GROUPES

Définition. Résultat de cours. Résultat pratique. Astuce. Démarche. Exemple classique. Attention. Information

GROUPES

Groupe

On appelle groupe tout ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ vérifiant :

- la loi $\star$ est associative: $\forall x, y, z \in G: \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$
- G possède un élément neutre: $\exists e \in G$ tel que: $\forall x \in G, \quad x \star e = e \star x = e$
- Tout élément x de G admet un symétrique, c'est-à-dire $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ tel que $x \star x' = x' \star x = e$

Si de plus $\forall x, y \in G$: $x \star y = y \star x$, on dit que la loi $\star$ est commutative, et que le groupe est abélien.

Groupe produit

Soit $(G_1, \star_1), ..., (G_n, \star_n)$ des groupes. En définissant dans $G_1 \times \cdots \times G_n$ la loi $\star$ par: $\forall (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$:

$$(x_1, \cdots, x_n) \star (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 \star_1 y_1, \cdots, x_n \star_n y_n)$$

Alors $(G_1 \times \cdots \times G_n, \star)$ est un groupe d'élément neutre $(e_{G_1}, \cdots, e_{G_n})$ et pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$, on a

$$(x_1, \cdots, x_n)^{-1} = (x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})$$

Un tel groupe est appelé le groupe produit

Sous-groupe

Soit $(G, .)$ un groupe. Une partie $H \subset G$ est un sous-groupe de G

$$\iff \begin{cases} H \neq \emptyset; \\ \forall x, y \in H: \ x.y \in H; & (x + y \in H) \\ \forall x \in H: \ x^{-1} \in H & (-x \in H) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} H \neq \emptyset; \\ \forall x, y \in H: \ x.y^{-1} \in H. & (x - y \in H) \end{cases}$$

Théorème

Un sous-groupe d'un groupe est un groupe.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Soit H un sous groupe de $\mathbb{Z}$, alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$

Sous-groupe engendré

- L'intersection d'une famille non vide de sous-groupes est un sous-groupe
- Soit $S \subset G$. L'ensemble $\text{gr}(S)$ intersection de tous les sous-groupes de G contenant S est le plus petit sous-groupe de $(G, .)$, au sens de l'inclusion, contenant S, dit le sous-groupe engendré par S

Exemple

Pour $a \in G$, $\text{gr}(a) = \{a^k \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.
En notation additive $\text{gr}(a) = \{ka \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

MORPHISMES DE GROUPES

Soit $(G, .)$, $(G', \star)$ deux groupes de neutres respectifs e et e'.

Morphismes de groupes

Une application $f : G \longrightarrow G'$ est dite morphisme de groupes si:

$$\forall x, y \in G, \quad f(x.y) = f(x) \star f(y)$$

Si de plus f est bijectif, on dit que f est un isomorphisme de groupes

Opérations de morphismes

- La composée de deux morphismes est un morphisme;
- L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme

Propriétés de morphismes

Soit $f : (G, .) \to (G', \star)$ un morphisme de groupes.
Alors $\forall x, y \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $f(e) = e'$
2. $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
3. $f(xy^{-1}) = f(x) \star f(y)^{-1}$
4. $f(x^n) = f(x)^n$

Images de sous-groupes

Soit $f : (G, .) \to (G', \star)$ un morphisme de groupes. Alors

- Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
- Si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

En particulier

- $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{e'\})$, le noyau de f, est un sous-groupe de G.
- $\text{Im}(f) = f(G)$, l'image de f, est un sous-groupe de G'.

Injectivité et surjectivité

Un morphisme de groupe $f : (G, .) \to (G', \star)$ est

1. injectif si, et seulement, si $\text{Ker} f = \{e_G\}$
2. surjective si, et seulement, si $\text{Im} f = G'$

ORDRES

Caractérisation de l'ordre

Un élément $a \in G$ est d'ordre fini s'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a^k = e$. Au quel cas $\circ(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ a^k = e\}$ est appelé l'ordre de a et aussi l'unique entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on ait : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad a^k = e \iff n \mid k$

Ordre des itérés

Si $a \in G$ est d'ordre fini n et $r \in \mathbb{Z}$, alors $\circ(a^r) = \dfrac{n}{n \wedge r}$

Ordre et cardinal

Si a est d'ordre n, alors

- Le groupe $\text{gr}(a)$ est de cardinal n et $\text{gr}(a) := \{e, a, \cdots, a^{n-1}\}$
- $\text{gr}(a)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +\right)$

GROUPES MONOGÈNE, CYCLIQUE

Groupe monogène, groupe cyclique

1. S'il existe $a \in G$ tel que $G = \text{gr}(a)$, le groupe est dit *monogène*.
2. Un groupe cyclique est un groupe monogène fini.

Propriété

Tout groupe monogène est abélien

Classification de groupes monogènes

Soit $G = \text{gr}(a)$ un groupe monogène, alors

- Si G est infini, il est isomorphe à $\mathbb{Z}$
- Si G est d'ordre n, il est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +\right)$

Générateurs d'un groupe monogène

Soit $G = \text{gr}(a)$ un groupe monogène

1. Si G est infini, alors a et a^{-1} sont les seuls générateurs de $\text{gr}(a)$
2. Si G est cyclique d'ordre n, alors les générateurs de G sont exactement a^r avec $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $r \wedge n = 1$

Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{U}_n$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

- $\overline{k}$ engendre $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +\right) \iff n \wedge k = 1$
- ω^k engendre $(\mathbb{U}_n, \times) \iff n \wedge k = 1$

THÉORÈME DE LAGRANGE

Théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini. Alors:

1. Tout élément de G est d'ordre fini;
2. l'ordre de tout élément de G divise le cardinal G.
En particulier: $\forall a \in G, \quad a^{\text{Card}G} = e_G$

Exemple: Groupe d'ordre premier

Soit G un groupe fini d'ordre premier p. Alors G est cyclique.

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com
Email: elamdaoui@gmail.com
Phone: 06 62 30 38 81

ANNEAUX, CORPS ET ALGÈBRES

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

ANNEAUX ET CORPS

Anneau

Soit A un ensemble et $+$ et $\times$ deux lois de composition interne sur A. On dit que $(A,+,\times)$ a une structure d'anneau lorsque :

- $(A,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre 0_A; dit le neutre de A
- $\times$ est associative, distributive par rapport à $+$ et elle admet un élément neutre 1_A; dit l'unité de A

Si de plus $\times$ est commutative, on dit que $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif.

Anneau intègre

Un anneau $(A,+,\times)$ est dit intègre s'il est commutatif et

$$\forall a,b\in A,\quad a\times b=0\Rightarrow a=0 \text{ ou } b=0$$

Formules importantes

Soit a,b deux éléments d'un anneau A tels que $ab=ba$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

- **Formule de binôme de Newton:** $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$
- **Formule de factorisation:** $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}$

Groupes des unités

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. $\mathbb{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles muni de $\times$ est un groupe appelé groupe des inversibles.

Corps

$(\mathbb{K},+,\times)$ est corps si, et seulement, si :

- $(\mathbb{K},+,\times)$ est un anneau commutatif;
- $\mathbb{U}(\mathbb{K})=\mathbb{K}^*=\mathbb{K}\setminus\{0\}$

Tout corps est un anneau intègre

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times\right)$ est un anneau commutatif.
- $\mathbb{U}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)=\{\overline{x},\ x\in[\![0,n-1]\!]\ \text{ et } x\wedge n=1\}$
- $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times\right)$ est un corps si et seulement si n est premier;

Sous-anneau

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Un sous-ensemble B de A est dit sous-anneau de A si, et seulement, si

- $1_A\in B$
- Pour $x,y\in B$, $x-y\in B$ et $x\times y\in B$

Auquel cas B muni des lois restreintes est un anneau

Sous-corps

Soient $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps. On dit qu'une partie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ si et seulement si :

- $1_{\mathbb{K}}\in\mathbb{L}$
- Pour $x,y\in\mathbb{L}$, $x-y\in\mathbb{L}$ et $x\times y\in\mathbb{L}$
- $\forall x\in\mathbb{L}\setminus\{0\},x^{-1}\in\mathbb{L}$

Auquel cas $\mathbb{L}$ muni des lois restreintes est un corps

MORPHISME D'ANNEAUX

Morphisme d'anneaux

Soient A,A' deux anneaux. Une application $f:A\to A'$ est dite morphisme d'anneaux si:

- $f(1_A)=1_{A'}$;
- $\forall(x,y)\in A^2$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(xy)=f(x)f(y)$.

Si de plus f est bijective, on parle d'isomorphisme d'anneaux

Même définition que morphisme de corps.

$\mathrm{Ker} f=f^{-1}(\{0_{A'}\})$ et $\mathrm{Im}(f)=f(A)$.

f est injective ssi $\mathrm{Ker} f=\{0_A\}$

Lemme de Chinois

Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\wedge n=1$, alors $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Propriété

Les images, directe et réciproque, d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un sous-anneau

IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF

Idéal

On appelle idéal d'un anneau commutatif A tout **sous-groupe additif** I de A vérifiant la propriété d'absorption : $\forall(a,b)\in A\times I,\quad ab\in I$

Propriété

Soit I un idéal de A. Alors $I=A\Longleftrightarrow 1_A\in I\Longleftrightarrow\mathbb{U}(A)\cap I\neq\emptyset$

Les seuls idéaux d'un corps $\mathbb{K}$ sont $\mathbb{K}$ et $\{0\}$.

Images d'un idéal

- L'image réciproque (directe) d'un idéal par un morphisme d'anneaux (surjectif) est un idéal
- Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal

Idéal engendré par une partie

Soit S une partie d'un anneau A. On appelle idéal engendré par S l'intersection de tous les idéaux de A contenant S: c'est donc le plus petit idéal (au sens de l'inclusion) de A contenant S.

Idéal principal

L'idéal qui engendré par un singleton $\{a\}$ est dit principal: $aA=\{ab\mid b\in A\}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$

Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$, alors il existe un unique $n\in\mathbb{N}$ tel que $I=n\mathbb{Z}$.
En conséquence pour tous $a,b\in\mathbb{Z}$, alors

- $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\mathbf{pgcd}(a,b)\mathbb{Z}$.
- $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=\mathbf{ppcm}(a,b)\mathbb{Z}$.

Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $P\mathbb{K}[X]$ avec $P\in\mathbb{K}[X]$ normalisé. En conséquence pour tous $P,Q\in\mathbb{K}[X]$

- $P\mathbb{K}[X]+Q\mathbb{K}[X]=\mathbf{pgcd}(P,Q)\,\mathbb{K}[X]$;
- $P\mathbb{K}[X]\cap Q\mathbb{K}[X]=\mathbf{ppcm}(P,Q)\,\mathbb{K}[X]$.

INDICATEUR D'EULER

Indicateur d'Euler

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)=\textbf{Card}\left(\mathbb{U}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)\right)$.
L'application φ est appelée l'indicateur d'Euler

Calcul de φ

1. Si $m\wedge n=1$, alors $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$
2. Soit p un nombre premier et $k\in\mathbb{N}^*$, alors
$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$$
3. Si $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de l'entier n.
Alors
$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{k_i}-p_i^{k_i-1}\right)=n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Théorème d'Euler

Soit n un entier strictement positif et a un entier premier avec n, alors $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$.

Si n est premier on retrouve le théorème de Fermat

ALGÈBRES

Algèbre

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et un ensemble $\mathbb{A}$ muni de deux lois de composition interne $+,\times$ et d'une loi de composition externe ".". On dit que $(\mathbb{A},+,\times,.)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

1. $(\mathbb{A},+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel;
2. $(\mathbb{A},+,\times)$ est un anneau ;
3. $\forall x,y\in\mathbb{A},\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\alpha.(x\times y)=(\alpha.x)\times y=x\times(\alpha.y)$

Sous-algèbre

Soit $(\mathbb{A},+,\times,.)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $\mathbb{B}\subset\mathbb{A}$. On dit $\mathbb{B}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{A}$ si, et seulement, si

1. $1_{\mathbb{A}}\in\mathbb{B}$
2. $\forall x,y\in\mathbb{B},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}\quad \alpha x+\beta y\in\mathbb{B}$
3. $\forall x,y\in B,\quad x\times y\in\mathbb{B}$

Alors munie des lois restreintes, $\mathbb{B}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Morphisme d'algèbres

Soient $(\mathbb{A},+,\times,.)$ et $(\mathbb{A}',+,\times,.)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. On dit $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si:

1. $f(1_{\mathbb{A}})=1_{\mathbb{A}'}$
2. $\forall x,y\in\mathbb{A},\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\quad f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$
3. $\forall x,y\in\mathbb{A},\quad f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

Un morphisme d'algèbres est à la fois une application linéaire et un morphisme d'anneaux

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

RÉDUCTION

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

ÉLÉMENTS PROPRES

Éléments propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in E$. On dit que x est vecteur propre de u si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de u et noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.
- Soit $\lambda \in Sp(u)$. $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E)$ est un sev de E distinct de $\{0_E\}$ appelé le sous-espace propre de u associé à λ

Caractérisation en dim finie

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas injectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas surjectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas bijectif} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{rg}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) < n \\ &\Leftrightarrow \det(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) = 0 \end{aligned}$$

Éléments propres d'une matrice

Les éléments propres d'une matrice A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé

$$u_A : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

On écrit A à la place de u_A

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

E est de dimension finie

Définition

- Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \det(X\mathrm{I_n} - \mathrm{A})$.
- Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)$.

Endomorphisme induit

Si F est stable par u , alors $\chi_{u_F} | \chi_u$.

Spectre et polynôme caractéristique

$\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = 0\} = \mathrm{Rac}\,(\chi_u)$ l'ensemble des racines de χ_u

Coefficients du polynôme caractéristique

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors χ_A est un polynôme unitaire, de degré n et

$$\chi_A = X^n - \mathrm{tr(A)X^{n-1}} + \cdots + (-1)^{\mathrm{n}} \det(\mathrm{A})$$

c'est-à-dire $a_n = 1$, $a_{n-1} = -\mathrm{tr(A)}$ et $a_0 = (-1)^n \det A$

Ordre de multiplicité

La multiplicité d'une racine λ de χ_u est appelée l'ordre de multiplicité de λ, et ona: elle est noté $m(\lambda)$.

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$$

POLYNÔME MINIMAL

Polynômes annulateurs et minimal

- Le noyau $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ du morphisme d'évaluation $P \longmapsto P(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle l'idéal annulateur de u.
- On appelle polynôme annulateur de u tout élément de l'idéal annulateur;
- On appelle polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Même définition pour les matrices

Théorème de décomposition des noyaux

Si $P_1, \ldots, P_k$ sont k polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\mathrm{Ker}\left[\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(u)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$$

Si $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ un polynôme annulateur de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u , alors $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
En conséquence $\pi_u | \chi_u$.

DIAGONALISATION

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
- On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété

Si A est diagonalisable et $\Delta = P^{-1}AP$, alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de Δ et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurence dans cette diagonale.

Les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A

Propriétés caractéristiques

Soit $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. u est diagonalisable.
2. E possède une base de vecteurs propres de u;
3. $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$;
4. $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$;
5. χ_u est scindé et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.
6. π_u est scindé à racines simples.
7. u annule un polynôme scindé à racines simples.

En particulier si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

TRIGONALISATION

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définition

- u est dite trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
- A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice T triangulaire supérieure.

Propriétés caractéristiques

Les quatres affirmations sont équivalentes :

1. u est trigonalisable.
2. χ_u est scindé.
3. u annule un polynôme scindé
4. π_u est scindé.

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$, avec $\dim E = n$.

Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Ce vocabulaire se transpose aux matrices

Propriété caractéristique

- u est nilpotent $\Longleftrightarrow$ u est trigonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$
- A est nilpotente $\Longleftrightarrow$ est trigonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

A est nilpotente ssi elle est semblable à une matrice triangulairs sup stricte

DÉCOMPOSITION SPÉCTRALE

Décomposition spéctrale

Si u est diagonalisable où E est de dim finie, avec $Sp(u) = \{\lambda_i, i \in [\![1, k]\!]\}$.

Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose p_i la projection de E sur $E_{\lambda_i}(u)$ (de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} E_j$).

Alors

1. $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$
2. $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{i=1}^{k} P(\lambda_i) p_i$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

NORMES ET SUITES

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

NORMES

Norme

On appelle *norme* toute application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que : $\forall x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

- **Séparation:** $\| x \| = 0 \Longrightarrow x = 0_E$
- **Homogénéité:** $\| \alpha \cdot x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$
- **Inégalité triangulaire :** $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

Auquel cas E est dit un espace vectoriel normé.

Si de plus E est une $\mathbb{K}$-algèbre,

- la norme est dite sous-multiplicative si: $\forall x, y \in E, \quad \|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$.
- la norme est dite d'algèbre si elle est sous-multiplicative et $\| 1_E \| = 1$

Seconde inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \quad |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

Distance

Soit $\|.\|$ une norme sur E

- On appelle distance associée à la norme $\|.\|$ sur E l'application $\mathrm{d} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+, (x, y) \longmapsto \|x - y\|$
- Soit $x \in E$ et A une partie non vide de E. On appelle distance de x à A le nombre
$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \ , \ y \in A\}$$

Et on a $\forall x, y \in E, \quad |\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)| \leqslant \mathrm{d}(x, y)$

Normes équivalentes

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est équivalente à N_2 si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que:
$$\forall x \in E, \ \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x)$$
On note $N_1 \sim N_2$. Une telle relation $\sim$ est d'équivalence

Propriété fondamentale

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $N_1 \sim N_2$
2. $\left\{ \dfrac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ et $\left\{ \dfrac{N_2(x)}{N_1(x)} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$ sont majorés.
3. Toute suite d'éléments de E convergente pour une norme converge pour l'autre vers la même limite.

Méthode pratique

Pour montrer que les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty \text{ ou } \lim_{n \to +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = 0$$

Théorème de Riesz

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

BOULES, SPHÈRES ET BORNITUDE

Boules et sphères

$(E, \|.\|)$ un espace normé, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- **Boule ouverte**: $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$
- **Boule fermée**: $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\}$
- **sphère**: $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$

Si $a = O$ et $r = 1$, on parle des boules et sphère unités.

Boules et convexité

Les boules de E sont convexes de E.

Partie bornée

Une partie A non vide de E est dite bornée si $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A, \ \|x\| \leqslant k$. Autrement-dit $A \subset \mathcal{B}_f(O, k)$

Fonction bornée

Une fonction $f : X \longrightarrow E$ où X est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ est bornée. Ou encore $\exists k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in X, \ \|f(x)\|_E \leqslant k$.

Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est bornée si
$$\exists M > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant M$$

SUITES CONVERGENTES

$(E, \|.\|)$ désigne un espace normé.

Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E tend vers $\ell \in E$ si $\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, c'est-à-dire
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$
ℓ est unique, appelé la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $\ell = \lim u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Une suite non convergente est dite divergente.

Domination

Soit (u_n) une suite de E et $\ell \in E$. Alors la suite (u_n) converge vers ℓ si, et seulement, s'il existe une suite réelle et positive $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0 et telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$$

Convergence et bornitude

Toute suite convergente est bornée

Opérations algébriques

- Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in E$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|\ell\|$;
- Si $\alpha_n \in \mathbb{K} \to \alpha$ et $u_n \to \ell \in E$ alors $\alpha_n . u_n \to \alpha . \ell$;
- Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ alors $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda \ell + \mu \ell'$;
- Si de plus, E est une algèbre normée, $u_n v_n \to \ell \ell'$.

SUITES EXTRAITES

Suites extraites

On dit que (v_n) est une suite extraite de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Propriété

Les suites extraites d'une suite convergente sont convergentes vers la même limite

Valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On dit que α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ si elle est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$.

Propriété

- Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.
- Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.
- Toute suite n'ayant pas de valeur d'adhérence est divergente.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

ESPACES DE BANACH

Suites de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| \leqslant \varepsilon$$

Propriété caractéristique

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que
$$\begin{cases} \forall n, p \in \mathbb{N}, & \| u_{n+p} - u_n \| \leqslant \varepsilon_n \\ \varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

Propriété

- Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.
- Une suite de Cauchy possède au plus une valeur d'adhérence.

Espace de Banach

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé dont lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Propriété

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

TOPOLOGIE, LIMITES ET CONTINUITÉ

: **Définition.** : **Résultat de cours.** : **Résultat pratique.** : **Astuce.** : **Démarche.** : **Exemple classique.** : **Attention.** : **Information**

OUVERTS

Définition
Soit $\mathcal{O} \subset E$. On dit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de E si

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$$

Propriété
1. $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
2. Union quelconque d'ouverts est un ouvert.
3. Intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Propriété
Une boule ouverte est un ouvert.

Ouverts relatifs à une partie
On appelle ouvert dans A ou relativement à A tout ensemble de la forme $A \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E.

INTÉRIEURS

Définition
Soit A une partie de E et $a \in E$.
On dit que a est intérieur à A si: $\exists r > 0$, tel que $B(a, r) \subset A$
On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Propriété
Soit A, B deux parties de E.

1. $\mathring{A} \subset A$ et $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$;
2. $\mathring{A}$ est ouvert et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;
3. A ouvert $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
4. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Propriété
Soit $a \in E$ et $r > 0$, alors $\overbrace{\mathcal{B}_f(a, r)}^{\circ} = \mathcal{B}(a, r)$

FERMÉS

Définition
On appelle fermé tout ensemble $\mathcal{F}$ dont le complémentaire $\complement_E \mathcal{F}$ est ouvert.

Propriété
1. $\emptyset$ et E sont des fermés.
2. Intersection quelconque de fermés est fermé
3. Union finie de fermés est un fermé.

Propriété
Une boule fermée est un fermé.

Caractérisation sequentielle
Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel normé E est fermée , si et seulement, si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge admet une limite qui appartient à $\mathcal{F}$.

ADHÉRENCE D'UN PARTIE

Définition
Soit A une partie de E et $a \in E$.

- On dit a est dit adhérent à A si :$\forall r > 0,\ B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.
- On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
- On dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Caractérisation séquentielle
- $a \in \overline{A} \iff \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, tq $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.
- $\overline{A} = E \iff \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, tq $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Propriété
Soit A et B deux parties de E.

1. $\complement \overline{A} = \widehat{\complement A}^{\circ}$ $\quad \complement \mathring{A} = \overline{\complement A}$, donc $\overline{A}$ est un fermé ;
2. $A \subset \overline{A}$ et $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;
3. $\overline{A}$ est un fermé et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;
5. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

Frontière
Soit A une partie de E. La frontière de A est l'ensemble: $\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$

LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

$(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés

limite d'une fonction en un point
Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
On dit que f admet pour limite ℓ en a selon A, lorsque $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E < \alpha$ et $x \in A$, alors $\|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$. On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$

Caractérisation séquentielle
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ si, et seulement si, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ

Opérations sur les limites
Soient $f, g \in F^A$, $\alpha \in \mathbb{K}^E$ et a adhérent à A telles que:
$f \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in A}]{} \ell$, $g \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in A}]{} \ell'$ et $\alpha \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in A}]{} \lambda$. Alors

1. $f + g \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$
2. Si F est une algèbre normée $f.g \xrightarrow[x \to a]{} \ell.\ell'$
3. $\alpha f \xrightarrow[x \to a]{} \lambda.\ell$
4. Si $\lambda \neq 0$, alors $\exists W \in \mathcal{V}_A(a)$ sur lequel α ne s'annule pas et $\dfrac{1}{\alpha} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in A}]{} \dfrac{1}{\lambda} \in \mathbb{K}^*$

Composition
Soient $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $g : B \subset F \longrightarrow G$ telles que $f(A) \subset B$ et a adhérent à A. Si $f \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g \xrightarrow[x \to b]{} \ell$, alors $g \circ f \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

CONTINUITÉ

Continuité
Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$.

- On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur A si elle est continue en chaque point de A.

$\mathcal{C}\,(A, F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de A à valeurs dans F

Caractérisation séquentielle
Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$.
f est continue en a si, et seulement si, $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$,

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$$

Opérations algébriques
- $\mathcal{C}\,(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- Si F est une algèbre normée, alors $\mathcal{C}\,(A, F)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre
- Si $\alpha : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : A \subset E \longrightarrow F$ sont continues alors $\alpha.f$ est continue.
- Si $\alpha : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue et elle ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{\alpha} : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue

Composition
La composée de deux fonctions continues est continue

Propriété
Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$

- Si F est un espace produit alors f est continue si, et seulement si, ses fonctions composantes le sont.
- Si F est de dimension finie alors f est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Continuité et densité
Soit $f, g : E \longrightarrow F$ deux fonctions continues. Si A est dense dans E et f et g coïncident sur A, alors f et g sont égales.

Continuité et topologie
Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur A;
2. l'image réciproque de tout ouvert de F est ouvert de A;
3. l'image réciproque de tout fermé de F est fermé de A.

Continuité uniforme
On dit que $f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in A, \|\, x - y \,\| < \eta \Rightarrow \|\, f(x) - f(y) \,\| < \varepsilon$$

Caractérisation séquentielle
$f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue sur A ssi $\forall (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$

$$x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

APPLICATIONS MULTILINÉAIRES, COMPACITÉ ET CONNEXITÉ PAR ARCS

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

Applications linéaires

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des $\mathbb{K}$-evns

Théorème fondamental

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est continue;
2. u est continue en 0_E;
3. $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$;
4. l'ensemble $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\}$ est majoré;
5. u est lipschitzienne;
6. u est bornée sur la boule $B_f(0,1)$
7. u est bornée sur la sphère $S(0,1)$

Propriété fondamentale en dim finie

Si E est de dimension finie, alors toute $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue

Propriété

Soit N_1 et N_2 deux normes de E un espace vectoriel normé. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. N_1 et N_2 sont équivalentes ;
2. $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} (E, N_1) & \longrightarrow & (E, N_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$. est bicontinue ;
3. les ouverts de E pour la norme N_1 sont les ouverts de E pour la norme N_2.

Applications multilinéairs

Propriété

Si $u : E \times F \to G$ est bilinéaire. u est continue si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \forall y \in F, \|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|\|y\|$$

Lorsque E et F sont de dimensions finies, alors toute application bilinéaire sur $E \times F$ est continue

Propriété

Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont de dimensions finies alors toute application multilinéaire $M : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est continue. Au quel cas $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que ,$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$:

$$\|M(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant k\|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

Inégalité de Hadamard

Soit M une matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont $C_1, \cdots, C_n$. On note $\|C_i\|_2$ la norme euclidienne de C_i. On a l'inégalité suivante :

$$\det(M) \leqslant \|C_1\|_2 \cdots \|C_n\|_2$$

Compacité

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des $\mathbb{K}$-evns

Partie compacte

Une partie A de E est dite compacte dans E si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A

Compacité, fermeture et bornitude

Tout compact est nécessairement fermé et borné.

Fermé dans un compact

Tout fermé d'un compact est compact E.

Produit cartésien des compacts

Le produit cartésien de compacts est compact

Propriété

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses fermés bornés.

Propriété

Soit $f \in \mathcal{C}(E, F)$ et A un compact de E, alors

- $f(A)$ est un compact de F.
- $f(A)$ est borné et il existe $a, b \in A$ tels que

$$\|f(a)\| = \inf_{x\in A} \|f(x)\| \text{ et } \|f(b)\| = \sup_{x\in A} \|f(x)\|$$

On dit que f atteint ses bornes de sa norme.

- $F = \mathbb{R}$, alors f est bornée sur A et elle atteint ses bornes: il existe $a, b \in A$ tels que:

$$f(a) = \inf_{x\in A} f(x) \text{ et } f(b) = \sup_{x\in A} f(x)$$

Définition

On dit que l'application $f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall x, y \in A, \quad \| x - y \| < \eta \Longrightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

Propriété

Toute application lipschitzienne $f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue.

Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme

$f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue sur A ssi

$$\forall (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Méthode pratique

Pour montrer que f n'est pas uniformément continue sur A on cherche deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Propriété

Toute application uniformément continue est évidemment continue

Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Connexité par arcs

Connexité par arcs

On appelle chemin de a à b dans A toute application continue $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
On dit que A est connexe par arcs si pour tous $x, y \in A$ il existe un chemin de x à y dans A.

Convexité et connexité par arcs

Si A convexe alors A est connexe par arcs.

Partie étoilée

A une partie d'un espace vectoriel normé E est dite étoilée si $\exists a \in A$ tel que $\forall b \in A,\ [a,b] \subset A$.

Propriété

Toute partie étoilée est connexe par arcs

Connexité par arcs et continuité

Soit $f : A \subset E \to F$ continue. Si A est connexe par arcs alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient A connexe par arcs, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ et $(a,b) \in A^2$. Alors pour tout m entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in A$ tel que $f(c) = m$.

Propriété

Soit A une partie d'espace vectoriel normé E. La relation $\mathcal{R}$ définie sur A par: pour tout $(x,y) \in A^2$

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1], A), \begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$

est une relation d'équivalence.
La classe de a pour cette relation est appelée la composante connexe par arcs de a dans A est connexe par arcs et notée $\mathcal{C}(a)$.

Groupe orthogonal

Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ ,\ {}^tAA = I_n\right\}$$

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et non connexe par arcs
- Les composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. Où

$$\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \det{}^{-1}(\{1\})$$

et

$$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \det{}^{-1}(\{-1\})$$

Contact Information

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

Les séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

Convergence et convergence absolue

E un $\mathbb{K}$-espcae vectoriel de dim finie et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série de E

Définition

On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ssi (S_n) la suite des sommes partielles converge dans E. la limite de (S_n) est appelée somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente

Série télescopique

La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (u_n) est convergente.

Condition nécessaire

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0

Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$. Au quel cas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

Reste d'une série convergente

Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est défini par $R_n := \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$,

et on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k + R_n$ et $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Séries numériques coordonnées

Soit $\beta = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$ le terme général de la série $\sum u_n$. Alors: $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]$, la série $\sum u_{n,i}$ converge

En cas de convergence: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i$

Critère spécial des séries alternées

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ une série telle que (u_n) décroît et est de limite nulle. Alors: $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge et $\operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}\left((-1)^{n+1} u_{n+1}\right)$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum \| u_n \|$ est convergente.

Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| \quad \text{Inégalité triangulaire}$$

Séries à termes positifs

Soit $\sum v_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Critère de majoration

$\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge $\Longleftrightarrow$ la suite (S_n) est majorée où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

En cas de convergence $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sup\limits_n S_n$

Principes de comparaison

1. Si $u_n = \circ(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ alors
   - $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
   - $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement, si $\alpha > 1$

Règle de Riemann

1. Si $\exists \alpha > 1$ tel que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ ou $u_n = \circ\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum u_n$ converge
2. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ ou $\dfrac{1}{n^\alpha} = \circ(u_n)$, alors $\sum u_n$ diverge
3. S'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$. Alors $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 1$

Série de Bertrand

Pour α et β deux réels, alors $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ CV $\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Critères de D'Alembert

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+$

1. Si $0 \leqslant \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge
3. Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

Comparaison série-intégrale

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors

1. La série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}r - f(n)$ converge.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

- **En cas de CV:** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
- **En cas de DIV:** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

Sommation des relations de comparaison

Soit $\sum v_n$ une SATP et $\sum u_n$ une série numérique.

Théorème

1. On suppose que $\sum v_n$ est $\boxed{\textbf{convergente}}$
   - Si $u_n = \circ(v_n)$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est AC et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
   - Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est AC et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$
   - Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est AC et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$
2. On suppose que $\sum v_n$ est $\boxed{\textbf{divergente}}$
   - Si $u_n = \circ(v_n)$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$
   - Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$
   - Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est DIV et $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$

Série de Neumann et série exponentielle

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie.

Série de Neumann

Soit $u \in \mathbb{A}$ tel que $\| u \| < 1$

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u^n$ est absolument convergente.
2. $1_{\mathbb{A}} - u$ est inversible dans $\mathbb{A}$ et $(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.
3. $\|(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1 - \|u\|}$.

L'application exponentielle

Soit $u \in \mathbb{A}$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.

$\exp : u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$ s'appelle la fonction exponentielle sur $\mathbb{A}$.

Propriété

Soit $u, v \in \mathbb{A}$ tels que $u \times v = v \times u$, alors $\exp(u + v) = \exp(u) \times \exp(v)$

Contact-Information

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

LES FAMILLES NUMÉRIQUES SOMMABLES

: **Définition.** : **Résultat de cours.** : **Résultat pratique.** : **Astuce.** : **Démarche.** : **Exemple classique.** : **Attention.** : **Information**

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Soit E un ensemble.

Ensemble au plus dénombrable

On dit que:

- E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
- E est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable

Propriété

Une sous-famille d'une famille sommable est sommable

Opérations

- Une partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable si, et seulement si, elle est infinie.
- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une union dénombrable de parties dénombrables est dénombrable

FAMILLES POSITIVES SOMMABLES

Soient I un ensemble dénombrable et $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs

Définition

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si

$$\exists M \geqslant 0, \forall J \subset I \text{ et } J \text{ fini}, \sum_{i\in J} x_i \leqslant M$$

Auquel cas, $\sup\left\{\sum_{i\in J} x_i,\ J \subset I \text{ et } J \text{ fini}\right\}$ s'appelle la somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$ et on la note $\sum_{i\in I} x_i$.

Critère de comparaison

Si: $\forall i \in I, \quad x_i \leqslant y_i$. Alors

1. Si la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et:
$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$$
2. La non sommabilité de la famille $(x_i)_{i\in J}$ entraîne la non sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$

Retour aux séries

Si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ est une bijection, alors, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} x_{\sigma(n)}$ est convergente. Auquel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{i\in I} x_i$$

FAMILLES NUMÉRIQUES SOMMABLES

Soit I un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k\in I}, (y_k)_{k\in I}$ deux familles numériques.

Famille numérique sommable

La famille $(x_k)_{k\in I}$ est dite sommable si la famille $(|x_k|)_{k\in I}$ est sommable.

Cas de $I = \mathbb{N}$

Une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement, si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est absolument convergente. Auquel cas $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

Retour aux séries

Si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ une bijection, alors, $(x_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement, si $\sum_{n\geqslant 0} x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente. Auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{k\in I} x_k$

Opérations

Soit $(x_k)_{k\in I'}$, $(y_k)_{k\in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la famille $(x_i + \lambda y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{k\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{k\in I} x_i + \sum_{k\in I} y_i$

Sous-famille d'une famille sommable

Soit $(x_k)_{k\in I}$ une famille sommable et J une partie dénombrable de I. Alors $(x_k)_{k\in J}$ est sommable

SOMMATION PAR PAQUETS

Soit I un ensemble dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de I tels que

$$\forall n \neq m, \quad I_n \cap I_m = \emptyset \text{ et } \bigcup I_n = I$$

Critère suffisant de sommabilité

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille numérique. **Si** :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(x_i)_{i\in I_n}$ est sommable.
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} T_n$ est convergente avec $T_n = \sum_{i\in I_n} |x_i|$.

Alors: $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$

Sommation par paquets

Soit $(x_k)_{k\in I}$ une famille numérique **sommable**. Alors :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i\in I_n}$ est sommable.
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} S_n$ converge avec $S_n = \sum_{i\in I_n} x_i$.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{i\in I} x_i$.

Autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right) = \sum_{i\in I} x_i$

SUITES DOUBLES

Théorème

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite numérique double. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\geqslant 0} |a_{m,n}|$ converge et la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_{m,n}|$ converge et la série $\sum_{m\geqslant 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge.
4. La série $\sum_{n\geqslant 0} \sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} |a_{p,q}|$ converge.

Auquel cas :

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ (n,m)\in\mathbb{N}^2}} a_{p,q}.\end{aligned}$$

PRODUIT DE CAUCHY

Propriété

Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques absolument convergentes alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right)$ est absolument convergent et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Propriété

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie et $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $ab = ba$. Alors

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

CONTACT-INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

DÉRIVATION ET INTÉGRATION DES FONCTIONS VECTORIELLES

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

CONTEXTE

E, F, G sont normés et de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et parfois ils sont euclidiens. I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow E$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t)\, e_i$$

DÉRIVATION

Dérivation

Soit $f : I \to E$ et $a \in I$.

- On dit que f admet une dérivée en a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe } \in E$$

Cette limite est noté $f'(a)$ on note aussi $\dfrac{df}{dx}(a)$.

- Lorsque f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I et la fonction de I vers E qui à x associe $f'(x)$ est appelée dérivée de f sur I, on la note f'

Dérivées successives

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On définit les dérivées successives de f, si elles existent, au moyen d'une récurrence

- $f^{(0)} = f$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons avoir défini $f^{(k)}$ sur I, si $f^{(k)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$

La fonction $f^{(k)}$, si elle existe, est appelée la dérivée $k^{ème}$ de la fonction f.

- L'ensemble des fonctions n-fois dérivable sur I se note $\mathcal{D}^n(I, E)$
- f est dite de $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I
- f est dite de $\mathcal{C}^\infty$ sur I ou f est lisse sur I si f est k-fois dérivable sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
- $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I

Fonctions coordonnées

Soit $f : I \longrightarrow E$ de fonctions coordonnées $f_1, \cdots, f_p$ dans une base de E. On a équivalence entre:

1. $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$
2. $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i \in \mathcal{D}^n(I, E)$

Auquel cas $f^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i^{(n)}.e_i$

Mêmes résultats si on remplace $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou par $\mathcal{C}^\infty$

OPÉRATIONS

Somme et multiplication par un scalaire

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{D}^n(I, E)$. Alors $\lambda f + g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$$

Propriété

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{D}^n(I, F)$ et

$$(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$$

Formule de Leibniz

Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}^n(I, F)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{D}^n(I, G)$ et

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B(f^{(i)}, g^{(n-i)})$$

Dérivation et composition

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, $\varphi \in \mathcal{D}^n(J, I)$. Alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{D}^n(J, E)$

Tous les résultats précédents restent vrais si on remplace $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Définition

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$.
Pour tout $a, b \in I$, on appelle intégrale de f de a à b le vecteur

$$\int_a^b f(t)\, dt := \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\, dt \right) e_i$$

S'il n'y a pas de confusion l'intégrale se note $\displaystyle\int_a^b f$

Propriété

Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$, $a, b, c \in I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors:

1. **Linéarité:** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
2. **Relation de Chasles:** $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. Si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $L\left(\displaystyle\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$

Somme de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], E)$, alors $\displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$

Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, E)$, $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$ alors:

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$$

MÉTHODES DE CALCUL

Intégration par parties

Soit $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux fonctions de $\mathcal{C}^1$ sur I et $B : E \times F \longrightarrow G$.

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b B(f'(t), g(t))dt = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t))dt.$$

Changement de variable

Soient φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J, $f \in \mathcal{C}(J, E)$ et $a, b \in I$. Alors:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\, dt$$

INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENT FINIS

des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

En particulier si $f(a) = f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle

Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que $\|f'\|$ soit bornée sur I i.e. il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant M$, alors $\forall a, b \in I$, $\quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,|b - a|$

de prolongement par dérivabilité

Soit f une application de $[a, b]$ dans E et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b[$
- Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $f^{(k)}$ a une limite ℓ_k en b

Alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b]$ et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f^{(k)}(b) = \ell_k$

FORMULES DE TAYLOR

Formules de Taylor et Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $a, b \in I$

1. $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$
2. $\left\| f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|$

Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to E$ une fonction de $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

CONTACT-INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

SUITES DE FONCTIONS

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

CONTEXTE

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F où $A \subset E$ avec E et F sont de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies. I intervalle de $\mathbb{R}$.

MODE DE CONVERGENCE

Convergence simple

On dit que $(f_n)_n$ converge simplement sur A si, et seulement si, pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))$ converge dans F.
On appelle limite ou limite simple de la suite $(f_n(x))$, la fonction $f \in F^A$ définie par: $\forall x \in A,\ f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

On écrit $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvs}} f$

Convergence uniforme

On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si :

1. Il existe n_0 à partir duquel $(f_n - f)$ est bornée
2. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On note $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} f$ ou $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$

Propriété caractéristique

$$f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} f \iff \begin{cases} \bullet\ f_n \xrightarrow[A]{\text{cvs}} f \\ \bullet\ \| f_n - f \|_\infty^A \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \text{telle que } \lim \varepsilon_n = 0 \\ \forall x \in A, \quad \| f_n(x) - f(x) \| \leqslant \varepsilon_n \quad \text{à pcr} \end{cases}$$

La non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvs}} f$ et $\exists(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $(f_n(x_n) - f(x_n)) \not\to 0$, alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur A

CU $\Longrightarrow$ CS

Si $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} f$, alors $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvs}} f$.

INTERVERSION DES LIMITES

Théorème d'interversion des limites

Soit $a \in \overline{A}$.

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \text{ existe et vaut } b_n \in F; \\ \circ\ f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} f \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \text{La suite } (b_n) \text{ converge ;} \\ \bullet\ f \text{ admet une limite en } a; \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \end{cases}$

Autrement-dit: $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n en $a \in \overline{A}$ et la suite (b_n) diverge, alors (f_n) ne converge pas uniformément

CONTINUITÉ

Continuité par convergence uniforme

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \text{ est continue sur } A; \\ \circ\ f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} f. \end{cases}$

Alors: f est continue sur A.

Continuité par convergence uniforme locale

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \text{ est continue sur } A; \\ \circ\ f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f \text{ sur tout compact inclus dans } A. \end{cases}$

Alors: f est continue sur A.

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on remplace compact par segment

INTERVERSION lim ET $\int$

Interversion lim et $\int$

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans F

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \in \mathcal{C}([a,b],F); \\ \circ\ (f_n) \text{ converge uniformément sur } [a,b] \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \lim f_n \text{ est continue sur } [a,b]; \\ \bullet\ \text{La suite } \left(\displaystyle\int_a^b f_n\right)_n \text{ converge;} \\ \bullet\ \text{On a l'interversion } \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \end{cases}$

Convergence uniforme et primitivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I,F)$. Si :
(f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f. Pour tout $a \in I$, on pose

$$\varphi : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n : x \longmapsto \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

Alors (φ_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers φ

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉ

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :

Si: $\begin{cases} \circ\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K}); \\ \circ\ f_n \xrightarrow[I]{\text{cvs}} f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K}); \\ \circ\ \text{il existe } \varphi \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+) \text{ intégrable telle que:} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi \quad \text{[hypothèse de domination]} \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \text{Les applications } f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I; \\ \bullet\ \text{La suite } \left(\displaystyle\int_I f_n\right) \text{ converge et } \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n = \int_I f \end{cases}$

Le théorème TCVD ne nécessite pas la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n), mais la fonction limite doit être cpm sur I.

RÉGULARITÉ DE LA LIMITE

Interversion limite-dérivée

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1(I,F); \\ \circ\ (f_n) \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ\ (f_n') \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I,F); \\ \bullet\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'; \\ \bullet\ (f_n) \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

Interversion limite-dérivées successives

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \in \mathcal{C}^p(I,F); \\ \circ\ \forall k \in [\![0,p-1]\!],\ \left(f_n^{(k)}\right) \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ\ (f_n^{(p)}) \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I; \\ \bullet\ \forall k \in [\![0,p]\!],\ \left(f_n^{(k)}\right) \text{ CU sur tout segment inclus dans } I; \\ \bullet\ \text{On a les interversions} \end{cases}$

$$\forall k \in [\![0,p]\!],\quad \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$$

Interversion limite-dérivées successives

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \in \mathcal{C}^\infty(I,F); \\ \circ\ \text{La suite } (f_n) \text{ CS sur } I; \\ \circ\ \forall p \geqslant 1,\ \left(f_n^{(p)}\right) \text{ CU sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I; \\ \bullet\ \forall k \geqslant 0,\ f_n^{(k)} \text{ CU sur tout segment inclus dans } I; \\ \bullet\ \text{On a les interversions} \end{cases}$

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

SÉRIES DE FONCTIONS

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

CONTEXTE

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F où $A \subset E$ avec E et F sont de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies. Le plus souvent, $E = F = \mathbb{R}$ et $A = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

MODES DE CONVERGENCE

Convergence simple

On dit que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A, si $\forall x \in A$ la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée sa somme.

Convergence absolue

On dit que $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonction $\sum \| f_n \|_F$ converge simplement.

Convergence normale

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(A, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

caractéristique de la convergence normale

$\sum f_n$ converge normalement (cvn) sur A ssi

$$\begin{cases} \bullet\ \exists (a_n) \in {\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : \|f_n(x)\| \leqslant a_n \\ \bullet\ \sum a_n \text{ converge} \end{cases}$$

Propriété caractéristique de la convergence uniforme

$\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement, si $\sum f_n$ converge simplement sur A et $R_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} 0$

Condition nécessaire

Si $\sum f_n$ converge uniformément vers f, alors $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} 0$.

Cas d'une série alternée

On suppose que $F = \mathbb{R}$.

Si $\forall x \in A$, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est alternée vérifiant le CSSA, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement, si $f_n \xrightarrow[A]{\text{cvu}} 0$

Comparaison des modes de convergence

$$\begin{array}{ccccc} & & CU & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ CN & & & & CS \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & CA & & \end{array}$$

Toutes les autres implications sont fausses.

INTERVERSION lim ET $\sum$

Interversion limite-somme

Soit $a \in \overline{A}$ un point adhérent.

Si: $\begin{cases} \circ\ \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge uniformément sur } A; \\ \circ\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n \in F \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \ell_n \text{ converge;} \\ \bullet\ \text{La somme } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ admet une limite en } a; \\ \bullet\ \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) \end{cases}$

CONTINUITÉ

Continuité par convergence uniforme sur tout compact

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(A, F); \\ \circ\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur tout compact inclus dans } A. \end{cases}$

Alors : la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on remplace compact par segment

INTERVERSION $\sum$ ET $\int$

Intégration terme à terme sur un segment

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a,b], F); \\ \circ\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a,b]. \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ est continue;} \\ \bullet\ \sum_{n\geqslant 0} \left(\int_a^b f_n \right) \text{ CV et on a: } \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) \mathrm{d}t \right) \end{cases}$

Convergence dominée (Intervalle quelconque)

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n : I \longrightarrow \mathbb{K} \text{ est contnue par morceaux et intégrable;} \\ \circ\ \text{La série } \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ de somme } f; \\ \circ\ f \text{ est continue par morceaux sur } I; \\ \circ\ \text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n| \text{ converge.} \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \text{La fonction } f \text{ est intégrable sur } I; \\ \bullet\ \int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{cases}$

En outre

$$\int_I |f| = \int_I \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$

RÉGULARITÉ DE LA LIMITE

Dérivation terme à terme: Classe $\mathcal{C}^1$

Si:

$\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, F); \\ \circ\ \text{La série } \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ\ \sum_{n\geqslant 0} f_n' \text{ converge uniformément sur tout segment inclus } I. \end{cases}$

Alors:

$\begin{cases} \bullet\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I, F); \\ \bullet\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'; \\ \bullet\ \text{La série } \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment inclus } I \end{cases}$

Dérivation terme à terme: Classe $\mathcal{C}^p$

Soit $p \geqslant 1$.

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^p(I, F); \\ \circ\ \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)} \text{ CS sur } I; \\ \circ\ \sum_{n\geqslant 0} f_n^{(p)} \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

Alors: $\begin{cases} \bullet\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^p(I, F); \\ \bullet\ \forall k \in [\![0, p]\!],\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}; \\ \bullet\ \forall k \in [\![0, p]\!],\ \sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur tout segment} \subset I \end{cases}$

Dérivation terme à terme: Classe $\mathcal{C}^\infty$

Si: $\begin{cases} \circ\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, F); \\ \circ\ \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ\ \forall p \geqslant 1,\ \sum_{n\geqslant 0} f_n^{(p)} \text{ converge uniformément sur tout segment} \subset I. \end{cases}$

Alors: la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}.$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

SÉRIES ENTIÈRES

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

SÉRIES ENTIÈRES

Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On appelle série entière associée à la suite (a_n) la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

- Les nombres a_n s'appellent coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
- Le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} / \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge}\}$$

- L'application $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelée la somme de la série

Lemme d'Abel

Soit $r \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $(a_n r^n)_n$ soit une suite bornée avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\forall z \in \mathcal{B}(0_{\mathbb{C}}, r)$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument

Rayon de convergence

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est l'élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} && = \inf\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)_n \text{ non bornée}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+,\ a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\} && = \inf\{r \in \mathbb{R}^+,\ a_n r^n \not\longrightarrow 0\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n \text{ converge}\} && = \inf\{r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n \text{ dinverge}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ converge}\} && = \inf\{r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ diverge}\} \end{aligned}$$

$$R_c\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = R_c\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+p}\right) = R_c\left(\sum_{n\geqslant 0} a_{n+p} z^n\right)$$

CONVERGENCES D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Convergence d'une série entière

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- La série entière converge absolument sur le disque de convergence $\mathcal{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$;
- La série entière converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0, R_1)$ avec $0 < R_1 < R$;
- $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\mathcal{D}(0,R)$.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ CA, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ CN sur $\mathcal{D}_f(0,R)$.

CALCUL DE RAYON

Critère de comparaison

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons respectifs R_a et R_b.

- si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Critère de D'Alembert

Si (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$. Avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

Somme et produit

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b et soient $\sum_{n\geqslant 0} s_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$ respectivement somme et produit de Cauchy des deux séries précédentes i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Soit R_s et R_p les rayons de convergence de ces deux dernières. Alors

1. $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$, $R_p \geqslant \min(R_a, R_b)$;
2. si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = \min(R_a, R_b)$;
3. on pose $R = \min(R_a, R_b)$. $\forall z \in \mathcal{D}(0,R)$,
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$;
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Série dérivée

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R. La série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ est de rayon de convergence R et dite série dérivée de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$R_c\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = R_c\left(\sum_{n\geqslant 0} n^p a_n z^n\right) = R_c\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^p} z^n\right)$$

CAS DES SÉRIES RÉELLES

Primitive

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme $f : x \in]-R, R[\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors les primitives de f sur $]-R, R[$ s'écrivent

$$x \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ où } k \in \mathbb{C}$$

Régularité et coefficients

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme f. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{K})$:

$$\forall x \in]-R, R[, \forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$$

En particulier $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et ainsi

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Fonction développable en série entière

Soit I un intervalle tel que $0 \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{C}$

- Soit $r > 0$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

Proprieté caractéristique

Si f existe de classe C^∞ au voisinage de 0. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est développable en série entière;
2. $\exists r > 0, \forall x \in]-r, r[, \lim_{n\to+\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) = 0$;
3. $\exists r > 0, \forall x \in]-r, r[, \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = 0$.

Auquel cas les primitives et les dérivées successives de f sont DSE en 0

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

CALCUL DIFFÉRENTIEL

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

CONTEXTE

Soient E, F, G et H des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = p$.
Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts non vide, $a \in U$, $f : U \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de F.

DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLES

Dérivée selon un vecteur

On dit que f admet une dérivée en a suivant $h \in E \backslash \{0\}$ si $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ existe ou encore si $\varphi : t \longmapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en a suivant h et on la note $\varphi'(0) = D_h f(a)$.

Dérivées partielles

- On appelle dérivées partielles de f en a les dérivées, lorsqu'elles existent, de f en a suivant les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.
- La dérivée en a selon e_i se note $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
- $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ s'appelle la i-ème application dérivée partielle de f sur U. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

DIFFÉRENTIELLE

Différentielle en un point

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire ℓ de E vers F et ε une application de E dans F continue et nulle en 0 telles que $\forall h \in E$ tel que $a + h \in U$: $f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ L'application ℓ est unique, appelée la différentielle de f en a et notée $\mathrm{d}f_a$. On écrit $o(\|h\|)$ pour $\|h\| \varepsilon(h)$.

Propriété

1. f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.
2. f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est dérivable en a selon tout vecteur et: $\forall h \in E \setminus \{0\}, \mathrm{d}f_a(h) = D_h f(a)$.
3. Si $E = \mathbb{R}$. L'application f est différentiable en a si, et seulement, si f est dérivable en a.
   Auquel cas, $\forall h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = hf'(a)$.
4. Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a existent et on a $\forall h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$,

$$\mathrm{d}f_a(h) = D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Différentielle

On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U.
L'application $\mathrm{d}f : x \in U \mapsto df_x \in \mathcal{L}(E, F)$ s'appelle la différentielle de f sur U.

FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^k$

Définition

On dit que f est de classe :

- $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) sur U si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.
- $\mathcal{C}^\infty$ sur U si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est de $\mathcal{C}^k$ sur U.

La notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

Somme

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Composition par une application bilinéaire

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f : U \subset E \longrightarrow F, g : U \subset E \longrightarrow G$ et $B : F \times G \longrightarrow H$ bilinéaire. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $B(f, g)$ l'est aussi et

$$\frac{\partial B(f,g)}{\partial x_i} = B\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, g\right) + B\left(f, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

Propriété

Si $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{K})$, alors $gf \in \mathcal{C}^k(U, F)$. Si de plus g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^k$

Lien avec les composantes

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ssi ses fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U

Règle de la chaine

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ deux fonctions de $\mathcal{C}^k$ telles que $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de $\mathcal{C}^k$ et $\forall a \in U$

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))$$

avec $f_1, \cdots, f_p$ les fonctions coordonnées de f.

Formule d'intégration

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U d'extrémités $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$ alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) \,\mathrm{d}t$$

En particulier si U est un ouvert connexe par arcs alors f est constante si, et seulement si, $\mathrm{d}f = \tilde{0}$

Théorème de Schwarz

Soit $f \in C^2(U, F)$. Alors :

$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR D'ORDRE 2

Propriété

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Alors $\forall h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$ tel que $a + h \in U$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \circ\left(\|h\|^2\right).$$

APPLICATIONS AUX EXTRÉMUMS

Caractérisation de points critiques

Si $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. Alors

$$a \text{ est point critique de } f \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Extrémums en dimension 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a critique de f. On note $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.

1. Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local stricte en a.
2. Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local stricte en a.
3. Si $s^2 - rt > 0$ alors a est un point col ou selle de f
4. Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut pas conclure

MATRICE JACOBIENNE

Définition

On appelle matrice jacobienne relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ d'une application $f : U \subset E \longrightarrow F$ différentiable en $a \in U$ la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $\mathrm{J}_f(a) = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{d}f_a) \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Si $f_1, \cdots, f_p$ les coordonnées de f: $\mathrm{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

GRADIENT

E désigne un espace euclidien dont on note $(.|.)$ le produit scalaire

Gradient

Si $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur dans E noté $\nabla f(a)$ et appelé gradient de f en a vérifiant $\forall h \in E, \quad D_h f(a) = (\nabla f(a)|h)$
De plus, si $\mathcal{B} = (e1, \cdots, e_n)$ est une BON de E alors

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

CONTACT-INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS 1/2

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

PRODUIT SCALAIRE

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition

On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

1. φ est bilinéaire
2. φ est symétrique i.e. $\forall x, y \in E, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
3. φ est positive i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) \geqslant 0$
4. φ est définie i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

E est dit espace préhilbertien

Norme euclidienne

Soit E un espace préhilbertien.
L'application $\|.\| : x \in E \longmapsto \sqrt{<x|x>}$ est une norme sur E dite norme euclidienne

Identités et inégalités classiques

Soit E un préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz:** $\forall x, y \in E, \quad |<x|y>| \leqslant \|x\|.\|y\|$.
  Il y a égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.
- **Inégalité de Minkowski:** $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
  Il y a égalité ssi x et y sont positivement liés

ORTHOGONALITÉ

Définition

La famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite

- orthogonale si $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow <x_i, x_j> = 0$.
- orthonormale si $\forall i, j \in I, <x_i, x_j> = \delta_{ij}$.

Propriété

- Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
- Toute famille orthonormale est libre.
- Tout espace euclidien, non nul, admet une base orthonormale;
- Toute famille orthonormale d'un euclidien se complète en une BON.

Calcul avec une BON

E euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON sur E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, alors:

- $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k = <e_k, x>$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.
- $<x, y> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ et $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$
- $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = (\langle e_i, u(e_j) \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Existence de supplémentaire orthogonal

Si F un sev de dimension finie d'un préhilbertien E alors les espaces F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.

PROJECTEURS ORTHOGONAUX

Soit F un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien E tel que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E

Définition

On appelle projection orthogonale sur F la projection vectorielle p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Propriété

p_F est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$, $\mathrm{Im}p = F$ et $\mathrm{Ker}p = F^{\perp}$. De plus $\mathrm{id} - p$ projection orthogonale sur $F^{\perp}$

Propriété

Soit p un projecteur de E. Alors

$$\mathrm{Ker}p \perp \mathrm{Im}p \iff \mathrm{Ker}p = (\mathrm{Im}p)^{\perp} \iff \mathrm{Im}p = (\mathrm{Ker}p)^{\perp}$$

Tout projecteur vérifiant l'une des trois assertions est projecteur orthogonal

Propriété caractéristique

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On a équivalence entre :

1. p est un projecteur orthogonal
2. $\forall x, y \in E, \quad <p(x)|y> = <x|p(y)>$.
3. $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

La matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée est symétrique.

Expression du projeté

Si $B = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{j=1}^{p} <e_j, x> e_j$$

Exemple

Soit $D = \mathbf{Vect}(a)$ et $H = \mathbf{Vect}(a)^{\perp}$ avec $a \neq 0$. Alors

$$\forall x \in E, p_D(x) = \frac{<a|x>}{\|a\|^2} a \text{ et } p_H(x) = x - \frac{<a|x>}{\|a\|^2} a$$

Minimisation de distance

Pour tout $y \in F$, $\|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi, $y = p_F(x)$.
Autrement-dit $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

Algorithme de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Il existe une et une seule famille orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$

- $\mathbf{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \mathbf{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.
- $<\varepsilon_k, e_k> > 0$.

Cette famille est donnée par :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!], \quad \varepsilon_k = \frac{e_k - P_{k-1}(e_k)}{\|e_k - P_{k-1}(e_k)\|}$$

Avec P_i désigne le projecteur $\perp$ sur $\mathbf{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$

SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Soit F un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien E tel que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E

Définition

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie vectorielle s_F par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.
Si F est un hyperplan de E, on dit que s_F est la réflexion par rapport à F.

Propriété

Soient $a, b \in E$ tels que $\|a\| = \|b\|$ et $a \neq b$.
Il existe une réflexion et une seule qui échange a et b.

$H = \mathbf{Vect}(a - b)^{\perp}$

Propriété

s_F est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = id$, $\mathrm{Ker}(s - id) = F$ et $\mathrm{Ker}(s + id) = F^{\perp}$. De plus $-s_F = s_{F^{\perp}}$ et $s_F = 2p_F - id$

Expression du symétrique

Si $B = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de F alors

$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = 2\sum_{j=1}^{p} <e_j, x> e_j - x$$

Exemple

Soit $D = \mathbf{Vect}(a)$ et $H = D^{\perp}$ avec $a \neq 0$. Alors

$$\forall x \in E, \quad s_D(x) = 2\frac{<x|a>}{\|a\|^2} a - x$$

et

$$\forall x \in E, \quad s_H(x) = x - 2\frac{<x|a>}{\|a\|^2} a$$

Propriété caractéristique

Soit s une symétrie de E. On a équivalence entre:

1. s est une symétrie orthogonale
2. $\forall x, y \in E, \quad (s(x)|y) = (x|s(y))$.
3. $\forall x \in E, \quad \|s(x)\| = \|x\|$

La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.

Les symétries $\perp$ conservent le produit scalaire

$$\forall x, y \in E, \quad (s(x)|s(y)) = (x|y)$$

En particulier, les symétries orthogonales conservent la norme

$$\forall x \in E, \quad \|s(x)\| = \|x\|$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS 2/2

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

FAMILLE TOTALE

E un espace préhilbertien réel et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E

Inégalité de Bessel

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale. Alors $\forall x \in E$ la famille $(< e_n \mid x >)_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n \mid x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

Famille totale

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite totale si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E. Autrement-dit

$$\overline{\mathbf{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})} = E$$

Base hilbertienne

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite base hilbertienne si elle est à la fois orthonormale et totale

Propriété

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de E et P_n le projecteur orthogonal de E sur $\mathbf{Vect}\,(e_0,\cdots,e_n)$, alors $\forall x \in E,\quad P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Égalité de Parseval

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E. Alors pour tout $x \in E$ la famille $(< e_i \mid x >)_{i\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n \mid x\rangle^2 = \|x\|^2$.

ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

E un espace préhilbertien

Endomorphisme symétrique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est symétrique si:

$$\forall x, y \in E, \quad < u(x), y >=< x, u(y) >$$

$S(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de E

Stabilité- Image et noyau

Soit $u \in S(E)$ et F un sev de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u

Cas euclidien

Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$, alors $\operatorname{Im}(u) = (\operatorname{Ker} u)^\perp$

Propriété caractéristique

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une BON de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $u \in S(E) \iff \underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

Endomorphismes involutifs, idempotents

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. u est un projecteur $\perp$ ssi $u \in S(E)$ et $u^2 = u$;
2. u est une symétrie $\perp$ ssi $u \in S(E)$ et $u^2 = \mathrm{id}_E$.

Théorème spectral

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une BON.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale.

EXTRÉMUM SUR LA SPHÈRE

Extrémum sur la sphère

Soit $u \in S(E)$. Posons $\lambda_{\min} = \min(\operatorname{Sp}(u))$ et $\lambda_{\max} = \max(\operatorname{Sp}(u))$. Alors

- $\forall x \in E:\ \lambda_{\min}\|x\|^2 \leqslant < u(x), x > \leqslant \lambda_{\max}\|x\|^2$
- $\min\{< u(x), x >, \|x\| = 1\} = \lambda_{\min}$
- $\max\{< u(x), x >, \|x\| = 1\} = \lambda_{\max}$

ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

E désigne un euclidien de dimension $n \geqslant 1$

Endomorphisme orthogonal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est orthogonal si

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

$O(E)$, l'ensemble des automorphismes orthogonaux, est un groupe, appelé le groupe orthogonal de E.

Propriété

Si $u \in O(E)$, alors $\operatorname{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Propriété caractéristique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$;
2. $\forall x, y \in E,\ < u(x), u(y) >=< x, y >$;
3. u transforme toute BON de E une BON de E;
4. u transforme une BON de E une BON de E.

Matrices orthogonales

Une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

$O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble de matrices orthogonales, est un groupe, appelé groupe orthogonal d'ordre n.

Propriétés caractéristiques

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \cdots, C_n$ et de lignes $L_1, \cdots, L_n$. On a équivalence entre :

1. la matrice A est orthogonale
2. la famille $(C_1, \cdots, C_n)$ est orthonormale
3. la famille $(L_1, \cdots, L_n)$ est orthonormale.
4. A est la matrice de passage d'une BON à une BON

Propriété

- $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det A = \pm 1$.
- $O_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = -1\}$ n'est pas un groupe

Lien avec les matrices

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une BON de E. Alors

- $u \in O(E) \iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$
- $O_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $O(E)$;
- $O_n^+(\mathbb{R}) \simeq O^+(E) = \{u \in O(E); \det u = 1\}$;
- $O_n^-(\mathbb{R}) \simeq O^-(E) = \{u \in O(E); \det u = -1\}$.

APPLICATIONS AUX EXTREMA

Applications aux extrema

Soit $U \subset E$ un ouvert non vide, $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. $Hf(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice Hessienne de f en a. On suppose que f admet un point critique en a, alors:

1. Si $\operatorname{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors f admet un minimum local en a;
2. Si $\operatorname{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors f admet un maximum local en a;
3. Si $Hf(a)$ admet deux valeurs propres de signes opposés, alors a est un point col ou selle.

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES $\perp$

E désigne un plan euclidien orienté,

Réduction des endomorphismes $\perp$

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ avec $n \geqslant 2$. Il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note : $R_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$ et p, q, r sont des entiers naturels tels $p + q + 2r = n$ (si l'un de ces entiers est nul, les blocs de matrices correspondants n'existent pas).

Isométries positives en dim 3

Soit $f \in \mathcal{O}^+(E)$, alors il existe une BON directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f est dite la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ.

Comment déterminer les éléments de f

- Pour déterminer une telle base on prend u normé qui engendre $\operatorname{Ker}(f - id)$, v unitaire et orthogonal à u et $w = u \wedge v$;
- Pour déterminer $\cos\theta$, on utilise la trace de f;
- le signe de $\sin\theta$ est celui de $\operatorname{Det}(u, x, f(x))$ où x est un vecteur non colinéaire à u

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

Intégrales paramétrées

Définition. Résultat de cours. Résultat pratique. Astuce. Démarche. Exemple classique. Attention. Information

Convergence dominée pour les suites

Convergence dominée pour les suites

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est cpm;
- $f_n \xrightarrow[I]{\text{cvs}} f$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm sur I;
- il existe $\varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I\, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

Alors les applications f_n et f sont intégrables sur I, la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$

Convergence dominée pour les séries

Convergence dominée pour les séries

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est cpm et intégrable sur I;
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ cvs sur I de somme f cpm sur I;
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et on a: $\int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

Astuce

Si la domination dans le cas des séries n'est pas accessible vous pouvez utiliser le TCVD appliqué à la suite des sommes partielles.

Continuité par domination globale

Propriété

Soit $F : \left\{\begin{array}{l} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}\right.$ où $A \subset \mathbb{R}^n$ telle que:

- $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A;
- $\forall x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur I;
- Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $\forall x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et

$$F : x \in A \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est continue sur } A$$

φ ne dépend pas de x

Continuité par domination locale

Propriété

Soit $F : \left\{\begin{array}{l} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}\right.$ où $A \subset \mathbb{R}^n$ telle que:

- $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A;
- $\forall x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur I;
- Pour tout compact K contenu dans A, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable telle que

$$\forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $\forall x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et

$$F : x \in A \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est continue sur } A$$

φ ne dépend pas de x

Lorsque A intervalle de $\mathbb{R}$, on remplace K par $[a,b]$

Dans la troisième assertion, on peut remplacer K par A et obtenir une domination globale

Dérivation sous signe $\int$ - Classe $\mathcal{C}^1$

Dérivation sous le signe $\int$

Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction telle que:

- $\forall x \in J$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrable sur I;
- f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue par rapport à la première variable et cpm par rapport à la seconde
- Pour tout $[a,b]$ contenu dans J il existe $\varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{(Formule de Leibniz)}$$

φ ne dépend pas de x

Cas d'un segment

Soit $f : J \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $J \times [a,b]$.

Alors $F : x \in J \longmapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J

Dérivation sous signe $\int$ - Classe $\mathcal{C}^n$

Classe $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction admettant des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ tels que:

- $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall x \in J$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est cpm et intégrable sur I;
- $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ qui est continue par rapport à la première variable et cpm par rapport à la seconde
- Pour tout $[a,b] \subset J$, il existe $\varphi_n \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable telle que:

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_n(t)$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$$

φ_n ne dépend pas de x

Dérivation sous signe $\int$ - Classe $\mathcal{C}^\infty$

Classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction telle que:

- Pour tout $x \in J$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrable sur I;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde
- Pour tous $[a,b] \subset J$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable telle que:

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_n(t)$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in J, \quad F^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\mathrm{d}t$$

φ_n ne dépend pas de x

Gamma d'Euler

$x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Contact Information

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

Probabilités

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information.

Tribu

Tribu

Soit Ω un ensemble et T une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que T est une **tribu** de parties de Ω si :

- $\Omega \in \mathrm{T}$ et $\forall A \in \mathrm{T}$, on a $\overline{A} \in \mathrm{T}$
- Pour toute $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'éléments de T, on a $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathrm{T}$.

Le couple (Ω, T) s'appelle un **espace probabilisable**. Les éléments de T sont appelés des **événements** et on a:

- $\emptyset \in \mathrm{T}$ et $\forall A, B \in \mathrm{T}$, on a $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont dans T.
- Pour toute $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'éléments de T, on a $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathrm{T}$.

Système complet d'événements

Une famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est dite un système complet d'événements si

- $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset$
- $\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Probabilité

Soit (Ω, T) un espace probabilisable

Probabilité

On appelle probabilité toute application $\mathbb{P}$ de T dans $\mathbb{R}_+$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \sigma\text{-additivité}$$

Le triplet $(\Omega, \mathrm{T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé et on a:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Soit $A_0, \cdots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) \quad \text{Additivité finie}$$

- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{Sigma sous-additivité}$$

Événement négligeable, quasi-certain

- On dit qu'un événement A est négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit qu'un événement A est quasi-certain ou presque sûr si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Les théorèmes de probabilités

$(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

Continuité croissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

En particulier si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Continuité décroissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

En particulier si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Probabilité conditionnelle

Soit A un événement avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors l'application

$$\mathbb{P}_A : \begin{cases} T & \longrightarrow \quad \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto \quad \mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité sur (Ω, T) dite conditionnée à A

Fromule des probabilité composées

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite d'événements telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots A_{n-1}).$$

Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, la famille $(\mathbb{P}(B \cap A_i))_{i\in I}$ est sommable et $\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

Si de plus $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Soient $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

Univers au plus dénombrable

Univers au plus dénombrable

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable , $T = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur (Ω, T). Alors $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1.

Univers au plus dénombrable

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable. Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1 alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

De plus, celle-ci est déterminée par

$$\forall A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Cas particulier $\Omega = \mathbb{N}$

Une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est déterminée par le choix de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$

Indépendance

Indépendance d'événements

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements où I est au plus dénombrable.

- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements **deux à deux indépendants pour la probabilité** P si pour tout $i, j \in I$,

$$i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$$

- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants pour la probabilité** P si pour toute partie J finie de I, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Propriété

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements indépendants pour la probabilité P avec I est au plus dénombrable.
Si pour tout $i \in I$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ alors $(B_i)_{i\in I}$ est une suite d'événements indépendants pour la probabilité P.

Contact Information

Web : www.elamdaoui.com
Email : elamdaoui@gmail.com
Phone: 06 62 30 38 81

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES 1/2

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

$(\Omega, T, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Variable aléatoire discrète

On appelle **variable aléatoire** définie sur (Ω, T) toute application X de Ω dans un ensemble $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in X(\Omega), \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in T$$

Si de plus $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable, on dit que la variable est discrète

Loi d'une VARD

On appelle **loi de probabilité** de la VARD X (ou **distribution de** X) l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$$

$\mathbb{P}_X$ est bien déterminée par l'ensemble de couples $(x, \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$

Propriété

Soit X une VARD. Alors

1. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
2. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable de somme 1
3. Pour tout A sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'ensemble

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

est un événement de T que l'on notera $[X \in A]$. et

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} \mathbb{P}(X = x)$$

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle **fonction de répartition de** X l'application $\mathbb{F}_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

On a aussi $\mathbb{F}_X(x) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leqslant x}} \mathbb{P}(X = k)$

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{F}_X(x) \in [0; 1]$
2. $\mathbb{F}_X$ est croissante.
3. $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{F}_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathbb{F}_X(x) = 1$.
4. $\forall a \leqslant b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{F}_X(b) - \mathbb{F}_X(a)$
5. $\mathbb{F}_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$
6. $\mathbb{F}_X$ est continue à gauche en x si, et seulement si, $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Loi d'une VARD et fonction de répartition

Si $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ tel que les x_i sont rangés par ordre croissant alors pour tout $x \in I$ tel que $i - 1 \in I$ (on a donc $x_{i-1} < x_i$) on a

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{F}_X(x_i) - \mathbb{F}_X(x_{i-1})$$

MOMENTS

X est une variable aléatoire discrète

Espérance

On dit que X **admet une espérance** lorsque la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
On appelle alors **espérance de** X, le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$, on parle de variable centrée

Propriétés

- Si $X \geqslant 0$ et admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
  Si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ est quasi certain.
- Si X et Y admettent des espérances et $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
- Si Y admet une espérance et $|X| \leqslant Y$, alors X aussi.

Théorème du transfert

Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.Alors $g(X)$ admet une espérance ssi $(g(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
Au quel cas

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Moments d'ordre r

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X^r admet une espérance alors on dit que X admet un **moment d'ordre** r qui est le réel $m_r(X) = E(X^r)$.

Propriété

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre r alors X admet des moments d'ordre s pour tout $s \in [\![1; r]\!]$.

Variance

Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. On appelle **variance de** X le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

De plus lorsque $V(X)$ existe, on appelle **écart-type de** X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Formule de Huygens ou de Kœnig

Si X admet un moment d'ordre 2, alors:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriété

Si X est une VAR discrète admettant une variance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

LOIS DISCRÈTES USUELLES

Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0; 1]$. On dit qu'une VAR X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p **(notée $\mathcal{B}(p)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \; P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

et on a:$E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Loi binomiale (ou des tirages avec remise)

Soit $p \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que la VAR X suit la **loi binomiale de taille** n **et de paramètre** p **(notée $\mathcal{B}(n, p)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si :

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0; n]\!], \; P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

et on a:$E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme** $\mathcal{U}([\![1; n]\!])$ $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ si :

$$X(\Omega) = [\![1; n]\!], \forall k \in [\![1; n]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

et on a: $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Loi géométrique

Soit $p \in]0; 1[$. On dit qu'une VAR X suit **la loi géométrique de paramètre** p **(notée $\mathcal{G}(p)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

et on a: $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$

Loi sans mémoire (Concours Français)

Une variable X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors X est sans mémoire si, et seulement si, elle suit une loi géométrique

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une VAR X suit une **loi de Poisson (notée $\mathcal{P}(\lambda)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

et on a: $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Poisson et Binomiale

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0$.
Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

LOIS D'UN COUPLE DE VARD

X et Y désigneront deux variables **discrètes** définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P})$.

Définition

On appelle **loi du couple** (X, Y), ou encore **loi conjointe des** X **et** Y, l'ensemble des couples $((x,y), \mathbb{P}(X=x, Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ où

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$$

Propriété

Avec les notations précédentes, alors la famille $(\mathbb{P}(X=x, Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable de somme 1

Lois marginales

La loi de X est appelé la **première loi marginale du couple** (X, Y) et la loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple** (X, Y).

On peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe à l'aide des égalités

- $\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$
- $\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

Loi conditionnelle

Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle à** $[Y=y]$ **de** X l'ensemble des couples $(x, \mathbb{P}_{[Y=y]}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$.

$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$ on a :

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}(X=x) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

Indépendance

X et Y sont **indépendantes** si :$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Propriété

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. X et Y sont indépendantes
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $[X\leqslant x]$ et $[Y\leqslant y]$ sont indépendants
3. $\forall A, B\subset\mathbb{R}$, $[X\in A]$ et $[Y\in B]$ sont indépendants.

Indépendance héritée

Si X et Y sont indépendantes et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

LOI DE PROBABILITÉ

g désigne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et X, Y deux variables réelles **discrètes**.

Propriété

$Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.

Propriété

Soit $Z = g(X, Y)$. Alors, Pour tout $z\in Z(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(Z=z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$$

Loi d'une somme

$S = X+Y$ est une variable aléatoire réelle discrète, et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=s) &= \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=s}} \mathbb{P}(X=x, Y=y)\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ s-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=x, Y=s-x)\\ &= \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ s-y\in X(\Omega)}} \mathbb{P}(X=s-y, Y=y)\end{aligned}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=s) &= \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=s}} \mathbb{P}(X=x)\,P(Y=y)\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ s-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=x)\,P(Y=s-x)\\ &= \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ s-y\in X(\Omega)}} \mathbb{P}(X=s-y)\,P(Y=y)\end{aligned}$$

Stabilité des lois binomiales

Si X et Y sont deux VARD **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (m,p) et (n,p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(m+n,p)$.

Stabilité des lois de poisson

Si X et Y sont deux VAR **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Théorème de Transfert

La variable $Z = g(X,Y)$ a une espérance ssi la famille $(g(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas

$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

L'espérance d'une somme

Si $X_1, \cdots, X_n$ admettant toutes des espérances. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance: $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$

FONCTION GÉNÉRATRICE

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition

On définit sa fonction génératrice G_X par

$$\forall t\in[-1,1], \quad G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k$$

Fonctions génératrices usuelles

- Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$, alors
$$G_X(t) = 1-p+pt$$
- Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors
$$G_X(t) = (1-p+pt)^n$$
- Si X suit la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda>0$, alors
$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$
- Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$, alors
$$G_X(t) = \frac{tp}{1-qt}$$

Loi et fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice, alors

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Propriété

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. X admet une espérance
2. G_X est dérivable en 1.

Dans ce cas: $E(X) = G'_X(1)$

Propriété

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. X admet un moment d'ordre 2
2. G_X est deux fois dérivable en 1.

Dans ce cas: $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

Variables aléatoires à densités

: **Définition.** : **Résultat de cours.** : **Résultat pratique.** : **Astuce.** : **Démarche.** : **Exemple classique.** : **Attention.** : **Information**

Variable à densité

(Ω, T, P) est un espace probabilisé

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi à densité si:

- sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$
- F_X est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous-ensemble fini F.

On appelle la densité de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(t) = F'_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus F$ et $f_X(t) = 0$ pour $t \in F$

Propriétés caractéristiques de la densité

Soit f_X une densité d'une variable aléatoire réelle X.

1. f_X est à valeurs réelles positives
2. f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Règles de calcul

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

1. Pour tout x réel :
   (a) $P(X = x) = 0$
   (b) $P(X < x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
   (c) $P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - F(x)$
2. Pour tout intervalle I:$P(X \in I) = \int_I f(t)\,dt$

Somme de deux variables

Discrète + à Densité

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** dont les lois sont discrète pour X et à densité pour Y. Alors la loi de $S = X + Y$ est de fonction de répartition

$$F_S : s \longmapsto \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) . F_Y(s - x)$$

Somme de deux VAR à densité

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** admettant respectivement des densités f_X et f_Y. Alors la loi de $S = X + Y$ est à densité, de densité

$$f_S : s \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(s-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s-t) f_Y(t)\,\mathrm{d}t$$

Somme de deux variables à densités et positives

Si de plus X et Y sont à valeurs positives ou nulles, alors f_S est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(t) f_Y(s-t)\,\mathrm{d}t$$

et est nulle sur $\mathbb{R}^*_-$

Moments

Définition

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X une VAR à densité f.
On dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$, si X^r admet une espérance et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

Le moment d'ordre 1 est appelé l'espérance

Domination

Soit X et Y deux VAR .
Si Y admet une espérance et si $|X| \leqslant Y$ alors X admet une espérance

Propriété

Soient X et Y deux VAR admettant des espérances.

1. Pour tous réels a et b, $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
2. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
3. Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$
4. Si $X \geqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$
5. Inégalité triangulaire: $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$
6. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Théorème du transfert

Soient X une VAR de densité f et g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors $g(X)$ admet une espérance si, et seulement, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. Au quel cas

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,dt$$

Propriété

Si $r \in \mathbb{N}^*$ et X admet un moment d'ordre r, alors $\forall s \in [\![1, r]\!]$ la VAR X admet un moment d'ordre s

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel $\mathbb{V}(X) = E\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Théorème de Huygens Kœing

Une VAR X admet une variance si, et seulement, si X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$\mathbb{V}(X) = E\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriété

Soit X une variable à densité admettant une variance. Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Lois usuelles

Loi uniforme

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a; b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in]a; b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ et on a:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi gaussienne de paramètres

Soit μ un réel, et σ un réel strictement positif.
On dit que X est de **loi gaussienne de paramètres** (μ, σ^2) ou de **loi normale de paramètres** (μ, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ et on a

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ on parle de la loi normale centrée réduite

Loi gamma

Soit α et λ deux réels strictement positifs.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi Gamma de paramètre** (α, λ); et on note $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Et on a:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Loi exponentielle

Soit λ un réel **strictement positif**.
On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{]0,+\infty[}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Et on a:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Contact Information

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

VECTEURS DE VARIABLES ALÉATOIRES ET CONVEGENCES

: **Définition.** : **Résultat de cours.** : **Résultat pratique.** : **Astuce.** : **Démarche.** : **Exemple classique.** : **Attention.** : **Information**

INÉGALITÉS CLASSIQUES

Inégalité de Markov
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, T, P) positive et possédant une espérance $m = E(X)$, alors on a

$$\forall \lambda > 0 \quad \mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P})$ possédant un moment d'ordre 2, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Inégalité de Jensen
Si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application convexe telle que $Y = f(X)$ admet une espérance alors $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$

VECTEURS DE VARIABLES ALÉATOIRES

$X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles

Définition
On appelle vecteur aléatoire discret défini à partir des $X_1, \cdots, X_n$ la variable aléatoire discrète Z donnée par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

La loi de la variable Z est appelée loi conjointe des variables $X_1, \cdots, X_n$ tandis que les lois de $X_1, \cdots, X_n$ sont les lois marginales de Z.

Fonction de répartition d'un vecteur
La fonction de répartition de $(X_1, \cdots, X_n)$ est la fonction de n variables $F_{(X_1, \cdots, X_n)}$ définie par

$$F_{(X_1, \cdots, X_n)}(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n)$$

Espérance d'un vecteur
Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$ la variable X_i admet une espérance, on définit le vecteur espérance $E(X_1, \cdots, X_n)$ du vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$ par l'égalité

$$E(X_1, \cdots, X_n) = (E(X_1), \cdots, E(X_n))$$

Indépendance de n variables
On dit que $X_1, ..., X_n$ sont **indépendantes** lorsque pour tous $I_1, \cdots, I_n$ intervalles de de $\mathbb{R}$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i)$$

Indépendance héritée ou lemme de coalition
Si la famille $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n_k}$ est indépendante et si Soit $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ et $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n_k}$ une famille de VAR indépendantes. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $Y_i = f_i(X_{n_{i-1}+1}, \cdots, X_{n_i})$, alors $Y_1, \cdots, Y_k$ sont indépendantes

COVARIANCE

Inégalité de Cauchy-Schwarz
Si les variables X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2) E(Y^2)$$

Il y a égalité si et seulement si X est quasi nulle ou Y est une fonction quasi linéaire de X, c'est-à-dire, il existe un réel a tel que $P(Y = aX) = 1$.

Propriété
L'ensemble des variables admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace des variables admettant un moment d'ordre 1.

Définition
Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de** X **et de** Y le nombre réel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Si $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$, le coefficient de corrélation de X et de Y est :

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On dit que X et Y sont non corrélées si $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Propriété
Soit X et Y admettant un moment d'ordre 2 alors

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Propriété
Soit X, Y, Z des variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 et soit a et b deux réels

1. $\operatorname{cov}(X, X) = \mathrm{V}(X)$,
2. $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$,
3. $\operatorname{cov}(aX + bZ, Y) = a.\operatorname{cov}(X, Y) + b.\operatorname{cov}(Z, Y)$
4. $\operatorname{cov}(X, Y)^2 \leqslant \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)$
5. $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$
6. $\rho(X, Y) = 1 \Longleftrightarrow Y = \alpha X + \beta$ p.p pour un certain $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
7. $\rho(X, Y) = -1 \Longleftrightarrow Y = \alpha X + \beta$ p.p pour un certain $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$.

Variance d'une somme
Si $X_1, \cdots, X_n$ admettant de moments d'ordre 2, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et on a

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

En cas de l'indépendance: $\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i)$.

CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Convergence en probabilité
Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelles. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] = 0$$

On écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$

Propriété
On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers l'application f. On considère X une VAR et on définit des variables aléatoires réelles par

$$X_n = f_n(X), \quad Y = f(X)$$

Alors la suite (X_n) converge en probabilité en Y

Théorème central limite
Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, possédant une espérance $m = E(X)$ et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\mathcal{P}} m$$

CONVERGENCE EN LOI

Convergence en loi
Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelles. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X. On dit que (X_n) converge en loi vers X si en tout point x où F est continue

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x).$$

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Propriété
La convergence en probabilité $\Rightarrow$ la convergence en loi.

Cas de variables discrètes
Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires et Y une variable aléatoire. On suppose que $\forall n \in N \quad X_n(\Omega) \subset Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. La convergence en loi (X_n) vers Y équivaut à:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

Théorème central limite
Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, possédant une espérance $m = E(X)$ et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) > 0$. Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

ÉQUA-DIFF LINÉAIRE D'ORDRE 1

F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 1$, β une base de F. Si $u \in \mathcal{L}(F)$ et $x \in F$, on note $u.x$ plutôt que $u(x)$. Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ et $b \in \mathcal{C}(I, F)$.

Équation différentielle linéaire du 1er ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type : $(L) : x' = a.x + b$.
On appelle équation homogène associée à (L) l'équation: $(H) : x' = a.x$

Solution de l'équation différentielle linéaire

Une solution de l'équation différentielle linéaire (L) est une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$ telle que : $\forall t \in I,\ \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$

Régularité des solutions

Si φ est solution de (L), alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$.
Si a et b sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors φ sera de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz-linéaire

Le PC : $\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ où $(t_0, x_0) \in I \times F$ admet une et une seule solution.

Structures de S_H et de S_L

1. S_H est un sev de $\mathcal{C}^1(I, F)$ isomorphe à F, $\dim S_H = n$
2. S_L est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, F)$ de direction S_H

Wronskien

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de fonctions de I à valeurs dans F. Pour tout $t \in I$ la matrice $W(t) = \text{Mat}_\beta(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est appelée **matrice wronskienne** en t du système $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.
Le déterminant $w(t) = \det W(t)$ est appelé le **wronskien** en t du système $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$

Base de S_H

Soit $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de n éléments de S_H espace solution de $(H) : x' = a(t).x$. Alors

1. Pour tout $t \in I$, $\mathbf{rg}(H) = \mathbf{rg}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$
2. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes:
   (a) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_H;
   (b) $\forall t \in I,\ w(t) \neq 0$;
   (c) $\exists t_0 \in I\ /\ w(t_0) \neq 0$.

   Au quel cas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de (H)

Variation des constantes

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (H). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$. Alors

$$\varphi \text{ est solution de } (L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \varphi_i = b \Leftrightarrow \lambda' = W^{-1}B$$

Où $\lambda = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(\varphi)$ et $B = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(b)$

ÉQUA-DIFF LINÉAIRES À COEFS CONSTANTS

Les problèmes de Cauchy

a constante

1. $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times F$, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $t \longmapsto e^{(t-t_0)a} x_0$
2. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times F$, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est $t \longmapsto e^{(t-t_0)a}.x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\, ds$

Système différentiel

Aux applications a et b sont associées les applications $A : t \longmapsto M_n(\mathbb{K})$ et $B : t \longmapsto M_{n,1}(\mathbb{K})$, où, pour tout $t \in I$, $A(t)$ et $B(t)$ sont les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle système différentiel l'équation notée $X' = A(t)X + B(t)$ dont les inconnues X sont à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

A est diagonalisable ou trigonalisable

Si A est diagonalisable (resp trigonalisable), $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ diagonale (resp triangulaire supérieure). On effectue alors le changement de fonction inconnue défini par:

$$Y = P^{-1}X \iff X = PY$$

qui aboutit aux nouveaux systèmes différentiels:

$$(L_2) \quad : \quad Y' = TY + P^{-1}B(t)$$
$$(H_2) \quad : \quad Z' = TZ$$

On résout ces systèmes par la méthode de la remontée.

A n'est pas trigonalisable

Si A n'est pas trigonalisable, dans ce cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors on résout le système différentiel avec le corps de base $\mathbb{C}$ puis on cherche les solutions réelles.

ÉQUATION SCALAIRE D'ORDRE n

Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n définie sur I est toute équation $(E) :\ x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b$, avec $a_0, \cdots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, et d'inconnue $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction n fois dérivable. On a

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b \iff X' = AX + B$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Propriété

- L'ensemble S_0 des solutions sur I de l'équation homogène (E_0) : $x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$ est un sev de dimension n de l'espace $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble S des solutions sur I de l'équation complète (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction S_0.

ÉQU-DIFF LINÉAIRES D'ORDRE 2

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + a(t) \cdot x' + b(t) \cdot x = c(t) \\ x(t_0) = u_0,\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I,\ u_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

admet une et une seule solution.

Structure des solutions de (L) et de (H)

1. L'ensemble S_H des solutions de H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
2. L'ensemble S_L des solutions de (L) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction S_H.

Méthode de variation des constantes

Soit (h_1, h_2) une base de S_H : pour tout $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, il existe un unique couple (u_1, u_2) d'applications de $\mathcal{C}^l(I, \mathbb{K})$ tel que: $f = u_1.h_1 + u_2.h_2$. Alors

$$f \text{ solution de } (L) \iff \begin{cases} u_1'.h_1 + u_2'h_2 &= 0 \\ u_1'h_1' + u_2'h_2' &= c \end{cases}$$

ÉQU-DIFF LINÉAIRE D'ORDRE 2 (CONSTANT)

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et (H) l'équation différentielle

$$(H) : \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

d'équation caractéristique (EC) : $\quad ar^2 + br + c = 0$

Propriété

1. Si (EC) possède des racines distinctes r_1 et r_2 , les solutions de l'équation homogène (H) sont les fonctions définies par $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$
2. Si (EC) possède une racine double r, les solutions de l'équation homogène (H) sont les fonctions définies par $y(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Propriété

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si l'équation $ar^2 + br + c = 0$ possède des racines distinctes complexes conjuguées:

$$p + iq \text{ et } p - iq \qquad \text{avec } (p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Les solutions réelles sont les fonctions:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \quad (\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt))\, e^{pt} \end{cases} \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Propriété

L'équation $ay'' + by' + cy = P(t)e^{\alpha t}$ admet une solution particulière de la forme $y_p(t) = t^m Q(t) e^{\alpha t}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P

- Si α n'est pas solution de (EC), alors $m = 0$
- Si α est solution simple de (EC), alors $m = 1$
- Si α est solution double de (EC), alors $m = 2$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81

LES FONCTIONS HOLOMORPHES

: Définition. : Résultat de cours. : Résultat pratique. : Astuce. : Démarche. : Exemple classique. : Attention. : Information

CONTEXTE

- Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $\tilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+iy \in \Omega\}$.
- $\tilde{\Omega}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$
- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction;
- On note $\tilde{f}$ l'application définie sur $\tilde{\Omega}$ par $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$
- On pose $P : (x,y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Re e f(x+iy)$ et $Q : (x,y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Im m f(x+iy)$
- Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on note

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z - z_0| < r\}$$

FONCTIONS HOLOMORPHES

Définition

On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$. Auquel cas elle est notée $f'(z_0)$

Propriété

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ alors f est continue en z_0 .

Fonction holomorphe

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe, si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω et si la fonction $z \longmapsto f'(z)$ est continue sur Ω.
La fonction $z \longmapsto f'(z)$ est alors appelée la dérivée de f, notée f'.

Propriété

$\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. est une $\mathbb{C}$-algèbre

Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe sur Ω.
2. $\tilde{f}$ est différentiable de $\mathcal{C}^1$ sur Ω et vérifie l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = 0.$$

3. P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et elles vérifient les équations d'Euler

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Propriété

On suppose que Ω est ouvert connexe par arcs et f holomorphe sur Ω. Alors f est constante sur Ω si et seulement si $f' = 0$ sur Ω.

Holomorphie et séries entières

Soient $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\mathcal{D}(0, R)$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathcal{D}(0,R), f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} k! C_{n+k}^k a_{n+k} z^n$$

FONCTIONS ANALYTIQUES

Fonctions analytiques

f est dite analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $r > 0$ et une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tels que

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω

Propriété

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme une série entière dont le rayon de convergence $R > 0$ et $z_0 \in D(0, R)$. Alors la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} u^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$ et on a

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R - |z_0|)\ ,\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Propriété

On suppose que f est analytique sur Ω. Alors :

1. f est holomorphe sur Ω.
2. f est infiniment dérivable sur Ω.
3. f admet un développement de Taylor au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$.

$$\forall z_0 \in \Omega, \exists r > 0, \forall z \in \mathcal{D}(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Analyticité des fonctions holomorphes

Si f est holomorphe sur Ω, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tels que $\mathcal{D}(z_0, R) \subset \Omega$. Alors

1. $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta$ ne dépend pas du choix $r \in]0, R[$
2. La série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R, et on a l'égalité $\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

$$\forall 0 < r < R, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Propriété

1. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω et $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Alors $f + g, \lambda f$ et fg sont analytiques sur Ω. Si de plus, $\forall z \in \Omega, g(z) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est analytique sur Ω .
2. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit f et g deux fonctions analytiques sur Ω et V respectivement avec $f(\Omega) \subset V$. Alors $g \circ f$, est analytique sur Ω .

PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS

Définition

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $a \in \Omega$.

1. On dit que a est un zéro de f si $f(a) = 0$.
2. On dit que a est un zéro isolé de f si a est un zéro de f et $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall z \in \mathcal{D}(a, \varepsilon) \setminus \{a\}, f(z) \neq 0$.

Principe des zéros isolés

Si Ω est un ouvert connexe par arcs et f une fonction non identiquement nulle holomorphe sur Ω alors les zéros de f sont isolés.

Attention

Le résultat est faux si l'ouvert n'est pas connexe par arcs. En effet, l'application f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ par $f(z) = 0$ si $|z| < 1$ et $f(z) = 1$ si $|z| > 1$ est holomorphe, non nulle et tous ses zéros sont non isolés.

Corollaire

1. Soient Ω un ouvert connexe par arcs, f et g deux fonctions analytiques sur Ω . Si $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$ sur Ω .
2. Soient Ω un ouvert connexe par arcs, f , g et h trois fonctions analytiques sur Ω avec h non identiquement nulle sur Ω . Si $fh = gh$ sur Ω alors $f = g$ sur Ω .

C'est-à-dire $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre

Principe d'identification

Soient Ω un ouvert connexe par arcs, f et g holomorphes sur Ω.
Si $\exists (z_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ à valeurs deux à deux distinctes et convergente dans Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = g(z_n)$ alors $f = g$ sur Ω .

Principe d'identification

Soient Ω un ouvert connexe par arcs, $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls et de sommes respectives f et g . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.
2. Il existe une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de points deux à deux distincts qui tend vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = g(z_n)$.

PRINCIPE DE PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Théorème

Soit g une fonction holomorphr sur un ouvert non vide Ω_1; s'il existe un ouvert connexe par arcs Ω contenant Ω_1 et une fonction f holomorphe sur Ω et prolongeant g, alors f est unique

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81