

Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

7 февраля 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа

Telegram: [@fourkenz](https://www.t.me/fourkenz)

GitHub: [yakovlevki](https://github.com/yakovlevki)

Содержание

1	Неопределённый интеграл	3
1.1	Таблица интегралов	4
1.2	Интегрирование рациональных дробей	4

1 Неопределённый интеграл

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a, b) . Если $\exists F(x)$ определённая на (a, b) такая, что $F(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ и $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной (функцией) для $f(x)$.

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a, b) . Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ называется неопределённым интегралом $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Теорема. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на (a, b) . Тогда $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$, $C = const$, $C \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$.

Пусть $\varphi(x)$ - первообразная $f(x)$. Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа $\varphi(x) - F(x) = const$, ч.т.д. □

Свойства неопределённого интеграла:

1. $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

(При $c = 0$ множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2.

$$\int (f \pm g)dx = \int f dx + \int g dx$$

3. (Замена переменной)

Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a, b) .

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ и $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ Тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на (α, β) .

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть $u, v \in \mathcal{D}(a, b)$.

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\int (uv)'dx = \int uv'dx + \int u'vdx$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int u'dv = uv - \int vdu$$

Замечание. Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x)$$

1.1 Таблица интегралов

1.

$$\int (x^\alpha)dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

2.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases} ;$$

3.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

4.

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C;$$

5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

6.

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

Когда-нибудь здесь будет полная табличка в соответствии с учебником - но не сейчас)

1.2 Интегрирование рациональных дробей

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad P(x), Q(x) - \text{многочлены}$$

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{\beta_k}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int (\tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{\aleph_{1i}}{(x-a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n} \frac{\aleph_{ni}}{(x-a_n)^{\alpha_{ni}}} + \sum_{j=1}^{\beta_1} \frac{\rho_{1j}x + \omega_{1j}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_{1i}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\rho_{kj}x + \omega_{kj}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_{kj}}}) dx$$

1.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln |x-a|, & n = 1 \\ \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}, & n > 1 \end{cases}$$

2.

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} d(x + \frac{p}{2}) = \int \frac{(\alpha_1 t + \beta_1) dt}{(t^2 + q_1^2)^k}$$

Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + q_1^2)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{(t^2 + q_1^2)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + q_1^2)}{(t^2 + q_1^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(t^2 + q_1^2), & k = 1 \\ \frac{(t^2 + q_1^2)^{1-n}}{2(1-k)}, & k > 1 \end{cases}$$

А второй на следующей лекции)