№ 49

P. 1

Ф-я Эйлера. Формула с пр-ем по простым числам; д-во при помощи св-ва мультипликативности

Оп. Ф-я Эйлера $\varphi(n)$ = кол-во натуральных чисел меньших n и взаимнопростых с ним.

Утв. $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$, где $(n,m)=1$

Д-во

(1) Пусть $(m, m')=1$ и $\alpha \in$ прив. с-ме вычетов $(\mathrm{mod}\ m)$

$\alpha' \in$ — // — $(\mathrm{mod}\ m')$.

Тогда $\alpha' m + \alpha m' \in$ прив. с-ме вычетов $(\mathrm{mod}\ mm')$

Д-во

Пусть $\alpha_1' m + \alpha_1 m' \equiv \alpha_2' m + \alpha_2 m' \ (mm')$

$\Rightarrow \alpha_1 m' \equiv \alpha_2 m' \ (m) \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2 \ (m)$

Аналогично

$\alpha_1' \equiv \alpha_2' \ (m')$

Т.е. $\exists$ $\varphi(m)\varphi(m')$ несравнимых по $\mathrm{mod}\ mm'$ чисел, которые обр-ют прив. с-му вычетов по $\mathrm{mod}\ mm'$ ■

Пусть $(m,n)=1$. Тогда $\alpha' n + \alpha m$ пробегает прив. с-му вычетов по nm, где $\alpha \in$ П.С.В $\mathrm{mod}\ n$
$\alpha' \in$ П.С.В $\mathrm{mod}\ m$.

$$(\alpha' n + \alpha m, nm) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha' n + \alpha m, n) = 1 \\ (\alpha' n + \alpha m, m) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha m, n) = 1 \\ (\alpha' n, m) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha, n) = 1 \\ (\alpha', m) = 1 \end{cases}$$

Поэтому $\varphi(mn)$ чисел — эл-ты П.С.В $(\mathrm{mod}\ mn) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ ■

Утв. $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$, где p – п-е

Д-во.

Числа от 1 до p^n, которые не взаимно просты с p^n – $p, 2p, 3p \ldots (p^{n-1}-1)p$

Всего таких чисел $p^{n-1}-1$. Поэтому $\varphi(p^n) = p^n - 1 - (p^{n-1}-1) =$

$= p^n - p^{n-1}$ ∎

Утв. $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, $n > 1$, где

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

Д-во.

$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_k^{\alpha_k}) =$

$= p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right) p_2^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right) \ldots = n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ ∎