

# Теория групп. Лекция 2

Штепин Вадим Владимирович

12 сентября 2019 г.

## 1 Нормальные подгруппы и их свойства

Опр. В случае конечной группы число левых смежных классов равно числу правых смежных классов и называется **индексом группы** —  $|G/H|$

**Утв.** Пусть  $G$  — группа (конечная или бесконечная). Тогда  $G/H \simeq H \backslash G$

**Доказательство** Пусть  $aH \in G/H$ . Тогда  $(aH)^{-1} = Ha^{-1}$  ( $H^{-1} = H$ ) так как  $H$  — подгруппа. Операция взятия обратного элемента в группе инволютивна (обратна сама себе и в квадрате равна тождественному отображению), то полученное соответствие между левыми и правыми смежными классами — биекция.

**Замечание** Из этого утверждения не следует, что если  $aH = bH$ , то  $Ha = Hb$ . Контр-пример:  $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ,  $H = \langle (12) \rangle$ . Тогда  $(13)H = (123)H$ , так как  $(13)H = \{(13), (123)\}$   $(123)H = (13)H$ , так как  $(123) \in (13)H$  (первое свойство левых смежных классов). Однако  $H(13) \neq H(123)$ , так как  $H(13) = \{(13), (132)\}$ ,  $H(123) = \{(123), (23)\}$ .

**Упражнение:** Доказать, что для конечной группы  $G$   $K \leq H \leq G$ , то  $|G : K| = |G : H| |H : K|$

Опр. Пусть  $H \leq G$ .  $H$  — **нормальная группа (нормальный делитель, инвариантная подгруппа)**, если левостороннее разложение  $G$  по  $H$  совпадает с правосторонним:  $\cup_{i \in I} x_i H = \cup_{j \in J} H y_j$ , то есть разбиения состоят из одних и тех же подмножеств.

Условимся для нормальной подгруппы, говоря о смежных классах, опускать слова "левый" и "правый".

Обозначение  $H \triangleleft G$

**Теорема (критерий нормальности)** Пусть  $H \leq G$ . Тогда  $H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall x \in G \ xH = Hx \Leftrightarrow x^{-1}Hx = H \Leftrightarrow xHx^{-1} = H$

**Доказательство**

1. Необходимость.  $\forall x \in G \ \exists i \in I \ x \in x_i H$ ;  $\exists j \in J \ x \in H y_j$ . В силу нормальности  $H$ , класс  $H y_j$  является так же некоторым левым классом смежности. Так как  $H y_j \cap x_i H \neq \emptyset$ , то по свойствам смежных классов они совпадают. Так как смежный класс порождается любым своим элементом:  $xH = x_i H$ ,  $Hx = H y_j$ . Значит,  $xH = Hx$ .
2. Достаточность.  $\forall x \in G \ xH = Hx$ , значит левостороннее и правостороннее разложения совпадают, и группа является нормальной.

**Следствие.** Во всякой абелевой группе всякая подгруппа является нормальной.

**Следствие.** Если  $|G : H| = 2$ , то  $H \triangleleft G$

**Доказательство** Левостороннее разложение состоит из двух классов:  $eH = H$  и  $G \setminus H$  (разность множеств). Правостороннее разложение (аналогично):  $He = H$  и  $G \setminus H$ . Очевидно, эти разложения совпадают.

Примеры (нормальных подгрупп):

1.  $A_n \triangleleft S_n$ , так как  $|S_n : A_n| = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$ , так как есть поровну четных и нечетных подстановок.

2.  $SL_n(F) \triangleleft GL_n(F)$

**Доказательство** Пусть  $A \in SL_n(F)$ ,  $X \in GL_n(F)$ .  $x^{-1}AX \in SL_n(F)$ , так как  $\det(X^{-1}AX) = \det(X^{-1})\det(A)\det(X) = \det(A) = 1$ . По критерию нормальности,  $SL_n(F)$  — нормальная.

3. Пусть  $\tau$  — транспозиция из  $S_3$ . Тогда  $\langle \tau \rangle \not\triangleleft S_3$

**Доказательство** Транспозиции не коммутируют:  $(ab)(bc) = (abc) \neq (acb) = (bc)(ab)$ . Пусть  $\sigma \in S_3$  — произвольная транспозиция, тогда  $\sigma * \langle \tau \rangle \neq \langle \tau \rangle * \sigma$ . По критерию нормальности  $\langle \tau \rangle \not\triangleleft S_3$ , так как  $\langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$ .

**Утв.** Если  $H_1 \triangleleft G$ ,  $H_2 \triangleleft G$ , то  $H_1 \cap H_2 \triangleleft G$

**Доказательство** Очевидно, что  $H_1 \cap H_2 \leq G$  (по критерию подгруппы). Пусть  $h \in H_1 \cap H_2$  — произвольный. Проверим, что  $x^{-1}hx \in H_1 \cap H_2$ . Если  $H_1, H_2$  — нормальные, то  $x^{-1}hx \in H_1$  и  $x^{-1}hx \in H_2$ . Значит,  $x^{-1}hx \in H_1 \cap H_2$ .

**Теорема (о произведении нормальной подгруппы на подгруппу)** Пусть  $G$  — группа,  $H \triangleleft G, K \leq G$ , тогда  $HK \leq G$ . А если  $K \triangleleft G$ , то  $HK \triangleleft G$ .

**Доказательство**

1. Замкнутость относительно умножения.  $HKHK = (HH)(KK) = HK$  — замкнуто, так  $KH = \cup_{k \in K} kH = \cup_{k \in K} Hk = HK$ , так как  $H$  — нормальная подгруппа.
2. Замкнутость относительно взятия обратного:  $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$ , так как  $K, H \leq G$
3. Пусть  $K \triangleleft G$ .  $\forall x \in G$   $x^{-1}HKx = x^{-1}Hxx^{-1}Kx = HK$ , так как  $H, K \triangleleft G$ . Значит,  $HK \triangleleft G$

**Замечание:** Доказанная теорема верна и в случае умножения подгруппу на нормальную подгруппу.

## 2 Сопряжение в группе и его свойства

Опр. Пусть  $a, x \in G$ , тогда  $a^x = x^{-1}ax$  — **сопряженный** к  $a$ .

**Утв. (свойства операции сопряжения)**

1.  $a^{(xy)} = (a^x)^y$
2.  $a^x b^x = (ab)^x$
3. Операции сопряжения и взятия обратного элемента коммутируют  $(a^x)^{-1} = (a^{-1})^x$

### Доказательство

1.  $a^{(xy)} = (xy)^{-1}a(xy) = y^{-1}x^{-1}axy = y^{-1}a^xy = (a^x)^y$
2.  $a^xb^x = x^{-1}axx^{-1}bx = x^{-1}abx = (ab)^x$
3.  $(a^{-1})^xa^x = (a^{-1}a)^x = e^x = e$ . В силу единственности обратного элемента,  $(a^{-1})^x = (a^x)^{-1}$

**Замечание** Отношение сопряженности в группе — это отношение эквивалентности  $a \sim b \Leftrightarrow \exists x \in G \ a = b^x$

### Доказательство

1. Рефлексивность:  $a^e = a$
2. Симметричность:  $a \sim b \Rightarrow \exists x \in G \ a = b^x$ . Тогда  $b = a^{x^{-1}}$  и  $b \sim a$
3. Пусть  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow \exists x, y \in G \ a = b^x, b = c^y \Rightarrow a = c^{xy} \Rightarrow a \sim c$

По теореме о классах эквивалентности, группа  $G$  разбивается в дизъюнктное объединение классов эквивалентности по отношению сопряженности.

Опр. Полученные классы называются **классами сопряженных элементов**.

Опр.  $a^G = \{a^x \mid x \in G\}$  — класс сопряженных элементов, порожденный  $a$

### Пример (описание классов сопряженных элементов в $S_n$ )

1. Пусть  $\sigma \in S_n$  и  $\sigma = (a_1 \dots a_k)(b_1 \dots b_l) \dots$  — произведение непересекающихся (независимых циклов) Пусть  $\rho \in S_n$ .  $\rho^{-1}\sigma\rho = \rho^{-1}(a_1 \dots a_k)\rho\rho^{-1}(b_1 \dots b_l)\rho \dots \rho$  Посмотрим, как действует сопряжение на цикл длины  $k$ .

Покажем, что  $\rho^{-1}(a_1 \dots a_k)\rho = (\rho^{-1}(a_1) \dots \rho^{-1}(a_k))$

### Доказательство

Пусть  $a_i \in \{1, \dots, n\}$ .

$\rho^{-1}(a_1 \dots a_k)\rho(\rho^{-1}(a_i)) = \rho^{-1}(a_1 \dots a_k)(a_i) = \rho^{-1}(a_{i+1}) = (\rho^{-1}(a_1) \dots \rho^{-1}(a_i))(\rho^{-1}(a_{i+1}))$ , если  $a_i$  присутствует в цикле. Иначе, если  $a_i$  не лежит в цикле, то  $\rho^{-1}(a_1 \dots a_k)\rho(\rho^{-1}(a_i)) = \rho^{-1}(a_i) = (\rho^{-1}(a_1) \dots \rho^{-1}(a_k))(\rho^{-1}(a_i))$

То есть, сопряжение не изменяет тип цикла (количество элементов, которые цикл не переводит в самих себя). Если  $a$  имеет некоторый циклический тип (это определяется типами циклов в разложении  $a$ ), то  $a^{S_n}$  состоит из всех подстановок такого циклического типа.

**Замечание.** Пусть  $P(n)X$  — число классов сопряженных элементов. Тогда оно равно числу разбиений  $n$  в сумму натуральных слагаемых (без учета порядка). Это верно, так как слагаемые в разбиении задают циклический тип (длины циклов в разбиении).

## 3 Гомоморфизм групп

Пусть  $(G_1, *)$ ,  $(G_2, \circ)$  — группы.

Опр.  $\phi: G_1 \rightarrow G_2$  — **гомоморфизм**, если  $\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$

Утв.

1. При гомоморфизме  $\phi(e_1) = e_2$ , где  $e_1, e_2$  — нейтральные элементы групп
2.  $\phi$  коммутирует со взятием обратного элемента

**Доказательство**

1.  $\phi(e_1 * e_1) = \phi(e_1) \circ \phi(e_1) = \phi(e_1)$ . Умножим последнее равенство на  $\phi(e_1)^{-1}$ . Получаем  $\phi(e_1) = e_2$
2.  $\phi(a^{-1}) = \phi(a_1)^{-1}$ , так как  $\phi(a^{-1}) * \phi(a) = \phi(a^{-1}a) = \phi(e_1) = e_2$ . В силу единственности обратного элемента  $\phi(a^{-1}) = \phi(a_1)^{-1}$

Опр.

1.  $\text{Ker}(\phi) = \{a \in G_1 \mid \phi(a) = e_2\}$
2.  $\text{Im}(\phi) = \{\phi(a) \mid a \in G_1\}$

**Утв.** Пусть  $G_1, G_2$  — мультипликативные группы (операция — произведение) и  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомоморфизм. Тогда:

1.  $\text{Im}(\phi) \leq G_2$
2.  $\text{Ker}(\phi) \triangleleft G_1$

**Доказательство**

1. Пусть  $x, y \in \text{Im}(\phi) \Rightarrow \exists a, b \in G_1 \phi(a) = x, \phi(b) = y \Rightarrow xy = \phi(ab) \Rightarrow xy \in \text{Im}(\phi)$ . Если  $x \in \text{Im}(\phi) \Rightarrow \exists a \phi(a) = x \Rightarrow \phi(a^{-1}) = x^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in \text{Im}(\phi)$
2. Пусть  $a, b \in \text{Ker}(\phi) \Rightarrow \phi(a) = \phi(b) = e_2 \Rightarrow \phi(ab) = e_2 \Rightarrow ab \in \text{Ker}(\phi)$ . Если  $a \in \text{Ker}(\phi) \Rightarrow \phi(a) = e_2 \Rightarrow \phi(a^{-1}) = e_2^{-1} = e_2 \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker}(\phi)$   
Проверим, что  $\text{Ker}(\phi) \triangleleft G_1$ . Пусть  $x \in G_1, a \in \text{Ker}(\phi)$ . Тогда  $\phi(x^{-1}ax) = \phi(x^{-1})e_2\phi(x) = e_2 \Rightarrow x^{-1}ax \in \text{Ker}(\phi) \Rightarrow \text{Ker}(\phi) \triangleleft G_1$

**Замечание** Критерий нормальности можно сформулировать так:  $H \triangleleft G \Leftrightarrow$  вместе с каждым элементом она содержит все его сопряженные:  $\forall x \in G a \in H \Rightarrow a^x \in H$

**Следствие** Если  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомоморфизм и  $H \leq G_1$ , то  $\phi(H) \leq G_2$

**Доказательство**  $\phi|_H : H \rightarrow G_2$  — гомоморфизм  $\Rightarrow \phi(H) = \text{Im}(\phi|_H) \leq G_2$

**Упражнение** Верно ли, что  $H \triangleleft G_1$ , то  $\phi(H) \triangleleft G_2$ ?