# Математический анализ-1

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

7 января 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа tg: @fourkenz

# Содержание

# 1 Элементы теории множеств

## 1.1 Условности и обозначения

**Определение.** Кванторами будем называть символы, заменяющие слова в выражениях.

**Замечание.** Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- $\forall$ - квантор всеобщности
- $\exists$ - квантор существования
- ! - квантор единственности
- Запись $A \Rightarrow B$ обозначает, что из высказывания $A$, следует высказывание $B$.
- Запись $A \Leftrightarrow B$ обозначает, что высказывание $A$ равносильно высказыванию $B$.
- Запись $a \in A$ означает, что $a$ является элементом множества $A$, отрицанием такой записи будет $a \notin A$
- Если $x$ - объект, а $P$ - свойство, то запись $\{x : P(x)\}$ означает класс всех объектов обладающих свойством $P$.

**Определение.** Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

**Определение.** Множество $A'$ является подмножеством множества $A$, если $\forall a : a \in A' \Rightarrow a \in A$. Если $A'$ - подмножество А, то пишут $A' \subset A$.

**Определение.** Для любого множества $A$ выполнено:

1. $\varnothing \subset A$.
2. $A \subset A$.

**Определение.** Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то $A$ называется собственным подмножеством множества $B$.

## 1.2 Операции над множествами

**Определение.** Множество $C = A \cup B$ называется объединением множеств $A$ и $B$, если $\forall a : (a \in A \Rightarrow a \in C)$ и $\forall b : (b \in B \Rightarrow b \in C)$, а также $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ или $c \in B)$.

**Определение.** Множество $C = A \cap B$ называется пересечением множеств $A$ и $B$, если $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ и $c \in B)$, а также $\forall c : (c \in A$ и $c \in B) \Rightarrow c \in C$.

**Определение.** Множество $C = A \setminus B$ называется разностью множеств $A$ и $B$, если $\forall c : (c \in A$ и $c \notin B) \Rightarrow c \in C$, а также $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ и $c \notin B)$

**Утверждение.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

*Доказательство.* $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A$ или $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ или $(a \in B$ и $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ или $a \in B)$ и $(a \in A$ или $a \in C)$. $\square$

**Утверждение.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

*Доказательство.* $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A$ и $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \in B$ или $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \in B)$ или $(a \in A$ и $a \in C)$. $\square$

## 1.3 Декартово произведение множеств

**Определение.** Множество $A$ называется одноэлементным, если $\exists\, a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\} = \varnothing$.

**Определение.** Множество $A$ называется двуэлементным, если $\exists\, a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\}$ - одноэлементное.

**Определение.** Пусть $x \in X, y \in Y$. Упорядоченной парой называется двуэлементное множество $\{x, \{x, y\}\}$, упорядоченную пару обозначают $(x, y)$.

**Определение.** Множество всех упорядоченных пар $X \times Y = \{(x, y)\}$, где $x \in X$ и $y \in Y$ называется декартовым произведением множеств $X$ и $Y$.

## 1.4 Отображения

**Определение.** Пусть $X, Y$ - множества. Подмножество $f \subset X \times Y$ такое, что $\forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f : (y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2)$ называется отображением из $X$ в $Y$, и обозначается $f : X \to Y$.

**Замечание.** Запись $(x, y) \in f$ часто заменяют на $y = f(x)$.

Далее пусть $f : X \to Y$.

**Определение.** Множество $D_f := \{x : \exists\ (x, y) \in f\}$ называется областью определения функции $f$.

**Определение.** Множество $R_f := \{y : \exists\ (x, y) \in f\}$ называется областью значений функции $f$.

**Определение.** $f$ - инъекция $\Leftrightarrow \forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2)$.

**Определение.** $f$ - сюръекция $\Leftrightarrow Y = R_f$

**Замечание.** Обычно используют определение $f$ - сюръекция $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ $\exists\ x \in X : y = f(x)$. Определения, очевидно, эквивалентны.

**Определение.** $f$ - биекция $\Leftrightarrow f$ - инъекция и $f$ - сюръекция.

**Определение.** Пусть $f : X \to Y,\ X_1 \subset X$. Множество $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} = f\big|_{X_1}$ называется ограничением $f$ на $X_1$.

**Определение.** Пусть $f : X \to Y,\ X_1 \subset X$. Множество $f(X_1) = \{y \in Y : \exists\ x \in X_1 : (x, y) \in f\}$ называют образом множества $X_1$.

**Определение.** Пусть $f : X \to Y,\ Y_1 \subset Y$. Множество $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X : \exists\ y \in Y_1 : (x, y) \in f\}$ называют полным прообразом множества $Y_1$.

**Определение.** Пусть $f : X \to Y$. Если $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$ - одноэлементное множество, то подмножество $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$ является отображением и называется обратным отображением к $f$. Если у отображения $f$ существует обратное отображение $f^{-1}$, то оно называется обратимым.

**Утверждение.** $f$ - обратимое $\Leftrightarrow f$ - биекция.

**Замечание.** Иногда $f : X \to Y$ записывают в виде $y_x$ и называют индексацией $y$ элементами $x$.

## 1.5 Правила де Моргана

**Утверждение.** $\bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$.

*Доказательство.* $a \in \bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ или $\ldots$ или $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ и $\ldots$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$. □

**Утверждение.** $\bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$.

*Доказательство.* $a \in \bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ и $\ldots$ и $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ или $\ldots$ или $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$. □

# 2 Вещественные числа

## 2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

**Определение.** (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве $\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ существует единственный элемент, называемый следующим и обозначаемый как $S(n)$.

2. В множестве $\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ существует не более одного элемента, для которого $n$ - следующий.

3. В множестве $\mathbb{N}$ существует единственный элемент $\mathbb{N}$, не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается 1 и называется единицей.

4. (Аксиома индукции) Пусть $M \subset \mathbb{N}$ такое, что $1 \in M$ и $\forall m \in M$ : $S(m) \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

Множество, удовлетворяющее этим аксиомам, называется множеством натуральных чисел и обозначается $\mathbb{N}$.

**Определение.** Рассмотрим множество $X$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует биекция $\varphi : X \to \{1, \dots n\}$, то $X$ называется $n$-элементным, или говорят, что количество элементов в $X$ равно $n$. Тот факт, что множество $X$ - $n$-элементное, обозначается как $|X| = n$ или $cardX = n$.

**Замечание.** По определению считаем, что $card(\varnothing) = 0$.

**Определение.** Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множетсва называются бесконечными.

## 2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

**Определение.** $R \subset X \times Y$ называется отношением между элементами $X$ и $Y$. Обозначают $xRy$, если $(x, y) \in R$.

**Определение.** Отношение $R$ называется отношением (линейного) порядка на множестве $X$, если $\forall x, y, z \in X$ выполнено:

1. $xRy$ или $yRx$.

2. $(xRy$ и $yRx) \Rightarrow x = y$.

3. $(xRy$ и $yRz) \Rightarrow xRz$.

Такое отношение обозначают $\leq$.

**Теорема.** Существует единственное отношение порядка на $\mathbb{N}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Теорема.** (Принцип наименьшего элемента)
$M \subset \mathbb{N}, M \neq \varnothing$ имеет наименьший элемент, т.е. $\exists n_{min} \in M, \forall n \in M : n_{min} \leq n$.

*Доказательство.* Предположим, что в $M$ нет минимального элемента.
База: если $1 \in M$, то $n_{min} = 1 \Rightarrow 1 \notin M \Rightarrow 1 \in \mathbb{N} \setminus M$.
Шаг: $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N} \setminus M$, тогда по аксиоме индукции $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \varnothing$ - противоречие. □

## 2.3 Арифметические операции

**Определение.** Рассмотрим множества $A$ и $B, card(A) = n, card(B) = k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда число $card(A \cup B)$ называется суммой $n$ и $k$ и обозначается $card(A \cup B) = n + k$.

**Замечание.** Естественно выполняется $n + k = k + n$ (коммутативность) и $(n + k) + m = n + (k + m)$ (ассоциативность).

**Замечание.** $n + 0 = 0 + n = n$, т.к. $cardA = card(A \cup \varnothing)$.

**Замечание.** По определению существуют биекции $A \leftrightarrow \{1, \ldots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \ldots, k\}$. Возьмем $card(A \cup B) = \{1, \ldots, n\} \cup \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \ldots, S(S(\ldots(S(n))\ldots)}_{k}\}$,

(где $\{1, \ldots, k\} \leftrightarrow \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \ldots, S(S(\ldots(S(n))\ldots)}_{k}\}$)

Из тех же соображений получаем, что $S(n) = n + 1$.

**Определение.** $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} n = nk$ называется произведением $n$ на $k$.

**Замечание.** Выполнены:

- $nk = kn$ (коммутативность)
- $n(km) = (nk)m$ (ассоциативность)

- $k(n+m) = kn + km$ (дистрибутивность)

- Если $k \leq n$, то $k + m \leq n + m$ и если $k \leq m$, то $kn \leq mn$

**Определение.** Если $n + k = m$, то $n = m - k$ называется разностью $m$ и $k$, $k = m - n$ называется разностью $m$ и $n$.

**Замечание.** $m - 0 = m,\ m + 0 = m,\ m - m = 0.$

**Определение.** $nk = m, \frac{m}{n} = k, \frac{m}{k} = n.$

## 2.4 Целые числа

**Определение.** Введем набор символов $-\mathbb{N} = \{\ldots, -2, -1\}$. Множество символов $-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ называется целыми числами и обозначаются $\mathbb{Z}$. В нем принимаем выполненными следующие свойства:

1. $k + (-n) = \begin{cases} k - n, \text{если } k \geq n, \\ -(n-k), \text{если } k < n. \end{cases}$ .
   $(-k) + (-n) = -(k + n)$

2. $k \cdot 0 = (-k) \cdot 0 = 0,$
   $(-k) \cdot n = (-kn),$
   $(-k)(-n) = kn.$

3. $(\pm k)((\pm n) + (\pm m)) = (\pm k)(\pm n) + (\pm k)(\pm m).$

4. $\forall k : (-k) \leq 0,$
   $(-k) \leq (-n)$, если $n \leq k$.

5. $\forall (\pm k), (\pm n), (\pm m) \in \mathbb{Z}$, если $(\pm k) \leq (\pm n)$, то $(\pm k) + (\pm m) \leq (\pm n) + (\pm m)$.

6. $\forall (\pm n), (\pm k) \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, если $(\pm n) \leq (\pm k)$, то $(\pm n)m \leq (\pm k)m$.

Далее пишем $-k$ вместо $(-k)$.
$\forall k, n \in \mathbb{Z}\ \exists (k - n) = k + (-n).$

## 2.5 Рациональные числа

**Определение.** Множество $\mathbb{Q} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$, элементы которого обозначают $\frac{m}{n}$ называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

а также введено отношение порядка:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \ \Leftrightarrow \ mq \leq pn$$

Свойства операций ($a, b, c \in \mathbb{Q}$):

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists!\ 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$
4. $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $a(bc) = (ab)c$
7. $\exists!\ 1 \in \mathbb{Q}\ \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. $\forall a \neq 0\ \exists!\ a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
9. $a(b + c) = ab + ac$
10. $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ a \leq b$ или $b \leq a$
11. $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$
12. $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
13. $\forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
14. $\forall c \in \mathbb{Q} : c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

## 2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

**Определение.** Множество $X$ с операциями $(\cdot, +)$ и отношением порядка $\leq$ называется упорядоченным полем.

**Замечание.** $\mathbb{Q}$ - упорядоченное поле.

**Определение.** Упорядоченное поле $X$ называется архимедовым, если
15. $\forall a \in X : \exists\ n \in \mathbb{N} : a \leq n$.

**Замечание.** $\mathbb{Q}$ - архимедово поле.

**Замечание.** $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$.

**Замечание.** $\forall m \in \mathbb{Z}$ число $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ можно отождествить с $m$.

## 2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

**Определение.** Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

**Аксиома.** (Аксиома полноты)
16. $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что $\forall a \in A,\ \forall b \in B : a \leq b\ \exists\ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$.

**Пример.** Аксиома полноты не выполняется в $\mathbb{Q}$.
$A = \{a \leq 0$ или $a > 0 : a^2 < 2\}$, $B = \{b > a : b^2 > 2\}$,
но не существует $\frac{m}{n}$ такого, что $\frac{m^2}{n^2} = 2$

## 2.8 Модели действительных чисел

### Модель бесконечных десятичных дробей

**Определение.** Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \to X$ называется последовательностью элементов $X$.

**Определение.** Выражение вида $\pm a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечной десятичной дробью, если $a_0 \in \mathbb{N}$ или $a_0 = 0$ и $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

**Определение.** Введем отношение порядка $\leq$ на множестве всех бесконечных десятичных дробей следующим образом:

1. Если $a_0 \leq 0$, $b_0 > 0$, то $a \leq b$.

2. Если $a_0, b_0 \geq 0$, то $a \leq b$

   - если $a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0$, $a_1 < b_1$ или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, или ... или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n < b_n \ldots$
   - если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, а также $a_n \neq 9, b_n = a_n + 1$. $a_{n+k} = 9$, $b_{n+k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, т.е $a = \overline{a_0 a_1 ... a_n (9)}$, а $b = \overline{b_0 b_1 ... b_n (0)}$. (в числе $a$ начиная с $a_{n+1}$ все $a_i$ равны 9, а в числе $b$ начиная с $b_{n+1}$ все $b_i$ равны 0), то $a = b$.

3. Если $a_0, b_0 < 0$, то $a \leq b$, если $-b \leq -a$ (случай 3 сведен к случаю 2)

**Теорема.** Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка ($\leq$) удовлетворяет аксиоме полноты.

*Доказательство.* Пусть $A, B \subset \{$множество бесконечных десятичных дробей$\}$ и $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$.

1. $a < 0, b \geq 0$, тогда $c = 0$.

2. $a \geq 0, b \geq 0$
   Пусть
   $\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0 b_1} b_2 \dots \in B\}$,
   $\vdots$
   Возьмем $\overline{b} = \overline{b_0 b_1 b_2 \dots b_n \dots} \in B$, тогда
   $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \overline{b} \leq b$.

3. $a < 0, b < 0$ строим число по аналогии с пунктом 2.

$\square$

## Дедекиндовы сечения

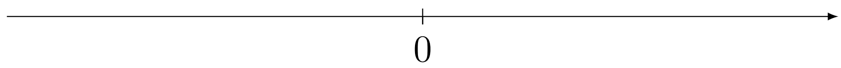
**Определение.** Пусть $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B = \varnothing,\ A \cup B = \mathbb{Q},\ \forall a \in A,\ \forall b \in B :$ $a \leq b$ и в $B$ не существует минимального элемента, тогда $(A, B)$ - пара сечений $\mathbb{Q}$.

**Теорема.** На множестве всех пар сечений $\{(A, B)\}$ можно ввести операции $(+), (\cdot)$ и отношение $(\leq)$, так что будут выполняться $(1) - (16)$.

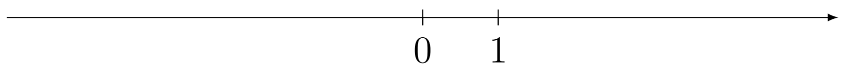
*Доказательство.* Без доказательства. $\square$

## Геометрическая модель числовой прямой

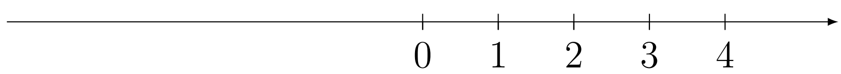
Выбираем точку, называем ее 0



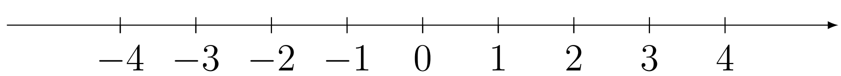

затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



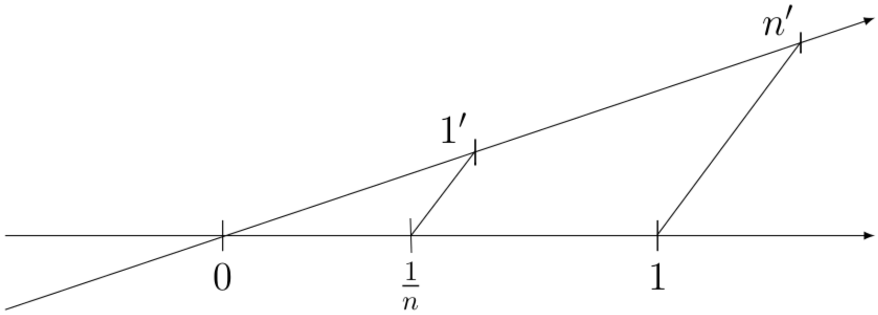

затем вводим сложение и получаем $2, 3, 4$, и т.д. (натуральный ряд)



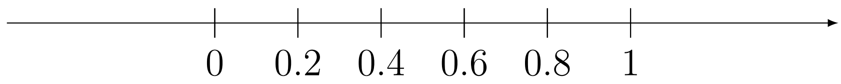

затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



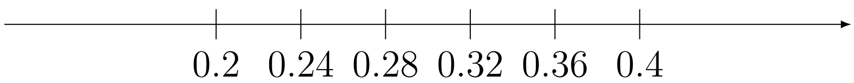
Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее $1'$ и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через $n'$ и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через $1'$ проходит через $\frac{1}{n}$ (по теореме Фаллеса)




таким образом складывая $m$ раз $\frac{1}{n}$, получим любое рациональное число $\frac{m}{n}$.
Построим бесконечную десятичную дробь, например $0,37152\ldots$.
Разобьем отрезок:




$0,37152\ldots$ находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:




$0,37152\ldots$ находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.
Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняеются (1)-(16).

## 2.9 Принципы полноты

**Определение.**

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется максимальным элементом множества $A$ $(\max A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \geq a'$ и $a \in A$.
- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется минимальным элементом множества $A$ $(\min A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \leq a'$ и $a \in A$.

**Определение.**

- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \leq m$.
- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \geq m$.

**Определение.**

- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченным сверху, если у $A$ существует верхняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченным снизу, если у $A$ существует нижняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $A$ ограничено и сверху и снизу.

**Определение.**

- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, $B$ - множество верхних граней $A$. Элемент $c = \min B$ называется точной верхней гранью $A$ и обозначается $\sup A$.
- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, $B$ - множество нижних граней $A$. Элемент $c = \max B$ называется точной нижней гранью $A$ и обозначается $\inf A$.

**Теорема.** (Принцип полноты Вейерштрасса)
Для каждого ограниченого сверху или снизу множества $A$ существует $\sup A$ или $\inf A$ соответственно.

*Доказательство.* Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)
$A$ - ограничено сверху, $B$ - множество верхних граней. Значит $\forall a \in A$ и $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$ по аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$. $\square$

**Лемма.** (Свойство точной грани)
Если у множества $A \subset \mathbb{R}$ существует $M = \sup A$ или $m = \inf A$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A : a \in (M - \varepsilon, M)$ или $a \in (m, m + \varepsilon)$ соответственно.

*Доказательство.* Докажем для верхней грани. $M = \sup A \Rightarrow \forall a \in A : a \leq M$. Поскольку $M$ - минимальная из верхних граней, то $\forall \varepsilon > 0 : \widetilde{M} = M - \varepsilon$ - не является верхней гранью. Тогда $\exists\ a \in A : a > \widetilde{M} \Rightarrow a \in (M - \varepsilon, M)$. $\square$

**Определение.** $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ рассмотрим следующие множетсва:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - отрезок
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

**Определение.** $\forall a \in \mathbb{R}$ функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

**Определение.** Для любого промежутка с концами $a, b \in \mathbb{R}$ длиной называется число $|b - a|$.

**Определение.** Рассмотрим последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ выполнено $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

**Теорема.** (Принцип вложенных отрезков, принцип полноты Кантора)
Пусть последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тогда $\exists \ c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$. Если $|b_n - a_n| \to 0$ то $c$ - единственная.

*Доказательство.* $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$, т.к

- если $n < m$, то $a_n \leq a_m \leq b_m$.
- если $n > m$, то $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Значит для $\forall m, n \in \mathbb{N}$ : Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists \ c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \ \forall n, m \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n, \ \forall n$.
Пусть $|b_n - a_n| \to 0$, предположим, что $\exists \ c_1$ и $c_2 : c_1 \neq c_2$ - различные общие точки, значит $|c_2 - c_1| > 0$. Получаем, что $0 < |c_2 - c_1| < |b_n - a_n|, \ \forall n$, значит $|c_2 - c_1| \to 0$ получаем противоречие. $\square$

## 2.10 Отношение эквивалентности. Равномощные множества

**Определение.** Отношение $\sim$ называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1. $x \sim x$ (Рефлексивность)
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Симметричность)
3. $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Транзитивность)

**Определение.** Множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

**Теорема.** Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

*Доказательство.* Пусть $A, B, C$ - множества, $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.
2. Для любой биекции $\varphi : A \to B$ существует $\varphi^{-1} : B \to A$.
3. $\varphi : A \to B,\ \psi : B \to C$, то $\psi \circ \varphi : A \to C$.

□

**Замечание.** Если $A$ равномощно $B$ то иногда пишут $A \sim B$ или $|A| = |B|$.

**Теорема.** Конечные множества равномощны $\Leftrightarrow$ они содержат одинаковое количество элементов.

*Доказательство.*

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi : A \to \{1, \dots, n\},\ \psi : B \to \{1, \dots, n\}$
$\Rightarrow \exists\ \psi^{-1} : \{1, \dots, n\} \to B$. Тогда $\varphi \circ \psi^{-1} : A \to B$ - искомая биекция.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi : A \to B$ - биекция, если $A = \varnothing$, то $B = \varnothing$. Индукция по количеству элементов. База: пусть $A = \{a\}$, тогда $\exists!\ b \in B : \varphi(a) = b$. Пусть утверждение верно для случая когда $A$ - это $n$-элементное множество. Теперь если $A$ - это $n+1$-элементное, то $\exists\ \varphi : A \to \{1, 2, ..., n+1\}$ - биекция. Значит $\exists!\ a \in A$, что $\varphi(a) = n+1$. Тогда $A \setminus \{a\}$ - $n$-элементное и $\exists!\ b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$ - $n$-элементное $\Rightarrow B$ - $n+1$-элементное.

□

**Определение.** Множества, равномощные $\mathbb{N}$ называются счетными.

**Определение.** Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

**Теорема.** Объединение не более чем счетного числа счетных множеств счетно.

*Доказательство.* Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \end{matrix}$$

□

**Следствие.** Объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств не более чем счетно.

**Примеры.**

1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.
2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами) счетно.

## 2.11 Теорема Кантора и аксиома выбора

**Теорема.** (Теорема Кантора)
Интервал $(0, 1)$ несчетен.

*Доказательство.* [1] Докажем от противного. Предположим, что у нас получилось перечислить все элементы интервала $(0, 1)$

$$x_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots$$

$$x_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots$$

$$x_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \dots$$

$$\vdots$$

[1]Может немного отличаться от доказательства на лекциях

Теперь построим такую последовательность $b$, задающую число, которого нет в списке. Определим последовательность так: $b_0 = 0$ и на $i$-й позиции $b_i$ отличается от $a_{ii}$, например зададим ее так:

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{ если, } a_{ii} \neq 1, \\ 2, \text{ если, } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, построенное число $x = 0,\ b_1\, b_2\, b_3\ \dots$ отличается от каждого из $x_1, x_2, x_3 \dots$ на $i$ позиции $\Rightarrow$ оно не было пересчитано, получаем противоречие. □

**Следствие.** Действительных чисел несчетно.

*Доказательство.* [2] Достаточно показать, что $\mathbb{R} \sim (0,1)$. Например функция $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, такая что $f(x) = \frac{2x-1}{4x-4x^2}$ задает нужную биекцию. □

**Определение.** Действительные числа не являющиеся алгебраическими называются трансцендентными.

**Определение.** Множества равномощные интервалу $(0,1)$ называются множествами мощности континуума.

**Теорема.** У любого множетсва мощность множества всех подмножеств строго больше чем мощность самого множества.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Определение.** Для множеств $A$ и $B$ обозначим $|A| \leq |B|$, если $\exists\, B' \subset B$ такое, что $A \sim B'$.

**Теорема.** Сравнение мощностей множеств $|A| \leq |B|$ является отношением порядка.

1. $\forall A, B : |A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$ (Теорема Кантора-Бернштейна)
3. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Аксиома.** (Аксиома выбора)
Если существует семейство непустых множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу и составить из них другое множество.

[2] Не было на лекциях

**Утверждение.** Множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств $\mathbb{N}$ равномощно интервалу (0,1) (множеству $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ бесконечных последовательностей нулей и единиц).

*Доказательство.* [3] Каждому $A \subset \mathbb{N}$ ставим в соответствие характеристическую последовательность, которая принимает значения: единицу, если элемент лежит в подмножестве и ноль иначе $\Rightarrow 2^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Поскольку каждое число из интервала $(0,1)$ представляется как последовательность цифр $0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ и каждую цифру можно представить в двоичной системе исчисления, то можно сделать вывод, что $2^{\mathbb{N}} \sim (0,1)$. □

**Теорема.** У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.

*Доказательство.* Выбираем элемент и сразу присваиваем ему номер. Продолжая это действие, построим счетное множество. □

**Теорема.** Пусть $A$ - бесконечное, $B$ - не более чем счетное $\Rightarrow A \sim A \cup B$

*Доказательство.* Выделим из $A$ счетное подмножество $A'$. Тогда $A \sim (A \setminus A') \cup A'$, поскольку объединение не более чем счётного числа не более чем счётных множеств не более чем счётно, то $(A \setminus A') \cup A' \sim (A \setminus A') \cup (A' \cup B) \sim (A \cup B)$. □

[3] Может отличаться от доказательства на лекциях

# 3 Топология вещественной прямой

## 3.1 Окрестность точки. Классификация точек относительно подмножеств действительных чисел

**Определение.** $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Множество $B_\varepsilon(x)$ называется $\varepsilon$-окрестностью точки $x$.

**Определение.** $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$. Множество $\mathring{B}_\varepsilon(x)$ называется проколотой $\varepsilon$-окрестностью точки $x$.

**Определение.** Точка $x \in A \subset \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества $A$, если $\exists\ B_\varepsilon(x) \subset A$. Множество всех внутренних точек $x \in A$ называется внутренностью множетсва $A$.

**Определение.** Точка $x \in \mathbb{R} \setminus A$ называется внешней точкой для множества $A \subset \mathbb{R}$, если $x$ - внутренняя точка для $\mathbb{R} \setminus A$. Множество всех внешних точек $x \in A$ называется внешностью множетсва $A$.

**Определение.** Точка называется граничной для множества $A \subset \mathbb{R}$, если она не является ни внешней ни внутренней для $A$ (в любой ее окрестности есть как точки из $A$ так точки из $\mathbb{R} \setminus A$). Множество всех граничных точек называется границей множества $A$ и обозначается $\partial A$.

**Определение.** Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности точки $x$ бесконечно много точек $A$, т.е $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$. Множество всех предельных точек $A$ обозначается $A'$

**Определение.** Точка $x \in A$ называется изолированной точкой $A \subset \mathbb{R}$, если $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \varnothing$.

**Определение.** Точка $x \in \mathbb{R}$ называется точкой прикосновения $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$.

**Утверждение.** Точки прикосновения множества $A$ являются либо внутренними, либо граничными.

*Доказательство.* Точка прикосновения не может являться внешней точкой, поскольку в этом случае $\exists\ \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \in \mathbb{R} \setminus A$, что противоречит с условием $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing \Rightarrow$ она либо внутренняя либо граничная. $\square$

**Утверждение.** Точки прикосновения являются либо предельными, либо изолированными.

*Доказательство.* Если $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, то $x$ - предельная. Если $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \varnothing$, но по определению $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$
$\Rightarrow x \in A \Rightarrow x$ - изолированная. □

**Определение.** (Множество Кантора)
Разбиваем отрезок $[0, 1]$ на три части и выбрасываем середину, затем каждый из получившихся отрезков разбиваем на три части и выбрасываем середину, и т.д.

- Суммарная длина всех выброшенных интервалов равна 1.
- Концов отрезков счетное множество.
- Общее количество точек имеет мощность континуума.

## 3.2 Открытые и замкнутые множества

**Определение.** Множество называется открытым, если все его точки - внутренние.

**Пример.** Любой интервал - открытое множество

**Определение.** Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

**Пример.** Отрезок - замкнутое множество.

**Замечание.** По определению считаем, что $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ и открыты и замкнуты одновременно.

**Теорема.** (Критерии замкнутости множества)
Следующие условия эквивалентны:

(0) $A \subset \mathbb{R}$ - замкнуто.

(1) $\partial A \subset A$,

(2) Все точки прикосновения содержатся в $A$,

(3) $A' \subset A$.

*Доказательство.* Докажем по цепочке $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (0)$.

1. $(0) \Rightarrow (1) : A$ - замкнуто $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто $\Rightarrow \partial A \not\subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \partial A \subset A$.

2. $(1) \Rightarrow (2)$ : Все точки прикосновения являются граничными или внутренними. Поскольку $\partial A \subset A$ то все точки прикосновения содержатся в $A$.

3. $(2) \Rightarrow (3)$ : Если $x$ - предельная, то $x \in A$ или $x$ - точка прикосновения. Поскольку все точки прикосновения содержатся в $A$, то и все предельные точки содержатся в $A$.

4. $(3) \Rightarrow (0)$ : $A' \subset A \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A : x \notin A' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A \; \exists \, \mathring{B}_\varepsilon : \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ (т.к $x \notin A$) $\Rightarrow x$ - внешняя точка $A$, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A$ $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто $\Rightarrow A$ - замкнуто.

$\square$

**Теорема.** Пусть $A$ - множество индексов. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - открытые, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - замкнутые. Тогда:

1. $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открыто (объединение открытых множетсв - открыто).
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ - открыто (конечное пересечение открытых множеств - открыто).
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ - замкнуто (конечное объединение замкнутых множеств - замкнуто).
4. $\bigcap\limits_\alpha X_\alpha$ - замкнуто (пересечение замкнутых множеств - замкнуто).

*Доказательство.*

1. Пусть $u \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \Rightarrow \exists \; \alpha_0 : u \in U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists \; B(u) \in U_{\alpha_0} \Rightarrow B(u) \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ $\Rightarrow \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открыто.

2. Пусть $u \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} \; \exists \; \varepsilon_i : B_{\varepsilon_i}(u) \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists \; \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_i\}$ $\Rightarrow B_{\varepsilon_0} \subset U_{\alpha_i} \; \forall i \Rightarrow B_{\varepsilon_0} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ - открыто.

3. Поскольку $\bigcap\limits_\alpha (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)$ (доказано ранее), то $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i} =$ $= \bigcap\limits_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i})$. Так как $X_{\alpha_i}$ - замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i}$ - открыто. Тогда по пункту 2 получаем: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i})$ - открыто $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ - открыто $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ - замкнуто.

4. Поскольку $\bigcup\limits_\alpha (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)$ (доказано ранее), то $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_\alpha X_\alpha =$ $= \bigcup\limits_\alpha (\mathbb{R} \setminus X_\alpha)$. Так как $X_\alpha$ - замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus X_\alpha$ - открыто. Тогда по пункту 1 получаем: $\bigcup\limits_\alpha (\mathbb{R} \setminus X_\alpha)$ - открыто $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_\alpha X_\alpha$ - открыто $\Rightarrow \bigcap\limits_\alpha X_\alpha$ - замкнуто.

□

**Примеры.**

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1]$.

2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$.

**Теорема.** Если $A$ - ограничено сверху или снизу и замкнуто, то существует $\max A$ или $\min A$ соответственно.

*Доказательство.* Докажем для ограниченного сверху. По принципу полноты Вейерштрасса $\exists\ \alpha = \sup A$. По свойству точной верхней грани:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ a \in (\alpha - \varepsilon, \alpha] \Rightarrow \alpha$ - точка прикосновения $\Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$. □

## 3.3 Компакты

**Определение.** Говорят, что семейство $\{A\}_\alpha$ является покрытием множества $B$, если $B \subset \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$

**Определение.** Рассмотрим $X \subset \mathbb{R}$. Если для любого покрытия $X$ открытыми множествами $\{A\}_\alpha$ существует $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ - конечное подпокрытие такое, что $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$, то $X$ называется компактным множеством или компактом.

**Теорема.** Любой отрезок является компактом.

*Доказательство.* Пусть $[a, b] \subset \bigcup\limits_\alpha A_\alpha,\ A_\alpha$ - открытые и нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда $[a, b] = [a_1, b_1]$ делим отрезок пополам и выбираем половину $[a_2, b_2]$, у которой нельзя выделить конечное подпокрытие и т.д. Получаем систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, у которых нельзя выделить конечное подпокрытие и длина стремится к нулю $\Rightarrow \exists!\ c \in [a_n, b_n]\ \forall n \Rightarrow \exists\ \alpha_0 : c \in A_{\alpha_0}$. Поскольку $A_{\alpha_0}$ - открыто, то $\exists\ B_\varepsilon(c) \subset A_{\alpha_0} \Rightarrow \exists\ n_{\alpha_0} : [a_{n_{\alpha_0}}, b_{n_{\alpha_0}}] \subset A_{\alpha_0}$ получаем противоречие. □

**Теорема.** (Лемма Гейне-Бореля)[4]
$A$ - компакт в $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ - замкнуто и ограничено.

*Доказательство.* Без доказательства. □

[4] На самом деле, утверждение верно и для $\mathbb{R}^n$

## 3.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема.** (Больцано-Вейерштрасса)
Если $A \subset \mathbb{R}$ - ограниченное и бесконечное множетсво, то в нем есть хотя бы одна предельная точка (т.е. $A' \neq \varnothing$).

*Доказательство.* т.к $A$ - ограничено, то $\exists\ \sup A = b,\ \inf A = a$
$\Rightarrow A \subset [a_1, b_1] = [a, b]$. Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и возьмем половину $[a_2, b_2]$ в которой бесконечно много элементов из множества $A$ и т.д. Получаем систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, у которых длина стремится к нулю $\Rightarrow \exists!\ c \in [a_n, b_n]\ \forall n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : [a_{n_\varepsilon}, b_{n_\varepsilon}] \subset B_\varepsilon(c) \Rightarrow$ существует бесконечно много элементов в $\mathring{B}_\varepsilon(c) \Rightarrow c \in A'$. $\square$

# 4 Числовые последовательности

## 4.1 Предел последовательности

**Определение.** Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется последовательностью.

**Замечание.** Далее, в обозначении последовательности будем опускать скобки и писать $a_n$.

**Определение.** Говорят, что $a_n$ ограничена сверху (снизу), если ее образ ограничен сверху (снизу).

**Определение.** Пусть последовательность номеров $n_k$ - образ $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\forall k : n_{k+1} > n_k$. Тогда для любой последовательности $a_n$ последовательность $a_{n_k}$ называется подпоследовательностью $a_n$.

**Определение.** Рассмотрим последовательность $a_n$. Если $\exists\ a \in \mathbb{R}$, такое что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

то говорят, что последовательность $a_n$ сходится, а число $a$ называется пределом последовательности $a_n$ и обозначается

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

**Теорема.** Если $a_n$ сходится, то ее предел единственный.

*Доказательство.* Пусть $\exists\ a, b \in \mathbb{R} : a \neq b$ - два предела последовательности $a_n$. Тогда

$$\exists\ N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - a| < \frac{|a-b|}{3} \quad \text{и} \quad \exists\ N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - b| < \frac{|a-b|}{3}$$

Тогда $\forall n > N = \max(N_1, N_2)$ получаем, что $a_n \in B_{\frac{|a-b|}{3}}(a)$ и $a_n \in B_{\frac{|a-b|}{3}}(b)$, но $B_{\frac{|a-b|}{3}}(a) \cap B_{\frac{|a-b|}{3}}(b) = \varnothing \Rightarrow$ получаем противоречие. □

**Теорема.** Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда $\forall a_{n_k}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

*Доказательство.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall n_k > N_\varepsilon :$
$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ □

**Замечание.**

1. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

2. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $b_n$ отличается от $a_n$ конечным числом членов, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

**Теорема.** (Теорема об отделимости)
Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $b \neq a$. Тогда $\exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^{\infty} = \varnothing$.

*Доказательство.* Предположим, что выполнено обратное: $\forall \varepsilon > 0\ \forall\ N_\varepsilon$ : $B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \neq \varnothing$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$, сразу получаем противоречие. □

**Замечание.** Теорема об отделимости равносильна следующему утверждению: $\exists\ \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \varnothing$, причем если $b \notin \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \varnothing$.

## 4.2 О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

**Определение.** Рассмотрим пару последовательностей $a_n$ и $b_n$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то говорят, что последовательность $a_n$ - это о-малое от $b_n$, и обозначают $a_n = \bar{\bar{o}}(b_n)$, при $n \to \infty$.

**Определение.** Если $\exists\ M > 0 : |\frac{a_n}{b_n}| \leq M\ \forall n$, то говорят, что последовательность $a_n$ - это О-большое от $b_n$, и обозначают $a_n = O(b_n)$, при $n \to \infty$.

**Примеры.**

1. $\frac{\sin n}{n} \to 0 \Leftrightarrow \sin n = \bar{\bar{o}}(n)$
2. $\frac{\cos n}{n} \to 0 \Leftrightarrow \cos n = \bar{\bar{o}}(n)$
3. $\frac{\sqrt{n}+1}{n} \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{n} + 1 = \bar{\bar{o}}(n)$

**Замечание.** $O(1)$ - обозначение класса ограниченных последовательностей.

**Определение.** Последовательность $a_n$ называется бесконечно малой, если

$$a_n = \bar{\bar{o}}(1)\ (\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0)$$

**Определение.** Последовательность $a_n$ называется бесконечно большой, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon$$

такие последовательности обозначаются $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (это всего лишь обозначение, конечно у последовательности $a_n$ не существует предела)
Если в определении $a_n > \varepsilon$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Если в определении $a_n < -\varepsilon$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Теорема.** (Исчисление бесконечно малых)
Пусть $a_n = \bar{\bar{o}}(1), n \to \infty,\ b_n = \bar{\bar{o}}(1), n \to \infty$ и $c_n = O(1)$. Тогда $\forall c \in \mathbb{R}$:

1. $ca_n = \bar{\bar{o}}(1)$
2. $a_n + b_n = \bar{\bar{o}}(1)$
3. $a_n b_n = \bar{\bar{o}}(1)$
4. $c_n a_n = \bar{\bar{o}}(1)$

*Доказательство.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1,\ \forall n > N_1 : |a_n| < \varepsilon,\ \exists\ N_2,\ \forall n > N_2 : |b_n| < \varepsilon$. Возьмем $n > \max\{N_1, N_2\}$. Также по определению $\exists\ M > 0 : |c_n| < M$. Тогда:

1. $|ca_n| = |c|\ |a_n| < |c|\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon$ принимает любое вещественное положительное значение, то величина $|c|\varepsilon$ - тоже $\Rightarrow ca_n = \bar{\bar{o}}(1)$.
2. $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon$ принимает любое вещественное положительное значение, то величина $2\varepsilon$ - тоже $\Rightarrow a_n + b_n = \bar{\bar{o}}(1)$.
3. $|a_n b_n| = |a_n|\ |b_n| < \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2$. Поскольку $\varepsilon$ принимает любое вещественное положительное значение, то величина $\varepsilon^2$ - тоже $\Rightarrow a_n b_n = \bar{\bar{o}}(1)$.
4. $|c_n a_n| = |c_n|\ |a_n| < M\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon$ принимает любое вещественное положительное значение, то величина $M\varepsilon$ - тоже $\Rightarrow c_n a_n = \bar{\bar{o}}(1)$.

□

**Теорема.** Пусть $a_n$ - бесконечно большая и $a_n \neq 0$, тогда $\frac{1}{a_n}$ - бесконечно малая.

*Доказательство.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \bar{\bar{o}}(1)$ □

**Лемма.** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n - a = \bar{\bar{o}}(1)$ т.е $a_n = a + \bar{\bar{o}}(1)$

*Доказательство.* Из определения предела для $a_n$ получаем: $|a_n - a| < \varepsilon$, а это и означает что $a_n - a = \bar{\bar{o}}(1)$. □

## 4.3 Арифметические свойства сходящихся последовательностей

**Теорема.** Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда

1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = ca$
3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
4. Если дополнительно $\forall n : b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

*Доказательство.* Пользуясь тем, что $a_n = a+\bar{\bar{o}}(1),\ b_n = b+\bar{\bar{o}}(1)$ и исчислением бесконечно малых, получаем:

1. $a_n + b_n = a + \bar{\bar{o}}(1) + b + \bar{\bar{o}}(1) = a + b + \bar{\bar{o}}(1)$.
2. $ca_n = c(a + \bar{\bar{o}}(1)) = ca + c\bar{\bar{o}}(1) = ca + \bar{\bar{o}}(1)$.
3. $a_n b_n = (a + \bar{\bar{o}}(1))(b + \bar{\bar{o}}(1)) = ab + a\bar{\bar{o}}(1) + b\bar{\bar{o}}(1) + \bar{\bar{o}}(1)\bar{\bar{o}}(1) = ab + \bar{\bar{o}}(1)$.
4. $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_n b - a b_n}{b b_n} = \dfrac{b(a + \bar{\bar{o}}(1)) - a(b + \bar{\bar{o}}(1))}{b(b + \bar{\bar{o}}(1))} = \dfrac{ab - ab + b\bar{\bar{o}}(1) - a\bar{\bar{o}}(1)}{b^2 + b\bar{\bar{o}}(1)} =$
   $= \dfrac{1}{b^2 + \bar{\bar{o}}(1)}\,\bar{\bar{o}}(1) = O(1)\bar{\bar{o}}(1) = \bar{\bar{o}}(1)$.

□

**Теорема.** Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geq 0,\ \forall n$. Тогда $a \geq 0$.

*Доказательство.* Пусть $a < 0$, тогда $\exists\ N,\ \forall n > N : |a - a_n| < \frac{|a|}{3} \Rightarrow$ начиная с $N$ все члены $a_n$ отрицательные $\Rightarrow$ получаем противоречие. □

**Следствие.** Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и пусть $\forall n : a_n \geq b_n$. Тогда $a \geq b$.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность $a_n - b_n \geq 0$.
$a_n - b_n \to a - b \geq 0$. □

**Теорема.** (Теорема о двух милиционерах)
Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a : a_n \leq b_n$ и пусть $a_n \leq c_n \leq b_n,\ \forall n$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

*Доказательство.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1,\ \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon,\ \exists\ N_2,\ \forall n > N_2 :$
$|b_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > N = \max\{N_1, N_2\} : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$
$\Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$. □

## 4.4 Монотонные последовательности

**Определение.**

1. Если $\forall n : a_{n+1} > a_n$, то $a_n$ (строго) возрастает.
2. Если $\forall n : a_{n+1} \geq a_n$, то $a_n$ не убывает.
3. Если $\forall n : a_{n+1} < a_n$, то $a_n$ (строго) убывает.
4. Если $\forall n : a_{n+1} \leq a_n$, то $a_n$ не возрастает.

Такие последовательности называют монотонными.

**Теорема.** Если последовательность неубывает (невозраствает) и ограничена сверху (снизу), то у нее есть предел.

*Доказательство.* Докажем для неубывающей, ограниченной сверху. $a_n$ - ограничена сверху $\Rightarrow \exists\ a = \sup a_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ a_{N_\varepsilon} : a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} < a$, $a_n$ - неубывает $\Rightarrow \forall n > N_\varepsilon : a_n > a - \varepsilon \Rightarrow a - a_n < \varepsilon$. □

## 4.5 Неравенство Бернулли и Бином Ньютона

**Теорема.** (Неравенство Бернулли)
Пусть $x_k \in \mathbb{R}$ и $\forall k : x_k > 0$ или $\forall k : x_k \in (-1, 0)$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

*Доказательство.* Индукция по $n$. База: $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$.
Шаг: пусть при $n$ утверждение верно. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + x_k) \geq (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + (\sum_{k=1}^{n} x_k) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

□

**Определение.** Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ называется биномиальным коэффициентом и обозначается $C_n^k$.

**Замечание.** По определнию считается, что $0! = 1$.

**Теорема.** (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

*Доказательство.* Индукция по $n$. База: для $n = 1$ верно. Пусть верно для $n$. Распишем выражение для $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m+1} =$$

$$= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^n b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1}$$

□

## 4.6 Число e

**Лемма.**

1. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ возрастает.
2. $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ убывает.

*Доказательство.*

1. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \dfrac{1}{n})^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\ n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{(n^2+2n)^n\ (n+2)}{(n^2+2n+1)^n\ (n+1)} =$$
$$= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n (\frac{n+2}{n+1}) \geq (1 - \frac{n}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$
$$= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

2. $$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}}{(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \frac{(n^2+2n+1)^{n+1}\ (n+1)}{(n^2+2n)^{n+1}\ (n+2)} =$$
$$= (1+\frac{1}{n^2+2n})^{n+1}\ \frac{n+1}{n+2} > (1+\frac{n+1}{n^2+2n})\ \frac{n+1}{n+2} =$$
$$= \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

□

**Теорема.** $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

*Доказательство.* $\forall n,\ a_n < b_n$, т.к. $b_n = a_n(1+\frac{1}{n}) \Rightarrow \forall n, m : a_n < b_m$
$\Rightarrow a_n$ - ограничена $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ □

**Определение.** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

## 4.7 Сходимость последовательностей и частичные пределы

**Теорема.** Если $a_n$ ограничена, то у нее существует сходящаяся подпоследовательность.

*Доказательство.*

1. Образ $a_n$ бесконечен. Тогда $\exists$ $a$ - предельная точка образа. Тогда в проколотой окрестности $a$ есть хотя бы одна точка, возьмем эту точку, назовем ее $a_{n_1}$, далее возьмем новую проколотую окрестность $a$ так, чтобы $a_{n_1}$ в нее не попадало, возьмем в ней $a_{n_2}$ такую, что $n_2 > n_1$ и так далее. Получим подпоследовательность, сходящуюся к $a$.

2. Образ $a_n$ конечен. Тогда $\exists$ $a$ из образа, встречающаяся в последовательности бесконечно много раз. Тогда возьмем постоянную (стационарную) подпоследовательность.

□

**Теорема.** (Критерий Коши)
Последовательность $a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

($\Rightarrow$) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall m, n > N_\varepsilon$ : $|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \le |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

($\Leftarrow$) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$. Фиксируем $m$, тогда $a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon \Rightarrow a_n$ - ограничена $\Rightarrow \exists\ a_{n_k} \to a,\ k \to \infty$. Поскольку $n_k \ge n > N$, то $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$. Тогда $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| <$ $< |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$ ($2\varepsilon$ пробегает все вещественные положительные числа)

$\square$

**Определение.** Последовательность $a_n$, удовлетворяющая условию

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

называется фундаментальной.

**Пример.**

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ - сходится, поскольку:}$$

$$|a_n - a_m| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}| = |\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}| < |\sum_{k=m+1}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ - расходится, поскольку:}$$

$$|a_n - a_m| = |\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}| > \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}$$

**Определение.** Если у $a_n$ есть сходящаяся подпоследовательность $a_{n_k}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ называется частичным пределом последовательности $a_n$.

**Теорема.** Рассмотрим $a_n$, и пусть $A \subset \mathbb{R}$ - множество всех частичных пределов $a_n$. Тогда $A$ замкнуто.

*Доказательство.* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow \exists\ B_\varepsilon(x) : B_\varepsilon(x) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - конечно. Тогда $\forall x' \in B_\varepsilon(x)\ \exists\ B_{\varepsilon'}(x')$, что $B_{\varepsilon'}(x') \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно $\Rightarrow \forall x' \notin A$ $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто. $\square$

**Определение.** Пусть $a_n$ ограничена. Тогда $\exists\ \max A$ и $\min A$ частичные пределы, которые называют верхним пределом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ и нижним пределом $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ соответственно.

**Теорема.** Пусть $a_n$ ограничена. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k\}_{k=1}^{\infty},\ \varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$$

*Доказательство.* Докажем для верхнего:

$$\sup\{a_k\}_{k=n+1}^{\infty} \le \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$$

$\Rightarrow \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ ограничена снизу и невозрастает $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty} = \alpha$. Значит

$$\forall \varepsilon > 0 : (\alpha + \varepsilon, +\infty) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

конечно. С другой стороны

$$\forall \varepsilon > 0 : (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

бесконечно $\Rightarrow \alpha$ - частичный предел $\Rightarrow \alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. □

**Теорема.** $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

*Доказательство.*

($\Rightarrow$) Если последовательность сходится к $a$, то все частичные пределы сходятся к $a$.

($\Leftarrow$)

$$\inf\{a_k\}_{k=n}^{\infty} \le a_n \le \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$$

по лемме о двух милиционерах $a_n \to a$.

□

**Определение.** Если $a_n$ имеет бесконечно большую подпоследовательность, то используют обозначения $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\ (+\infty,\ -\infty)$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\ (+\infty,\ -\infty)$

# 5 Предел функции

## 5.1 Определение предела по Коши и по Гейне

В данном разделе будут рассматриваться функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $\mathring{B}(x_0)$. Число $a$ называется пределом $f(x)$ в точке $x_0$, по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $\mathring{B}(x_0)$. Число $a$ называется пределом $f(x)$ в точке $x_0$ по Гейне, если

$$\forall x_n : x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ \forall n : \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty, x_0)$ и на $(x_0, +\infty)$. Тогда $a$ - предел функции $f$ при $x \to \infty$ $(x \to +\infty,\ x \to -\infty)$ если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0, \forall x : |x| > \delta_\varepsilon\ (x > \delta_\varepsilon,\ x < \delta_\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

**Теорема.** Определения предела по Коши (1) и по Гейне (2) эквивалентны.

*Доказательство.*

1. (1) $\Rightarrow$ (2):
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$\forall x_n : x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ \exists\ N_{\delta_\varepsilon} > 0 : 0 < |x_0 - x_n| < \delta_\varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall n > N_{\delta_\varepsilon},\ x_n \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_n) - a| < \varepsilon$$
т.е. $f(x_n) \to a$.

2. (2) $\Rightarrow$ (1): Выведем из отрицания предела по Коши отрицание предела по Гейне:
$$\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists\ x_\delta \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x_\delta) - a| \geq \varepsilon_0$$
Возьмем
$$x_1 \in \mathring{B}_1(x_0) \Rightarrow |f(x_1) - a| \geq \varepsilon_0$$
$$x_2 \in \mathring{B}_{\frac{|x_1 - x_0|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_2) - a| \geq \varepsilon_0$$
$$x_3 \in \mathring{B}_{\frac{|x_2 - x_0|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_3) - a| \geq \varepsilon_0$$
$$\vdots$$
Получили последовательность $x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0$, но при этом $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$. Это и есть отрицание по Гейне.

$\square$

**Замечание.** В доказательстве пользуемся тем, что для утверждений $A$ и $B$ верно: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

**Замечание.** при $x \to \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$ доказывается аналогично.

## 5.2 Простейшие свойства предела функции

**Теорема.** Если у функции существует предел в точке $x_0$, то он единственный.

*Доказательство.* Получим противоречие с определением по Гейне, пусть

$$x_n : x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\ \forall n : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

Предположим, что $b \neq a$ - тоже предел. Тогда

$$\exists\ t_n : t_n \to x_0,\ t_n \neq x_0\ \forall n : \lim_{n\to\infty} f(t_n) = b$$

Получаем, что последовательность $y_n = x_1, t_1, x_2, t_2, \dots : y_n \to x_0$, но при этом $f(y_n) = f(x_1), f(t_1), f(x_2), f(t_2)\dots$ - имеет два различных частичных предела - противоречие. □

**Теорема.** Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, то $\exists\ \delta > 0$ такое, что $f(x)$ ограничена в $\mathring{B}_\delta(x_0)$.

*Доказательство.* Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists\ \delta > 0,\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < 1$$

$\Rightarrow a - 1 < f(x) < a + 1 \Rightarrow f(x)$ - ограничена. □

**Теорема.** (Теорема об отделимости)
Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Тогда $\forall\ b \neq a\ \exists\ \delta > 0$ и $\exists\ \varepsilon > 0$, что $f(\mathring{B}_\delta(x_0)) \cap \mathring{B}_\varepsilon(b) = \varnothing$.

*Доказательство.* Возьмем $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$. Тогда

$$\exists\ \delta > 0,\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \frac{|a-b|}{3} \Rightarrow f(\mathring{B}_\delta(x_0)) \cap \mathring{B}_{\frac{|a-b|}{3}}(b) = \varnothing$$

□

## 5.3 Предел по множеству. Односторонние пределы

**Определение.** Число $a$ называется пределом $f(x)$ в точке $x_0$ по множеству $X \subset \mathbb{R}$, если

$$x_0 \in X' \text{ и } \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \cap X : |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначают

$$\lim_{X \ni x \to x_0} f(x) = a$$

**Утверждение.** Если $\exists \lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x) = a$ и $X_1 \subset X,\ x_0 \in X_1'$. Тогда $\exists \lim\limits_{X_1 \ni x\to x_0} f(x) = a$.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Определение.**

1. Если $X = (x_0, x_0 + \delta)$, то обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$.
2. Если $X = (x_0 - \delta, x_0)$, то обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$.

Такие пределы называются односторонними.

**Теорема.** $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$.

*Доказательство.* [5]

($\Rightarrow$) Поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \ \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

то

$$\forall x \in (x, x + \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall x \in (x - \delta, x) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \ \forall x \in (x, x + \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

и поскольку

$$\forall x \in (x - \delta, x) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

то выполнено и

$$\forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

□

## 5.4 О-символика

**Определение.** Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))$ при $x \to x_0$.

**Определение.** Функция $f(x)$ называется бесконечно малой, если $f(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to x_0$.

**Определение.** Если $\exists \ M > 0$ такое, что $\forall x \in X \subset \mathbb{R} : |\frac{f(x)}{g(x)}| < M$, то $f(x) = O(g(x))$ на $X$

**Определение.** Для обозначения класса ограниченных функций используется запись $f(x) = O(1)$.

[5] Дано в качестве очевидного

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $\mathring{B}(x_0)$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \ \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x)| > \varepsilon \ (f(x) > \varepsilon, \ f(x) < -\varepsilon)$$

то говорят, что $f(x)$ - бесконечно большая, и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \ (\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$$

**Теорема.** (Исчисление бесконечно малых)
Пусть $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to x_0$, $\beta(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to x_0$, $\gamma(x) = O(1)$ в $\mathring{B}(x_0)$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $\alpha(x) + \beta(x) = \bar{\bar{o}}(1), \ x \to x_0$.
2. $c\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1), \ x \to x_0$.
3. $\alpha(x)\beta(x) = \bar{\bar{o}}(1), \ x \to x_0$.
4. $\alpha(x)\gamma(x) = \bar{\bar{o}}(1), \ x \to x_0$.

*Доказательство.* [6] Запишем определение по Гейне:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x_n : x_n \to x_0, \ x_n \neq x_0, \ \forall n : \exists \lim_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x_n : x_n \to x_0, \ x_n \neq x_0, \ \forall n : \exists \lim_{n \to \infty} \beta(x_n) = 0$$

$$\gamma(x) = O(1) \Leftrightarrow \exists \ M > 0 : |\gamma(x)| < M$$

Теперь воспользуемся доказанным для последовательностей:

1. $\alpha(x_n) + \beta(x_n) = \bar{\bar{o}}(1) + \bar{\bar{o}}(1) = \bar{\bar{o}}(1)$.
2. $c\alpha(x_n) = c\bar{\bar{o}}(1) = \bar{\bar{o}}(1)$.
3. $\alpha(x_n)\beta(x_n) = \bar{\bar{o}}(1)\bar{\bar{o}}(1) = \bar{\bar{o}}(1)$.
4. $\alpha(x)\gamma(x) = \bar{\bar{o}}(1)M = \bar{\bar{o}}(1)$.

$\square$

**Утверждение.** $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \bar{\bar{o}}(1), \ x \to x_0$.

*Доказательство.* [7]

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \ \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - a = \bar{\bar{o}}(1)$$

$\square$

[6] Дано в качестве очевидного
[7] Дано в качестве очевидного

**Теорема.** Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)} = O(1)$ в $\mathring{B}(x_0)$.

*Доказательство.* По теореме об отделимости

$$\exists\ \mathring{B}(x_0) \text{ и } \exists\ \varepsilon > 0 : f(\mathring{B}(x_0)) \cap \mathring{B}_\varepsilon(0) \neq \varnothing$$

Тогда

$$\forall x \in \mathring{B}(x_0) : |f(x)| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

□

## 5.5 Арифметические свойства пределов функций и предельные переходы в неравенствах

**Теорема.** Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$.
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = ab$.
3. Если $b \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

*Доказательство.* Эту теорему можно доказать используя тот факт, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \bar{\bar{o}}(1),\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = b + \bar{\bar{o}}(1)$, а также исчисление бесконечно малых функций. □

**Пример.**

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, если $\alpha > \beta$, то $x^\alpha = \bar{\bar{o}}(x^\beta),\ x \to 0$, так как
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha - \beta} = 0$$
Например: $x + \bar{\bar{o}}(x) + x^2 + \bar{\bar{o}}(x^2) = x + \bar{\bar{o}}(x),\ x \to 0$.
2. $\sin x = x + \bar{\bar{o}}(x),\ x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

**Теорема.** Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a,\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ и пусть $\forall x \in \mathring{B}(x_0) :$ $f(x) \geq g(x)$, тогда $a \geq b$.

*Доказательство.* [8]

$$\forall x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0,\ \forall n : \lim_{x \to x_0} f(x_n) = a \text{ и } \lim_{x \to x_0} g(x_n) = b$$

по условию: $f(x_n) \geq g(x_n)$ значит, по доказанному для последовательностей $a \geq b$. □

[8] Дано в качестве очевидного

**Теорема.** Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, и пусть $a > b$. Тогда $\exists \mathring{B}(x_0) : f(x) > g(x)$.

*Доказательство.* По теореме об отделимости. $\square$

**Теорема.** (Теорема о двух милиционерах)
Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$ и пусть в $\mathring{B}(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$.

*Доказательство.* по Гейне. $\square$

## 5.6 Монотонные функции

**Определение.** Если $\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) : x_1 < x_2$ выполнено, что

1. $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $f(x)$ называют неубывающей.
2. $f(x_1) < f(x_2)$, то $f(x)$ называют возрастающей.
3. $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $f(x)$ называют невозрастающей.
4. $f(x_1) > f(x_2)$, то $f(x)$ называют убывающей.

такие функции называют монотонными.

**Теорема.** Пусть $f(x)$ определена на $(a - \delta, a)$, $f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу). Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$.

*Доказательство.* Докажем для неубывающей и ограниченой сверху. $\exists \sup f(x) = A$. Значит

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; x_\varepsilon \in (a - \delta, a) : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$$

Тогда

$$\forall x \in (x_\varepsilon, a) : f(x) \geq f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$$

а значит

$$\forall x \in \mathring{B}(A) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\square$

## 5.7 Критерий Коши

**Теорема.** (Критерий Коши)

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

($\Rightarrow$)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

Значит $\forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - a + a - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < 2\varepsilon$$

($\Leftarrow$)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\forall x_n : x_n \to x_0, \ x_n \neq x_0 \ \exists \ N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}, \ \forall n > N_{\delta_\varepsilon} : |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n, m > N_{\delta_\varepsilon} : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

$t_n : t_n \to x_0, \ t_n \neq x_0, \ \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) = b$. Рассмотрим последовательность $y_n : x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, \ y_n \to x_0$ если $a \neq b$ то последовательность $f(y_n)$ будет иметь два частичных предела $\Rightarrow a = b$.

$\square$

# 6 Непрерывные функции

## 6.1 Локальные свойства непрерывных функций

**Определение.** Пусть $D_f$ - область определения $f(x),\ x_0 \in D_f$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

то $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$.

**Замечание.** Определение эквивалентно тому, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, если $x_0$ не изолированная точка.

**Теорема.** Пусть $f(x), g(x)$ - непрерывны в точке $x_0$. Тогда:

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ - непрерывна в точке $x_0$
2. $f(x)g(x)$ - непрерывна в точке $x_0$
3. если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x_0$

*Доказательство.* Если $x_0$ - изолированная то очев. Если неизолированная, то по свойствам предела очевидно. □

**Теорема.** (Непрерывность композиции непрерывных функций)
Пусть $f(x)$ определена в $B_\delta(x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а также $f(B_\delta(x_0)) \subset B(y_0),\ f(x_0) = y_0$. И пусть $g(y)$ определена в $B(y_0)$ и непрерывна в точке $y_0$. Тогда $g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

*Доказательство.* По Гейне:

$$\forall x_n \to x_0,\ f(x_n) \to f(x_0).\ \forall y_n \to y_0,\ g(y_n) \to g(y_0)$$

$$y_n = f(x_n),\ g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

□

## 6.2 Глобальные свойства непрерывных функций

**Определение.** Пусть $f(x)$ - определена на $X \subset \mathbb{R}$ и $\forall x \in X : f(x)$ - непрерывна в точке $x$. Тогда говорят, что $f(x)$ непрерывна на $X$, и пишут $f(x) \in \mathcal{C}(X)$.

**Теорема.** (1-я теорема Вейерштрасса)
Если $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a, b]$.

*Доказательство.* Предположим, что $f(x)$ неограничена, то есть

$$\forall M > 0 \ \exists \ x_M \in [a, b] : |f(x_M)| > M$$

Возьмем

$$x_1 : |f(x_1)| > 1, \ x_2 : |f(x_2)| > 2, \ \dots \ x_M : |f(x_M)| > M, \ \dots$$

Получаем последовательность

$$x_n \subset [a, b] \Rightarrow \exists \ x_{n_k} : x_{n_k} \to x_0$$

$f(x)$ непрерывна $\Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, но $|f(x_{n_k})| \to \infty$ получаем противоречие.

$\square$

**Теорема.** (2-я теорема Вейерштрасса)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$. Тогда $f(x)$ имеет максимальное $\max f(x)$ и минимальное $\min f(x)$ значения на $[a, b]$

*Доказательство.* Пусть

$$\alpha = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Значит

$$\exists \ x_1 \in [a, b] : f(x_1) > \alpha - 1, \ \exists \ x_2 \in [a, b] : f(x_2) > \alpha - \frac{1}{2}, \ \dots$$

$$\exists \ x_n \in [a, b], \ f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n}, \ \dots$$

$$\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}, x_{n_k} \to x'$$

$$f(x_{n_k}) \to f(x'), \ \alpha - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq \alpha \Rightarrow f(x_{n_k}) \to \alpha$$

$\square$

**Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$. $f(a) = A, \ f(b) = B$ и $A \leq B$. Тогда

$$\forall C : A \leq C \leq B \ \exists \ c \in [a, b], \ f(c) = C$$

*Доказательство.* Если $A = B$ то очевидно, далее пусть $A < B$. Возьмем $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = C$, то все. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq C$, то $f(\frac{a+b}{2}) > C$ или $f(\frac{a+b}{2}) < C$. Возьмем половину отрезка $[a_1, b_1] : f(a_1) < C < f(b_1)$, снова делим пополам и т.д. Получаем $\{[a_n, b_n]\}$ последовательность вложенных отрезков $\Rightarrow \exists \ c \in [a_n, b_n], \forall n, \ a_n \to c, \ b_n \to c$. Тогда по непрерывности:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(c) \leq C, \quad \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c) \geq C$$

$\Rightarrow f(c) = C$. $\square$

## 6.3 Точки разрыва функции

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $B(x_0)$.

1. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка $x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$.

2. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \alpha,\ \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \beta,\ \alpha \neq \beta$, то точка называется точкой разрыва 1 рода функции $f(x)$.

3. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов, то $x_0$ называется точкой разрыва 2 рода функции $f(x)$.

**Теорема.** Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ и монотонна. Тогда у этой функции не может быть разрывов 2-го рода.

*Доказательство.* Пусть $f(x) \leq f(b)$ и $f$ монотонно возрастает. Так как $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, то $f$ - ограничена $\Rightarrow \forall x_0 \in [a, b]\ \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Значит у $f(x)$ не может быть разрывов 2-го рода. $\square$

**Следствие.** Утверждение теоремы верно и для монотонной функции $f(x)$, определенной на интервале $(a, b)$.

*Доказательство.* $\exists\ [a, b] \subset (a, b) : (a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ $\square$

**Утверждение.** У монотонной функции разрывов не более чем счетное множество.

**Теорема.** Пусть $f(x)$ строго монотонна на $[a, b]$ и $f(x) \in \mathcal{C}[a, b],\ f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Тогда $\exists\ f^{-1}(y) \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ и она строго монотонна.

*Доказательство.* Пусть строго возрастает. $\forall x_1, x_2,\ x_1 < x_2 : f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$. Тогда $f(x)$ - биекция между $[a, b]$ и $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists f^{-1}$. Предположим, что она разрывная, но тогда нарушается биекция, и вообще нарушается условие того, что функция определена на всем отрезке $[a, b]$. $\square$

## 6.4 Равномерная непрерывность

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta_\varepsilon : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

то $f(x)$ называется равномерно непрерывной на $[a, b]$.

**Теорема.** (Теорема Кантора)
Если $f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$.

*Доказательство.* Пусть

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists\ x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Возьмем последовательность

$$\delta_n = \frac{1}{n} : \exists x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \frac{1}{n} : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Тогда $\exists\ x'_{n_k} \to x_0,\ \exists\ x''_{n_k} \to x_0 \Rightarrow f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(x_0)$ - противоречие. □

## 6.5 Элементарные функции

1. Показательная функция
   Пусть $a > 1$

   (i) Определим показательную функцию для натурального аргумента: $a^n := \prod\limits_{j=1}^{n} a,\ n \in \mathbb{N}$, из определения очевидно свойство: $a^{n+m} = a^n a^m$.

   (ii) Для целого аргумента $n$ определим функцию так:

   $$a^n := \begin{cases} a^n,\ n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{a^k},\ n = -k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1,\ n = 0. \end{cases}$$

   (iii) Теперь доопределим функцию для рационального аргумента:
   Пусть $a^{\frac{1}{n}} = b$, где $b^n = a,\ a, b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} : x^n \leq a\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} : x^n > a\},\ A \cup B = \mathbb{R}_{\geq 1}$. По аксиоме полноты $\exists\ b : x_1 \leq b \leq x_2,\ \forall x_1 \in A,\ \forall x_2 \in B$ и $b = a^{\frac{1}{n}}$.
   Далее $\forall\ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m$.

   (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

   $$(1 + \frac{a}{n})^n > 1 + a > a \Rightarrow 1 + \frac{a}{n} > a^{\frac{1}{n}} > 1$$

   по теореме о двух милиционерах $a^{\frac{1}{n}} \to 1$.
   Пусть $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ r_n \to x_0 - 0,\ s_n \to x_0 + 0$. Тогда

   $$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \alpha,\ \exists \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \beta,\ \alpha \leq \beta$$

Пусть $\alpha < \beta,\ a^{s_n} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{s_n - r_n} - 1) \to \beta - \alpha > 0$. Рассмотрим подпоследовательность $0 < s_{n_k} - r_{n_k} < \frac{1}{k}$. Тогда $1 < a^{s_{n_k} - r_{n_k}} < a^{\frac{1}{k}}$.
По теореме о двух милиционерах

$$a^{s_{n_k} - r_{n_k}} \to 1 \Rightarrow a^{s_{n_k}} - a^{r_{n_k}} \to 0 \Rightarrow \alpha = \beta = a^{x_0}$$

Непрерывность и монотонность есть по построению.

(v) Доопределим функцию при $0 < a < 1$:

$$a^x := \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$$

2. Функция, обратная к $y = a^x$ называется логарифмом и обозначается

$$x = \log_a y$$

Далее пишем $y = \log_a x$. Известны следующие свойства:

$$\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a x,\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Отдельно выделяют $\log_e x$, его называют натуральным логарифмом и обозначают $\ln x$.

3. Степенная функция.
$\forall x > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ степенная функция определяется как

$$x^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln x}$$

Распространяем: при $\alpha \geq 0$ доопределим $x^\alpha$ в точке $x = 0$ по непрерывности (ищем предел и добавляем его как значение), при $\alpha \in \mathbb{Z}$ доопределяем $x^\alpha$ при $x < 0$ четно, если $\alpha$ - четное и нечетное, если $\alpha$ - нечетное.

4. Тригонометрические функции:
$y = \sin x$ определим так: возьмем окружность единичного радиуса, на $[0, 2\pi]$ синус - ордината.
$\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq |x|,\ \sin{(x + \delta)} - \sin x = |2 \sin{(\frac{\delta}{2})} \cos{(x + \frac{\delta}{2})}| \leq \delta$.
$\cos x$ определяем в соответствии с определением синуса.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

5. Обратные тригонометрические функции:
$y = \arcsin x$, обратную к $\sin x$ определяем на области, где будет биекция с $\sin x$ (обычно берут $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Аналогично определяются обратные к $\cos x,\ \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

6. Гиперболические функции:
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$
Для этих функций можно получить формулы, аналогичные тем, что верны для тригонометрических функций.

## 6.6 Замечательные пределы

**Теорема.** (Первый замечательный предел)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.* $\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. По теореме о двух милиционерах $\frac{\sin x}{x} \to 1$. □

**Утверждение.**
$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$
*Доказательство.* Воспользуемся определением по Гейне. Пусть $\alpha_n \to +\infty$:
$$(1 + \frac{1}{[\alpha_n]+1})^{[\alpha_n]} \le (1 + \frac{1}{\alpha_n})^{\alpha_n} \le (1 + \frac{1}{[\alpha_n]})^{[\alpha_n]+1}$$
$\Rightarrow$ по лемме о двух милиционерах $(1 + \frac{1}{\alpha_n})^{\alpha_n} \to e$. Теперь пусть $\beta_n \to -\infty$:
$$(1 + \frac{1}{\beta_n})^{\beta_n} = (\frac{\beta_n + 1}{\beta_n})^{\beta_n} = (\frac{\beta_n}{\beta_n + 1})^{-\beta_n} = (1 - \frac{1}{\beta_n + 1})^{-\beta_n}$$
□

**Следствие.**
$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$
**Утверждение.**
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
*Доказательство.* В силу непрерывности натурального логарифма:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$
□

**Теорема.** (Второй замечательный предел)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

*Доказательство.* Пусть $t = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + t \Rightarrow x = \ln(1+t)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

$\square$

# 7 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

## 7.1 Производная функции

В следующих определениях предполагается, что $f(x)$ определена в $B(x_0)$.

**Определение.** Производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ называется (если он существует) предел

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Определение.** Производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ по множесту $A$ называется (если он существует) предел

$$f'_A(x_0) := \lim_{A \ni \Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если $A = (x_0 - \Delta x, x_0)$ или $(x_0, x_0 + \Delta x)$, то пишут $f'_-(x_0)$ или $f'_+(x_0)$.

**Замечание.** Если обозначить $\Delta x = x - x_0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Теорема.** Если существует производная функции $f(x)$ в точке $x_0$, то $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

*Доказательство.*

$$\exists\ f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x) + \bar{\bar{o}}(1)$$

Так как $x - x_0 = \bar{\bar{o}}(1)$ при $x \to x_0$, то это равенство можно записать в виде:

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x) + \bar{\bar{o}}(1))(x - x_0) = \bar{\bar{o}}(1)$$

Значит

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\square$

**Теорема.** Если у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные в точке $x_0$, то $\forall C \in \mathbb{R}$ выполнено:

1. $\exists\ (Cf(x_0))' = Cf'(x_0)$.

2. $\exists\ (f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

**Теорема.** Если $\exists\ f'(x_0)$ и $\exists\ g'(x_0)$, то $\exists\ (f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$.

*Доказательство.*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))f(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

в последнем переходе используется непрерывность $g(x)$
($\exists\ g'(x_0) \Rightarrow g(x)$ непрерывна в точке $x_0$). □

**Теорема.** Если $\exists\ f'(x_0),\ \exists\ g'(x_0)$ и $g(x_0) \neq 0$, то

$$\exists\ (\frac{f(x_0)}{g(x_0)})' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*Доказательство.*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - (g(x) - g(x_0))f(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

в последнем переходе используется непрерывность $g(x)$. □

**Теорема.** Пусть $y = f(x),\ y_0 = f(x_0),\ \exists\ f'(x_0),\ \exists\ g'(y_0)$. Тогда

$$\exists\ (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

*Доказательство.* Пусть $x_n \to x_0,\ f(x_n) \to f(x_0)$ и $f(x_n) \neq f(x_0)$. Тогда

$$(g(f(x_0)))' = \lim_{x_n\to x_0} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} =$$
$$= \lim_{x_n\to x_0} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Остался случай, когда в любой окрестности $x_0$ есть бесконечно много точек, в которых $f(x_n) = f(x_0)$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

$\Rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) = 0$ □

**Пример.** $(f(g(h(a(x)))))' = f'(g(h(a(x)))) \cdot g'(h(a(x))) \cdot h'(a(x)) \cdot a'(x)$

## 7.2 Дифференцируемые функции

**Определение.** Разность $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется полным приращением функции.

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $B(x_0)$. Если $\exists\ A \in \mathbb{R}$ такое, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

то $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x_0$, а главная линенйная часть приращения функции $A\Delta x$ называется (первым) дифференциалом $f(x)$ в точке $x_0$, его обозначают $df = A\Delta x$.
Если функция $f(x)$ дифференцируема на $X \subset \mathbb{R}$, то пишут $f(x) \in \mathcal{D}(X)$

**Теорема.** $f(x) \in \mathcal{D}(x_0) \Leftrightarrow \exists\ f'(x_0)$.

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$ : $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$, значит

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \bar{\bar{o}}(1) \Rightarrow \exists\ f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

$(\Leftarrow)$ : $\exists\ f'(x_0)$, значит

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

□

**Замечание.**

1. $df = f'(x_0)\Delta x$
2. $dx = x'\Delta x = \Delta x \Rightarrow df = f'(x)dx$

**Примеры.**

1. $y = y(x)$ $dy = y'(x)\ dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{1}{y'(x)}\ dy$

2. $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

   $2x\ dx + 2y\ dy = 0 \Leftrightarrow dy = -\dfrac{x}{y}\ dx = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx.$

3. $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad \begin{cases} dx = x'_t\ dt, \\ dy = y'_t\ dt. \end{cases} \quad dy = \dfrac{y'_t}{x'_t}\ dx \quad \begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$

**Теорема.** (Теорема о производной обратной функции)
Пусть $\exists\ y' = f'(x_0),\ f'(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists\ x = f^{-1}(y)$ и

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Доказательство.*

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

## 7.3 Производные элементарных функций

1. $(e^x)' = e^x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

2. $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \frac{\alpha}{x} \cdot e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

4. $(\sin x)' = \cos x.$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos x_0 \cos \frac{\Delta x}{2} - \sin x_0 \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0$$

5. $y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 7.4 Касательная. Геометрический смысл первого дифференциала

**Определение.** Луч $l_0$ с началом в точке $(x_0, y_0)$ и углом $\alpha_0 \in [-\pi, \pi]$ к положительному направлению оси $Ox$, называется предельным положением семейства лучей $l(t)$ с началом в точке $(x_0, y_0)$ и углом $\alpha(t) \in [-\pi, \pi]$, если $\lim\limits_{t\to t_0} \alpha(t) = \alpha_0$.

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена на $[x_0, x_0+\delta)$. Если семейство лучей $l(x, x_0)$, проходящих через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, где $x \in [x_0, x_0+\delta)$ имеет предельное положение при $x \to x_0+0$, то это предельное положение называется правой полукасательной. Аналогично определяется левая полукасательная. У правой полукасательной $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, у левой $\alpha \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

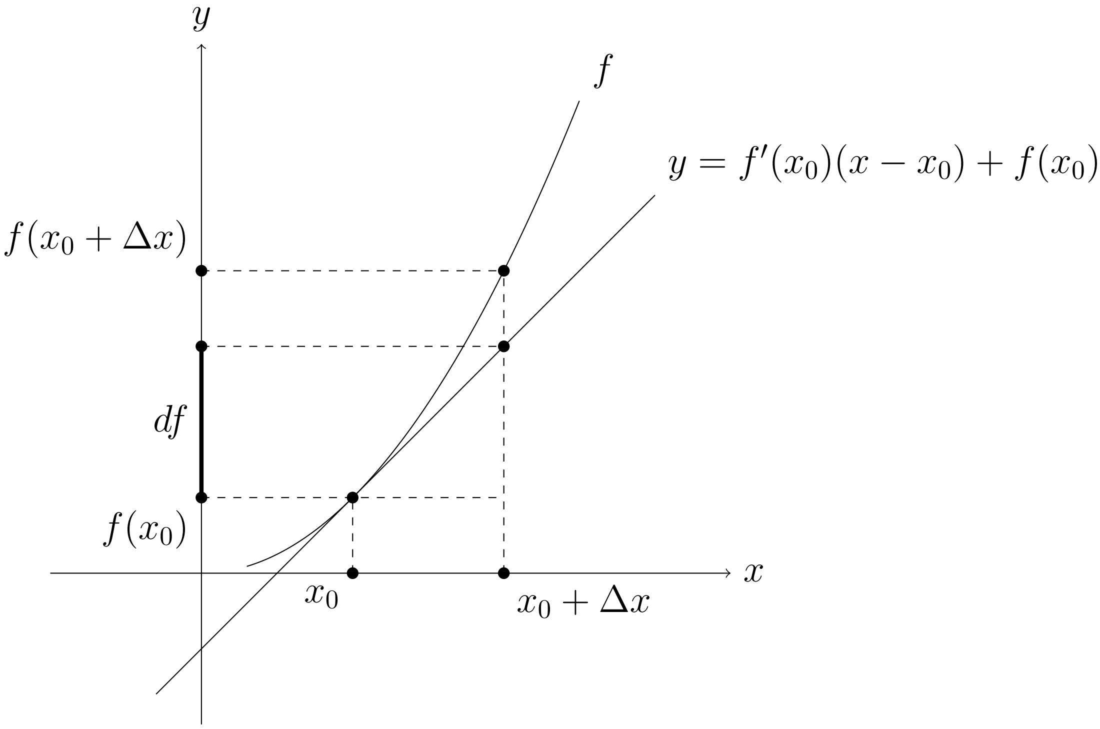
**Определение.** Если углы наклона у правой и левой полукасательной отличаются на $\pi$, то образованая этими лучами прямая называется касательной прямой.

**Определение.**

$$\operatorname{tg} \alpha_+ = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$$
$$\operatorname{tg} \alpha_- = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

**Утверждение.** Уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$




$$df = f'(x)dx$$

**Утверждение.** (Инвариантность формы первого дифференциала)
Пусть $y = y(x)$. Если переменная $x$ - независимая, то

$$dy = y'(x)dx$$

Если $x = x(t)$, то дифференциал $dy$ все равно вычисляется по той же формуле.

*Доказательство.*

$$dy = y'(x)x'(t)dt = y'(x)dx$$

□

## 7.5 Производные и дифференциалы старших порядков

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $B(x_0)$, $f(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$. Если $\exists\ (f'(x_0))'$, то говорят, что у функции есть вторая производная в точке $x_0$, и обозначают $f''(x_0)$. Аналогично определяется производная порядка $n \in \mathbb{N}$, обозначают $f^{(n)}(x)$.

**Определение.** Пусть $f(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$, $f'(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$. Возьмем первый дифференциал от первого дифференциала

$$\delta(f'(x)dx) = \delta(f'(x))dx = f''(x)\delta x dx \quad (*)$$

Выражение (∗), взятое при $\delta x = dx$, называется вторым дифференциалом $f(x)$, обозначается $d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2$. Аналогично определяется дифференциал порядка $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta(f^{(n-1)}(x)dx) = f^{(n)}(x)dx^{n-1}\delta x|_{\delta x = dx} = f^{(n)}dx^n = d^n f(x)$$

**Пример.** (Неинвариантность формы дифференциала старших порядков)

$$d^2y(x) = y''(x)dx^2 \neq y''(x(t))x'(t)^2dt^2$$

$$d(dy(x(t))) = d(y'(x(t))x'(t)dt) = (y''(x(t))x'(t)^2 + y'(x(t))x''(t))dt^2$$

**Определение.** Запись $f(x) \in \mathcal{C}^n[a,b]$ обозначает, что у функции $f$ есть $n$ производных и они все непрерывны на отрезке $[a,b]$.

## 7.6 Свойства дифференцируемых функций

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена в $B(x_0)$. Если $\forall x \in \mathring{B}(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$, то $x_0$ - точка минимума. Если $f(x) < f(x_0)$, то $x_0$ - точка максимума. Такие точки называют точками экстремума.

**Теорема.** (Теорема Ферма)
Пусть $f(x)$ определена в $B(x_0)$, пусть существуют левая и правая производные в точке $x_0$. Тогда

1. $x_0$ - точка максимума, если $f'_-(x_0) \geq 0$ и $f'_+(x_0) \leq 0$.
2. $x_0$ - точка минимума, если $f'_-(x_0) \leq 0$ и $f'_+(x_0) \geq 0$.

*Доказательство.* (для точки максимума)

$$f'_-(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ при } x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f'_+(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ при } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

□

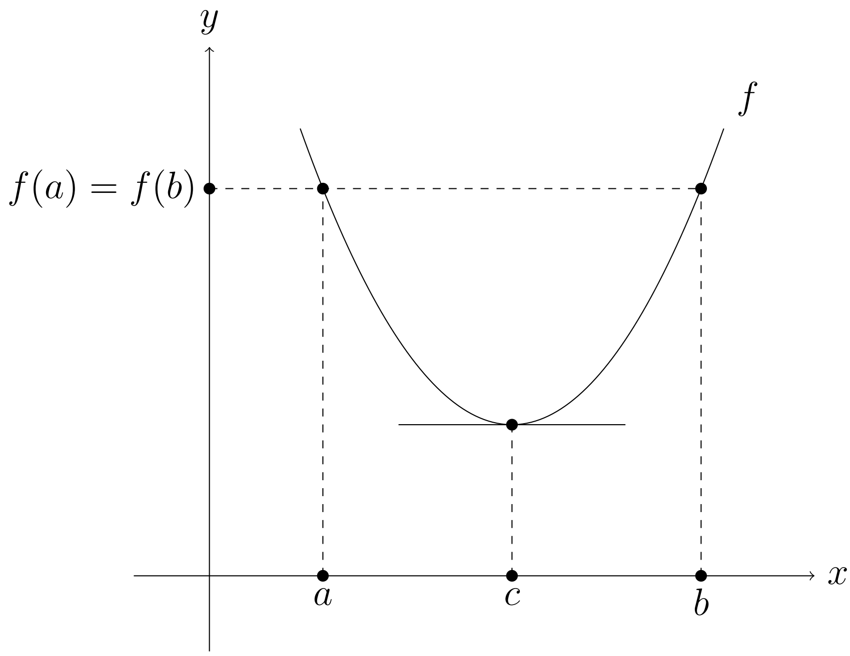
**Следствие.** Если $f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0$ и $\exists\ f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

**Теорема.** (Необходимое условие существования экстремума)
Если $f(x)$ имеет в экстремум в точке $x_0$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо не существует производной в точке $x_0$.

**Теорема.** (Теорема Ролля)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ f(x) \in \mathcal{D}(a,b)$. Если $f(a) = f(b)$, то $\exists\ c \in (a,b) : f'(c) = 0$.

*Доказательство.* Если $\exists\ x_{\max}$ такой, что $\forall a : f(x_{\max}) > f(a) \Rightarrow f'(x_{\max}) = 0$.
Если $\exists\ x_{\min}$ такой, что $\forall a : f(x_{\min}) < f(a)\ \forall a \Rightarrow f'(x_{\min}) = 0$.
Если $\forall x \in (a, b) : f(x) = f(a) = f(b)$, то $f'(x) = 0$ □

Геометрически это означает, что при таких условиях найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.




## 7.7 Формула Лагранжа. Геометрический смысл и приложения

**Теорема.** (Формула Лагранжа, формула дифференциального среднего)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b],\ f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$. Тогда $\exists\ c \in (a, b)$ :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

*Доказательство.* Введем функцию $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow \varphi(a) = f(a),\ \varphi(b) = f(a)$$

Тогда по теореме Ролля $\exists\ c \in (a, b)$ :

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

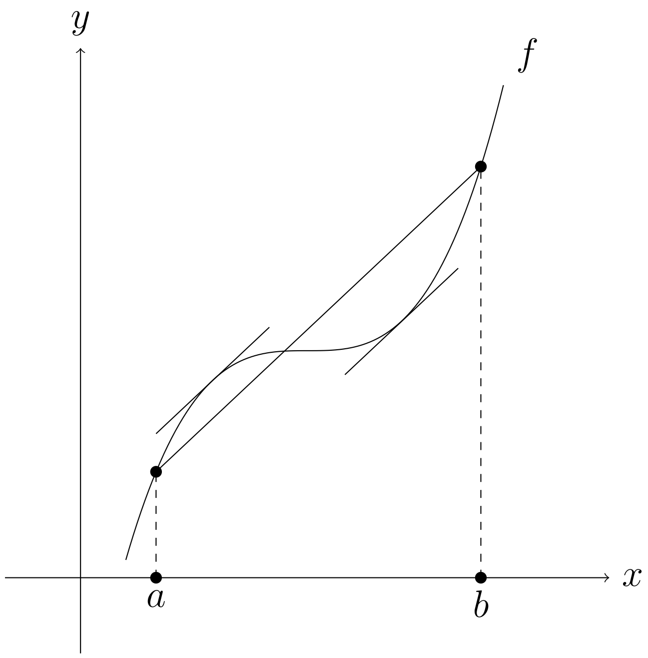
□

**Следствие.** (Важное следствие из формулы Лагранжа)
Пусть $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$. Если $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) = \mathrm{const}$.

*Доказательство.* $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ $\square$

Геометрически теорема Лагранжа означает, что в некоторой точке $(c, f(c))$, где $c \in (a,b)$, касательная к графику функции будет параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$




Отметим, что точек, удовлетворяющих формуле Лагранжа, может быть несколько.

**Теорема.** (Формула Коши)
Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(a,b)$, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Тогда $\exists\ c \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе, по теореме Ролля существует $c \in (a,b) : g'(c) = 0$. Введем функцию $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)) \Rightarrow \varphi(b) = f(a),\ \varphi(a) = f(a)$$

Тогда по теореме Ролля $\exists\ c \in (a,b)$ :

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

$\square$

**Теорема.** (Связь монотонной функции и знака ее производной)

1. Пусть $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$.
   - Если $f(x)$ неубывает на $(a, b)$, то $\forall c \in (a, b) : f'(c) \geq 0$.
   - Если $f(x)$ невозрастает на $(a, b)$, то $\forall c \in (a, b) : f'(c) \leq 0$.

2. - Пусть $f'(x) \geq 0$. Тогда $f(x)$ неубывает.
   - Пусть $f'(x) \leq 0$. Тогда $f(x)$ невозрастает.

3. - Пусть $f'(x) > 0$. Тогда $f(x)$ строго возрастает.
   - Пусть $f'(x) < 0$. Тогда $f(x)$ строго убывает.

*Доказательство.* Воспользуемся формулой Лагранжа:

1. Докажем для неубывающей: $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 \leq x_2 :$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

2. Докажем для неубывающей: $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 \leq x_2 :$
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

3. Докажем для возрастающей: $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 :$
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

$\square$

**Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(B(x_0)),\ f(x) \in \mathcal{D}(\mathring{B}(x_0))$

1. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x_0) = f'(x_0 - 0)$, то $\exists\ f'_-(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$.
2. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$, то $\exists\ f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$.

*Доказательство.* Докажем для правой производной. По формуле Лагранжа $\exists\ c \in (x_0, x)$:
$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\ x \to x_0 + 0,\ c \to x_0 + 0$$
Тогда
$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

$\square$

**Следствие.** Если $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$, то $f'(x)$ может иметь разрывы только второго рода.

*Доказательство.* Покажем, что у такой функции не может быть устранимых разрывов и разрывов первого рода:

1. Если $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то $\exists\ f'(x_0) = f'_-(x_0) = f_+(x_0)$.

2. Если $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, тогда $f'(x_0)$ не существует.

Таким образом, могут быть разрывы только второго рода. □

**Теорема.** (Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной)
Пусть $f(x) \in \mathcal{D}[a, b],\ f'_+(a) = A,\ f'_-(b) = B,\ C$ - число между $A$ и $B$. Тогда $\exists\ c \in [a, b]$ такая, что $f'(c) = C$.

*Доказательство.* Тривиальный случай: Если $A = B$, то очев. Далее $A \neq B$

1. Пусть $A < 0,\ B > 0,\ C = 0$. Тогда
$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} < 0 \Rightarrow \exists\ \delta > 0, x \in [a, a + \delta) : f(x) < f(a)$$
$$\frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \exists\ \delta > 0, x \in (b - \delta, b] : f(x) < f(b)$$
(при достаточно малых $x$) $\Rightarrow x_{\min} \in (a, b) \Rightarrow f'(x_{\min}) = 0,\ c = x_{\min}$.

2. Пусть $A > 0,\ B < 0,\ C = 0$. Тогда рассмотрим $g(x) = -f(x)$, а для нее верен предыдущий случай.

3. Пусть $A \neq B$ - любые, $C$ - между $A$ и $B$ - любое. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - Cx$. Тогда $g'(a) = A - C,\ g'(b) = B - C$. Заметим, что $g'(a)$ и $g'(b)$ разных знаков $\Rightarrow \exists\ g'(c) = 0$ (свели к первому и второму случаю).

□

## 7.8 Правила Лопиталя

**Теорема.** Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(B(x_0)),\ f(x_0) = g(x_0) = 0,\ g(x) \neq 0$ в $\mathring{B}(x_0)$ и $g'(x) \neq 0$ в $B(x_0)$. Тогда
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

*Доказательство.*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

**Теорема.** Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(\mathring{B}(x_0))$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathring{B}(x_0)$. Тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \;\Rightarrow\; \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

А также

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

*Доказательство.* [9] Из существования предела отношения производных имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 : \forall x \in \mathring{B}(x_0) : \; |\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$$

Доопределим функции в точке $x_0$: $f(x_0) := 0$, $g(x_0) := 0$. Тогда
$f(x)$, $g(x) \in \mathcal{C}(x_0)$ при этих всех условиях выполнена теорема Коши:

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| = |\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A| = |\frac{f'(c)}{g'(c)} - A| < \varepsilon$$

Аналогично, условие

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 : \forall x \in \mathring{B}(x_0) : \; |\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| > \varepsilon$$

влечет выполнение

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| = |\frac{f'(c)}{g'(c)} - A| > \varepsilon$$

где $x \in \mathring{B}(x_0)$, а $c$ - точка между $x$ и $x_0$. □

**Теорема.** Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(a, +\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Тогда

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \;\Rightarrow\; \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

А также

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \;\Rightarrow\; \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Для $x \to -\infty$ верно аналогичное утверждение.

*Доказательство.* Сделав замену, сведем теорему к предыдущей. □

[9] Доказательство модифицировано в соответсвии со старым конспектом лекций Подольского и курсом лекций Солодова на teach-in

**Теорема.** Пусть $f(x),\ g(x) \in \mathcal{D}(x_0-\delta, x_0),\ f(x), g(x) \to \pm\infty,\ x \to x_0 - 0$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in \mathring{B}(x_0)$. Тогда

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \ \Rightarrow\ \exists \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

А также

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \ \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

Для правой полуокрестности верно аналогичное утверждение.

*Доказательство.* [10] Пусть $x_2 < x_1 < x_0$. По формуле Коши $\exists\ c \in (x_2, x_1)$:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) + \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot g(x_1) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot g(x_2)$$

поделив это равенство на $g(x)$, получим:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_2)}{g(x_1)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(x_2)}{g(x_1)}$$

По условию существования предела отношения производных выберем такой $\delta_1$, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_0 - x_1 > \delta_1 > 0,\ \forall x \in (a-\delta_1, a) : |\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$, значит

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)}| < |A| + \varepsilon$$

По неравенству треугольника:

$$|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - A| \leq |\frac{f(x_2)}{g(x_1)}| + |\frac{f'(c)}{g'(c)} - A| + |\frac{f'(c)}{g'(c)}| \cdot |\frac{g(x_2)}{g(x_1)}|$$

Ввиду расположения точки $c$:

$$|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A| < \varepsilon$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a-0} \frac{1}{g(x)} = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_2 > 0 : \forall x \in (a-\delta_2, a) : \frac{1}{g(x)} < \varepsilon$. Значит

$$|\frac{f(x_2)}{g(x_1)}| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\frac{g(x_2)}{g(x_1)}| < \frac{\varepsilon}{|A|+\varepsilon}$$

Значит, выбрав $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим:

$$|\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - A| < \varepsilon + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{|A|+\varepsilon}(|A|+\varepsilon) = 3\varepsilon$$

Аналогично

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$$

□

[10] Доказательство модифицировано в соответсвии с курсом лекций Солодова на teach-in

## 7.9 Формулы Тейлора

**Определение.** Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0)$. Формула

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x,x_0)$$

называется формулой Тейлора с центорм в точке $x_0$ и остаточным членом $r_n(x,x_0)$.

**Теорема.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)
Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0)$. Тогда остаточный член $r_n(x,x_0)=\bar{\bar{o}}(x-x_0)^n,\ x\to x_0$.

*Доказательство.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}=$$
$$=\frac{1}{n!}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)=0$$

□

**Теорема.** (Остаточный член в общей форме)
Пусть $f(t)\in\mathcal{C}^n[x_0,x],\ f^{(n)}\in\mathcal{D}(x_0,x),\ \varphi(t)\in\mathcal{C}[x_0,x],\ \varphi(t)\in\mathcal{D}(x_0,x),$
$\varphi'(t)\neq 0$. Тогда $\exists\ c\in(x_0,x)$ такая, что

$$r_n(x_0,x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

*Доказательство.* Введем вспомогательную функцию

$$\psi(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$\psi(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\ \psi(x)=f(x)$$

$$\frac{r_n(x,x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(c)}(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1}) =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Отсюда

$$r_n(x,x_0) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$\square$

**Следствие.** (Остаточный член в форме Лагранжа)
Возьмем $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Тогда

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

**Формулы Тейлора элементарных функций с центром в нуле**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{\bar{o}}(x^n),\ x \to 0$$

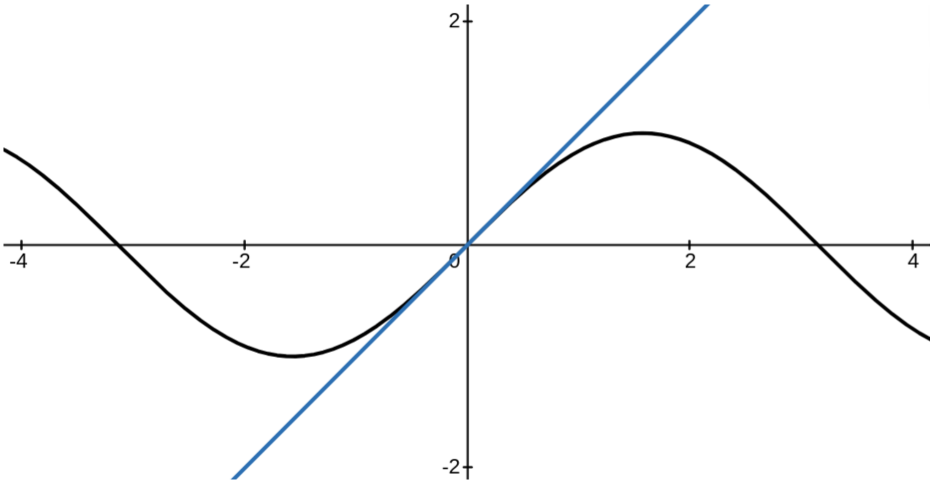
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$$

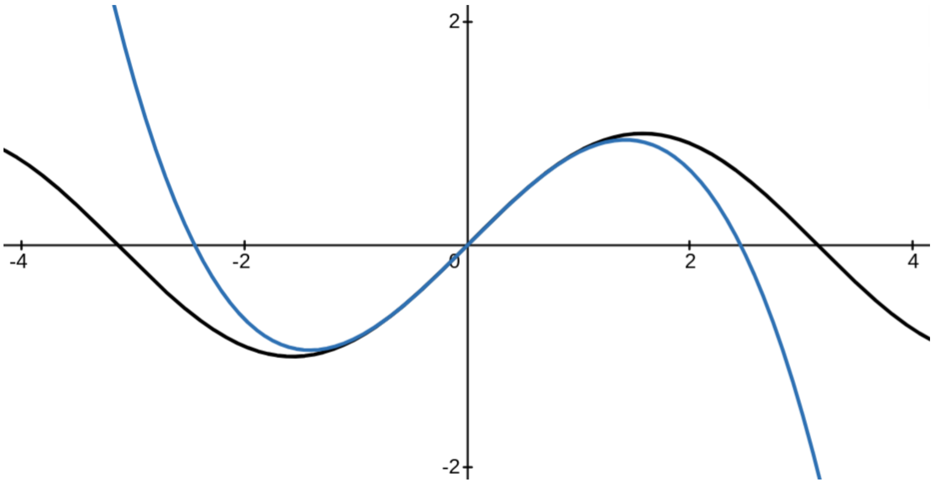
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}(-1)^{k+1} + \bar{\bar{o}}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k,\ \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

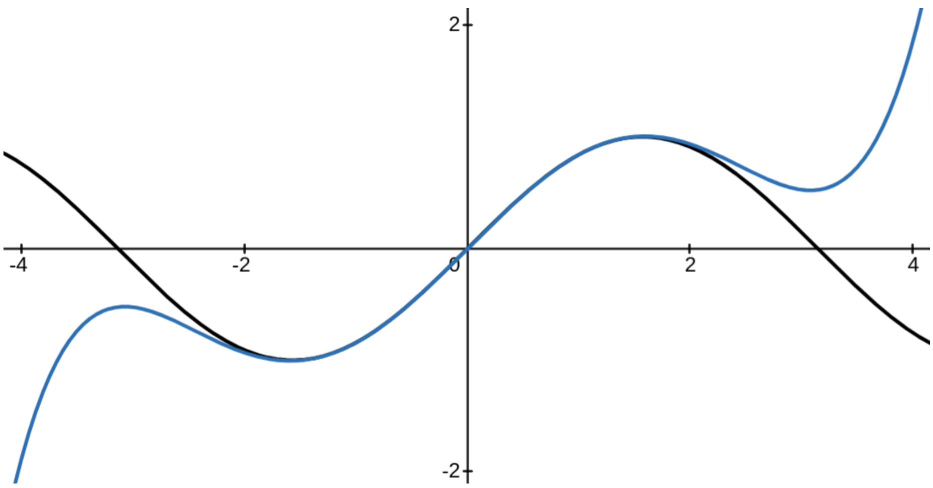
**Пример.** Рассмотрим несколько первых членов ряда для синуса



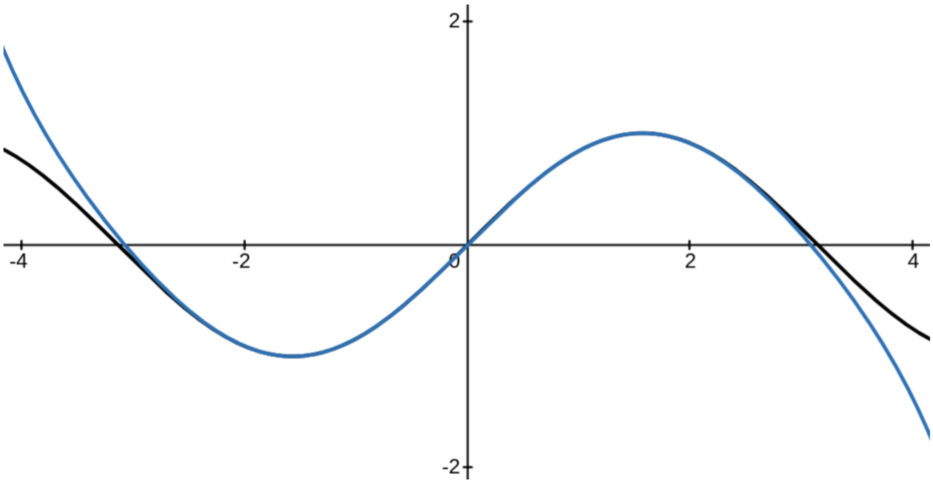

$$\sin x = x + \bar{\bar{o}}(x)$$




$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \bar{\bar{o}}(x^3)$$




$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \bar{\bar{o}}(x^5)$$




$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \bar{\bar{o}}(x^7)$$

## 7.10 Экстремум функции

**Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(B(x_0)),\ f(x) \in \mathcal{D}(\mathring{B}(x_0))$.
Если при $x < x_0 : f'(x) > 0$ или при $x > x_0 : f'(x) < 0$, то $x_0$ - точка максимума.
Если при $x < x_0 : f'(x) < 0$ или при $x > x_0 : f'(x) > 0$, то $x_0$ - точка минимума.

*Доказательство.* По формуле Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ □

**Теорема.** (Достаточное условие локального экстремума)
Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0) \neq 0,\ f^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, \ldots, n-1$.

1. Если $n = 2k+1$, то экстремум нет.

2. Если $n = 2k$, то

   - если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $x_0$ точка минимум
   - если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $x_0$ точка максимума.

*Доказательство.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n,\ x \to x_0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{\bar{o}}(1)\right)$$

Заметим, что знак $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{\bar{o}}(1)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности $x_0$. Значит,

1. Если $n = 2k+1$, то $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе $x$ через точку $x_0 \Rightarrow$ при этом переходе $f(x) - f(x_0)$ тоже меняет свой знак $\Rightarrow x_0$ - не экстремум.

2. Если $n = 2k$, то $(x - x_0)^n$ не меняет знак при переходе $x$ через точку $x_0 \Rightarrow$ если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\forall x \in \mathring{B}(x_0) : f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ - точка минимума. Аналогично при $f^{(n)}(x_0) < 0 : x_0$ - точка максимума.

$\square$

**Схема поиска глобального экстремума**

1. Ищем точки интервала $(a, b)$, где $f'(x) = 0$ или где ее не существует.

2. Находим значение во всех этих точках и значения на концах открезка.

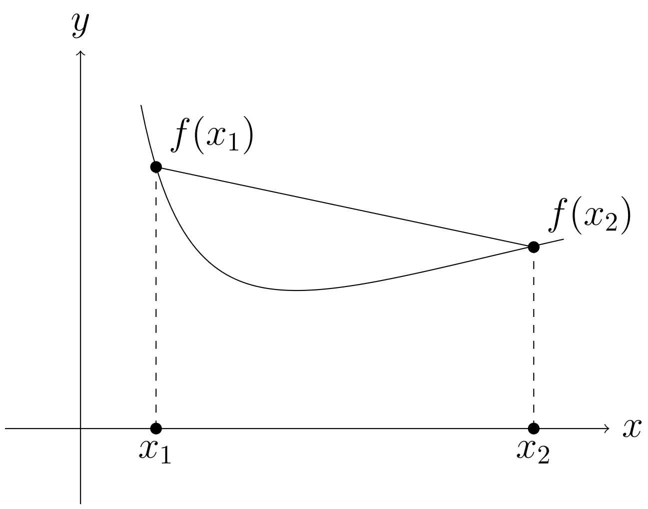
3. Сравниваем их между собой.

## 7.11 Выпуклые функции

**Определение.** Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(I)$. Если $\forall x_1, x_2 \in I$ и $\forall x : x_1 < x < x_2$:

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

то $f(x)$ называется выпуклой вниз. Если выполнено обратное неравенство, то $f(x)$ называется выпуклой вверх. Пример выпуклой вниз функции :




**Теорема.** (Достаточное условие выпуклости)
Пусть $f'(x) \in \mathcal{D}(I)$.

- Если $f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.

- Если $f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпукла вверх.

*Доказательство.* Пусть

$$l_1(x) = \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$$

$$\begin{aligned}
&f(x)-l_1(x) = \\
&\quad = f(x)\frac{(x-x_1)+(x_2-x)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} = \\
&\qquad = \frac{(f(x)-f(x_2))(x-x_1)+(f(x)-f(x_1))(x_2-x)}{x_2-x_1} = \\
&\qquad\quad = \frac{-f'(\xi)(x_2-x)(x-x_1)+f'(\eta)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} = \\
&\qquad\qquad = \frac{-f''(\chi)(\xi-\eta)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}
\end{aligned}$$

□

**Теорема.** Пусть $f'(x) \in \mathcal{D}(I)$. Если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то $\forall x_0 \in I$:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \geq 0$$

*Доказательство.* Пусть $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = l_2(x)$

$$f(x) - l_2(x) = f'(\xi)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0)$$

знаки скобок $(\xi - x_0)$ и $(x-x_0)$ одинаковы, значит $(\xi-x_0)(x-x_0) > 0$ □

**Определение.** Если $f(x) - l_2(x)$ при проходе через точку $x_0$ меняет знак (разные знаки в левой и правой окрестности), то точка $x_0$ называется точкой перегиба.

**Теорема.** (Необходимое условие наличия точки перегиба)
Пусть $f''(x) \in \mathcal{C}(B(x_0))$. Если $x_0$ - точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

*Доказательство.* Если $f''(x_0) > 0$, то в силу непрерывности $f''(x) > 0$ в $B(x_0)$, значит $x_0$ - не точка перегиба. Аналогично для $f''(x_0) < 0$. □

**Теорема.** (Достаточное условие наличия точки перегиба)
Пусть $f''(x) \in \mathcal{C}(I)$. Если $f''(x)$ меняется знак при проходе точки $x_0$, то $x_0$ - точка перегиба.

*Доказательство.* $f(x) - l_2(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$ □

**Теорема.** Пусть $f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0$. Тогда $x_0$ - точка перегиба.

*Доказательство.*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \bar{\bar{o}}((x - x_0)^3)$$

Тогда

$$f(x) - l_2(x) = (x - x_0)^3(\frac{f'''(x_0)}{6} + \bar{\bar{o}}(1))$$

□

**Определение.** Если при $x \to a - 0$ $(x \to a + 0) : f(x) \to \pm\infty$, то прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой.

**Определение.** Если при $x \to +\infty (x \to -\infty) : (f(x) - kx - b) \to 0$, то прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой.

**Теорема.** Прямая $y = kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$, аналогично к $-\infty$.

**Теорема.** (Неравенство Йенсена)

Пусть $f(x)$ выпукла вверх (вниз) в каждой точке $I$. Пусть $\forall i : \alpha_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Тогда $\forall x_i \subset I$:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

*Доказательство.* Индукция по $n$. Если $n = 1$ - очев. Для $n = 2$ так как $f(x)$ - выпукла вверх:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Пусть верно для $n$. Тогда пользуясь неравенством для $n = 1$ и $n = 2$ получим:

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i) = f(\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) =$$

$$= f(\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (\frac{\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot x_i)) \geq$$

$$\geq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} x_i) \geq$$

$$\geq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot f(x_i)) =$$

$$= \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

$\square$

**Утверждение.** (Неравенство между средним арифметическим и средим геометрическим)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

*Доказательство.* $f(x) = \ln x,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ - выпукла вверх. Тогда

$$\ln(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln x = \ln(\prod_{i=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}})$$

Взяв exp от обеих частей, получим искомое неравенство. $\square$

**Утверждение.** (Неравенство Юнга)
$\forall a, b < 0,\ \forall p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством Йенсена для логарифма:

$$\ln(\frac{1}{p}\cdot x_1 + \frac{1}{q}\cdot x_2) \geq \frac{1}{p}\cdot\ln x_1 + \frac{1}{q}\cdot\ln x_2$$

$x_1 = a^p,\ x_2 = b^q$. Тогда

$$\ln\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq \ln a + \ln b = \ln ab$$

$\square$

Взяв exp от обеих частей, получим искомое неравенство.