№ 60 Р. 1	Бесконечные цепные дроби. Утверждение о том, что значение бесконечной цепной дроби является иррациональным числом

Опр. $a_0 \in \mathbb{Z}$ $a_i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.

Тогда беск. ц. др. наз-ся выр-е вида:

$$[a_0; a_1, \dots a_n \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Величиной бесконечной цепной дроби наз-ся предел ее подходящих дробей, то есть α:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

Утв. $\forall [a_0; a_1 \dots]$ - б. ц. д. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n}$

Д-во.

Знаем, что четные подх. дроби возр-ют. нечетные убывают.

Так как подход. дроби с чет. номерами огр. сверху то $\exists \lim$.

Так как подход. дроби с нечет номерам огр. снизу то $\exists \lim$.

Но $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ => пределы совпадают ☒

Утв. Если $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n}$, то $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Д-во.

Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то дробь должна быть конечной ?! ☒