MATH253 | **Exercices proposés - Semaine 9** | Yassine Ait Mohamed

Session d'hiver 2025

Université de Sherbrooke

Théorème de Cayley-Hamilton et polynôme minimal.

Définition *Soit A une matrice d'ordre n. Un polynôme $p_A(t)$ est le* polynôme minimal *de A s'il satisfait les conditions suivantes :*

(i) $p_A(A) = 0_n$ *et le degré* $p_A(t)$ *est le plus petit degré des polynômes non-nulles* $f(t)$ *tels que* $f(A) = 0_n$.

(ii) *Le coefficient principal de* $p_A(t)$ *est* 1.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (a) Trouvez le polynôme caractéristique $g_A(t)$ de la matrice A.

   (b) En utilisant le polynôme caractéristique trouvez A^{-1}.

   (c) Considérez le polynôme $h(t) = (t-1)(t-2)$. Vérifiez que $h(A) = 0_3$ et calculez A^{-1}.

   (d) Soit $f(t)$ un polynôme tel que $f(A) = 0_3$. Démontrez que $h(t) = (t-1)(t-2)$ divise $f(t)$. En particulier, $h(t)$ divise $g_A(t)$.

   (e) Soit $J = \{f(t) \in K[t] | f(A) = 0_3\}$. Démontrez :

      i. $J \neq \emptyset$

      ii. Si $f_1(t), f_2(t) \in J$ et $g_1(t), g_2(t) \in K[t]$ alors $g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) \in J$.

      iii. Montrez que J est engendré par $h(t) = (t-1)(t-2)$, c'est-à-dire $J = \{(t-1)(t-2)q(t) | q(t) \in K[t]\}$.

   (f) Démontrez que $h(t) = (t-1)(t-2)$ est le polynôme minimal de A, c'est-à-dire $p_A(t) = h(t)$.

2. Démontrez que chaque racine du polynôme caractéristique $g_A(t)$ d'une matrice non-nulle A est une racine du polynôme minimal $p_A(t)$ de A.

3. Trouvez le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Trouvez le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice triangulaire supérieure d'ordre 3 où $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Si $a_{11} = 1, a_{22} = 2$ et $a_{33} = 3$ trouvez α, β et γ tel que $A^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$.

6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

(b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

(c) Soit λ un réel non nul. La matrice $B = A + \lambda I_3$ est-elle inversible?

(d) Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que

$$B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

7. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes (on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer le polynôme minimal des matrices suivantes (on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels stables par u tels que $E = F_1 \oplus F_2$. On désigne par u_1 et u_2 les restrictions de u aux sous-espaces F_1 et F_2 respectivement.

   (a) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Expliquer comment définir un ppcm de P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, et donner ses propriétés.

   (b) Montrer que $\Pi_u = \mathrm{ppcm}(\Pi_{u_1}, \Pi_{u_2})$.

10. (a) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme minimal $X+1$.

    (b) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme minimal $(X+1)(X-2)$.

    (c) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme minimal $(X+1)(X-2)^2$.

11. Soit $n \geq 2$ et soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $u : E \longrightarrow E$ définie par

$$u(M) = \mathrm{tr}(M) I_n - M.$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

   (b) Trouver deux valeurs propres distinctes de u.

   (c) Montrer que le sous-espace V de E constitué des matrices de trace nulle est stable par u.

   (d) Que peut-on en déduire ?

12. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de A dans la base $\mathcal{B}$ soit donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifier que A admet au moins une valeur propre.

(b) Justifier que $\ker(A) \neq 0$ et $\ker(A^2 + \mathrm{Id}) \neq 0$. [Indication : pour le premier, on pourra montrer que A n'est pas inversible].

(c) Puisque $\ker(A^2 + \mathrm{Id}) \neq 0$, soit $v \in \ker(A^2 + \mathrm{Id})$, $v \neq 0$. Montrer que $A(v) \in \ker(A^2 + \mathrm{Id})$, que $A(v) \neq 0$, et que $\{v, A(v)\}$ sont linéairement indépendants.

(d) Conclure.