№ 40

Р. 1

Формула включений и исключений

Th Пусть имеется мн-во из N объектов.

$\alpha_1 \dots \alpha_n$ – некоторые св-ва.

$\bar{\alpha}_k$ – отрицание св-ва

$N(\alpha_i)$ об-ет кол-во объектов, удовл. св-ву α_i

$N(\alpha_i, \alpha_j)$ —— // — св-м α_i и α_j

$\vdots$

$N(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ — // — св-м $\alpha_1 \dots \alpha_n$

Тогда справедлива след. ф-ла

$$N(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1 \alpha_2) + \dots +$$
$$+ N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

Д-во. Индукция по числу св-в.

База, $n=1$: $N(\bar{\alpha}_1) = N - N(\alpha_1)$

Переход

Предположим, что для всех $1 \leq k \leq n$ верно, что $\forall N$, $\forall$ мн-ва из N объектов и $\forall$ набора св-в $\alpha_1 \dots \alpha_k$ верна ф-ла.

Рассмотрим $\alpha_1 \dots \alpha_n$. По предп. ин-ии для них верна ф-ла: $N(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n) = N - N(\alpha_1) \dots + (-1)^n N(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ (1)

Рассмотрим теперь только те объекты, для которых выполняется св-во α_{n+1}.

К ним применим предп. и-и со св-ми $\alpha_1 \dots \alpha_n$

$(N = N(\alpha_{n+1}))$

$$N(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n, \alpha_{n+1}) = N(\alpha_{n+1}) - N(\alpha_{n+1}, \alpha_1) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1 \dots \alpha_n, \alpha_{n+1}) \quad (2)$$

Вычтем (2) из (1)

$$N(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n) - N(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n, \alpha_{n+1}) = N(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{n+1}) =$$

$$= N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1 \alpha_2) + \dots + N(\alpha_n, \alpha_{n+1}) - \dots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$$