

113 формула включений и исключений (формулировка и р-во для $n=3$).
 P. 1 формулы для кол-ва бесн-ков

Пусть имеется N объектов $\{a_1, \dots, a_n\}$

Пусть имеется n св-в d_1, \dots, d_n

$N(d_i)$ - кол-во объектов, обладающих св-вом d_i

$N(d_i, d_j)$ - кол-во объектов, обладающих св-ми d_i и d_j

и т.д.

\bar{d}_i - не обладающие св-ом d_i и т.д.

TL (формула включений и исключений)

$$N(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n) = N - N(d_1) - \dots - N(d_n) + N(d_1, d_2) + \dots + N(d_{n-1}, d_n) - \dots + (-1)^{n-1} N(d_1, \dots, d_n)$$

Д-во, ($n=3$)

$$N(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3) = N - N(d_1) - N(d_2) - N(d_3) + N(d_1, d_2) + N(d_1, d_3) + N(d_2, d_3) - N(d_1, d_2, d_3)$$

Возьмем n -й объект

сл. 1, $\begin{cases} a_i \in d_1 \\ a_i \in d_2 \\ a_i \in d_3 \end{cases}$ тогда мы получим его $1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1$ раз $n \in \underline{0}$

сл. 2, $\begin{cases} a_i \in d_k \\ a_i \in d_l \end{cases}$ тогда $1 - 1 - 1 + 1 = \underline{0}$

сл. 3, $\begin{cases} a_i \in d_k \end{cases}$ тогда $1 - 1 = \underline{0}$

сл. 4, $a_i \notin d_j \forall j$ тогда $\underline{1}$

сл. 5 (задача о беспоряжках)

имеется n человек и n мест в аудитории.

Сколько имеется способов рассадить людей так, чтобы никто не сидел на своем месте?

Решение,

Объекты - перестановки $N = n!$

Пусть d_i означ-ет, что i -й человек при данной пер-ке сидит на своем месте Тогда

$$N(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n) = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \dots + (-1)^n C_n^n 0! = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

при $n \rightarrow \infty$ получим $\frac{n!}{e}$