Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

8 июня 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа
Telegram: @fourkenz
GitHub: yakovlevki

Содержание

1 Неопределенный интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a,b). Если существует $F(x)$, определённая на (a,b), такая, что $F(x) \in \mathcal{D}(a,b)$ и $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной функцией для $f(x)$.

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a,b). Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ называется неопределённым интегралом $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

Теорема. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на (a,b). Тогда

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C\},\ C = const,\ C \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$(F(x)+C)' = f(x)+0 = f(x)$$

Пусть $\varphi(x)$ - первообразная $f(x)$. Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа $\varphi(x) - F(x) = const$, ч.т.д. □

1.2 Свойства неопределённого интеграла

1. $\forall c \in \mathbb{R}$:

   $$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

   (При $c = 0$ множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2. $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. (Замена переменной)
   Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a,b).
   Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha,\beta)$ и $\varphi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$ Тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на (α,β).

   $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть $u, v \in \mathcal{D}(a,b)$.

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\int (uv)' dx = \int uv' dx + \int u' v dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Замечание. Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

1.3 Таблица неопределенных интегралов

$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + \begin{cases} C_1, \ x > 0 \\ C_2, \ x < 0 \end{cases}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int -\frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$	

Замечание. Все равенства верны только на промежутках.

1.4 Интегрирование рациональных функций

Хотим научиться находить интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены. Разложим $Q(x)$ на неприводимые многочлены:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k}$$

Теперь разложим дробь в сумму простейших:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int(\tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{\aleph_{1i}}{(x-a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n}\frac{\aleph_{ni}}{(x-a_n)^{\alpha_{ni}}} + \\ + \sum_{j=1}^{\beta_1}\frac{\rho_{1j}x+\omega_{1j}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_{1i}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\rho_{kj}x+\omega_{kj}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_{kj}}})\,dx$$

Осталось понять как интегрировать слагаемые вида

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \int\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

1. $$\int\frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases}\ln|x-a|,\ n=1\\ \dfrac{(x-a)^{1-n}}{1-n},\ n>1\end{cases}$$

2. Сначала преобразуем знаменатель:

   $$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})$$

   причем $q-\frac{p^2}{4} > 0$, поскольку у x^2+px+q нет вещественных корней. Сделаем замену

   $$t = x+\frac{p}{2} \Rightarrow x = t-\frac{p}{2},\ q_1^2 = q-\frac{p^2}{4}$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\alpha t - \frac{\alpha p}{2} + \beta}{(t^2+q_1^2)^k}\,d(t-\frac{p}{2}) = \int \frac{\alpha_1 t+\beta_1}{(t^2+q_1^2)^k}\,dt$$

где $\alpha_1 = \alpha,\ \beta_1 = \beta - \frac{\alpha p}{2}$. Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{t}{(t^2+q_1^2)^k}\,dt \quad \text{и} \quad I_k = \int \frac{dt}{(t^2+q_1^2)^k}$$

(i)

$$\int \frac{t}{(t^2+q_1^2)^k}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+q_1^2)^k} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q_1^2)}{(t^2+q_1^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(t^2+q_1^2),\ k=1 \\ \dfrac{(t^2+q_1^2)^{1-k}}{2(1-k)},\ k>1 \end{cases}$$

(ii)

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \frac{t}{(t^2+q^2)^k} - \int t d(\frac{1}{t^2+q^2})^k =$$
$$= \frac{t}{(t^2+q^2)^k} + 2k\int \left(\frac{t^2+q^2-q^2}{(t^2+q^2)^{k+1}}\right) dt =$$
$$= \frac{t}{(t^2+q^2)^k} + 2kI_k - 2kq^2 I_{k+1}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2kq^2}\cdot\frac{t}{(t^2+q^2)^k} + \frac{2k-1}{2kq^2}I_k$$

Замечание.

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \frac{\sin^2 z+\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \left| \begin{matrix} t = q\operatorname{tg} z \\ dt = \dfrac{q}{\cos^2 z}dz \end{matrix} \right| = \int \frac{qdz}{\cos^2 z(q^2\operatorname{tg}^2 z + q^2)^k} = \int \frac{\cos^{2k-2} z}{q^{2k-1}}dz$$

1.5 Метод Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{P(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}\cdot\prod\limits_{j=1}^{k}(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}}\,dx =$$

$$= \frac{P_1(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i-1}\cdot\prod\limits_{j=1}^{k}(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j-1}} +$$

$$+ \int \frac{P_2(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)\cdot\prod\limits_{j=1}^{k}(x^2+b_jx+c_j)}\,dx$$

2 Интеграл Римана

2.1 Интегрируемость по Риману

Определение.

1. Множество точек $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$ называется разбиением отрезка, если $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Обозначается $T^+_{[a,b]}$. Если $b = x_0 > \cdots > x_n = a$, то обозначают $T^-_{[a,b]}$.

2. Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ или $[x_i, x_{i-1}]$ называются отрезками разбиения, их обычно обозначают Δ_i.

3. Длина отрезка Δ_i обозначается $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$.

4. Длина наибольшего из отрезков называется диаметром разбиения

$$d(T) = \max |x_i - x_{i-1}| = \max \Delta x_i$$

Определение. Пусть $T_{[a,b]}$ - разбиение отрезка $[a, b]$. Разметкой для $T_{[a,b]}$ называется множество точек $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ такое, что $\forall i : \xi_i \in \Delta_i$.
Если $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ является разметкой для $\{x_i\}_{i=0}^n$, то пара $(\{x_i\}_{i=0}^n, \{\xi_i\}_{i=1}^n)$ называется размеченным разбиением и обозначается $T(\xi)$.

Определение. Сумма

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется интегральной суммой. Иногда ее обозначают $\sigma_T(\xi)$ или $\sigma(T_{[a,b]}(\xi))$

Определение. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $T_{[a,b]}(\xi)$. Если

$$\exists\, I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0,\; \forall\, T(\xi) \subset \{T : d(T) < \delta\} : \left| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

то говорят, что $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, а число I называют интегралом Римана на размеченных разбиениях на отрезке $[a, b]$. Интеграл Римана обозначают

$$I = \int\limits_a^b f(x)\; dx \quad \text{или} \quad I = \int\limits_b^a f(x)\; dx$$

для T^+ и T^- соответственно.

Замечание. Можно считать определение интеграла определением предела интегральных сумм и писать

$$\lim_{d\to 0}\left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right) = I$$

где d - диаметр разбиения.

Утверждение.

$$\exists \int\limits_a^b f(x)\ dx,\ \Rightarrow\ \exists \int\limits_b^a f(x)\ dx \ \text{ и } \int\limits_a^b f(x)\ dx = -\int\limits_b^a f(x)\ dx$$

Определение. Класс функций, интегрируемых на $[a,b]$ по Риману, обозначается $\mathcal{R}[a,b]$.

Теорема. Если $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. Предположим, что

$$\exists\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b],\ x_n \to \widetilde{x} \in [a,b] :\ |f(x_n)| > n$$

и пусть

$$\exists \lim_{d\to 0}\left(\sum_{i=0}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right) = I$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\left|\sum_{i=0}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < 1$$

Возьмем Δ_k такой, что $\widetilde{x} \in \Delta_k \Rightarrow f(x)$ - неограничена на Δ_k. Тогда, зафиксировав точки в остальных отрезках разбиения, получим

$$I - \sum_{i=1, i\neq k}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 1 < f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < I - \sum_{i=1, i\neq k}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + 1$$

противоречие с тем, что $f(x)$ принимает сколь угодно большие на Δ_k. □

2.2 Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Далее рассматриваем разбиения T^+

Определение. Пусть T_1 и T_2 - разбиения отрезка $[a, b]$ такие, что $T_1 \subset T_2$. Тогда T_2 называется измельчением T_1.

Определение. Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, $\{x_i\}_{i=0}^n = T$ - разбиение $[a, b]$

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),\ M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\overline{\overline{S}}_f(T) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),\ \underline{\underline{S}}_f(T) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

Тогда $\overline{\overline{S}}_f(T)$ называется нижней суммой Дарбу, а $\underline{\underline{S}}_f(T)$ верхней суммой Дарбу.

Лемма 1. Пусть T_1 - измельчение T. Тогда

$$\overline{\overline{S}}(T) \leq \overline{\overline{S}}(T_1) \ \text{ и } \ \underline{\underline{S}}(T) \geq \underline{\underline{S}}(T_1)$$

Доказательство. Докажем для нижней суммы. Рассмотрим случай, когда $T_1 = T \cup \{x'_j\},\ x'_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Тогда сократятся все отрезки кроме $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{S}}(T_1) - \overline{\overline{S}}(T) &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x_{j+1} - x_j) = \\ &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x'_j - x_j) - m_j(x_{j+1} - x'_j) \geq 0\end{aligned}$$

значит, по индукции, это верно для любого измельчения. □

Лемма 2.

$$\forall\ T_1, T_2 :\ \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

Доказательство. Рассмотрим объединение любых двух разбиений T_1 и T_2: $T = T_1 \cup T_2$. Тогда T является измельчением и T_1 и T_2. Тогда по лемме 1 получаем:

$$\overline{\overline{S}}(T_1) \leq \overline{\overline{S}}(T) \ \text{ и } \ \underline{\underline{S}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \Rightarrow \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

□

Лемма 3. $\forall\ T_{[a,b]}$:

$$\overline{\overline{S}}(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{\underline{S}}(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Доказательство. Докажем для верхней суммы, для нижней аналогично. Докажем более общее утверждение - рассмотрим некоторое семейство множеств $\{X_i : X_i \subset \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ и множество $\{a_i\}_{i=1}^n$ такие, что $\forall i$ X_i ограничено и $a_i \geq 0$. Каждое X_i из принципа полноты Вейерштрасса имеет супремум, и при этом

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall i = \{1, \ldots, n\}\ \exists\ x_i \in X_i : x_i > \sup X_i - \varepsilon$$

Домножив каждое из неравенств на число (i-е нер-во на a_i) и сложив, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Отсюда в силу свойства супремума

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$$

но при этом

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$$

Значит,

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$$

При $X_i = f([x_{i-1}, x_i])$, ограниченных в силу интегрируемости $f(x)$, и $a_i = x_i - x_{i-1}$ получим

$$\sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\{\xi_i\}} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{S}}(T)$$

$\square$

Теорема. (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)
$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f$ - ограничена и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\ T_{[a,b]} :\ d(T) < \delta_\varepsilon :\ \underline{\underline{S}}_f(T) - \overline{\overline{S}}_f(T) < \varepsilon$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\exists\ I = \int\limits_a^b f(x)\ dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\ T(\xi) : d(T) < \delta_\varepsilon :$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(T(\xi)) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \overline{\overline{S_f}}(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3},\quad \left| \underline{\underline{S_f}}(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon.$

$(\Leftarrow)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \ \forall T : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \tag{1}$$

из леммы 2 по аксиоме полноты:

$$\exists \ I \in \mathbb{R}, \ \forall \ T : \overline{\overline{S}}(T) \leq I \leq \underline{\underline{S}}(T) \tag{2}$$

из (1) следует, что I - единственно, а также известно, что

$$\forall \ T(\xi) : \overline{\overline{S}}(T) \leq \sigma_f(T(\xi)) \leq \underline{\underline{S}}(T) \tag{3}$$

значит, из (2) и (3) получаем:

$$| \ \sigma_f(T(\xi)) - I \ | < \varepsilon$$

□

2.3 Классы интегрируемых функций

Теорема. Если $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. $f(x) \in \mathcal{C}[a, b] \Rightarrow f(x)$ - равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \ |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon : \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Пусть $T : d(T) < \delta$. Тогда:

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i_{max}}) - f(x_{i_{min}}))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a)$$

поскольку $x_{i_{min}}$ и $x_{i_{max}}$ существуют по второй теореме Вейерштрасса. □

Теорема. Пусть $f(x)$ - монотонна на $[a, b]$. Тогда $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. Докажем для неубывающей. Если $f(x) = const$, то очевидно. Пусть $d(T) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Поскольку $f(x)$ неубывает на $[a, b]$, то минимум на этом отрезке достигается в $f(a)$, а максимум в $f(b)$. Значит, при выносе $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ за скобку, сумма слагаемых вида $f(x_i) - f(x_{i-1})$ схлопнется в $f(b) - f(a)$. □

2.4 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, и если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ (или конечное) таких, что

$$A \subset \bigcup_i (a_i, b_i), \ \sup_n \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \varepsilon$$

Тогда A называется множеством меры 0 по Лебегу. Обозначается $\mu(A) = 0$.

Теорема. (Свойства множеств с мерой 0 по Лебегу)

1. $B \subset A, \ \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$
2. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \ \mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$

Доказательство.

1. Очевидно
2. $\forall i \ \exists \ \{(a_{i_l}, b_{i_l})\}_{i=1}^{\infty}$:

$$A_i \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}), \ \sum_{l=1} |b_{i_l} - a_{i_l}| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}) \right), \ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |b_{i_l} - a_{i_l}| \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

□

Теорема. (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)
$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f(x)$ ограничена и для множества P точек разрыва функции $f(x)$ выполнено $\mu(P) = 0$.

Доказательство. Без доказательства. □

2.5 Свойства интеграла Римана

Теорема 1. (Интегрируемость на подотрезках)
Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \ [c, d] \subset [a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[c, d]$.

Доказательство. Так как $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $\forall \, T_{[a,b]}(\xi) : \sigma_f(T_{[a,b]}(\xi)) \to I$. Значит, если $\{c, d\} \in T_{[a,b]}$, то $\sigma_f(T_{[a,b] \cup \{c,d\}}(\xi))$:

$$\varepsilon > \underline{\underline{S}}_{[a,b] \cup \{c,d\}} - \overline{\overline{S}}_{[a,b] \cup \{c,d\}} = \sum_{k=1}^{i} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^{j} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=i+1}^{j} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \underline{\underline{S}}_{[c,d]} - \overline{\overline{S}}_{[c,d]}$$

$\square$

Теорема 2. (Аддитивность)
Если $f(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ c \in [a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

Доказательство. Пусть $c \in T_{[a,b]}(\xi)$. Тогда

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) = \sigma_f(T_{[a,c]}) + \sigma_f(T_{[c,b]})$$

$$\sigma_f(T_{[a,c]}) \to \int\limits_a^c f(x)\ dx,\ \sigma_f(T_{[c,b]}) \to \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

а также

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

Теперь пусть $c \notin T_{[a,b]}$. Рассмотрим $T'_{[a,b]\cup c} = T_{[a,b]} \cup \{c\}$. Тогда при $d \to 0$

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) - \sigma_f(T'_{[a,b]\cup c}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - f(\xi'_j)(c - x_{j-1}) - f(\xi''_j)(x_j - c) \to 0$$

$\square$

Замечание. Если $f(x) \in \mathcal{R}[a,c],\ b < c$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

Теорема 3. (Линейность)
Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \cdot \int\limits_a^b f(x)\ dx + \beta \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

Доказательство.

$$\sigma_{\alpha f(x) + \beta g(x)}(T) = \alpha \sigma_f(T) + \beta \sigma_g(T)$$

$\square$

Теорема 4. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b],\ f(x) \geq 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

Доказательство.

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \sigma_f(T) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

□

Следствие. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

Теорема 5. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b],\ f(x) \geq 0,\ \exists\ c \in [a, b]$, что $f(x)$ непрерывна в точке c и $f(c) > 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx > 0$$

Доказательство. По теореме об отделимости
$\exists\ \delta > 0 : f(x) > \frac{f(c)}{2}$ в $(c - \delta, c + \delta)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\ dx > \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\ dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta = \delta f(c) > 0$$

□

Теорема 6. $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. Пусть

$$M_1 = \sup_{[a,b]} |f(x)|,\ M_2 = \sup_{[a,b]} |g(x)|$$

Ограничим значение $\underline{\underline{S}}_{f \cdot g} - \overline{\overline{S}}_{f \cdot g}$, ограничив разность точных граней на одном отрезке разбиения: (далее супремум рассматривается по всем $x', x'' \in [x_i, x_{i-1}]$)

$$\begin{aligned}
M_i(f(x)g(x)) - m_i(f(x)g(x)) = \sup(f(x')g(x') - f(x'')g(x'')) = \\
= \sup(f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')) = \\
= \sup(f(x')(g(x') - g(x'')) + g(x'')(f(x') - f(x''))) \leq \\
\leq \sup|f(x)| \cdot \sup(g(x') - g(x'')) + \sup|g(x)| \cdot \sup(f(x') - f(x'')) \leq \\
\leq M_1(M_{ig} - m_{ig}) + M_2(M_{if} - m_{if})
\end{aligned}$$

Отсюда, домножив неравенства на длины соответствующих отрезков и сложив, получим
$$\underline{\underline{S}}_{f\cdot g}-\overline{\overline{S}}_{f\cdot g}\le M_1(\underline{\underline{S}}_g-\overline{\overline{S}}_g)+M_2(\underline{\underline{S}}_f-\overline{\overline{S}}_f)$$
Отсюда из интегрируемости f и g и критерия Дарбу $f(x)g(x)\in\mathcal{R}[a,b]$. $\square$

Теорема 7. $f(x)\in\mathcal{R}[a,b]$ и $f(x)\ge\delta>0$. Тогда $\frac{1}{f(x)}\in\mathcal{R}[a,b]$

Доказательство. $\forall x',x''\in[a,b]$:

$$\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|=\left|\frac{f(x'')-f(x')}{f(x')f(x'')}\right|\le\frac{1}{\delta^2}\cdot\left|f(x'')-f(x')\right|$$

Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему (*на всякий случай приведём аналогичную выкладку, необходимую для доказательства*)

$$M_i(\frac{1}{f(x)})-m_i(\frac{1}{f(x)})=\sup(\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')})\le$$
$$\le\frac{1}{\delta^2}\sup|f(x'')-f(x')|=\frac{1}{\delta^2}(M_{if}-m_{if})$$

$\square$

Следствие. Из пунктов 6 и 7 следует интегрируемость дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Теорема 8. $f(x)\in\mathcal{R}[a,b]$. Тогда $|f(x)|\in\mathcal{R}[a,b]$

Доказательство. $\forall x',x''\in[a,b]$:

$$\big|\,|f(x')|-|f(x'')|\,\big|\le|f(x')-f(x'')|$$

Далее совпадает с предыдущим доказательством. $\square$

Замечание. Обратное утверждение неверно:

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\in\mathbb{Q}\subset[0,1]\\-1,\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\Rightarrow|f(x)|\equiv1$ на отрезке $[0,1]$.

Теорема 9. $f(x)\in\mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\ dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|\ dx$$

Доказательство.

$$|\sigma_f| \le \sigma_{|f|}$$

□

Замечание.

$$\int\limits_a^b |f(x)|\ dx \le \sup_{[a,b]} |f(x)| \cdot \int\limits_a^b 1\ dx$$

2.6 Первая теорема о среднем

Теорема. (Первая теорема о среднем)
Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ g(x) \ge 0,\ M = \sup f(x),\ m = \inf f(x)$. Тогда $\exists\ \mu \in [m, M]$:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = \mu \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

Доказательство.

$$m \cdot \sigma_g(T) \le \sigma_{f \cdot g}(T) \le M \cdot \sigma_g(T)$$

Тогда

$$m \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx \le \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx \le M \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

Рассмотрим случаи:

1. $$\int\limits_a^b g(x)\ dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = 0$$

   В этом случае равенство верно для любого μ.

2. $$\int\limits_a^b g(x)\ dx \ne 0 \Rightarrow m \le \frac{\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx}{\int\limits_a^b g(x)\ dx} \le M$$

   Значит, подойдет μ, равное значению этой дроби

□

2.7 Интеграл с переменным верхним пределом

Определение. Интегралом с переменным верхним пределом называется интеграл вида:

$$\int\limits_a^x f(t)\;dt$$

Теорема. Пусть $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\;dt$$

непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\Delta x \to 0:$

$$|\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\;dt \right| \le M_{f([a,b])} \cdot |\Delta x| \to 0$$

□

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и f непрерывна в $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\;dt$$

имеет производную в x_0 и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство.

$$\left| \frac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\;dx - \frac{f(x_0)}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1\;dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))\;dx \right| \le \sup_{[x_0, x_0+\Delta x]} |f(x) - f(x_0)| \longrightarrow 0.$$

□

Следствие. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(a,b)$. Тогда $\forall c \in (a,b)$:

$$\exists \left(\int\limits_c^x f(t)\;dt \right)' = f(x), \text{ то есть } \int\limits_c^x f(t)\;dt \text{ - первообразная } f(x)$$

Замечание. Интервал в формулировке следствия взят для применимости теоремы к неограниченным на интервале функциям (например $\mathrm{tg}(x)$ на $[0, \pi]$), для которых тем не менее применима предыдущая теорема по аналогичным рассуждениям.

2.8 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. (Формула Ньютона-Лейбница)
Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \; f(x) \in \mathcal{C}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n)$, а также $\exists \; F(x)$ такая, что $F(x) \in \mathcal{D}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n), \; F'(x) = f(x), \; F(x) \in \mathcal{C}[a, b]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f(x) \; dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) \in \mathcal{C}(a, b), \; F'(x) = f(x)$ на (a, b). Но интеграл

$$\int\limits_a^x f(t) \; dt$$

тоже первообразная $f(x)$ на $(a, b) \Rightarrow \exists \; C :$

$$F(x) + C = \int\limits_a^x f(t) \; dt$$

$\Rightarrow F(a) + C = 0$. Тогда

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t) \; dt$$

Общий случай:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) \; dt \right) = \int\limits_a^b f(t) \; dt$$

$\square$

2.9 Замена переменной и интегрирование по частям

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(a, b), \; \varphi(t) \in \mathcal{C}^1(\alpha, \beta), \; \varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$.
$\forall \alpha_0, \beta_0 \in (\alpha, \beta)$ и $a_0 = \varphi(\alpha_0), \; b_0 = \varphi(\beta_0)$. Тогда

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x) \; dx = \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \; dt$$

Доказательство. $f \in \mathcal{C}(a,b) \Rightarrow \exists\ F'(x) = f(x)$

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)\ dx = F(b_0) - F(a_0)$$

Но $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, а значит

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(\beta_0)) - F(\varphi(\alpha_0))$$

$\square$

Теорема. (Интегрирование по частям)
Пусть $f(x),\ g(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

Доказательство.

$$f(x) \cdot g(x)|_a^b = \int\limits_a^b (f(x) \cdot g(x))'\ dx = \int\limits_a^b f'(x)g(x)\ dx + \int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

$\square$

3 Спрямляемые кривые и квадрируемые фигуры

3.1 Кривая в $\mathbb{R}^n$

Определение. Кривой в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывное отображение:

$$\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

где

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Определение. Рассмотрим $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Если $\exists\ t_1 \neq t_2 : \bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, то $\bar{\gamma}(t_1)$ называется точкой самопересечения. Мощность подмножеста $[a, b]$, точки которого переходят в $\bar{\gamma}(t_1)$ называется кратностью точки самопересечения. Если кривая не имеет точек самопересечения, то она называется простой.

Определение. Если $\bar{\gamma}(t)$ имеет единственную точку самопересечения $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$, то кривая называется простой замкнутой.

Определение. Множество точек $\{\bar{\gamma}(t_i)\}_{i=0}^{N}$ называется разбиением кривой, если $\{t_i\}_{i=0}^{N}$ является разбиением отрезка $[a, b]$. Обозначается T_γ.

Определение. Множество отрезков $L(T_{\bar{\gamma}}) = \{[\bar{\gamma}(t_{i-1}), \bar{\gamma}(t_i)]\}_{i=1}^{N}$ называется вписанной в $\bar{\gamma}(t)$ ломаной, а число

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

длиной ломаной.

Утверждение. Если $T'_{\bar{\gamma}}$ - измельчение $T_{\bar{\gamma}}$, то

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| \leq |L(T'_{\bar{\gamma}})|$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Определение. Если множество $\{|L(T_{\bar{\gamma}})|\}_{T_{\bar{\gamma}}}$ ограничено, то кривая $\bar{\gamma}(t)$ называется спрямляемой, а

$$\sup_{T_{\bar{\gamma}}} \{|L(T_{\bar{\gamma}})|\} = |\bar{\gamma}|$$

называется длиной кривой.

3.2 Спрямляемость гладкой кривой и формула ее длины

Теорема. Пусть

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in C^1[a,b]$$

Тогда $\bar{\gamma}(t)$ спрямляема и

$$|\bar{\gamma}| = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t)}\ dt$$

Доказательство.

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| = \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2} = (1)$$
$$= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij}) \cdot (t_i - t_{i-1})^2} =$$
$$= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} (t_i - t_{i-1}) \leqslant M \cdot \sqrt{n} \cdot (b-a)$$

Переход (1) по формуле Лагранжа, а последняя оценка устроена так: каждое из x_j' - непрерывно на каждом отрезке разбиения, значит, по второй теореме Вейерштрасса, у нее есть максимум. Возьмем M - максимум из этих максимальных значений на отрезке разбиения, тогда

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2} \leq M \cdot \sqrt{n}$$

остается вынести это за скобку и сумма длин отрезков разбиения схлопнется в $b-a$. $\Rightarrow \bar{\gamma}$ спрямляема.

$$\left| |L(T_{\bar\gamma})| - \sigma_{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(\xi_{ij})}(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(\nu_i)}(t_i - t_{i-1}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(\xi_{ij})} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(\nu_i)} \right) (t_i - t_{i-1}) \right) \right| \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{'}(\xi_{ij}) - x_j^{'}(\nu_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot n \cdot (b - a)$$

Последняя оценка сделана с применением леммы, которая доказана чуть ниже.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \ d(T) < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| |L(T_{\bar\gamma})| - \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(t) dt} \right| < 2\varepsilon n(b - a)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ L(T_{\bar\gamma}^*)$, что $|L(T_{\bar\gamma}^*)| > |\bar\gamma| - \varepsilon$ (свойство точной верхней грани).
Измельчаем $T_{\bar\gamma}^*$ до тех пор, пока $d(T_{\bar\gamma}^*) < \delta_\varepsilon$. □

Лемма.

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} \right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|$$

Доказательство.

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} \right| = \left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} ((a_i - b_i)(a_i + b_i))}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{k} \left((a_i - b_i) \cdot \frac{(a_i + b_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2}} \right) \right| \leq (*)$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (a_i - b_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|$$

$$(*): \quad a_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2},\ b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} \ \Rightarrow\ \frac{(a_i+b_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2}} \le 1$$

□

3.3 Квадрируемые фигуры

Далее работаем в $\mathbb{R}^2$.

Определение. Множество $\{(x,y) : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \varepsilon^2\} \subset \mathbb{R}^2$ называется ε-окрестностью точки (x_0, y_0).

Определение. Множество $A \in \mathbb{R}^2$ называется ограниченным, если $\exists R > 0 :$ $A \subset \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}$.

Определение. Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется фигурой.

Определение. Пусть $A = \{A_\alpha\}$. Функция $\mu : A \to \mathbb{R}$ называется площадью, если

1. $\mu(A) \ge 0$
2. Если $\exists\ \mu(A_1),\ \mu(A_2)$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $\exists\ \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.
3. Если $\exists\ \mu(A_1)$ и A_2 конгруэнтна A_1, то $\exists\ \mu(A_2) = \mu(A_1)$.
4. Если $\exists\ \mu(A_1),\ \exists\ \mu(A_2)$ и $A_1 \subset A_2$, то $\mu(A_1) \le \mu(A_2)$.
5. Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

Замечание. Существует площадь отрезка и площадь точки, и они равны нулю. По определению считаем, что $\mu(\varnothing) = 0$

Утверждение. Существует площадь треугольника, равная половине произведения основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник. Проведем в нем высоту, тогда он разобьется на два прямоугольных треугольника, которые можно достроить до прямоугольников. Тогда площадь искомого треугольника равна сумме половин площадей достроенных прямоугольников. □

Определение. Фигура, полученная конечным объединением непересекающихся треугольников, называется многоугольником.

Теорема. Площадь многоугольной фигуры не зависит от разбиения на треугольники.

Доказательство. Без доказательства. □

Определение. Для любой фигуры A, замкнутая многоугольная фигура $P \supset A$ называется описанной. Открытая многоугольная фигура $Q \subset A$ называется вписанной.

Замечание. Далее, если фигура обозначена P, то считаем ее замкнутой описанной, а если Q то открытой вписанной.

Замечание. Для любой фигуры существует описанная (поскольку любая фигура ограничена) и вписанная (пустое множество).

Определение. Число $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset P} \mu(P)$ называется верхней площадью A.
Число $\mu_*(A) = \sup\limits_{Q \subset A} \mu(Q)$ называется нижней площадью A.

Определение. Если $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, то $\exists\ \mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$. Такая фигура A называется квадрируемой.

3.4 Первый и второй критерии квадрируемости

Теорема. (Первый критерий квадрируемости)
Фигура A квадрируема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon,\ Q_\varepsilon,\ \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство.

$(\Rightarrow):$ A - квадрируема $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$, но

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ Q_\varepsilon : \mu_*(A) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

$(\Leftarrow):$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon,\ Q_\varepsilon,\ \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$$

□

Теорема. (Второй критерий квадрируемости)
Фигура A квадрируема $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$: A - квадрируема $\Rightarrow$ по первому критерию квадрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P_\varepsilon, \ Q_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\partial A \subset P \setminus Q, \ Q$ - внутренние точки $A, \ \mathbb{R}^2 \setminus P$ - внешние точки A.
В частности, $\partial A \subset P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon \Rightarrow \mu^*(\partial A) < \varepsilon \Rightarrow \mu(\partial A) = 0$.

$(\Leftarrow)$: $\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P_\varepsilon \supset \partial A, \ \mu(P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \exists \ h > 0$,
$\partial A \subset \cup$(кв. сетка с шагом h) $= A_2 : \mu(A_2) < 72\varepsilon$ (по лемме ниже).
$A_1 = \cup$(квадраты сетки, целиком состоящие из внутренних точек A)
$\Rightarrow A \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow A_1 \cup A_2 = P, \ A_1 = Q, \ \mu(P) - \mu(Q) = \mu(A_2) < 72\varepsilon$

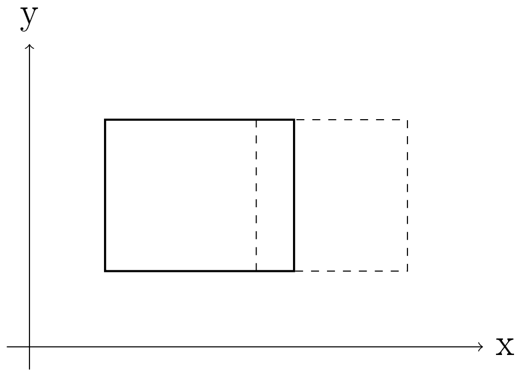
□

Лемма. Пусть P - многоугольная фигура, $B \subset P$ и $\mu(P) < \varepsilon \Rightarrow \ \exists \ h > 0$ такое, что $B \subset M, \ \mu(M) < 72\varepsilon$, где M - квадратная сетка со сторонами квадратов параллельными осям координат и шагом h.

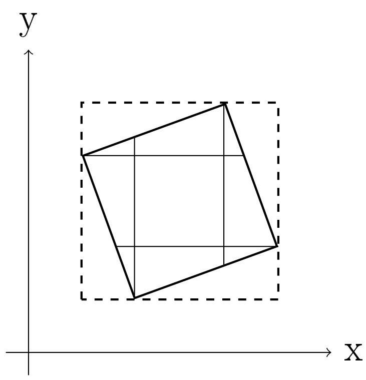
Доказательство. Пусть $\mu(P) < \varepsilon$

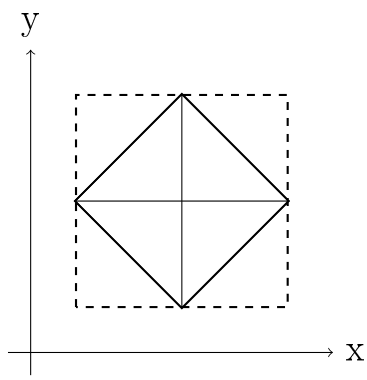
1. P - многоугольная фигура $\Rightarrow P$ - это объединение треугольников $\Rightarrow P$ можно представить в виде объединения прямоугольных треугольников. Достроим прямоугольные треугольники до прямоугольников, их объединение обозначим M_1. Тогда $P \subset M_1$ и $\mu(M_1) < 2\varepsilon$.

2. Теперь накроем M_1 объединением квадратов M_2. Будем накрывать прямоугольник квадратами со стороной, равной меньшей из сторон прямоугольника, начиная от одной из меньших сторон, пока не заложим весь прямоугольник. Тогда либо прямоугольник накрылся, либо последний квадрат вылез за границу, а так как площадь прямоугольника не меньше квадрата с его меньшей стороной, то площадь увеличилась не более чем вдвое (на самом деле строго меньше, но нам это не особо нужно). Итак, $M_1 \subset M_2$ и $\mu(M_2) < 4\varepsilon$.



3. Теперь накроем M_2 объединением квадратов M_3 таким, что стороны квадратов из M_3 параллельны осям координат. Для этого впишем каждый квадрат в квадрат со сторонами, параллельными осям (проведем параллели через вершины квадрата), тогда квадрат дополняется до нужного нам четырьмя треугольниками, причём квадрат разбивается на 4 равных треугольника, дополняющих изначальные до прямоугольников, плюс квадратный кусочек в центре, которого не будет только в случае поворота на 45 градусов - опять же площадь увеличится не больше чем вдвое. Значит, $M_2 \subset M_3$ и $\mu(M_3) < 8\varepsilon$.

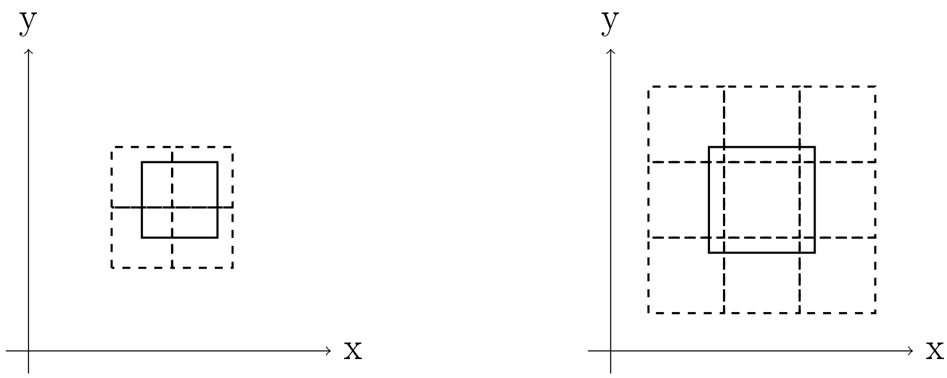




4. Теперь возьмем h, равное стороне наименьшего квадрата, и построим квадратную сетку M с шагом h. Рассмотрим квадрат L, возможны два случая:

   (i) Если внутри квадрата L ни один из квадратов сетки не лежит целиком $\Rightarrow$ L лежит внутри квадрата 2×2, составленного из квадратов сетки. Поскольку площадь L не меньше площади квадрата сетки, то площадь увеличится не более чем вчетверо.

   (ii) Если существуют квадраты сетки, лежащие внутри L, то их объединение образует большой квадрат, лежащий внутри L, а значит, весь L покрывается девятью копиями этого квадрата.



В итоге получим, что $B \subset P \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M$, причем $\mu(M) < 72\varepsilon$.

$\square$

3.5 Квадрируемость простой спрямляемой кривой и криволинейной трапеции

Теорема. Если $\bar{\gamma}(t)$ - простая спрямляемая кривая, то $\mu(\bar{\gamma}(t)) = 0$.

Доказательство. Делим $\bar{\gamma}(t)$ на n одинаковых по длине кусков. $\{\bar{\gamma}(t_k)\}_{k=1}^{n+1}$. $\bar{\gamma}(t) \subset \cup$(квадратов с центрами в $\bar{\gamma}(t_k)$ и стороной $|\frac{2\bar{\gamma}(t)|}{n}|$).

$$\mu(\cup(\text{кв...})) < \frac{4|\bar{\gamma}(t)|^2}{n^2} \cdot (n+1) \to 0$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ f(x) \geq 0$, тогда фигура A :

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

квадрируема и

$$\mu(A) = \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

Доказательство.

$$f(x) \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall T : d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$$

Значит выполнено: $\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$ и A - квадрируема по первому критерию квадрируемости. При этом

$$\mu^*(A) = \mu_*(a) = \mu(A) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

$\square$

4 Интеграл Римана-Стилтьеса

4.1 Функции ограниченной вариации и их свойства

Определение. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$, T - разбиение отрезка $[a, b]$. Сумма вида

$$V(f, T) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

называется вариацией функции на данном разбиении T.

Определение. Если $\exists\ M > 0$ такое, что $\forall\ T_{[a,b]} : V(f, T) \leq M$, то функция называется функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, а величина

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x) = \mathrm{var}_{[a,b]} f(x) = \sup_T V(f, T)$$

называется полной вариацией функции на отрезке $[a, b]$. Если $f(x)$ - функция ограниченой вариации на $[a, b]$, то пишут $f(x) \in \mathcal{V}[a, b]$.

Теорема 1. Если $f(x) \in \mathcal{V}[a, b]$, то f - ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in [a, b]$. Тогда, взяв разбиение $T = \{a, x, b\}$, получим

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \sup_T \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

значит

$$|f(x) - f(a)| \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

$$|f(x)| \leq |f(a) + (f(x) - f(a))| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

□

Теорема 2. Пусть $T'_{[a,b]}$ - измельчение $T_{[a,b]}$. Тогда $V(f, T) \leq V(f, T')$

Доказательство. Рассмотрим случай $T' = T \cup \{x'_j\}$. Тогда

$$V(f, T') - V(f, T) = |f(x'_j) - f(x_j)| + |f(x_{j+1}) - f(x'_j)| - |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \geq 0$$

значит, по индукции, это верно для любого измельчения. □

Теорема 3. Если $f(x) \in \mathcal{V}[a, b]$, то $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha \cdot f(x)) = |\alpha| \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

Доказательство.

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\alpha \cdot f(x)) = \sup_T \sum_{i=1}^{n} (|\alpha| \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})|) =$$
$$= |\alpha| \cdot \sup_T \sum_{i=1}^{n} (|f(x_i) - f(x_{i-1})|) = |\alpha| \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$$

□

Теорема 4. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{V}[a, b]$, то $f + g \in \mathcal{V}[a, b]$

Доказательство.
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f(x) + g(x)) \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g(x)$$

□

Теорема 5. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{V}[a, b]$, то $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{V}[a, b]$

Доказательство.

$$|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_i) + f(x_{i-1})g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \leq$$
$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| =$$
$$= M_1 \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})| + M_2 \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

значит
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f(x) \cdot g(x)) = M_1 \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) + M_2 \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g(x)$$

□

Теорема 6. Если $g(x) \in \mathcal{V}[a, b],\ g \geq \varepsilon > 0$, то $\frac{1}{g}(x) \in \mathcal{V}[a, b]$

Доказательство.
$$\left|\frac{1}{g(x_i)} - \frac{1}{g(x_{i-1})}\right| = \left|\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{g(x_i) \cdot g(x_{i-1})}\right| \leq \frac{|g(x_i) \cdot g(x_{i-1})|}{\varepsilon^2}$$
значит
$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\frac{1}{g(x)}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g(x)$$

□

Следствие. Если $g(x), f(x) \in \mathcal{V}[a, b],\ g \geq \varepsilon > 0$, то $\frac{f}{g}(x) \in \mathcal{V}[a, b]$

Теорема 7. Если $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = |f(b) - f(a)|$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно неубывает. Тогда

$$V(f,T)=\sum_{i=1}^{n}|(f(x_i)-f(x_{i-1}))|=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=f(b)-f(a)$$

а значит

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)=|f(b)-f(a)|$$

□

Теорема 8. (Аддитивность)
Если $c\in(a,b),\ f(x)\in\mathcal{V}[a,c]$ и $f(x)\in\mathcal{V}[b,c]$, то $f(x)\in\mathcal{V}[a,b]$ и

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)=\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)+\overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$V(f,T_{[a,b]})\le V(f,T_{[a,b]\cup\{c\}})=V(f,T_{[a,c]})+V(f,T_{[c,b]})$$

значит

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)\le\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

С другой стороны, рассмотрим

$$V(f,T_{[a,c]})+V(f,T_{[c,b]})=V(f,T_{[a,b]}\ni c)$$

отсюда получим

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}\, f(x)=\sup V(f,T_{[a,b]}\ni c)\le\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

□

Теорема. Если $f(x)\in\mathcal{V}[a,b]$, то $\exists\ h(x),\ v(x)$ - монотонно неубывющие на $[a,b]$ такие, что $f(x)=v(x)-h(x)$.

Доказательство. Пусть

$$v(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f(x)$$

Рассмотрим функцию $h(x)=v(x)-f(x)$. Пусть $x_1,\ x_2\in[a,b],\ x_2>x_1$:

$$h(x_2)-h(x_1)=\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}\, f(x)-(f(x_2)-f(x_1))\ge 0$$

так как

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}\ge|f(x_2)-f(x_1)|$$

$\Rightarrow h(x)$ - неубывает. □

4.2 Липшицевы функции

Определение. Функция $f(x)$, опеределенная на $[a,b]$, называется липшицевой, если $\exists\ M > 0$ такое, что $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M \cdot |x_2 - x_1|$$

Часто обозначают $f(x) \in \mathrm{Lip}[a,b]$ или $f(x) \in \mathrm{Lip}_1[a,b]$

Теорема. Если $f(x) \in \mathrm{Lip}_1[a,b]$, то $f(x) \in \mathcal{V}[a,b]$

Доказательство.

$$V(f,T) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = M \cdot (b-a)$$

□

Теорема. Если $f(x) \in C^1[a,b]$, то $f(x) \in \mathcal{V}[a,b]$ и

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b f(x) = \int_a^b |f'(x)|\ dx$$

Доказательство. Если $f(x) \in C^1[a,b]$, то $f \in \mathrm{Lip}_1[a,b]$, так как по формуле Лагранжа:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \cdot |x_2 - x_1|$$

$$V(f,T) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi) \cdot (x_i - x_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|f'(\xi)| \cdot (x_i - x_{i-1})) \to \int_a^b |f'(x)|\ dx$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall T,\ d(T) < \delta$:

$$\left| V(f,T) - \int_a^b |f'(x)|\ dx \right| < \varepsilon$$

По определению точной верхней грани: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ V(f,T_\varepsilon)$ такое, что

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b f(x) - V(f,T_\varepsilon) < \varepsilon$$

измельчаем T_ε до T_ε^* с $d(T_\varepsilon^*) < \delta$:

$$\left|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - \int\limits_a^b |f'(x)|\ dx\right| =$$

$$= \left|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - \int\limits_a^b |f'(x)|\ dx + V(f, T_\varepsilon^*) - V(f, T_\varepsilon^*)\right| \leq$$

$$\leq \left|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - V(f, T_\varepsilon^*)\right| + \left|\int\limits_a^b |f(x)|\ dx - V(f, T_\varepsilon^*)\right| < 2\varepsilon$$

□

4.3 Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства

Определение. Пусть $f(x),\ g(x)$ определены на $[a,b]$. $\forall\ T(\xi)$ сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sigma_g(f, T)$$

называется интегральной суммой Римана-Стилтьеса.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{d \to 0} \sigma_g(f, T(\xi))$$

то он называется интегралом Римана-Стилтьеса и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))$$

Теорема 1. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_a^b (\alpha \cdot f(x))\ d(\beta \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta \int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))$$

Теорема 2. Если существуют интегралы

$$\int\limits_a^b f_1(x)\ d(g(x)),\ \int\limits_a^b f_2(x)\ d(g(x))$$

то существует интеграл

$$\int\limits_a^b (f_1 + f_2)\ d(g(x)) = \int\limits_a^b f_1(x)\ d(g(x)) + \int\limits_a^b f_2(x)\ d(g(x))$$

Теорема 3. Если существуют интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g_1(x)),\ \int\limits_a^b f(x)\ d(g_2(x))$$

то существует интегал

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g_1(x)+g_2(x)) = \int\limits_a^b f(x)\ d(g_1(x)) + \int\limits_a^b f(x)\ d(g_2(x))$$

Теорема 4. (Аддитивность)
Если существуют

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)),\ \int\limits_a^c f(x)\ d(g(x)),\ \int\limits_c^b f(x)\ d(g(x))$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) = \int\limits_a^c f(x)\ d(g(x)) + \int\limits_c^b f(x)\ d(g(x))$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) = \lim_{d\to 0, c\in T} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) =$$

$$= \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) + \lim_{d\to 0} \sum_{i=n_1+1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)\ d(g(x)) + \int\limits_c^b f(x)\ d(g(x))$$

□

Замечание. Если существует интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))$$

то существуют интегралы

$$\int\limits_a^c f(x)\ d(g(x)),\ \int\limits_b^c f(x)\ d(g(x))$$

Замечание. Если существуют интегралы

$$\int\limits_a^c f(x)\ d(g(x)),\ \int\limits_c^b f(x)\ d(g(x))$$

то интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))$$

не обязательно существует.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in [-1, 0], \\ 1,\ x \in (0, 1]. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0,\ x \in [-1, 0), \\ 1,\ x \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)\ d(g(x)) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = 0$$

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)\ d(g(x)) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = 0$$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ d(g(x)) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \lim_{d \to 0} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

При разной разметке будет получаться 1 или 0, значит, предела не существует.

Теорема 5. (Интегрирование по частям)
Если существут интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))$$

то существует интеграл

$$\int\limits_a^b g(x)\ d(f(x))$$

причем

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\ d(f(x))$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$
$$= g(\xi_1)(f(x_1) - f(a)) + g(\xi_2)(f(x_2) - f(x_1)) + \dots +$$
$$+ g(\xi_{n-1})(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + g(\xi_n)(f(b) - f(x_{n-1})) =$$
$$= -g(\xi_1)f(a) - f(x_1)(g(\xi_2) - g(\xi_1)) - \dots - f(x_{n-1})(g(\xi_n) - g(\xi_{n-1})) +$$
$$+ g(\xi_n)f(b) + f(b)g(b) - f(b)g(b) - f(a)g(a) + f(a)g(a) =$$
$$= -f(a)(g(\xi_1) - g(a)) - \dots - f(b)(g(b) - g(\xi_n)) + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Устремим диаметр разбиения к нулю, и получим утверждение теоремы. □

4.4 Существование интеграла Римана-Стилтьеса

В дальнейших рассуждениях будут использоваться обозначения

$$\underline{\underline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})),\ \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

Теорема. Если $f(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ g(x) \in \mathcal{V}[a,b]$, то существует интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))$$

Доказательство. $f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, значит, $f(x)$ - равномерно непрерывна на $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ d(T) < \delta : M_i - m_i < \varepsilon$$

а значит

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g(x) \Rightarrow \inf_T \underline{\underline{S}}(T) = \sup_T \overline{\overline{S}}(T) = I$$

$$|\sigma_f(g,T) - I| < \varepsilon \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g(x)$$

значит, существует предел

$$\lim_{d \to 0} \sigma_f(g,T) = I$$

□

Замечание. В условиях теоремы существует интеграл

$$\int\limits_a^b g(x)\ d(f(x))$$

по теореме об интегрировании по частям.

4.5 Связь интеграла Римана и интеграла Римана-Стилтьеса

Знаки (R) и (S) обозначают, что рассматривается интеграл по Риману и Риману-Стилтьесу соответственно.

Теорема. Если $f(x) \in \mathcal{V}[a, b],\ g(x) \in \mathcal{D}[a, b],\ g'(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то

$$(S) \int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) = (R) \int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

Доказательство. Оба интеграла существуют по условиям теоремы, значит, достаточно будет доказать для какой-то выбранной разметки. По формуле Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot g'(\zeta)(x_i - x_{i-1})$$

Теперь возьмем в качестве разметки интеграла Римана-Стилтьеса разметку ζ_i, и получаем равенство

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) g'(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

□

4.6 Теоремы о среднем

Теорема. (Первая теорема о среднем для интеграла Римана-Стилтьеса)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b],\ g(x)$ монотонно возрастает. Тогда $\exists\ c \in [a, b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) = f(c)(g(b) - g(a))$$

Доказательство. Если $g(b) = g(a)$, то равенство верно. Пусть $g(b) > g(a)$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x), M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

$$m \cdot (g(b) - g(a)) \leq \int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) \leq M \cdot (g(b) - g(a))$$

отсюда

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)\ d(g(x))}{g(b) - g(a)} \leq M$$

□

Теорема. (Вторая теорема о среднем для интеграла Римана-Стилтьеса)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ g(x)$ монотонно возрастает. Тогда $\exists\ c \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b g(x)\ d(f(x)) = g(a) \cdot (f(c) - f(a)) + g(b) \cdot (f(b) - f(c))$$

Доказательство. Возьмем интеграл по частям и применим первую теорему о среднем:

$$\int\limits_a^b g(x)\ d(f(x)) = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int\limits_a^b f(x)\ d(g(x)) =$$
$$= g(b)f(b) - g(a)f(a) - f(c)(g(b) - g(a)) =$$
$$= g(a)(f(c) - f(a)) + g(b)(f(b) - f(c))$$

$\square$

Следствие. (Вторая теорема о среднем для интеграла Римана)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ g(x)$ монотонно возрастает. Тогда

$$(R)\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)\ dx + g(b) \cdot \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

Доказательство. Перейдем к интегралу Римана-Стилтьеса и воспользуемся второй теоремой о среднем для него:

$$(R)\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = (S)\int\limits_a^b g(x)\ d\left(\int\limits_a^x f(t)\ dt\right) =$$
$$= g(a) \cdot \int\limits_a^c f(t)\ dt + g(b) \cdot \int\limits_c^b f(t)\ dt$$

$\square$

5 Несобственный интеграл

5.1 Определение несобственного интеграла

Определение. Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, a_1],\ \forall a_1 \in [a, b)$, то

$$\lim_{a_1 \to b-0} \int\limits_a^{a_1} f(x)\ dx = \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

называется несобственным интегралом первого рода. Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся, если не существует - расходящимся.

Определение. Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, a_1],\ \forall a_1 \in (a, +\infty)$, то

$$\lim_{a_1 \to +\infty} \int\limits_a^{a_1} f(x)\ dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

называется несобственным интегралом второго рода. Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся, если не существует - расходящимся.

Замечание. В дальнейшем будем обозначать несобственные интегралы

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\ dx$$

где ω - число или знак $+\infty$ $(-\infty)$.

Замечание. Если на отрезке интегрирования несобственного интеграла есть несколько особых точек, то интеграл сходится, если он сходится во всех своих особых точках. Такие интегралы также могут рассматриваться в дальнейших рассуждениях.

5.2 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема. Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\ dx$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta \in [a, \omega), \ \forall x_1, x_2 \in [\delta, \omega) : \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t) \ dt \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t) \ dt$$

и запишем критерий Коши существования предела $f(x)$ при $x \to \omega$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in [\delta, \omega) : |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$$

значит

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t) \ dt \right| = \left| \int\limits_a^{x_2} f(t) \ dt - \int\limits_a^{x_1} f(t) \ dt \right| = |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$$

□

5.3 Свойства несобственного интеграла

Теорема 1. (Линейность)
$\forall \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$ если существуют интегралы

$$\int\limits_a^\omega f(x) \ dx, \ \int\limits_a^\omega g(x) \ dx$$

то существует интеграл

$$\int\limits_a^\omega (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \cdot \int\limits_a^\omega f(x) \ dx + \beta \cdot \int\limits_a^\omega g(x) \ dx$$

Теорема 2. (Интегрирование по частям)
Пусть $f(x), \ g(x) \in \mathcal{C}^1[a, \omega]$. Если существуют два объекта из трех:

$$\int\limits_a^\omega f(x) g'(x) \ dx, \ \int\limits_a^\omega f'(x) g(x) \ dx, \ \lim_{x \to \omega} f(x) g(x)$$

то существует и третий и верна формула

$$\int\limits_a^\omega f(x) g'(x) \ dx = f(x) g(x)|_a^\omega - \int\limits_a^\omega f'(x) g(x) \ dx$$

Теорема 3. (Замена переменной)
Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx$$

и пусть $\varphi(t) \in \mathcal{C}^1[\alpha, \beta),\ a \leq \varphi(t) \leq \omega,\ \varphi(\alpha) = a,\ \lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = \omega$

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$$

Теорема 4. Пусть существуют несобственные интегралы

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx,\ \int\limits_a^\omega g(x)\ dx$$

Если $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx \leq \int\limits_a^\omega g(x)\ dx$$

Теорема 5. Если $\forall a' \in [a, \omega)$ существует интеграл

$$\int\limits_a^{a'} f(x)\ dx$$

а также существует несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\omega |f(x)|\ dx$$

то

$$\left|\int\limits_a^\omega f(x)\ dx\right| \leq \int\limits_a^\omega |f(x)|\ dx$$

Определение. Если существует интеграл

$$\int\limits_a^\omega |f(x)|\ dx$$

то интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx$$

называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если $\forall a' \in [a, \omega)$ существует интеграл

$$\int\limits_a^{a'} f(x)\ dx$$

и интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} |f(x)|\ dx$$

сходится, то интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\ dx$$

сходится

Доказательство. По критерию Коши и неравентсву

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\ dx\right| \leq \int\limits_{a_1}^{a_2} |f(x)|\ dx < \varepsilon$$

□

Определение. Сходяшийся интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\ dx$$

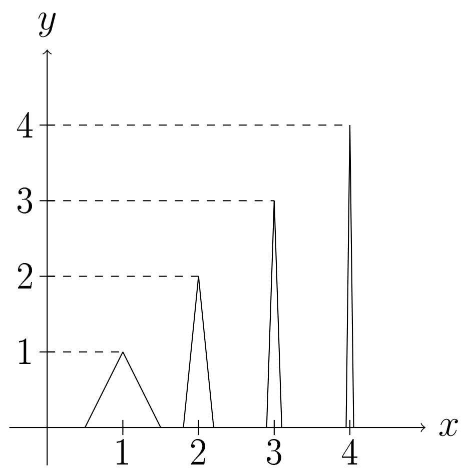
называется условно сходящимся, если интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} |f(x)|\ dx$$

расходится.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая задается последовательностью треугольников, у которых основание лежит на оси абсцисс, причем центрами оснований являются точки $1, 2, 3, \ldots$, вершиной k-го треугольника является точка (k, k), а также площади треугольников составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Построенная функция неограничена на $[0, +\infty)$, но интерал от нее сходится.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$



5.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

Теорема. (Признак Вейерштрасса)
Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на $[a, \omega)$

1. Если существует интеграл
$$\int\limits_a^\omega g(x)\ dx$$
то существует интеграл
$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx$$
2. Если не существует интеграла
$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx$$
то не существует интеграла
$$\int\limits_a^\omega g(x)\ dx$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\ dt,\ G(x) = \int\limits_a^x g(t)\ dt$$

заметим, что они неубывающие, а также

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow F(x) \leq G(x)$$

1. Пусть $G(x) \to C \Rightarrow F(x) \leq C \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса существует предел $F(x)$.

2. Поскольку $F(x)$ неубывает и у нее не существует предела, то $F(x) \to +\infty$, но так как $F(x) \leq G(x)$, то и $G(x) \to +\infty$.

$\square$

Теорема. Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и существует передел

$$\lim_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Тогда интегралы

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx,\ \int\limits_a^\omega g(x)\ dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A,\ \forall x \in [A, \omega)$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon$$

значит

$$(1 - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (1 + \varepsilon) \cdot g(x)$$

далее воспользуемся признаком Вейерштрасса. $\square$

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, \omega),\ g(x)$ монотонна на $[a, \omega)$, а также $|f(x)| \leq C,\ |g(x)| \leq C$. Тогда

($\mathcal{A}$): Если существует интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)\ dx$$

то существует интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\ dx$$

($\mathcal{D}$): Если $g(x) \to 0$ при $x \to \omega$ и

$$\left|\int\limits_a^{a'} f(x)\ dx\right| \leq C,\ \forall a' \in [a, \omega]$$

то существует интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)g(x)\ dx$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)\ dx\right| = \left|g(x_1)\cdot\int\limits_{x_1}^{c} f(x)\ dx + g(x_2)\cdot\int\limits_{c}^{x_2} f(x)\ dx\right| \leq$$

$$\leq |g(x_1)|\cdot\left|\int\limits_{x_1}^{c} f(x)\ dx\right| + |g(x_2)|\cdot\left|\int\limits_{c}^{x^2} f(x)\ dx\right| \leq$$

$(\mathcal{A}) : \leq C\cdot 2\varepsilon$
$(\mathcal{D}) : \leq \varepsilon\cdot 4C$ □

Пример. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$$

сходится, но интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx$$

расходится, так как

$$\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}$$

5.5 Главное значение интеграла в смысле Коши

Определение. Пусть $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и $f(x)\in\mathcal{R}[a,b],\ \forall a,b$. Величина

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\ dx = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$$

называется главным значением интеграла в смысле Коши.

Замечание. Главное значение интеграла в смысле Коши не является несобственным интегралом.

Теорема. Главное значение интеграла в смысле Коши существует, если сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(f(x) + f(-x)\right)\, dx$$

Доказательство.

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Возьмем интеграл от $-A$ до A, второе слагаемое всегда ноль. $\square$

Замечание. Аналогично определяется главное значение с особенностью в точке $c \in (a, b)$:

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx \right)$$

6 Функции нескольких переменных

6.1 Основные определения

Обозначим

$$\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}, \quad \|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Определение. Расстоянием между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называется функция $\rho(\bar{x}, \bar{y})$, для которой выполнено:

1. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$
2. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$
3. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$
4. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{z}) + \rho(\bar{z}, \bar{y})$

В рамках нашего курса можно использовать обозначение $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$

Определение. Окрестностью точки $\bar{x}_0$ или шаром с центром в точке $\bar{x}_0$ будем называть множества

$$B_\varepsilon(\bar{x}_0) = \{\bar{x} : \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \varepsilon\}$$

$$\mathring{B}_\varepsilon(\bar{x}_0) = \{\bar{x} : 0 < \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \varepsilon\}$$

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если

$$\exists\ R > 0 : A \subset B_R(\bar{0})$$

Определение. Последовательность $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется сходящейся, если

$$\exists\ \bar{x}_0 : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ K \in \mathbb{N},\ \forall k > K : \rho(\bar{x}_0, \bar{x}_k) < \varepsilon$$

В этом случае говорят, что существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{x}_0$$

Теорема.

$$\exists\ \lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{x}_0\ \Leftrightarrow\ \forall i = 1, ..., n :\ \exists\ \lim_{k \to \infty} x_{k_i} = x_{0_i}$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ K,\ \forall k > K : \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i} - x_{0_i})^2} < \varepsilon$$

отсюда $\forall i$:

$$|x_{k_i} - x_{0_i}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i} - x_{0_i})^2} < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ K_i,\ \forall k > K_i : |x_{k_i} - x_{0_i}| < \varepsilon$$

Пусть $K = \max\limits_i K_i$. Тогда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k_i} - x_{0_i})^2} < \varepsilon \cdot \sqrt{n}$$

□

Теорема. (Теорема Больцано-Вейерштрасса)
Если последовательность $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, то у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{\bar{x}_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$

Доказательство.

$$\{x_{k_1}\} - \text{ограничена} \Rightarrow \exists\ \text{сходящаяся подпоследовательность}\ \{x_{k_{1_1}}\}$$

$$\{x_{k_2}\} - \text{ограничена} \Rightarrow \exists\ \text{сходящаяся подпоследовательность}\ \{x_{k_{2_2}}\}$$

$$\vdots$$

$$\{x_{k_n}\} - \text{ограничена} \Rightarrow \exists\ \text{сходящаяся подпоследовательность}\ \{x_{k_{n_n}}\}$$

□

Определение. Множество $\Pi_{[\bar{a},\bar{b}]} = \prod\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ называется параллелепипедом.

Теорема. Если последовательность вложенных параллелепипедов такая, что

$$\{\Pi_{[\bar{a}_k,\bar{b}_k]}\}_{k=1}^{\infty},\ \forall k : \Pi_{[\bar{a}_{k+1},\bar{b}_{k+1}]} \subset \Pi_{[\bar{a}_k,\bar{b}_k]},\ \max_{1\leq i\leq n}|b_{k_i} - a_{k_i}| \to 0$$

то существует единственная точка ξ, что $\forall k : \xi \in \Pi_{[\bar{a}_k,\bar{b}_k]}$.

Доказательство. Очев. □

6.2 Секвенциальная компактность

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется секвенциальным компактом, если

$$\forall \{\bar{a}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A \ \ \exists \ \{\bar{a}_{i_m}\}_{m=1}^{\infty} : \bar{a}_{i_m} \to \bar{a} \in A, \ m \to \infty$$

Теорема. A - секвенциальный компакт $\Leftrightarrow$ A - замкнуто и ограничено.

Доказательство.

($\Rightarrow$): Если A - неограничено, то $\exists \ \{\bar{a}_i\}_{i=1}^{\infty}, \ \|\bar{a}_i\| \to \infty \Rightarrow$ получаем противоречие. Тогда A - ограничено и по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\forall \{\bar{a}_i\}_{i=1}^{\infty} \ \exists \ \{\bar{a}_{i_m}\}_{m=1}^{\infty}, \ \bar{a}_{i_m} \to \bar{a} \in A$$

значит, A содержит все свои предельные точки, то есть A - замкнуто.

($\Leftarrow$): Из ограниченности и замкнутости:

$$\forall \{\bar{a}_i\}_{i=1}^{\infty} \ \exists \ \{\bar{a}_{i_m}\}_{m=1}^{\infty}, \ \bar{a}_{i_m} \to \bar{a} \in A$$

□

Теорема. A - секвенциальный компакт $\Leftrightarrow$ A - компакт, то есть

$$\forall \{U_\alpha\} : A \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha \ \ \exists \ \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{N} : A \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{\alpha_i}$$

где U_i - открыто.

Доказательство.

($\Rightarrow$) : A - замкнуто и ограничено, значит, из ограниченности

$$\exists \ \Pi = \prod_{i=1}^{n} [a_i, a_i + d] \supset A$$

Предположим, что существует покрытие Π открытыми U_i, такое, что из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Поделим Π пополам и получим 2^n кубиков. Если какой-то из них не покрывается конечным числом U_i, то вновь поделим его на 2^n кубиков и так далее. Получим поледовательность вложенных параллелепипедов (кубиков), у которых длина стороны стремится к нулю. Значит существует единственная точка ξ, которая лежит в их пересечении. Поскольку $\xi \in A$, то она содержится в каком-то из кубиков, значит он и есть конечное подпокрытие, получаем противоречие. Значит, П - компакт. Поскольку $A \subset \Pi$ и A - замкнуто, то A - компакт (доказательсво этого факта можно посмотреть в конспекте курса Наглядная геометрия и топология).

($\Leftarrow$): От противного: пусть $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ - некоторая последовательность, у которой нет сходящейся подпоследовательности. Тогда

$$\forall \bar{y} \in A\ \exists\ B_{\varepsilon_y}(\bar{y}) : B_{\varepsilon_y}(\bar{y}) \cap \{\bar{x}_i\}_{i=1}^{\infty} - \text{конечно}$$

Из компактности A, получаем

$$A \subset \bigcup_{\bar{y} \in A} B_{\varepsilon_{\bar{y}}}(\bar{y}),\ \exists\ \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{y_i}}(\bar{y}_i) \supset A$$

получаем противоречие с тем, что последовательность бесконечная.

□

Определение. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Расстоянием между множествами A и B называется

$$\rho(A, B) = \inf_{\bar{a} \in A, \bar{b} \in B} \rho(\bar{a}, \bar{b})$$

Теорема. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутые и A - ограничено. Если $A \cap B = \varnothing$, то $\rho(A, B) > 0$.

Доказательство. От противного:

$$\rho(A, B) = 0 \Rightarrow \exists\ \{\bar{x}_k\} \subset A,\ \exists\ \{\bar{y}_k\} \subset B : \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \to 0$$

но $\{\bar{x}_k\}$ - ограничена и A - замкнуто $\Rightarrow \exists\ \bar{x}_{k_m} \to \bar{x} \in A,\ m \to \infty$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}_{k_m}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{x}_{k_m}) + \rho(\bar{x}_{k_m}, \bar{y}_{k_m}) < 2\varepsilon\ \Rightarrow\ \bar{y}_{k_m} \to \bar{x} \in B$$

Значит $\bar{x} \in A \cap B$ - противоречие. □

Теорема. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - замкнуто, $\bar{x} \notin A$. Тогда $\exists\ \bar{y} \in A : \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{x}, A)$.

Доказательство. По свойству точной нижней грани:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \bar{y}_\varepsilon \in A : \rho(\bar{x}, \bar{y}_\varepsilon) < \rho(\bar{x}, A) + \varepsilon$$

Возьмем

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists\ \bar{y}_m : \rho(\bar{x}, \bar{y}_m) < \rho(\bar{x}, A) + \frac{1}{m} \Rightarrow \{\bar{y}_m\} - \text{ограничено}$$

Значит

$$\exists\ \{\bar{y}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} : \bar{y}_{m_k} \to \bar{y} \in A,\ \rho(\bar{x}, \bar{y}_{m_k}) < \rho(\bar{x}, A) + \frac{1}{m_k}$$

после предельного перехода получим:

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}, A),\ \rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq \rho(\bar{x}, A) \Rightarrow \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{x}, A)$$

□

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить кривой, то есть

$$\forall x, y \in A\ \exists\ \bar{\gamma} : [0, 1] \to A : \bar{\gamma}(0) = x,\ \bar{\gamma}(1) = y$$

Теорема. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - линейно связное, $B \subset \mathbb{R}^n,\ A \cap B \neq \varnothing,$
$A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \varnothing$. Тогда $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $x_1 \in A \cap B,\ x_2 \in A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B),\ \bar{\gamma}(t) \subset A,\ t \in [0, 1],$
$\bar{\gamma}(0) = x_1,\ \bar{\gamma}(1) = x_2$. Пусть

$$\tau = \sup_{\bar{\gamma}(t) \in B} \{t\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ t_\varepsilon \in (\tau - \varepsilon, \tau),\ \bar{\gamma}(t_\varepsilon) \in B$$

Тогда при $t > \tau$ получим

$$\bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n \subset A \Rightarrow \bar{\gamma}(\tau) \in A \cap \partial B$$

□

Определение. Открытое линейно связное множество называется областью. Замыкание области называют замкнутой областью. Область часто будем обозначать Ω.

6.3 Функции нескольких переменных и их предел

Будут рассматриваться функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$

Определение. Множество $\{\bar{x} : f(\bar{x}) = C,\ C = \text{const}\}$ называется множеством (линией) уровня C.

Определение. (Предел по Гейне)
Пусть $\forall \{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f),\ \bar{x}_k \to \bar{x}_0,\ \bar{x}_k \neq \bar{x}_0$. Тогда существует предел

$$\lim_{k \to \infty} f(\bar{x}_k) = A$$

и A называется пределом функции f в точке $\bar{x}_0$.

Определение. (Предел по Коши)
Если $\exists\ A \in \mathbb{R}:$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall \bar{x} \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(\bar{x}_0) \cap D(f) : |f(\bar{x}) - A| < \varepsilon$$

то существует предел

$$\lim_{\bar{x} \to x_0} f(\bar{x}) = A$$

Теорема. Эти определения эквивалентны

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание. Свойства, доказанные для пределов в первом семестре, остаются верными для функций многих переменных и доказываются аналогично.

Определение. Пусть $\bar{x}_0 \in D'(f)$. Рассмотрим кривую $\bar{\gamma}(t)$, определенную в окрестности $B(t_0),\ \bar{\gamma}(t_0) = \bar{x}_0$. Тогда если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall t \in \mathring{B}(t_0) : |f(\bar{\gamma}(t)) - A| < \varepsilon$$

то существует предел

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0,\ \bar{x} \in \bar{\gamma}(t)} f(\bar{x}) = A$$

и он называется пределом $f(\bar{x})$ вдоль кривой $\bar{\gamma}$.

Определение. Если существует последовательность пределов

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{0_1}} (\lim_{x_{i_2} \to x_{0_2}} (\dots (\lim_{x_{i_{n-1}} \to x_{0_{n-1}}} (\lim_{x_{i_n} \to x_{0_n}} f(x_1, \dots, x_n))) \dots)) = A$$

то A называется повторным пределом.

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\ ,\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0,\ (x, y) = 0 \end{cases}$$

На всех осях нет повторного предела.

Теорема. Если существует предел

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = A$$

и существует предел

$$g(x_{i_n}) = \lim_{x_{i_1} \to x_{0_1}} (\lim_{x_{i_2} \to x_{0_2}} (\dots (\lim_{x_{i_{n-1}} \to x_{0_{n-1}}} f(\bar{x})) \dots))$$

то существует предел

$$\lim_{x_{i_n} \to x_{0_n}} g(x_{i_n}) = A$$

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\ \forall\bar{x}\in\mathring{B}_\delta(\bar{x}_0):|f(\bar{x})-A|<\varepsilon$$

Далее устремляем $x_{i_{n-1}}\to x_{0_{n-1}},\dots,x_{i_1}\to x_{0_1}$ и после предельного перехода получаем:

$$|g(x_{i_n})-A|\le\varepsilon$$

□

6.4 Непрерывные функции нескольких переменных

Определение. Если $\bar{x}_0\in D(f),\ \bar{x}_0\in D'(f)$ и существует предел

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}f(\bar{x})=f(\bar{x}_0)$$

то $f(\bar{x})$ называется непрерывной в точке $\bar{x}_0$.

Замечание. В изолированных точках считаем функцию непрерывной по определению.

Замечание. Локальные свойства непрерывных функций, доказанные в первом семестре, остаются верными для функций многих переменных и доказываются аналогично.

Теорема. Пусть $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$. Отображение

$$\bar{x}(t)=(x_1(t_1,\dots,t_k),\dots,x_n(t_1,\dots,t_k))$$

непрерывно в точке $\bar{t}_0$. Тогда $f(\bar{x}(\bar{t}))$ непрерывно в точке $\bar{t}_0$.

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\ \forall\bar{x}\in B_\delta(\bar{x}_0):|f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)|<\varepsilon$$

$$\exists\ \delta_1>0:\Pi_{(x_{0_i}-\delta_1,x_{0_i}+\delta_1)}\subset B_\delta(\bar{x}_0)$$

$$\exists\ \delta_2>0:\forall i=1,\dots,n:|x_i(\bar{t})-x_{0_i}|<\delta_1,\ \text{при}\ \rho(\bar{t},\bar{t}_0)<\delta_2$$

значит

$$|f(\bar{x}(\bar{t}))-f(\bar{x}(\bar{t}_0))|<\varepsilon$$

□

Теорема. (Теорема Вейерштрасса)
Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ - компакт, $f(\bar{x})\in\mathcal{C}(A)$. Тогда $f(\bar{x})$ ограничена на A и достигает максимума и минимума.

Доказательство. Пусть $f(\bar{x})$ неограничена, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : \exists\ \bar{x}_n \in A.$ $|f(\bar{x}_n)| > n$, но существует сходящаяся подпоследовательность

$$\{\bar{x}_{n_k}\} : \bar{x}_{n_k} \to \bar{x} \in A$$

Но тогда

$$\lim_{k\to\infty} f(\bar{x}_{n_k}) = f(\bar{x})$$

значит, функция ограничена. Далее пусть

$$\alpha = \sup_{\bar{x}\in A} f(\bar{x}) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_m : f(\bar{x}_m) > \alpha - \frac{1}{m}$$

Существует сходящаяся подпоследовательность

$$\{\bar{x}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} : \bar{x}_{m_k} \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_0) \geq \alpha$$

но $f(\bar{x}_0) \leq \alpha \Rightarrow \alpha = f(\bar{x}_0)$ □

Теорема. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - линейно связное множество, $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}(A)$,

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in A : f(\bar{x}_1) = \alpha,\ f(\bar{x}_2) = \beta,\ \alpha < \beta$$

Тогда

$$\forall \gamma \in (\alpha, \beta)\ \exists\ \bar{c} \in A : f(\bar{c}) = \gamma$$

Доказательство. Рассмотрим $\bar{\gamma}(t) \subset A,\ \bar{\gamma}(0) = \bar{x}_1,\ \bar{\gamma}(1) = \bar{x}_2$. Тогда по теореме о промежуточном значении $f(\bar{\gamma}(t))$ принимает при некотором $t' \in [0,1]$ значение $f(\bar{\gamma}(t')) = \gamma$. □

Определение. Пусть $f(\bar{x})$ определена на $A \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2,\ \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \delta : |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)| < \varepsilon$$

тогда $f(\bar{x})$ называется равномерно непрерывной на A.

Теорема. (Теорема Кантора)
Пусть A - компакт, $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}(A)$, то $f(\bar{x})$ равномерно непрерывна на A.

Доказательство. От противного

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists\ \bar{x}_1, \bar{x}_2,\ \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \delta : |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)| \geq \varepsilon_0$$

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_{1_{\frac{1}{m}}},\ \bar{x}_{2_{\frac{1}{m}}},\ \rho(\bar{x}_{1_{\frac{1}{m}}}, \bar{x}_{2_{\frac{1}{m}}}) < \frac{1}{m} : |f(\bar{x}_{1_{\frac{1}{m}}}) - f(\bar{x}_{2_{\frac{1}{m}}})| \geq \varepsilon_0$$

поскольку A компакт, то последовательность ограничена и существует сходящаяся подпоследовательность:

$$\{\bar{x}1_{\frac{1}{m_k}}\} : \bar{x}1_{\frac{1}{m_k}} \to \bar{x}_0$$

$$\rho(\bar{x}_0, \bar{x}2_{\frac{1}{m_k}}) \leq \rho(\bar{x}_0, \bar{x}1_{\frac{1}{m_k}}) + \rho(\bar{x}1_{\frac{1}{m_k}}, \bar{x}2_{\frac{1}{m_k}}) < \varepsilon + \frac{1}{m_k}$$

значит

$$\bar{x}2_{\frac{1}{m_k}} \to \bar{x}_0$$

поскольку $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}(A)$, то

$$\lim f(x1_{\frac{1}{m_k}}) = f(\bar{x}_0),\ \lim f(x2_{\frac{1}{m_k}}) = f(\bar{x}_0)$$

противоречие. □

6.5 Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Определение. Пусть $f(\bar{x})$ определена в $B(\bar{x}_0)$. Если существует предел

$$f'_{x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0i} + \Delta x_i, \ldots, x_{0n}) - f(\bar{x}_0)}{\Delta x_i}$$

то он называется частной производной функции по i-й переменной.

Определение. Если у функции $f(\bar{x})$ $\exists$ $f'_{x_i}(\bar{x})$ в некоторой $B(\bar{x}_0)$ и существует $(f'_{x_i}(\bar{x}))'_{x_j}$, то она называется второй частной производной. Если $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$, то она называется смешанной производной, если $\bar{x}_i = \bar{x}_j$, то она называется повторной производной.

$$(f'_{x_i}(\bar{x}))'_{x_i}|_{\bar{x}_0} = f''_{x_i x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(\bar{x}_0),\ (f'_{x_i}(\bar{x}))'_{x_j}|_{\bar{x}_0} = f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0)$$

Замечание. Аналогично определяется частная производная любого порядка.

Определение. Пусть $f(\bar{x})$ определена в $B(\bar{x}_0)$. Если существует набор $\{A_i\}_{i=1}^n$ такой, что

$$f(\bar{x}_0 + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \bar{\bar{o}}(\rho(\bar{x}_0, \bar{x}_0 + \Delta x))$$

то $f(\bar{x})$ называется дифференцируемой в точке $\bar{x}_0$. главная линейная часть приращения

$$df = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$$

называется первым дифференциалом функции $f(\bar{x})$.

Теорема. $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$.

Доказательство.

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \bar{\bar{o}}((\rho))\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |A_i| \cdot |\Delta x_i| + |\bar{\bar{o}}(\rho)| \leq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \varepsilon$$

□

Теорема. Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0$, то в точке $\bar{x}_0$:

$$\forall i = 1, \ldots, n : \ \exists \ \frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$$

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0i} + \Delta x_i, \ldots, x_{0n}) - f(\bar{x}_0)}{\Delta x_i} =$$
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{A_i \Delta x_i + \bar{\bar{o}}(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i} = A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Если $f(\bar{x}) = x_i$, то $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \Delta x_i = df = dx_i$ отсюда

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)\ dx_i$$

□

Теорема. (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $\forall i = 1, \ldots, n$ в некоторой $B(\bar{x}_0)$ существуют $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и они непрерывны в $B(\bar{x}_0)$. Тогда $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0$.

Доказательство. Докажем в $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ & = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (1) \\ & = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y = (2) + (3) \\ & = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \bar{\bar{o}}(1)\Delta x + \bar{\bar{o}}(1)\Delta y = (4) \\ & = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \bar{\bar{o}}(\rho) \end{aligned}$$

где $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Пояснения:

(1): По теореме Лагранжа

(2): Из непрерывности частных производных:

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \bar{\bar{o}}(1),\ \rho \to 0$$

(3): Из непрерывности частных производных:

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \bar{\bar{o}}(1),\ \ \rho \to 0$$

(4):

$$\frac{\bar{\bar{o}}(1)\Delta x + \bar{\bar{o}}(1)\Delta y}{\rho} = \bar{\bar{o}}(1)$$

□

Замечание. Аналогичное доказательство можно провернуть для $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть $f(\bar{x})$ определена в $B(\bar{x}_0)$. Обозначим $y_0 = f(\bar{x}_0)$, плоскость

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$$

называется касательной к графику $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$, если для любой прямой, проходящей через точки $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ и $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, ее угол с нормалью к плоскости стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $\bar{x} \to \bar{x}_0$.

Теорема. (Геометрический смысл дифференциала и уравнение касательной) Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0$, то

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)(x_i - x_{0i})$$

Доказательство. Проведем через $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ и произвольную $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ секущую, ее параметрическое уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} X_i = x_{0i} + (x_i - x_{0i})t, \\ Y = f(\bar{x}_0) + (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0))t. \end{cases}$$

где $i = 1, \ldots, n$. Тогда можем выписать ее направляющий вектор:

$$\Big(x_1 - x_{01},\ \ldots,\ x_n - x_{0n},\ f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)\Big)$$

теперь выпишем вектор нормали к плоскости:

$$\Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \ldots,\ \tfrac{\partial f}{\partial x_n},\ -1\Big)$$

значит

$$\cos\alpha = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) - (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0))}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2} \cdot \sqrt{(f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0))^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i0})^2}} \le \frac{|\bar{\bar{o}}(\rho)|}{c\rho} \to 0$$

следовательно $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. □

Теорема. (Дифференциал сложной функции и инвариантность формы первого дифференциала)
Пусть $f(\bar{x})$ дифференцируема в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}(\bar{t}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x}(\bar{t})$ дифференцируемы в $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^k$ и $\forall \bar{t} \in \Omega_1 : \bar{x}(\bar{t}) \in \Omega$. Тогда $f(\bar{x}(\bar{t}))$ дифференцируема в Ω_1.

Доказательство. $\forall \bar{x}_0 \in \Omega$:

$$f(\bar{x}_0 + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})^2}\right)$$

$$f(\bar{x}(\bar{t}_0+\Delta\bar{t})) - f(\bar{x}(\bar{t}_0)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i(\bar{t}) - x_i(\bar{t}_0)) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i(\bar{t}) - x_i(t_0))^2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_j - t_{0j}) + \bar{\bar{o}}(\rho)\right) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_j - t_{0j}) + \bar{\bar{o}}(\rho)\right)^2}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_j - t_{0j}) + \bar{\bar{o}}(\rho) + \bar{\bar{o}}(O(\rho)) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_j - t_{0j})\right) + \bar{\bar{o}}(\rho).$$

Значит

$$df = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_j}\right) dt_j$$

Заметим, что если подставить дифференциал функции $x_i(\bar{t})$:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dt_j$$

В дифференциал функции $f(\bar{x})$, то получим

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x}{\partial t_j}\, dt_j\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_j}\right) dt_j$$

что совпадает с выражением дифференциала, полученным в доказательстве теоремы. Значит первый дифференциал инвариантен относительно выбора системы координат. □

Теорема. Пусть $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Тогда $\forall i, j$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Доказательство. Пусть $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$. Докажем в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\Delta_x(\Delta_y f(x,y)) = \Delta_x(f(x, y+\Delta_y) - f(x,y)) = \\ = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y(\Delta_x f(x,y)) = \Delta_y(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)) = \\ = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y)\end{aligned}$$

Значит

$$\Delta_x(\Delta_y f(x,y)) = \Delta_y(\Delta_x f(x,y))$$

Тогда по теореме Лагранжа:

$$\begin{aligned}\Delta_x(\Delta_y f(x,y)) = \Delta_x(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)) = \\ = \Delta_x(f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y) = f''_{yx}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y(\Delta_x f(x,y)) = \Delta_y(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)) = \\ = \Delta_y(f'_x(x+\theta_3\Delta x, y)\Delta x) = f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y\end{aligned}$$

Устремив $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, получим

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

$\square$

6.6 Производная по направлению

Определение. Пусть

$$\bar{l} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n\end{pmatrix}, \ \sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$$

Предел

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta t \cdot \cos\alpha_1, \dots, x_n + \Delta t \cdot \cos\alpha_n) - f(\bar{x})}{\Delta t}$$

называется производной по направлению $\bar{l}$.

Определение. Ковектор

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

называется градиентом функции $f(\bar{x})$.

Теорема. Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в $B(\bar{x}_0)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_i \right) = (\operatorname{grad} f, \bar{l})$$

Доказательство.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta t \cdot \cos \alpha_1, \dots, x_n + \Delta t \cdot \cos \alpha_n) - f(\bar{x})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha_i \right) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta t^2 \cdot \cos^2 \alpha_i} \right)}{\Delta t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_i \right) = (\operatorname{grad} f, \bar{l})$$

□

Теорема. Производная функции $f(\bar{x})$ по направлению $\operatorname{grad} f$ имеет максимальное по модулю значение по сравнению со всеми остальными производными по направлению.

Доказательство. Для любого направления $\bar{l}$, по неравентсву Коши-Буняковского:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{l}} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_i \right) \right| = |(\operatorname{grad} f, \bar{l})| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial (\operatorname{grad} f)} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial f}{\partial (\operatorname{grad} f)} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} \geq \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{l}} \right|$$

□

6.7 Формула Тейлора

Определение. Пусть $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

$$\delta(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j \right) \Delta x_i$$

Соответствующая квадратичная форма

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

называется вторым дифференциалом функции f. Если $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, то последовательно определяются дифференциалы до k порядка.

Теорема. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)
Пусть $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}^k(B(\bar{x}_0))$. Тогда $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0)\ \exists\ \theta \in [0, 1]$ такое, что

$$f(\bar{x}) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \cdot d^m f(\bar{x}_0) + \frac{1}{k!} \cdot d^k f(x_0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}_0))$$

Доказательство. Пусть

$$X_1 = x_{01} + (x_1 - x_{01})t,\ \ldots,\ X_n = x_{0n} + (x_n - x_{0n})t,\ t \in [0, 1]$$

$$F(t) = f(X_1(t), \ldots, X_n(t))$$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = F(1) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \cdot F^{(m)}(0) \cdot (1-0) + \frac{1}{k!} \cdot F^{(k)}(\theta)(1-0) = \\ = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(\bar{x}_0) \cdot \prod_{j=1}^{m} (x_{i_j} - x_{0 i_j}) + \\ + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(\bar{x}_0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}_0)) \prod_{j=1}^{m} (x_{i_j} - x_{0 i_j}) = \\ = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \cdot d^m f(x_0) + \frac{1}{k!} \cdot d^k f(x_0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}_0)) \end{aligned}$$

□

Лемма. [1]

$$F^{(m)}(0) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(\bar{x}_0) \cdot \prod_{j=1}^{m} (x_{i_j} - x_{0 i_j}) \tag{1}$$

[1] На лекции считалось очевидным

$$F^{(k)}(\theta) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(\bar{x}_0 + \theta(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)) \cdot \prod_{j=1}^{k}(x_{i_j} - x_{0i_j}) \qquad (2)$$

Доказательство. Индукция по m. База при $m = 1$:

$$F'(t) = (f(X_1(t), \ldots, X_n(t)))'_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0))(x_i - x_{0i})$$

Пусть для m верно. Тогда

$$F^{(m+1)}(t) = (F^{(m)}(t))'_t =$$

$$= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0)) \cdot \prod_{j=1}^{m}(x_{i_j} - x_{0i_j})\right)'_t =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0))\right)'_t \cdot \prod_{j=1}^{m}(x_{i_j} - x_{0i_j}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m,i_{m+1}=1}^{n} \left(\frac{\partial^{(m+1)} f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}\partial x_{i_{m+1}}}(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0)) \cdot (x_{i_{m+1}} - x_{0i_{m+1}})\right) \cdot \prod_{j=1}^{m}(x_{i_j} - x_{0i_j}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m,i_{m+1}=1}^{n} \left(\frac{\partial^{(m+1)} f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}\partial x_{i_{m+1}}}(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0))\right) \cdot \prod_{j=1}^{m+1}(x_{i_j} - x_{0i_j})$$

Отсюда, подставив нужные точки, получаем утверждения леммы. □

Теорема. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)
Пусть $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}^k(B(\bar{x}_0))$. Тогда

$$f(\bar{x}) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{n!} d^k f(\bar{x}_0) + \bar{\bar{o}}(\rho^k), \rho \to 0$$

Доказательство.

$$f(\bar{x}) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} d^m f(\bar{x}_0) + \frac{1}{k!} d^k f(\bar{x}_0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}_0)) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(\bar{x}_0) + \frac{1}{k!}(d^k f(\bar{x}_0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}_0)) - d^k f(\bar{x}_0))$$

$$\frac{r_k(\bar{x},\bar{x}_0)}{\rho^k} =$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(\bar{x}_0+\theta(\bar{x}-\bar{x}_0)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(\bar{x}_0)\right)\cdot\frac{\Delta x_{i_1}}{\rho}\ldots\frac{\Delta x_{i_k}}{\rho}$$

□

6.8 Экстремум функции

Определение. Пусть $f(\bar{x})$ определелена в $B(\bar{x}_0)$, $\forall x \in \mathring{B}(\bar{x}_0) : f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$ $(f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0))$. Тогда в точке $\bar{x}_0$ у функции $f(\bar{x})$ существует минимум (максимум).

Теорема. (Необходимое условие существования экстремума)
Пусть $f(\bar{x})$ имеет в точке $\bar{x}_0$ минимум (максимум). Тогда

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = 0$$

Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0$, то $df(\bar{x}_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_i(x) = f(x_{01,},\ldots,x_{0i-1},x_i,x_{0i+1},\ldots,x_{0n})$$

которая получена подстановкой координат $\bar{x}_0$ во все переменные кроме i.
У $g_i(x)$ в точке x_{0i} достигается минимум, значит по необходимому условию для функции одной переменной: $\exists\ g_i'(x_{0i}) \Rightarrow g_i'(x_{0i}) = 0$. Если $f(\bar{x})$ - дифференцируема и $\forall i\ \exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$, то $df(\bar{x}_0) = 0$. □

Теорема. (Достаточное условие существования экстремума)
Пусть $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}^2(B(\bar{x}))$, $df(\bar{x}_0) = 0$. Если

$$d^2 f(\bar{x}_0) > 0\ (d^2 f(\bar{x}_0) < 0)$$

то в точке $\bar{x}_0$ достигается минимум (максимум). Если в некоторой $B(\bar{x}) : d^2 f(\bar{x}_0)$ знакопеременен, то не существует экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \frac{1}{2}d^2 f(\bar{x}_0) + \bar{\bar{o}}(\rho^2)$$

$$\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)}{\rho^2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0)\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho} + \bar{\bar{o}}(1)$$

Существует $\alpha > 0$:
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0) \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} \geq \alpha$$
Значит
$$\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)}{\rho^2} \geq \frac{\alpha}{2}$$
Получили, что $\bar{x}_0$ - точка минимума.
Докажем вторую чать теоремы: $\exists\ \overline{\Delta x_1},\ \overline{\Delta x_2}$, что
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0) \Delta x_{1j} \Delta x_{1i} = -\beta^2 < 0$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0) \Delta x_{2i} \Delta x_{2j} = \gamma^2 > 0$$
Тогда $\forall t > 0$:
$$d^2 f(\bar{x}_0)(t\overline{\Delta x_1}, t\overline{\Delta x_1}) = -t^2\beta^2$$
$$d^2 f(\bar{x}_0)(t\overline{\Delta x_2}, t\overline{\Delta x_2}) = t^2\gamma^2$$
При сколь угодно маленьких знгачениях t мы получаем точки сколь угодно близкие к $\bar{x}_0$, но с одной стороны положительные, а с другой отрицательные. □

6.9 Теорема о неявной функции

Определение. Пусть $F(\bar{x}, y)$ определена на $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega_{\bar{x}}$ - проекция Ω на $\mathbb{R}^n$ вдоль y. Если $\exists\ A \subset \Omega_{\bar{x}}$ и $\exists\ f(\bar{x})$, определенная на A, такая что $F(\bar{x}, f(\bar{x})) \equiv 0$ на A, то говорят, что уравнение $F(\bar{x}, y) = 0$ задает на A неявную функцию $y = f(\bar{x})$.

Теорема. (Теорема о неявной функции)
Пусть $F(\bar{x}, y) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $F(\bar{x}_0, y_0) = 0$, $F'_y(\bar{x}_0, y_0) > 0$ ($F'_y(\bar{x}_0, y_0) < 0$). Тогда существуют $B(\bar{x}_0) \subset \Omega_{\bar{x}}$ и единственная $f(\bar{x})$, определенная на $B(\bar{x}_0)$, такие, что $y_0 = f(\bar{x}_0)$, $F(\bar{x}, f(\bar{x})) \equiv 0$ при $\bar{x} \in B(\bar{x}_0)$ и $f(\bar{x}) \in \mathcal{C}^1(B(\bar{x}_0))$, причем для любого i:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Доказательство. Пусть
$$g_{\bar{x}_0}(y) = F(\bar{x}_0, y)$$
причем
$$g_{\bar{x}_0}(y_0) = 0,\ (g_{\bar{x}_0}(y))'_y|_{y=y_0} > 0$$

а также известно, что $g'_{\bar{x}_0}(y)$ непрерывна в некоторой $B(y_0)$, значит $g_{\bar{x}_0}(y)$ строго возрастает в $B(y_0)$ и проходит через ноль, то есть $\exists\ \delta > 0$ такое, что

$$g_{\bar{x}_0}(y_0-\delta) < 0,\ g_{\bar{x}_0}(y_0+\delta) > 0$$

рассмотрим функции:

$$h_{y_0-\delta}(\bar{x}) = g_{\bar{x}}(y_0-\delta) = F(\bar{x}, y_0-\delta),\ h_{y_0+\delta}(\bar{x}) = g_{\bar{x}}(y_0+\delta) = F(\bar{x}, y_0+\delta)$$

тогда $\exists\ \delta_1 > 0$, что $F(\bar{x}, y)$ непрерывна в $B_{\delta_1}(\bar{x}_0)$, то есть $\forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}_0)$:

$$h_{y_0-\delta}(\bar{x}) < 0,\ h_{y_0+\delta}(\bar{x}) > 0$$

отсюда

$$\forall \bar{x} \in B_{\delta_1}(\bar{x}_0)\ \exists\ !\ y_{\bar{x}} :\ g_{\bar{x}}(y_{\bar{x}}) = F(\bar{x}, y_{\bar{x}}) = 0$$

значит, соответсвие $\bar{x} \to y_{\bar{x}}$ это и есть $f(\bar{x})$.
Пусть

$$\varphi(t) = F(\bar{x}_0 + (\bar{x}-\bar{x}_0)t,\ f(\bar{x}_0) + (f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)t)$$

$$\varphi(0) = F(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))) = 0,\ \varphi(1) = F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$$

отсюда, по теореме Ролля, существует $\xi \in (0,1)$, такая, что $\varphi(\xi) = 0$.

$$\varphi'(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)(x_i - x_{0i}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)) = 0$$

$$\begin{aligned}(f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}(x_i - x_{0i}) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_0)}(x_i - x_{0i}) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_0)} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}\right)(x_i - x_{0i}) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_0)}(x_i - x_{0i}) + \bar{\bar{o}}(\rho)\end{aligned}$$

$\square$

6.10 Теорема о неявном отображении

Определение. Отображение $\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

называется дифференцируемой, если $\forall i = 1, \ldots k : f_i$ - дифференцируема.

Утверждение. Если $\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо, то полное приращение имеет главную линейную часть вида

$$J \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_0 + \Delta\bar{x}) \\ \vdots \\ f_k(\bar{x}_0 + \Delta\bar{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_0) \\ \vdots \\ f_k(\bar{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1 + \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|) \\ \vdots \\ df_k + \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Delta x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\Delta x_i \end{pmatrix} - \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$$

$\square$

Определение. Матрица

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби.
Если $k = n$, то

$$\det J := \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

называется якобианом.

Теорема. (Теорема о неявном отображении)
Пусть $\bar{F} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо в $B(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$,
$\bar{F}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0,\ \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_m)} \neq 0$ в $B(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$. Тогда существует единственное непрерывное дифференцируемое отображение

$$\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \varphi_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

такое, что $\bar{\Phi}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0,\ \bar{F}(\bar{x}, \bar{\Phi}(\bar{x})) \equiv 0$ в $B(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$.

Доказательство. Докажем по индукции. База: при $m = 1$ - это теорема о неявной функции.

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_{m+1}} \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_m} & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_{m+1}} \end{vmatrix}$$

имеет ненулевой минор порядка m, с точностью до обозначений это будет левый верхний минор. Значит, система

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ \vdots \\ f_m = 0. \end{cases}$$

разрешима:

$$\begin{cases} y_1 = \psi_1(\bar{x}, y_{m+1}), \\ \vdots \\ y_m = \psi_m(\bar{x}, y_{m+1}). \end{cases}$$

Подставим решение в систему:

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}, \psi_1(\bar{x}, y_{m+1}), \dots, \psi_m(\bar{x}, y_{m+1}), y_{m+1}) \equiv 0, \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}, \psi_1(\bar{x}, y_{m+1}), \dots, \psi_m(\bar{x}, y_{m+1}), y_{m+1}) \equiv 0, \\ f_{m+1}(\bar{x}, \psi_1(\bar{x}, y_{m+1}), \dots, \psi_m(\bar{x}, y_{m+1}), y_{m+1}) = g(\bar{x}, y_{m+1}). \end{cases}$$

возьмем у всех этих уравнений производную по y_{m+1}

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y_{m+1}} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi_m}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m+1}} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y_{m+1}} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi_m}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m+1}} = 0, \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y_{m+1}} + \dots + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi_m}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_{m+1}} = \frac{\partial g}{\partial y_{m+1}}. \end{cases}$$

Умножим каждую строку на алгебраическое дополнение к элементу последнего стоблца, а затем сложим уравнения. По теореме о фальшивом разложении получим:

$$\det J = \frac{\partial g}{\partial y_{m+1}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y_{m+1}} \neq 0$$

$$g(\bar{x}), y_{m+1} = 0 \Rightarrow y_{m+1} = \varphi_{m+1}(\bar{x})$$

отсюда

$$y_1 = \varphi(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x}, \varphi_{m+1}(\bar{x}))$$

Непрерывность и дифференцируемость следует из теоремы о неявной функции.

□

Замечание. (О вычислении производных)

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} dy_j = 0, \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} dx_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f_m}{\partial y_j} dy_j = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\ )_i dx_i, \\ \vdots \\ dy_m = \sum\limits_{i=1}^{n} (\ )_i dx_i. \end{cases}$$

Теорема. (Теорема об обратном отображении)
Пусть $\bar{F} : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^n_y$ непрерывно дифференцируемо в $B(\bar{x}_0)$, $\det J \neq 0$ в $B(\bar{x}_0)$. Тогда существует единственное отображение $\bar{F}^{-1} : \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{R}^n_x$ непрерывно дифференцируемое в образе $B(\bar{x}_0)$.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) - y_1 = 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) - y_2 = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) - y_n = 0. \end{cases}$$

По теореме о неявном отображении получим решение:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(\bar{y}), \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(\bar{y}). \end{cases}$$

□

6.11 Условный экстремум

Определение. Пусть функции f_i определены на $B(\bar{x}_0)$, $i = 0, \ldots, m$,
$\Omega_F = \{\bar{x} : \ f_i(\bar{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m\}$, $\bar{x}_0 \in \Omega_F$. Если

$$\forall \delta > 0, \ \forall \bar{x} \in \overset{\circ}{B}_\delta(\bar{x}_0) \cap \Omega_f : f_0(\bar{x}) > \ (<) \ f_0(\bar{x}_0)$$

то говорят, что $f_0(\bar{x})$ имеет в точке $\bar{x}_0$ условный минимум (максимум), а уравнения $f_i(\bar{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m$ называют условиямми связи.

Замечание. Пусть $f_i(\bar{x}) \in \mathcal{C}(B(\bar{x}_0)),\ m < n,\ \{\operatorname{grad} f_i\}_{i=1}^m$ - линейно независимы, тогда существует

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 0, \\ \vdots \\ f_m = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ x_m = \varphi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Значит

$$f_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

и нужно найти безусловный экстремум функции g, которая зависит от меньшего числа переменных.

Теорема. (Необходимое условие экстремума)
Пусть $f_i \in \mathcal{C}(B(\bar{x}_0)),\ i = 0, \ldots, m$. Если f_0 имеет в точке $\bar{x}_0$ условный экстремум, то $\{\operatorname{grad} f_i\}_{i=0}^m$ - линейно зависимы

Доказательство. Пусть существует экстремум в точке $\bar{x}_0$, а градиенты линейно независимы. Тогда

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m, f_0)}{D(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1, \\ \vdots \\ y_m = f_m, \\ y_{m+1} = f_0 \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ x_2 = \varphi_2(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \\ x_m = \varphi_m(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \\ x_{m+1} = \varphi_{m+1}(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Рассотрим обратное отображение в точку $\bar{x}_0$:

$$\begin{cases} x_{01} = \varphi_1(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, f_0(\bar{x}_0), x_{0m+2}, \ldots, x_{0n}), \\ x_{02} = \varphi_2(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, f_0(\bar{x}_0), x_{0m+2}, \ldots, x_{0n}), \\ \vdots \\ x_{0m} = \varphi_m(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, f_0(\bar{x}_0), x_{0m+2}, \ldots, x_{0n}), \\ x_{0m+1} = \varphi_{m+1}(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, f_0(\bar{x}_0), x_{0m+2}, \ldots, x_{0n}) \end{cases}$$

Теперь возьмем точку, близкую к $\bar{x}_0$

$$\begin{cases} x_{\delta_1} = \varphi_1(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, f_0(\bar{x}_0) + \delta, x_{\delta_{m+2}}, \ldots, x_{\delta_n}), \\ \vdots \end{cases}$$

Если взять $\delta < 0$, то получим точку, в которой значение больше $f_0(\bar{x}_0)$, а если $\delta > 0$, то получим точку, в которой значение меньше $f_0(\bar{x}_0)$. $\square$

6.12 Метод множителей Лагранжа

Определение. Рассмотрим задачу на условный экстремум, $f_i = 0$. Функция

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(\bar{x})$$

называется функцией Лагранжа задачи об условном экстремуме, а множество $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$

Теорема. Если f_0 имееет условный экстремум в точке $\bar{x}_0$ при условии связи $f_i = 0,\ i = 1, \ldots, m$, то существует набор констант $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ таких, что

$$dL = (\bar{x}_0, \bar{\lambda}) = 0$$

Доказательство. Если выполнено условие теоремы, то $\{\operatorname{grad} f_i\}_{i=0}^m$ - линейно зависимы, но $\{\operatorname{grad} f_i\}_{i=1}^m$ - линейно независимы, значит,

$$dL = df_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot df_i$$

то есть существует набор $\{\lambda_i\}$, что $dL = 0$. $\square$

Теорема. (Достаточное условие)
Рассмотрим задачу на условный экстремум, $f_i = 0,\ i = 1, \dots m,\ f_i \in \mathcal{C}^2(B(\bar{x}_0)),\ i = 0, \dots, m$ Если

$$d^2 L|_{df_1 = \dots = df_m = 0}$$

знакоопределен, то существует условный экстремум. Если он знаконеопределен, то экстремума не существует.

Доказательство. Без доказательсва. □

6.13 Абсолютный экстремум

Определение. Пусть $f(\bar{x})$ определена на $A \subset \mathbb{R}^n$. Если $\exists \sup\limits_A f(\bar{x})$ $(\inf\limits_A f(\bar{x}))$ и $\exists\ \bar{x}_{max}$ такой, что $f(\bar{x}_{max}) = \sup\limits_A f(\bar{x})$ $(\dots)$, то говорят, что $f(\bar{x})$ имеет абсолютный минимум (максимум) на A.
Если A - компакт, то ищем локальные максимумы и минимумы среди точек, имеющих полную окрестность; далее рассматриваем подмножество A на единицу меньшей размерности и там повторяем процедуру, и так далее до одноточечных множеств.