

# Теория групп. Лекция 8

Штепин Вадим Владимирович

24 октября 2019 г.

## 1 Основная теорема о коммутанте

Опр. Взаимный коммутант  $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$ ,  $H, K \leq G$ .

**Замечание.** Если  $H, K \triangleleft G$ , то  $[H, K] \triangleleft G$ .

**Доказательство**

$\forall h \in H, k \in K, g \in G \quad g[h, k]g^{-1} = [ghg^{-1}, gkg^{-1}] \in [H, K]$  в силу нормальности  $H$  и  $K$ .

**Утв. (критерий нормальности)**

$H \triangleleft G \Leftrightarrow [H, G] \subset H$

**Доказательство**

1. Пусть  $H \triangleleft G$ . Тогда  $[h, x] = h x h^{-1} x^{-1} \in H$ , так как  $x h^{-1} x^{-1} \in H$ . Значит,  $[H, G] \subset H$
2. Пусть  $[H, G] \subset H$ . Рассмотрим  $a \in H, x \in G$ .  $a^x = x^{-1} a x = a a^{-1} x^{-1} a x = a [a^{-1} x^{-1}] \in H$ . По критерию нормальности,  $H \triangleleft G$

**Теорема (основная теорема о коммутанте)**

Пусть  $G$  — группа,  $G'$  — коммутант. Тогда:

1.  $G/G'$  — абелева
2.  $H \triangleleft G, G/H$  — абелева  $\Leftrightarrow G' \leq H \leq G$

**Доказательство**

1.  $G' \triangleleft G$  по следствию. Пусть  $p : G \rightarrow G/G'$  — каноническая сюръекция.  $\forall x, y \in G \quad [p(x), p(y)] = p([x, y])$ , так как  $p$  — гомоморфизм.  $[x, y] \in G' = \text{Ker}(p) \Rightarrow p([x, y]) = e \Rightarrow p(x)p(y) = p(y)p(x)$ . По сюръективности:  $\forall a, b \in G/G' \exists x, y \in G' \quad p(x) = a, p(y) = b$  и  $ab = ba$ .
2. Пусть  $H \triangleleft G$  и  $G/H$  абелева.  $\forall x, y \in G$  верно  $xHyH = yHxH \Leftrightarrow xyH = yxH \Leftrightarrow [x, y]H = H \Leftrightarrow [x, y] \in H$  и  $G' \subset H$ .  
Пусть  $G' \leq H \leq G$ .  
 $[H, G] \subset G' \leq H \Rightarrow H \triangleleft G$   
 $G' \leq H \Rightarrow \forall x, y \in G \quad [x, y] \in H \Rightarrow [x, y]H = H \rightarrow xyH = yxH \Rightarrow xHyH = yHxH$  и  $G/H$  — абелева.

**Следствие**

Коммутант — наименьшая нормальная подгруппа в  $G$ , что факторгруппа по ней абелева. Коммутант можно рассматривать как меру неабелевости. Чем больше в группе коммутаторов, отличных от  $e$ , тем больше она отлична от абелевой.

## 2 Нормальная подгруппа, порожденная множеством

**Напоминание.** Если  $M \subset G$ , то  $\langle M \rangle = \cap_{H \leq G, M \subset H} H$

Опр. **Нормальная подгруппа, порожденная множеством**  $M$  — это группа  $\langle M \rangle_n = \cap_{H \triangleleft G, M \subset H} H$

**Замечание.**  $M \subset \langle M \rangle_n \triangleleft G$

**Теорема (об описании нормальной подгруппы, порожденной множеством)**

$$\langle M \rangle_n = \langle m^x \mid m \in M, x \in G \rangle$$

**Доказательство**

Обозначим  $\langle M^G \rangle = \langle m^x \mid m \in M, x \in G \rangle$ .

Покажем, что  $\langle M^G \rangle \subset \langle M \rangle_n$ .

$\forall m \in M \ m \in \langle M \rangle_n \Leftrightarrow \forall x \in G \ m^x \in \langle M \rangle_n$ . Значит,  $\langle M^G \rangle \subset \langle M \rangle_n$ .

Проверим, что  $\langle M^G \rangle \triangleleft G$ . Пусть  $x \in G$ .  $\langle M^G \rangle^x = \langle m^{yx} \mid m \in M, y \in G \rangle \subset \langle M^G \rangle \Rightarrow \langle M^G \rangle \triangleleft G \Rightarrow \langle M^G \rangle = \langle M \rangle_n$

**Теорема**

Пусть  $G = \langle M \rangle$ . Тогда  $G' = \langle [m_1, m_2] \mid m_1, m_2 \in M \rangle_n$

**Доказательство**

Обозначим  $H = \langle [m_1, m_2] \mid m_1, m_2 \in M \rangle_n \subset G'$ .

$\forall m_1, m_2 \in M \ [m_1, m_2]^x \in G'$ , так как  $[m_1, m_2] \in G' \triangleleft G$ . Значит,  $H \leq G'$  (по предыдущей теореме).

Пусть  $p : G \rightarrow G/H$  — каноническая сюръекция.  $G/H = \langle p(M) \rangle$ .  $\forall m_1, m_2 \in M \ [p(m_1), p(m_2)] = p([m_1, m_2]) = e$ , так как  $[m_1, m_2] \in H = \text{Ker}(p)$ . Значит,  $G/H$  порождена взаимно коммутующими элементами и  $G/H$  абелева. По основной теореме о коммутанте  $G' \leq H$ .

**Пример.**

$$S'_n = A_n$$

**Доказательство**

$$S_n = \langle (i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Значит,  $S'_n = \langle [(i, j), (k, l)] \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq n \rangle$ . Если  $i, j, k, l$  не содержат общих элементов, то  $[(i, j), (k, l)] = e$ . Так же,  $[(i, j), (i, k)] = (i, j)(i, k)(i, j)(i, k) = (i, j, k)$

$S'_n = \langle (i, j, k) \rangle_n = \langle (i, j, k) \rangle$ , так как сопряженный к циклу длины 3 — это цикл длины 3. Любую четную подстановку можно разложить в четное число транспозиций и  $(i, j)(k, l) = (i, j, k)(j, k, l)$ , если транспозиции не пересекаются. Значит,  $A_n = \langle (i, j, k) \rangle = A_n$ .

## 3 Разрешимые и нильпотентные подгруппы

Обозначим  $G^{(0)} = G, G^{(1)} = G' = [G, G], \dots, G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$ .

**Замечание.**

$$\forall n \ G^{(n)} \triangleleft G$$

**Доказательство**  $G' \triangleleft G$  — доказано. Пусть  $G^{(n-1)} \triangleleft G$ . Тогда  $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \triangleleft G$ .

Опр.  $G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \dots$  — **производный ряд** группы  $G$ .

Опр. Группа  $G$  **разрешима**, если  $\exists n \in \mathbb{N} \ G^{(n)} = \{e\}$ , то есть ряд обрывается на единичной подгруппе.

Опр.  $G_0 = G, G_1 = G' = [G, G_0], \dots, G_k = [G, G_{k-1}], \dots$

$G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots$  — **нижний центральный ряд**.

Опр. Группа  $G$  **нильпотентна**, если  $\exists n \in \mathbb{N} \ G_n = \{e\}$ , то есть нижний центральный ряд обрывается на единичной подгруппе.

Опр. Наименьшее  $n$  в определениях — степень разрешимости (нильпотентности).

**Утв.**

Всякая нильпотентная группа разрешима.

**Доказательство**

Покажем, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ G^{(n)} \subset G_n$ .

База индукции:  $G_1 = G'$ .

Переход индукции: Если  $G^{(n-1)} \subset G_{n-1}$ , то  $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \leq [G, G^{(n-1)}] \subset [G, G_{n-1}] = G_n$

Если группа нильпотентна, то  $G_n = \{e\}$  для некоторого  $n$  и  $G^{(n)} \leq \{e\}$ . Значит,  $G^{(n)} = \{e\}$ .

### Примеры

1. Разрешимая группа степени 0 — абелева.

Опр. Разрешимая группа степени 1 — **метабелева**.

2.  $D_n$  — метабелева. Напомним, что  $D_n$  — это группа вращений правильного  $n$ -угольника (группа диэдра).  $D_n = \langle S, R \rangle$ , где  $S$  — симметрия относительно оси, проходящей через центр многоугольника и некоторую его вершину, а  $R$  — поворот на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . Можно показать, что  $SRS^{-1} = R^{n-1}$ . Тогда  $[S, R] \leq \langle R \rangle \Leftarrow D'_n \subset \langle R \rangle$  — абелева, так как  $D''_n = \{e\}$