№31 р.1 | Т. Дирихле о диофантовых приближениях (формулировка и доказательство любым способом)

Т. (Дирихле)

Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (α – иррациональное)

Тогда $\exists$ беск. много р-х дробей

$$\frac{p}{q} : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Д-во:

Рассмотрим $\forall Q \in \mathbb{N}$. Разобьем отрезок $[0;1]$ на Q одинаковых частей

Рассмотрим числа $\{\alpha x\}$, $x = \overline{0..Q}$

$\uparrow$ др-я часть

Их $Q+1 \Rightarrow \exists \{\alpha x_1\}$ и $\{\alpha x_2\} \in$ одному из отр-ков (по пр. Дирихле)

$$\Rightarrow |\{\alpha x_1\} - \{\alpha x_2\}| \leq \frac{1}{Q}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha x_1 - [\alpha x_1] - \alpha x_2 + [\alpha x_2]| \leq \frac{1}{Q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha \underbrace{(x_1 - x_2)}_{q} - \underbrace{([\alpha x_1] - [\alpha x_2])}_{p}| \leq \frac{1}{Q}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha \cdot q - p| \leq \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

$q \leq Q$

$$\Leftrightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Возьмем новое Q_1: $\frac{1}{Q_1} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$

С этим Q найдем свои p_1 и q_1

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| \leq \frac{1}{q_1 Q_1} \leq \frac{1}{q_1^2}$$

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| \leq \frac{1}{Q} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \Leftrightarrow \frac{p_1}{q_1} \text{ и } \frac{p}{q} \text{ не совпадают}$$