№32. p.1 Рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей

Def Цепной дробью наз-ся число $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} = [a_0; a_1 \ldots a_n]$

Канонической записью ц. др. наз-ся запись, полученная по инд-ии:

$[a_0] = \frac{a_0}{1}$

$[a_0; a_1 \ldots a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2 \ldots a_n]}$

Числа a_i наз-ся неполными частными

а дробь $[a_0; a_1 \ldots a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ - k-й подходящей дробью

Th Для числителей и знаменателей подходящих дробей верны следующие соотношения:

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$$

Д-во (индукция по k)

База $p_0 = a_0$ $q_0 = 1$ легко посчитать

$p_1 = a_0 \cdot a_1 + 1$ $q_1 = a_1$

$p_2 = a_2(a_0 \cdot a_1 + 1)$ $q_2 = a_1 a_2 + 1$

Переход $[a_0; a_1 \ldots a_{k+1}] = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$

$[a_1; a_2 \ldots a_{k+1}] = \frac{p^*_{k+1}}{q^*_{k+1}}$

$$[a_0; a_1 \ldots a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{\frac{p^*_{k+1}}{q^*_{k+1}}} = \frac{a_0 \cdot p^*_{k+1} + q^*_{k+1}}{p^*_{k+1}}$$

$\Rightarrow p_{k+1} = a_0 \cdot p^*_{k+1} + q^*_{k+1}$

$q_{k+1} = p^*_{k+1}$

Тогда, применяя предп. ин-ии для $[a_1; a_2 \ldots a_{k+1}]$ имеем для q_{k+1}

$$q_{k+1} = p^*_{k+1} = a_{k+1} p^*_k + p^*_{k-1} = a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}$$

и

$$p_{k+1} = a_0(a_{k+1} p^*_k + p^*_{k-1}) + a_{k+1} q^*_k + q^*_{k-1} =$$

$$= a_{k+1}(a_0 p^*_k + q^*_k) + (a_0 p^*_{k-1} + q^*_{k-1}) = a_{k+1} p_k + p_{k-1} \blacksquare$$