

Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

9 января 2026 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Контакты: [Telegram](#), [GitHub](#)

Содержание

1	Числовые ряды	3
1.1	Определение ряда и простейшие свойства	3
1.2	Знакопостоянные ряды	4
1.3	Знакопеременные ряды	14
2	Функциональные последовательности и ряды	20
2.1	Функциональные последовательности	20
2.2	Функциональные ряды	23
2.3	Степенные ряды	27
2.4	Ряды Тейлора	30
3	Бесконечные произведения	34
3.1	Связь бесконечных произведений и рядов	34
3.2	Разложение синуса в бесконечное произведение	37
4	Интегралы с параметром	41
4.1	Собственные интегралы с параметром	41
4.2	Несобственные интегралы с параметром	44
5	Эйлеровы интегралы	53
5.1	Гамма-функция Эйлера	53
5.2	Формула Стирлинга	56
5.3	Бета-функция Эйлера	58
6	Ряды Фурье	61
6.1	Ядра Дирихле	65
6.2	Ядра Фейера	72

1 Числовые ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall k, m > N_{\varepsilon} : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для последовательности S_n :

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев.

□

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad (*)$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд (*) сходится. \square

Теорема. (Признак сравнения)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0) \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n \geq 0) \quad (2)$$

и $a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.
2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$$

\square

Следствие. (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. \square

Примеры.

1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится по Критерию Коши.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

сходится.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится.

Теорема. (Признак Коши)

Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{*}$$

1. Если $\exists q : 0 < q < 1, \forall n > N : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд (*) сходится.

2. Если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд (*) расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд (*) сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд (*) расходится.

□

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

то ряд (*) сходится

2. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$

то ряд (*) расходится

3. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q = 1$$

то ряд (*) может как сходиться так и расходиться.

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд (*) сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд (*) расходится.

3. $q = 1$, приведем пример рядов

(a)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

(b)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

□

Теорема. (Признак Д'Аламбера)

Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. Если $\exists q : 0 < q < 1, \forall n > N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\forall n > N : a_{n+1} \leq a_n \cdot q$, значит

$$a_{N+1} \leq a_N \cdot q, \quad a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot q \leq a_N \cdot q^2, \quad \dots$$

таким образом, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$a_{N+k} \leq a_N \cdot q^k$$

По признаку сравнения с геометрической прогрессией, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

сходится, значит, ряд $(*)$ также сходится.

2. $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

□

Следствие. (Признак Д'Аламбера в предельной форме)

Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

1. Если $q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $q > 1$, то ряд $(*)$ расходится.
3. Если то ряд $(*)$ может как сходиться так и расходиться.

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд (*) расходится.

3. $q = 1$, приведем пример рядов

(a)

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

(b)

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

□

Теорема. (Интегральный признак)

Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int_1^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит, $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

теперь для каждого $k = 1, \dots, N$ сложим полученные неравенства:

$$\sum_{k=1}^N f(k) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы.

□

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\beta} x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^{\gamma} (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^{\gamma} (\ln n)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера)

Рассмотрим знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{*}$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$, $c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$

то ряд (*) сходится.

2. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд (*) расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$:

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

значит

$$\sum_{m=1}^k a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

отсюда получаем, что начиная с какого-то номера, частичные суммы ряда ограничены. Значит, ряд, поскольку он знакоположительный, сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит, расходится и ряд (*).

□

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)

Возьмем $c_n = 1$:

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

значит, если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Если

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит, если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

2. (Признак Раабе)

Возьмем $c_n = n$:

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$

Значит, если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

Значит, если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)

Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)

Выводится из признака Бертрана.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

где θ_n - ограниченная последовательность, $\varepsilon > 0$ - произвольное. Тогда при

(a) $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$ - сходится, $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.

(b) $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$ - сходится, $\mu < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.

(c) $\lambda = 1, \mu = 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^N a_n \right| \leq \sum_{n=k}^N |a_n| < \varepsilon$$

□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad (2)$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Рассмотрим

$$S_k^\sigma = \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max_{1 \leq n \leq k} \sigma(n)$, $S_n \rightarrow S$. Тогда

$$S_k^\sigma \leq S_N \Rightarrow S_k^\sigma \leq S \Rightarrow \exists S^\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^\sigma$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^\sigma \Rightarrow S = S^\sigma$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty, \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
\hline
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
\hline
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1, \dots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_nb_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме (*).

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_nb_k)_m \quad (*)$$

сходится абсолютно и равен AB .

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда (*), которые имеют вид S_{N^2} :

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \rightarrow AB, \quad N \rightarrow \infty$$

Теперь перейдем к общему виду S_{N^2+M} , ($1 \leq M \leq 2N$) и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \dots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \dots + |b_N|) \rightarrow 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит, $S_{N^2+M} \rightarrow AB$. \square

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0. \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad (2)$$

расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит, оба ряда расходятся. \square

Теорема. (Теорема Римана)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R} \exists \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists \sigma_{+\infty}$ и $\sigma_{-\infty}$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{+\infty}(n)} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{-\infty}(n)} = -\infty$$

$\exists \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. Было доказано картинками, строгое доказательство можно найти в [3] □

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(\mathcal{A}): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а b_n монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

(\mathcal{D}): Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^p a_n, \quad A_{k-1} = 0 \Rightarrow a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n &= \sum_{n=k}^m (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1} \cdot b_n = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \end{aligned}$$

(A):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

(D):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \stackrel{(1)}{\leq} 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

(1):

$$|A_p| = \left| \sum_{n=k}^p a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^p a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \right| \leq 2M$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)

Если a_n монотонно убывает и $a_n \rightarrow 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad (*)$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд (*) сходится.

□

2 Функциональные последовательности и ряды

2.1 Функциональные последовательности

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0, 1]$:

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin \frac{x}{n} \rightarrow 0$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A , и пишут $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$.

Примеры.

1. На $[0, 1]$

$$x^n \not\xrightarrow{A} \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

поскольку $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N_\varepsilon \exists n > N_\varepsilon, \exists x_{\varepsilon_0} \in [0, 1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.

2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \xrightarrow{A} 0$.

3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0, 1] : f_n \not\xrightarrow{A} 0$.

$$f'_n = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \quad f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \not\xrightarrow{A} 0$ на \mathbb{R} , но $\forall a, b, \forall x \in [a, b] : \sin \frac{x}{n} \xrightarrow{A} 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \sup_A |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Доказательство.

(\Rightarrow) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит, после предельного перехода, получаем:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(\Leftarrow) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит, $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow) :

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_m(x)| &= |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

(\Leftarrow) : Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Тогда после предельного перехода получим, что $\forall x \in A$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности) Пусть $\forall x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x)$. Если

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^\infty, c_n \geq 0, c_n \rightarrow 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$$

Доказательство. Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N_\varepsilon$ и запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. (Почленное интегрирование)

Пусть $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n \in \mathcal{C}[a, b]$. Тогда

$$\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x f(t) dt$$

Доказательство.

$$\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b - a| < \varepsilon \cdot |b - a|$$

□

Теорема. (Почленное дифференцирование)

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0) \rightarrow \alpha$.

Пусть $f'_n(x) \xrightarrow{[a,b]} g(x)$. Тогда:

$$f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), f(x) \in \mathcal{C}^1[a, b] \text{ и } f'(x) = g(x)$$

Доказательство. По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt \Rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) \Rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt$$

отсюда

$$f_n(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt + \alpha = f(x)$$

□

2.2 Функциональные ряды

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$, определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\}, \{S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд (1) сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если $S_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$, то говорят, что ряд (1) сходится равномерно на A .
3. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$

то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall m, k > N_\varepsilon, \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для функциональных последовательностей

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Необходимое условие равномерной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\Rightarrow} S(x)$$

Тогда $|a_n(x)| \overset{A}{\Rightarrow} 0$.

Доказательство.

$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \Rightarrow S(x) - S(x) = 0$$

□

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\Rightarrow} S(x)$$

Тогда $S(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. $S_n(x) \overset{A}{\Rightarrow} S(x)$ и $\forall n : a_n(x)$ непрерывна в точке x_0 . Значит, $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0 , и по теореме для функциональных последовательностей, $S(x)$ непрерывна в точке x_0 . □

Теорема. (Почленное интегрирование)

Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\Rightarrow} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) \Rightarrow \int_a^x S(t) dt$$

Доказательство. $S_n(x) \overset{[a,b]}{\Rightarrow} S(x)$. Проинтегрируем почленно:

$$\int_a^x S_n(t) dt \overset{[a,b]}{\Rightarrow} \int_a^x S(t) dt$$

что можно $\forall x \in [a, b]$ записать, как:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^k a_n(t) \right) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^k a_n(t) \right) dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) \end{aligned}$$

□

Теорема. (Почленное дифференцирование)

Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \alpha$$

где $x_0 \in [a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \overset{[a,b]}{\Rightarrow} G(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\Rightarrow} S(x) \in \mathcal{C}^1[a, b], \quad S'(x) = G(x)$$

Доказательство. Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности $S_n(x)$. □

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Пусть $\forall n : |a_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \forall x \in A$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\Rightarrow} S(x)$$

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^m \alpha_n < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A .

(\mathcal{A}): Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A}$$

и $\exists M > 0$, $\forall x \in A$, $\forall n : |b_n(x)| < M$ и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$.

(\mathcal{D}): Пусть $\exists M > 0$, $\forall x \in A$, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq M$$

и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$, причем $b_n(x) \xrightarrow{A} 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \xrightarrow{A}$$

Доказательство. Аналогично как для числовых рядов. Введем:

$$A_p(x) = \sum_{n=k}^p a_n(x), \quad A_{k-1}(x) = 0 \Rightarrow a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n(x) b_n(x) &= \sum_{n=k}^m (A_n(x) - A_{n-1}(x)) b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n(x) b_n(x) - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1}(x) b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n(x) b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x) b_{n+1}(x) = \\ &= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x) (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x) \end{aligned}$$

(\mathcal{A}):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x) (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x) \right| \leq \varepsilon \cdot 3M$$

(\mathcal{D}):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x) (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x) \right| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$$

□

2.3 Степенные ряды

Определение. Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

называются степенными рядами. a_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - центр разложения.

Замечание. В центре разложения ряд сходится.

Замечание. Сдвиг $x - x_0 \mapsto x$ не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема. (Первая теорема Абеля)

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (*)$$

1. Если существует $x_1 \in \mathbb{R}$, что $(*)$ сходится в точке x_1 , то для любых x , таких, что $|x| < |x_1|$ ряд $(*)$ сходится.
2. Если существует $x_2 \in \mathbb{R}$, что ряд $(*)$ расходится в точке x_2 , то для любых x , таких что $|x| > |x_2|$ ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Пусть $x : |x| < |x_1|$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \stackrel{(1)}{\leq} M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

(1): Поскольку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$$

то $a_n x_1^n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n x_1^n| < M$

Таким образом, ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. Теперь пусть $x : |x| > |x_2|$. От противного: пусть есть точка $y : |y| > |x_2|$, в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках $x : |x| < |y|$, а значит, и в x_2 - противоречие.

□

Замечание. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (*)$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ сходится, $A \neq \emptyset$, так как $\{0\} \in A$. Пусть $B \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ расходится, и пусть $B \neq \emptyset$. Тогда из первой теоремы Абеля следует, что $A = \{0\}$ или $\exists a > 0 : (-a, a) \subset A$, а также $\exists b > 0 : (-\infty, -b) \cup (b, +\infty) \subset B$.

Утверждение. $a = b$

Доказательство. Предположим что это не так, тогда $a < b$ или $b < a$. Пусть для определенности $a < b$, по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$. Значит, c не лежит ни в A , ни в B , а такого быть не может, противоречие. □

Определение. Число $a = b$ называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R . Формально полагают, что если $R = 0$, то $A = \{0\}$, если $B = \emptyset$, то $R := +\infty$.

Теорема. (Формула Коши-Адамара)

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Если предел равен нулю, то $R = +\infty$.

Если предел равен бесконечности, то $R = 0$.

Доказательство. Применим признак Коши к ряду

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1 & - \text{сходится, и } |x| < R, \\ l > 1 & - \text{расходится, и } |x| > R \end{cases}$$

□

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \quad (*)$$

и пусть $R > 0$.

1. $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ ряд равномерно сходится.
2. $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. $\forall x \in (-R, R)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t) dt$$

4. $S(x) \in \mathcal{C}^\infty(-R, R)$.

Доказательство.

1. $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot (R - \varepsilon)^n$ по признаку Вейерштрасса.
2. из пункта 1: $\forall \varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R + \varepsilon, R - \varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. Поскольку ряд (*) равномерно сходится на любом отрезке внутри $(-R, R)$, то можно почленно интегрировать

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

4. Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

значит, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha x^n$$

имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости R . Тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

□

Теорема. (Вторая теорема Абеля)

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x), \quad R > 0$$

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Тогда $S(x) \in \mathcal{C}[0, R]$ то есть

$$\exists \lim_{x \rightarrow R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = S(R)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R} \right)^n$$

а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на $[0, R]$. □

2.4 Ряды Тейлора

Определение. Пусть $f(x) \in C^\infty(B(x_0))$. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром ряда x_0 .

Замечание. Далее везде центр разложения в 0.

Теорема. Если в некоторой окрестности нуля выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Доказательство. Подставим $x = 0$, тогда $a_0 = f(0)$. Продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_1 = f'(0)$. Снова продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$. Продолжая выполнять эту операцию, для каждого n получим $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. □

Теорема. Пусть $f(x) \in C^\infty(-a, a)$ и $|f^{(n)}(x)| \leq A^n$, $A > 0$.

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\forall x \in (-a, a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Тогда

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| \leq \frac{A^{N+1} \cdot a^{N+1}}{(N+1)!} \rightarrow 0$$

□

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Несложно проверить, что $f(x) \in C^\infty(B(0))$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \neq f(x)$$

Пример. (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Этот ряд сходится на $(-1, 1)$, причём

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2}$$

но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

не сходится.

Лемма. Если $a_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \rightarrow A, \quad N \rightarrow \infty$$

Доказательство. Оценим разность

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n - A \right| = \frac{1}{N} \cdot \left| \sum_{n=1}^N a_n - AN \right| = \frac{1}{N} \cdot \left| \sum_{n=1}^N (a_n - A) \right|$$

$$a_n \rightarrow A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1, \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Возьмем число $N_1 < N$ и разобьём сумму на две части:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |a_n - A| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N_1} |a_n - A| + \frac{1}{N} \sum_{n=N_1+1}^N |a_n - A|$$

Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{n=N_1+1}^N |a_n - A| < \frac{1}{N} \cdot \varepsilon \cdot (N - N_1) = \varepsilon \cdot \frac{N - N_1}{N}$$

В итоге получаем

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n - A \right| \leq \frac{C}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

□

Теорема. (Теорема Таубера)

Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на $(-1, 1)$, существует

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = A$$

и пусть $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$.

Тогда существует

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

Доказательство. Обозначим $\forall x \in (0, 1)$

$$N_x = \left[\frac{1}{1-x} \right]$$

и введём функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Если $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1-0$, то теорема доказана. Разобьем исходный ряд на две суммы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N_x} a_n x^n + \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1 - x^n) - \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1 - x^n) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \right| \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{N_x} |a_n|n \leq \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n n| \stackrel{(2)}{\rightarrow} 0, \quad x \rightarrow 1 - 0 \end{aligned}$$

(1): Поскольку $x < 1$, то $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} < n$

(2): $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow |a_n n| \rightarrow 0$, значит, по лемме все выражение стремится к 0.

$$\left| \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n \right| \stackrel{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{N_x + 1} \sum_{n=N_x+1}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{N_x + 1} \cdot \frac{x^{N_x+1}}{1-x} < \varepsilon$$

(3): $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow |a_n n| < \varepsilon$, а также $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_x+1}$

Отсюда при $x \rightarrow 1 - 0$: $|\varphi(x)| < 2\varepsilon$. □

3 Бесконечные произведения

Определение. Рассмотрим $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{P_n = \prod_{k=1}^n u_k\}_{n=1}^{\infty}$.

Пара последовательностей $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{P_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется бесконечным произведением чисел $\{u_n\}$, обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

u_n - общий член, P_n - частичное произведение.

Определение. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n \quad (*)$$

1. называется сходящимся, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = a \neq 0$.

2. называется расходящимся, если $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$.

3. Если $\exists n : u_n = 0$, то произведение $(*)$ называется расходящимся к 0.

Теорема. (Необходимое условие сходимости бесконечного произведения)

Если $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $u_n \rightarrow 1$.

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1$$

□

Следствие. Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n, \quad a_n \rightarrow 0$$

3.1 Связь бесконечных произведений и рядов

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

сходится.

Доказательство.

(\Rightarrow): Пусть произведение сходится, тогда $\Pi_N \rightarrow \Pi$. Поскольку $\ln x \in \mathcal{C}(0, +\infty)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(\Pi_N) = \ln(\Pi)$$

значит, ряд сходится.

(\Leftarrow): Пусть ряд сходится, тогда $S_N \rightarrow S$. Поскольку $\exp x \in \mathcal{C}(0, +\infty)$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp(S_N) = \exp(S)$$

значит, произведение сходится.

□

Определение. Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответствующий ряд из логарифмов.

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1 > 0$$

отсюда, по признаку сравнения в предельной форме, получаем утверждение теоремы. □

Следствие. Если a_n знакопостоянны, то произведение и соответствующий ряд из логарифмов сходятся или расходятся одновременно.

Теорема. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Доказательство. Разложим по формуле Тейлора:

$$\ln(1 + a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{o}(a_n^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

Значит, по признаку сравнения в предельной форме, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + a_n) - a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

сходятся или расходятся одновременно. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + a_n) - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

то есть ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + a_n) - a_n)$$

сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, комбинируя эти факты, получаем утверждение теоремы. \square

Замечание. Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(x))$$

анализируя соответствующий функциональный ряд из логарифмов.

Пример. (Пример Эйлера)

Пусть p_k обозначает k -е простое число. Тогда при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{ls}}\right) = \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} < \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Тогда

$$\sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \quad N \rightarrow \infty$$

3.2 Разложение синуса в бесконечное произведение

Лемма. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1) \sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$$

где P_n - многочлен n -й степени.

Доказательство. Индукция по n . База $n = 1$:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

Шаг: Пусть верно для $m < 2n+1$ (нам понадобятся только $2n-3$ и $2n-1$)

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n-3)x = 2 \sin(2n-1)x \cdot \cos 2x$$

Отсюда выразим $\sin(2n+1)x$ и подставим выражения для $2n-3$ и $2n-1$:

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)x &= 2 \sin(2n-1)x \cdot \cos 2x - \sin(2n-3)x = \\ &= (2n-1) \sin x \cdot P_{n-1}(\sin^2 x) \cdot (1 - 2 \sin^2 x) - (2n-3) \sin x \cdot P_{n-2}(\sin^2 x) = \\ &= (2n+1) \sin x \cdot \left(-\frac{2(2n-1)}{2n+1} \cdot P_n(\sin^2 x) + \frac{2n-1}{2n+1} \cdot P_{n-1}(\sin^2 x) - \frac{2n-3}{2n+1} \cdot P_{n-2}(\sin^2 x) \right) \end{aligned}$$

□

Лемма. $\forall \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$:

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) - 1$$

Доказательство. Индукция по n . База $n = 1$:

$$|(1 + a_1) - 1| \leq (1 + |a_1|) - 1$$

Шаг: Пусть верно для $n-1$:

$$\left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + |a_k|) - 1$$

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1 \right| &= \left| (1 + a_n) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right| \stackrel{(1)}{=} \\
&\stackrel{(1)}{=} \left| (1 + a_n) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - (1 + a_n) + a_n \right| = \\
&= \left| (1 + a_n) \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right) + a_n \right| \leq \\
&\leq |1 + a_n| \cdot \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right| + |a_n| \stackrel{(2)}{\leq} \\
&\stackrel{(2)}{\leq} (1 + |a_n|) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 + |a_k|) - 1 \right) + |a_n| = \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) - 1
\end{aligned}$$

(1): Добавили и вычли a_n .

(2): По предположению индукции и неравенству треугольника

$$|1 + a_n| \leq 1 + |a_n|$$

□

Лемма. Если $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$

Теорема. (Разложение синуса в бесконечное произведение)

$\forall x \neq \pi k$:

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right)$$

Доказательство. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1) \sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$$

$$\sin((2n+1)x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

при этом

$$\sin \frac{\pi k}{2n+1} \neq 0, \quad 2n+1 \nmid k$$

значит, обязан обнуляться многочлен:

$$P_n(\sin^2 x) = 0, \quad x = \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Таким образом, найдены все корни многочлена. Обозначим $\omega = \sin^2 x$, тогда

$$P_n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Разложим многочлен на множители:

$$P_n(\omega) = B \cdot \prod_{k=1}^n \left(\omega - \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right)$$

где B - коэффициент при старшем члене. Преобразуем:

$$\begin{aligned} P_n(\sin^2 x) &= B \cdot \prod_{k=1}^n \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right) = \\ &= B \cdot \prod_{k=1}^n \left(-\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right) \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) = A \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, из начального соотношения, получим

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1) \sin x} = A \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

Перейдя к пределу при $x \rightarrow 0$ в обеих частях, получим

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1) \sin x} \rightarrow 1, \quad \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \rightarrow 1$$

значит, $A = 1$ и выражение имеет вид:

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1) \sin x} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

сделаем замену $t = (2n+1)x$. Тогда

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

Возьмем $t \in \mathbb{R}$, $|t| < n, m < n$ и представим произведение в виде

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \cdot R_{n,m}(t)$$

где

$$R_{n,m}(t) = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

Посмотрим на пределы при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} \rightarrow \frac{\sin t}{t}, \quad \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \rightarrow \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

причем $R_{n,m}(t)$ выражается через них, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,m}(t) = R_m(t)$$

Итак, перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right) \cdot R_m(t)$$

Оценим $R_{n,m}$, воспользовавшись леммами:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \right| &\leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \leq \\ &\leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{t^2}{\left(\frac{2}{\pi} \cdot \pi k\right)^2}\right) - 1 = \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \leq \\ &\leq \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) = C$$

оно сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{t^2}{4k^2} \right|$$

при этом

$$\prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right)}{\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right)} \rightarrow \frac{C}{C} = 1, \quad m \rightarrow \infty$$

Значит, $R_m(t) \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем утверждение теоремы:

$$\sin t = t \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

□

Следствие. (Формула Валлиса)

Подставим $\frac{\pi}{2}$:

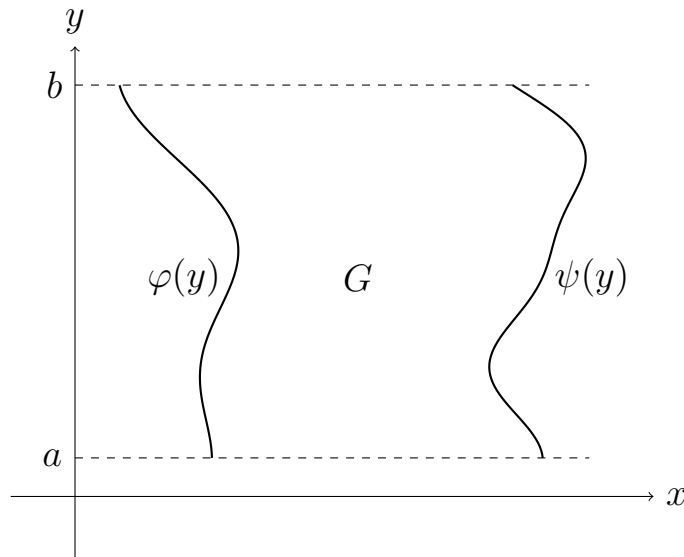
$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right)$$

4 Интегралы с параметром

4.1 Собственные интегралы с параметром

Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}[a, b]$, $\varphi(y) \leq \psi(y)$. Рассмотрим $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x, y) : y \in [a, b], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$



Определение. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{R}[\varphi(y), \psi(y)]$. Интеграл

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

называется собственным интегралом с параметром.

Теорема. Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}[a, b]$, $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[a, b]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
|F(y + \Delta y) - F(y)| &= \left| \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right| \stackrel{(1)}{\leq} \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \left| \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \left| \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \\
&\quad + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx \stackrel{(2)}{\leq} M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \max_y |\psi(y) - \varphi(y)|
\end{aligned}$$

(1):

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx = \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \\
&\quad + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx = \\
&\quad = \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx
\end{aligned}$$

(2): Первые два слагаемых оцениваются так: $f(x, y + \Delta y) \leq M$, так как $f \in \mathcal{C}(G)$ и, поскольку $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны, то

$$|\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)| < \varepsilon, \quad |\psi(y + \Delta y) - \psi(y)| < \varepsilon$$

Последнее слагаемое оценивается так: $f \in \mathcal{C}(G)$, значит, f равномерно непрерывна (так как G - компакт) \Rightarrow при $\Delta y \rightarrow 0 : |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$ \square

Напоминание. (Первая теорема о среднем)

Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(x) \geq 0$, $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$. Тогда $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Теорема. Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$, $\exists f'_y(x, y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда $F(y) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ и

$$F'(y) = \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right)' = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y} (F(y + \Delta y) - F(y)) &= \\ &= \frac{1}{\Delta y} \left(\int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\Delta y} \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx + \frac{1}{\Delta y} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\Delta y} (\psi(y + \Delta y) - \psi(y)) \cdot f(\psi(y + \theta_1 \Delta y), y + \Delta y) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} (\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)) f(\varphi(y + \theta_2 \Delta y), y + \Delta y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y + \theta_3 \Delta y) dx \end{aligned}$$

(1): Аналогично предыдущей теореме

(2): Применяем теорему о среднем к первому и второму слагаемому, и теорему Лагранжа к третьему слагаемому ($0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$)

Значит, существует предел при $\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \psi'(y) f(\psi(y), y) - \varphi'(y) f(\varphi(y), y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$. Тогда

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad G(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx$$

$$F'(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad G'(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

Отсюда $F(t) - G(t) = \tilde{C}$. Заметим, что $F(c) = G(c) = 0 \Rightarrow \tilde{C} = 0$. Значит, $F(t) = G(t)$, в частности для $t = d$. \square

4.2 Несобственные интегралы с параметром

Определение. Пусть $f(x, y)$ определена на $[a, \omega) \times Y$, $\forall y : f(x, y) \in \mathcal{R}[a, b]$ $\forall b \in [a, \omega)$. Тогда несобственным интегралом с параметром называется предел

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^\omega f(x, y) dx$$

Определение. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^\omega f(x, y) dx$$

Пусть на $Y \subset \mathbb{R}$:

$$\int_a^\omega f(x, y) dx = F(y)$$

Если $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in [a, \omega) : \forall a' > A, \forall y \in Y :$

$$\left| \int_a^{a'} f(x, y) dx - F(y) \right| < \varepsilon$$

то

$$\int_a^\omega f(x, y) dx \xrightarrow{Y} F(y)$$

Утверждение. Несобственный интеграл

$$\int_a^\omega f(x, y) dx \xrightarrow{Y}$$

тогда и только тогда когда $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in [a, \omega), \forall a' > A, \forall y \in Y$:

$$\left| \int_{a'}^{\omega} f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$$\left| \int_{a'}^{\omega} f(x, y) \, dx \right| = \left| \int_a^{a'} f(x, y) \, dx - F(y) \right|$$

□

Далее, без ограничения общности будем писать $\omega = +\infty$.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости)

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx \xrightarrow{Y}$$

тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists A > a, \forall a_1, a_2 > A, \forall y \in Y$:

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow) :

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \right| = \left| \int_{a_1}^{+\infty} f(x, y) \, dx - \int_{a_2}^{+\infty} f(x, y) \, dx \right| < 2\varepsilon$$

(\Leftarrow) :

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon$$

Тогда при $a_2 \rightarrow +\infty$:

$$\left| \int_{a_1}^{+\infty} f(x, y) \, dx \right| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx, \quad y \in Y$$

Если $\exists g(x)$ такая, что $|f(x, y)| < g(x)$ и сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx$$

сходится равномерно на Y .

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \right| \leq \int_{a_1}^{a_2} g(x) \, dx < \varepsilon$$

□

Напоминание. (Вторая теорема о среднем)

Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, а $g(x)$ — монотонна. Тогда $\exists c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) \, dx + g(b) \cdot \int_c^b f(x) \, dx$$

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) \, dx, \quad y \in Y$$

Пусть $|f(x, y)|, |g(x, y)| < M$

(\mathcal{A}):

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx \xrightarrow{Y}$$

$g(x, y)$ монотонна $\forall y$. Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) \, dx \xrightarrow{Y}$$

(D): $\forall A > a$:

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| < M$$

$g(x, y)$ монотонна и $g(x) \xrightarrow{Y} 0$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx \xrightarrow{Y}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| &\stackrel{(1)}{=} \left| g(a_1, y) \cdot \int_{a_1}^c f(x, y) dx + g(a_2, y) \cdot \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq |g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \end{aligned}$$

(1): По второй теореме о среднем.

(A):

$$|g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M$$

(D):

$$|g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon \cdot 2M + \varepsilon \cdot 2M$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$ и

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c, d]}{\Rightarrow} F(y)$$

Тогда $F(y) \in \mathcal{C}[c, d]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| &\leq \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$, $\exists f'_y(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = F(y), \quad \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \overset{[c, d]}{\Rightarrow} G(y)$$

Тогда $\exists F'(y) = G(y)$.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \rightarrow +\infty$ и

$$F_n(y) = \int_a^{x_n} f(x, y) dx \rightarrow F(y)$$

Дифференцируя по теореме для собственных интегралов, получим, что для каждого n выполнено:

$$F'_n(y) = \int_a^{x_n} f'_y(x, y) dx, \quad F'_n(y) \overset{[c, d]}{\Rightarrow} G(y)$$

тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональных последовательностей:

$$F'(y) = G(y)$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$ и

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \Rightarrow F(y)$$

Тогда

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \rightarrow +\infty$

$$F_n(y) = \int_a^{x_n} f(x, y) dx$$

Тогда по теореме для собственных интегралов:

$$\int_c^d \left(\int_a^{x_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{x_n} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_c^d F_n(y) dy \right) &= \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

□

Теорема. (Признак Дини равномерной сходимости последовательности)

Пусть $\forall n : f_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, $\forall x \in [a, b] : f_n(x)$ монотонны по n и

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$$

Тогда $f_n(x) \xrightarrow{[a, b]} f(x)$.

Доказательство.

$$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x_0}, \forall n \geq N_{\varepsilon, x_0} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Отсюда $\exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) :$

$$|f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x) - f(x)| \leq |f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x) - f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x_0)| + |f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Из монотонности следует, что для всех номеров, больших данного, неравенство выполняется.

Рассмотрим покрытие:

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} B_{\delta_\varepsilon}(x) \Rightarrow \exists \{x_i\}_{i=1}^k, [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$$

Возьмем $N_\varepsilon = \max_{i=1, \dots, k} (N_{\varepsilon, x_i})$. Тогда

$$\forall x \in [a, b], \forall n > N_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty))$, $f(x, y) \geq 0$. Пусть существует

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[b, +\infty)$$

и пусть существует

$$G(x) = \int_b^{+\infty} f(x, y) dy \in \mathcal{C}[a, +\infty)$$

Если существует

$$\int_b^{+\infty} F(y) dy = I$$

то существует

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I$$

Доказательство. Введем монотонные последовательности $a_n \rightarrow +\infty$, $b_k \rightarrow +\infty$

$$F_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y) dx, \quad G_k(x) = \int_b^{b_k} f(x, y) dy$$

Заметим, что по признаку Дини

$$F_n(y) \Rightarrow F(y), \quad G_k(x) \Rightarrow G(x)$$

по теореме для собственных интегралов

$$\int_b^{b_k} \left(\int_a^{a_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{a_n} \left(\int_b^{b_k} f(x, y) dy \right) dx$$

Пусть

$$C_{nk} = \int_b^{b_k} F_n(y) dy = \int_a^{a_n} G_k(x) dx$$

Тогда

$$C_{nk} = \int_b^{b_k} F_n(y) dy \leq \int_b^{b_k} F(y) dy \leq \int_b^{+\infty} F(y) dy = I$$

но с другой стороны

$$C_{nk} = \int_a^{a_n} G_k(x) dx \leq \int_a^{a_n} G(x) dx \rightarrow \int_a^{+\infty} G(x) dx = I' \leq I$$

Теперь мы знаем, что существует интеграл

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I'$$

и можем повторить это рассуждение в другом порядке (сначала для G , а потом для F) и получить, что $I \leq I' \Rightarrow I = I'$. □

Следствие. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty))$. Пусть существуют

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx \in \mathcal{C}[b, +\infty), \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)| \, dx$$

и пусть существуют

$$G(x) = \int_b^{+\infty} f(x, y) \, dy \in \mathcal{C}[a, +\infty), \quad \int_b^{+\infty} |f(x, y)| \, dy$$

Если существуют

$$\int_b^{+\infty} F(y) \, dy = I, \quad \int_b^{+\infty} |F(y)| \, dy$$

то существуют

$$\int_a^{+\infty} G(x) \, dx = I, \quad \int_a^{+\infty} |G(x)| \, dx$$

Доказательство. Заметим, что $|f(x, y)| - f(x, y) \geq 0$, $|f(x, y)| \geq 0 \Rightarrow$ верны условия теоремы. \square

Теорема. (Интеграл Дирихле)

$\forall a \in \mathbb{R} :$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)$$

Доказательство. Пусть

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx,$$

Заметим, что $I(0) = 0$, $I(-a) = -I(a)$. Далее рассматриваем только $a > 0$.

Введем

$$I(a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot e^{-\varepsilon x} \, dx$$

Пусть $a \geq a_0 > 0$, $\varepsilon \geq 0$. По теоремам выше, $I(a, \varepsilon)$ непрерывна. Для почленного дифференцирования, докажем равномерную сходимость по Вейерштрассу:

$$|\cos(ax) \cdot e^{-\varepsilon x}| \leq e^{-\varepsilon x}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} \, dx = \frac{1}{\varepsilon}$$

получим

$$I'_a(a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx$$

при $a \geq a_0 > 0$, $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$. Интегрируем по частям:

$$I'_a(a, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{a}{\varepsilon} \cdot \int_0^{+\infty} \sin ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx = \frac{\varepsilon}{a^2} - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \cdot \int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx$$

получили уравнение:

$$I'_a(a, \varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow I'_a(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + a^2} \Rightarrow I(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon} + C(\varepsilon)$$

При $a = 0$: $I(a, \varepsilon) = 0 \Rightarrow C(\varepsilon) = 0$. Значит

$$I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$ из непрерывности

$$I(a) = \frac{\pi}{2}$$

□

5 Эйлеровы интегралы

5.1 Гамма-функция Эйлера

Рассмотрим последовательность

$$\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)! n^x}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) &= \prod_{k=1}^{n-1} k \cdot x(1+x)(1+\frac{x}{2}) \dots (1+\frac{x}{n-1}) = \\ &= (n-1)! \cdot x(1+x)(1+\frac{x}{2}) \dots (1+\frac{x}{n-1}) \\ n^x &= \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \end{aligned}$$

таким образом

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{1}{x(1+x)(1+\frac{x}{2}) \dots (1+\frac{x}{n-1})} \cdot \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \end{aligned}$$

Поскольку $(1 + \frac{x}{k})^{-1}(1 + \frac{1}{k})^x = 1 + O(\frac{1}{k^2})$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x$$

Этот предел обозначают $\Gamma(x)$.

Определение. $\Gamma(x)$ называется гамма-функцией Эйлера.

Теорема. (Основное функциональное соотношение)

$\forall x \in D(\Gamma)$:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^{x+1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k+1)(n-1)! n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n} = x$$

□

Теорема. (Интегральное представление гамма-функции)

$\forall x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Доказательство. Для начала вычислим интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt &= \frac{1}{x} \cdot \int_0^1 (1-t)^n dt^x = \frac{n}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{n-1} dt = \dots = \\ &= \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \cdot \int_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \\ &= \frac{n! (n+1)^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \cdot \frac{1}{(n+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \cdot \Gamma_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \cdot \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \left| t = \frac{\tau}{n} \right| = \frac{(n+1)^x}{n^x} \cdot \int_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n} \right)^n d\tau$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^x}{n^x} = 1$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n} \right)^n d\tau = \Gamma(x)$$

и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Таким образом, условия теоремы равносильны тому, что разность этих пределов равна нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt = 0$$

$$e^\alpha \geq 1 + \alpha \Rightarrow e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \Rightarrow e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n$$

отсюда

$$\int_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt \geq 0$$

$$e^\alpha \geq 1 + \alpha \Rightarrow e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \Rightarrow e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n} \right)^n$$

$$\begin{aligned} \int_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt &= \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \left(1 + \frac{t}{n} \right)^n \right) dt = \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right)^n \right) dt \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n} \right) \right) dt = \frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t} dt \stackrel{(2)}{\leq} \frac{C}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(1): По неравенству Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(2):

$$C = \int_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} dt$$

□

Утверждение.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Доказательство. Индукция по n . База $n=0$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Таким образом

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$$

Шаг: Пусть верно для n , то есть

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

По основному функциональному соотношению:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

□

Теорема. (Формула дополнения для гамма-функции Эйлера)

$\forall x \notin \mathbb{Z}$:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) &= \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \cdot (-x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-x} = \\ &= \frac{\pi}{\pi x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \cdot 1 \stackrel{(1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \end{aligned}$$

(1): по формуле разложения синуса в бесконечное произведение:

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

□

Теорема. (Интеграл Эйлера-Пуассона)

Заметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

Таким образом, можем посчитать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5.2 Формула Стирлинга

Теорема. (Формула Стирлинга)

Для $|\alpha_n| \leq 2$:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Доказательство.

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

Исследуем подынтегральную функцию на максимум:

$$(t^n e^{-t})' = n \cdot t^{n-1} e^{-t} - t^n e^{-t} = 0 \Rightarrow t_{\max} = n \Rightarrow \max(t^n e^{-t}) = n^n e^{-n}$$

отсюда

$$n! = n^n e^{-n} \cdot \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{n \ln \frac{t}{n} + n - t} dt$$

Хотим сделать замену $-x^2 = n \ln \frac{t}{n} + n - t = n \ln \left(1 + \frac{t-n}{n}\right) + n - t$

Найдём связь дифференциалов при такой замене:

$$-2x dx = \left(\frac{n}{t} - 1\right) dt \Rightarrow dt = 2x \frac{t}{t-n} dx \quad (1)$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\ln(1 + \tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \theta\tau)^2}, \quad |\theta| < 1$$

$$\begin{aligned} -x^2 &= n \ln \left(1 + \frac{t-n}{n}\right) + n - t = \\ &= n \left(\frac{t-n}{n} - \frac{(t-n)^2}{2n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \theta_n \cdot \frac{t-n}{n}\right)^2} \right) + n - t = \\ &= -\frac{(t-n)^2}{2n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \theta_n \cdot \frac{t-n}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

отсюда для получения монотонной на $[0, n]$ и $[n, +\infty]$ замены такой, что x и $t - n$ имели один знак, необходимо раскрыть модули таким образом:

$$x = \frac{t-n}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{1}{1 + \theta_n \cdot \frac{t-n}{n}} = \frac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n + \theta_n(t-n)}$$

$$nx + \theta_n(t-n)x = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot (t-n)$$

$$nx = (t-n) \left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x \right) \Rightarrow t-n = \frac{nx}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x} \Rightarrow t = \frac{nx + n \left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x \right)}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x}$$

подставим $t - n$ и t в выражение (1) для дифференциала:

$$\begin{aligned} dt &= 2x \cdot \frac{nx + n(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x)}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x} \cdot \frac{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x}{nx} dx = \\ &= 2(x + \sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x) dx = (\sqrt{2n} + 2(1 - \theta_n)x) dx \end{aligned}$$

После всех преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{n \ln \frac{t}{n} + n-t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot (\sqrt{2n} + 2(1 - \theta_n)x) dx = \\ &= \sqrt{2\pi n} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(1 - \theta_n)e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi n} + \beta_n \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |\beta_n| &= 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(1 - \theta_n)e^{-x^2} dx \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x| |1 - \theta_n| e^{-x^2} dx \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} dx = \\ &= 8 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 4 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx^2 = 4 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 4 \end{aligned}$$

Итого

$$n! = n^n e^{-n} (\sqrt{2\pi n} + \beta_n) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \right), \quad |\alpha_n| = \left| \frac{\beta_n}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq 2$$

□

5.3 Бета-функция Эйлера

Определение.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0$$

Утверждение. $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$

Доказательство.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^1 |t=1-x| = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = B(\beta, \alpha)$$

□

Утверждение.

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot B(\alpha, \beta)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} B(\alpha + 1, \beta) &= \int_0^1 x^\alpha (1 - x)^{\beta-1} dx = -\frac{1}{\beta} \int_0^1 x^\alpha d((1 - x)^\beta) = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 - x)^\beta dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 (x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1}) (1 - x) dx = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} dx - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^\alpha (1 - x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha + 1, \beta) \end{aligned}$$

□

Утверждение.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt &= \left| t = \frac{1}{1+x} \right| = \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\beta-1} (1+x)^{\alpha-1}} \cdot \left(-\frac{1}{(1+x)^2} dx \right) = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx \end{aligned}$$

□

Теорема. (Связь между гамма и бета функциями)

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$

Доказательство. Сначала рассмотрим $\alpha, \beta > 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \Gamma(\alpha + \beta) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-t} dt \right) dx = |t = (1+x)y| = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \left(\int_0^{+\infty} (1+x)^{\alpha+\beta} \cdot y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y-yx} dy \right) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y} \cdot e^{-yx} dy \right) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y} \cdot \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-yx} dx \right) dy = \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} \cdot e^{-y} \cdot \left(\int_0^{+\infty} (xy)^{\alpha-1} \cdot e^{-yx} d(yx) \right) dy = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)
\end{aligned}$$

Далее, используя рекуррентную формулу, распространяем на $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{aligned}
B(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} B(\alpha + 1, \beta) = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}{\alpha\beta} B(\alpha + 1, \beta + 1) = \\
&= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}{\alpha\beta} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}
\end{aligned}$$

□

Замечание. Интегралы вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\theta x \cdot \cos^\kappa x dx$$

сводятся к бета-функции с помощью замены $t = \sin^2 x$.

6 Ряды Фурье

Определение. Выражения вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называются тригонометрическими полиномами.

Определение. Система функций

$$\{1, \{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}, \{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}\}$$

называется тригонометрической системой.

Определение. Ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называются тригонометрическими рядами.

Утверждение. (Свойства тригонометрической системы)

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

$$\forall n \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \pi$$

$$\forall m, n \geq 1, \quad m \neq n \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \, dx = 0$$

$$\forall n \geq 0, m \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx) \, dx = 0$$

Доказательство. Очев. □

Следствие. Тригонометрическая система ортогональна относительно канонического скалярного произведения для функций (интеграл).

Теорема. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \stackrel{[-\pi, \pi]}{\Rightarrow} f(x)$$

Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Доказательство. Покажем для b_k . Для каждого k домножим на $\sin(kx)$:

$$\frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \sin(kx) \cos(nx) + b_n \cdot \sin(kx) \sin(nx)) \stackrel{[-\pi, \pi]}{\Rightarrow} f(x) \sin(kx)$$

Поскольку есть равномерная сходимость, то можем почленно интегрировать:

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 0$$

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi, & k = n \end{cases}$$

Таким образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi \cdot b_k$$

Аналогично, домножая на $\cos(kx)$, можно получить выражение для a_k . □

Определение. Пусть существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

Тогда числа

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Замечание. Из неравенства

$$|f(x)| \leq \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

следует, что если существует интеграл от квадрата, то существует и от модуля.

Теорема. Пусть существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

а также

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F_N(x))^2 \, dx = \min_{T_N} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 \, dx$$

где T_N — тригонометрический полином степени не выше N .

Доказательство. Пусть

$$T_N = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx))$$

произвольный тригонометрический полином степени N .

Хотим минимизировать

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot T_N(x) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_N^2(x) \, dx$$

Вычислим второй и третий интегралы через коэффициенты Фурье:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \pi \cdot a_0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \, dx = \pi \cdot a_n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx = \pi \cdot b_n$$

1.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot T_N(x) \, dx = \\ &= \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \sum_{n=1}^N \left(A_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \, dx + B_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx \right) = \\ &= \pi \left(\frac{A_0 \cdot a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n a_n + B_n b_n) \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} T_N^2(x) dx &= \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 dx + \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} (A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx))^2 dx = \\
&= \pi \cdot \frac{A_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2)
\end{aligned}$$

Таким образом

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi \left(\frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n a_n + B_n b_n) \right) + \pi \cdot \frac{A_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2)$$

Преобразуем члены с A_0, A_n и B_n :

$$\begin{aligned}
\pi \cdot \frac{A_0^2}{2} - 2\pi \cdot \frac{A_0 a_0}{2} &= \pi \left(\frac{A_0^2}{2} - A_0 a_0 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} (A_0 - a_0)^2 - \frac{1}{2} a_0^2 \right) \\
\pi A_n^2 - 2\pi A_n a_n &= \pi ((A_n - a_n)^2 - a_n^2) \\
\pi B_n^2 - 2\pi B_n b_n &= \pi ((B_n - b_n)^2 - b_n^2)
\end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{\pi}{2} (A_0 - a_0)^2 + \\
&\quad + \pi \sum_{n=1}^N ((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2) - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

Члены не зависящие от A_0, A_n и B_n , обозначим:

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$$

тогда

$$I = C + \frac{\pi}{2} (A_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{n=1}^N ((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2)$$

Поскольку $\pi > 0$, ясно, что I минимально, когда все квадраты равны нулю.

Значит $\forall n$:

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n$$

а это и означает, что $T_N(x) = F_N(x)$.

□

Следствие. (Неравенство Бесселя)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Доказательство. Из доказательства теоремы, заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \cdot \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) - \pi \cdot \frac{a_0^2}{2} \geq 0$$

это так, поскольку это часть слагаемых вычисленного интеграла от квадрата функции. Отсюда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

□

Следствие. При $n \rightarrow \infty$ выполнено, что $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$

Доказательство. По неравенству Бесселя частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

ограничены, при этой ряд состоит из неотрицательных членов, значит он сходится. Таким образом, по необходимому условию сходимости

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0$$

□

6.1 Ядра Дирихле

Определение. N -м ядром Дирихле называется

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

Теорема. (Свойства ядер Дирихле)

1. D_N непрерывная, четная и 2π -периодичная функция.
2. $D_N(0) = N + \frac{1}{2}$

3.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

4. $\forall x \neq 2\pi k$:

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{2 \cdot \sin(\frac{x}{2})}$$

Доказательство.

1. Очев

2.

$$D_N(0) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos 0 = N + \frac{1}{2}$$

3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \sum_{n=1}^N \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \pi$$

4. Умножим обе части на $2 \sin(\frac{x}{2})$:

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_N(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{n=1}^N 2 \cos(nx) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \cos(nx) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(nx - \frac{x}{2}\right)$$

Подставляем в сумму:

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_N(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{n=1}^N \left(\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n - \frac{1}{2})x\right) \right)$$

Все промежуточные слагаемые сокращаются, остаётся:

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_N(x) = \sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)$$

Отсюда, при $x \neq 2\pi k$:

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

□

Замечание. Частичную сумму ряда Фурье можно представить через ядра Дирихле:

$$\begin{aligned}
 F_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^N \left(\cos(nx) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt + \sin(nx) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) \cdot \sum_{n=1}^N (\cos(nx) \cos(nt) + \sin(nx) \sin(nt)) \right) dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) \cdot \sum_{n=1}^N \cos(n(x-t)) \right) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_N(x-t) dt \stackrel{(1)}{=} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-\tau) D_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau) D_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_N(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

(1): Сделаем замену $t = x - \tau$.

Отсюда

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+\tau) + f(x-\tau)) D_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x+\tau) + f(x-\tau)) D_N(\tau) d\tau$$

Теорема. (Принцип локализации Римана)

Пусть существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Тогда существование предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx_0) + b_n \cdot \sin(nx_0)) \right) = A$$

равносильно тому, что $\forall \delta > 0$ существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt = A$$

Доказательство.

$$F_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt$$

значит, формулировка теоремы равносильна утверждению, что $\forall \delta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt = 0$$

Выразим ядро Дирихле в явной форме:

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \cdot \sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin(Nt) \cos(\frac{t}{2}) + \cos(Nt) \sin(\frac{t}{2})}{2 \cdot \sin(\frac{t}{2})} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(Nt) + \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(Nt) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \cdot \cos(Nt) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(Nt) dt = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Определим две вспомогательные функции на $[-\pi, \pi]$:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}, & t \in [\delta, \pi] \\ 0, & t \in [-\pi, \delta] \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, & t \in [\delta, \pi] \\ 0, & t \in [-\pi, \delta] \end{cases}$$

Тогда I_1 и I_2 — в точности коэффициенты Фурье этих функций, а они стремятся к нулю. □

Теорема. (Признак Дини поточечной сходимости ряда Фурье)

Пусть $f(x)$ — 2π периодическая, существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

для $x_0 \in [-\pi, \pi]$ существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f_-(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f_+(x_0)$$

Если $\exists \delta > 0$ такой, что существует интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 и равен $\frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt - \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^\pi D_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) D_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\delta (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) \cdot \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \\ & \frac{1}{\pi} \cdot \int_\delta^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) \cdot \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = I_1 + I_2 \\ & |I_1| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{2 \sin \frac{t}{2}} dt < \varepsilon \end{aligned}$$

$|I_2| < \varepsilon$ при большом N (из принципа локализации Римана). □

Определение. Функция $f(x)$ называется Гёльдеровой, если $\exists C > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^\alpha$$

Определение. Для функции $f(x)$ выполнено условие Гёльдера в точке x_0 для односторонних пределов, если $\exists C > 0, \alpha > 0, \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta)$:

$$|f(x_0 + t) - f_+(x_0)| \leq Ct^\alpha, \quad |f(x_0 - t) - f_-(x_0)| \leq Ct^\alpha$$

Следствие. Если функция удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0 (хотя бы односторонне), то выполнен признак Дини, значит ряд Фурье в этой точке сходится к среднему арифметическому односторонних пределов.

Теорема. Пусть f - 2π периодическая, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, везде кроме конечного числа точек (на периоде) $\exists f'(x)$ и $f'(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \stackrel{[-\pi, \pi]}{\Rightarrow} f(x)$$

Доказательство. Из условий теоремы существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx$$

то есть у $f'(x)$ есть ряд Фурье:

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)) =$$

Найдём его коэффициенты (кроме α_0):

$$\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) d(\sin(nx)) = n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = nb_n$$

Отсюда (и аналогично для β_n) имеем, что

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n}, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n}$$

и, поскольку (используя неравенство: $2|ab| \leq a^2 + b^2$)

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad |b_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

верно неравенство

$$|a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2}$$

Ряд с такими коэффициентами сойдётся из неравенства Бесселя, то есть изначальный ряд Фурье сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. \square

Следствие. Если $f'(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и Гёльдерова во всех точках, то ряд Фурье $f(x)$ можно почленно дифференцировать.

Доказательство. очев. \square

Замечание. (Про почленное интегрирование)

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

$$\int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \cdot \sin(nx) - \frac{b_n}{n} \cdot \cos(nx) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

$$\frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Примеры.

1. Возьмем $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ на $(0, \pi)$ и продолжим ее периодически нечетным образом.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \cdot \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{\pi-x}{2} \cdot \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

2. Возьмем $f(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$ и периодически продолжим.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \cdot \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}, n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

Отсюда, поскольку ряд сходится равномерно от непрерывной функции к непрерывной функции, то можно подставить 0 и получить

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

отсюда можно получить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6.2 Ядра Фейера

Определение. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Обозначим:

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Тогда:

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=0}^N F_n(x)$$

называются суммами Фейера.

$$\Psi_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=0}^N D_n(x)$$

называются ядрами Фейера.

Лемма. (Свойства ядер Фейера)

1. $\psi_N(x)$ - 2π периодическая, непрерывная, четная.
- 2.

$$\Psi_N(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2} \cdot x\right)}{2(N+1) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- 3.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x) dx = 1$$

4. $\forall \delta > 0 :$

$$\int_{\delta}^{\pi} \Psi_N(x) dx \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$.

5. $\Psi_N(x) \geq 0$

Доказательство.

- 2.

$$\sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{n=0}^N \sin\left(nx + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4.

$$0 \leq \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2} \cdot x)}{2(N+1) \cdot \sin^2(\frac{x}{2})} dx \leq \frac{1}{2(N+1)} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2(\frac{x}{2})} \leq \frac{C}{2(N+1)}$$

□

Теорема. (Теорема Фейера)

Если $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и 2π периодическая, то $\Phi_N(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \cdot \cos(nx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \cdot \sin(nx) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(t-x)) \right) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \cdot D_N(t) dt \end{aligned}$$

Получили:

$$F_N(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \cdot f(t+x) dt$$

отсюда

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(t) f(t+x) dt$$

$$\begin{aligned} |\Phi_N(x) - f(x)| &= \frac{1}{\pi} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x) \cdot (f(t+x) - f(x)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{-\delta} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)| dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)| dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot 2M \cdot 2 \end{aligned}$$

(будет пояснено)

□

Теорема. (Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции на отрезке многочленами)

Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, а также $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon(x)$ такой, что

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Доказательство. Линейной заменой получим, что достаточно доказать для отрезка $[0, \pi]$, затем непрерывно продолжаем ее до отрезка $[-\pi, \pi]$. Тогда по теореме Фейера существует тригонометрический многочлен, приближающий функцию. Затем раскладываем синусы и косинусы по формулам Тейлора и получаем утверждение теоремы.

(была доказана устно, тоже будет пояснено) □

Теорема. (Равенство Парсеваля)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \\ &+ 2 \left(\frac{a_0}{2} - \frac{A_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^N ((a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2) - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists T_N(x)$ такой, что

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$$

отсюда

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

значит

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

□

Список литературы

- [1] Лекции по математическому анализу, 1 семестр, Подольский В.Е., 2024
- [2] Лекции по математическому анализу, 2 семестр, Подольский В.Е., 2025
- [3] Лекции по математическому анализу, 3 семестр, Подольский В.Е., 2019