№5 р.1 Кол-во эл-в в конечном мн-ве. Корректность опр-я. Равномощность мн-в. Счётные мн-ва. Счётное объединение счётных мн-в счётно

Def. $\varnothing$ – 0-элементное мн-во

Если $a \in A$ и $A \setminus \{a\}$ – n-элементное, то A – $(n+1)$-эл-е.

Def. A – конечное, если A – n-элементное для некоторого $n \in \mathbb{N}$

Д-м корректность

Утв. Если $a_1, a_2 \in A$ и $A \setminus \{a_1\}$ – n-эл-е, то $A \setminus \{a_2\}$ тоже n-эл-е.

Д-во. (по инд-ии)

База: $n=0$. Тогда $A \setminus \{a_1\} = \varnothing \Rightarrow A = \{a_1\} \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \setminus \{a_1\} = A \setminus \{a_2\} \Rightarrow A \setminus \{a_2\} = \varnothing \Rightarrow A \setminus \{a_2\}$ – 0-эл-е.

Переход. Пусть для n д-но. Докажем для $n+1$.

При $a_1 = a_2$ очевидно.

Пусть $a_1 \neq a_2$.

Тогда $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.

Т.к. $A \setminus \{a_1\}$ – $(n+1)$-эл-е, то $A \setminus \{a_1, a_2\}$ – n-эл-е.

Тогда $(A \setminus \{a_1\}) \setminus \{a_2\}$ – n-эл-е.

Т.к. $a_1 \in A \setminus \{a_2\}$ и $(A \setminus \{a_2\}) \setminus \{a_1\} = (A \setminus \{a_1\}) \setminus \{a_2\}$

получаем $A \setminus \{a_2\}$ – $(n+1)$-эл-е ∎

Сл-е. конечное мн-во A является n-эл-м только для одного n.

Note. Это n наз-ся количеством эл-в и об-ся $|A|$.

Утв. Пусть A и B – конечные мн-ва.

Тогда $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists$ биекция $A \to B$

Д-во.

$\Rightarrow$ Пусть $|A| = |B| = n$. Д-во по инд-ии.

База: $n=0$. Тогда $F: \varnothing \to \varnothing$ – биекция.

Переход: Пусть $|A| = |B| = n$.

Тогда выберем пр-й a, b. Тогда $|A \setminus \{a\}| = |B \setminus \{b\}| = n-1$

По предп. инд-ии. $\exists F: A \setminus \{a\} \to B \setminus \{b\}$ – биекция.

Дополним $F(a) = b \Rightarrow F: A \to B$ – биекция.

$\Leftarrow$ Пусть $\exists\ F: A \to B$ и $|A| = n$

База: $n=0 \Rightarrow A = \varnothing$. Т.к. F – биекция $B = \varnothing \Rightarrow |B| = 0$.

Переход: Пусть $|A| = n > 0$. Тогда $\exists\, a \in A$. Т.к. F – биекция $\exists!\, b: F(a) = b$.

Тогда $|A \setminus \{a\}| = n-1$, а $F|_{A \setminus \{a\}}: A \setminus \{a\} \to B \setminus \{b\}$ – биекция.

По предп. инд-ии $|B \setminus \{b\}| = n-1 \Rightarrow |B| = n$ ∎

Def A равномощно B ($A \cong B$), если $\exists$ биекция из A в B

Def A счетно, если $A \cong \mathbb{N}$

Th Объединение счетного числа счетных мн-в счетно

т.е. $\forall n$ A_n - счетно $\Rightarrow \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ - счетно.

Д-во Пусть все эл-ты всех мн-в р-ны

$\alpha_n : \mathbb{N} \to A_n$ - биекция. Построим $\beta : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

$\beta(2^n(2k+1)) = \alpha_n(k)$. Биективность следует из того, что $\forall$ положительное натуральное число представимо в виде $2^n(2k+1)$ ед. обр-м.

Биекция в $\mathbb{N}$ получается, т.к. $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \underset{(\text{по д-ву})}{\cong} \mathbb{N} \setminus \{0\} \underset{(+1)}{\cong} \mathbb{N}$ $\blacksquare$