№12 p.1 | Комбинаторные тождества (6 штук)

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$

2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Д-во.

Разобьем мн-во k сочетаний множества $\{a_1, \dots a_n\}$ на два: содержащие a_1 и не содержащие a_1.
Первых будет C_{n-1}^{k-1}, вторых C_{n-1}^{k}. ∎

3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

Д-во.

$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ ∎

4. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Д-во.

$\{a_1 \dots a_n, a_{n+1} \dots a_{2n}\}$

Кол-во n сочетаний — C_{2n}^n

Рассмотрим $\forall i = \overline{0..n}$ мн-во тех n-сочетаний, которые содержат ровно i объектов из первых n объектов $\{a_1 \dots a_n\}$.

В таком мн-ве сочетаний $C_n^i \cdot C_n^{n-i} = (C_n^i)^2$

$C_{2n}^n = C_n^0 \cdot C_n^n + \dots + C_n^n \cdot C_n^0 = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$ ∎

5. $C_{n+m}^n = C_{n+m-1}^{n-1} + C_{n+m-2}^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}$

Д-во.

Рассмотрим мн-во, сост из n+1 объектов

$\{a_1 \dots a_{n+1}\}$

Возьмем все m-сог. с повторениями

$C_{n+1+m-1}^m = C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$

Посчитаем по-другому

Для каждого $i \in \{0..m\}$ возьмем те m-сочет. с повторениями, в которых ровно i раз встречается a_1

$C_{n+m}^n = C_{n+m-1}^m + C_{n+(m-1)-1}^{m-1} + \dots + C_{n-1}^0$

т.к. $C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_{n+m}^n = C_{n+m-1}^{n-1} + C_{n+m-2}^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}$ ∎

Сл-я из 8-го т-ва

① $n=1$

$$C^1_{m+1} = C^0_m + C^0_{m-1} + \ldots + C^0_0 = m+1$$

② $n=2$

$$\underset{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}{\underset{\parallel}{C^2_{m+2}}} = \underbrace{C^1_{m+1} + C^1_m + \ldots + C^1_1}_{1+2+\ldots+(m+1)}$$

③ $n=3$

$$\underset{\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}}{\underset{\parallel}{C^3_{m+3}}} = C^2_{m+2} + C^2_{m+1} + \ldots + C^2_2 = \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} \ldots + \frac{1\cdot 2}{2}$$

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} = \frac{(m+1)^2}{2} + \frac{m^2}{2} + \ldots + \frac{1^2}{2} + \frac{(m+1)}{2} + \frac{m}{2} + \ldots + \frac{1}{2}$$

$$1^2 + \ldots + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$1^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

---

⑥ $$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} P(n_1 \ldots n_k) = k^n$$

Д-во:

$$(\underbrace{1+\ldots+1}_{k})^n = k^n = \sum P(n_1 \ldots n_k) \blacksquare$$