

Семинар №4

Рассматриваем функции в \mathbb{R}^2 .

Def. (предел $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению \vec{l}).

Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\dot{U}(x_0, y_0)$ и пусть $\vec{l}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ — некоторый единичный вектор.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ (x, y) \in l(\varphi)}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\rho \rightarrow +0} f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi)$$

Замечание. $l(\varphi) = \{(x, y) \mid x = x_0 + \rho \cos \varphi, y = y_0 + \rho \sin \varphi, \rho \in (0, +\infty)\}$ — луч.

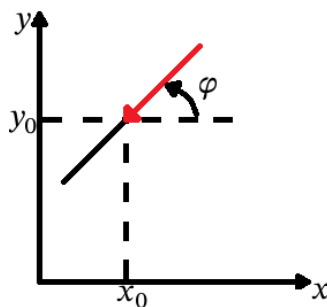


Рис. 1

Th (необходимое условие $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$).

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a \Rightarrow \forall \varphi \in [0, 2\pi) \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ (x, y) \in l(\varphi)}} f(x, y) = a$$

Следствие. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ (x, y) \in l(\varphi)}} f(x, y)$ зависит от φ или $\nexists \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

Пример: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Исследовать \exists - $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

$$\text{Рассмотрим } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ (x, y) \in l(\varphi)}} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\cancel{\rho} \cos \varphi \cancel{\rho} \sin \varphi}{\cancel{\rho}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\cos \varphi \sin \varphi) = \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi}_{\text{зависит от } \varphi} \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Следствие. $\forall \varphi \in [0, 2\pi) \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ (x, y) \in l(\varphi)}} f(x, y) = a \nRightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a.$