№ 48 p. 1	Функция Эйлера. Формула с произведением по простым числам: д-во при помощи ф-лы вкл. и искл. или ф-лы обр-я Мебиуса.

Def. ф-я Эйлера $\varphi(n)$ — кол-во d : $d < n$ и $(n, d) = 1$.

При этом $\varphi(1) = 1$

Утв. Пусть $n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$.

Тогда $\varphi(n) = n \prod\limits_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Д-во. (вкл. искл.)

$m \in \{1 .. n\}$ взаимно просто с n $\Leftrightarrow$ ни один p_i не делит m.

m обладает св-м α_i $\Leftrightarrow$ p_i делит m.

Тогда $\varphi(n) = N(\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_k)$

Кол-во $N(\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s})$ равно $n / p_{i_1} \ldots p_{i_s}$.

Тогда $\varphi(n) = n - \sum\limits_i n/p_i + \sum\limits_{i,j} n/p_i p_j - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \ldots p_k} =$

$= n \prod\limits_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ ☺

Д-во. (ф-ла обр. М)

1) $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$

Д-во.

$\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = \sum\limits_{(r_1 r_2 .. r_k)} \varphi(p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}) = \sum\limits_{(r_1 .. r_k)} \varphi(p_1^{r_1}) \varphi(p_2^{r_2}) \ldots \varphi(p_k^{r_k}) =$

$= \prod\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{r_i=0}^{\alpha_i} \varphi(p_i^{r_i}) = \prod\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{d | p_i^{\alpha_i}} \varphi(d)$

$\sum\limits_{d|p^\alpha} \varphi(d) = \varphi(p^0) + \varphi(p^1) + \ldots + \varphi(p^\alpha) = 1 + (p-1) + (p^2 - p) + \ldots + (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^\alpha$

Тогда $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} = n$ ▨

Тогда $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n \Rightarrow \varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) =$

$= \sum\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \in \{0,1\}} \frac{n}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}} \mu(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = -\sum \frac{n}{p_i} + \sum \frac{n}{p_i p_j} \ldots + n =$

$= n \prod\limits_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ ▨