Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

8 февраля 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа
Telegram: @fourkenz
GitHub: yakovlevki

Содержание

1 Неопределенный интеграл

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a,b). Если существует $F(x)$ определённая на (a,b) такая, что $F(x) \in \mathcal{D}(a,b)$ и $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной функцией для $f(x)$.

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a,b). Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ называется неопределённым интегралом $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

Теорема. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на (a,b). Тогда

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\},\ C = const,\ C \in \mathbb{R}$$

Доказательство. $(F(x)+C)' = f(x) + 0 = f(x)$.
Пусть $\varphi(x)$ - первообразная $f(x)$. Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа $\varphi(x) - F(x) = const$, ч.т.д. □

Утверждение. (Свойства неопределённого интеграла)

1. $\forall c \in \mathbb{R}:$
$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$
(При $c = 0$ множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2. $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. (Замена переменной)
Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a,b).
Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha,\beta)$ и $\varphi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$ Тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на (α,β).
$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть $u, v \in \mathcal{D}(a, b)$.

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$
$$\int (uv)'dx = \int uv'dx + \int u'vdx$$
$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

Замечание. Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

1.1 Таблица неопределенных интегралов

$\int (x^\alpha)dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + \begin{cases} C_1,\ x > 0 \\ C_2,\ x < 0 \end{cases}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$

1.2 Интегрирование рациональных дробей

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,\ P(x),\ Q(x) - \text{многочлены}$$
$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots (x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int (\tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{\aleph_{1i}}{(x-a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n} \frac{\aleph_{ni}}{(x-a_n)^{\alpha_{ni}}} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\beta_1} \frac{\rho_{1j}x + \omega_{1j}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_{1i}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\rho_{kj}x + \omega_{kj}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_{kj}}})dx$$

1.
$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a|, \; n=1 \\ \dfrac{(x-a)^{1-n}}{1-n}, \; n>1 \end{cases}$$

2.
$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^k}d(x+\frac{p}{2}) = \int \frac{(\alpha_1 t+\beta_1)dt}{(t^2+q_1^2)^k}$$

Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+q_1^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+q_1^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q_1^2)}{(t^2+q_1^2)^k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(t^2+q_1^2), \; k=1 \\ \dfrac{(t^2+q_1^2)^{1-k}}{2(1-k)}, \; k>1 \end{cases}$$

А второй на следующей лекции)