

№ 38

P. 1

Принцип Дирихле. Оценки мощности множества попарно ортогональных  $(-1, 0, 1)$ -векторов. Верхняя оценка величинной 140 и нижняя оценка 70.

Задача, Пусть  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  - посл.-те чисел.

Определим скалярное пр-е  $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

Рассмотрим мн-во

$$V = \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = \pm 1\}| = 7 \}$$

Пусть  $W \subset V$  - под-во, в котором все векторы попарно ортогональны.

Вопрос макс  $|W|$ ?

Умб,  $|W| \geq 70$

Д-во

Возьмем посл.-те  $\begin{array}{c} 111 \\ \hline 7 \end{array}$  остальные 0 (1)

$-1 \begin{array}{c} -1 -1 -1 \\ \hline 7 \end{array}$  остальные 0 (2)

Т.е. (1) - посл.-те, где первое число = 1, далее среди 7-ми позиций стоят 3 единицы, а остальные - 0.

$$|(1)| = 35 \binom{4}{7}$$

$$|(2)| = 35 \binom{4}{7}$$

Требуется что  $\forall \bar{a}, \bar{b}$  попарно ортогональны

$$\Rightarrow |W| \geq 70 \quad \text{QED}$$

Умб,  $|W| \leq 140$

Д-во

Remind, Принцип Дирихле

$n$  ящиков,  $n+1$  шарик.  $\Rightarrow \exists$  ящик в к-ром  $\geq 2$  шариков

[github.com/yaishenka](https://github.com/yaishenka)



Составим „ящики“

①

1	1	1	1	0	0	0	0
1	-1	-1	1	0	0	0	0
1	-1	1	-1	0	0	0	0
1	1	-1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	-1	-1	1
0	0	0	0	1	-1	1	-1
0	0	0	0	1	1	-1	-1

②

1	-1	-1	-1	0	0	0	0
1	-1	1	1	0	0	0	0
1	1	-1	1	0	0	0	0
1	1	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	-1	-1	-1
0	0	0	0	1	-1	1	1
0	0	0	0	1	1	-1	1
0	0	0	0	1	1	1	-1

В качестве ящика 3 возьмем первый, умноженный на -1

В качестве ящика 4 возьмем второй, умноженный на -1

И 2 в-ра из одного ящика как матрицы.

Выбрать позиции для 4-х стрел  $= C_8^4 = 70$ .

Каждому такому выбору соответствует

симметричная посл-ть.

Тогда ящиков  $\frac{70}{2} \cdot 4 = 140$ .

Если  $> 140$  посл-тей, то  $\exists$  „ящик“ в котором  
два вектора  $\Rightarrow$  они ортогональны

$\Rightarrow |W| \leq 140$  