№ 50 р. 1	Проблема Эрдеша–Гинзбурга–Зива (общая ф-ка). Контрпримеры при $d=1, 2$. Тождества с бин. коэф. ($C_{2p-1}^{p} \equiv 1(p)$, $C_{2p-1-q}^{p-q} \equiv 0(p)$, если $q \in \{1, 2 \dots p-1\}$).

Def. (формулировка)

Пусть даны наборы из d целых чисел и фиксированное число n. При какой наименьшем числе наборов $m=m(n)$ среди них гарантированно найдется n наборов, таких что сумма чисел в каждой из d позиций этих наборов делится на n.

Th (ЭГЗ, $d=1$)

$\forall a_1 \dots a_{2n-1}$ $\exists$ $J \subset \{1 \dots 2n-1\} : |J| = n$

и $\sum\limits_{j \in J} a_j \equiv 0(n)$

Note. $2n-2$ не подойдет. Контрпример:

$a_1 \equiv \dots \equiv a_{n-1} \equiv 0(n)$ и $a_n \equiv \dots \equiv a_{2n-2} \equiv 1(n)$

Note. для $d=2$ $m(n) \geq 4n-3$.

Контрпример для $4n-4$

$(0,0)$ – $n-1$ раз

$(0,1)$ – $n-1$ раз

$(1,0)$ – $n-1$ раз

$(1,1)$ – $n-1$ раз.

Утв. $C_{2p-1}^{p} \equiv 1(p)$

Д-во.

$$C_{2p-1}^{p} = \frac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} = \frac{(2p)!}{p!\,p!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} C_{2p}^{p}$$

Рассмотрим $(1+1)^{2p}$

$(1+1)^{2p} = C_{2p}^0 + C_{2p}^1 + \dots + C_{2p}^p + \dots + C_{2p}^{2p} \equiv 1+1+C_{2p}^p \equiv 4^p \equiv 4$

$\Rightarrow C_{2p}^p \equiv 2(p) \Rightarrow C_{2p-1}^p \equiv 1(p)$ ▨

Утв. $\forall q \in \{1 \dots p-1\}\ C_{2p-1-q}^{p-q} \equiv 0(p)$

Д-во.

$2p-1-q \geq p;\ p-q \leq p-1$

Тогда $C_{2p-1-q}^{p-q} = \dfrac{(2p-1-q)!}{(p-q)!\,(p-1)!} \equiv 0(p)$, т.к.

числитель делится на p, а знаменатель взаимно прост с p. ▨