№7 р.1 Континуальные мн-ва. Д-во того, что отрезок, окр-ть и пл-ть являются континуальными. Формулировка континуум гипотезы

Def. A — континуальное, если $A \cong [0,1]$.

Th. $[0,1] \cong$ мн-ву бесконечных посл-ей нулей и единиц.

Д-во.

Построим биекцию $F: [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Если число $\in [0;\frac{1}{2}]$, то первый символ 0, иначе — 1.

И т.д.

$F([0;1])$ включает в себя все посл-ти кроме тех, которые оканчиваются бесконечным числом 1 и содержат 0. ($1\ldots\ldots1\ldots$ это 1).

Однако таких посл-тей счетное кол-во (укажем начало ряда единиц в каждой) $\Rightarrow$ $[0;1]$ отличается от $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ на счетное мн-во $\overset{(*)}{\Rightarrow} [0;1] \cong \{0;1\}^{\mathbb{N}}$. ▨

(*) **Л.** A — бесконечно, B — счетно $\Rightarrow A\cup B \cong A$.

Д-во.

Пусть A' — счетное подмн-во A (по аксиоме выбора оно есть)

$A\cup B = (A\setminus A')\cup A'\cup B \cong (A\setminus A')\cup \mathbb{N} \cong (A\setminus A')\cup A' \cong A$ ▨

Утв. Мн-во R — континуально

Д-во.

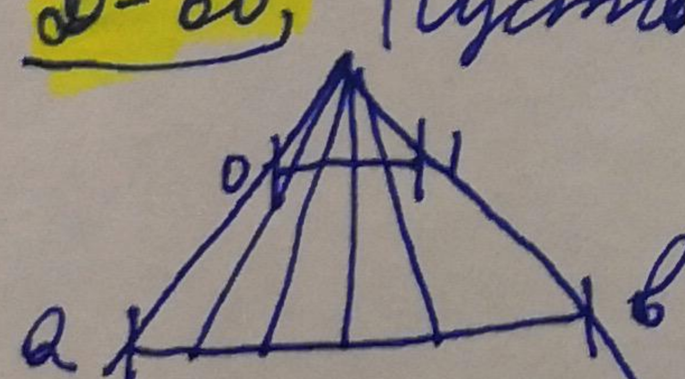
$[0,1]\cong(0,1)$ т.к. $[0,1]=(0,1)\cup\{0\}\cup\{1\}$.

$tg(\pi(x-\frac{\pi}{2}))$ — биекция из $R\to(0,1)$. ▨

Утв. Отрезок на $\mathbb{R}$ — конт. мн-во

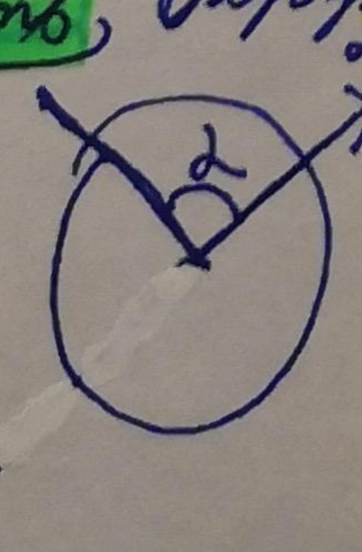
Д-во. Пусть $[a,b]$

Построим биекцию — лучи из вершины ▨



Утв. Окружность — конт. мн-во

Д-во. Проведем пр-й луч. через центр. Тогда $\forall$ точке окр-ти будет соотв-ть угол $[0;2\pi)$



$[0;2\pi)\cong[0;2\pi]\cong[0;1]\cong\mathbb{R}$ ▨

Утв. Если A конечно или счетно, то $\mathbb{R}^A$ конт.

Д-во. $R^A \cong (2^{\mathbb{N}})^A \cong 2^{\mathbb{N}\times A}\cong 2^{\mathbb{N}}\cong\mathbb{R}$ ▨

Сл-е. $\mathbb{R}^2$ (пл-ть) $\cong [0;1]$

(12) (Континуум-гипотеза).

$\forall$ бесконечное подмн-во $\mathbb{R}$ либо счетно либо континуально.