MATH253 **Exercices** Yassine Ait Mohamed
Session d'hiver 2025
Université de Sherbrooke

Exercice 1 : Dans l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels $M_n(\mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles :

$$S_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = A\} \quad \text{et} \quad A_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$$

où A^T est la matrice transposée de la matrice A.

1. Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$.
3. **Application** : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer les matrices $S \in S_2$ et $A \in A_2$ telles que $M = S + A$.

Exercice 2 : Soit A la matrice diagonale, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) |\ AM = MA\}$

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale, alors $D \in \mathcal{C}(A)$.
3. Montrer que $\mathcal{C}(A) = \{D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) |\ D \text{ diagonale}\}$
   Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B = PAP^{-1}$, enfin $\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) |\ BM = MB\}$.
4. Montrer que $M \in \mathcal{C}(B)$ si, et seulement si, $P^{-1}MP \in \mathcal{C}(A)$.
5. En déduire que $\mathcal{C}(B) = \{PDP^{-1} |\ D \text{ diagonale}\}$

Exercice 3 : On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P) = (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\ker(\varphi - 5I)$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 4 : Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto (X+1)P' \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice P de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f.
7. Trouver une base de l'image de f.
8. Trouver une base du noyau de f.

Exercice 5 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E défini par

$$F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1.
Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x réel par $g(x) = x^2$, et soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par cet élément g de E.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Quelle est la forme générale des éléments de G ?
3. Déterminer $F \cap G$.
4. Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E. (Indication : on pourra remarquer que si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f = (f - f(1)g) + f(1)g$.)

Exercice 6 : Le but est de démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}$.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$.

Question 0: Montrer que u est une homothétie si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Première partie :

Dans cette partie A désigne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A. Enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de E.

1. Vérifier que la matrice A est inversible.
2. Déterminer $u(e_1)$ et $u(e_2)$.
   Dans la suite de cette partie $v_1 = e_1$ et $v_2 = u(e_1)$.
3. Déterminer les deux vecteurs v_1 et v_2.
4. Montrer que (v_1, v_2) est une base de E.
5. Déterminer deux nombres α et β tels que $u(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2$.
6. Déterminer la matrice de u dans la base (v_1, v_2).
7. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \text{ la famille } (x, u(x)) \text{ est liée.}$$

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
2. Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer que si la famille (x, y) est liée, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (b) Montrer que si la famille (x, y) est libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$. Indication : on pourra calculer $u(x + y)$ de deux façons.
3. En déduire que u est une homothétie.

Troisième partie :
Démonstration du résultat

Dans cette partie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice *non scalaire*. On désigne par u l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Vérifier l'existence d'un vecteur $e \in E$ tel que la famille $(e, u(e))$ soit une base de E.
   On pose $v_1 = e$ et $v_2 = u(e)$. $\mathcal{B}$ désigne la base (v_1, v_2).

2. Justifier l'existence de deux nombres $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $u(v_2) = av_1 + bv_2$.

3. Déterminer B la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

4. En déduire que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

5. Montrer que $b = \operatorname{tr} A$ et $a = -\det A$.

Exercice 7 : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. Soit $\mathcal{A} := \{x_1, \ldots, x_m\}$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que, si $\mathcal{A}$ est liée, alors $\varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)\}$ est liée.

2. Montrer que, si $\varphi(\mathcal{A})$ est libre, alors $\mathcal{A}$ est libre.

3. Montrer que, si $\mathcal{A}$ est libre et φ est injective, alors $\varphi(\mathcal{A})$ est libre.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose :

$$f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0$$

1. Montrer que f est un automorphisme.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
   En déduire une expression de f^n comme combinaison linéaire de f et Id_E.
   Pour $n \in \mathbb{Z}$?

3. Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

4. Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) = E$.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Soit $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to E$ l'application définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ (l'image de f).

3. Montrer que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si, et seulement si, f est injective.

4. Montrer que si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ et $\sum_{i=1}^{n} E_i$ sont isomorphes.

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie et soit u un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subseteq \operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Im} u^2 \subseteq \operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ si, et seulement si, $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$.

Exercice 11 : Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E de dimension $\dim(E) - 1$. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que toute forme linéaire non nulle est surjective.
2. Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E telles que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$. Monter qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.
3. Montrer que si $a \notin H$. Alors :
$$E = H \oplus \operatorname{Vect}(a).$$
4. Montrer que H est un hyperplan si, et seulement si, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Application:

a) Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan et en déterminer une équation et un supplémentaire.

b) Soient $n \geq 2$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et
$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}.$$
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - 1$.

Exercice 12 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ définie par :
$$f(e_1) = 0, \ f(e_2) = e_1, \ f(e_3) = e_1 + e_2$$

1. Calculer $f^2(e_i)$, puis $f^3(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$.
2. En déduire que $f^3 = 0$.

3. Une deuxième méthode pour calculer f^3 (calcul explicite) :

   (a) Calculer $f(x,y,z)$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$.

   (b) Calculer $f^2(x,y,z)$, pour $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. En déduire que $f^3 = 0$.

4. Soit g l'endomorphisme $g = f - \mathrm{Id}_E$.

   (a) Montrer que $g^3 + 3g^2 + 3g + \mathrm{Id}_E = 0$

   (b) En déduire que g est un isomorphisme et déterminer g^{-1} en fonction de g.

Exercice 13 : Soit E un espace vectoriel réel. On rappelle qu'un projecteur P de E est un endomorphisme de E qui vérifie l'égalité $P \circ P = P$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $p(y) = y$.

2. En déduire que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
   On dit que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

3. Montrer que si P est un projecteur de E, alors :

$$\mathrm{Im}(I_E - P) = \ker(P) \quad \text{et} \quad \ker(I_E - P) = \mathrm{Im}(P),$$

   où I_E est l'endomorphisme identité de E.

4. Démontrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\mathrm{I}_E - p$ est aussi un projecteur de E.

5. Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme u de E si et seulement si son noyau et son image sont stables par u (c'est-à-dire, $u(\ker(p)) \subset \ker(p)$ et $u(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$).

6. On suppose désormais que E est de dimension finie n.

   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle p a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   où r est le rang de p, I_r est la matrice identité d'ordre r et 0_{n-r} est la matrice nulle d'ordre $n-r$.

   (b) En déduire que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n (c'est-à-dire, $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$). On note :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit a un vecteur de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.

3. Soit $\varphi_a : C(f) \to E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$. Montrer que φ_a est un isomorphisme.

4. En déduire que $C(f) = \text{Vect}(\text{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.