Математический анализ-4

Лектор: доц. Косухин Олег Николаевич

26 февраля 2026 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Повторение построения интеграла Римана

Пусть f — функция на отрезке $[a,b]$. Выбиралось разбиение $T = \{\Delta_j\}_{j=1}^n$ отрезка $[a,b]$ и разметка $H = \{\xi_j\}_{j=1}^n$. Диаметром $d(T)$ разбиения T называлась наибольшая из длин отрезков разбиения. Интегральной суммой на заданом размеченом разбиении называли следующее выражение:

$$\sigma(f,T,H) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|\Delta_j|$$

где $|\Delta_j|$ - длина отрезка Δ_j. Тогда интералом Римана назывался предел

$$I = \lim_{d(T)\to 0} \sigma(f,T,H)$$

Также интеграл Римана можно ввести через суммы Дарбу. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f,T) = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot |\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x\in\Delta_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(x)$$

Далее вводился верхний и нижний ингралы Дарбу

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(f,T), \quad I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Если верхний и нижний интегралы совпадают

$$I = I_* = I^*$$

то I в точности интеграл Римана.
Нашей целью является перенос этой конструкции в $\mathbb{R}^k$ при $k \geq 2$.

1.2 Кратный интеграл Римана

Определение. Замкнутым брусом в $\mathbb{R}^k$ называется декартово проиведение

$$\Pi = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_k,b_k]$$

Определение. Пусть дан брус $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$, а $T_1, \dots, T_k$ являются разбиениями $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ соответсвенно. Тогда

$$T = T_1 \times \dots \times T_k$$

называется разбиением бруса Π. Брус из разбиения $T = T_1 \times \dots \times T_k$ будем обозначать $\Delta_{j_1,\dots,j_k}$, а его объем $|\Delta_{j_1,\dots,j_k}|$. Разметкой разбиения также назовем множество $H = \{\xi_{j_1,\dots,j_k}\}_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}$, где $\xi_{j_1,\dots,j_k} \in \Delta_{j_1,\dots,j_k}$.

Определение. Интегральной суммой называется выражение

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} = f(\xi_{j_1,\dots,j_k}) \cdot |\Delta_{j_1,\dots,j_k}|$$

Для краткости будем писать

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

Для корректности определения осталось ввести понятие объема.

Определение. Пусть $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subset \mathbb{R}^k$. Объемом назовем функцию, которая обладает следующими свойствами:

1. $V(\Phi) \geq 0$
2. $\Phi_1 = \Phi_2$
3. $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$, если $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$
4. Объем единичного куба равен 1.

таким образом, объемом бруса Π называется

$$V(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_k - a_k)$$

Определение. Диаметром бруса Π назовем

$$\mathrm{diam}(\Pi) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_k - a_k)^2}$$

Тогда диаметром разбиения $d(T)$ называется наибольший из диаметров Δ_j.

Определение. I называется кратным интегралом функции f по брусу Π, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \ \forall T : d(T) < \delta \ \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

1.3 Суммы Дарбу

Определение. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f,T) = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j|, \ \ \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x\in\Delta_j} f(x), \ \ m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(x)$$

Определение. Разбиение $T' = T_1' \times \dots \times T_k'$ называется измельчением разбиения $T = T_1 \times \dots \times T_k$, если $\forall i = 1, \dots, k : \ T_i'$ является имельчением T_i.

Рассмотрим аналогичные одномерному случаю свойства сумм Дарбу:

Утверждение. Для любого разбиения T и любой его разметки H:

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \sigma(f,T,H) \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Утверждение. Если T' — измельчение T, то

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \overline{\overline{s}}(f,T'), \ \underline{\underline{S}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Доказательство. Сравним $\overline{\overline{s}}(f,T)$ и $\overline{\overline{s}}(f,T')$, где T' получена добавлением разреза. После добавления, брус Δ_j разбился на два новых бруса Δ_j' и Δ_j'', обозначим: m_j', m_j'' - инфинумы f на Δ_j' и Δ_j'' соответсвенно. Тогда

$$\overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \overset{(1)}{=} \sum_j (m_j' \cdot |\Delta_j'| + m_j'' \cdot |\Delta_l''| - m_j(|\Delta_j'| + |\Delta_j''|)) =$$

$$= \sum_j ((m_j' - m_j) \cdot |\Delta_j'| + (m_j'' - m_j) \cdot |\Delta_j''|) \overset{(2)}{\ge} 0$$

(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез
(2): $m_j' \ge m_j, \ m_j'' \ge m_j$
Аналогично показывается, что $\underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T') \ge 0$. □

Утверждение. Пусть к разбиению T добавили p разрезов (к разбиениям $T_1, \dots, T_k$). Тогда

$$0 \le \overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \le (M-m) \cdot d^{k-1} \cdot \delta \cdot p$$

$$0 \le \underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T') \le (M-m) \cdot d^{k-1} \cdot \delta \cdot p$$

где $M = \sup\limits_{x\in R} f(x), \ m = \inf\limits_{x\in R} f(x), \ d$ — диаметр Π, $\delta = d(T)$ - диаметр T.

Доказательство.

$$\overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \overset{(1)}{=} \sum_j ((m'_j - m_j)\cdot|\Delta_j| + (m''_j)\cdot|\Delta''_j|) \overset{(2)}{\le}$$

$$\overset{(2)}{\le} \sum_j ((M-m)\cdot|\Delta'_j| + (M-m)\cdot|\Delta''_j|) = (M-m)\sum_j (|\Delta'_j| + |\Delta''_j|) =$$

$$= (M-m)\cdot|\Pi_1| \le (M-m)\cdot d^{k-1}\cdot\delta$$

где $|\Pi_1|$ — суммарный объём тех брусов, которые были разрезаны. Проделав эту операцию p раз, получим искомое утверждение.
(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез
(2): $m'_j, m''_j \le M,\ m_j \ge m$. Аналогично для верхней суммы Дарбу. □

Утверждение.

$$\overline{\overline{s}}(f,T) = \inf_H \sigma(f,T,H), \quad \underline{\underline{s}}(f,T) = \sup_H \sigma(f,T,H)$$

Доказательство.

$$\sigma(f,T,H) = \sum_j f(\xi_j)\cdot|\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j m_j\cdot|\Delta_j|$$

Поскольку m_j — инфинум, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \xi_j \in \Delta_j : 0 \le f(\xi_j) - m_j < \frac{\varepsilon}{|R|}$$

отсюда

$$0 \le \sigma(f,T,H) - \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j (f(\xi_j) - m_j)\cdot|\Delta_j| < \sum_j \frac{\varepsilon}{|R|}\cdot|\Delta_j|$$

а это в точности означает, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) = \inf_H \sigma(f,T,H)$$

Аналогично для верхней суммы Дарбу. □

Утверждение. Пусть T' и T'' — любые разбиения бруса П. Тогда

$$\overline{\overline{s}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T'')$$

Доказательство. Пусть T объединяет в себе все разрезы T_1 и T_2. Тогда T — измельчение и для T' и для T''. Тогда по доказанному выше свойству и определению сумм Дарбу, получим

$$\overline{\overline{s}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T) \le \underline{\underline{S}}(f,T) \le \underline{\underline{S}}(f,T'')$$

□

Определение. Нижним интегралом Дарбу называется

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(f, T),$$

верхним интегралом Дарбу называется

$$I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Из определений ясно, что $I_* \leq I^*$.

1.4 Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе

Теорема (Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе)**.**
Если существует интеграл I от f на Π, то f ограничена на Π, то есть

$$f \in \mathcal{R}(\Pi) \Rightarrow f \in \mathcal{B}(\Pi)$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0, \; \forall T : d(T) < \delta \; \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

зафиксируем $j = j_0$

$$I - \varepsilon < f(\xi_{j_0}) \cdot |\Delta_{j_0}| + \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j| < I + \varepsilon$$

для $j \neq j_0$ выберем произвольным образом ξ_j и обозначим

$$c = \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

тогда $\forall \xi_{j_0} \in \Delta_{j_0}$:

$$\frac{I - \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0|}} < f(\xi_{j_0}) < \frac{I + \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0|}}$$

значит f ограничена на каждом $\Delta_{j_0} \Rightarrow f$ - ограничена на Π. □

Пример (Необходимое условие не является достаточным)**.**
Рассмотрим

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1, \; x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Q} \\ 0, \; \text{иначе} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{s}} = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 0 \cdot |\Delta_j| = 0$$

$$\underline{\underline{S}} = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 1 \cdot |\Delta_j| = |\Pi|$$

Итак

$$\forall I \in \mathbb{R} \;\; \exists\, \varepsilon = \frac{|\Pi|}{3} > 0, \;\forall \delta > 0 \;\; \exists\, T, H, \; d(T) < \delta : |\sigma(f, T, H) - I| \geq \varepsilon$$

Значит функция не является интегрируемой.

2 Лекция 2

2.1 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе

Определение. Разность сумм Дарбу

$$\Omega(f,T) = \underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T)$$

называется Ω-суммой.

Замечание. Пусть $T = \{\Delta_j\}$

$$\Omega(f,T) = \sum_i \left(\sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x) \right) \cdot |\Delta_i|$$

$\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x) := \omega_i$ называют колебаниями f на Δ_i.

В одномерном случае доказывалось утверждение

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости на отрезке)**.**
Следующие условия эквивалентны:

1. $f \in \mathcal{R}[a,b]$
2. $I^*(f,[a,b]) = I_*(f,[a,b])$
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall T : d(T) < \delta : \Omega(f,T) < \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T : \Omega(f,T) < \varepsilon$

Рассмотрим аналогичное утверждение и докажем его

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости на брусе)**.**
Следующие условия эквивалентны:

1. $f \in \mathcal{R}(\Pi)$
2. $I^*(f,\Pi) = I_*(f,\Pi)$
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall T,\ d(T) < \delta : \Omega(f,T) < \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T : \Omega(f,T) < \varepsilon$

Доказательство. Докажем по схеме (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)

1. (1) $\Rightarrow$ (2):

   $$\exists\ I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ T, H,\ d(T) < \delta : |I - \sigma(f, T, H)| < \varepsilon$$

   Знаем, что

   $$\underline{\underline{S}}(f, T) = \sup_H \sigma(f, T, H), \quad \overline{\overline{s}}(f, T) = \inf_H \sigma(f, T, H)$$

   тогда

   $$I - \varepsilon < \sigma(f, T, H) < I + \varepsilon$$

   отсюда

   $$I - \varepsilon \leq \overline{\overline{s}}(f, T) < I + \varepsilon, \quad I - \varepsilon < \underline{\underline{S}}(f, T) \leq I + \varepsilon$$

   таким образом $\exists\ I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall T,\ d(T) < \delta$:

   $$|I - \overline{\overline{s}}(f, T)| < \varepsilon, \quad |I - \overline{\overline{s}}(f, T)| < \varepsilon$$

   $$\lim_{d(T)\to 0} \overline{\overline{s}}(f, T) = \lim_{d(T)\to 0} \underline{\underline{S}}(f, T) = I$$

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T,\ d(T) < \delta : \overline{\overline{s}}(f, T) \geq I - \varepsilon \Rightarrow \sup_T \overline{\overline{s}}(f, T) = I_* \geq I$$

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T,\ d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(f, T) \leq I + \varepsilon \Rightarrow \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T) = I^* \leq I$$

   При этом известно, что $I_* \leq I \leq I^*$. Таким образом, $I_* = I = I^*$

2. (2) $\Rightarrow$ (4):

   $$\sup_T \underline{\underline{S}}(f, T) = \inf_T \overline{\overline{s}}(f, T)$$

   По свойству точных граней $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T_1, T_2$:

   $$0 \leq I - \overline{\overline{s}}(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - I < \frac{\varepsilon}{2}$$

   $$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - \overline{\overline{s}}(f, T_1) < \varepsilon$$

   Тогда если $T = T_1 \cup T_2$, то

   $$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \overline{\overline{s}}(f, T) \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - \overline{\overline{s}}(f, T_1) < \varepsilon$$

3. (4) $\Rightarrow$ (3):

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T_\varepsilon : \Omega(f, T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Пусть разбиение T_1 получено из разбиения T добавлением p разрезов. Тогда

   $$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \underline{\underline{S}}(f, T') \leq (M - m) \cdot d^{k-1} \cdot d(T) \cdot p$$

$$0 \le \Omega(f,T_1) \le \Omega(f,T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \le \Omega(f,T) - \Omega(f,T_1) = (\underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T)) - (\underline{\underline{S}}(f,T_1) - \overline{\overline{s}}(f,T_1)) =$$
$$= (\underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T_1)) - (\overline{\overline{s}}(f,T_1) - \overline{\overline{s}}(f,T)) \le 2(M-m)\cdot d^{k-1}\cdot d(T)\cdot p \overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

(1): при условии что мы берем

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(M-m)\cdot d^{k-1}\cdot p} > 0$$

Итак при $d(T) < \delta$:

$$\Omega(f,T) = (\Omega(f,T) - \Omega(f,T_1)) + \Omega(f,T_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. (3) $\Rightarrow$ (1):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall T,\ d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T) < \varepsilon$$

Отсюда следует что выполнено условие (2): $I_* = I^*$, а это означает, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le I \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Также известно, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \sigma(f,T,H) \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

объединяя эти два факта, получим, что

$$|I - \sigma(f,T,H)| \le \underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T) < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть Π — замкнутый брус в $\mathbb{R}^k$, $f \in \mathcal{C}(\Pi)$. Тогда $f \in \mathcal{R}(\Pi)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{C}(\Pi) \Rightarrow f$ - равномерно непрерывна на Π ($f \in \mathcal{UC}(f)$):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall x_1, x_2,\ \rho(x_1,x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2|\Pi|}$$

Хотим показать, что

$$\Omega(f,T) = \sum_i \omega_i \cdot |\delta_i| < \varepsilon$$

При этом

$$\omega_i = \sup_{x_1\in\Delta_i} f(x_1) - \inf_{x_2\in\Delta_i} f(x_2) \le \frac{\varepsilon}{2|\Pi|}$$

таким образом

$$\Omega(f,T) \le \frac{\varepsilon}{2|\Pi|}\sum_i |\Delta_i| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

3 Лекция 3

3.1 Мера Жордана в $\mathbb{R}^k$

Определение. Выберем семейство элементарных множеств Π_i. Тогда семейство множеств вида $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i$, замкнутое относительно пересечения и симметрической разности называется кольцом множеств.

Определение. Пусть Φ – ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$. Тогда

1. внешней мерой Жордана называется число

$$\mu^*(\Phi) = \inf\{\mu(P) : P \text{ — элементарное множество, такое, что } \Phi \subset P\}$$

2. внутренней мерой Жордана называется число

$$\mu_*(\Phi) = \sup\{\mu(Q) : Q \text{ — элементарное множество, такое, что } Q \subset \Phi\}$$

3. Если $\mu^*(\Phi) = \mu_*(\Phi)$, то назовем число

$$\mu(\Phi) = \mu^*(\Phi) = \mu_*(\Phi)$$

мерой Жордана, а Φ измеримым по Жордану.

4. Если Π_i — элементарное множество, то по определению положим

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\Pi_i)$$

Определение. Функция

$$\chi_i = \Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Phi, \\ 0, & x \notin \Phi \end{cases}$$

называется индикатором множества Φ.

Теорема. Множество Φ измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ по любому брусу Π такому, что $\Phi \subseteq \Pi$ существует интеграл от χ_Φ по Π. При этом

$$\mu(\Phi) = \overbrace{\int \cdots \int_{\Pi}}^{k} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$: Пусть $\mu_*(\Phi) = \mu^*(\Phi) = \mu(\Phi)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon,\ Q_\varepsilon,\ P_\varepsilon > \Phi > Q_\varepsilon$:

$$\mu(P_\varepsilon) < \mu(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2},\quad \mu(Q_\varepsilon) > \mu(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P_\varepsilon = \bigsqcup_{i=1}^{n} \Pi_i$$

можно считать, что P_ε лежат внутри бруса Π, если это не так, то, не увеличив оценку, заменим P_ε на

$$\widehat{P}_\varepsilon = \bigsqcup_{i=1}^{n} (\Pi_i \cap \Pi)$$

$$P_\varepsilon = \bigsqcup_{i} \Pi_i,\ Q_\varepsilon = \bigsqcup_{j} \Pi'_j$$

продолжив все грани Π_i и Π'_j, получим разбиение T бруса Π, при этом поскольку

$$\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T) = \sum_p \inf_{x \in \Delta p} \chi_\Phi(x)|\Delta p|,\quad \underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T) = \sum_p \sup_{x \in \Delta p} \chi_\Phi(x)|\Delta p|$$

то $\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T)$ состоит из элементарных множеств, которые полностью содержатся в Φ, а $\underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T)$ из элементарных множеств, которые пересекаются с Φ хотя бы по одной точке. Значит

$$\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T) \geq \mu(Q_\varepsilon),\quad \underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T) \leq \mu(P_\varepsilon)$$

таким образом

$$\Omega(\chi_\Phi, T) = \underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T) - \overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T) \leq \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

значит существует

$$I = \overbrace{\int \cdots \int}^{k}_{\Pi} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\ dx_1 \ldots dx_k$$

$$\mu(Q_\varepsilon) \leq \overline{\overline{s}}(\chi_\varphi, T) \leq I \leq \underline{\underline{S}}(\chi_\varphi, T) \leq \mu(P_\varepsilon)$$

итак $\forall \varepsilon > 0$

$$|I - \mu(\Phi)| \leq \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

значит

$$I = \mu(\Phi)$$

($\Leftarrow$): Пусть существует

$$I = \overbrace{\int\limits_{\Pi} \cdots \int}^{k} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\ dx_1 \ldots dx_k$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение T такое, что

$$\Omega(\chi_\Phi, T) = \sum_p (\sup_{\Delta p} \chi_\Phi - \inf_{\Delta p} \chi_\Phi) \cdot |\Delta p| < \varepsilon \qquad (*)$$

Заметим, что Δp делятся на группы:

1. $\sup \chi_\Phi = \inf \chi_\Phi = 1$ — находится внутри
2. $\sup \chi_\Phi = 1,\ \inf \chi_\Phi = 0$ — содержит границу
3. $\sup \chi_\Phi = \inf \chi_\Phi = 0$ — находится снаружи

Определим Q_ε как объединение брусов из первой группы, а P_ε как объединение брусов из первой и второй группы. Заметим, что $\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T)$ это в является объединением брусов из первой группы, а $\underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T)$ объединением ячеек из первой и второй группы. Значит

$$\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T) = \mu(Q_\varepsilon), \quad \underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T) = \mu(P_\varepsilon) \qquad (*)$$

Таким образом

$$\Omega(\chi_\Phi, T) = \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon)$$

$$\mu^*(\Phi) - \mu_*(\Phi) \le \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

Известно, что

$$\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T) \le I \le \underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T)$$

$$\mu(Q_\varepsilon) \le \mu(\Phi) \le \mu(P_\varepsilon)$$

комбинируя эти результаты и используя соотношения $(*)$, получим

$$|I - \mu(\Phi)| \le \Omega(\chi_\Phi, T) < \varepsilon$$

$\square$

Следствие. Пусть Φ измеримо по Жордану и $\Phi \subset \Pi_1,\ \Phi \subset \Pi_2$. Тогда

$$\overbrace{\int\limits_{\Pi_1} \cdots \int}^{k} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\ dx_1 \ldots dx_k = \overbrace{\int\limits_{\Pi_2} \cdots \int}^{k} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\ dx_1 \ldots dx_k$$

3.2 Первое доказательство критерия измеримости по Жордану

Теорема (Критерий измеримости по Жордану)**.**
Следующие условия эквивалентны:

1. Φ измеримо по Жордану
2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ элементарные множества $P_\varepsilon, Q_\varepsilon:$ $Q_\varepsilon \subset \Phi \subset P_\varepsilon$ такие, что
$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$
3. $\mu(\partial\Phi) = 0$

Доказательство. Докажем по схеме (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)

1. (1) $\Rightarrow$ (2):
Пусть Φ измеримо по Жордану. Тогда существует интеграл
$$\overbrace{\int \cdots \int}^{k}_{\Pi} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$
Во второй части доказательства предыдуей теоремы было показано, что
$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$
2. (2) $\Rightarrow$ (3):
Пусть
$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$
Заметим, что $P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon$ является элементарным множеством. Тогда
$$\partial\Phi \subset \overline{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon}$$
при этом
$$\mu\left(\overline{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon}\right) = \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$
3. (3) $\Rightarrow$ (1):
Пусть $\mu(\partial\Phi) = 0$. Тогда существует элементарное множество R_ε, содержащее $\partial\Phi$ и такое, что $\mu(R_\varepsilon) < \varepsilon$. Продолжим грани брусов в его составе и получим разбиение T бруса Π, который содержит Φ. Поскольку
$$\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T) = \sum_p \inf_{x \in \Delta p} \chi_\Phi(x)|\Delta p|, \quad \underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T) = \sum_p \sup_{x \in \Delta p} \chi_\Phi(x)|\Delta p|$$

то $\overline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T)$ состоит из элементарных множеств, которые полностью содержатся в Φ, а $\underline{\underline{S}}(\chi_\Phi, T)$ из элементарных множеств, которые пересекаются с Φ хотя бы по одной точке. Отсюда понятно, что

$$\Omega(\chi_\Phi, T) \leq \mu(R_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит, по предыдущей теореме Φ измеримо по Жордану.

$\square$

Пример (Неизмеримого по Жордану множества)**.**
Пусть $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Заметим, что $(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k \subset ([0,1])^k$ и
$\partial(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k = ([0,1])^k$. Таким образом $\mu(\partial(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k) = 1 \neq 0$, значит, $(Q_{[0,1]})^k$ неизмеримо по Жордану.

Пример (Ковер Серпинского)**.**
Появится позже.

Пример. Тут еще был какой-то пример.

4 Лекция 4

Напомним, что

$$\mu_*(\Phi) = \sup\{ \sum_{i=1}^{n} |\Pi_i| : \bigsqcup_{i=1}^{n} \Pi_i \subset \Phi \}$$

$$\mu^*(\Phi) = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} |\Pi_i| : \Phi \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} \Pi_i \}$$

Далее, если это требуется, будем обозначать замкнутый брус как

$$\overline{\Pi_i} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$$

и открытый брус как

$$\Pi_i^o = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$$

4.1 Второе доказательство критерия измеримости по Жордану

Докажем теорему из предыдущей лекции другим, не использующим интегралы, способом.

Теорема (Критерий измеримости по Жордану).
Φ измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ существуют элементарные $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ такие, что

1. $Q_\varepsilon \subset \Phi \subset P_\varepsilon$
2. $\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство.

($\Rightarrow$): Пусть $\mu^*(\Phi) = \mu_*(\Phi)$. Тогда, по свойствам точных граней, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ такие, что $\Phi \subset P_\varepsilon, Q_\varepsilon \subset \Phi$:

$$\mu(P_\varepsilon) < \mu_*(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(Q_\varepsilon) > \mu^*(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Вычитая из первого неравенства второе, получим

$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$): Знаем, что

$$\mu(P_\varepsilon) \geq \mu^*(\Phi) \geq \mu_*(\Phi) \geq \mu(Q_\varepsilon)$$

отсюда

$$\varepsilon > \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) \geq \mu^*(\Phi) - \mu_*(\Phi) \geq 0$$

таким образом $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mu^*(\Phi) - \mu_*(\Phi) < \varepsilon$$

$\square$

Теорема (Критерий измеримости по Жордану).
Φ измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \mu^*(\partial\Phi) = 0$

Доказательство.

($\Rightarrow$): Ипользуем предыдущую теорему: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon, Q_\varepsilon,\ Q_\varepsilon \subset \Phi \subset P_\varepsilon$:

$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

Возьмем $x \in \partial\Phi$. Тогда в любой окрестности точки x содержатся точки из Φ и из $\mathbb{R}^k \setminus \Phi$. Заметим, что

$$x \notin \overline{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon^o} \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin \overline{P_\varepsilon} \Rightarrow x \notin \overline{\Phi} \\ x \in Q_\varepsilon^o \Rightarrow x \in \Phi^o \end{array}\right.$$

Итак, любая граничная точка обязана принадлежать этому замыканию, следовательно

$$\partial\Phi \subset \overline{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon^o}$$

Поскольку P_ε и Q_ε^o — элементарные множества, то

$$P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon^o = \bigsqcup_i \Pi_i$$

внутренние точки Π_i лежат и в P_ε, но не лежат в Q_ε^o

$$\mu(P_\varepsilon) = \mu(P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon) + \mu(Q_\varepsilon) \leq \mu(P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon^o) + \mu(Q_\varepsilon)$$

отсюда

$$\mu(P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon^o) \leq \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$): Пусть $\mu^*(\partial\Phi) = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0$ существуют элементарные T_ε такие, что $\partial\Phi \subset T_\varepsilon$ и $\mu(T_\varepsilon) < \varepsilon$. Возьмем в качестве Q_ε

$$Q_\varepsilon = \bigsqcup_i \Pi_i$$

Тогда в качестве P_ε подойдут $P_\varepsilon = T_\varepsilon \cup Q_\varepsilon$. Таким образом

$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) = \mu(Q_\varepsilon \cup T_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) \leq \mu(T_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\square$

4.2 Свойства меры Жордана на измеримых множествах

Утверждение. Семейство измеримых по Жордану множеств образует кольцо множеств.

Утверждение. На кольце измеримых по Жордану множеств, μ является конечно-аддитивной мерой.

Утверждение. Пусть $\mathrm{Isom} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — отображение, которое прямые, параллельные осям координат переводит в прямые, параллельные осям координат. Тогда

$$\mu(\Phi) = \mu(\mathrm{Isom}(\Phi))$$

Утверждение. $\mu(\Phi) = 0 \Leftrightarrow$ мера Лебега Φ равна нулю.

Определение. Пусть Φ — измеримо по Жордану, а f определена на Φ, Π — произвольный брус, содержащий Φ. Тогда

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{k}_{\Phi} \chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = \overbrace{\int\cdots\int}^{k}_{\Pi} f(x_1, \ldots, x_k)\chi_\Phi(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$