№11 р.1 | Бином Ньютона. Полиномиальный коэффициент и полин. ф-ла. Задача про девушек и цветки (5.12)

Опр. Бином Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Задача

Пусть есть n_1 объектов a_1

— // — n_2 — // — a_2

⋮

— // — n_k — // — a_k

Пусть всего $n = n_1 + \dots + n_k$ объектов.

Сколько р-х слов длины n из $a_1 \dots a_k$? ($P(n_1 \dots n_k)$)

Т. $P(n_1 \dots n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Д-во. Есть n позиций

Выберем n_1 позиций для a_1: $C_n^{n_1}$

Потом из $n-n_1$ выберем n_2 для a_2 $C_{n-n_1}^{n_2}$

и т.д.

В итоге

$$P(n_1 \dots n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k! \cdot 0!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \ \blacksquare$$

Т. (Полиномиальная ф-ла)

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+\dots+n_k=n} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

Д-во.

$(x_1 + \dots + x_k)^n = (x_1 + \dots + x_k)(x_1 + \dots + x_k) \cdots (x_1 + \dots + x_k)$

Из каждой ск-ки выбираем одну пер-ную.

Обозначим n_1 - кол-во скобок из которых взяли x_1

— — —

— // — n_k ———— // — x_k

$n_1 + \dots + n_k = n$

моном $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ с коэф $P(n_1 \dots n_k)$ $\blacksquare$

Задача. Сколько имеется способов раздать 11 разных цветков трем девушкам: какой-то 5, остальным по 3 цветка

Решение.

$n_1 = 5$

$n_2 = 3$

$n_3 = 3.$

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 11$

Ответ: $P(5,3,3) = \dfrac{11!}{5!\,3!\,3!}$

(Составим 11-ти „буквенные слова" из девушек, где каждое место под „букву" - цветок).