

№ 45

Р. I

Производящие ф-ии ТЛ о сходимости степенных рядов (б/г). Примеры, иллюстрирующие ТЛ.  
Вычисление суммы  $\sum_{k=0}^{\infty} k C_n^k \left(\frac{2}{3}\right)^k$

**Def** Обозначим  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  - ф. с. р. Ряд называется сходящимся в точке  $x = x_0$ , если существует конечный предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n x_0^n = f(x_0)$

**ТЛ** (Коши - Адамар)

$$\text{Пусть } \rho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Тогда  $\forall x_0 : |x_0| < \rho$  ряд сходится

$\forall x_0 : |x_0| > \rho$  ряд расходится.

**Примеры**

①  $A = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$   $\rho = 1$   $|x_0| < 1 \Rightarrow \text{сх-ся}$   
 $|x_0| > 1 \Rightarrow \text{расх-ся}$

②  $A = \sum_{k=0}^{\infty} k x^k$   $\rho = 1$

③  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$   $\rho = 1$   $x_0 = 1$   $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

④  $a_k = \begin{cases} -2^k, & k - \text{нечет} \\ 3^k, & k - \text{чет} \end{cases}$   $\rho = \frac{1}{3}$

**Def** Пусть  $\{a_n\}$  - числовая послед-ть. Тогда ее произв. ф-ей наз-ся степенной ряд  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

**ТЛ** Внутри круга сходимости степенной ряд можно диффр. почленно.



Пример,  $F(x) = \sum_{k=0}^n k C_n^k \left(\frac{2}{3}\right)^k$

Решение

$$f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (1+x)^n$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$$

$$x f'(x) = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^k$$

$$F(x) = x f'(x) = x \cdot n(1+x)^{n-1}$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot n \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$