

№ 59

Р. 1

Применение гильбертовой ТЛ минковского для  
 $q$ -ва ТЛ Дирихле

ТЛ (Дирихле)

Пусть  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  ( $\alpha$ -иррациональное)

Тогда  $\exists$  бесконечно  $p$ -х значений

$$\frac{p}{q} : |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$

$Q$ -ва

$Q \in \mathbb{Q}$ .

Пусть  $\Omega = \{(x, y) : |\alpha x - y| \leq \frac{1}{Q}, -Q \leq x \leq Q\}$ .

Тогда  $\Omega$  - выпуклое и центрально симметричное.

$$S(\Omega) = 2Q \cdot \frac{2}{Q} = 4 \Rightarrow \exists (q, p) \in \Omega \cap \mathbb{Z}^2 \setminus \{(\alpha, 0)\}$$

Для этой точки

$$|\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q} \quad |q| \leq Q \Rightarrow |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{Qq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Для нахождения новых точек построим  
 новый параллелограмм более большого значения  $Q$ ,  
 так, чтобы  $(q, p)$  не попал в него, при этом  
 сохранив его площадь. 