

# Теория групп. Лекция 10

Штепин Вадим Владимирович

7 ноября 2019 г.

## 1 Простота знакопеременных групп $A_n$ при $n > 4$

### Теорема

$A_5$  простая.

### Доказательство

Рассмотрим классы сопряженных элементов в  $S_5$ , состоящие из четных подстановок и проверим, какие из них совпадают с классами сопряженных элементов  $A_5$ , а какие распадаются на два класса:

$(12) \in C_{S_5}((12)(34)) \neq C_{A_5}((12)(34)) \Rightarrow ((12)(34))^{S_5} = ((12)(34))^{A_5}$  по лемме.

Аналогично,  $(45) \in C_{S_5}((123)) \neq C_{A_5}((123)) \Rightarrow ((123))^{S_5} = ((123))^{A_5}$

Вычислим  $C_{S_5}((12345))$ :

Пусть  $\sigma \in C_{S_5}((12345)) \Leftrightarrow \sigma(12345) = (12345)\sigma$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \end{pmatrix}$$

Значит,  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \sigma_4 \rightarrow \sigma_5 \rightarrow \sigma_1$  в цикле  $(12345)$ , причем  $\sigma_{i+1}$  восстанавливается по  $\sigma_i$  однозначно, следовательно  $C_{S_5}((12345)) = \langle (12345) \rangle = C_{A_5}((12345))$ . По лемме,  $|((12345))^{A_5}| = \frac{|((12345))^{S_5}|}{2}$ , а по замечанию, так как  $S_5 = A_5 \cup (45)A_5$  (так как  $(45) \notin A_5$ , то  $((12345))^{S_5} = ((12345))^{A_5} \cup (((12345))^{(45)})^{S_5}$  и  $((12345))^{(45)} = (12354)$

Значит, этот класс сопряженных элементов распадается на два. В таблице показаны представители и мощности классов.

Пусть  $\{e\} \neq H \triangleleft A_5$ . Согласно одному из критериев,  $H$  представляет собой дизъюнктное объединение классов сопряженных элементов, в по теореме Лагранжа, мощность  $H$  — это делитель мощности  $A_5$ . Пусть  $\delta_i$  — индикатор того, что  $i$ -тый класс вложен в  $H$ . Тогда  $|H| = \delta_1 + 15\delta_2 + 20\delta_3 + 12\delta_4 + 12\delta_5$ . Единственный возможный набор  $\delta_i \in \{0, 1\}$ , подходящий всем условиям, это  $\delta_i = 1$  для всех  $i$ . Значит  $A_5$  — простая.

	$ x^{S_5} $	$x \in S_5$	$x \in A_5$	$ x^{A_5} $
1.	1	$e$	$e$	1
2.	15	$(12)(34)$	$(12)(34)$	15
3.	20	$(123)$	$(123)$	20
4.	24	$(12345)$	$(12345)$	12
			$(12354)$	12

**Лемма**

$A_n$  порождается тройными циклами

**Доказательство**

$\sigma \in A_n \Rightarrow \sigma$  разлагается в произведение четного числа транспозиций. Разобьем их на пары соседних и перемножим:  $(ij)(st) = (ijs)(ist)$ , если транспозиции не пересекаются и  $(ij)(jk) = (ijk)$ , то есть  $\sigma$  разложилось в произведение тройных циклов

**Теорема**

Группы  $A_n$  при  $n \geq 5$  простые.

**Доказательство**

Индукция по  $n$ .

База:  $A_5$  простая (доказано)

Переход: Пусть  $A_5, \dots, A_{n-1}$  простые и  $n \geq 6$ . Покажем, что  $A_n$  простая.

Пусть  $H \triangleleft A_n$ ,  $H \neq \{e\}$ .

Идея:  $\exists \pi \in H$ ,  $\pi \neq \{e\}$  и  $\pi$  имеет неподвижную точку.

Пусть  $\tau \in H$  — не имеет неподвижных точек. Б.о.о.  $\tau(1) = 2$ . Так как  $\tau \neq (12)$ , то  $\exists i \tau(i) = j$ ,  $i, j \notin \{1, 2\}$ . Пусть  $k, l \notin \{1, 2, i, j\}$ ,  $k \neq l$ . В силу нормальности  $H$ :  $\tau^{(jkl)} \in H$ .  $\tau^{(jkl)} = (jlk)\tau(jkl) = \sigma$ . Причем,  $\sigma(1) = 2$ ,  $\sigma(i) = l$ . Пусть  $\pi = \tau^{-1}\sigma$ .  $\pi(2) = 2$  и  $\pi(j) = l$ . Значит,  $\pi$  отлично от  $e$  и имеет неподвижную точку. Б.о.о. неподвижной точкой будет являться  $n$  (иначе перенумеруем элементы).  $\pi \in H \cap A_{n-1} = H_1$ .  $A_{n-1} \leq A_n$  — группа элементов, сохраняющих  $n$ .

$H \triangleleft A_n \Rightarrow H_1 \triangleleft A_{n-1}$ . По предположению индукции,  $H_1 = A_{n-1} \Rightarrow (123)H_1 \subset H \Rightarrow (123)^{A_n} \subset H$ , так как  $H$  — нормальная. Причем,  $(1230)^{A_n} = (123)^{S_n}$  так как  $(45) \in C_{S_n}(123)$ , но  $(45) \notin A_n$ . Значит,  $H$  содержит все тройные циклы и  $H = A_n$ , так как  $A_n$  порождается тройными циклами.

**Пример**

Проективные специальные группы  $PSL_n(F)$ , где  $F$  — конечное поле.

$PSL_n(F) = SL_n(F)/Z(SL_n(F))$ ,  $Z(SL_n(F)) = \{\lambda E \mid \lambda \in F\}$  — центр группы.

**Утв. (6/д)**

$PSL_n(F)$  проста, если  $|F| \geq 4$  или  $n \geq 3$ .

**Теорема**

Группа  $SO_3$  над  $R$  (группа ортогональных преобразований в  $R^3$ ) простая.

**Доказательство**

Было доказано, что если  $A \in SO_n$ , то  $A$  приводится к каноническому виду блочно-диагональной матрицы с блоками в виде чисел  $\pm 1$  и матриц поворота.

В группе  $SO_3$  канонический вид — это диагональная матрица с  $\pm 1$  на главной диагонали, либо блок — поворот на угол  $\phi$  и блок из числа 1. Общий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

(Можно перенумеровать вектора базиса, чтобы блок был снизу)

Всякая такая матрица соответствует повороту вокруг какой-то прямой на какой-то угол. Пусть  $H \triangleleft SO_3$  и  $H \neq \{E\}$ . Заметим, что сопряжение в  $SO_3$  это отображение  $A \rightarrow B^{-1}AB$  — переход к новому базису с матрицей перехода  $B$ .

Значит,  $A^B$  — поворот на угол  $\phi$  вокруг прямой с направляющим вектором  $B^{-1}(e_1)$ , так как  $A^B(B^{-1}(e_1)) = B^{-1}(e_1)$ . Если  $B$  пробегает все возможные матрицы из  $SO_3$ , то  $A_B$  пробегает все возможные повороты на угол  $\phi$  вокруг всех осей, проходящих через начало координат.

Идея: покажем, что в  $H$  содержатся все повороты на угол  $\gamma \in U(0)$  — некоторая окрестность точки 0. Тогда в  $H$  лежат вообще все повороты (так как композиция поворотов — это поворот на сумму углов).

Пусть  $B_\psi$  — поворот вокруг  $e_2$  на угол  $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  и  $A \neq E$ .

Тогда:  $[A, B_\psi] \in H \ \forall B_\psi \in SO_3$ .

$$B_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A, B_{\frac{\pi}{2}}] = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos^2(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin^2(\phi) & \sin(\phi)\cos(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$tr([A, B_{\frac{\pi}{2}}]) = 2\cos(\phi) + \cos^2(\phi) < 3$ , так как  $\phi \neq 0$  ( $A \neq E$ ). Значит,  $[A, B_{\frac{\pi}{2}}]$  — поворот на ненулевой угол  $\gamma_0$

Отображение  $\psi \rightarrow [A, B_\psi]$  непрерывно, и угол поворота  $\gamma$  матрицы  $[A, B_\psi]$  так же непрерывно изменяется, причем при  $\psi = 0$  имеем  $\gamma = 0$ , а при  $\psi = \frac{\pi}{2}$  :  $\gamma = \gamma_0$ . По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, в  $H$  есть матрицы поворота на все углы промежутка  $[0, \gamma_0]$ , а значит и вообще все углы. Следовательно,  $H = SO_3$