Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

12 сентября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left|\sum_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Очевидно по критерию коши для последовательности

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = S_m - S_{k-1}$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев. □

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)
Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса для последовательности S_n. □

Теорема. (Признак сравнения)
Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0)$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

расходится.

Доказательство. Очевидно из неравенства

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

□

Теорема. (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. □

Пример. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Пример. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$
сходится.

Пример. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
сходится.

Теорема. (Признак Коши)
Пусть дан ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$
такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $\exists \ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.
2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд $(*)$ сходится
2. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $(*)$ расходится

Доказательство. Очев. $\square$

Пример. Пример, что при $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1. $$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$
   расходится
2. $$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$
   сходится

Теорема. (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\ dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N} : f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ на $[k, k+1]$. Проинтегрируем неравентсво на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\ dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\ dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

$\square$

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1. $$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2. $$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\beta x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3. $$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\gamma (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^\gamma (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0 \tag{$*$}$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}, \ c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что

   $$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$

   то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

   расходится и

   $$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

   то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_N \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

   сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

   поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

   значит

$$\sum_{m=1}^{k} a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

   и ряд сходится.

2.

$$c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \leq 0$$
$$\frac{c_N}{c_{N+1}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

   Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

   перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

   отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

   расходится.

$\square$

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$
   значит если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$
   значит если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Теперь
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$$

то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
Если
$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q > 1$$
то ряд $(*)$ сходится. Если
$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q < 1$$
то ряд $(*)$ расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
   Выводится из признака Бертрана.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$
ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:
$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \right| \le \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$
□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой $\mathbb{N}$.

Теорема. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tag{2}$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Рассмотрим

$$S_K^{\sigma} = \sum_{n=1}^{K} a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max\limits_{1 \leq n \leq K} \sigma(n)$. Тогда

$$S_K^{\sigma} \leq S_N \Rightarrow S_K^{\sigma} \leq S \Rightarrow \exists\ S^{\sigma} = \lim_{K \to \infty} S_K^{\sigma} \text{ и } S^{\sigma} = S$$

Используя что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^{\sigma} \Rightarrow S = S^{\sigma}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

далее рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

$\square$

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1,k=1}^{\infty,\ \infty}$$

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \ldots \end{matrix} \tag{$*$}$$

Ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_n b_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме $(*)$.

Определение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_n b_k)_m$$

сходится абсолютно и равен AB.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_n b_k)_m:\ S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \text{ и } S_{N^2} \to AB,\ N \to \infty$$

$$S_{N^2+M,\ (1\le M\le 2N)} = S_{N^2} + \sum_{m=1}^{N^2+M}(a_n \cdot b_k)_m = S_{N,M}$$

$$|S_{N,M}| \le |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \cdots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \cdots + |b_N|) < \varepsilon$$

□

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n,\ a_n > 0, \\ 0,\ a_n \le 0. \end{cases},\ a_n^- = \begin{cases} 0,\ a_n \ge 0, \\ a_n,\ a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{2}$$

расходтся к $+\infty$ и $-\infty$ соответсвенно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится. Аналогично случай, когда (2) сходится, а (1) расходится. □

Теорема. (Теорема Римана)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists\ \sigma_{\pm\infty}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{\pm\infty}} = \pm\infty$$

$\exists\ \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. доказали картинками))))) □