№20 p.1 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое ур-е. Общая ф-ла для соот-я 2-го пор-ка с разл-ми корнями хар-кого ур-я.

Def. Пос-ть $\{y_n\}$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению пор-ка k с пост. коэф. $a_0 \ldots a_k \in \mathbb{R}$, если $a_0, a_k \neq 0$ и $\forall n \quad a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = 0$

Def. Характеристическим ур-ем линейного рек. соотн. с коэф-ми $a_0 \ldots a_k$ наз-ся ур-е

$$a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

T. Рассм. рек. соотношение $a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$.
Если λ_1 и λ_2 – р-е корни хар-го ур-я этого соотношения, то:

1. $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ пос-ть $y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ удовл. этому соот-ю.
2. Если пос-ть $\{y_n\}$ удовл. этому рек. соотношению, то $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{C} : y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$

Д-во

1. Подставим $y_{n+2}\ y_{n+1}\ y_n$ в соот-е.

$$a_2 (c_1 \lambda_1^{n+2} + c_2 \lambda_2^{n+2}) + a_1 (c_1 \lambda_1^{n+1} + c_2 \lambda_2^{n+1}) + a_0 (c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n) =$$
$$= c_1 \lambda_1^n \underbrace{(a_2 \lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0)}_{0} + c_2 \lambda_2^n \underbrace{(a_2 \lambda_2^2 + a_1 \lambda_2 + a_0)}_{0} = 0$$

2. Пусть пос-ть $\{y_n\}$ удовл. рек. соотношению. Составим с-му ур-й

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = y_1 \end{cases}$$

Пусть c_1^*, c_2^* – ее решения. Рассмотрим пос-ть $y_n^* = c_1^* \lambda_1^n + c_2^* \lambda_2^n$. По пункту 1 она удовл. рек. с-ю

При этом $y_0^* = y_0 \quad y_1^* = y_1 \Rightarrow \forall n\ y_n^* = y_n$ ▨