналогично предыдущему пункту). Построенная подгруппа в $GL_2(C)$ называется группой квантерионов и состоит из 8 элементов.

   **Замечание**

Если $G = \langle f_1, ..., f_n \mid S \rangle$, $H = \langle h_1, ..., h_n \mid S \rangle$.

**Доказательство**

Аналогично свободным группам

**Замечание**

Задача об изоморфизме групп, заданных образующими и соотношениями алгоритмически неразрешима