№4 р.1 Понятие образа и прообраза мн-ва при соответствии. Критерий равенства образа пересечения и пересечения образов. Область опр-я и область значений соответствия. Сужение и продолжение соотв-я. Композиция соответствий, её ассоциативность

Def. Пусть $F: A \to B$ - соотв. $S \subset A$.

Тогда образом S наз-ся

$$F(S) = \bigcup_{s \in S} F(s)$$

Def. Пусть $F: A \to B$ - соотв. $T \subset B$.

Тогда прообразом T наз-ся

$$F^{-1}(T) = \{x \mid F(x) \cap T \neq \emptyset\} = \bigcup_{t \in T} F^{-1}(t) = \bigcup_{t \in T} \{x \mid t \in F(x)\}$$

Утв. $F(S \cap Q) \subset F(S) \cap F(Q)$

Д-во.

Пусть $y \in F(S \cap Q) \Rightarrow \exists x \in S \cap Q : y \in F(x). \Rightarrow \begin{cases} x \in S \\ x \in Q \end{cases}$

$\Rightarrow y \in F(S)$ и $y \in F(Q) \Rightarrow y \in F(S) \cap F(Q)$ ■

Утв. $F(S \cap Q) = F(S) \cap F(Q) \Leftrightarrow F$ инъективно

Д-во.

$\Rightarrow$ Пусть F не инъективно.

$\Rightarrow \exists x, y, z : \begin{cases} x \neq z \\ y \in F(x) \\ y \in F(z) \end{cases}$ $\quad S = \{x\}$, $Q = \{z\}$ $\quad y \in F(S) \cap F(Q)$, но

$S \cap Q = \emptyset \quad F(\emptyset) = \emptyset$

$\Leftarrow$ $y \in F(S) \cap F(Q) \Rightarrow \begin{cases} \exists x \in S : y \in F(S) \\ \exists z \in Q : y \in F(z) \end{cases}$

т.к. F инъективно $x = z \Rightarrow x \in S \cap Q \Rightarrow y \in F(S \cap Q)$ ■

Def. Областью опр-я соотв. $F: A \to B$ наз-ся мн-во $\mathrm{Dom}\, F = F^{-1}(B)$.

т.е. обл опр-я — эл-ты A, которым соотв. хоть один эл-т из B

Def. Областью значений соотв. $F: A \to B$ наз-ся мн-во $\mathrm{Ran}\, F = F(A)$.

т.е. эл-ты B, которые соотв. хотя бы один эл-т из A.

Def. Пусть $F: A\to B$ – соотв, а $S\subset A$. Тогда сужением соотв-я F на S наз-ся соотв-е $F|_S: S\to B$, принимающее те же значения, что и F.

F по отношению к $F|_S$ – продолжение

Def. Соотв-е $F: A\to B$ наз-ют частично опр. ф-ей, если $F|_{Dom F}$ – от-е.

Note. Для част. опр. ф-й сужение и от-е можно опр-ть иначе.

$F: A\to B$ – сужение $G: A\to B$, если $Dom F\subset Dom G$ и $F(x)=G(x)\ \forall x\in Dom F$

Def. Пусть $F: A\to B$ и $G: B\to C$ – соотв-я.

Их композицией $G\circ F$ наз-ся соотв-е $H: A\to C$:

$c\in H(a) \Leftrightarrow \exists b: c\in G(b)$ и $b\in F(a)$

Note. Для отображений можно записать $(G\circ F)(a)=G(F(a))$.

Св-ва

1. $H\circ(G\circ F)=(H\circ G)\circ F$
2. $\exists\, id_A$ (тожд. от-е) $id_A\ A\to A: id_A(x)=x$

   $F\circ id_A=id_B\circ F=F$
3. $F: A\to B$

   $F^{-1}: B\to A$

   $y\in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x\in F(y)$
4. $(G\circ F)^{-1}=F^{-1}\circ G^{-1}$
5. $F^{-1}\circ F=id_A$ – для инъект. непустозн. } одновременно только для биекции

   $F\circ F^{-1}=id_B$