№ 47 P. 1	Числа Каталана. Формула для коэфф ряда $\sqrt{1+x}$ (б/д). Вывод из нее ф-лы для чисел Каталана.

см. билет 46.

Утв. $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$

Д-во.

В билете 46 п-но, что $x f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$, где $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + C_{1/2}^1 x + C_{1/2}^2 x^2 + \ldots + C_{1/2}^n x^n + \ldots$$

где $$C_{1/2}^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-3}{n}\right)}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{2^n\cdot n!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-2)!}{2^n\cdot n!\, 2^{n-1}\cdot(n-1)!} = 2^{1-2n}\cdot(-1)^{n-1}\cdot C_{2n-2}^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

Тогда коэф при x^n в $\sqrt{1-4x}$ равен.

$$(-4)^n\cdot 2^{1-2n}(-1)^{n-1} C_{2n-2}^{n-1} = -\frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1} = -2T_{n-1}$$

т.е. $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ ☒