

# Теория групп. Лекция 11

Штепин Вадим Владимирович

14 ноября 2019 г.

## 1 Свободные группы

Известно, что циклическая группа  $C_n = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$  задается свойствами  $a^n = e$  и  $a^s a^t = a^{s+t}$ , если  $s+t < n$  и  $a^{s+t-n}$  иначе.

Пусть  $G = (Z, +)$ . Тогда существует гомоморфизм  $\phi : Z \rightarrow C_n$ ,  $\phi(1) = a$  и  $\phi(k) = a^k$ .

Тогда можно поставить следующую задачу: Построить семейство групп, что все конечные (и конечнопорожденные группы) являются гомоморфными образами этих групп (или их факторгруппами, что эквивалентно по теореме о гомоморфизме).

Опр. Группа  $F$  **свободная ранга  $n$**  со свободными порождающими  $f_1, \dots, f_n$  (ранг равен количеству порождающих), если верно:

1.  $F = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$
2.  $\forall G$  — группа и  $g_1, \dots, g_n \in G \exists$  гомоморфизм  $\phi : F \rightarrow G$ , что  $\phi(f_i) = g_i$ . Это условие следует понимать так:  $\exists$  изначальное отображение  $\phi$  со свойствами  $\phi(f_i) = g_i$ , и его можно продолжить до гомоморфизма.

## 2 Конструкция свободных групп ранга $n$ с порождающими элементами

Пусть  $f_1, \dots, f_n$  заданы.

Опр. **Алфавит** — это множество  $A = \{f_1, \dots, f_n, f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1}\}$

Опр. **Слово** над алфавитом  $A$  — это произвольное конечное выражение вида  $f_{i_1}^{\epsilon_1} f_{i_2}^{\epsilon_2} \dots f_{i_k}^{\epsilon_k}$ ,  $\epsilon_i \in \{1, -1\}$

Опр. **Полугруппа** — множество с определенной ассоциативной бинарной алгебраической операцией

Опр. **Моноид** — полугруппа с нейтральным элементом.

На множестве слов над алфавитом  $A$  введем операцию умножения — конкатенация с последующим сокращением рядом стоящих взаимнообратных элементов

Опр. Слово **полностью редуцировано**, если произведены все сокращения рядом стоящих обратных элементов.

**Обозначение:**  $F_n$  — множество всех полностью редуцированных слов над  $A$  (пустое слово включено).

### Теорема

$F_n$  — свободная группа ранга  $n$  с  $n$  порождающими элементами.

### Доказательство

Обратное слово к слову  $f_{i_1}^{\epsilon_1} f_{i_2}^{\epsilon_2} \dots f_{i_k}^{\epsilon_k}$  — это  $f_{i_k}^{-\epsilon_k} \dots f_{i_1}^{-\epsilon_1}$ . Покажем ассоциативность  $F_n$ .

Пусть  $|w|$  — количество букв в полностью редуцированной записи слова (длина слова).

$a(bc) = (ab)c$ . Проверим утверждение индукцией по длине  $b$ .

База:  $|b| = 0 : ab = a, bc = b$  и  $a(c) = (a)c$

$|b| = 1 \Rightarrow b = f$  — буква.

Разберем случаи:

1.  $a = a'f^{-1}, c = f^{-1}c'$ . Тогда  $(ab)c = a'f^{-1}c' = a(bc)$
2.  $a = a'f^{-1}, c \neq f^{-1}c'$ . Тогда  $(ab)c = a'c = a(bc)$
3.  $a \neq a'f^{-1}, c = f^{-1}c'$ . Тогда  $(ab)c = ac' = a(bc)$
4.  $a \neq a'f^{-1}, c \neq f^{-1}c'$ . Тогда  $(ab)c = a(bc)$ , так как буква  $f$  не сократится.

Переход: Пусть для слов длины  $\leq n-1$  доказано и  $|b| = n, b = fb'$  и  $|b'| = n-1$ . Тогда  $(ab)c = (a(fb'))c = ((af)b')c = (af)(b'c) = a(f(b'c)) = a((fb')c) = a(bc)$  так как ассоциативность верна для однобуквенных слов.

$F_n = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ .

Пусть  $G$  — группа и  $g_1, \dots, g_n \in G$ . Зададим гомоморфизм  $\phi: \phi(f_{i_1}^{\epsilon_1} \dots f_{i_k}^{\epsilon_k}) = g_{i_1}^{\epsilon_1} \dots g_{i_k}^{\epsilon_k}$ . Пусть  $w_1 = af_i^{\epsilon} f_i^{-\epsilon} b, w_2 = ab$ . Покажем, что  $\phi(w_1) = \phi(w_2)$ :  $\phi(w_1) = \phi(af_i^{\epsilon} f_i^{-\epsilon} b) = \phi(a)g_i^{\epsilon}g_i^{-\epsilon}\phi(b) = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \phi(w_2)$ , и, следовательно,  $\phi$  корректно определен.

**Пример**  $F_1 \simeq (Z, +), f_1 = 1$ . Существует гомоморфизм  $\phi: F_1 \rightarrow Z_n, \phi(1) = \bar{1}, \phi(k) = \bar{k}$

Пусть  $G$  — произвольная группа и  $g \in G$ . Существует гомоморфизм  $\phi: F_1 \rightarrow G$ , что  $\phi(1) = g, \phi(k) = g^k$ .

## 3 Задание группы с помощью образующих и соотношений

Пусть  $F_n$  — свободная группа ранга  $n$  с порождающими  $f_1, \dots, f_n$ , и  $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ .

Тогда  $\exists$  гомоморфизм  $\phi: F_n \rightarrow G, \phi(f_i) = g_i$ . Причем  $\phi$  сюръективен, так как у каждого порождающего группу  $G$  элемента  $g_i$  есть прообраз  $f_i$ . Гомоморфизм с данными условиями определяется единственным образом.

По основной теореме о гомоморфизме,  $G \simeq F_n / \ker(\phi)$

**Вывод:** Любая конечнопорожденная группа изоморфна факторгруппе свободной группы ранга  $n$ .

### Теорема

Если  $F_n$  и  $G_n$  — свободные группы ранга  $n$  с порождающими элементами  $f_1, \dots, f_n$  и  $g_1, \dots, g_n$  соответственно, то  $F_n \simeq G_n$

### Доказательство

По определению свободной группы,  $\exists \phi: F_n \rightarrow G_n$  и  $\psi: G_n \rightarrow F_n$  — гомоморфизмы, что  $\phi(f_i) = g_i$  и  $\psi(g_i) = f_i$ . Тогда  $\phi \circ \psi: G_n \rightarrow G_n$  — гомоморфизм и  $\phi \circ \psi(g_i) = g_i \Rightarrow \phi \circ \psi$  — тождественное отображение, так как  $g_i$  — порождающие элементы. Аналогично доказывается, что  $\psi \circ \phi$  — тождественное отображение, а значит  $\phi, \psi$  — взаимнообратные изоморфизмы групп.

Опр. Пусть  $S \subset F_n$  (свободная группа ранга  $n$ ) и  $K = \langle S \rangle_n$ . Тогда группа  $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$  — группа с образующими  $g_1, \dots, g_n$  и соотношениями  $S$ , если  $\phi : F_n \rightarrow G$  — сюръективный гомоморфизм из определения свободной группы, причем  $\phi(f_i) = g_i$  и  $\ker(\phi) = K$ .

**Обозначение:**  $G = \langle g_1, \dots, g_n \mid S \rangle$ .

**Замечание:** Принято в указании  $S$  заменять вхождения  $f_i$  на  $g_i$ .

**Пример.**

$Z \rightarrow C_n \simeq Z_n$  — гомоморфизм, значит  $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ ,  $\phi(k) = a^k$ ,  $\ker(\phi) = nZ$ .

**Теорема (универсальное свойство группы, порожденной элементами и соотношениями)**

Пусть  $G = \langle g_1, \dots, g_n \mid S \rangle$ ,  $H$  — группа с элементами  $h_1, \dots, h_n$ , такая, что соотношения из  $S$  тривиализуются на  $H$ , то есть  $\forall w \in S \theta(w) = \theta(h_1 \dots h_k) = e$ , где  $\theta : F_n \rightarrow H$  — гомоморфизм из определения свободной группы.

Тогда  $\exists$  гомоморфизм  $\phi : G \rightarrow H$ , что  $\phi(g_i) = h_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Доказательство**

Б.о.о.  $H = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ , так как гомоморфизм можно расширить от  $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$  до всего  $H$ .

По определению свободной группы,  $\exists$  сюръективный гомоморфизм  $\psi$ , что  $\psi(f_i) = g_i$ ,  $\ker(\psi) = K = \langle S \rangle_n$ . Так же  $\exists$  гомоморфизм  $\theta : F_n \rightarrow H$ :  $\theta(f_i) = h_i$ ,  $\ker(\theta) = L \triangleleft F_n$ . По условию,  $\forall w \in S, \theta(w) = e \Rightarrow w \in \ker(\theta) = L \Rightarrow K \subset L \Rightarrow K \triangleleft L \triangleleft F_n$ .

По теореме о соответствии,  $H \simeq F_n/L \triangleleft F_n/K \simeq G \Rightarrow H \simeq (F_n/K)/(L/K) \simeq G/G_1$ , где  $G_1 = L/K$ .

В качестве  $\phi$  можно взять канонический эпиморфизм  $p : G \rightarrow G_1$ .

**Примеры**

1. Задание  $V_4$  образующими и соотношениями.  $G = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$ . Покажем, что  $G \simeq Z_2 \times Z_2$ .

$ab = b^{-1}a^{-1} = ba$ , так как  $(ab) = e$ ,  $a^2 = b^2 = e$ , а значит  $G$  абелева.  $\forall x \in G x = a^i b^j$ ,  $i, j \in \{0, 1\}$  и  $|G| \leq 4$ . Пусть  $a' = (1, 0)$ ,  $b' = (0, 1) \in Z_2 \times Z_2$ . Тогда  $Z_2 \times Z_2 = \langle a', b' \rangle$  и соотношения тривиализуются на  $Z_2 \times Z_2$ . По универсальному свойству,  $\exists$  сюръективный гомоморфизм  $\phi$ . Тогда  $Z_2 \times Z_2 \simeq \mathfrak{I}(\phi) \simeq G/\ker(\phi) \Rightarrow |G| = |\ker(\phi)| |Z_2 \times Z_2| = 4|\ker(\phi)|$ . Так как  $|G| \leq 4$ , то  $|\ker(\phi)| = 1$  и  $\phi$  инъективно. Причем,  $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \simeq Z_2 \times Z_2$ , а значит мы задали  $V_4$  образующими и соотношениями.

2. Задание группы квантерионов образующими и соотношениями.

$G = \langle a, b \mid a^4, a^2 b^{-2}, bab^{-1}a \rangle$ . Пусть  $x \in G$ ,  $x = a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_k} b^{j_k}$ . Заменим все вхождения  $a^2$  на  $b^2$ , так как  $a^2 = b^2$ . Тогда все  $j_s \in \{0, 1\}$ . Используем то, что  $ba = a^{-1}b = a^3b$ :  $x = a^i b^j$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $j \in \{0, 1\}$ . Значит,  $|G| \leq 8$ . Пусть  $H \leq GL_2(C)$ ,  $H = \langle A, B \rangle$ , где  $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

На  $H$  соотношения из  $S$  тривиализуются, так как  $A^2 = B^S$ ,  $A^4 = E$  и  $BAB^{-1} = A^{-1}$ . По универсальному свойству,  $\exists$  гомоморфизм  $\phi : G \rightarrow H \leq GL_2(C)$ , причем  $\phi$  сюръективно, так как  $\phi(a) = A$  и  $\phi(b) = B$ . Значит,  $|G| = 8$  (аналогично предыдущему пункту). Построенная подгруппа в  $GL_2(C)$  называется группой квантерионов и состоит из 8 элементов.

**Замечание**

Если  $G = \langle f_1, \dots, f_n \mid S \rangle$ ,  $H = \langle h_1, \dots, h_n \mid S \rangle$ .

**Доказательство**

Аналогично свободным группам

**Замечание**

Задача об изоморфизме групп, заданных образующими и соотношениями алгоритмически неразрешима