№34 p.1 | Возведение соответствия в степень. Возведение мн-ва в степень другого мн-ва. Булеан. Св-ва возведения мн-ва в степень: задачи 3.7 и 3.14.

Def. Пусть $F: A \to A$ — соответствие. Тогда возведение в степень опр-я рекурсивно: $F^0 = id_A$, а далее $F^{n+1} = F \circ F^n$

Note. Возведение соответствий удовлетворяет р-м: $F^n \circ F^k = F^{n+k}$ и $(F^n)^k = F^{nk}$. Однако из-за некоммутативности р-во $(F \circ G)^n = F^n \circ G^n$ в общем сл-е неверно

Возведение мн-ва в степень

Утв. $|A| = n$ $|B| = k$. Тогда $\exists$ k^n р-х отображений из A в B

Д-во.
Для каждого эл-та $\exists$ k вариантов эл-в из B ▨

Def. A, B — мн-ва. Тогда множеством B^A наз-ся мн-во всех отображений из A в B.

Note. Если B состоит всего из двух эл-в, то отображение из A в B задает разбиение A на два мн-ва: прообраз b_1 и прообраз b_2. Ясно, что для определения от-я достаточно задать прообраз b_1, ведь тогда прообраз b_2 определится автоматически. Таким образом, отображения из A в двухэлементное мн-во и подмножества A находятся в естественном взаимно однозначном соответствии между собой.

Def. Булеаном мн-ва A наз-ся множество всех подмножеств множества A. Об-е: $P(A)$ или 2^A

Th. Возведение в степень обладает следующими св-ми:

① $(A \times B)^C = A^C \times B^C$

② если $B \cap C = \varnothing$, то $A^{B \cup C} = A^B \times A^C$

③ $(A^B)^C = A^{(B \times C)}$

Д-во.

① $f \in (A \times B)^C \Rightarrow f: C \to (A \times B)$, $f(c) = (a, b)$.
Найдем $g: C \to A$ и $h: C \to B$ такие, что $f(c) = (g(c), h(c))$

② $f: B \cup C \to A$, $g: B \to A$, $h: C \to A$ $\quad f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in B \\ h(x), & x \in C \end{cases}$

③ $f: B \times C \to A$, $h: C \to A^B$, $g: B \to A$, $h(c) = g$. $f(b, c) = [h(c)](b) = g(b)$

▨