

# Теория групп. Лекция 6

Штепин Вадим Владимирович

10 октября 2019 г.

## 1 Лемма Бернсайда о неподвижных точках

Пусть  $\Omega = \text{Sub}(G)$

Рассмотрим действие  $G$  на  $\Omega$  сопряжением:  $I_a(H) = aHa^{-1} \in \text{Sub}(G)$

Сопряжение — это автоморфизм, а значит образ подгруппы — это подгруппа.

Орбита  $G(H) = \{aHa^{-1} \mid a \in G\}$  — множество подгрупп  $G$ , сопряженных  $H$ .

$\text{St}(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\} \in G$ .

Опр. Полученная подгруппа — **нормализатор** подгруппы  $H$  в  $G$ . Обозначение:  $N_G(H)$ .  
 $\overline{N}_G(H) = \{a \in G \mid aH = Ha\}$ .  $H \leq N_G(H)$ , так как  $\forall h \in H \ hH = Hh = H$ . По критерию нормальности получаем  $H \triangleleft N_G(H)$ .

Помимо нормализатора подгруппы существует и централизатор подгруппы  $H$  в  $G$ .

Опр. **Централизатор** подгруппы  $H$  в  $G$  — это множество  $C_G(H) = \{a \in G \mid ah = ha \forall h \in H\} \leq G$ .

**Утв.**

1.  $C_G(H) \leq N_G(H)$
2.  $N_G(H)$  — наибольшая подгруппа в  $G$ , что  $H$  в ней нормальная подгруппа

**Доказательство**

Провести самостоятельно.

Опр. Пусть  $I : G \rightarrow S(G)$  — действие.  $I$  **транзитивно**, если у него есть всего одна орбита  
 $\Leftrightarrow \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega \ \exists a \in G : a(\omega_1) = \omega_2$ .

**Теорема (лемма Бернсайда)**

Пусть конечная группа  $G$  действует транзитивно на конечном  $\Omega$  и  $N(a)$  — число элементов  $\Omega$ , которые неподвижны под действием  $a$ .

$N(a) = |\{\omega \in \Omega \mid a(\omega) = \omega\}|$ .

Тогда  $|G| = \sum_{a \in G} N(a)$

**Доказательство**

Пусть  $\omega \in \Omega$ . Тогда  $|\text{St}(\omega)| = \frac{|G|}{|G(\omega)|} = \frac{|G|}{|\Omega|}$  в силу транзитивности

Пусть  $\Delta$  — совокупность пар вида  $(a, \omega) \in G \times \Omega$ , что  $a(\omega) = \omega$ .

С одной стороны,  $|\Delta| = \sum_{\omega \in \Omega} |\text{St}(\omega)| = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{|G|}{|\Omega|} |\Omega| = |G|$ .

С другой стороны,  $|\Delta| = \sum_{a \in G} N(a)$ .

Значит,  $|G| = \sum_{a \in G} N(a)$

### Следствие

Пусть конечная группа  $G$  действует на конечное  $\Omega$

Тогда  $|\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} N(a)$

### Доказательство

Пусть  $\Omega_1 \dots \Omega_s$  — все попарно различные орбиты действия.

Пусть  $N_i(a) = |\{\omega \in \Omega_i \mid a(\omega) = \omega\}|$  — количество неподвижных точек  $I_a$  в  $\Omega_i$ .

Действие  $I : G \rightarrow \Omega_i$  транзитивно по определению и  $|G| = \sum_{a \in G} N_i(a)$ . Причем это верно

для всех  $i$ . Просуммируем равенство по всем  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

$$s|G| = \sum_{i=1}^s \sum_{a \in G} N_i(a) = \sum_{a \in G} N(a).$$

Выражение  $\frac{\sum_{a \in G} N(a)}{|G|}$  называется **средним числом неподвижных точек**.

## 2 Элементы теории представлений

Опр. Пусть  $V$  — линейное пространство над  $F$ . **Линейное представление**  $G$  в пространстве  $V$  — это произвольный гомоморфизм  $T : G \rightarrow GL(V)$  — обратимые линейные преобразования в  $V$ .  $GL(V) \subset S(V)$ .

Опр.  $\dim(T) = \dim_F(V)$  — размерность представления.

Будем считать, что  $F$  — это поле действительных или комплексных чисел.

Опр. Представление  $T$  **неприводимо**, если в  $V$  нет нетривиальных (отличных от  $\{0\}$  и  $V$ ) инвариантных подпространств.  $W \subset V$  — инвариантно относительно  $T$ , если  $\forall g \in G \ T(g)W \subset W$

Опр.  $T : G \rightarrow GL(V)$  **вполне приводимо**, если для каждого инвариантного относительно  $T$  подпространства  $W$  найдется инвариантное дополнение, т.е.  $\exists U \leq V$  — инвариантно, и  $V = W \oplus U$ .

Тогда  $T$  можно рассмотреть на  $W$  и  $U$ .

Опр.  $T = T_1 \oplus T_2$ , где  $T_1, T_2$  — сужения  $T$  на  $U$  и  $W$  соответственно.

### Теорема (Машке)

Всякое представление  $T : G \rightarrow GL(V)$ , где  $G$  — конечна,  $V$  над  $R$  или  $C$  неприводимо или разлагается в прямую сумму неприводимых.

Основная задача теории представлений — разложить каждое представление на неприводимые, и описать все неприводимые представления.

Опр. Функция  $X : G \rightarrow F$  — **характер представления**  $T$ , если  $X(g) = \text{tr}(T_g)$ .

Всякое представление задается, с точностью до изоморфизма, своим характером.

Пусть  $T_1 : G \rightarrow GL(V_1)$  и  $T_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ .

**Изоморфизм представлений** — линейное отображение  $S : V_1 \rightarrow V_2$ , что  $S \circ T_1(G) = T_2(G) \circ S$ .

**Утв.** Характер любого представления  $G$  постоянен на классах сопряженных элементов.

**Доказательство**  $\text{tr}(T(axa^{-1})) = \text{tr}(T(a)T(x)T(a)^{-1}) = \text{tr}(T(x))$  по свойствам следа.

Пусть  $F = C$  и  $H_C(G)$  — множество всех комплекснозначных функций, постоянных на классах сопряженных элементов.

$\dim(H_C(G))$  — количество таких классов.

Можно ввести скалярное произведение на  $H_C(G)$ :  $(f, g) = \frac{\sum_{a \in G} f(a)\overline{g(a)}}{|G|}$

#### Теорема

Характеры неприводимых представлений конечной группы образуют ОНБ в  $H_C(G)$ .

#### Следствие

$T : G \rightarrow GL(V)$  неприводимо  $\Leftrightarrow (X_T, X_T) = 1$

**Следствие**  $T = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \dots \oplus m_s T_s$  — попарно различные неприводимые представления.

#### Теорема (Бернсайда)

Если  $T_1, \dots, T_s$  — попарно неизоморфные неприводимые комплексные представления конечной группы и  $n_i = \dim(T_i)$ , то  $|G| = \sum_{i=1}^s n_i^2$

### 3 Прямые и полупрямые произведения групп

**Опр.** Пусть  $A, B$  — группы относительно произведения. **Внешнее прямое произведение**  $A \times B$  — множество всех упорядоченных пар с операцией  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \in A \times B$ .

Это множество является группой с нейтральным элементом  $(e, e)$  и обратным элементом  $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ .

Если  $A, B$  — аддитивные группы, то это называется внешней прямой суммой.

#### Утв. (свойства внешнего прямого произведения)

1. в  $A \times B$  есть подгруппы  $A \times \{e\}$  и  $\{e\} \times B$ , изоморфные  $A$  и  $B$ .
2.  $A \times \{e\} \triangleleft A \times B$ ,  $\{e\} \times B \triangleleft A \times B$  и элементы этих групп коммутируют.
3.  $(A \times \{e\}) \cap (\{e\} \times B) = \{(e, e)\}$  — пересечение тривиально
4.  $(A \times \{e\}) * (\{e\} \times B) = A \times B$ .

#### Доказательство

1.  $(A \times \{e\}) \simeq A$ . Изоморфизм:  $(a, e) \rightarrow a$
2. Пусть  $(a, b) \in A \times B$ ,  $(a', e) \in A \times \{e\}$ . Тогда  $(a, b)^{-1}(a', e)(a, b) = (a^{-1}a'a, e) \in A \times \{e\}$ . По критерию нормальности  $A \times \{e\} \triangleleft A \times B$ .  
 $(a, e)(e, b) = (a, b) = (e, b)(a, e)$  — коммутируют.
3. в), г) очевидно.

#### Теорема (о разложении группы в прямое произведение подгрупп)

Пусть в  $G$  есть подгруппы  $A, B$  и

1.  $A \cap B = \{e\}$

$$2. A \triangleleft G, B \triangleleft G$$

$$3. AB = G.$$

Тогда  $G \simeq A \times B$

**Доказательство**

1. Покажем, что элементы из  $A$  и из  $B$  коммутируют между собой.

$\forall a \in A, \forall b \in B$  верно  $ab = ba$ , так как  $aba^{-1}b^{-1} \in B$  в силу нормальности  $B$ . Так же  $aba^{-1}b^{-1} \in A$ . Значит  $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B = \{e\}$ .

2. Рассмотрим отображение  $\phi : A \times B \rightarrow G$ ,  $\phi(a, b) = ab$ . По пункту 1,  $\phi$  — гомоморфизм, так как  $\phi(a_1, b_1)\phi(a_2, b_2) = a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2b_1b_2 = \phi((a_1, b_1)(a_2, b_2))$ . Причем  $\phi$  сюръективно, так как  $\forall x \in G \ x = ab$ ,  $a \in A, b \in B$  по условию 3. Верно, что  $Im(\phi) = G$ .

Проверим, что  $ker(\phi) = \{(e, e)\}$ . Если  $\phi(ab) = e$ , то  $ab = e$ . Значит  $a = b^{-1}$ . Но  $a \in A, b^{-1} \in B$ , значит  $a = b = e$ .

**Опр.** Группа  $G$ , удовлетворяющая всем условиям теоремы называется **внутренним прямым произведением**  $A$  и  $B$ .

**Следствие**

Внешнее прямое произведение подгрупп изоморфно внутреннему. Далее будем опускать слова "внешнее" и "внутреннее".

**Опр.** Пусть  $A, B$  — мультипликативные группы и задано действие  $B$  автоморфизмами группы  $A$ , т.е.  $I : B \rightarrow Aut(A)$ .

Множество  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  с операцией умножения пар  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1I_{b_1}(a_2), b_1b_2)$  — **полупрямое произведение** групп  $A$  и  $B$ . Обозначение:  $A \rtimes B$