№ 64	Перед-во ТЬ Дирихле при помощи ц. д. Уточнение ТЬ Дирихле (б/д). Зависимость к-ва аппроксимации от скорости роста неполных частных: существование чисел с заданным порядком к-ва аппроксимации; золотое сечение как самое плохо прибл. число.
P. 1	

ТЬ Дирихле

Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (α - иррациональное).

Тогда $\exists$ беск много р-х дробей

$$\frac{p}{q} : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$$

Д-во.

Пусть дроби $\frac{p_n}{q_n}$ приближают α.

Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}\right| \le \left|\frac{p_{2k}}{q_{2k}} - \frac{p_{2k-1}}{p_{2k-1}}\right| = \frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}} < \frac{1}{q^2_{2k-1}} . \boxtimes$$

ТЬ (б/д)

$\forall$ иррационального числа α существует бесконечно много раз-х несократимых дробей $\frac{p}{q}$, таких что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$

ТЬ (б/д)

$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ нер-во $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ имеет лишь конечное число решений в несократимых дробях p/q

(T2) $\forall$ ф-ии $\ell = \ell(q)$, монотонно стремящейся к бесконечности при $q \to \infty$, $q \in \mathbb{N}$. $\exists\ \alpha \notin \mathbb{Q}$ и бесконечное кол-во несокр. дробей $\frac{p}{q}$ б $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\ell(q)}$

Д-во.

Будем строить число α в виде бесконечной цепной дроби. α_0, α_1 выберем пр-но.
Пусть выбраны первые n эл-в $a_0, a_1, \ldots a_n$.
Заметим, что если выбрать a_{n+1}, то $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$ опр-ся одн-но. Возьмем a_{n+1} настолько большим, чтобы $q_{n+1} q_n > \ell(q_n)$. Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{\ell(q_n)} \quad \boxed{D}$$

Вывод: чем быстрее растут частные, тем лучше аппроксимация.

Note. Квадратичные иррациональности плохо приближаются, потому что они задаются период. ц. д.