№ 65 Алгебраические и трансцендентные числа. Существование транс. чисел. Тк Лиувилля (б/д.). Конструкция транс. числа с помощью ц. д. и Тк Лиувилля. Св-ка р-в о транс. $e, \pi, e+\pi, \pi+e^{\pi}, \alpha^{\beta}$ (Тк Гельфонда). Вывод про e^{π} из Тк Гельфонда

Р. 1

Def. Число α наз-ся алгебраическим, если оно является корнем нек-го мн-на с целыми коэф-ми. Мн-во алг. чисел обр-ют поле

Мн-во алг. чисел счетно $\Rightarrow \exists$ не алг. числа.

Def. Число - трансцендентное $\Leftrightarrow$ число не алгебраическое

Тк (Лиувилль)

Если α - алгебр. число, причем минимальная степень многочлена, корнем которого является α равна n, то $\exists\ c = c(\alpha)$: нер-во

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{c}{q^n}$$ имеет лишь конечное число р-х решений

Пример Построим явно пример транс. числа.

$\psi(q_n) = e^{q_n}$. Тогда по Тк из 64 билета

с некоторого n апроксимация будет лучше чем в Тк Лиувилля.

Тк (Гельфонда, б/д)

Пусть α, β - алгебр. числа, причем $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, а β-ирр.

Тогда α^{β} - транс.

Сл-е e^{π} - транс.

Д-во.

Предположим, что e^{π} алгебраическое.

Тогда $(e^{\pi})^{i} = -1$ - алг-е ?! ▨

Известно, что $e, \pi, \pi \pm e^{\pi}, \pi \cdot e^{\pi}$ — транс. числа.