№ 58 Р. 1	Двумерная теорема Минковского. Ее уточнение для замкнутых мн-в (б/д.)

Def. Мн-во Ω наз-ся выпуклым, если $\forall\ x, y \in \Omega$ отрезок, соединяющий их, целиком лежит в Ω

Def. Зафиксируем на пл-ти с-му координат с центром в $O(0;0)$. Если $\forall\ x \in \Omega\ \ -x \in \Omega$, то Ω - центрально симметрична

Т. (Минковского)

Если Ω - выпуклое центрально симметричное тело с пл-ю $S > 4$, то в Ω есть нетривиальные целые точки.

Д-во.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ - мн-во всех целых точек с целыми координатами, $p \in \mathbb{N}$. Определим мн-во $\frac{1}{p}\mathbb{Z}^2$ как мн-во точек вида $\left(\frac{a}{p}; \frac{b}{p}\right)$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим мн-во $\Omega \cap \frac{1}{p}\mathbb{Z}^2$. Положим $N_p = |\Omega \cap \frac{1}{p}\mathbb{Z}^2|$.

Площадь одной точки равна $\frac{1}{p^2}$

$\frac{N_p}{p^2} \to S$ при $p \to \infty \Rightarrow \exists p: \frac{N_p}{p^2} > 4 \Rightarrow N_p > 4p^2 = (2p)^2$.

Определим на $\frac{1}{p}\mathbb{Z}^2$ от-е экв. $\sim$.

$$\left(\frac{a_1}{p}; \frac{a_2}{p}\right) \sim \left(\frac{b_1}{p}; \frac{b_2}{p}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_1 \equiv b_1\ (2p) \\ a_2 \equiv b_2\ (2p) \end{array}$$

Кол-во классов экв-ти - $(2p)^2$.

Поскольку $N_p > (2p)^2 \Rightarrow \exists$ две р-е точки $A = \left(\frac{a_1}{p}; \frac{a_2}{p}\right)$ $B = \left(\frac{b_1}{p}; \frac{b_2}{p}\right)$ лежащие в одном классе экв-сти $A \sim B$. Из центральной симметрии следует, что $-B \in \Omega$, а из выпуклости, что середина C отр-ка $[A, -B] \in \Omega$.

Рассмотрим точку C.

$$C = \left(\frac{a_1 - b_1}{2p}; \frac{a_2 - b_2}{2p}\right)$$

$C \in \mathbb{Z}^2$, т.к. $a_1 - b_1 \vdots 2p$

$a_2 - b_2 \vdots 2p$ ■

Т2 (Минковского для замкнутых мн-в)

Пусть Ω - выпуклое, центрально симметричное замкнутое (содержит свои границы) тело с $S \geq 4$. Тогда $(\Omega \cap \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}) \neq \varnothing$.