№15 р.1 | Функция Мёбиуса. Сумма значений ф-ии Мёбиуса по делителям числа

Опр. Функция Мёбиуса

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \text{ и } \exists\, i : \alpha_i \geq 2 \\ (-1)^s, & \text{если } n = p_1 \cdots p_s \end{cases}$$

Лемма. $$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Д-во.

$n = 1$.

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

$n \geq 2$.

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$

$d \mid p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \Leftrightarrow d = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$, где $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{\substack{(\beta_1 \ldots \beta_s) \\ 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i}} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}) = \sum_{\substack{(\beta_1 \ldots \beta_s) \\ \beta_i \in \{0, 1\}}} \mu(p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}) =$$

$$= \mu(1) + s \cdot (-1) + C_s^2 - C_s^3 \ldots + (-1)^s C_s^s = C_s^0 - C_s^1 + C_s^2 \ldots + (-1)^s C_s^s = 0 \ \blacksquare$$