№ 43

P. 1

Формула обращений Мебиуса

Про ф-ю Мебиуса см. билет №15.

Def. ф-я Мебиуса μ

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^s, & n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Утв.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

Т1 (формула обращений Мебиуса)

Пусть $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – две ф-ии, причем $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$. Тогда

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \quad (1)$$

Д-во.

$$\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d') \right) =$$

$$= \sum_{dd'|n} \mu(d) g(d') = \sum_{dd'|n} \mu(d') g(d) =$$

$$= \sum_{d|n} g(d) \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right) = g(n) \sum_{d'|1} \mu(d') + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} g(d) \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right) = g(n) \quad \blacksquare$$