№ 44

Р. 1

Формальные степенные ряды, операции над ними. Определение обратного ряда. Пример деления в столбик. Комбинаторное тождество, получаемое с использованием ф-го степенного ряда $\frac{1}{(1-x^2)^2}$

Def. Пусть даны числа $a_0 a_1 \dots$. Формальным степенным рядом наз-ся формальное алгебраическое выражение вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Def. Два ф.с.р. наз-ся равными, если $\forall n: a_n = b_n$

На мн-ве ф.с.р. определены следующие операции:

Пусть A - ф.с.р. с коэф $\{a_n\}$ B - ф.с.р с коэф $\{b_n\}$

На мн-ве ф.с.р. определены след. оп-ии:

1. **Сложение**

$A + B = C : c_n = a_n + b_n$

2. **Вычитание**

$A - B = C : c_n = a_n - b_n$

3. **Умножение на $\alpha \in \mathbb{C}$**

$\alpha A = C : c_n = \alpha a_n$

4. **Пр-е**

$A \cdot B = C : c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

5. **Деление**

$A / B = C : A = BC$, т.е.

$a_0 = c_0 b_0$

$a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0$

$\dots$

Пример $A = 1$ $B = 1 - x$

$C = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Пример. $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{(1+x)^2}$

Левая часть: $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2 = (1+x^2+x^4+\ldots)^2 = 1+2x^2+3x^4+\ldots+(n+1)x^{2n}+\ldots$

С другой стороны

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1+x+x^2+x^3+\ldots)^2 = 1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = (1-x+x^2-x^3+\ldots)^2 = 1-2x+3x^2-\ldots+(-1)^n(n+1)x^n+\ldots$$

Тогда коэф при x^n

$$1(-1)^n(n+1)+2(-1)^{n-1}n+\ldots+(n+1)\cdot 1(-1)^0 = \begin{cases} 0, & n=2k+1 \\ n+1, & n=2k \end{cases}$$

Def. Ряд G - обратимый, если $\exists\ F : F\cdot G = 1$.

F - ряд обр-й к G и об-я $F = G^{-1}$

Утв. Ряд $G = a_0 + a_1 x + \ldots$ обратим $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

Д-во.

$\Rightarrow$ $G\cdot G^{-1} = 1 = 1 + 0x + \ldots$

Но $[G\cdot G^{-1}]_0 = a_0 \cdot b_0 \Rightarrow a_0 \neq 0$

$\Leftarrow$

$b_0 = \frac{1}{a_0}$

$b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$ $\Rightarrow$ все коэф опр-ся однозначно. ∎