№ 51

P. 1

Решение пр-мы Э-Г-З для $d=1$, $n=p$.

**Тh** $p$-простое. Среди $\forall$ $2p-1$ целых чисел найдется $p$ чисел, таких что их сумма делится на $p$

**Д-во**

Д-м от противного.

Пусть $m(p) > 2p-1$. Т. е. $\exists$ $a_1 a_2 \ldots a_{2p-1}$ чисел, таких что $\forall\, J \subset \{1 \ldots (2p-1)\} : |J| = p : \sum\limits_{i \in J} a_i \not\equiv 0\, (p)$.

Пусть $$S = \sum_{\substack{J \subset \{1 \ldots (2p-1)\} \\ |J| = p}} \Big(\sum_{i \in J} a_i\Big)^{p-1}$$

**Утв. 1** $C^{p}_{2p-1} \equiv 1\, (p)$

**Утв 2** $\forall\, q \in \{1 \ldots p-1\}$ $C^{p-q}_{2p-1-q} \equiv 0\, (p)$

По малой Тh Ферма $\left(\sum a_i\right)^{p-1} \equiv 1\, (p) \Rightarrow S \equiv C^{p}_{2p-1} \equiv 1\, (p)$

С другой стороны $\left(\sum\limits_{i \in J} a_i\right)^{p-1}$ — это выр-е вида $a_{i_1}^{d_{i_1}} \ldots a_{i_q}^{d_{i_q}}$. Каждое такое выр-е возникает в $S$ столько раз, сколько таких $J \subset \{1 \ldots (2p-1)\}$, $|J| = p$: $\{i_1 \ldots i_q\} \subset J$. А их ровно $C^{p-q}_{2p-1-q}$, где $1 \leq q \leq p-1$.

Тогда каждый коэф. в $S$ имеет вид $C^{p-q}_{2p-1-q} \equiv 0\, (p)$,

$\Rightarrow S \equiv 0\, (p)$ ?! $\blacksquare$