Математический анализ-1

Лектор: Подольский Владимир Евгеньевич

9 ноября 2024 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа tg: @fourkenz

Содержание

1 Элементы теории множеств

1.1 Условности и обозначения

Определение. Кванторами будем назать символы, заменяющие слова в выражениях.

Замечание. Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- $\forall$ - квантор всеобщности
- $\exists$ - квантор существования
- ! - квантор единственности
- Запись $A \Rightarrow B$ обозначает, что из высказывания A, следует высказывание B.
- Запись $A \Leftrightarrow B$ обозначает, что высказывание A равносильно высказыванию B.
- Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A, отрицанием такой записи будет $a \notin A$
- Если x - объект, а P - свойство, то запись $\{x : P(x)\}$ означает класс всех объектов обладающих свойством P.

Определение. Множество не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Определение. Множество A' является подмножеством множества A,
если $\forall a : a \in A' \Rightarrow a \in A$. Запись $A' \subset A$ обозначает, что A' является подмножеством A.

Определение. Для любого множества A выполнено:

1. $\varnothing \subset A$.
2. $A \subset A$.

Определение. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется собственным подмножеством множества B.

1.2 Операции над множествами

Определение. Множество $C = A \cup B$ называется объединением множеств A и B, если $\forall a : (a \in A \Rightarrow a \in C)$ и $\forall b : (b \in B \Rightarrow b \in C)$, а также $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ или $c \in B)$.

Определение. Множество $C = A \cap B$ называется пересечением множеств A и B, если $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ и $c \in B)$, а также $\forall c : (c \in A$ и $c \in B) \Rightarrow c \in C$.

Определение. Множество $C = A \setminus B$ называется разностью множеств A и B, если $\forall c : (c \in A$ и $c \notin B) \Rightarrow c \in C$, а также $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ и $c \notin B)$

Утверждение. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство. $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A$ или $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ или $(a \in B$ и $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ или $a \in B)$ и $(a \in A$ или $a \in C)$. $\square$

Утверждение. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство. $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A$ и $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \in B$ или $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \in B)$ или $(a \in A$ и $a \in C)$. $\square$

1.3 Декартово произведение множеств

Определение. Множество A называется одноэлементным, если $\exists\, a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\} = \varnothing$.

Определение. Множество A называется двуэлементным, если $\exists\, a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\}$ - одноэлементное.

Определение. Пусть $x \in X, y \in Y$. Упорядоченной парой называется двуэлементное множество $\{x, \{x, y\}\}$, упорядоченную пару обозначают (x, y).

Определение. Множество всех упорядоченных пар (x, y) называется декартовым произведением множеств X и Y, где $x \in X, y \in Y$. Декартово произведение обозначают $X \times Y$.

1.4 Отображения

Определение. Пусть X, Y - множества. Подмножество $f \subset X \times Y$ такое, что $\forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f : y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ называется отображением из X в Y, и обозначается $f : X \to Y$.

Замечание. Запись $(x, y) \in f$ часто заменяют на $y = f(x)$.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Множество $\{x : \exists\ (x, y) \in f\} = D_f$ называется областью определения функции f.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Множество $\{y : \exists\ (x, y) \in f\} = R_f$ называется областью значений функции f.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. f - инъекция $\Leftrightarrow \forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f :$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. f - сюръекция $\Leftrightarrow Y = R_f$

Замечание. Обычно используют определение f - сюръекция $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ $\exists\ x \in X : y = f(x)$.

Определение. f - биекция $\Leftrightarrow$ f - инъекция и f - сюръекция.

Определение. Пусть $f : X \to Y,\ X_1 \subset X$. Множество $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} =$ $f\big|_{X_1}$ называется ограничением f на X_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y,\ X_1 \subset X$. Множество $f(X_1) =$ $\{y \in Y : \exists\ x \in X_1 : (x, y) \in f\}$ называют образом множества X_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y,\ Y_1 \subset Y$. Множество $f^{-1}(Y_1) =$ $\{x \in X : \exists\ y \in Y_1 : (x, y) \in f\}$ называют полным прообразом множества Y_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Если $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$ - одноэлементное множество, то подмножество $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$ является отображением и называется обратным отображением к f. Если у отображения f существует обратное отображение f^{-1}, то оно называется обратимым.

Утверждение. f - обратимое $\Leftrightarrow$ f - биекция.

Замечание. Иногда $f : X \to Y$ записывают в виде y_x и называют индексацией y элементами x.

1.5 Операции над множествами (продолжение)

Утверждение. $\bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ или $\ldots$ или $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ и $\ldots$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$. $\square$

Утверждение. $\bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ и $\ldots$ и $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ или $\ldots$ или $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$. $\square$

2 Действительные числа

2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

Определение. (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве $\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!$ элемент называемый следующим и обозначающийся как $S(n)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ не более одного элемента $\mathbb{N}$, для которого n - следующий.

3. $\exists!$ элемент $\mathbb{N}$ не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается 1 и называется единицей.

4. (Аксиома индукции) Пусть $M \subset \mathbb{N}$, такое, что $1 \in M$ и $\forall m \in M$: $S(m) \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

Множество удовлетворяющее этим аксиомам называется множеством натуральных чисел и обозначается $\mathbb{N}$.

Определение. Рассмотрим множество X. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ биекция $\varphi : X \to \{1, \ldots n\}$, то X называется n-элементным, или говорят, что количество элементов в X равно n. Тот факт что множество X - n-элементное обозначается как $|X| = n$ или $cardX = n$.

Замечание. По определению считаем, что $card(\varnothing) = 0$.

Определение. Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множетсва называются бесконечными.

2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

Определение. $R \subset X \times Y$ называется отношением между элементами X и Y. Обозначают xRy, если $(x, y) \in R$.

Определение. Отношение R называется отношением порядка, если $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ выполнено:

1. xRy или yRx.

2. $(xRy$ и $yRx) \Rightarrow x = y$.

3. $(xRy$ и $yRz) \Rightarrow xRz$.

Такое отношение обозначают $\leq$.

Теорема. $\exists!$ отношение порядка на $\mathbb{N}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$. (Можно использовать на экзамене без доказательства)

Теорема. (Принцип наименьшего элемента)
$M \subset \mathbb{N}, M \neq \varnothing$ имеет наименьшей элемент, т.е. $\exists n_{min} \in M, \forall n \in M : n_{min} \leq n$.

Доказательство. Предположим, что в M нет минимального элемента.
База: если $1 \in M$, то $n_{min} = 1 \Rightarrow 1 \notin M \Rightarrow 1 \in \mathbb{N} \setminus M$.
Шаг: $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N} \setminus M$, тогда по аксиоме индукции $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \varnothing$ - противоречие. □

2.3 Арифметические операции

Определение. Рассмотрим $A, B, card(A) = n, card(B) = k, n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда число $card(A \cup B)$ называется суммой n и k и обозначается $card(A \cup B) = n + k$.

Замечание. Естественно выполняется $n + k = k + n$ (коммутативность) и $(n + k) + m = n + (k + m)$ (ассоциативность).

Замечание. $n + 0 = 0 + n = n$, т.к. $cardA = card(A \cup \varnothing)$.

Замечание. $A \leftrightarrow \{1, \dots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \dots, k\}$. Возьмем
$card(A \cup B) = \{1, \dots, n\} \cup \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots)}_{k}\}$,

(где $\{1, \dots, k\} \leftrightarrow \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots)}_{k}\})$
Из тех же сообжажений получаем, что $S(n) = n + 1$.

Определение. $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} n = nk$ называется произведением n на k.

Замечание. $nk = \underbrace{(n + n + \dots + n)}_{k}$.

Замечание. Выполнены:

- $nk = kn$ (коммутативность)
- $n(km) = (nk)m$ (ассоциативность)
- $k(n + m) = kn + km$ (дистрибутивность)

- Если $k \le n$, то $k+m \le n+m$ и если $k \le m$, то $kn \le mn$

Определение. Если $n+k=m$, то $n=m-k$ называется разностью m и k, $k=m-n$ называется разностью m и n.

Замечание. $m-0=m$, $m+0=m$, $m-m=0$.

Определение. $nk=m, \frac{m}{n}=k, \frac{m}{k}=n$.

2.4 Целые числа

Определение. Введем набор символов $-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1\}$. Множество символов $-\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$ называются целыми числами и обозначаются $\mathbb{Z}$.

Замечание. Принимаем выполнеными следующие свойства:

1. $k+(-n)=\begin{cases} k-n, \text{если } k \ge n, \\ -(n-k), \text{если } k < n. \end{cases}$.
   $(-k)+(-n)=-(k+n)$
2. $k \cdot 0=(-k)\cdot 0=0$,
   $(-k)\cdot n=(-kn)$,
   $(-k)(-n)=kn$.
3. $(\pm k)((\pm n)+(\pm m))=(\pm k)(\pm n)+(\pm k)(\pm m)$.
4. $\forall k:(-k)\le 0$,
   $(-k)\le(-n)$, если $n \le k$.
5. $\forall (\pm k),(\pm n),(\pm m)\in\mathbb{Z}$, если $(\pm k)\le(\pm n)$, то $(\pm k)+(\pm m)\le(\pm n)+(\pm m)$.
6. $\forall (\pm n),(\pm k)\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}$, если $(\pm n)\le(\pm k)$, то $(\pm n)m\le(\pm k)m$.

Далее пишем $-k$ вместо $(-k)$.
$\forall k,n\in\mathbb{Z}\ \exists(k-n)=k+(-n)$.

2.5 Рациональные числа

Определение. Множество $\mathbb{Q}=(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

а также введено отношение порядка:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$$

Свойства операций ($a, b, c \in \mathbb{Q}$):

(1) $a + b = b + a$

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(3) $\exists!\ 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$

(4) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$

(5) $ab = ba$

(6) $a(bc) = (ab)c$

(7) $\exists!\ 1 \in \mathbb{Q}\ \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(8) $\forall a \neq 0\ \exists!\ a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

(9) $a(b + c) = ab + ac$

(10) $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ a \leq b$ или $b \leq a$

(11) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$

(12) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(13) $\forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(14) $\forall c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

Определение. Множество X с операциями $(\cdot, +)$ и отношением порядка $\leq$ называется упорядоченным полем.

Замечание. $\mathbb{Q}$ - упорядоченное поле.

Определение. Упорядоченное поле X называется архимедовым, если
(15) $\forall a \in X : \exists\ n \in \mathbb{N} : a \leq n$.

Замечание. $\mathbb{Q}$ - архимедово поле.

Замечание. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$.

Замечание. $\forall m \in \mathbb{Z}$ число $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ можно отождествить с m.

2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

Определение. (Аксиома полноты)
(16) $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b \ \exists \ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$.

Пример. Аксиома полноты не выполняется в $\mathbb{Q}$.
$A = \{a \leq 0$ или $a > 0 : a^2 < 2\}$, $B = \{b > a : b^2 > 2\}$,
но $\nexists \frac{m}{n}, \frac{m^2}{n^2} = 2$

2.8 Модели действительных чисел

2.8.1 Модель бесконечных десятичных дробей

Определение. Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \to X$ называется последовательностью элементов X.

Определение. Выражение вида $\pm a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечной десятичной дробью, если $a_0 \in \mathbb{N}$ или $a_0 = 0$ и $\forall i \in \mathbb{N}$ $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Определение. Введем отношение порядка $\leq$ на множестве всех бесконечных дробей следующим образом:

1. Если $a_0 \leq 0$, $b_0 > 0$, то $a \leq b$.

2. Если $a_0, b_0 \geq 0$, то $a \leq b$

   - если $a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0$, $a_1 < b_1$ или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, или ... или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n < b_n \ldots$
   - если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n \neq 9, b_n = a_n + 1$. $a_{n+k} = 9$, $b_{n+k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, т.е $a = \overline{a_0 a_1 \ldots a_n (9)}$, а $b = \overline{b_0 b_1 \ldots b_n (0)}$.
     (в числе a начиная с a_{n+1} все a_i равны 9, а в числе b начиная с b_{n+1} все b_i равны 0), то $a = b$.

3. Если $a_0, b_0 < 0$, то $a < b$, если $-b < -a$ (случай 3 сведен к случаю 2)

Теорема. Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка ($\leq$) удовлетворяет аксиоме полноты.

Доказательство. Пусть $A, B \subset \{$множество бесконечных десятичных дробей$\}$ и $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$.

1. $a < 0, b \geq 0$, тогда $c = 0$.

2. $a > 0, b > 0$
   Пусть
   $\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0 b_1} b_2 \dots \in B\}$,
   $\vdots$
   Возьмем $\overline{b} = \overline{b_0 b_1 b_2 \dots b_n \dots} \in B$, тогда
   $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \overline{b} \leq b$.

3. $a < 0, b < 0$ строим число по аналогии с пунктом 2.

$\square$

2.8.2 Сечения $\mathbb{Q}$

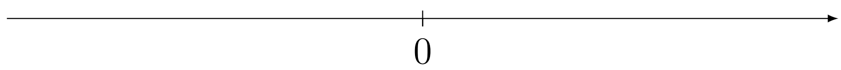
Определение. (Дедекиндовы сечения)
Пусть $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{Q}$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B : a \leq b$ и в B не существует минимального элемента, тогда (A, B) - пара сечений $\mathbb{Q}$.

Теорема. На множестве всех пар сечений $\{(A, B)\}$ можно ввести операции $(+), (\cdot)$ и отношение $(\leq)$, так что будут выполняться $(1) - (16)$.

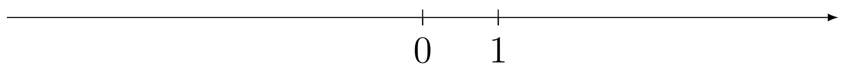
Доказательство. Без доказательства. $\square$

2.8.3 Геометрическая модель числовой прямой

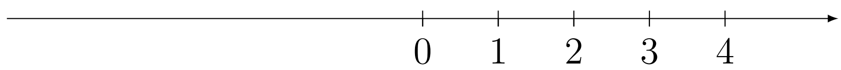
Выбираем точку, называем ее 0



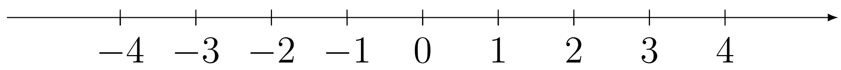
затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



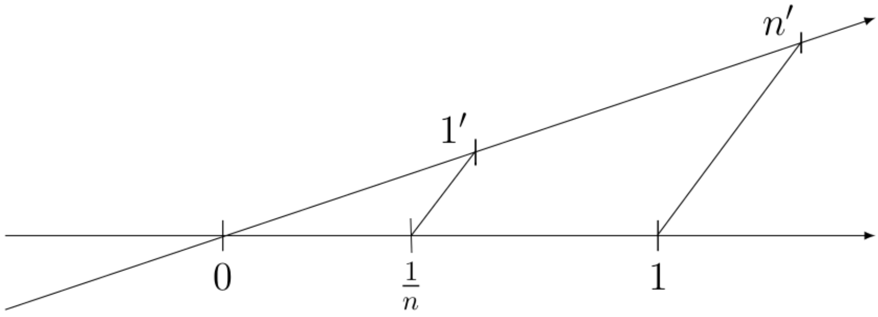
затем вводим сложение и получаем $2, 3, 4$, и т.д. (натуральный ряд)



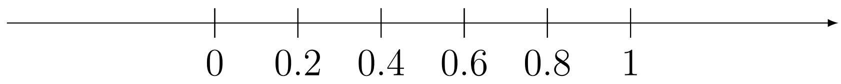
затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



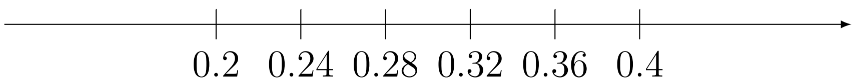
Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее $1'$ и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через n' и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через $1'$ проходит через $\frac{1}{n}$ (по теореме Фаллеса)



таким образом складывая m раз $\frac{1}{n}$, получим любое рациональное число $\frac{m}{n}$.
Построим бесконечную десятичную дробь, например $0,37152\ldots$.
Разобьем отрезок:



$0,37152\ldots$ находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:



$0,37152\ldots$ находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д. Получаем последовательность вложеных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.
Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняеются (1)-(16).

2.9 Принципы полноты

2.9.1 Верхние и нижние грани множества

Определение.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется максимальным элементом множества A $(\max A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \geq a'$ и $a \in A$.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется минимальным элементом множества A $(\min A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \leq a'$ и $a \in A$.

Определение.

- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \leq m$.
- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \geq m$.

Определение.

- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченым сверху, если у A существует верхняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченым снизу, если у A существует нижняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченым, если A ограничено и сверху и снизу.

Определение.

- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, B - множество верхних граней A. Элемент $c = \min B$ называется точной верхней гранью A и обозначается $\sup A$.
- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, B - множество нижних граней A. Элемент $c = \max B$ называется точной нижней гранью A и обозначается $\inf A$.

2.9.2 Принцип полноты Вейерштрасса

Теорема. (Принцип полноты Вейерштрасса)
Для каждого ограниченого сверху или снизу множества A существует $\sup A$ или $\inf A$ соответственно.

Доказательство. Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)
A - ограничено сверху, B - множество верхних граней. Значит $\forall a \in A$ и $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$ по аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$. □

Определение. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ рассмотрим следующие множетсва:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - отрезок
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

Определение. $\forall a \in \mathbb{R}$ функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

Определение. Для любого промежутка с концами $a, b \in \mathbb{R}$ длиной называется число $|b - a|$.

Определение. Рассмотрим последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ выполнено $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

2.9.3 Принцип вложеных отрезков (принцип полноты Кантора)

Теорема. (Принцип вложеных отрезков)
Пусть последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$. Если $|b_n - a_n| \to 0$ то c - единственная.

Доказательство. $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$, т.к

- если $n < m$, то $a_n \leq a_m \leq b_m$.
- если $n > m$, то $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Значит для $\forall m, n \in \mathbb{N}$: Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \ \forall n, m \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n, \ \forall n$.
Пусть $|b_n - a_n| \to 0$, предположим, что $\exists$ c_1 и c_2 : $c_1 \neq c_2$ - различные общие точки, значит $|c_2 - c_1| > 0$. Получаем, что $0 < |c_2 - c_1| < |b_n - a_n|, \ \forall n$, значит $|c_2 - c_1| \to 0$ получаем противоречие. $\square$

2.10 Неравенство Бернулли и Бином Ньютона

Теорема. (Неравенство Бернулли)

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n, x_k \in \mathbb{R}\, \forall k : x_k > 0$ или $x_k \in (-1, 0)$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1} x_k$$

Доказательство. Индукция по n. База: $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$. Пусть при n утверждение верно.

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + x_n) \geq (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + (\sum_{k=1}^{n} x_k) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_n$$

□

Определение. Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ называется биномиальным коэффициентом и обозначается C_n^k.

Замечание. По определнию считается, что $0! = 1$.

Теорема. (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Доказательство. Индукция по n. База: для $n = 1$ верно. Пусть верно для n. Распишем выражение для $n + 1$:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m+1} =$$

$$= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^n b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1}$$

□

2.11 Отношение эквивалентности. Равномощные множества

Определение. Отношение $\sim$ называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1. $x \sim x$ (Рефлексивность)

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Симметричность)

3. $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Транзитивность)

Определение. Множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

Теорема. Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Пусть A, B, C - множества, $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.

2. Для любой биекции $\varphi : A \to B$ существует $\varphi^{-1} : B \to A$.

3. $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$, то $\psi \circ \varphi : A \to C$.

□

Теорема. Конечные множества равномощны $\Leftrightarrow$ они содержат одинаковое количество элементов.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi : A \to \{1, \dots, n\},\ \psi : B \to \{1, \dots, n\}$
$\Rightarrow \exists\ \psi^{-1} : \{1, \dots, n\} \to B$. Тогда $\varphi \circ \psi^{-1} : A \to B$ - искомая биекция.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi : A \to B$ - биекция. Если $A = \varnothing$, то $B = \varnothing$. Докажем индукцией по количеству элементов. Пусть $A = \{a\}$, тогда $\exists\ b \in B : \varphi(a) = b$. Пусть утверждение верно для случая когда A - это n-элементное множество. Теперь если A - это $n+1$-элементное, то $\exists\ \varphi : A \to \{1, 2, ..., n+1\}$ - биекция. Значит $\exists\ a \in A$, что $\varphi(a) = n + 1$. Тогда $A \setminus \{a\}$ - n-элементное. Также $\exists\, b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$ - n-элементное $\Rightarrow B$ - $n + 1$-элементное.

□

Теорема. Объединение не более чем счетного числа счетных множеств счетно.

Доказательство. Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & & & & & \vdots
\end{array}$$

□

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

Теорема. Объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Примеры.

1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$
2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами).

2.12 Теорема Кантора и аксиома выбора

Теорема. (Теорема Кантора)
Интервал $(0, 1)$ несчетен.

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что у нас получилось перечислить все элементы интервала $(0, 1)$

$$x_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots$$

$$x_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots$$

$$x_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \dots$$

$$\vdots$$

Теперь построим такую последовательность b, задающую число, которого нет в списке. Определим последовательность так: $b_0 = 0$ и на i-й позиции b_i отличается от a_{ii}, например зададим ее так:

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{ если, } a_{ii} \neq 1, \\ 2, \text{ если, } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, построенное число $x = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$ отличается от каждого из $x_1, x_2, x_3 \ldots$ на i позиции $\Rightarrow$ оно не было пересчитано, получаем противоречие. $\square$

Следствие. Действительных чисел несчетно.

Определение. Действительные числа не являющееся алгебраическими называются трансцендентными.

Определение. Множества равномощные интервалу $(0, 1)$ называются множествами мощности континуума.

Теорема. У любого множетсва мощность множества всех подмножеств строго больше чем мощность самого множества.

Определение. Для множеств A и B обозначим $|A| \leq |B|$, если $\exists\ B' \subset B$ для которого $\exists\ \varphi : A \to B'$ - биекция.

Теорема. Сравнение мощностей множеств $|A| \leq |B|$ является отношением порядка.

1. $\forall A, B : |A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
3. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Аксиома. (Аксиома выбора)
Если существует множество неких множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу и составить из них другое множество.

Утверждение. Множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств $\mathbb{N}$ равномощно интервалу (0,1) (множеству $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ бесконечных последовательностей нулей и единиц).

Доказательство. Каждому $A \subset \mathbb{N}$ ставим в соответствие характеристическую последовательность, которая принимает значения: единицу, если элемент лежит в подмножестве и ноль иначе $\Rightarrow$ $2^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Поскольку каждое число из интервала $(0,1)$ представляется как последовательность цифр $0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ и каждую цифру можно представить в двоичной системе исчисления, то можно сделать вывод, что $2^N \sim (0,1)$. $\square$

Теорема. У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.

Доказательство. Выбираем элемент и сразу присваиваем ему номер, продолжая это действие, построим счетное множество. $\square$

Теорема. Пусть A - бесконечное, B - не более чем счетное $\Rightarrow A \sim A \cup B$

Доказательство. Выделим из A счетное подмножество A'. Тогда $A \sim (A \setminus A') \cup A'$, поскольку не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно, то $(A \setminus A') \cup A' \sim (A \setminus A') \cup (A' \cup B) \sim (A \cup B)$. $\square$

3 Топология $\mathbb{R}$

Определение. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Множество $B_\varepsilon(x)$ называется ε-окрестностью точки x.

Определение. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$. Множество $\mathring{B}_\varepsilon(x)$ называется проколотой ε-окрестностью точки x.

Определение. Точка $x \in A \subset \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества A, если $\exists\ B_\varepsilon(x) \subset A$. Множество всех внутренних точек $x \in A$ называется внутренностью множетсва A.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R} \setminus A$ называется внешней точкой для множества $A \subset \mathbb{R}$, если x - внутренняя точка для $\mathbb{R} \setminus A$. Множество всех внешних точек $x \in A$ называется внешностью множетсва A.

Определение. Точка называется граничной для множества $A \subset \mathbb{R}$, если она не является ни внешней ни внутренней для A. Множество всех граничных точек называется границей множества A и обозначается ∂A.

Определение. (Множество Кантора)
Разбиваем отрезок $[0,1]$ на три части и выбрасываем середину, затем каждый из получившихся отрезков разбиваем на три части и выбрасываем середину, и т.д.

- Суммарная длина всех выброшеных интервалов равна 1.
- Концов отрезков счетное множество.
- Общее количество точек имеет мощность континуума.

Определение. Множество называется открытым, если все его точки - внутренние.

Пример. Любой интервал - открытое множество

Определение. Множество называется $A \subset \mathbb{R}$ замкнутым, если все его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

Пример. Отрезок - замкнутое множество.

Замечание. По определению считаем, что $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ и открыты и замкнуты одновременно.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности точки x бесконечно много точек A, т.е $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$. Множество всех предельных точек A обозначается A'

Определение. Точка $x \in A$ называется изолированной точкой $A \subset \mathbb{R}$, если $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \varnothing$.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется точкой прикосновения $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$.

Утверждение. Точки прикосновения множества A являются либо внутренними, либо граничными.

Доказательство. Точка прикосновения не может являться внешней точкой, поскольку в этом случае $\exists\ \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \in \mathbb{R} \setminus A$, что противоречит с условием $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing \Rightarrow$ она либо внутренняя либо граничная. $\square$

Утверждение. Точки прикосновения являются либо предельными, либо изолированными.

Доказательство. По определению $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$. Если $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, то x - предельная. Если $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \varnothing$, то x - изолированная. $\square$

Теорема. (Критерии замкнутости множества)
Следующие условия эквивалетны:

(0) $A \subset \mathbb{R}$ - замкнуто.

(1) $\partial A \subset A$,

(2) Все точки прикосновения содержатся в A,

(3) $A' \subset A$.

Доказательство. Докажем по цепочке (0) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (0).

1. (0) $\Rightarrow$ (1) : A - замкнуто $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто $\Rightarrow \partial A \not\subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \partial A \subset A$.

2. (1) $\Rightarrow$ (2) : Все точки прикосновения являются граничными или внутренними. Поскольку $\partial A \subset A$ то все точки прикосновения содержатся в A.

3. (2) $\Rightarrow$ (3) : Если x - предельная, то $x \in A$ или x - точка прикосновения. Поскольку все точки прикосновения содержатся в A, то и все предельные точки содержатся в A.

4. (3) $\Rightarrow$ (0) : $A' \subset A \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A : x \notin A' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A \; \exists \, \mathring{B}_\varepsilon : \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing \Rightarrow x$ - внешняя точка A, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто $\Rightarrow A$ - замкнуто.

$\square$

Теорема. Пусть A - множество индексов. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - открытые, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - замкнутые. Тогда:

1. $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открыто (объединение открытых множетсв - открыто).

2. $\bigcap\limits_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ - открыто (конечное пересечение открытых множеств - открыто).

3. $\bigcup\limits_{i=1}^n X_{\alpha_i}$ - замкнуто (конечное объединение замкнутых множеств - замкнуто).

4. $\bigcap\limits_\alpha X_\alpha$ - замкнуто (пересечение замкнутых множеств - замкнуто).

Доказательство.

1. Пусть $u \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \Rightarrow \exists \; \alpha_0 : u \in U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists \; B(u) \in U_{\alpha_0} \Rightarrow B(u) \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ $\Rightarrow \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открыто.

2. Пусть $u \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \; \exists \; \varepsilon_i : B_{\varepsilon_i} \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists \; \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_i\}$ $\Rightarrow B_{\varepsilon_0} \subset U_{\alpha_i} \; \forall i \Rightarrow B_{\varepsilon_0} \subset \bigcap\limits_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ - открыто.

3. Поскольку $\bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$ (доказано ранее), то $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i} =$ $= \bigcap\limits_{i=1}^{n}(\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i})$. Так как X_{α_i} - замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i}$ - открыто. Тогда по пункту 2 получаем: $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(\mathbb{R}\setminus X_{\alpha_i})$ - открыто $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ - открыто $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ - замкнуто.
4. Поскольку $\bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$ (доказано ранее), то $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha =$ $= \bigcup\limits_{\alpha}(\mathbb{R} \setminus X_\alpha)$. Так как X_α - замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus X_\alpha$ - открыто. Тогда по пункту 1 получаем: $\bigcup\limits_{\alpha}(\mathbb{R}\setminus X_\alpha)$ - открыто $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha$ - открыто $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha$ - замкнуто.

$\square$

Примеры.

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1]$.
2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$.

Теорема. Если A - ограничено сверху или снизу и замкнуто, то существует $\max A$ или $\min A$ соответственно.

Доказательство. Докажем для ограниченого сверху. По принципу поноты Вейерштрасса $\exists\ \alpha = \sup A$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ a_\varepsilon \in (\alpha - \varepsilon, \alpha] \Rightarrow \alpha$ - точка прикосновения $\Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$. $\square$

Теорема. (Больцано-Вейерштрасса)
Если A - органиченое и бесконечное множетсво, то в нем есть хотя бы одна предельная точка ($A' \neq \varnothing$).

Доказательство. т.к A - ограничено, что $\exists\ \sup A = b,\ \inf A = a$
$\Rightarrow A \subset [a_1, b_1] = [a, b]$. Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и возьмем половину $[a_2, b_2]$ в которой бесконечно много элементов A и т.д. Получаем систему вложеных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, у которых длина стремится к нулю (упражнение) $\Rightarrow \exists!\ c \in [a_n, b_n]\ \forall n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : [a_n, b_n] \subset B_\varepsilon(c) \Rightarrow$ существует бесконечно много элементов в $\mathring{B}_\varepsilon(c) \Rightarrow c \in A'$. $\square$

Определение. Говорят, что семейство $\{A\}_\alpha$ является покрытием множества B, если $B \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$

Определение. Рассмотрим $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall$ покрытия X открытыми множествами $\{A\}_\alpha$ $\exists$ $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ - конечное подпокрытие, что $X \subset \bigcup\limits_{\alpha}^{n} A_\alpha$, то X называется компактным множеством или компактом.

Теорема. Любой отрезок является компактом.

Доказательство. Пусть $[a,b] \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha,\ A_\alpha$ - открытые и нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда $[a,b] = [a_1,b_1]$ делим отроезок пополам и выбираем половину $[a_2,b_2]$, у которой нельзя выделить конечное подпокрытие и т.д. Получаем систему вложеных отрезков $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^\infty$, у которых длина стремится к нулю $\Rightarrow \exists!\ c \in [a_n,b_n]\ \forall n \Rightarrow \exists\ \alpha_0 : c \in A_{\alpha_0} \Rightarrow \exists n_{\alpha_0} : [a_{n_{\alpha_0}}, b_{n_{\alpha_0}}] \subset A_{\alpha_0}$ получаем противоречие. □

Теорема. (Лемма Гейне-Бореля)
A - компакт $\Leftrightarrow$ A - замкнуто и ограничено.

Доказательство. Без доказательства. □

4 Числовые последовательности

Определение. Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется последовательностью.

Определение. $\{a_n\}$ ограничена сверху (снизу), если ее образ ограничен сверху (снизу).

Определение. Пусть $\{n_k\}$ образ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\forall k : n_{k+1} > n_k$. Тогда для любой $\{a_n\}$ последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью $\{a_n\}$.

Определение. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Если $\exists\ a \in \mathbb{R}$, такое что $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$, то говорят что последовательность $\{a_n\}$ сходится, а число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теорема. Если $\{a_n\}$ сходится, то ее предел единственный.

Доказательство. Пусть $\exists\ a, b : a \neq b$ - два предела последовательности $\{a_n\}$. Тогда $\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - a| < \frac{|a-b|}{3}$, а также $\exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - b| < \frac{|a-b|}{3}$ Тогда взяв $N = \max(N_1, N_2)$ получим противоречие. □

Теорема. Пусть $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда $\forall a_{n_k}\ \exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall k > N_\varepsilon :$
$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ □

Определение. $\forall k \in \mathbb{Z}$ отображение $\mathbb{Z} \setminus \{..., k-1\} \to \mathbb{R}$ тоже будем называть последовательностью.

Замечание. 1. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и b_n отличается от a_n конечным числом членов, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Теорема. (Отделимость)
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Пусть $b \neq a$. Тогда $\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^\infty = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \forall\ N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^\infty \neq \varnothing$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$, сразу получаем противоречие. $\square$

Замечание. $\exists\ \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty = \varnothing$. Если $b \notin \{a_n\}_{n=1}^\infty$, то $B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty = \varnothing$.

4.1 О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Рассмотрим пару последовательностей a_n и b_n. Если
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то говорят, что последовательность a_n это о-малое от b_n и обозначают $a_n = \bar{\bar{o}}(b_n)$, при $n \to \infty$.

Определение. Если $\exists\ M > 0 : |\frac{a_n}{b_n}| \leq M\ \forall n$, то говорят, что последовательность a_n это О-большое от b_n и обозначают $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$.

Пример. $\frac{\sin n}{n} \to 0 \Leftrightarrow \sin n = \bar{\bar{o}}(n),\ \frac{\cos n}{n} \to 0 \Leftrightarrow \cos n = \bar{\bar{o}}(n)$,
$\frac{\sqrt{n}+1}{n} \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{n} + 1 = \bar{\bar{o}}(n)$

Замечание. $O(1)$ - обозначение класса ограниченых последовательностей.

Определение. Последовательность a_n называется бесконечно малой, если $a_n = \bar{\bar{o}}(1)$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

Определение. Последовательность a_n называется бесконечно большой, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon$, такие последовательности обозначаются $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (это всего лишь обозначение, конечно у последовательности a_n не существует предела)
Если в определении $a_n > \varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Если в определении $a_n < -\varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Теорема. (Исчисление бесконечно малых)
Пусть $a_n = \bar{\bar{o}}(1), n \to \infty,\ b_n - \bar{\bar{o}}(1), n \to \infty$ и $c_n = O(1)$. Тогда $\forall c \in \mathbb{R}$:

1. $ca_n = \bar{\bar{o}}(1)$
2. $a_n + b_n = \bar{\bar{o}}(1)$
3. $a_n b_n = \bar{\bar{o}}(1)$
4. $a_n c_n = \bar{\bar{o}}(1)$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1 : |a_n| < \varepsilon,\ \exists N_2\ \forall n > N_2 : |b_n| < \varepsilon$, далее возьмем $n > \max\{N_1, N_2\},\ |c_n| < M$

1. $|ca_n| \leq |c|\varepsilon$
2. $|a_n + b_n| < 2\varepsilon$
3. $|a_n b_n| < \varepsilon^2$
4. $|c_n a_n| < M\varepsilon$

□

Теорема. Пусть a_n - бесконечно большая и $a_n \neq 0$, тогда $\frac{1}{a_n}$ - бесконечно малая.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\varepsilon}$ □

Лемма. Если $a_n \to a \Leftrightarrow (a_n - a) = \bar{\bar{o}}(1)$

Доказательство. $|a_n - a| < \varepsilon$ □

Теорема. Пусть $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a,\ \exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, тогда

1. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} ca_n = ca$
3. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n = ab$
4. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство. 1. $a_n + b_b = a + \bar{\bar{o}}(1) + b + \bar{\bar{o}}(1) = a + b + \bar{\bar{o}}(1)$

2. $ca_n = c(a + \bar{\bar{o}}(1)) = ca + \bar{\bar{o}}(1)$
3. $a_n b_n = (a + \bar{\bar{o}}(1))(b + \bar{\bar{o}}(1)) = ab + \bar{\bar{o}}(1)$

4. $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_n b - a b_n}{b b_n} = \dfrac{(a+\bar{\bar{o}}(1))b - a(b+\bar{\bar{o}}(1))}{b(b+\bar{\bar{o}}(1))} = \bar{\bar{o}}(1)O(1) = \bar{\bar{o}}(1)$

$\square$

Замечание. т.к $b \neq 0,\ b_n \neq 0\ \forall\varepsilon$, то 0 отделен от b_n, т.е $\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \cap b_n = \varnothing \Rightarrow |b_n| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \forall n,\ a_n \geq 0$, тогда $a \geq 0$

Доказательство. Пусть $a < 0$, тогда $\exists\ N\ \forall n > N : |a - a_n| < \frac{|a|}{3}$ $\square$

Замечание. Если $a_n > 0, a \geq 0$, то $\frac{1}{n} \to 0$

Следствие. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и пусть $\forall n : a_n \geq b_n$, тогда $a \geq b$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $a_n - b_n \geq 0$.
$a_n - b_n \to a - b \geq 0$. $\square$

Теорема. (Лемма о двух милиционерах)
Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a : a_n \leq b_n$ и пусть $a_n \leq c_n \leq b_n,\ \forall n$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0 \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon : a_n \in B_\varepsilon(a),\ b_n \in B_\varepsilon(a)$
$\Rightarrow c_n \in B_\varepsilon(a)$. $\square$

4.2 Монотонные последовательности

Определение.

1. Если $\forall n : a_{n+1} > a_n$, то a_n (строго) возрастает.
2. Если $\forall n : a_{n+1} \geq a_n$, то a_n неубывает.
3. Если $\forall n : a_{n+1} < a_n$, то a_n (строго) убывает.
4. Если $\forall n : a_{n+1} \leq a_n$, то a_n невозрастающая.

Такие последовательности называют монотонными.

Теорема. Если последовательность неубывает (невозраствает) и ограничена сверху (снизу), то у нее есть предел.

Доказательство. a_n - ограничена сверху и неубывает $\Rightarrow \exists\ \sup a_n = a$.
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ a_N > a - \varepsilon,\ \forall n > N : a_n > a - \varepsilon$. $\square$

4.3 Число e

Утверждение.

1. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ возрастает.
2. $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ убывает.

Доказательство.

1. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \dfrac{1}{n})^n} = \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{(n^2+2)^n(n+2)}{(n^2+2n+1)^n(n+1)} =$$
$$= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n(\frac{n+2}{n+1}) > (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$
$$= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

2. $$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1 + \dfrac{1}{n})^n}{(1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}((n+2)^{n+2})} = \frac{(n^2+2n+1)^{n+1}(n+1)}{(n^2+2n)^{n+1}(n+2)} =$$
$$= (1 + \frac{1}{n^2+2n})^{n+1}\frac{(n+1)}{n+2} > (1 + \frac{1}{n^2+2n})(\frac{n+1}{n+2}) =$$
$$= \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

□

Теорема. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

Доказательство. $\forall n,\ a_n < b_n$, т.к. $b_n = a_n(1 + \frac{1}{n})$ $\forall n, m : a_n < b_m \Rightarrow a_n$ - ограничена $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ □

Определение. $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

4.4 Сходимость последовательностей и частичные пределы

Теорема. Если a_n ограничена, то $\exists\ a_{n_k} \to a,\ k \to \infty$.

Доказательство.

1. Образ a_n бесконечен. Тогда $\exists\ a$ - предельная точка образа. Тогда в проколотой окрестности a есть хотя бы одна точка, возьмем эту точку, назовем ее a_{n_1}, далее возьмем новую проколотую окрестность a так, чтобы a_{n_1} в нее не попадало, возьмем в ней a_{n_2} такую, что $n_2 > n_1$ и т.д

2. Образ a_n конечный. Тогда $\exists\ a$ из образа, встречающаяся в последовательности бесконечно много раз. Тогда возьмем постоянную (стационарную) подпоследовательность.

$\square$

Теорема. (Критерий Коши)
a_n сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$. Тогда $\forall m, n > N_\varepsilon$: $|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \le |a_m - a| + |a - a_n| < 2\varepsilon$.

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$. Фиксируем m, тогда $a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon \Rightarrow a_n$ - ограничена $\Rightarrow \exists\ a_{n_k} \to a,\ k \to \infty$. Тогда $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$.

$\square$

Определение. Последовательность a_n, удовлетворяющая условию
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$ называется фундаментальной.

Пример.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$|a_n - a_m| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}| = |\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}| < |\sum_{k=m+1}^{n} (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{k})| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$|a_n - a_m| = |\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}| > \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}$$

Определение. Если у a_n есть сходящаяся подпоследовательность a_{n_k}, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ называется частичным пределом последовательности a_n.

Теорема. Рассмотрим a_n, и пусть $a \subset \mathbb{R}$ - множество всех частичных пределов a_n. Тогда A замкнуто.

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow \exists\ B_\varepsilon(x) : B_\varepsilon(x) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty$ - конечно. Тогда $\forall x' \in B_\varepsilon(x)\ \exists\ B_{\varepsilon'}(x')$, что $B_{\varepsilon'}(x') \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty$ конечно $\Rightarrow \forall x' \notin A$
$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто. $\square$

Определение. Пусть a_n ограничена. Тогда $\exists\ \max A$ и $\min A$, которые называют верхним и нижним пределом. (тут дописать обозначение)

Теорема. Пусть a_n ограничена. Тогда (верхний)$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k\}_{k=1}^\infty$ и (нижний)$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k\}_{k=1}^\infty$.

Доказательство. $\sup\{a_k\}_{k=n+1}^\infty \leq \sup\{a_k\}_{k=n}^\infty$, $\sup\{a_k\}_{k=n}^\infty$ ограничена снизу. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k\}_{k=n}^\infty = \alpha$. $\forall \varepsilon > 0 : (\alpha + \varepsilon, +\infty) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty$ конечно. С другой стороны $\forall \varepsilon > 0 : (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty$ бесконечно $\Rightarrow \alpha$ - частичный предел $\Rightarrow$ (верхний)$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Теорема. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ (верхний) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (нижний) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Доказательство. ($\Rightarrow$) очев

($\Leftarrow$) $\inf\{a_k\}_{k=n}^\infty \leq a_n \leq \sup\{a_k\}_{k=n}^\infty$ по лемме о двух миллиционерах $a_n \to a$.
$\square$

Определение. Если a_n имеет бесконечно большую подпоследовательность то используют обозначения (верхний)$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$ и
(верхний) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$

5 Предел функции

В данном разделе будут рассматриваться функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Определение. Пусть $f(x)$ определена в $\mathring{B}(x)$. Число a называется пределом $f(x)$ в точке x_0, по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение. Пусть $f(x)$ определена в $\mathring{B}(x_0)$. Число a называется пределом $f(x)$ по Гейне, если

$$\forall \{x_n\} : x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ \forall n\ \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

Определение. Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, x_0)$ и на $(x_0, +\infty)$. Тогда a - предел f при $x \to \infty$ ($x \to +\infty,\ x \to -\infty$) если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \forall |x| > \delta_\varepsilon\ (x > \delta_\varepsilon,\ x < \delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Теорема. Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство.

(К)$\Rightarrow$(Г): $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.
$\forall x_n : x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ \exists\ N_{\delta_\varepsilon} : 0 < |x_0 - x_n| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \forall n > N_{\delta_\varepsilon} : x_n \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$
$\Rightarrow |f(x_n) - a| < \varepsilon$, т.е. $f(x_n) \to a$

(Г)$\Rightarrow$(К): Выведем из отрицания предела по Коши отрицание предела по Гейне:
$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \delta\ \exists\ x_\delta \in \mathring{B}(x_0) \Rightarrow |f(x_\delta) - a| \geq \varepsilon_0$.
Возьмем $x_1 \in \mathring{B}_1(x_0) \Rightarrow |f(x_1) - a| \geq \varepsilon;\ x_2 \in \mathring{B}_{\frac{|x_1|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_2) - a| \geq \varepsilon_0$;
$x_3 \in \mathring{B}_{\frac{|x_2|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_3) - a| \geq \varepsilon_0; \ldots; x_n \in \mathring{B}_{\frac{|x_n|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$
это и есть отрицание по Гейне. □

Замечание. В доказательстве пользуемся тем, что для утверждений A и B верно: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Замечание. при $x \to \infty$ ($+\infty,\ -\infty$) доказывается аналогично.

Теорема. Если у функции существует предел в точке x_0 то он единственный.

Доказательство. $x_n : x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ foralln : \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Предположим, что $b \neq a$ - тоже предел. Тогда $\exists\ \{t_n\},\ t_n \to x_0,\ t_n \neq x_0 : \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = b$. Рассмотри последовательность $x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots$ - имеет два частичных предела. □

Теорема. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, то $\exists\ \delta > 0$, что $f(x)$ ограничена в $\mathring{B}_\delta(x_0)$.

Доказательство. $\exists\ \delta > 0$, что $\forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < 1$
$\Rightarrow a - 1 < f(x) < a + 1$ □

Теорема. (Отделимость)
Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Тогда $\forall b \neq a\ \exists\ \delta > 0$ и $\exists\ \varepsilon > 0$, что $f(\mathring{B}(x_0)) \cap \mathring{B}_\varepsilon(b) = \varnothing$.

Доказательство. $\exists\ \varepsilon > 0$, что $\forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \frac{|a-b|}{3}$. Тогда
$f(\mathring{B}_\delta(x_0)) \cap \mathring{B}_{\frac{|a-b|}{3}}(b) = \varnothing$. □

Определение. Число a называется пределом $f(x)$ в точке x_0 по $X \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in X'$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Обозначают $\lim\limits_{x\to x_0, x\in X} f(x) = a$.

Определение. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0, x\in X} f(x) = a$ и $X_1 \subset X,\ x_0 \in X_1'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0, x\in X_1} f(x) = a$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Теорема. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$.

Доказательство. "В эту сторону очевидно, в другую сторону тоже очевидно" $\square$

5.1 О-символика

Определение. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))$ при $x \to x_0$.

Определение. Функция $f(x) = \bar{\bar{o}}(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечно малой.

Определение. Если $\exists M > 0$, что $\forall x \in X \subset \mathbb{R} : |\frac{f(x)}{g(x)}| < M$, то $f(x) = O(g(x))$ на X

Определение. Функция $f(x) = O(1)$ называется ограниченой.

Определение. Пусть $f(x)$ определена в $\mathring{B}(x_0)$. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon :$
$\forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\ (f(x) > \varepsilon,\ f(x) < \varepsilon)$, то говорят что $f(x)$ бесконечно большая и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ (\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

Теорема. Пусть $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to x_0,\ \beta(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to x_0,\ \gamma(x) = O(1)$ в $\mathring{B}(x_0)$. Тогда

1. $\alpha + \beta = \bar{\bar{o}}(1),\ x \to x_0$
2. $c\alpha = \bar{\bar{o}}(1),\ x \to x_0,\ \forall c \in \mathbb{R}$
3. $\alpha\beta = \bar{\bar{o}}(1),\ x \to x_0$
4. $\alpha\gamma = \bar{\bar{o}}(1),\ x \to x_0$

Доказательство. Очевидно по Гейне. $\square$

Утверждение. У функции $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \bar{\bar{o}}(1),\ x \to x_0$.

Доказательство. очев :($\square$

Теорема. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)} = O(1)$ в $\mathring{B}(x_0)$.

Доказательство. По теореме об отделимости $\exists \mathring{B}(x_0)$ и $\exists \varepsilon > 0 : f(\mathring{B}(x_0)) \cap \mathring{B}_\varepsilon(0) \neq \varnothing$. $\forall x \in \mathring{B}(x_0) \Rightarrow |f(x)| \geq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\varepsilon}$. □

Теорема. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$.

2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = ab$.

3. Если $b \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. По Гейне. □

Пример. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > \beta$, то $x^\alpha = \bar{\bar{o}}(x^\beta),\ x \to 0$.
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} x^{\alpha-\beta} = 0$.
$x + \bar{\bar{o}}(x) + x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2) = x + \bar{\bar{o}}(x),\ x \to 0$.
$\sin x = x + \bar{\bar{o}}(x),\ x \to 0$.

Теорема. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ и пусть $\forall x \in \mathring{B}(x_0) : f(x) \geq g(x)$, тогда $a \geq b$.

Доказательство. по Гейне. □

Теорема. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, и пусть $a > b$. Тогда $\exists \mathring{B}(x_0) : f(x) > g(x)$.

Доказательство. дописать □

Теорема. (Теорема о двух милиционерах)
Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ и пусть в $\mathring{B}(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. по Гейне. □

Определение. $\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta),\ x_1 < x_2$:

1. $f(x_1) \leq f(x_2)$ называют неубывающей.

2. $f(x_1) < f(x_2)$ называют возрастающей.

3. $f(x_1) \geq f(x_2)$ называют невозрастающей.

4. $f(x_1) > f(x_2)$ называют убывающей.

такие функции называют монотонными.

Теорема. Пусть $f(x)$ определена на $(a-\delta, a)$, $f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) и ограниченая сверху (снизу). Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$.

Доказательство. $\exists \sup f(x) = A$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon \in (a-\delta, a),\ f(x_\varepsilon) > A-\varepsilon$. Тогда $\forall x \in (x_\varepsilon, a) : f(x) \geq f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$, а значит $\forall x \in \mathring{B}(A) : f(x) - A < \varepsilon$. □

Теорема. (Критерий Коши)
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Доказательство.

($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$
$\forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - a + a - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < 2\varepsilon$.

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
$\forall \{x_n\},\ x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ \exists\ N_{\delta_\varepsilon} : \forall n > N_{\delta_\varepsilon} : |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$
$\Rightarrow n, m > N_{\delta_\varepsilon} : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.
$\{t_n\},\ t \to x_0,\ t_n \neq x_0,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = b$. x_1, t_1, x_2, t_2(пояснить), $\dots \Rightarrow a = b$.

□

6 Непрерывные функции

6.1 Локальные свойства непрерывных функций

Определение. Пусть D_f - область определения $f(x)$. Пусть $x_0 \in D_f$. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0.

Замечание. Определение эквивалентно тому, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, если x_0 не изолированная точка.

Теорема. Пусть $f(x), g(x)$ - непрерывны в точке x_0. Тогда:

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ - непрерывна а точке x_0
2. $f(x)g(x)$ - непрерывна в точке x_0
3. если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0

Доказательство. Если x_0 - изолированная то очев. Если неизолированная, то по свойствам предела очевидно. □

Теорема. (Непрерывность композиции непрерывных функций)
$f(x)$ определена в $B_\delta(x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0. $f(B_\delta(x_0)) \subset B(y_0),\ f(x_0) = y_0$. $g(y)$ определена в $B(y_0)$ и непрерывна в точке y_0. Тогда $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $\forall x_n \to x_0,\ f(x_n) \to f(x_0)$. $y_n \to y_0,\ g(y_n) \to g(y_0)$. $y_n = f(x_n),\ g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. $\square$

6.2 Глобальные свойства непрерывных функций

Определение. Пусть $f(x)$ - определена на $X \subset \mathbb{R}$ и $\forall x \in X : f(x)$ - непрерывна в точке x. Тогда говорят, что $f(x)$ непрерывна на X и пишут $f(x) \in \mathcal{C}(X)$.

Теорема. (1-я теорема Вейерштрасса)
Если $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ неограничена, то есть
$\forall M > 0\ \exists\ x_M \in [a, b] : |f(x)| > M$. Возьмем $x_1 : |f(x_1)| > 1; \dots;$
$x_2 : |f(x_2)| > 2; \dots; x_M : |f(x_M)| > M; \dots.$
$\{x_n\} \subset [a, b]\ \exists\ \{x_{n_k}\} : \exists \lim\limits_{k\to\infty} \{x_{n_k}\} = x_0$ т.к. $f(x)$ непрерывыная, то
$\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(\{x_{n_k}\}) = f(x_0)$, но $|f(x_{n_k})| \to +\infty$. $\square$

Теорема. (2-я теорема Вейерштрасса)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$. Тогда $f(x)$ имеет max и min занчения на $[a, b]$

Доказательство. $\alpha = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) : \exists x_1 \in [a, b],\ f(x_1) > \alpha - 1,\ \exists x_2 \in [a, b],\ f(x - 2) > \alpha - \frac{1}{2} \dots \exists x_n \in [a, b],\ f(x - n) > \alpha - \frac{1}{n}, \dots.\ \exists \{x_{n_k}\}, x_{n_k} \to x',\ f(x_{n_k}) \to f(x'),\ \alpha - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq \alpha \Rightarrow f(x_{n_k}) \to \alpha$. $\square$

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$. $f(a) = A,\ f(b) = B$, пусть $a \leq B$. Тогда $\forall C : A \leq C \leq B\ \exists C \in [a, b],\ f(c) = C$

Доказательство. $A = B$ ограничена, далее $A < B$. Возьмем $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = C$, то все. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq C$, то $f(\frac{a+b}{2}) > C$ или $f(\frac{a+b}{2}) < C$. Возьмем ту половину отрезка $[a_1, b_1] : f(a_1) < C < f(b_1)$, снова делим пополам и т.д. Получаем $\{[a_n, b_n]\}$ последовательность вложеных отрезков $\Rightarrow \exists c \in [a_n, b_n],\ \forall n,\ a_n \to c,\ b_n \to c.$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq C$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq C \Rightarrow f(c) = C$. $\square$

Определение. Пусть $f(x)$ определена в $B(x_0)$. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} = \lim\limits_{x\to x_0+0} \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} =$

$\alpha,\ \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} = \beta,\ \alpha \neq \beta$, то точка называется точкой разрыва 1 рода функции $f(x)$. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов то x_0 называется точкой разрыва 2 рода.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на всей области определения (в нуле нет точки разрыва, она там не определена).

Теорема. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ и монотонна. Тогда у этой функции могут быть разрывы только 1-го рода.

Доказательство. Пусть $f(x) \leq f(b)$ и f монотонно возрастает. Так как $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, то f - ограничена $\Rightarrow \forall x_0 \in [a, b]\ \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0}$. Значит у $f(x)$ могут быть разрывы только 1-го рода. $\square$

Следствие. Утверждение теоремы верно и для функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b).

Доказательство. $\exists\ [a, b] \subset (a, b) : (a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ $\square$

Утверждение. У монотонной функции разрывов не более чем счетное множество.

Теорема. (Теорема об обратной функции)
Пусть $f(x)$ строго монотонна на $[a, b]$ и $f(x) \in \mathcal{C}[a, b],\ f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta$. Тогда $\exists f^{-1}(y) \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ и она строго монотонна.

Доказательство. Пусть строго возрастает. $\forall x_1, x_2,\ x_1 < x_2 : f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$. Тогда $f(x)$ - биекция между $[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists f^{-1}$. Предположим что она разрывная, но тогда нарушается биекция, и вообще нарушается условие того что функция определена на всем отрезке $[a, b]$. $\square$

Определение. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Если $\forall \varepsilon\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta_\varepsilon$, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, то $f(x)$ называется равномерно непрерывной на $[a, b]$.

Теорема. (Теорема Кантора)
Если $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, что $\forall \delta > 0\ \exists\ x', x'' : |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$. Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n} : x', x'',\ |x' - x''| < \frac{1}{n},\ |f(x') - f(x')| \geq \varepsilon_0$. $\exists x'_{n_k} \to x_0$, тогда $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(x_0)$. $\square$

6.3 Элементарные функции

1. Показательная функция
   Пусть $a > 1$
   (i) $n \in \mathbb{N},\ a^n = \prod\limits_{j=1}^{n} a;\ a^{n+m} = a^n a^m$
   (ii) $n \in \mathbb{Z},\ n = -k,\ k \in \mathbb{N}$, тогда $a^{-k} = \frac{1}{a^k},\ a^0 = 1$
   (iii) $a^{\frac{1}{n}} : b^n = a$ в $\mathbb{R}_+$ (строго положительные числа). Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \le a\},\ B = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n > a\},\ A \cup B = \mathbb{R}_+$. По аксиоме полноты $\exists\, b : x_1 \le b \le x_2,\ \forall x_1 \in A,\ \forall x_2 \in B$ и $b = a^{\frac{1}{n}}$. $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\ a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m;\ a^{r_1+r_2} = a^{r_1}a^{r_2},\ (a^{\frac{m_1}{n_1}}\ V\ a^{\frac{m_2}{n_2}})^{n_1 n_2} \Rightarrow a^{m_1 n_2}\ V\ a^{m_2 n_1}$.
   (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. $(1+\frac{a}{n})^n > 1 + a > a \Rightarrow 1 + \frac{a}{n} > a^{\frac{1}{n}} > 1$ по теореме о двух миллиционерах $a^{\frac{1}{n}} \to 1$.
   Пусть $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ r_n \to x_0 - 0,\ s_n \to x_0 + 0$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \alpha,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} = \beta,\ \alpha \le \beta$. Пусть $\alpha < \beta,\ a^{s_n} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{s_n - r_n} - 1) \to \beta - \alpha > 0$?. Рассмотрим подпоследовательность $0 < s_{n_k} - r_{n_k} < \frac{1}{k}$. Тогда $1 < a^{s_{n_k} - r_{n_k}} < a^{\frac{1}{k}}$. По теореме о двух миллиционерах $a^{s_{n_k} - r_{n_k}} \to 1 \Rightarrow a^{s_{n_k}} - a^{r_{n_k}} \to 0 \Rightarrow \alpha = \beta = a^{x_0}$. Непрерывность и монотонность есть по построению.
   (v) При $0 < a < 1,\ a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$
2. Функция, обратная к $y = a^x$ называется логарифмом и обозначается $x = \log_a y$. Далее пишем $y = \log_a x$.
   $\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha}\log_a x,\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y$. Обозначение: $\log_e x := \ln x$.
3. Степенная функция.
   $\forall x > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$. Распостраняем: при $\alpha \ge 0$ доопределяем x^α в точке x_0 по непрерывности (ищем предел и добавляем его как значение), при $\alpha \in \mathbb{Z}$ доопределяем x^α при $x < 0$ четно, если α - четное и нечетное, если α - нечетное.
4. $y = \sin x$. Возьмем окружность единичного радиуса, на $[0, 2\pi]$ синус - ордината. $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \le |x|,\ \sin(x+\delta) - \sin x = |2\sin(\frac{\delta}{2})\cos(x + \frac{\delta}{2})| \le \delta$. cos определяем в соответсвтии определения синуса.
5. $\arcsin x$ определяем на области, где будет биекция с $\sin x$ (обычно берут $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$)

6. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ для этих функций можно получить формулы, аналогичные тем что верны для тригонометрических функций.

7 Замечательные пределы

Теорема. $\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. $\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\Rightarrow \operatorname{ctg} x < \frac{\sin x}{x} < 1$. По теореме о двух миллиционерах $\frac{\sin x}{x} \to 1$. $\square$