w15 p.1 Функция Мёбиуса. Сумма значений ф-ии Мёбиуса по делителям числа

Def. Функция Мёбиуса

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s} \text{ и } \exists\, i : \alpha_i \geq 2 \\ (-1)^s, & \text{если } n=p_1\cdots p_s \end{cases}$$

Лемма. $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Д-во.

$n=1$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

$n \geq 2$:

$n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$

$d \mid p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s} \iff d = p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}$, где $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\substack{(\beta_1\ldots\beta_s)\\ 0\leq\beta_i\leq\alpha_i}} \mu(p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}) = \sum_{\substack{(\beta_1\ldots\beta_s)\\ \beta_i\in\{0,1\}}} \mu(p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}) =$$

$$= \mu(1) + s\cdot(-1) + C_s^2 - C_s^3 \ldots + (-1)^s C_s^s = C_s^0 - C_s^1 + C_s^2 \ldots + (-1)^s C_s^s = 0 \quad \blacksquare$$

Утв. $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$, где $\varphi(n)$ – ф-я Эйлера

Д-во.

Предыдущую лемму можно переписать как

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$$

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{1}{(n,k)} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{d|(n,k)} \mu(d) \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|n\\ d|k}} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\sum_{q=1}^{n/d} 1 \right) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \quad \blacksquare$$