Problématique de Couverture des Options

Yves Rakotondratsimba

February 17, 2021

Contents

1 Contexte

Dans toute la suite on considère une option vanilla européenne sur une action XX, un call de strike K par exemple. Pour simplifier on ne travaille qu'avec quatre instants croissants

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = T \tag{1}$$

où t_0 est l'instant courant, et t_3 est l'expiration de l'option. L'écart entre deux instants successifs t_{i+1} et t_1 est donné par

$$\delta_i = t_{i+1} - t_i, \qquad i = 0, \ldots, 2$$

Les cours de l'action aux instants (1) sont notés: S_0, S_1, S_2, S_3 de sorte qu'à l'instant présent seul le cours S_0 est connu et les autres peuvent être vus comme étant des variables aléatoires.

Le prix du call 'a l'instant t_0 est noté

$$C_0 = \mathcal{C}\big(S_0, T\big) \tag{2}$$

tandis qu'à la maturité $T = t_3$ on devrait avoir

$$C_3 = \mathcal{C}\big(S_3, 0\big) = \max\{S_3 - K; 0\}.. \tag{3}$$

Ainsi nous supposons ici qu'une fonction

$$(S,\tau)\in(0,\infty)^2\longmapsto\mathcal{C}\big(S,\tau\big) \tag{4}$$

a été identifiée et avec

$$\mathcal{C}\big(S,0\big)=\max\{S-K;0\}. \tag{5}$$

Dans le cadre de la couverture d'une position courte sur ce call, on est amené à détenir des proportions

$$\triangle_0,\quad \triangle_1,\quad \triangle_2 \tag{6}$$

de l'action XX à ces divers instants t_0, t_1, t_2. Dans l'approche classique les quantités dans (6) sont déterminées par le paramètre Grec "Delta" de l'option. Cependant dans un sens global on peut juste les concevoir comme étant les résultats d'actions de choix convenables de proportions du titre XX de sorte à satisfaire une stratégie donnée quant à l'issu de l'opération de la prise de position courte. Le point principal est que le PL réalisé entre les instants t_0 et t_3 soit maximal, du point de vu du vendeur de l'option.

On peut noter qu'en absence de couverture, et pour un call à l'unité, le PL réalisé entre les instants t_0 et t_3 est tout juste donné par

$$\mathbf{P\&L}_{0,3}\equiv C_0-C_3=C_0-\max\{S_3-K;0\} \tag{7}$$

et qui peut être fortement négatif suivant que le cours final S_3 se trouve être trop éloigné au dessus du strike K.

On peut remarquer que dans la pratique on ne travaille pas juste avec un seul call. Aussi il y a des frais de transaction et de financement qui interviennent.

2 Couverture pour quatre dates

2.1 Situation à l'instant t_0

A l'instant t_0 le vendeur a mis en vente un nombre N de calls au prix unitaire C_0 et achète un nombre

$$N_0$$

de titre XX sous-jacent. Il y a alors un emprunt ou prêt de cash $|B_0|$ avec

$$B_0=NC_0-\Psi(N,C_0)-\Big(N_0S_0+\Phi(N_0S_0)\Big) \tag{8}$$

et qui s'effectue au taux d'intérêt proportionnel post-compté (pour une maturité de trois mois par exemple) que l'on note r_0.

En réalité, au prochain èchéance il va avoir ainsi un intrêt à payer ou à recevoir donné par

$$\big\{r_0^{\star\star}\mathbb{I}\big(B_0<0\big)+r_0^{\star}\mathbb{I}\big(0\le B_0\big)\big\}\delta_0B_0 \tag{9}$$

de sorte que de manière générale le taux d'emprunnt $r_0^{\star\star}$ et le taux de prêt $r_0^{\star}$ satisfont $r_0^{\star}\le r_0^{\star\star}$. Pour simplifier nous supposons qu'il y a juste un taux r_0 de sorte que l'intérêt à payer ou à recevoir donné par la formule unique

$$r_0\delta_0B_0 \tag{10}$$

avec $r_0=r_0^{\star\star}$ si $B_0<0$ sinon $r_0=r_0^{\star}$ pour $0<B_0$.

Au lieu de (8), lorsque par exemple le vendeur apporte un fond initial $\widetilde{B}_0$ alors on est plutôt dans le cas

$$B_0=\widetilde{B}_0+NC_0-\Psi(N,C_0)-\Big(N_0S_0+\Phi(N_0S_0)\Big) \tag{11}$$

2.2 Situation à l'instant t_1

Arrivé à l'instant t_1, le marché dévoile le prix S_1 du sous-jacent et que l'on suppose dispose du marquage

$$C_1 = \mathcal{C}\big(S_1, T - t_1\big)$$

de la valeur du call (éventuellement selon un modèle). On suppose aussi en connaissance d'un nouveau taux d'intérêt r_1 toujours post-compté et proportionnel et à même maturité que r_0. La position pour le vendeur du call est déterminée par

$$\mathbf{P\&L}_{0,1} = \widetilde{B}_1 \equiv N(C_0 - C_1) + N_0(S_1 - S_0) + r_0\delta_0 B_0. \tag{12}$$

Cette expression donne le montant correspondant à une clôture potentielle de la position excluant le frais de transaction $\Phi(N_0 S_1)$ pour la vente des N_0 titres. En continuant le process, le vendeur du call se décide sur un nouveau nombre

$$N_1$$

de sous-jacents à détenir. Il en résulte que le niveau de cash à emprunter ou prêter devient

$$B_1 \equiv \widetilde{B}_1 + \Big\{(N_0 - N_1)S_1 - \Phi\big(|N_0 - N_1|S_1\big)\Big\}. \tag{13}$$

On peut remarquer que si $N_1 < N_0$ alors on devrait ceder $N_0 - N_1$ titres, qui de fait amène un bénéfice brut de $(N_0 - N_1)S_1$. On emprunte du cash si $B_1 < 0$ et on préte dans le cas où $0 < B_1$.

2.3 Situation à l'instant t_2

Arrivé à l'instant t_2, le marché dévoile le prix S_2 du sous-jacent et on utilise le marquage

$$C_2 = \mathcal{C}\big(S_2, T - t_2\big)$$

de la valeur du call. On suppose aussi disposer d'un taux d'intérêt r_2 toujours post-compté et proportionnel et à même maturité que r_1 La position pour le vendeur du call est donnée par

$$\mathbf{P\&L}_{1,2} = \widetilde{B}_2 \equiv N(C_1 - C_2) + N_1(S_2 - S_1) + r_1\delta_1 B_1. \tag{14}$$

C'est le montant qui correspond à une clôture potentielle de la position et excluant le frais de transaction $\Phi(N_1 S_2)$ pour la vente des N_1 titres détenus de l'instant t_1.
En continuant le process, le vendeur du call se décide sur un nombre

$$N_2$$

de sous-jacents à détenir. Il en résulte que le niveau de cash à emprunter ou prêter devient

$$B_2 \equiv \widetilde{B}_2 + \Big\{(N_1 - N_2)S_2 - \Phi\big(|N_1 - N_2|S_2\big)\Big\}. \tag{15}$$

2.4 Situation à l'instant t_3

Arrivé à l'instant t_3, le marché dévoile le prix S_3 du sous-jacent et que le marquage pour le call donne

$$C_3 = \mathcal{C}\big(S_3, 0\big) = \max\{S_3 - K; 0\} = (S_3 - K)\mathbb{I}\big(K < S_3\big)$$

puisqu'on arrive à la maturité.
La valeur MtM de la position pour la position sur le call est alors

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\&\mathbf{L}_{2,3} &= \widetilde{B}_3 \\
&= N(C_2 - C_3) + N_2(S_3 - S_2) + r_2\delta_2 B_2 \\
&\qquad -\Phi(N_2 S_3)\mathbb{I}\big(S_3 \leq K\big) \\
&\qquad\qquad -\Big\{\Phi(NK) + (N - N_2)S_3 + \Phi\big(|N - N_2|S_3\big)\Big\}\mathbb{I}\big(K < S_3\big).
\end{aligned} \tag{16}
$$

En effet si le call n'est pas excercé (c'est que $S_3 \leq K$) alors le vendeur a juste à vendre les N_2 titres qui restent et aussi payer les frais de transaction $\Phi(N_2 S_3)$ correspondant. Par contre si le call est excercé (c'est que $K < S_3$) alors le vendeur devrait acheter encore $N - N_2$ sous-jacent dont le frais correspondant est $\Phi\big(|N - N_2|S_3\big)$. Par ailleurs il met alors les N titres sous jacent pour le prix d'excercice K et devrait aussi payer le frais de $\Phi(NK)$.

Le P&L net entre t_0 et t_3 est

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\&\mathbf{L}_{0,3}^{(net)} &\equiv \mathbf{P}\&\mathbf{L}_{0,1} + \mathbf{P}\&\mathbf{L}_{1,2} + \mathbf{P}\&\mathbf{L}_{2,3} \\
&= N(C_0 - C_3) \\
&\qquad + N_0(S_1 - S_0) + N_1(S_2 - S_1) + N_2(S_3 - S_2) \\
&\qquad\quad + r_0\delta_0 B_0 + r_1\delta_0 B_1 + r_2\delta_0 B_2 \\
&\qquad\qquad -\Phi(N_2 S_3)\mathbb{I}\big(S_3 \leq K\big) \\
&\qquad\qquad\quad -\Big\{\Phi(NK) + (N - N_2)S_3 + \Phi\big(|N - N_2|S_3\big)\Big\}\mathbb{I}\big(K < S_3\big).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Pour mieux sentir les termes qui sont impliqués dans les parties cash B_0, B_1, B_2 on peut se rappeler que

$$
B_0 = NC_0 - \Psi(N, C_0) - \Big(N_0 S_0 + \Phi(N_0 S_0)\Big) \tag{18}
$$

$$
\widetilde{B}_1 \equiv N(C_0 - C_1) + N_0(S_1 - S_0) + r_0\delta_0 B_0, \tag{19}
$$

$$
B_1 = \widetilde{B}_1 + \Big\{(N_0 - N_1)S_1 - \Phi\big(|N_0 - N_1|S_1\big)\Big\} \tag{20}
$$

$$
\widetilde{B}_2 \equiv N(C_1 - C_2) + N_1(S_2 - S_1) + r_1\delta_1 B_1 \tag{21}
$$

et

$$
B_2 \equiv \widetilde{B}_2 + \Big\{(N_1 - N_2)S_2 - \Phi\big(|N_1 - N_2|S_2\big)\Big\}. \tag{22}
$$

On peut auusi ajouter le terme qui correspond à ce qui se passe à la maturité $t_3 = T$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}_3 &\equiv N(C_2 - C_3) + N_2(S_3 - S_2) + r_2\delta_2 B_2 \\
&\quad -\Phi(N_2 S_3)\mathbb{I}\big(S_3 \leq K\big) \\
&\qquad -\Big\{\Phi(NK) + (N - N_2)S_3 + \Phi\big((N - N_2)S_3\big)\Big\}\mathbb{I}\big(K < S_3\big).
\end{aligned} \tag{23}
$$

On peut remarquer que $\mathbf{P}\&\mathbf{L}_{0,3}^{(net)}$ est une fonction essentielle des variables suivantes

$$
S_0, S_1, S_2, S_3; C_0, C_1, C_2; r_0, r_1, r_2; N_0, N_1, N_2.
$$

c'est que en étant à l'instant présent t_0 on peut voir ce PL comme

$$
\mathbf{P}\&\mathbf{L}_{0,3}^{(net)}(\cdot) = \mathbf{P}\&\mathbf{L}_{0,3}^{(net)}\Big(S_0, S_1(\cdot), S_2(\cdot), S_3(\cdot); C_0, C_1(\cdot), C_2(\cdot); r_0, r_1(\cdot), r_2(\cdot); N_0, N_1, N_2\Big). \tag{24}
$$

Le terme $C_3(\cdot)$ n'est pas écrit puisque à la maturité $T = t_3$ on a $C_3(\cdot) = \max\big\{S_3(\cdot) - K; 0\big\}$. Par ailleurs si on utilise la formule de pricing de Black-Scholes alors on a

$$C_t(\cdot) = \mathcal{C}_{(bs)}\Big(S_t(\cdot), T-t, \sigma_t^{(imp)}(\cdot), K, y_t(\cdot)\Big) \tag{25}$$

c'est que $C_t(\cdot)$ est donné par une fonction déterministe de $S_t(\cdot)$, $\sigma_t^{(imp)}(\cdot)$ et $y_t(\cdot)$. On peut aussi utiliser une fonction déterminsite pour la volatilité implicite de sorte que

$$\sigma_t^{(imp)}(\cdot) = \textbf{volat\_imp}\Big(S_t(\cdot), T-t, K, y_t(\cdot), W_t(\cdot)\Big). \tag{26}$$

Noter que $y_t(\cdot)$ est le taux d'intérêt qui prévaut à l'instant t et pour une maturité de 3 mois. Aussi $W_t(\cdot)$ désigne le vecteur de paramètres qui est utilisé pour la fonction de volatilité pour l'instant t.
Dans le cadre d'une analyse, se basant sur les informations de l'instant présent t_0, pour simplifier le calculs on peut respectivement remplacer $y_t(\cdot)$ et $W_t(\cdot)$ par y_0 et $W = W_0$. En fait si on dispose de l'instant current t_0 alors on peut remplacer $y_t(\cdot)$ par le taux forward $y_{t|0}$, donc le taux qui prévaut à l'instant t tel que l'on voit de l'instant t_0.

En contraste en absence d'une stratégie de couverture, le PL faisant suite à une vente (nue) de N call est

$$\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(nude)} \equiv \Big(NC_0 - \Psi(N, C_0)\Big) - \Big\{N\Big(S_3 - K\Big) + \Phi(NK) + \Phi(NS_3)\Big\}\mathbb{I}\big(K < S_3\big). \tag{27}$$

Une problématique essentielle pour le vendeur du call, mettant en place une stratégie de couverture, est de choisir convenablement les quantités de titres sous-jacents

$$N_0, N_1, N_2 \in \{1, \dots, (N-1)\}$$

à détenir entre les divers instants de sorte à maximiser

$$E_{\mathbb{P}}\Big[\big(\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(net)}\big)(\cdot)\big|S_0\Big].$$

En réalité il est aussi d'usage de prendre en compte le risque, de sorte que l'on considére plutôt:

$$E_{\mathbb{P}}\Big[\big(\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(net)}\big)(\cdot)\big|S_0\Big] + \lambda V_{\mathbb{P}}\Big[\big(\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(net)}\big)(\cdot)\big|S_0\Big]$$

avec $\lambda > 0$.

Lorsque l'on se trouve à la maturité $T = t_3$, alors on aurait connaissance des S_0, S_1, S_2, S_3, C_0, C_1, C_2 de sorte que l'on peut juger des comparaisons entre $\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(net)}$ et $\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(nude)}$. C'est ce que l'on peut faire de mieux si on travaille avec des données réelles à postériori.

Au contraire ici nous allons faire plutôt une analyse à priori, de sorte que dans toute la suite de l'instant courant t_0 en supposant disposer de J scénarios d'évolution des cours de l'action

$$\Big(S_0, S_1[j], S_2[j], S_3[j]\Big), \qquad \text{avec probabilité } \mathbf{p}[j] \tag{28}$$

où $j \in \{1, \dots, J\}$, $0 < \mathbf{p}[j] < 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} \mathbf{p}[j] = 1$. Une analyse de la génération de ces scénarios sera faîte ci-dessous.

Pour le moment, nous sommes intérssés à déterminer les quantités de titres

$$N_0[j], \quad N_1[j], \quad N_2[j]$$

à détenir aux instants t_0, t_1 et t_2 afin de déterminer le PnL associé

$$\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(net)}[j].$$

En procédant de sorte, on ne répond pas à la problématique globale mentionnée ci-dessous. Cependant ici on reste en conformité avec la pratique des vendeurs de calls. En effet il est peu crédible pour le praticien d'aligner directement ses actions futures au vu d'une analyse de l'instant courant et basée sur un modèle (forcémment incorect). Plutôt il fait confiance à des ajustements progressifs, suivant l'écoulement du temps, malgré le coût que cela implique.

Revenant à notre objectif, il est important de remarquer, comme on procède assez souvent en pratique, que

- $N_0[j]$ est déterminé à l'instant t_0 en partant juste de la connaissance de S_0 et C_0;
- $N_1[j]$ est déterminé à l'instant t_1 en partant juste de la connaissance de S_0, $S_1[j]$, C_0, $C_1[j]$ et $N_0[j]$;
- $N_2[j]$ est déterminé à l'instant t_2 en partant de la connaissance de S_0, $S_1[j]$, $S_2[j]$, C_0, $C_1[j]$, $C_2[j]$, $N_0[j]$ et $N_1[j]$.

Aussi il est important de noter qu'en procédant de cette manière, on n'arrive pas à optimiser en un seul jet $\mathbf{P\&L}_{0,3}^{(net)}[j]$.

Détermination de $N_0[j]$

On est à l'instant t_0 où S_0 et C_0 sont supposés connus. L'idée pour déterminer $N_0[j]$ est de prendre la valeur qui permet de maximiser l'espérance de

$$\widetilde{B}_1(\cdot) \equiv N\big(C_0 - C_1(\cdot)\big) + N_0\big(S_1(\cdot) - S_0\big) + r_0\delta_0\Bigg(NC_0 - \Psi(N, C_0) - \Big(N_0S_0 + \Phi(N_0S_0)\Big)\Bigg) \quad (29)$$

au vu de l'information

$$\mathcal{I}_0 = \{S_0, C_0\}.$$

Il s'agit de trouver $N_0 \in \{1, \dots, (N-1)\}$ qui maximise la quantité

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\widetilde{B}_1(\cdot)\big|\mathcal{I}_0\Big] \equiv N\Bigg(C_0 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_1(\cdot)\big|\mathcal{I}_0\Big]\Bigg) + N_0\Bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_1(\cdot)\big|\mathcal{I}_0\Big] - S_0\Bigg) \\ + r_0\delta_0\Bigg(NC_0 - \Psi(N, C_0) - \Big(N_0S_0 + \Phi(N_0S_0)\Big)\Bigg) \quad (30)\end{aligned}$$

qui est une expression (non-linéaire) $G_0(N_0)$ dépendante de N_0. La maximisation est simple à faire car il suffit juste de comparer toutes les expressions $G_0(n)$ pour $n = 1, \dots, (N-1)$. Ainsi N_0 est le premier n qui réalise le maximum des $G_0(n)$.

On peut remarquer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_1(\cdot)\big|\mathcal{I}_0\Big] = \sum_{j=1}^{J} S_1[j]\mathbf{p}[j] \quad (31)$$

et

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_1(\cdot)\big|\mathcal{I}_0\Big] = \sum_{j=1}^{J} C_1[j]\mathbf{p}[j] \quad (32)$$

avec

$$C_1[j] = \mathcal{C}_{(bs)}\Big(S_1[j], T-t_1, \sigma_1^{(imp)}[j], K, y_1[j]\Big) \tag{33}$$

et

$$\sigma_1^{(imp)}[j] = \mathbf{volat\_imp}\Big(S_1[j], T-t_1, K, y_1[j]; W\Big) \tag{34}$$

$$C_0 = \mathcal{C}_{(bs)}\Big(S_0, T-t_0, \sigma_0^{(imp)}, K, y_0\Big) \tag{35}$$

et

$$\sigma_0^{(imp)} = \mathbf{volat\_imp}\Big(S_0, T-t_0, K, y_0; W\Big) \tag{36}$$

Détermination de $N_1[j]$

On est à l'instant t_1 où S_0, $S_1[j]$, C_0, $C_1[j]$ et ainsi que $N_0[j]$ sont supposés connus. L'idée pour déterminer $N_1[j]$ est de prendre la valeur qui permet de maximiser l'espérance de

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_2(\cdot) \equiv N\Big(C_1[j]-C_2(\cdot)\Big) + N_1\Big(S_2(\cdot)-S_1[j]\Big)\\ +r_1\delta_1\bigg(\widetilde{B}_1[j] + \Big\{(N_0-N_1)S_1[j] - \Phi\big(|N_0-N_1|S_1[j]\big)\Big\}\bigg)\end{aligned} \tag{37}$$

au vu de l'information

$$\mathcal{I}_1[j] = \{S_0, C_0, S_1[j], C_1[j]\}$$

alors il s'agit de trouver $N_1 \in \{1,\ldots,(N-1)\}$ qui maximise la quantité

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\widetilde{B}_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big] \equiv N\bigg(C_1[j]-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big]\bigg) + N_1\bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big]-S_1[j]\bigg)\\ +r_1\delta_1\bigg(\widetilde{B}_1[j] + (N_0-N_1)S_1[j] - \Phi\Big(|N_0-N_1|S_1[j]\Big)\bigg)\end{aligned} \tag{38}$$

qui est une expression (non-linéaire) $G_1(N_1)$ dépendante de N_1, sachant N_0 et $S_1[j]$ sont donnés. La maximisation est simple à faire car il suffit juste de comparer toutes les expressions $G_1(n)$ pour $n = 1,\ldots,(N-1)$.
Pour calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big]$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big]$ il apparaît que l'on a besoin de la loi conditionnelle $S_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]$, dont la mise en place est discutée dans la Section suivante. Alternativement nous allons juste prendre comme réalisations de $S_2(\cdot)$ les $S_2[l]$ avec $l=1,\ldots,J$ mais avec les masses de probabilité appropriées. Ainsi on va prendre

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big] = \sum_{l=1}^{J} S_2[l]\mathbf{p}_{1,j}[l] \tag{39}$$

et

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_2(\cdot)\big|\mathcal{I}_1[j]\Big] = \sum_{l=1}^{J} C_2[l]\mathbf{p}_{1,j}[l] \tag{40}$$

avec

$$\mathbf{p}_{1,j}[l] \equiv \frac{\exp\Big[-\kappa\big|S_2[l]-S_2[j]\big|\Big]}{\displaystyle\sum_{l=1}^{J}\exp\Big[-\kappa\big|S_2[l]-S_2[j]\big|\Big]} \tag{41}$$

où $\kappa > 0$ est une constante à choisir convenablement. Ensuite on a

$$C_2[l] = \mathcal{C}_{(bs)}\Big(S_2[l], T - t_2, \sigma_2^{(imp)}[l], K, y_2[j]\Big) \tag{42}$$

et

$$\sigma_2^{(imp)}[l] = \mathbf{volat\_imp}\Big(S_2[l], T - t_2, K, y_2[l]; W\Big). \tag{43}$$

Détermination de $N_2[j]$

On est à l'instant t_2 où S_0, $S_1[j]$, $S_2[j]$, C_0, $C_1[j]$, $C_2[j]$ et ainsi que $N_0[j]$ et $N_1[j]$ sont supposés connus. L'idée pour déterminer $N_2[j]$ est de prendre la valeur qui permet de maximiser l'espérance de

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_3(\cdot) \equiv\ & N\Big(C_2[j] - C_3(\cdot)\Big) + N_2\Big(S_3(\cdot) - S_2[j]\Big) \\
& + r_2\delta_2\bigg(\widetilde{B}_2[j] + \Big\{(N_1 - N_2)S_2[j] - \Phi\big(|N_1 - N_2|S_2[j]\big)\Big\}\bigg) \\
& - \Phi\big(N_2 S_3(\cdot)\big)\mathbb{I}\big(S_3(\cdot) < K\big) \\
& - \bigg(\Phi(NK) + (N - N_2)S_3(\cdot) + \Phi\Big((N - N_2)S_3(\cdot)\Big)\bigg)\mathbb{I}\big(K < S_3(\cdot)\big)
\end{aligned} \tag{44}$$

au vu de l'information

$$\mathcal{I}_2[j] = \{S_0, C_0, S_1[j], S_2[j], C_1[j], C_2[j]\}$$

alors il s'agit de trouver $N_2 \in \{1, \ldots, (N-1)\}$ qui maximise la quantité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\widetilde{B}_3(\cdot)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big] \equiv\ & N\bigg(C_2[j] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_3(\cdot)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big]\bigg) + N_2\bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_3(\cdot)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big] - S_2[j]\bigg) \\
& + r_2\delta_2\bigg(\widetilde{B}_2[j] + (N_1 - N_2)S_2[j] - \Phi\Big(|N_1 - N_2|S_2[j]\Big)\bigg) \\
& - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\Phi\big(N_2 S_3(\cdot)\big)\mathbb{I}\big(S_3(\cdot) < K\big)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big] \\
& - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigg[\bigg(\Phi(NK) + (N - N_2)S_3(\cdot) + \Phi\Big((N - N_2)S_3(\cdot)\Big)\bigg)\mathbb{I}\big(K < S_3(\cdot)\big)\Big|\mathcal{I}_2[j]\bigg]
\end{aligned} \tag{45}$$

qui est une expression (non-linéaire) dépendante $G_2(N_2)$ de N_2, sachant N_0, $N_1[j]$, $S_1[j]$ et $S_2[j]$ sont donnés. La maximisation est simple à faire car il suffit juste de comparer toutes les expressions $G_2(n)$ pour $n = 1, \ldots, (N-1)$.

L'expression en (45) nécessite le recours à la loi conditionnelle $S_3(\cdot)\big|\mathcal{I}_2[j]$, dont la mise en place est discutée dans la Section suivante. Alternativement nous allons juste prendre comme réalisations de $S_3(\cdot)$ les $S_3[l]$ avec $l = 1, \ldots, J$ mais avec les masses de probabilité appropriées. Ainsi en conséquence on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[S_3(\cdot)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big] = \sum_{l=1}^{J} S_3[l]\mathbf{p}_{2,j}[l] \tag{46}$$

et

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[C_3(\cdot)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big] = \sum_{l=1}^{J} C_3[l]\mathbf{p}_{2,j}[l] \tag{47}$$

avec

$$\mathbf{p}_{2,j}[l] \equiv \frac{\exp\Big[-\kappa\big|S_3[l]-S_3[j]\big|\Big]}{\displaystyle\sum_{l=1}^{J}\exp\Big[-\kappa\big|S_3[l]-S_3[j]\big|\Big]} \tag{48}$$

où $\kappa > 0$ est une constante à choisir convenablement. Ensuite on a

$$C_3[l] = \max\big\{S_3[l]-K;0\big\}. \tag{49}$$

D'autre-part il reste les espérances

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\Phi\big(N_2S_3(\cdot)\big)\mathbb{I}\big(S_3(\cdot)<K\big)\big|\mathcal{I}_2[j]\Big]\\ &\qquad\qquad = \sum_{l=1}^{J}\Phi\Big(N_2S_3[l]\Big)\mathbb{I}\big(S_3[l]<K\big)\mathbf{p}_{2,j}[l]\end{aligned} \tag{50}$$

et

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\bigg[\Big\{\Phi(NK)+(N-N_2)S_3(\cdot)+\Phi\Big((N-N_2)S_3(\cdot)\Big)\Big\}\mathbb{I}\big(K<S_3(\cdot)\big)\Big|\mathcal{I}_2[j]\bigg]\\ &= \sum_{l=1}^{J}\Big\{\Phi(NK)+(N-N_2)S_3[l]+\Phi\Big((N-N_2)S_3[l]\Big)\Big\}\mathbb{I}\Big(K<S_3[l]\Big)\mathbf{p}_{2,j}[l].\end{aligned} \tag{51}$$

3 Génération de scénarios des cours

Dans cette section, nous allons analyser comment on peut générer la distribution d'évolution

$$\mathcal{T}(j) \equiv \bigg(\Big(S_0, S_1[j], S_2[j], S_3[j]\Big);\mathbf{p}[j]\bigg), \qquad j=1,\ldots,J \tag{52}$$

comme déjà introduit dans (28). Pour celà on suppose disposer d'une série de données historiques

$$0 < S_0^\star, S_1^\star, \ldots, S_{N-1}^\star S_N^\star = S_0 \tag{53}$$

avec $N \geq 3$, et correspondant à des instants croissants $t_0^\star, t_1^\star, \ldots, t_{N-1}^\star t_N^\star = t_0$. Il est implicitement supposés que les intervalles de temps sont cohérents dans le sens $t_n^\star - t_{n-1}^\star = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$.

A partir de chaque suite

$$\Big(S_{j-1}^\star, S_j^\star, S_{j+1}^\star, S_{j+2}^\star\Big), \qquad j=1,\ldots,J=N-2$$

alors on peut définir les réalisations respectives des variables $S_1(\cdot), S_2(\cdot), S_3(\cdot)$

$$S_1[j] = S_0\frac{S_j^\star}{S_{j-1}^\star}, \qquad S_2[j] = S_0\frac{S_{j+1}^\star}{S_{j-1}^\star}, \qquad S_3[j] = S_0\frac{S_{j+2}^\star}{S_{j-1}^\star}. \tag{54}$$

Il reste ainsi à déterminer la probabilité $\mathbf{p}[j]$ pour chaque trajectoire $\mathcal{T}(j)$.

En absence d'information supplémentaires, on peut juste prendre la probabilité uniforme dans le sens que

$$\mathbf{p}^{(unif)}[j] = \frac{1}{J} \tag{55}$$

De manière générale la masse de probabilité $\mathbf{p}[j]$ devrait encapsuler une certaine vue pour l'occurence de trajectoire $\mathcal{T}(j)$.. Il arrive qu'il se dégage, pour les instants futurs t_1, t_2 et t_3, un certain consensus d'avoir une tendance

$$S_1^{(ref}, S_2^{(ref}, S_3^{(ref}.$$

Ainsi on peut définir une probabilité qui prend en compte ce consensus par

$$\mathbf{p}^{(view)}[j] = \frac{\exp\Big[-\kappa \sum_{t=1}^{3} \big|S_t[j] - S_t^{(ref)}\big|\Big]}{\sum_{j=1}^{J} \exp\Big[-\kappa \sum_{t=1}^{3} \big|S_t[j] - S_t^{(ref)}\big|\Big]} \tag{56}$$

où $\kappa > 0$ est une constante que l'on peut choisir de manière convenable.

Avec (55) et (56) nous avons discuter sur la génération de distribution

$$\Big(S_1(\cdot), S_2(\cdot), S_3(\cdot)\Big)\Big|S_0. \tag{57}$$

Comme nous avons vu dans la détermination de nombre de titres dans la couverture de call, on peut aussi être amené à déterminer une distribution pour

$$S_2(\cdot)\Big|S_0, S_1[j]. \tag{58}$$

On peut le faire en partant des données

$$S_1^\star, \ldots, S_{N-1}^\star S_N^\star = S_0, S_1[j]. \tag{59}$$

On devrait remarquer que dans ce cas, il y a $J = N$ scénarios pour $S_2(\cdot)$. De manière similaire, on peut aussi être amené à déterminer une distribution pour

$$S_3(\cdot)\Big|S_0, S_1[j], S_2[j]. \tag{60}$$

On peut le faire en partant des données

$$S_2^\star, \ldots, S_{N-1}^\star S_N^\star = S_0, S_1[j], S_2[j]. \tag{61}$$

4 Couverture dans le cadre de plusieurs dates

Au lieu de travailler avec quatre instants croissants, comme avnat, on considère maintenant le cas général avec M dates

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \ldots < t_{M-1} < t_M = T \tag{62}$$

où t_0 est l'instant courant, et $t_M = T$ est l'expiration de l'option pour un certain entier $M \geq 3$. On suppose toujours que l'écart entre deux instants successifs t_{i+1} et t_1 est donné par $\delta_i = t_{i+1} - t_i$ pour $i = 0, \ldots, (M-1)$.

En s'inspirant avec le cas $M=3$ alors on peut affirmer que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P\&L}^{(net)}_{0,M} &= \sum_{m=1}^{M} \mathbf{P\&L}^{(net)}_{m-1,m} \\
&= N(C_0 - C_M) \qquad\qquad C_M = \max\big\{S_M - K;0\big\} \\
&\quad +N_0(S_1 - S_0) + \ldots + N_{m-1}(S_m - S_{m-1}) + \ldots + N_{M-1}(S_M - S_{M-1}) \\
&\quad +r_0\delta_0 B_0 + \ldots + r_{m-1}\delta_{m-1}B_{m-1} + \ldots + r_{M-1}\delta_{M-1}B_{M-1} \\
&\quad -\Phi(N_{M-1}S_M)\mathbb{I}\big(S_M \leq K\big) \\
&\quad -\Big\{\Phi(NK) + (N - N_{M-1})S_M + \Phi\big((N - N_{M-1})S_M\big)\Big\}\mathbb{I}\big(K < S_M\big).
\end{aligned} \tag{63}$$

On peut se rappeler que

$$\mathbf{P\&L}^{(net)}_{m-1,m} \equiv \widetilde{B}_m = N\big(C_{m-1} - C_m\big) + N_{m-1}\big(S_m - S_{m-1}\big) + r_{m-1}\delta_{m-1}B_{m-1} \tag{64}$$

pour $m = 1, \ldots, (M-1)$ et que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P\&L}^{(net)}_{M-1,M} &\equiv \widetilde{B}_M \\
&= N\big(C_{M-1} - C_M\big) + N_{M-1}\big(S_M - S_{M-1}\big) + r_{M-1}\delta_{M-1}B_{M-1} \\
&\qquad -\Phi(N_{M-1}S_M)\mathbb{I}\big(S_M \leq K\big) \\
&\qquad -\Big\{\Phi(NK) + (N - N_{M-1})S_M + \Phi\big((N - N_{M-1})S_M\big)\Big\}\mathbb{I}\big(K < S_M\big)
\end{aligned} \tag{65}$$

Les termes $\widetilde{B}_m$ peuvent être atteinst de manière recursive en partant de B_0, $\widetilde{B}_1$, B_1, $\widetilde{B}_2$, ... En effet on a

$$B_0 = NC_0 - \Psi(N, C_0) - \Big(N_0S_0 + \Phi(N_0S_0)\Big) \tag{66}$$

$$\widetilde{B}_1 \equiv N(C_0 - C_1) + N_0(S_1 - S_0) + r_0\delta_0B_0, \tag{67}$$

$$B_1 = \widetilde{B}_1 + \Big\{(N_0 - N_1)S_1 - \Phi\big(|N_0 - N_1|S_1\big)\Big\} \tag{68}$$

$$\widetilde{B}_2 \equiv N(C_1 - C_2) + N_1(S_2 - S_1) + r_1\delta_1B_1 \tag{69}$$

et

$$B_2 \equiv \widetilde{B}_2 + \Big\{(N_1 - N_2)S_2 - \Phi\big(|N_1 - N_2|S_2\big)\Big\}. \tag{70}$$

Ainsi de manière générale pour $m = 1, \ldots, (M-1)$ une fois que $\widetilde{B}_m$ on peut définir B_m de sorte que

$$\widetilde{B}_m \equiv N(C_{m-1} - C_m) + N_{m-1}(S_m - S_{m-1}) + r_{m-1}\delta_{m-1}B_{m-1} \tag{71}$$

et

$$B_m = \widetilde{B}_m + \Big\{(N_{m-1} - N_m)S_m - \Phi\big(|N_{m-1} - N_m|S_m\big)\Big\}. \tag{72}$$

A partir de (63), il apparaît que le PL net, en adoptant la stratégie de couverture, peut être vu comme une fonction

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P\&L}^{(net)}_{0,M}(\cdot) = \\
&\quad F\Big(S_0, S_1(\cdot), \ldots, S_M(\cdot); C_0, C_1(\cdot), \ldots, C_{M-1}(\cdot); r_0, r_1(\cdot), \ldots, r_{M-1}(\cdot); N_0, N_1, \ldots, N_{M-1}\Big).
\end{aligned} \tag{73}$$

En se basant sur la courbe de taux de l'instant t_0 les taux futurs $r_1(\cdot),\ldots,r_{M-1}(\cdot)$ peuvent être remplacés par les taux forwards $r_{1|0},\ldots,r_{(M-1)|0}$. Aussi pour tout $m=1,\ldots,(M-1)$ on peut prendre

$$C_m(\cdot)=\mathcal{C}_{(bs)}\Big(S_m(\cdot),T-t_m,\sigma_m^{(imp)}(\cdot),K,y_{m|0}\Big) \tag{74}$$

c'est que $C_m(\cdot)$ est donné par une fonction déterministe de $S_m(\cdot)$, $\sigma_m^{(imp)}(\cdot)$ et $y_{m|0}$. On peut aussi utiliser une fonction déterminsite pour la volatilité implicite de sorte que

$$\sigma_m^{(imp)}(\cdot)=\textbf{volat\_imp}\Big(S_m(\cdot),T-t_m,K,y_{m|0},W\Big). \tag{75}$$

Noter que $y_{m|0}$ est le taux d'intérêt forward prévaut à l'instant t_m et pour une maturité de 3 mois. Aussi W désigne le vecteur de paramètres qui est utilisé pour la fonction de volatilité de l'instant t_0.
En mixant (74) et (75), alors $C_m(\cdot)$ devient juste une fonction déterministe seule de $S_m(\cdot)$ de sorte que

$$C_m(\cdot)=\mathcal{C}_{(bs)}\Bigg(S_m(\cdot),T-t_m,\textbf{volat\_imp}\Big(S_m(\cdot),T-t_m,K,y_{m|0},W\Big),K,y_{m|0}\Bigg). \tag{76}$$

Ainsi au lieu de (73), on est ramené à s'intéresser à

$$\min_{1\le N_0,\ldots,N_{M-1}\le(N-1)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[u\Big(\mathbf{PL}_{0,M}^{(net)}(\cdot)\Big)\Big] \tag{77}$$

où

$$\mathbf{PL}_{0,M}^{(net)}(\cdot)=G\Bigg(S_0,S_1(\cdot),\ldots,S_M(\cdot);r_0,r_{1|0},\ldots,r_{(M-1)|0};N_0,N_1,\ldots,N_{M-1}\Bigg). \tag{78}$$

et u est une fonction d'utilité.

On peut voir que (77) est une forme de problème de contrôle stochastique.

5 Questions

On considère une position courte sur un nombre de 10 000 calls sur une action XX de maturité restante 1 an. Le prix d'exercice de chaque call est 100, et que le prix spot est aussi 100.

Pour les frictions de marché, on applique des frais de transaction proportionnels de 0.5% pour le sous-jacent et de 0.2% pour les produits dérivés[1].

Il y a plusieurs manières de modéliser la volatilité implicite. Entre autres ici, nous retenons l'approche de Malz(1997):

$$\sigma^{(impl)}(S,\tau,K,r)=\sigma_0+\alpha_1\left\{\frac{1}{\sqrt{\tau}}\ln\Big(\frac{S\exp[r\tau]}{K}\Big)\right\}+\alpha_2\left\{\frac{1}{\sqrt{\tau}}\ln\Big(\frac{S\exp[r\tau]}{K}\Big)\right\}^2 \tag{79}$$

où σ_0, α_1 et α_2 sont des constantes. Dans (79), τ est la maturité restante à l'instant où le prix spot est S et le prix d'exercice est K. On peut remarquer que la volatilité implicite peut être assimilée à une fonction de deux variables que sont τ et $\eta=\ln\Big(\dfrac{S\exp[r\tau]}{K}\Big)$. Les constantes σ_0, α_1 et α_2 viennent de la calibration du modèle à partir des données passées. Dans la suite, on suppose que $\sigma_0=15\%$, $\alpha_1=0.58$ et $\alpha_2=-035$.

[1]c'est que $\Phi(x)=(0.5\%)*x$ et $\Psi(n,x)=(0.2\%)*n*x$. On prend aussi pour simplifier $r=2\%$.

Pour simplifier, on suppose l'existence d'un taux sans risque de crédit annuel de 2%, c'est que l'on va prendre $r_m = 2\%$ qu'importe l'instant t_m

On peut introduire des instants croissants $t_0, t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_{M-2}, t_{M-1}, t_M$ espacés de 1 mois donc de $\delta = \frac{1}{12}$ et que $M = 12$. Les cours de l'action à ses instants sont tout simplement notés par S_m.
Au lieu de générer des cours actions futures comme dcrit dans la Section 3, on adopte le modèle classique de Black-Scholes dont le code est donné dans la Sous-Section 5.1. On génère aini les $S_m[j]$ pour $m = 1, \ldots, M = 12$ et $J = 20$ nombre de trajectoires possibles des cours de l'action XX que l'on peut noter par $\Big(S_0, S[j,1], \ldots, S[j,m], \ldots, S[j,M]\Big)$, avec $j = 1, \ldots, J$ et que chaque trajectoire est attachée à une masse de probabilité $\frac{1}{J}$.

1. Déterminer les valeurs unitaires du call $C[j,m]$ pour tous les instants t_m, $m = 0, \ldots, M$ et pour toutes les J trajectoires des cours de l'action. On présente les résultats sous forme de matrice, en ligne les trajectoires et en colonnes les instants. Aussi pour la commodité de lecture les résultats sont arrondis à deux chiffres après la virgule.

2. Donner les scénarios de PnLs entre l'instant initial et la maturité si les calls ne sont pas couverts. On arrondit les résultatsà deux chiffres après la virgule.

3. Déterminer les Deltas (Black-Scholes) du call $Delta_m[j]$ pour tous les instants t_m, $m = 0, \ldots, M-1$ et pour toutes les J trajectoires des cours de l'action. On peut donner les résultats dans un tableau arrondis à trois chiffres après la virgule.

4. En utilisant la question précédente, donner les nombres de titres à détenir aux instants t_m, $m = 0, \ldots, (M-1)$ et pour les J trajectoires considérées.[2]

5. En se basant sur les considérations en Delta, déterminer les PnLs à la maturité $T = t_M$ pour toutes les J trajectoires considérées. Pour faciliter la comparison on peut mettre dans un même tableau en face en faceà la fois les PnLs non couverts et les PnLs uitilisant les couvertures et sur base des Deltas.

6. En utilisant les procédés exposés dans ce cours, donner les nombres de titres à détenir aux instants t_m, $m = 0, \ldots, (M-1)$ et pour les J trajectoires considérées.

7. En se basant sur les nombres de titres éterminés dans la question précédente, déterminer les PnLs à la maturité $T = t_M$ pour toutes les J trajectoires considérées. Pour faciliter la comparison on peut mettre dans un même tableau en face en faceà la fois les PnLs non couverts et les PnLs uitilisant les couvertures et sur base des Deltas.

8. Enfin donner un tableau qui permet de comparer les PnLs obtenus en utilisant l'approche en Delta ou l'approche directe par maximisation présentée dans ce cours.

5.1 Données

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

import numpy as np

spot_init=100
```

[2]si par exemple on aboutir à 10.42 ou 10.5 alors on arrondi à ce que $N = 10$. Tandis que pour 10.52 ou 10.59 on arrondi le nombre de titres à $N = 11$.

```
int_rate=2/100
volatility=15/100
maturity=1
nb_step=12

time_step=\
    maturity/nb_step

nb_path=20
nb_seed=20191008

#mat_drift=\
#    np.empty(
#            (nb_path,nb_step)
#            )

#mat_drift[:] =np.nan

drift_mod=\
    (int_rate-0.5*volatility**2)*time_step

mat_drift=\
    drift_mod*np.cumsum(
               np.ones((nb_path,nb_step)),
               axis=1
               )

volat_mod=\
    volatility*np.sqrt(time_step)

np.random.seed(nb_seed)

mat_shock=\
        np.random.standard_normal(
                (nb_path,nb_step)
                )

mat_shock_cum=\
        np.cumsum(
            mat_shock,
            axis=1
            )

mat_volatility=\
    volat_mod*mat_shock_cum

mat_log_spot=\
    mat_drift+mat_volatility
```

```
mat_spot_init=\
    spot_init*np.ones(
            (nb_path,nb_step)
            )

mat_spot_fut=\
        mat_spot_init*np.exp(mat_log_spot)

vec_spot_init=\
    spot_init*np.ones(
            (nb_path,1)
            )

mat_path_spot_fut=\
    np.concatenate(
            (
            vec_spot_init,
            np.round(mat_spot_fut,3)
            ),
            axis=1
            )
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```