Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Kierunek Informatyka

Algorytmy geometryczne

Laboratorium 3

Triangulacja

Kyrylo Iakymenko

Kraków, 19 listopada 2023

1 Wprowadzenie

Triangulacja wielokątów monotonicznych stanowi istotny obszar w dziedzinie geometrii obliczeniowej, który znajduje zastosowanie w różnorodnych dziedzinach, takich jak grafika komputerowa, analiza terenów, czy robotyka mobilna. Celem niniejszego sprawozdania jest zapoznanie się z algorytmami wyznaczania wielokątów monotonicznych, klasyfikacji wierzchołków wielokąta oraz algorytmem triangulacji wielokątów monotonicznych.

W ramach tego sprawozdania skupimy się na przedstawieniu kroków algorytmu triangulacji wielokątów monotonicznych oraz analizie wyników uzyskanych w trakcie badań. W dalszej części sprawozdania szczegółowo omówimy metodykę przeprowadzonych eksperymentów, przedstawimy uzyskane wyniki, a na koniec opiszemy wnioski naszych doświadczeń.

2 Krótki opis ćwiczenia

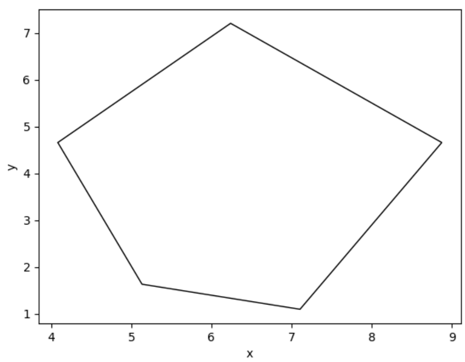
2.1 Wykorzystane algorytmy

W danym ćwiczeniu testujemy działanie następujących algorytmów:

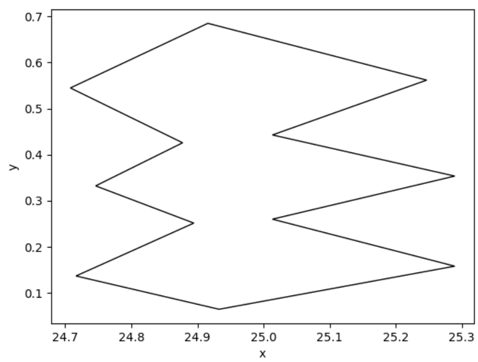
- Algorytm sprawdzenia monotoniczności wielokąta względem osi OY.
- Algorytm klasyfikacji wierzchołków wielokąta ze względu na położenie jego sąsiedzi.
- Algorytm triangulacji wielokąta monotonicznego.

2.2 Zbiory testowe

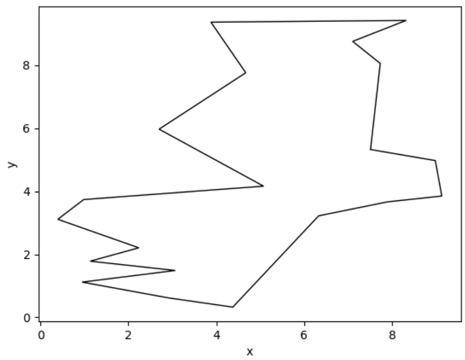
Na potrzeby ćwiczenia stworzyliśmy 6 wielokątów. Zostały wybrane odpowiednio, żeby przetestować działanie algorytmów w przypadkach zarówno lososwych jak i ekstremalnych.



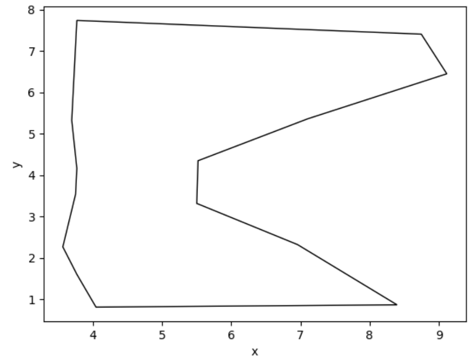
Rys. 1: Pięciokąt.



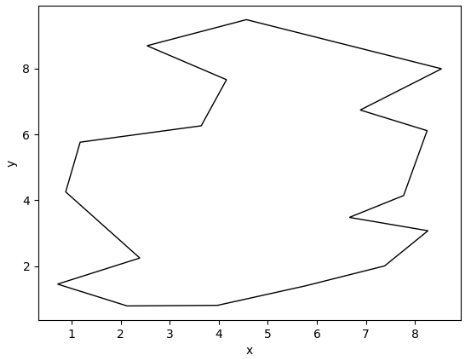
Rys. 2: Choinka.



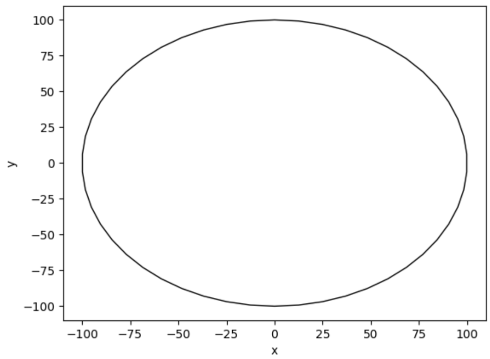
Rys. 3: Wielokąt 1.



Rys. 4: Wielokąt 2.



Rys. 5: Wielokąt 3.



Rys. 6: 50-kąt foremny.

3 Algorytmy

3.1 Algorytm triangulacji

Triangulacja wielokąta monotonicznego to proces podziału wielokąta na trójkąty, zachowując przy tym monotoniczność. Wielokąt y-monotoniczny to taki, którego prosta pozioma przecina go maksymalnie dwukrotnie. Algorytm triangulacji wielokąta monotonicznego można opisać w kilku krokach:

1. **Sortuj wierzchołki:** Posortuj malejąco wierzchołki wielokąta względem ich współrzędnej y. Dodaj dwa pierwsze wierzchołki do stosu.

2. **Podziel wierzchołki na lewy i prawy łańcuchy:** Za pomocą algorytmu działającego w $O(n)$ dzielimy wierzchołki na należące do prawego ido lewego łancuchów. Wyniki przechowujemy w słowniku.

3. **Główna pętla:** Dla każdego z kolenych wierzchołków od $i = 3$ do $i = n - 1$ sprawdzamy czy jest na tym samym łancuchu co poprzedni

   - jeżeli tak, dodajemy nasz punkt na stos sprawdzamy za pomocą wyznacznika czy prosta pomiędzy pierwszym a trzecim wierzchołkami na stosie zawiera się w wielokącie, jeśli tak to tworzymy prostą między nimi, następnie usuwamy drugi wierzchołek na stosie.
   - jeżeli nie, ususwamy pierwszy wierzchołek p ze stosu, tworzymy prostą między nim a wszystkimi wierzchołkami na stosie oprócz ostatniego, a następnie dodajemy na stos badany wierzchołek oraz wierzchołek poprzedzający p.

4. **Połacz wierzchołki na stosie:** W kroku ostatnim łączymy wierzchołki, które pozostały na stosie, oprócz pierwszego i ostatniego, z wierzchołkiem o najmniejszej współrzędnej y.

5. **Zwróć listę połaczonych par wierżchołków**

Przedstawiony algorytm jest efektywny i działa w czasie $O(n \log n)$, gdzie n to liczba wierzchołków wielokąta. Triangulacja wielokąta monotonicznego jest często stosowana w grafice komputerowej i w problemach geometrii obliczeniowej.

Struktura przechowująca wielokąt opiera się na posortowanej liście wierzchołków oraz słownika, za pomocą którego możemy szybko sprawdzić do którego z łancuchów należy rozpatrywany wierzchołek. Jest to potrzebne przy sprawdzaniu czy linia między punktami jest wewnątrz wielokąta.

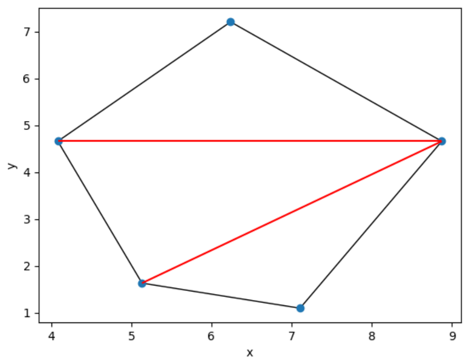
3.2 Algorytm sprawadzenia y-monotoniczności wielokąta

Nasz algorytm najpierw dzieli wierzchołki na 5 rodzajów:

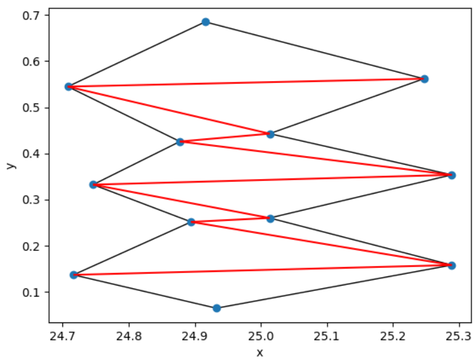
1. Początkowy gdy obaj jego sąsiedzi leżą poniżej i kąt wewnętrzny $< \pi$.
2. Końcowy, gdy obaj jego sąsiedzi leżą powyżej i kąt wewnętrzny $< \pi$.
3. Łączący, gdy obaj jego sąsiedzi leżą powyżej i kąt wewnętrzny $> \pi$.
4. Dzielący, gdy obaj jego sąsiedzi leżą poniżej i kąt wewnętrzny $> \pi$.
5. prawidłowy, gdy ma jednego sąsiada powyżej, drugiego - poniżej.

Robi to licząc wyznacznik i odpowiednio porównując współrzędne swoich sąsiadów. Wtedy sprawdzenie czy wielokąt jest $y-$monotoniczny sprowadza się do sprawdzenia, czy nasz wielokąt posiada wierzchołki łączące lub dzielące. Jeśli tak - nie jest monotoniczny, w przeciwnym wypadku - jest.

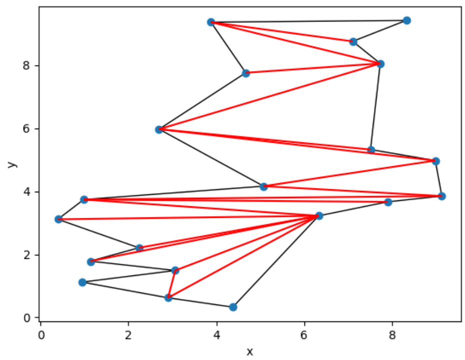
4 Wyniki triangulacji



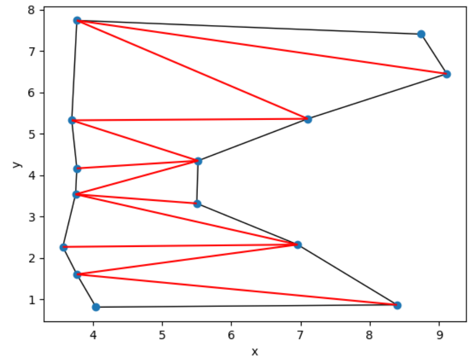
Rys. 7: Triangulacja pięciokąta.



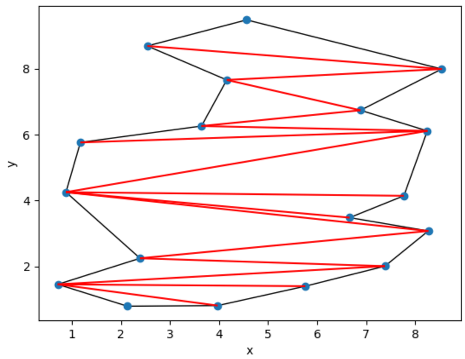
Rys. 8: Triangulacja choinki.



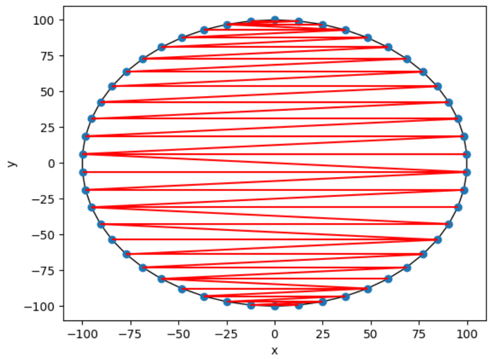
Rys. 9: Triangulacja wielokąta 1.



Rys. 10: Triangulacja wielokąta 2.



Rys. 11: Triangulacja wielokąta 3.



Rys. 12: Triangulacja 50-kąta foremnego.

5 Podsumowanie

Wszystkie zaimplementowane procedury i algorytmy zadziałały poprawnie dla testowanych wielokątów. Ponadto algorytm poprawnie nie generuje duplikatów krawędzi. Użyte struktury danych doskonale pasowały do zadanych problemów - pozwalały na szybki dostęp do potrzebnych elementów, nie wymagały dodatkowych konwersji.