Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

3 октября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию коши для последовательности S_n:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев. □

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0 \qquad (*)$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд $(*)$ сходится. $\square$

Теорема. (Признак сравнения)
Пусть даны ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0) \tag{1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0) \tag{2}$$
и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.

2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы
$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$
$\square$

Теорема. (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$
Если существует предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$
то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что
$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$
$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$
по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. $\square$

Примеры.

1. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

2. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$
сходится.

4. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
сходится.

Теорема. (Признак Коши)
Пусть дан ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$
такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.

2. Если $\exists \, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$
то ряд $(*)$ сходится

2. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$
то ряд $(*)$ расходится

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Пример. При $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1.
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$
и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
расходится.

2.
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$
и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
сходится.

Теорема. (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1,+\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\, dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\, dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1. $$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2. $$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\beta} x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3. $$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0 \tag{$*$}$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty},\ c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$
то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$
расходится и
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$
то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:
$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_N \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$
сложив все неравенства, получим
$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$
поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то
$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$
значит
$$\sum_{m=1}^{k} a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$
и ряд сходится.

2.
$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$
$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \quad\vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$
$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит расходится и ряд $(*)$.

□

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:
$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$
   значит если
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

то ряд $(*)$ расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$

   Значит если

$$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq 1 + \alpha$$

   то ряд $(*)$ сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

   Значит если

$$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$$

   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q > 1$$

   то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q < 1$$

   то ряд $(*)$ расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если

$$\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1) \geq 1 + \alpha$$

то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1) \leq 1$$

то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} (\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1)) = q > 1$$

то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} (\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1)) = q < 1$$

то ряд $(*)$ расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
Выводится из признака Бертрана.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

где θ_n - ограниченная последовательность, $\varepsilon > 0$ - произвольное. Тогда при

   (a) $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$ сходится, $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.

   (b) $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$ сходится, $\mu < 1 \Rightarrow (*)$ расходится.

   (c) $\lambda = 1,\ \mu = 1 \Rightarrow (*)$ расходится.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^{N} a_n \right| \le \sum_{n=k}^{N} |a_n| < \varepsilon$$

$\square$

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tag{2}$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \ge 0$. Рассмотрим

$$S_k^{\sigma} = \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max\limits_{1 \le n \le k} \sigma(n),\ S_n \to S$. Тогда

$$S_k^{\sigma} \le S_N \Rightarrow S_k^{\sigma} \le S \Rightarrow \exists\ S^{\sigma} = \lim_{k\to\infty} S_k^{\sigma}$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \le S^{\sigma} \Rightarrow S = S^{\sigma}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a,\ \ a \ge 0, \\ 0,\ \ a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty, \ \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1, \ a_1b_2, \ a_2b_2, \ a_2b_1, \ a_1b_3, \ a_2b_3, \ a_3b_3, \ a_3b_2, \ a_3b_1, \ \ldots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме $(*)$.

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m \qquad (*)$$

сходится абсолютно и равен AB.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда $(*)$, которые имеют вид S_{N^2}:

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \to AB,\ N \to \infty$$

Теперь перейдем к общему виду $S_{N^2+M},\ (1 \leq M \leq 2N)$ и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \dots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \dots + |b_N|) \to 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит $S_{N^2+M} \to AB$. □

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n,\ a_n > 0, \\ 0,\ a_n \leq 0. \end{cases},\ a_n^- = \begin{cases} 0,\ a_n \geq 0, \\ a_n,\ a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{2}$$

расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит оба ряда расходятся. □

Теорема. (Теорема Римана)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists\ \sigma_{\pm\infty}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{\pm\infty}} = \pm\infty$$

$\exists\ \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. доказали картинками)))))
доказательство появится немного позже □

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$(\mathcal{A})$: Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а b_n монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

$(\mathcal{D})$: Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^{p} a_n,\ A_{k-1} = 0 \ \Rightarrow \ a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1} \cdot b_n =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m$$

$(\mathcal{A})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)
Если a_n монотонно убывает и $a_n \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \tag{$*$}$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1,\ \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд $(*)$ сходится. □

1.4 Функциональные последовательности и ряды

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0,1]$:

$$x^n \to \begin{cases} 1, \ x = 1, \\ 0, \ x \in [0,1). \end{cases}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\frac{x}{n} \to 0$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A, и пишут $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Примеры.

1. На $[0,1]$

$$x^n \not\rightrightarrows \begin{cases} 1, \ x = 1, \\ 0, \ x \in [0,1]. \end{cases}$$

   поскольку $\exists \ \varepsilon_0 > 0, \ \forall N_\varepsilon \ \exists \ n > N_\varepsilon, \ \exists \ x_{\varepsilon_0} \in [0,1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.

2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \rightrightarrows 0$.

3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0,1] : f_n \rightrightarrows 0$.

$$f_n' = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \ f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \not\rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$, но $\forall a, b, \ \forall x \in [a,b] : \sin\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \sup_A |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Доказательство.

($\Rightarrow$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $\forall x \in A$:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

($\Leftarrow$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

($\Rightarrow$):

$$|f_k(x) - f_m(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$$

($\Leftarrow$): Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$. Тогда после предельного перехода получим, что $\forall x \in A$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимотси последовательности) Пусть $\forall x \in A : f_n(x) \to f(x)$. Если

$$\exists \ \{c_n\}_{n=1}^\infty, \ c_n \geq 0, \ c_n \to 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$$

Доказательство. Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall n > N,\ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N_\varepsilon$ и запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon\end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^x f_n(t)\ dt\ \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_a^x f_n(t)\ dt - \int\limits_a^x f(t)\ dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b-a| < \varepsilon \cdot |b-a|$$

□

Теорема. (Теорема о почленном дифференцировании функциональных последовательностей)
Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ \exists\ x_0 \in [a,b]$:

$f_n(x_0) \to \alpha$. Пусть $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$. Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$ и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\ dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt\ \Rightarrow\ f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt$$

отсюда

$$f_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt + \alpha = f(x)$$

□

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$, определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\},\ \{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд (1) сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, то говорят, что ряд (1) сходится равномерно.
3. Если сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$
то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m, k > N_\varepsilon,\ \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для функциональных последовательностей

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Необходимое условие равномерной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

тогда и только тогда, когда $|a_n(x)| \overset{A}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство.

$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \rightrightarrows S(x) - S(x) = 0$$

□

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $S_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$ и $\forall n : a_n(x)$ непрерывна в точке x_0. Значит, $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0 и по теореме для функциональных последовательностей, $S(x)$ непрерывна в точке x_0. □

Теорема. Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^x a_n(t)\ dt \right) \rightrightarrows \int\limits_a^x S(t)\ dt = \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)$$

Доказательство. будет чуть позже. □

Теорема. (Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов) Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \alpha$$

$x_0 \in [a,b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}\ S(x) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ S'(x) = g(x)$$

Доказательство. Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности $S_n(x)$. □

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Пусть $\forall n : |a_n(x)| < \alpha_n,\ \forall x \in A$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A.

($\mathcal{A}$:) Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

и $\exists\ M > 0,\ \forall x \in A,\ \forall n : |b_n(x)| < M$ и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$.

($\mathcal{D}$:) Пусть $\forall x \in A,\ \exists\ M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N} :$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right| \leq M$$

и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$, причем $b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Доказательство. Аналогично как для числовых рядов. Введем:

$$A_p(x) = \sum_{n=k}^{p} a_n(x),\ A_{k-1}(x) = 0\ \Rightarrow\ a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

отсюда

$$\sum_{n=k}^{m} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=k}^{m}(A_n(x) - A_{n-1}(x))\ b_n(x) =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1}(x)b_n(x) =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)b_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x)b_m(x)$$

$(\mathcal{A})$: $|*| \leq \varepsilon \cdot |b_k(x) - b_m(x)| + |b_m(x)| < \varepsilon \cdot 3M$

$(\mathcal{D})$: $|*| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$

$\square$

1.5 Степенные ряды

Определение. Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называются степенными рядами. a_n - коэффициэнты степенного ряда, x_0 - центр разложения.

Замечание. В центре разложения ряд сходится.

Замечание. Сдвиг $x - x_0 \mapsto x$ не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема. (Первая теорема Абеля)
Рассмотрим стеепнной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

Если существует $x' \in \mathbb{R}$, что $(*)$ сходится в точке x', то для любых x, таких, что $|x| < |x'|$ ряд $(*)$ сходится. Если существует $x'' \in \mathbb{R}$, что ряд $(*)$ расходится в точке x'', то для любых x, таких что $|x| > |x''|$ ряд $(*)$ расходится.

Доказательство. Пусть $x : |x| < |x'|$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n (x')^n| \cdot \left| \frac{x}{x'} \right|^n \right) \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x'} \right|^n$$

Ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии. Теперь пусть $x : |x| > |x''|$. От противного: пусть есть точка $y : |y| > |x''|$ в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках $x : |x| < |y|$, а значит и в x'' - противоречие. □

Замечание. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ сходится, $A \neq \varnothing$, так как $\{0\} \in A$.
Пусть $B \subset \mathbb{R}$ - все точки в которых ряд $(*)$ расходится и пусть $B \neq \varnothing$.
Тогда из первой теоремы Абеля следует, что $A = \{0\}$ или $\exists\ a > 0 : (-a, a) \subset A$, а также $\exists\ b > 0 : (-\infty, -b) \cap (b, +\infty) \subset B$.

Утверждение. $a = b$

Доказательство. Предположим что это не так, тогда $a < b$ $(b < a)$. По аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$. Значит c не лежит ни в A ни в B, а такого быть не может, противоречие. □

Определение. $a = b$ называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R. Если $R = 0$, то $A = \{0\}$, если $B = \varnothing$, то $R := +\infty$.

Теорема. (Формула Коши-Адамара)
Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Если предел равен нулю, то $R = +\infty$. Если предел равен бесконечности, то $R = 0$.

Доказательство. Применим признак Коши к ряду

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1 \ - \ \text{сходится, и } |x| < R, \\ l > 1 \ - \ \text{расходится, и } |x| > R \end{cases}$$

□

Теорема. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \tag{$*$}$$
и пусть $R > 0$.

1. $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ряд равномерно сходится.
2. $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int\limits_0^x S(t)\ dt$$
4. $S(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(-R, R)$.

Доказательство.

1. $|a_n x^n| = |a_n| \cdot (R-\varepsilon)^n$ по признаку Вейерштрасса.
2. из пункта 1: $\forall \varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R+\varepsilon, R-\varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. Поскольку ряд $(*)$ равномерно сходится на любом отрезке внутри $[-R, R]$, то
$$\int\limits_0^x S(t)\ dt = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x a_n t^n\ dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
4. Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
значит $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\alpha} x^n$$
имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости R. Тогда, По теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

□

Теорема. (Вторая теорема Абеля)
Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ \ R > 0$$

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Тогда $S(x) \in \mathcal{C}[0, R]$ то есть

$$\exists \lim_{x \to R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = S(R)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на $[0, R]$. □

1.6 Ряды Тейлора

Определение. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(B(x_0))$. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром ряда x_0.

Замечание. Далее везде центр разложения в 0.

Теорема. Пусть в $B(0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

Тогда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Доказательство. Очевидно. □

Теорема. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(-a, a)$ и $|f^{(n)}(x)| \leq A^n,\ A > 0$.
Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\forall x \in (-a, a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Тогда
$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right|=\left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1}\right|\le\frac{A^{N+1}\cdot a^{N+1}}{(N+1)!}\to 0$$

$\square$

Пример. Рассмотрим функцию
$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$$
Несложно проверить, что $f(x)\in C^\infty(B(0)),\ f^{(n)}(0)=0$.
Значит,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0\neq f(x)$$
Пример. (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)
Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$
Этот ряд сходится на $(-1,1)$, причём
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\xrightarrow[x\to 1-0]{}\frac{1}{2}$$
но ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$
не сходится.

Лемма. Если $a_n\to A$ при $n\to\infty$, то
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n\to A$$
Доказательство.
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n-A\right|=\frac{\left|\sum\limits_{n=1}^{N}a_n-AN\right|}{N}\le$$
$$\le\frac{\left|\sum\limits_{n=1}^{N_1}a_n-AN_1\right|}{N}+\frac{\sum\limits_{n=N_1+1}^{N}|a_n-A|}{N}<\varepsilon\cdot\frac{N-N_1}{N}+\varepsilon<2\varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Теорема Таубера)
Пусть
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
сходится на $(-1, 1)$,
$$\exists \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$
и пусть $a_n = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{n}), n \to \infty$.
Тогда
$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

Доказательство. Обозначим $\forall x \in (0, 1)$
$$N_x = \left[\frac{1}{1-x}\right]$$
и введём функцию
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
Если $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1-0$, то теорема доказана.
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)(1+x+...x+x^{n-1})\right| \le \frac{1}{\frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n| n \le$$
$$\le \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n n| \to 0 \text{ при } x \to 1-0$$

$$\left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n\right| < \frac{1}{N_x+1} \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \varepsilon x^n < \frac{\varepsilon}{N_x+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$
$$= \frac{\varepsilon}{N_x+1} \cdot \frac{1}{1-x} < \varepsilon$$

Отсюда $|\varphi(x)| < 2\varepsilon \ \forall n > N_x$. □

1.7 Бесконечные произведения

Определение. Рассмотрим $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k\}_{n=1}^{\infty}$.
Пара последовательностей $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется бесконечным произведением чисел $\{u_n\}$, обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

u_n - общий член, Π_n - частичное произведение.

Определение. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = a \neq 0$.
$\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся, если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = 0$. Если $\exists n : u_n = 0$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся к 0.

Теорема. (Необходимое условие сходимости) Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $u_n \to 1$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1$$

□

Следствие. Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n,\ \ a_n \to 0$$

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln{(1 + a_n)}$$

сходится.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\Pi_N \text{ - сходится} \Rightarrow \ln(\Pi_N) \text{ - сходится, } \ln(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} ln(1+a_n) \text{ - сходится}$$

(⇐):

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1+a_n) \text{ - сходится} \Rightarrow e^{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \ln(1+a_n)\right)} \text{ - сходится} \Rightarrow \Pi_N \text{ - сходится}$$

□

Определение. Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответсвующий ряд из логарифмов.

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$$

из этого следует утверждение в обе стороны. □

Следствие. Если a_n знакопостоянны, то произведение и соответсвующий ряд из логарифмов сходятся или расходится одновременно.

Теорема. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Доказательство.

$$\ln(1+a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{\bar{o}}(a_n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

□

Замечание. Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n(x))$$

анализируя соответсвующий функциональный ряд из логарифмов.

Пример. (Пример Эйлера)
Пусть p_k обозначает k-е простое число. Тогда при $s>1$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ls}}\right)=\sum\frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\dots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}<\sum\frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\dots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Тогда

$$\sum\frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\dots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s),\ N\to\infty$$

Теорема. $\forall x\neq\pi k$:

$$\sin x=x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)$$

Доказательство. $\forall n:\sin((2n+1)x)=(2n+1)\sin x\cdot P_n(\sin^2 x)$
это утверждение можно показать по индукции, с базой $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$$\sin((2n+1)x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2n+1},\ k\in\mathbb{Z}$$

при этом

$$P_n(\sin^2 x)=0,\ x=\frac{\pi k}{2n+1},\ k=1,\dots,n$$

$$P_n(\omega)=0\Leftrightarrow\omega=\sin^2\frac{\pi k}{2n+1},\ k=1,\dots,n$$

Заметим, что

$$P_n(\sin^2 x)=\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}\to 1,\ x\to 0$$

Тогда

$$P_n(\omega)=\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{\omega^2}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}})$$

$$P(\sin^2 x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}$$

сделаем замену: $(2n+1)x = t$

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

$\square$