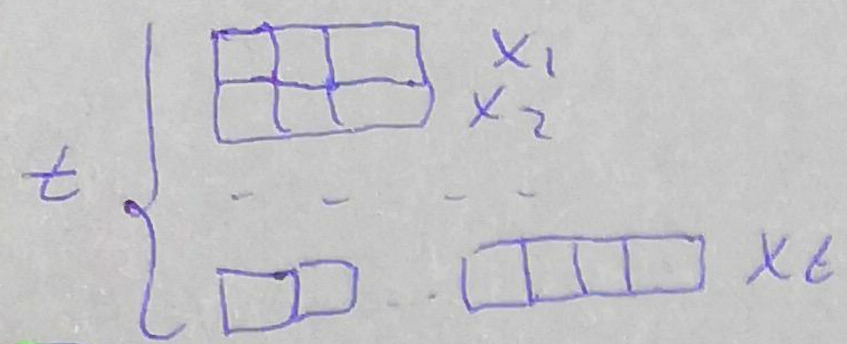
№19 р.1 | Диаграммы Юнга. Теоремы Эйлера о равенстве кол-в неупорядоченных р-й (3 штуки). Формула Харди–Рамануджана (б/д).

Def. $n = x_1 + \dots + x_t$ (пор-к не важен)

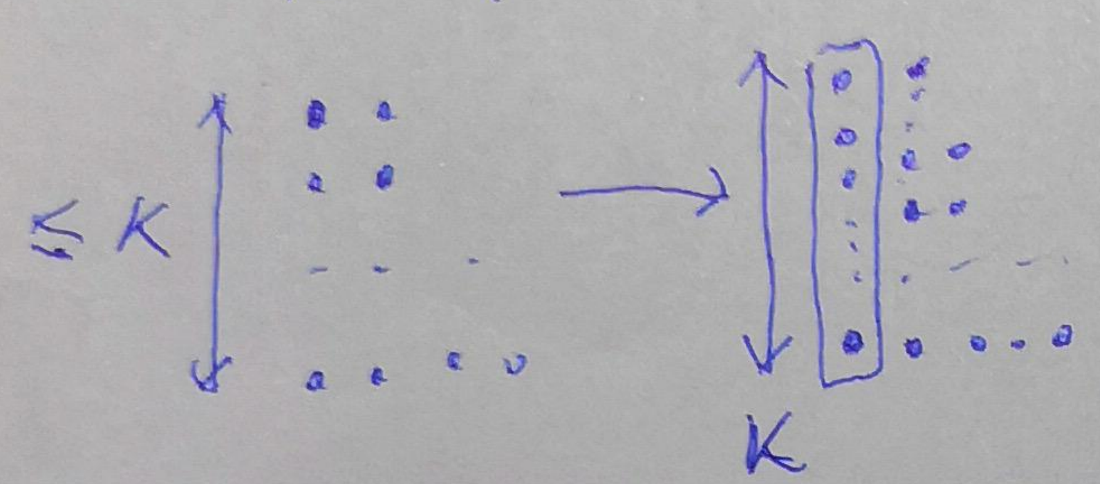
Можем считать, что $x_1 \le x_2 \dots \le x_t$.



Th1. Кол-во неупорядоченных р-й числа n на не более k сл-емых равно кол-ву р-й числа $n+k$ на ровно k сл-мых.

Д-во

$n = x_1 + \dots + x_t \quad t \le k$



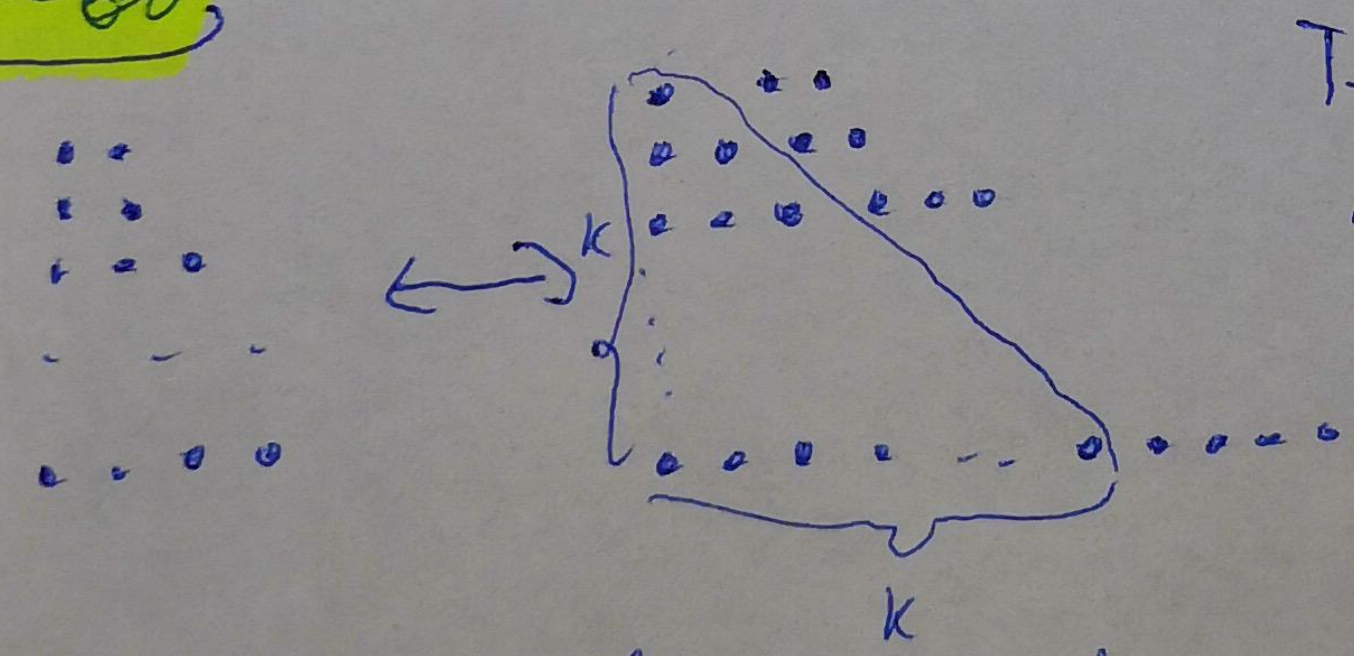
Т.е. приписываем столбец высоты k слева.

Тогда получим р-е числа $n+k$ на ровно k сл-емых.

Получается каждому р-ю числа n на $\le k$ соответствует р-е $n+k$ на ровно k. ▨

Th2. Кол-во разбиений числа n на не более чем k сл-емых равно кол-ву разбиений числа $n + \frac{k(k+1)}{2}$ на k различных сл-емых.

Д-во

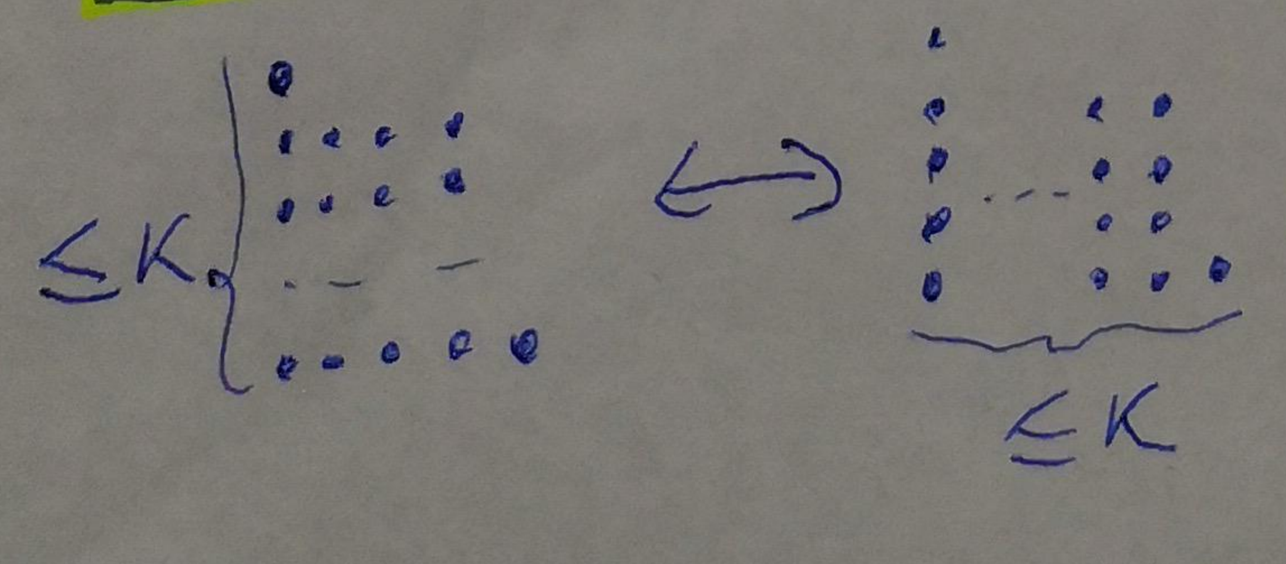


Т.е. приписываем прямоугольный треугольник со сторонами k.

получим биекцию (справа число $n + \frac{k(k+1)}{2}$) ▨

Th3. Кол-во разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно кол-ву разбиений числа n на слагаемые, величина каждого из которых не превосходит k.

Д-во



▨

Th (Харди-Рамануджана)

$p(n) = f(n;1..n)$ - кол-во неуп. р-ний числа n

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}$$