№8 p.1 Отношения на мн-вах. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности, Th о классах экв-ти. Отношения частичного и линейного пор-ка. Минимальные/максимальные и наименьшие/наибольшие эл-ты

**Def.** Отношение на мн-ве A – пр-е подмн-во $R \subset A \times A$.

**Def.** R – рефлексивное, если $\forall x \quad xRx$

**Def.** R – симметричное, если $\forall x, y \to xRy \Rightarrow yRx$

**Def.** R – антисимметричное, если $\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow x = y$

**Def.** R – транзитивное, если $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow xRz$

**Def.** R – отношение эквивалентности, если

R – $\begin{cases} \text{рефлексивное} \\ \text{симметричное} \\ \text{транзитивное} \end{cases}$

**Def.** R – от-е пор-ка, если

R – $\begin{cases} \text{рефлексивное} \\ \text{антисимметричное} \\ \text{транзитивное} \end{cases}$

**Def.** Пусть на A задано от-е экв. ~. Тогда классом экв-ти эл-та $x \in A$ наз-ся мн-во $K_x = \{y \mid x \sim y\}$

**Th** Пусть на A задано от. экв. ~. Тогда A можно представить как $A = \cup A_i$:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$
2. $A_i - K_x$ для нек-го x
3. $y, z \in A_i \Rightarrow y \sim z$
4. $y \in A_i, z \in A_j, i \neq j \Rightarrow y \not\sim z$

**Д-во** д-во будет с-ть из нескольких лемм

**Л1** $x \in K_x$.

**Д-во**

$x \sim x$ (рефлекс) $\Rightarrow x \in K_x$. ☒

**Л2** $y \in K_x, z \in K_x \Rightarrow y \sim z$

**Д-во**

$\left.\begin{array}{l} y \sim x \\ z \sim x \Rightarrow x \sim z \text{ (симм.)} \end{array}\right| \Rightarrow y \sim z$ (транз.) ☒

(Л3) $x \sim y \Rightarrow K_x = K_y$

**Д-во.**

Пусть $z \in K_x$. $\Rightarrow z \sim x \Rightarrow z \sim y$ (транз) $\Rightarrow y \sim z$ (симм.) $\Rightarrow z \in K_y$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow K_x \subset K_y$.

Обр-е аналогично $\Rightarrow K_x = K_y$. ☐

(Л4) $\forall x, y$ $K_x = K_y$ или $K_x \cap K_y = \varnothing$.

**Д-во.**

Пусть $K_x \cap K_y \neq \varnothing$. $\Rightarrow \exists z \in K_x \cap K_y \Rightarrow \begin{matrix} z \sim x \\ z \sim y \end{matrix} \Rightarrow x \sim y \overset{\text{по Л3}}{\Rightarrow} K_x = K_y$ ☐

Разобьём $A$ на мн-ва, которые явл-ся классами экв. каких-то эл-в.

Каждый эл-т $A$ сод-ся хотя бы в одном классе экв. (по Л1).

$\Rightarrow A = \cup A_i$

1-е св-во вып-я по Л4, т.к. $A_i$ и $A_j$ - р-е классы экв.

2-е св-во по построению

3-е св-во - Л2

4-е св-во. Если $i \neq j$, $x \in A_i$, $y \in A_j$, $x \sim y \Rightarrow x \in K_y = A_j$ и $x \in K_x = A_i$.

Тогда $K_x \neq K_y$, $K_x \cap K_y \neq \varnothing$ ?! ☐

**Def.** Отношение пор-ка наз-ся линейным, если $\forall x, y \hookrightarrow \left[\begin{matrix} xRy \\ yRx \end{matrix}\right.$

($\forall$ эл-ты сравнимы).

**Def.** $x \in A$ - наибольший в $(A, \leq)$, если $\forall y \in A$ $y \leq x$.

**Def.** $x \in A$ - максимальный в $(A, \leq)$, если $\nexists y : x < y$

**Note.** наименьший и минимальный аналогично.

(Т2) Пусть $(A, \leq)$ - ЧУМ.

Тогда:

1. Наибольший эл-т всегда максимальный, причём единственный
2. Максимальных может быть несколько
3. Единственный максимальный не всегда наибольший

**Д-во.**

1. Если $x$ - наибольший, то $x \geq y$ для всех $y \in A$.

Поэтому $\forall y$ $x \nless y \Rightarrow x$ - максимальный. $\forall$ другой эл-т будет меньше $x \Rightarrow$ других макс. нет.

2. $\{1, ..., 10\}$. Отношение делимости.

числа 6, 7, 8, 9, 10 - max.

3. $\{3\} \cup \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ от-е делимости

3 - max. но наиб. нет ☐