

# Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

17 сентября 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Контакты: [Telegram](#), [GitHub](#)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Ряды</b>	<b>3</b>
1.1	Определение ряда и простейшие свойства . . . . .	3
1.2	Знакопостоянные ряды . . . . .	4
1.3	Знакопеременные ряды . . . . .	12
1.4	Функциональные последовательности и ряды . . . . .	17

# 1 Ряды

## 1.1 Определение ряда и простейшие свойства

**Определение.** Пара последовательностей

$$a_n, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$a_n$  называется общим членом ряда,  $S_n$  называется частичной суммой ряда.

**Определение.** Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а  $S$  - суммой ряда.

**Определение.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

**Теорема.** (Критерий Коши сходимости ряда)

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall k, m > N_{\varepsilon} : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* По критерию Коши для последовательности  $S_n$ :

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

**Теорема.** Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда  $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ряды

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

*Доказательство.* Очев.

□

**Теорема.** (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

## 1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$  или  $a_n \leq 0$ .

**Теорема.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad (*)$$

Если последовательность  $S_n$  ограничена, то этот ряд сходится.

*Доказательство.* Поскольку  $a_n > 0$ , то последовательность  $S_n$  возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у  $S_n$  существует предел, значит ряд (\*) сходится.  $\square$

**Теорема.** (Признак сравнения)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0) \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n \geq 0) \quad (2)$$

и  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.
2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

*Доказательство.* Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$$

$\square$

**Теорема.** (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* Выберем  $\varepsilon > 0$  такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы.  $\square$

## Примеры.

1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится по Критерию Коши.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

при  $\alpha < 1$  расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

сходится.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

**Упражнение.** Доказать, что при  $\alpha > 1$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится.

**Теорема.** (Признак Коши)

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

такой, что  $\forall n : a_n \geq 0$ .

1. Если  $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , то ряд  $(*)$  сходится.

2. Если  $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , что  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$ , то ряд  $(*)$  расходится.

*Доказательство.*

1.  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$  ряд  $(*)$  сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2.  $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$  ряд  $(*)$  расходится.

□

**Следствие.** (Признак Коши в предельной форме)

1. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

то ряд  $(*)$  сходится

2. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$

то ряд  $(*)$  расходится

*Доказательство.*

1.  $q < 1$ , значит, начиная с некоторого номера, выполнено:  $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$  следовательно, по утверждению теоремы ряд  $(*)$  сходится.

2.  $q > 1$ , значит, начиная с некоторого номера, выполнено:  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  следовательно, по утверждению теоремы ряд  $(*)$  расходится.

□

**Пример.** При  $q = 1$  ряд может как сходиться, так и расходиться:

1.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

2.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

**Теорема.** (Интегральный признак)

Пусть  $f(x)$  определена на  $[1, +\infty)$ , монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int_1^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.*  $f(x)$  монотонно убывает, значит  $\forall k \in \mathbb{N}$  и  $x \in [k, k+1]$  :  $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ . Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^N f(k) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

**Пример.** (Степенно-логарифмическая шкала)

1.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\beta x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\gamma (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$



значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

**Теорема.** (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (*)$$

1. Если  $\forall n \geq N$  существует последовательность  $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$ ,  $c_n > 0$  и существует  $\alpha > 0$  такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$

то ряд  $(*)$  сходится.

2. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд  $(*)$  расходится.

*Доказательство.*

1. Рассмотрим неравенства для  $n = N, N+1, \dots, N+k-1$ :

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

поскольку  $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$ , то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

значит

$$\sum_{m=1}^k a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

и ряд сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для  $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{array} \right.$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит расходится и ряд (\*).

□

**Примеры.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)

Возьмем  $c_n = 1$ :

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

то ряд (\*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

то ряд (\*) расходится.

## 2. (Признак Раабе)

Возьмем  $c_n = n$ :

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n + 1) \geq \alpha$$

Значит если

$$n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (\*) сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

Значит если

$$n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (\*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q > 1$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q < 1$$

то ряд (\*) расходится.

## 3. (Признак Бертрانا, без доказательства, знать формулировку)

Возьмем  $c_n = n \cdot \ln(n)$  Если

$$\ln n \cdot \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - 1\right) \leq 1$$

то ряд (\*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - 1\right)\right) = q > 1$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - 1\right)\right) = q < 1$$

то ряд (\*) расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)

Выводится из признака Бертрана.

*Формулировка появится позже.*

### 1.3 Знакопеременные ряды

**Определение.** Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

**Утверждение.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

*Доказательство.* По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^N a_n \right| \leq \sum_{n=k}^N |a_n| < \varepsilon$$

□

**Определение.** Биекция  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется перестановкой натурального ряда.

**Теорема.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки  $\sigma$  натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad (2)$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

*Доказательство.* Пусть  $a_n \geq 0$ . Рассмотрим

$$S_k^\sigma = \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)}$$

Пусть  $N = \max_{1 \leq n \leq k} \sigma(n)$ ,  $S_n \rightarrow S$ . Тогда

$$S_k^\sigma \leq S_N \Rightarrow S_k^\sigma \leq S \Rightarrow \exists S^\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^\sigma$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^\sigma \Rightarrow S = S^\sigma$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

**Определение.** Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty, \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ \hline a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ \hline a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1, \dots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме (\*).

**Утверждение.** Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m \quad (*)$$

сходится абсолютно и равен  $AB$ .

*Доказательство.* Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда (\*), которые имеют вид  $S_{N^2}$ :

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \rightarrow AB, \quad N \rightarrow \infty$$

Теперь перейдем к общему виду  $S_{N^2+M}$ , ( $1 \leq M \leq 2N$ ) и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \dots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \dots + |b_N|) \rightarrow 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит  $S_{N^2+M} \rightarrow AB$ .  $\square$

**Определение.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд  $(*)$  называется условно сходящимся.

**Утверждение.** Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0. \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad (2)$$

расходятся к  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно.

*Доказательство.* Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит оба ряда расходятся.  $\square$

**Теорема.** (Теорема Римана)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то  $\forall a \in \mathbb{R} \exists \sigma_a$  такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists \sigma_{\pm\infty}$  такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{\pm\infty}} = \pm\infty$$

$\exists \sigma$  такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

*Доказательство.* доказали картинками))))))

*доказательство появится немного позже*

□

**Теорема.** (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

( $\mathcal{A}$ ): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а  $b_n$  монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

( $\mathcal{D}$ ): Если существует  $M$  такая, что  $\forall N \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < M$$

и  $b_n$  монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.



*Доказательство.* Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^p a_n, \quad A_{k-1} = 0 \Rightarrow a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n &= \sum_{n=k}^m (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1} \cdot b_n = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \end{aligned}$$

(A):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

(D):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

□

**Следствие.** (Признак Лейбница)

Если  $a_n$  монотонно убывает и  $a_n \rightarrow 0$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad (*)$$

сходится

*Доказательство.*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд (\*) сходится.

□

## 1.4 Функциональные последовательности и ряды

**Определение.** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$  определены на  $A \subset \mathbb{R}$ . Если  $\forall x \in A$ :

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится на  $A$  поточечно.

### Примеры.

1.  $\forall x \in [0, 1]$

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

2.

$$\sin \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Определение.** Пусть  $\forall n : f_n(x)$  определены на  $A \subset \mathbb{R}$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что  $f_n(x)$  сходится равномерно к  $f(x)$  на  $A$  и пишут  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ .

### Примеры.

1. На  $[0, 1]$

$$x^n \not\Rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

поскольку  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N_\varepsilon \exists n > N_\varepsilon, \exists x_{\varepsilon_0} \in [0, 1)$  такой, что  $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$ .

2. на  $[0, \frac{1}{2}] : x^n \Rightarrow 0$ .

3.  $f_n = x^n - x^{2n}$  на  $[0, 1] : f_n \Rightarrow 0$ .

$$f'_n = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \quad f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4.  $f_n = \sin \frac{x}{n} \not\Rightarrow 0$  на  $\mathbb{R}$ , но  $\forall [a, b] : \sin \frac{x}{n} \Rightarrow 0$ .

**Теорема.** (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \sup_A |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

□

**Теорема.** (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ):

$$|f_k(x) - f_m(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ): Заметим, что есть поточечная сходимость  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , тогда

$$|f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon, n \rightarrow \infty$$

□

**Теорема.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности)

Пусть  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  на  $A$ . Если

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^\infty, c_n \geq 0, c_n \rightarrow 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n \xrightarrow{A} f$$

*Доказательство.* Очев по первому критерию.

□