№ 37 P. 1	Плотный порядок. Изоморфизм счетных плотных линейно уп-х мн-в без наибольшего и наименьшего эл-та.

Def Линейный порядок наз-ся плотным, если

$x < y \Rightarrow \exists z: x < z < y$

Def Эл-т $x \in A$ - наибольший, если $\forall y \in A \mapsto y \leq x$.

Def Изоморфизм мн-в A и B наз-ся биекция $f: A \to B$, которая сохраняет порядок: $x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)$

Th $\forall$ два счетных плотно линейно уп-х мн-ва без наибольшего и наименьшего эл-та изоморфны

Д-во

Занумеруем $A = \{a_0, a_1 \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1 \ldots\}$

Начнем строить изоморфизм f по ин-ии.

$f(a_0) = b_0$. Пусть выбраны $f(a_0) \ldots f(a_{n-1})$

① $a_n > \max\{a_0 \ldots a_{n-1}\} \Rightarrow f(a_n) = b_{k(n)}$, где $k(n) = \min\{k \mid b_k > \max\{f(a_0) \ldots f(a_{n-1})\}\}$

② $a_n < \min\{a_0 \ldots a_{n-1}\} \Rightarrow f(a_n) = b_{p(n)}$, где $p(n) = \min\{k \mid b_k < \min\{f(a_0) \ldots f(a_{n-1})\}\}$

③ $a_j < a_n < a_i$, где $i, j < n$ и $i = \max\{a_e \mid a_e \in \{a_0 \ldots a_{n-1}\}, a_e < a_n\}$

$j = \min\{a_m \mid a_m \in \{a_0 \ldots a_{n-1}\}, a_m > a_n\}$

Тогда $f(a_n) = b_{m(n)}$, где $m(n) = \min\{m \mid f(a_i) < b_m < f(a_j)\}$

1, 2 работают т.к. не существует наим. и наиб.

3 работает из-за плотности

f - инъекция, сохр. пор-к по построению. Докажем, что f - [illegible]. Пусть b_t такое, что t - минимальный номер эл-та, которому ничего не соответствует.

Пусть s таково, что если $f(a_n) \in \{b_0 \ldots b_{t-1}\}$, то $n < s$.

Зафиксируем s.

① Если $b_t > \max\{f(a_0) \ldots f(a_s)\}$, то $\exists p: a_p > \max\{a_0 \ldots a_s\}$.

Положим $p_m = \min\{p\} \Rightarrow f(a_{p_m}) = b_t$

② Если $b_t < \min\{f(a_0) \ldots f(a_s)\}$, то $\exists m$: $a_m < \min\{a_0 \ldots a_s\}$.
Положим $p_m = \min\{m\}$. $\Rightarrow f(a_{p_m}) = b_t$

③ Если $f(a_i) < b_t < f(a_j)$, то в качестве p_m можно взять наименьший номер эл-та между a_i и a_j

Тогда f – сюрьекция. $\blacksquare$