

# Математический анализ-1

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

8 января 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа

tg: @fourkenz

# Содержание

<b>1</b>	<b>Элементы теории множеств</b>	<b>4</b>
1.1	Условности и обозначения . . . . .	4
1.2	Операции над множествами . . . . .	5
1.3	Декартово произведение множеств . . . . .	5
1.4	Отображения . . . . .	5
1.5	Правила де Моргана . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Вещественные числа</b>	<b>7</b>
2.1	Натуральные числа. Аксиоматика Пеано . . . . .	7
2.2	Отношение порядка и принцип наименьшего элемента . . . . .	7
2.3	Арифметические операции . . . . .	8
2.4	Целые числа . . . . .	9
2.5	Рациональные числа . . . . .	9
2.6	Упорядоченные и архимедовы поля . . . . .	10
2.7	Действительные числа. Аксиома полноты . . . . .	11
2.8	Модели действительных чисел . . . . .	11
2.9	Принципы полноты . . . . .	13
2.10	Отношение эквивалентности. Равномощные множества . . . . .	16
2.11	Теорема Кантора и аксиома выбора . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Топология вещественной прямой</b>	<b>20</b>
3.1	Окрестность точки. Классификация точек относительно подмножеств действительных чисел . . . . .	20
3.2	Открытые и замкнутые множества . . . . .	21
3.3	Компакты . . . . .	23
3.4	Теорема Больцано-Вейерштрасса . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Числовые последовательности</b>	<b>25</b>
4.1	Предел последовательности . . . . .	25
4.2	О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности . . . . .	26
4.3	Арифметические свойства сходящихся последовательностей . . . . .	28
4.4	Монотонные последовательности . . . . .	29
4.5	Неравенство Бернулли и Бином Ньютона . . . . .	29
4.6	Число $e$ . . . . .	30

4.7	Сходимость последовательностей и частичные пределы . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Предел функции</b>	<b>33</b>
5.1	Определение предела по Коши и по Гейне . . . . .	33
5.2	Простейшие свойства предела функции . . . . .	35
5.3	Предел по множеству. Односторонние пределы . . . . .	35
5.4	О-символика . . . . .	36
5.5	Арифметические свойства пределов функций и предельные пе- реходы в неравенствах . . . . .	38
5.6	Монотонные функции . . . . .	39
5.7	Критерий Коши . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Непрерывные функции</b>	<b>41</b>
6.1	Локальные свойства непрерывных функций . . . . .	41
6.2	Глобальные свойства непрерывных функций . . . . .	41
6.3	Точки разрыва функции . . . . .	43
6.4	Равномерная непрерывность . . . . .	43
6.5	Элементарные функции . . . . .	44
6.6	Замечательные пределы . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Дифференциальное исчисление функций одной переменной</b>	<b>48</b>
7.1	Производная функции . . . . .	48
7.2	Дифференцируемые функции . . . . .	50
7.3	Производные элементарных функций . . . . .	51
7.4	Касательная. Геометрический смысл первого дифференциала . .	52
7.5	Производные и дифференциалы старших порядков . . . . .	53
7.6	Свойства дифференцируемых функций . . . . .	54
7.7	Формула Лагранжа. Геометрический смысл и приложения . . . .	55
7.8	Правила Лопиталя . . . . .	58
7.9	Формулы Тейлора . . . . .	61
7.10	Экстремум функции . . . . .	64
7.11	Выпуклые функции . . . . .	65

# 1 Элементы теории множеств

## 1.1 Условности и обозначения

**Определение.** Кванторами будем называть символы, заменяющие слова в выражениях.

**Замечание.** Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- $\forall$  - квантор всеобщности
- $\exists$  - квантор существования
- $!$  - квантор единственности
- Запись  $A \Rightarrow B$  обозначает, что из высказывания  $A$ , следует высказывание  $B$ .
- Запись  $A \Leftrightarrow B$  обозначает, что высказывание  $A$  равносильно высказыванию  $B$ .
- Запись  $a \in A$  означает, что  $a$  является элементом множества  $A$ , отрицанием такой записи будет  $a \notin A$
- Если  $x$  - объект, а  $P$  - свойство, то запись  $\{x : P(x)\}$  означает класс всех объектов обладающих свойством  $P$ .

**Определение.** Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается  $\emptyset$ .

**Определение.** Множество  $A'$  является подмножеством множества  $A$ , если  $\forall a : a \in A' \Rightarrow a \in A$ . Если  $A'$  - подмножество  $A$ , то пишут  $A' \subset A$ .

**Определение.** Для любого множества  $A$  выполнено:

1.  $\emptyset \subset A$ .
2.  $A \subset A$ .

**Определение.** Если  $A \subset B$  и  $A \neq B$ , то  $A$  называется собственным подмножеством множества  $B$ .

## 1.2 Операции над множествами

**Определение.** Множество  $C = A \cup B$  называется объединением множеств  $A$  и  $B$ , если  $\forall a : (a \in A \Rightarrow a \in C)$  и  $\forall b : (b \in B \Rightarrow b \in C)$ , а также  $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A \text{ или } c \in B)$ .

**Определение.** Множество  $C = A \cap B$  называется пересечением множеств  $A$  и  $B$ , если  $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A \text{ и } c \in B)$ , а также  $\forall c : (c \in A \text{ и } c \in B) \Rightarrow c \in C$ .

**Определение.** Множество  $C = A \setminus B$  называется разностью множеств  $A$  и  $B$ , если  $\forall c : (c \in A \text{ и } c \notin B) \Rightarrow c \in C$ , а также  $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A \text{ и } c \notin B)$ .

**Утверждение.**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

*Доказательство.*  $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A \text{ или } a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A \text{ или } (a \in B \text{ и } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ или } a \in B) \text{ и } (a \in A \text{ или } a \in C)$ .  $\square$

**Утверждение.**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

*Доказательство.*  $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } a \in (B \cup C) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \in B \text{ или } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \in B) \text{ или } (a \in A \text{ и } a \in C)$ .  $\square$

## 1.3 Декартово произведение множеств

**Определение.** Множество  $A$  называется одноэлементным, если  $\exists a \in A$  такое, что  $A \setminus \{a\} = \emptyset$ .

**Определение.** Множество  $A$  называется двухэлементным, если  $\exists a \in A$  такое, что  $A \setminus \{a\}$  - одноэлементное.

**Определение.** Пусть  $x \in X, y \in Y$ . Упорядоченной парой называется двухэлементное множество  $\{x, \{x, y\}\}$ , упорядоченную пару обозначают  $(x, y)$ .

**Определение.** Множество всех упорядоченных пар  $X \times Y = \{(x, y)\}$ , где  $x \in X$  и  $y \in Y$  называется декартовым произведением множеств  $X$  и  $Y$ .

## 1.4 Отображения

**Определение.** Пусть  $X, Y$  - множества. Подмножество  $f \subset X \times Y$  такое, что  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : (y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2)$  называется отображением из  $X$  в  $Y$ , и обозначается  $f : X \rightarrow Y$ .

**Замечание.** Запись  $(x, y) \in f$  часто заменяют на  $y = f(x)$ .

Далее пусть  $f : X \rightarrow Y$ .

**Определение.** Множество  $D_f := \{x : \exists (x, y) \in f\}$  называется областью определения функции  $f$ .

**Определение.** Множество  $R_f := \{y : \exists (x, y) \in f\}$  называется областью значений функции  $f$ .

**Определение.**  $f$  - инъекция  $\Leftrightarrow \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2)$ .

**Определение.**  $f$  - сюръекция  $\Leftrightarrow Y = R_f$

**Замечание.** Обычно используют определение  $f$  - сюръекция  $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$ . Определения, очевидно, эквивалентны.

**Определение.**  $f$  - биекция  $\Leftrightarrow f$  - инъекция и  $f$  - сюръекция.

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X_1 \subset X$ . Множество  $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} = f|_{X_1}$  называется ограничением  $f$  на  $X_1$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X_1 \subset X$ . Множество  $f(X_1) = \{y \in Y : \exists x \in X_1 : (x, y) \in f\}$  называют образом множества  $X_1$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $Y_1 \subset Y$ . Множество  $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X : \exists y \in Y_1 : (x, y) \in f\}$  называют полным прообразом множества  $Y_1$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Если  $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$  - одноэлементное множество, то подмножество  $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$  является отображением и называется обратным отображением к  $f$ . Если у отображения  $f$  существует обратное отображение  $f^{-1}$ , то оно называется обратимым.

**Утверждение.**  $f$  - обратимое  $\Leftrightarrow f$  - биекция.

**Замечание.** Иногда  $f : X \rightarrow Y$  записывают в виде  $y_x$  и называют индексацией  $y$  элементами  $x$ .

## 1.5 Правила де Моргана

**Утверждение.**  $\bigcup_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) = A \setminus (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$ .

*Доказательство.*  $a \in \bigcup_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_1}) \text{ или } \dots \text{ или } (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \notin A_{\alpha_1} \text{ и } \dots \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$ .  $\square$

**Утверждение.**  $\bigcap_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) = A \setminus (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})$ .

*Доказательство.*  $a \in \bigcap_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_1}) \text{ и } \dots \text{ и } (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \notin A_{\alpha_1} \text{ или } \dots \text{ или } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})$ .  $\square$

## 2 Вещественные числа

### 2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

**Определение.** (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве  $\mathbb{N}$   $\forall n \in \mathbb{N}$  существует единственный элемент, называемый следующим и обозначаемый как  $S(n)$ .
2. В множестве  $\mathbb{N}$   $\forall n \in \mathbb{N}$  существует не более одного элемента, для которого  $n$  - следующий.
3. В множестве  $\mathbb{N}$  существует единственный элемент  $\mathbb{N}$ , не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается  $1$  и называется единицей.
4. (Аксиома индукции) Пусть  $M \subset \mathbb{N}$  такое, что  $1 \in M$  и  $\forall m \in M : S(m) \in M$ . Тогда  $M = \mathbb{N}$ .

Множество, удовлетворяющее этим аксиомам, называется множеством натуральных чисел и обозначается  $\mathbb{N}$ .

**Определение.** Рассмотрим множество  $X$ . Если для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  существует биекция  $\varphi : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , то  $X$  называется  $n$ -элементным, или говорят, что количество элементов в  $X$  равно  $n$ . Тот факт, что множество  $X$  -  $n$ -элементное, обозначается как  $|X| = n$  или  $\text{card}X = n$ .

**Замечание.** По определению считаем, что  $\text{card}(\emptyset) = 0$ .

**Определение.** Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множества называются бесконечными.

### 2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

**Определение.**  $R \subset X \times Y$  называется отношением между элементами  $X$  и  $Y$ . Обозначают  $xRy$ , если  $(x, y) \in R$ .

**Определение.** Отношение  $R$  называется отношением (линейного) порядка на множестве  $X$ , если  $\forall x, y, z \in X$  выполнено:

1.  $xRy$  или  $yRx$ .

$$2. (xRy \text{ и } yRx) \Rightarrow x = y.$$

$$3. (xRy \text{ и } yRz) \Rightarrow xRz.$$

Такое отношение обозначают  $\leq$ .

**Теорема.** Существует единственное отношение порядка на  $\mathbb{N}$  такое, что  $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Теорема.** (Принцип наименьшего элемента)

$M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$  имеет наименьший элемент, т.е.  $\exists n_{\min} \in M, \forall n \in M : n_{\min} \leq n$ .

*Доказательство.* Предположим, что в  $M$  нет минимального элемента.

База: если  $1 \in M$ , то  $n_{\min} = 1 \Rightarrow 1 \notin M \Rightarrow 1 \in \mathbb{N} \setminus M$ .

Шаг:  $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N} \setminus M$ , тогда по аксиоме индукции  $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \emptyset$  - противоречие. □

## 2.3 Арифметические операции

**Определение.** Рассмотрим множества  $A$  и  $B, \text{card}(A) = n, \text{card}(B) = k, n, k \in \mathbb{N}$ . Пусть  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда число  $\text{card}(A \cup B)$  называется суммой  $n$  и  $k$  и обозначается  $\text{card}(A \cup B) = n + k$ .

**Замечание.** Естественно выполняется  $n + k = k + n$  (коммутативность) и  $(n + k) + m = n + (k + m)$  (ассоциативность).

**Замечание.**  $n + 0 = 0 + n = n$ , т.к.  $\text{card} A = \text{card}(A \cup \emptyset)$ .

**Замечание.** По определению существуют биекции  $A \leftrightarrow \{1, \dots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \dots, k\}$ .

Возьмем  $\text{card}(A \cup B) = \{1, \dots, n\} \cup \underbrace{\{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots))\}}_k$ ,

(где  $\{1, \dots, k\} \leftrightarrow \underbrace{\{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots))\}}_k$ )

Из тех же соображений получаем, что  $S(n) = n + 1$ .

**Определение.**  $n, k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\sum_{i=1}^k n = nk$  называется произведением  $n$  на  $k$ .

**Замечание.** Выполнены:

- $nk = kn$  (коммутативность)
- $n(kt) = (nk)t$  (ассоциативность)



- $k(n + m) = kn + km$  (дистрибутивность)
- Если  $k \leq n$ , то  $k + m \leq n + m$  и если  $k \leq m$ , то  $kn \leq mn$

**Определение.** Если  $n + k = m$ , то  $n = m - k$  называется разностью  $m$  и  $k$ ,  $k = m - n$  называется разностью  $m$  и  $n$ .

**Замечание.**  $m - 0 = m$ ,  $m + 0 = m$ ,  $m - m = 0$ .

**Определение.**  $nk = m$ ,  $\frac{m}{n} = k$ ,  $\frac{m}{k} = n$ .

## 2.4 Целые числа

**Определение.** Введем набор символов  $-\mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$ . Множество символов  $-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$  называется целыми числами и обозначаются  $\mathbb{Z}$ . В нем принимаем выполненными следующие свойства:

1.  $k + (-n) = \begin{cases} k - n, & \text{если } k \geq n, \\ -(n - k), & \text{если } k < n. \end{cases}$   
 $(-k) + (-n) = -(k + n)$
2.  $k \cdot 0 = (-k) \cdot 0 = 0$ ,  
 $(-k) \cdot n = (-kn)$ ,  
 $(-k)(-n) = kn$ .
3.  $(\pm k)((\pm n) + (\pm m)) = (\pm k)(\pm n) + (\pm k)(\pm m)$ .
4.  $\forall k : (-k) \leq 0$ ,  
 $(-k) \leq (-n)$ , если  $n \leq k$ .
5.  $\forall (\pm k), (\pm n), (\pm m) \in \mathbb{Z}$ , если  $(\pm k) \leq (\pm n)$ , то  $(\pm k) + (\pm m) \leq (\pm n) + (\pm m)$ .
6.  $\forall (\pm n), (\pm k) \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ , если  $(\pm n) \leq (\pm k)$ , то  $(\pm n)m \leq (\pm k)m$ .

Далее пишем  $-k$  вместо  $(-k)$ .

$\forall k, n \in \mathbb{Z} \exists (k - n) = k + (-n)$ .

## 2.5 Рациональные числа

**Определение.** Множество  $\mathbb{Q} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ , элементы которого обозначают  $\frac{m}{n}$  называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

а также введено отношение порядка:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq \leq pn$$

Свойства операций  $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ :

1.  $a + b = b + a$
2.  $a + (b + c) = (a + b) + c$
3.  $\exists! 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$
4.  $\forall a \in \mathbb{Q} \exists! (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$
5.  $ab = ba$
6.  $a(bc) = (ab)c$
7.  $\exists! 1 \in \mathbb{Q} \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8.  $\forall a \neq 0 \exists! a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
9.  $a(b + c) = ab + ac$
10.  $\forall a, b \in \mathbb{Q} a \leq b$  или  $b \leq a$
11.  $a \leq b$  и  $b \leq a \Rightarrow a = b$
12.  $a \leq b$  и  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
13.  $\forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
14.  $\forall c \in \mathbb{Q} : c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

## 2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

**Определение.** Множество  $X$  с операциями  $(\cdot, +)$  и отношением порядка  $\leq$  называется упорядоченным полем.

**Замечание.**  $\mathbb{Q}$  - упорядоченное поле.

**Определение.** Упорядоченное поле  $X$  называется архимедовым, если

15.  $\forall a \in X : \exists n \in \mathbb{N} : a \leq n$ .

**Замечание.**  $\mathbb{Q}$  - архимедово поле.

**Замечание.**  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$ .

**Замечание.**  $\forall m \in \mathbb{Z}$  число  $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$  можно отождествить с  $m$ .

## 2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

**Определение.** Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством действительных чисел, если  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

**Аксиома.** (Аксиома полноты)

16.  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$  таких, что  $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ .

**Пример.** Аксиома полноты не выполняется в  $\mathbb{Q}$ .

$A = \{a \leq 0 \text{ или } a > 0 : a^2 < 2\}, B = \{b > a : b^2 > 2\},$

но не существует  $\frac{m}{n}$  такого, что  $\frac{m^2}{n^2} = 2$

## 2.8 Модели действительных чисел

### Модель бесконечных десятичных дробей

**Определение.** Отображение  $\{a_n\} : \mathbb{N} \rightarrow X$  называется последовательностью элементов  $X$ .

**Определение.** Выражение вида  $\pm a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  называется бесконечной десятичной дробью, если  $a_0 \in \mathbb{N}$  или  $a_0 = 0$  и  $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ .

**Определение.** Введем отношение порядка  $\leq$  на множестве всех бесконечных десятичных дробей следующим образом:

1. Если  $a_0 \leq 0, b_0 > 0$ , то  $a \leq b$ .

2. Если  $a_0, b_0 \geq 0$ , то  $a \leq b$

- если  $a_0 < b_0$  или  $a_0 = b_0, a_1 < b_1$  или  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 < b_2$ ,  
или ... или  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n \dots$
- если  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ , а также  $a_n \neq 9, b_n = a_n + 1$ .  
 $a_{n+k} = 9, b_{n+k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ , т.е  $a = \overline{a_0 a_1 \dots a_n(9)}$ , а  $b = \overline{b_0 b_1 \dots b_n(0)}$ .  
(в числе  $a$  начиная с  $a_{n+1}$  все  $a_i$  равны 9, а в числе  $b$  начиная с  $b_{n+1}$  все  $b_i$  равны 0), то  $a = b$ .

3. Если  $a_0, b_0 < 0$ , то  $a \leq b$ , если  $-b \leq -a$  (случай 3 сведен к случаю 2)

**Теорема.** Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка ( $\leq$ ) удовлетворяет аксиоме полноты.

*Доказательство.* Пусть  $A, B \subset \{\text{множество бесконечных десятичных дробей}\}$  и  $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ .

1.  $a < 0, b \geq 0$ , тогда  $c = 0$ .

2.  $a \geq 0, b \geq 0$

Пусть

$$\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \cdots \in B\},$$

$$\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \cdots \in B\},$$

$$\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0} \overline{b_1} b_2 \cdots \in B\},$$

$\vdots$

Возьмем  $\overline{b} = \overline{b_0 b_1 b_2 \dots b_n \dots} \in B$ , тогда

$$\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \overline{b} \leq b.$$

3.  $a < 0, b < 0$  строим число по аналогии с пунктом 2.

□

## Дедекиндовы сечения

**Определение.** Пусть  $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{Q}, \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$  и в  $B$  не существует минимального элемента, тогда  $(A, B)$  - пара сечений  $\mathbb{Q}$ .

**Теорема.** На множестве всех пар сечений  $\{(A, B)\}$  можно ввести операции  $(+), (\cdot)$  и отношение  $(\leq)$ , так что будут выполняться (1) – (16).

*Доказательство.* Без доказательства.

□

## Геометрическая модель числовой прямой

Выбираем точку, называем ее 0



затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



затем вводим сложение и получаем 2, 3, 4, и т.д. (натуральный ряд)



затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее  $1'$  и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через  $n'$  и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через  $1'$  проходит через  $\frac{1}{n}$  (по теореме Фаллеса)



таким образом складывая  $m$  раз  $\frac{1}{n}$ , получим любое рациональное число  $\frac{m}{n}$ .

Построим бесконечную десятичную дробь, например  $0,37152\dots$

Разобьем отрезок:



$0,37152\dots$  находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:



$0,37152\dots$  находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.

Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняются (1)-(16).

## 2.9 Принципы полноты

**Определение.**

- Элемент  $a \in \mathbb{R}$  называется максимальным элементом множества  $A$  ( $\max A \subset \mathbb{R}$ ),  $A \neq \emptyset$ , если  $\forall a' \in A : a \geq a'$  и  $a \in A$ .
- Элемент  $a \in \mathbb{R}$  называется минимальным элементом множества  $A$  ( $\min A \subset \mathbb{R}$ ),  $A \neq \emptyset$ , если  $\forall a' \in A : a \leq a'$  и  $a \in A$ .

**Определение.**

- Элемент  $m \in \mathbb{R}$  называется верхней гранью  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , если  $\forall a \in A : a \leq m$ .
- Элемент  $m \in \mathbb{R}$  называется нижней гранью  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , если  $\forall a \in A : a \geq m$ .

**Определение.**

- Множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  называется ограниченным сверху, если у  $A$  существует верхняя грань.
- Множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  называется ограниченным снизу, если у  $A$  существует нижняя грань.
- Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным, если  $A$  ограничено и сверху и снизу.

**Определение.**

- Пусть множество  $A \subset \mathbb{R}$  ограничено сверху,  $B$  - множество верхних граней  $A$ . Элемент  $c = \min B$  называется точной верхней гранью  $A$  и обозначается  $\sup A$ .
- Пусть множество  $A \subset \mathbb{R}$  ограничено снизу,  $B$  - множество нижних граней  $A$ . Элемент  $c = \max B$  называется точной нижней гранью  $A$  и обозначается  $\inf A$ .

**Теорема.** (Принцип полноты Вейерштрасса)

Для каждого ограниченного сверху или снизу множества  $A$  существует  $\sup A$  или  $\inf A$  соответственно.

*Доказательство.* Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)  $A$  - ограничено сверху,  $B$  - множество верхних граней. Значит  $\forall a \in A$  и  $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$  по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$ .  $\square$

**Лемма.** (Свойство точной грани)

Если у множества  $A \subset \mathbb{R}$  существует  $M = \sup A$  или  $m = \inf A$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a \in (M - \varepsilon, M)$  или  $a \in (m, m + \varepsilon)$  соответственно.

*Доказательство.* Докажем для верхней грани.  $M = \sup A \Rightarrow \forall a \in A : a \leq M$ . Поскольку  $M$  - минимальная из верхних граней, то  $\forall \varepsilon > 0 : \widetilde{M} = M - \varepsilon$  - не является верхней гранью. Тогда  $\exists a \in A : a > \widetilde{M} \Rightarrow a \in (M - \varepsilon, M)$ .  $\square$

**Определение.**  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$  рассмотрим следующие множества:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  - отрезок
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

**Определение.**  $\forall a \in \mathbb{R}$  функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

**Определение.** Для любого промежутка с концами  $a, b \in \mathbb{R}$  длиной называется число  $|b - a|$ .

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Говорят, что  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$  выполнено  $|b_n - a_n| < \varepsilon$ .

**Теорема.** (Принцип вложенных отрезков, принцип полноты Кантора)

Пусть последовательность  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  такова, что  $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$ . Если  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$  то  $c$  - единственная.

*Доказательство.*  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ , т.к

- если  $n < m$ , то  $a_n \leq a_m \leq b_m$ .
- если  $n > m$ , то  $a_n \leq b_n \leq b_m$ .

Значит для  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  : Рассмотрим множества  $A = \{a_n\}$  и  $B = \{b_n\}$ . По аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \forall n, m \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n, \forall n$ .

Пусть  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ , предположим, что  $\exists c_1$  и  $c_2 : c_1 \neq c_2$  - различные общие точки, значит  $|c_2 - c_1| > 0$ . Получаем, что  $0 < |c_2 - c_1| < |b_n - a_n|, \forall n$ , значит  $|c_2 - c_1| \rightarrow 0$  получаем противоречие.  $\square$

## 2.10 Отношение эквивалентности. Равномощные множества

**Определение.** Отношение  $\sim$  называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1.  $x \sim x$  (Рефлексивность)
2.  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$  (Симметричность)
3.  $x \sim y$  и  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$  (Транзитивность)

**Определение.** Множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

**Теорема.** Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

*Доказательство.* Пусть  $A, B, C$  - множества,  $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$  - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.
2. Для любой биекции  $\varphi : A \rightarrow B$  существует  $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ .
3.  $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ , то  $\psi \circ \varphi : A \rightarrow C$ .

□

**Замечание.** Если  $A$  равномощно  $B$  то иногда пишут  $A \sim B$  или  $|A| = |B|$ .

**Теорема.** Конечные множества равномощны  $\Leftrightarrow$  они содержат одинаковое количество элементов.

*Доказательство.*

- ( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\varphi : A \rightarrow \{1, \dots, n\}, \psi : B \rightarrow \{1, \dots, n\}$   
 $\Rightarrow \exists \psi^{-1} : \{1, \dots, n\} \rightarrow B$ . Тогда  $\varphi \circ \psi^{-1} : B \rightarrow A$  - искомая биекция.
- ( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\varphi : A \rightarrow B$  - биекция, если  $A = \emptyset$ , то  $B = \emptyset$ . Индукция по количеству элементов. База: пусть  $A = \{a\}$ , тогда  $\exists! b \in B : \varphi(a) = b$ . Пусть утверждение верно для случая когда  $A$  - это  $n$ -элементное множество. Теперь если  $A$  - это  $n + 1$ -элементное, то  $\exists \varphi : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 1\}$  - биекция. Значит  $\exists! a \in A$ , что  $\varphi(a) = n + 1$ . Тогда  $A \setminus \{a\}$  -  $n$ -элементное и  $\exists! b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$  -  $n$ -элементное  $\Rightarrow B$  -  $n + 1$ -элементное.

□

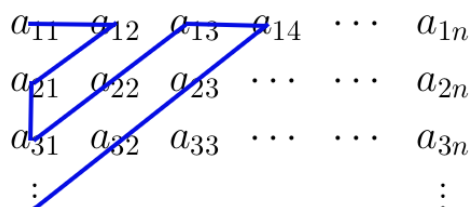


**Определение.** Множества, равномощные  $\mathbb{N}$  называются счетными.

**Определение.** Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

**Теорема.** Объединение не более чем счетного числа счетных множеств счетно.

*Доказательство.* Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:



□

**Следствие.** Объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств не более чем счетно.

**Примеры.**

1. Множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  счетно.
2. Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  счетно.
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами) счетно.

## 2.11 Теорема Кантора и аксиома выбора

**Теорема.** (Теорема Кантора)

Интервал  $(0, 1)$  несчетен.

*Доказательство.* <sup>1</sup> Докажем от противного. Предположим, что у нас получилось перечислить все элементы интервала  $(0, 1)$

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

$\vdots$

---

<sup>1</sup>Может немного отличаться от доказательства на лекциях

Теперь построим такую последовательность  $b$ , задающую число, которого нет в списке. Определим последовательность так:  $b_0 = 0$  и на  $i$ -й позиции  $b_i$  отличается от  $a_{ii}$ , например зададим ее так:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{если, } a_{ii} \neq 1, \\ 2, & \text{если, } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, построенное число  $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$  отличается от каждого из  $x_1, x_2, x_3 \dots$  на  $i$  позиции  $\Rightarrow$  оно не было пересчитано, получаем противоречие.  $\square$

**Следствие.** Действительных чисел несчетно.

*Доказательство.* <sup>2</sup> Достаточно показать, что  $\mathbb{R} \sim (0, 1)$ . Например функция  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что  $f(x) = \frac{2x-1}{4x-4x^2}$  задает нужную биекцию.  $\square$

**Определение.** Действительные числа не являющиеся алгебраическими называются трансцендентными.

**Определение.** Множества равномощные интервалу  $(0, 1)$  называются множествами мощности континуума.

**Теорема.** У любого множества мощность множества всех подмножеств строго больше чем мощность самого множества.

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Определение.** Для множеств  $A$  и  $B$  обозначим  $|A| \leq |B|$ , если  $\exists B' \subset B$  такое, что  $A \sim B'$ .

**Теорема.** Сравнение мощностей множеств  $|A| \leq |B|$  является отношением порядка.

1.  $\forall A, B : |A| \leq |B|$  или  $|B| \leq |A|$
2.  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$  (Теорема Кантора-Бернштейна)
3.  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Аксиома.** (Аксиома выбора)

Если существует семейство непустых множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу и составить из них другое множество.

---

<sup>2</sup>Не было на лекциях

**Утверждение.** Множество  $2^{\mathbb{N}}$  всех подмножеств  $\mathbb{N}$  равномощно интервалу  $(0,1)$  (множеству  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  бесконечных последовательностей нулей и единиц).

*Доказательство.* <sup>3</sup> Каждому  $A \subset \mathbb{N}$  ставим в соответствие характеристическую последовательность, которая принимает значения: единицу, если элемент лежит в подмножестве и ноль иначе  $\Rightarrow 2^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ . Поскольку каждое число из интервала  $(0,1)$  представляется как последовательность цифр  $0, a_1, a_2, a_3, \dots$  и каждую цифру можно представить в двоичной системе исчисления, то можно сделать вывод, что  $2^{\mathbb{N}} \sim (0,1)$ .  $\square$

**Теорема.** У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.

*Доказательство.* Выбираем элемент и сразу присваиваем ему номер. Продолжая это действие, построим счетное множество.  $\square$

**Теорема.** Пусть  $A$  - бесконечное,  $B$  - не более чем счетное  $\Rightarrow A \sim A \cup B$

*Доказательство.* Выделим из  $A$  счетное подмножество  $A'$ . Тогда  $A \sim (A \setminus A') \cup A'$ , поскольку объединение не более чем счётного числа не более чем счётных множеств не более чем счётно, то  $(A \setminus A') \cup A' \sim (A \setminus A') \cup (A' \cup B) \sim (A \cup B)$ .  $\square$

---

<sup>3</sup>Может отличаться от доказательства на лекциях

## 3 Топология вещественной прямой

### 3.1 Окрестность точки. Классификация точек относительно подмножеств действительных чисел

**Определение.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Множество  $B_\varepsilon(x)$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$ .

**Определение.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 : \mathring{B}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$ . Множество  $\mathring{B}_\varepsilon(x)$  называется проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$ .

**Определение.** Точка  $x \in A \subset \mathbb{R}$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если  $\exists B_\varepsilon(x) \subset A$ . Множество всех внутренних точек  $x \in A$  называется внутренностью множества  $A$ .

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R} \setminus A$  называется внешней точкой для множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $x$  - внутренняя точка для  $\mathbb{R} \setminus A$ . Множество всех внешних точек  $x \in \mathbb{R} \setminus A$  называется внешностью множества  $A$ .

**Определение.** Точка называется граничной для множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если она не является ни внешней ни внутренней для  $A$  (в любой ее окрестности есть как точки из  $A$  так точки из  $\mathbb{R} \setminus A$ ). Множество всех граничных точек называется границей множества  $A$  и обозначается  $\partial A$ .

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если в любой проколотой окрестности точки  $x$  бесконечно много точек  $A$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ . Множество всех предельных точек  $A$  обозначается  $A'$ .

**Определение.** Точка  $x \in A$  называется изолированной точкой  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \emptyset$ .

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется точкой прикосновения  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ .

**Утверждение.** Точки прикосновения множества  $A$  являются либо внутренними, либо граничными.

*Доказательство.* Точка прикосновения не может являться внешней точкой, поскольку в этом случае  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A$ , что противоречит с условием  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \Rightarrow$  она либо внутренняя либо граничная.  $\square$

**Утверждение.** Точки прикосновения являются либо предельными, либо изолированными.

*Доказательство.* Если  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ , то  $x$  - предельная. Если  $\exists \varepsilon > 0 : A \cap \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) = \emptyset$ , но по определению  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A \Rightarrow x$  - изолированная.  $\square$

**Определение.** (Множество Кантора)

Разбиваем отрезок  $[0, 1]$  на три части и выбрасываем середину, затем каждый из получившихся отрезков разбиваем на три части и выбрасываем середину, и т.д.

- Суммарная длина всех выброшенных интервалов равна 1.
- Концов отрезков счетное множество.
- Общее количество точек имеет мощность континуума.

## 3.2 Открытые и замкнутые множества

**Определение.** Множество называется открытым, если все его точки - внутренние.

**Пример.** Любой интервал - открытое множество

**Определение.** Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется замкнутым, если его дополнение  $\mathbb{R} \setminus A$  открыто.

**Пример.** Отрезок - замкнутое множество.

**Замечание.** По определению считаем, что  $\emptyset$  и  $\mathbb{R}$  и открыты и замкнуты одновременно.

**Теорема.** (Критерии замкнутости множества)

Следующие условия эквивалентны:

- (0)  $A \subset \mathbb{R}$  - замкнуто.
- (1)  $\partial A \subset A$ ,
- (2) Все точки прикосновения содержатся в  $A$ ,
- (3)  $A' \subset A$ .

*Доказательство.* Докажем по цепочке  $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (0)$ .

1.  $(0) \Rightarrow (1) : A$  - замкнуто  $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$  - открыто  $\Rightarrow \partial A \not\subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \partial A \subset A$ .

2. (1)  $\Rightarrow$  (2) : Все точки прикосновения являются граничными или внутренними. Поскольку  $\partial A \subset A$  то все точки прикосновения содержатся в  $A$ .
3. (2)  $\Rightarrow$  (3) : Если  $x$  - предельная, то  $x \in A$  или  $x$  - точка прикосновения. Поскольку все точки прикосновения содержатся в  $A$ , то и все предельные точки содержатся в  $A$ .
4. (3)  $\Rightarrow$  (0) :  $A' \subset A \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A : x \notin A' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A \exists \dot{B}_\varepsilon : \dot{B}_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$  (т.к  $x \notin A$ )  $\Rightarrow x$  - внешняя точка  $A$ ,  $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$  - открыто  $\Rightarrow A$  - замкнуто.

□

**Теорема.** Пусть  $A$  - множество индексов. Пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - открытые,  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - замкнутые. Тогда:

1.  $\bigcup_\alpha U_\alpha$  - открыто (объединение открытых множеств - открыто).
2.  $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  - открыто (конечное пересечение открытых множеств - открыто).
3.  $\bigcup_{i=1}^n X_{\alpha_i}$  - замкнуто (конечное объединение замкнутых множеств - замкнуто).
4.  $\bigcap_\alpha X_\alpha$  - замкнуто (пересечение замкнутых множеств - замкнуто).

*Доказательство.*

1. Пусть  $u \in \bigcup_\alpha U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : u \in U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists B(u) \in U_{\alpha_0} \Rightarrow B(u) \in \bigcup_\alpha U_\alpha \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha$  - открыто.
2. Пусть  $u \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \exists \varepsilon_i : B_{\varepsilon_i}(u) \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_i\} \Rightarrow B_{\varepsilon_0} \subset U_{\alpha_i} \forall i \Rightarrow B_{\varepsilon_0} \subset \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  - открыто.
3. Поскольку  $\bigcap_\alpha (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup_\alpha A_\alpha)$  (доказано ранее), то  $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n X_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i})$ . Так как  $X_{\alpha_i}$  - замкнуто, то  $\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i}$  - открыто. Тогда по пункту 2 получаем:  $\bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus X_{\alpha_i})$  - открыто  $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n X_{\alpha_i}$  - открыто  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n X_{\alpha_i}$  - замкнуто.

4. Поскольку  $\bigcup_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) = A \setminus (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$  (доказано ранее), то  $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha} X_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (\mathbb{R} \setminus X_{\alpha})$ . Так как  $X_{\alpha}$  - замкнуто, то  $\mathbb{R} \setminus X_{\alpha}$  - открыто. Тогда по пункту 1 получаем:  $\bigcup_{\alpha} (\mathbb{R} \setminus X_{\alpha})$  - открыто  $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\alpha} X_{\alpha}$  - открыто  $\Rightarrow \bigcap_{\alpha} X_{\alpha}$  - замкнуто.  $\square$

### Примеры.

$$1. \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1].$$

$$2. \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1).$$

**Теорема.** Если  $A$  - ограничено сверху или снизу и замкнуто, то существует  $\max A$  или  $\min A$  соответственно.

*Доказательство.* Докажем для ограниченного сверху. По принципу полноты Вейерштрасса  $\exists \alpha = \sup A$ . По свойству точной верхней грани:

$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in (\alpha - \varepsilon, \alpha] \Rightarrow \alpha$  - точка прикосновения  $\Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$ .  $\square$

## 3.3 Компакты

**Определение.** Говорят, что семейство  $\{A_{\alpha}\}_{\alpha}$  является покрытием множества  $B$ , если  $B \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$

**Определение.** Рассмотрим  $X \subset \mathbb{R}$ . Если для любого покрытия  $X$  открытыми множествами  $\{A_{\alpha}\}_{\alpha}$  существует  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  - конечное подпокрытие такое, что  $X \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$ , то  $X$  называется компактным множеством или компактом.

**Теорема.** Любой отрезок является компактом.

*Доказательство.* Пусть  $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha}$  - открытые и нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда  $[a, b] = [a_1, b_1]$  делим отрезок пополам и выбираем половину  $[a_2, b_2]$ , у которой нельзя выделить конечное подпокрытие и т.д. Получаем систему вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , у которых нельзя выделить конечное подпокрытие и длина стремится к нулю  $\Rightarrow \exists! c \in [a_n, b_n] \forall n \Rightarrow \exists \alpha_0 : c \in A_{\alpha_0}$ . Поскольку  $A_{\alpha_0}$  - открыто, то  $\exists B_{\varepsilon}(c) \subset A_{\alpha_0} \Rightarrow \exists n_{\alpha_0} : [a_{n_{\alpha_0}}, b_{n_{\alpha_0}}] \subset A_{\alpha_0}$  получаем противоречие.  $\square$

**Теорема.** (Лемма Гейне-Бореля)<sup>4</sup>

$A$  - компакт в  $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$  - замкнуто и ограничено.

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

<sup>4</sup>На самом деле, утверждение верно и для  $\mathbb{R}^n$

### 3.4 Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема.** (Больцано-Вейерштрасса)

Если  $A \subset \mathbb{R}$  - ограниченное и бесконечное множество, то в нем есть хотя бы одна предельная точка (т.е.  $A' \neq \emptyset$ ).

*Доказательство.* т.к  $A$  - ограничено, то  $\exists \sup A = b, \inf A = a$

$\Rightarrow A \subset [a_1, b_1] = [a, b]$ . Поделим отрезок  $[a_1, b_1]$  пополам и возьмем половину  $[a_2, b_2]$  в которой бесконечно много элементов из множества  $A$  и т.д. Получаем систему вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , у которых длина стремится к нулю  
 $\Rightarrow \exists! c \in [a_n, b_n] \forall n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : [a_{n_\varepsilon}, b_{n_\varepsilon}] \subset B_\varepsilon(c) \Rightarrow$  существует бесконечно много элементов в  $\mathring{B}_\varepsilon(c) \Rightarrow c \in A'$ .  $\square$



## 4 Числовые последовательности

### 4.1 Предел последовательности

**Определение.** Отображение  $\{a_n\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  называется последовательностью.

**Замечание.** Далее, в обозначении последовательности будем опускать скобки и писать  $a_n$ .

**Определение.** Говорят, что  $a_n$  ограничена сверху (снизу), если ее образ ограничен сверху (снизу).

**Определение.** Пусть последовательность номеров  $n_k$  - образ  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и  $\forall k : n_{k+1} > n_k$ . Тогда для любой последовательности  $a_n$  последовательность  $a_{n_k}$  называется подпоследовательностью  $a_n$ .

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $a_n$ . Если  $\exists a \in \mathbb{R}$ , такое что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

то говорят, что последовательность  $a_n$  сходится, а число  $a$  называется пределом последовательности  $a_n$  и обозначается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

**Теорема.** Если  $a_n$  сходится, то ее предел единственный.

*Доказательство.* Пусть  $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \neq b$  - два предела последовательности  $a_n$ . Тогда

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - a| < \frac{|a - b|}{3} \quad \text{и} \quad \exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - b| < \frac{|a - b|}{3}$$

Тогда  $\forall n > N = \max(N_1, N_2)$  получаем, что  $a_n \in B_{\frac{|a-b|}{3}}(a)$  и  $a_n \in B_{\frac{|a-b|}{3}}(b)$ , но  $B_{\frac{|a-b|}{3}}(a) \cap B_{\frac{|a-b|}{3}}(b) = \emptyset \Rightarrow$  получаем противоречие.  $\square$

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , тогда  $\forall a_{n_k} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall n_k > N_\varepsilon : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$   $\square$

**Замечание.**

1. Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$ .

2. Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $b_n$  отличается от  $a_n$  конечным числом членов, то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**Теорема.** (Теорема об отделимости)

Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $b \neq a$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^\infty = \emptyset$ .

*Доказательство.* Предположим, что выполнено обратное:  $\forall \varepsilon > 0 \forall N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^\infty \neq \emptyset$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ , сразу получаем противоречие.  $\square$

**Замечание.** Теорема об отделимости равносильна следующему утверждению:  $\exists \varepsilon > 0 : \dot{B}_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty = \emptyset$ , причем если  $b \notin \{a_n\}_{n=1}^\infty$ , то  $B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty = \emptyset$ .

## 4.2 О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

**Определение.** Рассмотрим пару последовательностей  $a_n$  и  $b_n$ . Если

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , то говорят, что последовательность  $a_n$  - это о-малое от  $b_n$ , и обозначают  $a_n = \bar{o}(b_n)$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.** Если  $\exists M > 0 : \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M \forall n$ , то говорят, что последовательность  $a_n$  - это О-большое от  $b_n$ , и обозначают  $a_n = O(b_n)$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

**Примеры.**

1.  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sin n = \bar{o}(n)$
2.  $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \cos n = \bar{o}(n)$
3.  $\frac{\sqrt{n}+1}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sqrt{n}+1 = \bar{o}(n)$

**Замечание.**  $O(1)$  - обозначение класса ограниченных последовательностей.

**Определение.** Последовательность  $a_n$  называется бесконечно малой, если

$$a_n = \bar{o}(1) \quad (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)$$

**Определение.** Последовательность  $a_n$  называется бесконечно большой, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon$$

такие последовательности обозначаются  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  (это всего лишь обозначение, конечно у последовательности  $a_n$  не существует предела)

Если в определении  $a_n > \varepsilon$ , то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Если в определении  $a_n < -\varepsilon$ , то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Теорема.** (Исчисление бесконечно малых)

Пусть  $a_n = \bar{o}(1), n \rightarrow \infty$ ,  $b_n = \bar{o}(1), n \rightarrow \infty$  и  $c_n = O(1)$ . Тогда  $\forall c \in \mathbb{R}$ :

1.  $ca_n = \bar{o}(1)$
2.  $a_n + b_n = \bar{o}(1)$
3.  $a_nb_n = \bar{o}(1)$
4.  $c_na_n = \bar{o}(1)$

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1, \forall n > N_1 : |a_n| < \varepsilon, \exists N_2, \forall n > N_2 : |b_n| < \varepsilon$ .

Возьмем  $n > \max\{N_1, N_2\}$ . Также по определению  $\exists M > 0 : |c_n| < M$ . Тогда:

1.  $|ca_n| = |c| |a_n| < |c|\varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon$  принимает любое вещественное положительное значение, то величина  $|c|\varepsilon$  - тоже  $\Rightarrow ca_n = \bar{o}(1)$ .
2.  $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon$  принимает любое вещественное положительное значение, то величина  $2\varepsilon$  - тоже  $\Rightarrow a_n + b_n = \bar{o}(1)$ .
3.  $|a_nb_n| = |a_n| |b_n| < \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2$ . Поскольку  $\varepsilon$  принимает любое вещественное положительное значение, то величина  $\varepsilon^2$  - тоже  $\Rightarrow a_nb_n = \bar{o}(1)$ .
4.  $|c_na_n| = |c_n| |a_n| < M\varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon$  принимает любое вещественное положительное значение, то величина  $M\varepsilon$  - тоже  $\Rightarrow c_na_n = \bar{o}(1)$ .

□

**Теорема.** Пусть  $a_n$  - бесконечно большая и  $a_n \neq 0$ , тогда  $\frac{1}{a_n}$  - бесконечно малая.

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \bar{o}(1)$  □

**Лемма.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n - a = \bar{o}(1)$  т.е  $a_n = a + \bar{o}(1)$

*Доказательство.* Из определения предела для  $a_n$  получаем:  $|a_n - a| < \varepsilon$ , а это и означает что  $a_n - a = \bar{o}(1)$ . □

### 4.3 Арифметические свойства сходящихся последовательностей

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , тогда

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca$
3.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
4. Если дополнительно  $\forall n : b_n \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

*Доказательство.* Пользуясь тем, что  $a_n = a + \bar{o}(1)$ ,  $b_n = b + \bar{o}(1)$  и исчислением бесконечно малых, получаем:

1.  $a_n + b_n = a + \bar{o}(1) + b + \bar{o}(1) = a + b + \bar{o}(1)$ .
2.  $ca_n = c(a + \bar{o}(1)) = ca + c\bar{o}(1) = ca + \bar{o}(1)$ .
3.  $a_n b_n = (a + \bar{o}(1))(b + \bar{o}(1)) = ab + a\bar{o}(1) + b\bar{o}(1) + \bar{o}(1)\bar{o}(1) = ab + \bar{o}(1)$ .
4. 
$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} &= \frac{a_n b - ab_n}{bb_n} = \frac{b(a + \bar{o}(1)) - a(b + \bar{o}(1))}{b(b + \bar{o}(1))} = \frac{ab - ab + b\bar{o}(1) - a\bar{o}(1)}{b^2 + b\bar{o}(1)} = \\ &= \frac{1}{b^2 + \bar{o}(1)} \bar{o}(1) = O(1)\bar{o}(1) = \bar{o}(1). \end{aligned}$$

□

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $a_n \geq 0$ ,  $\forall n$ . Тогда  $a \geq 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $a < 0$ , тогда  $\exists N$ ,  $\forall n > N : |a - a_n| < \frac{|a|}{3} \Rightarrow$  начиная с  $N$  все члены  $a_n$  отрицательные  $\Rightarrow$  получаем противоречие. □

**Следствие.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  и пусть  $\forall n : a_n \geq b_n$ . Тогда  $a \geq b$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $a_n - b_n \geq 0$ .

$a_n - b_n \rightarrow a - b \geq 0$ . □

**Теорема.** (Теорема о двух милиционерах)

Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a : a_n \leq b_n$  и пусть  $a_n \leq c_n \leq b_n$ ,  $\forall n$ , тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1$ ,  $\forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$ ,  $\exists N_2$ ,  $\forall n > N_2 : |b_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > N = \max\{N_1, N_2\} : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$ . □

## 4.4 Монотонные последовательности

**Определение.**

1. Если  $\forall n : a_{n+1} > a_n$ , то  $a_n$  (строго) возрастает.
2. Если  $\forall n : a_{n+1} \geq a_n$ , то  $a_n$  не убывает.
3. Если  $\forall n : a_{n+1} < a_n$ , то  $a_n$  (строго) убывает.
4. Если  $\forall n : a_{n+1} \leq a_n$ , то  $a_n$  не возрастает.

Такие последовательности называют монотонными.

**Теорема.** Если последовательность неубывает (невозрастает) и ограничена сверху (снизу), то у нее есть предел.

*Доказательство.* Докажем для неубывающей, ограниченной сверху.  $a_n$  - ограничена сверху  $\Rightarrow \exists a = \sup a_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a_{N_\varepsilon} : a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} < a$ ,  $a_n$  - неубывает  $\Rightarrow \forall n > N_\varepsilon : a_n > a - \varepsilon \Rightarrow a - a_n < \varepsilon$ .  $\square$

## 4.5 Неравенство Бернулли и Бином Ньютона

**Теорема.** (Неравенство Бернулли)

Пусть  $x_k \in \mathbb{R}$  и  $\forall k : x_k > 0$  или  $\forall k : x_k \in (-1, 0)$ . Тогда

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База:  $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$ .

Шаг: пусть при  $n$  утверждение верно. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \geq (1 + x_{n+1}) \left( 1 + \sum_{k=1}^n x_k \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

$\square$

**Определение.** Число  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  называется биномиальным коэффициентом и обозначается  $C_n^k$ .

**Замечание.** По определению считается, что  $0! = 1$ .

**Теорема.** (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База: для  $n = 1$  верно. Пусть верно для  $n$ . Распишем выражение для  $n + 1$ :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} &= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m+1} = \\ &= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^n (C_n^{m-1} + C_n^m) a^m b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1} \end{aligned}$$

□

## 4.6 Число $e$

**Лемма.**

1.  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  возрастает.
2.  $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  убывает.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{(n^2 + 2n)^n (n+2)}{(n^2 + 2n + 1)^n (n+1)} = \\ &= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n (\frac{n+2}{n+1}) \geq (1 - \frac{n}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \\ &= \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \frac{(n^2 + 2n + 1)^{n+1} (n+1)}{(n^2 + 2n)^{n+1} (n+2)} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} > \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) \frac{n+1}{n+2} = \\
&= \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1
\end{aligned}$$

□

**Теорема.**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

*Доказательство.*  $\forall n, a_n < b_n$ , т.к.  $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \forall n, m : a_n < b_m$   
 $\Rightarrow a_n$  - ограничена  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

□

**Определение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

## 4.7 Сходимость последовательностей и частичные пределы

**Теорема.** Если  $a_n$  ограничена, то у нее существует сходящаяся подпоследовательность.

*Доказательство.*

1. Образ  $a_n$  бесконечен. Тогда  $\exists a$  - предельная точка образа. Тогда в проколотой окрестности  $a$  есть хотя бы одна точка, возьмем эту точку, назовем ее  $a_{n_1}$ , далее возьмем новую проколотую окрестность  $a$  так, чтобы  $a_{n_1}$  в нее не попадало, возьмем в ней  $a_{n_2}$  такую, что  $n_2 > n_1$  и так далее. Получим подпоследовательность, сходящуюся к  $a$ .
2. Образ  $a_n$  конечен. Тогда  $\exists a$  из образа, встречающаяся в последовательности бесконечно много раз. Тогда возьмем постоянную (стационарную) подпоследовательность.

□

**Теорема.** (Критерий Коши)

Последовательность  $a_n$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$(\Rightarrow) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall m, n > N_\varepsilon :$   
 $|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

$(\Leftarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$ . Фиксируем  $m$ , тогда  
 $a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon \Rightarrow a_n$  - ограничена  $\Rightarrow \exists a_{k_n} \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ . Поскольку  
 $k_n \geq n > N$ , то  $|a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$ . Тогда  $|a_n - a| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - a| <$   
 $< |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < 2\varepsilon$  ( $2\varepsilon$  пробегает все вещественные положительные  
 числа)

□

**Определение.** Последовательность  $a_n$ , удовлетворяющая условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

называется фундаментальной.

**Пример.**

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ - сходится, поскольку:}$$

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right| < \left| \sum_{k=m+1}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ - расходится, поскольку:}$$

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| > \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}$$

**Определение.** Если у  $a_n$  есть сходящаяся подпоследовательность  $a_{n_k}$ , то

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$  называется частичным пределом последовательности  $a_n$ .

**Теорема.** Рассмотрим  $a_n$ , и пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - множество всех частичных пределов  $a_n$ . Тогда  $A$  замкнуто.

*Доказательство.*  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) : B_\varepsilon(x) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty$  - конечно.  
 Тогда  $\forall x' \in B_\varepsilon(x) \exists B_{\varepsilon'}(x')$ , что  $B_{\varepsilon'}(x') \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty$  конечно  $\Rightarrow \forall x' \notin A$   
 $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$  - открыто. □

**Определение.** Пусть  $a_n$  ограничена. Тогда  $\exists \max A$  и  $\min A$  частичные пределы, которые называют верхним пределом  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  и нижним пределом  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  соответственно.



**Теорема.** Пусть  $a_n$  ограничена. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$$

*Доказательство.* Докажем для верхнего:

$$\sup\{a_k\}_{k=n+1}^{\infty} \leq \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$$

$\Rightarrow \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$  ограничена снизу и невозрастает  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty} = \alpha$ . Значит

$$\forall \varepsilon > 0 : (\alpha + \varepsilon, +\infty) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

конечно. С другой стороны

$$\forall \varepsilon > 0 : (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

бесконечно  $\Rightarrow \alpha$  - частичный предел  $\Rightarrow \alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ . □

**Теорема.**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) Если последовательность сходится к  $a$ , то все частичные пределы сходятся к  $a$ .

( $\Leftarrow$ )

$$\inf\{a_k\}_{k=n}^{\infty} \leq a_n \leq \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$$

по лемме о двух милиционерах  $a_n \rightarrow a$ . □

**Определение.** Если  $a_n$  имеет бесконечно большую подпоследовательность, то используют обозначения  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty (+\infty, -\infty)$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty (+\infty, -\infty)$

## 5 Предел функции

### 5.1 Определение предела по Коши и по Гейне

В данном разделе будут рассматриваться функции  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $\overset{\circ}{B}(x_0)$ . Число  $a$  называется пределом  $f(x)$  в точке  $x_0$ , по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $\mathring{B}(x_0)$ . Число  $a$  называется пределом  $f(x)$  в точке  $x_0$  по Гейне, если

$$\forall x_n : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \forall n : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $(-\infty, x_0)$  и на  $(x_0, +\infty)$ . Тогда  $a$  - предел функции  $f$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ) если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x : |x| > \delta_\varepsilon (x > \delta_\varepsilon, x < -\delta_\varepsilon) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

**Теорема.** Определения предела по Коши (1) и по Гейне (2) эквивалентны.

*Доказательство.*

1. (1)  $\Rightarrow$  (2):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\forall x_n : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \exists N_{\delta_\varepsilon} > 0 : 0 < |x_0 - x_n| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n > N_{\delta_\varepsilon}, x_n \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_n) - a| < \varepsilon$$

т.е.  $f(x_n) \rightarrow a$ .

2. (2)  $\Rightarrow$  (1): Выведем из отрицания предела по Коши отрицание предела по Гейне:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x_\delta) - a| \geq \varepsilon_0$$

Возьмем

$$x_1 \in \mathring{B}_1(x_0) \Rightarrow |f(x_1) - a| \geq \varepsilon_0$$

$$x_2 \in \mathring{B}_{\frac{|x_1 - x_0|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_2) - a| \geq \varepsilon_0$$

$$x_3 \in \mathring{B}_{\frac{|x_2 - x_0|}{2}}(x_0) \Rightarrow |f(x_3) - a| \geq \varepsilon_0$$

$\vdots$

Получили последовательность  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ , но при этом  $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$ . Это и есть отрицание по Гейне.

□

**Замечание.** В доказательстве пользуемся тем, что для утверждений  $A$  и  $B$  верно:  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

**Замечание.** при  $x \rightarrow \infty$  ( $+\infty$ ,  $-\infty$ ) доказываем аналогично.

## 5.2 Простейшие свойства предела функции

**Теорема.** Если у функции существует предел в точке  $x_0$ , то он единственный.

*Доказательство.* Получим противоречие с определением по Гейне, пусть

$$x_n : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \forall n : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Предположим, что  $b \neq a$  - тоже предел. Тогда

$$\exists t_n : t_n \rightarrow x_0, t_n \neq x_0 \forall n : \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = b$$

Получаем, что последовательность  $y_n = x_1, t_1, x_2, t_2, \dots : y_n \rightarrow x_0$ , но при этом  $f(y_n) = f(x_1), f(t_1), f(x_2), f(t_2) \dots$  - имеет два различных частичных предела - противоречие.  $\square$

**Теорема.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , то  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x)$  ограничена в  $\mathring{B}_\delta(x_0)$ .

*Доказательство.* Возьмем  $\varepsilon = 1$ . Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < 1$$

$\Rightarrow a - 1 < f(x) < a + 1 \Rightarrow f(x)$  - ограничена.  $\square$

**Теорема.** (Теорема об отделимости)

Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . Тогда  $\forall b \neq a \exists \delta > 0$  и  $\exists \varepsilon > 0$ , что  $f(\mathring{B}_\delta(x_0)) \cap \mathring{B}_\varepsilon(b) = \emptyset$ .

*Доказательство.* Возьмем  $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$ . Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \frac{|a-b|}{3} \Rightarrow f(\mathring{B}_\delta(x_0)) \cap \mathring{B}_{\frac{|a-b|}{3}}(b) = \emptyset$$

$\square$

## 5.3 Предел по множеству. Односторонние пределы

**Определение.** Число  $a$  называется пределом  $f(x)$  в точке  $x_0$  по множеству  $X \subset \mathbb{R}$ , если

$$x_0 \in X' \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap X : |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначают

$$\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

**Утверждение.** Если  $\exists \lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $X_1 \subset X, x_0 \in X'_1$ . Тогда

$$\exists \lim_{X_1 \ni x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Доказательство. Очевидно. □

**Определение.**

1. Если  $X = (x_0, x_0 + \delta)$ , то обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$ .

2. Если  $X = (x_0 - \delta, x_0)$ , то обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$ .

Такие пределы называются односторонними.

**Теорема.**  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$ .

Доказательство. <sup>5</sup>

( $\Rightarrow$ ) Поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

то

$$\forall x \in (x, x + \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon \text{ и } \forall x \in (x - \delta, x) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ) Поскольку

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in (x, x + \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

и поскольку

$$\forall x \in (x - \delta, x) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

то выполнено и

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

□

## 5.4 О-символика

**Определение.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , то  $f(x) = \bar{o}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой, если  $f(x) = \bar{o}(1)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение.** Если  $\exists M > 0$  такое, что  $\forall x \in X \subset \mathbb{R} : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ , то  $f(x) = O(g(x))$  на  $X$

**Определение.** Для обозначения класса ограниченных функций используется запись  $f(x) = O(1)$ .

---

<sup>5</sup>Дано в качестве очевидного

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $\mathring{B}(x_0)$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x)| > \varepsilon \quad (f(x) > \varepsilon, f(x) < -\varepsilon)$$

то говорят, что  $f(x)$  - бесконечно большая, и пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty)$$

**Теорема.** (Исчисление бесконечно малых)

Пусть  $\alpha(x) = \bar{o}(1)$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\beta(x) = \bar{o}(1)$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $\gamma(x) = O(1)$  в  $\mathring{B}(x_0)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Тогда:

1.  $\alpha(x) + \beta(x) = \bar{o}(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .
2.  $c\alpha(x) = \bar{o}(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .
3.  $\alpha(x)\beta(x) = \bar{o}(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .
4.  $\alpha(x)\gamma(x) = \bar{o}(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.* <sup>6</sup> Запишем определение по Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x_n : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \forall n : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x_n : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \forall n : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(x_n) = 0$$

$$\gamma(x) = O(1) \Leftrightarrow \exists M > 0 : |\gamma(x)| < M$$

Теперь воспользуемся доказанным для последовательностей:

1.  $\alpha(x_n) + \beta(x_n) = \bar{o}(1) + \bar{o}(1) = \bar{o}(1)$ .
2.  $c\alpha(x_n) = c\bar{o}(1) = \bar{o}(1)$ .
3.  $\alpha(x_n)\beta(x_n) = \bar{o}(1)\bar{o}(1) = \bar{o}(1)$ .
4.  $\alpha(x)\gamma(x) = \bar{o}(1)M = \bar{o}(1)$ .

□

**Утверждение.**  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \bar{o}(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.* <sup>7</sup>

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{B}_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - a = \bar{o}(1)$$

□

---

<sup>6</sup> Дано в качестве очевидного

<sup>7</sup> Дано в качестве очевидного

**Теорема.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $a \neq 0$ , то  $\frac{1}{f(x)} = O(1)$  в  $\mathring{B}(x_0)$ .

*Доказательство.* По теореме об отделимости

$$\exists \mathring{B}(x_0) \text{ и } \exists \varepsilon > 0 : f(\mathring{B}(x_0)) \cap \mathring{B}_\varepsilon(0) \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall x \in \mathring{B}(x_0) : |f(x)| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

□

## 5.5 Арифметические свойства пределов функций и предельные переходы в неравенствах

**Теорема.** Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , то

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$ .
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab$ .
3. Если  $b \neq 0$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ .

*Доказательство.* Эту теорему можно доказать используя тот факт, что

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \bar{o}(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = b + \bar{o}(1)$ , а также исчисление бесконечно малых функций. □

**Пример.**

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , если  $\alpha > \beta$ , то  $x^\alpha = \bar{o}(x^\beta)$ ,  $x \rightarrow 0$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-\beta} = 0$$

Например:  $x + \bar{o}(x) + x^2 + \bar{o}(x^2) = x + \bar{o}(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

2.  $\sin x = x + \bar{o}(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  и пусть  $\forall x \in \mathring{B}(x_0) : f(x) \geq g(x)$ , тогда  $a \geq b$ .

*Доказательство.* <sup>8</sup>

$$\forall x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \forall n : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = a \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_n) = b$$

по условию:  $f(x_n) \geq g(x_n)$  значит, по доказанному для последовательностей  $a \geq b$ . □

---

<sup>8</sup>Дано в качестве очевидного

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , и пусть  $a > b$ . Тогда  $\exists \mathring{B}(x_0) : f(x) > g(x)$ .

*Доказательство.* По теореме об отделимости. □

**Теорема.** (Теорема о двух милиционерах)

Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$  и пусть в  $\mathring{B}(x_0) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

*Доказательство.* по Гейне. □

## 5.6 Монотонные функции

**Определение.** Если  $\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) : x_1 < x_2$  выполнено, что

1.  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то  $f(x)$  называют неубывающей.
2.  $f(x_1) < f(x_2)$ , то  $f(x)$  называют возрастающей.
3.  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , то  $f(x)$  называют невозрастающей.
4.  $f(x_1) > f(x_2)$ , то  $f(x)$  называют убывающей.

такие функции называют монотонными.

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  определена на  $(a - \delta, a)$ ,  $f(x)$  - неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу). Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ .

*Доказательство.* Докажем для неубывающей и ограниченной сверху.  $\exists \sup f(x) = A$ . Значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in (a - \delta, a) : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$$

Тогда

$$\forall x \in (x_\varepsilon, a) : f(x) \geq f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$$

а значит

$$\forall x \in \mathring{B}(a) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

□

## 5.7 Критерий Коши

**Теорема.** (Критерий Коши)

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

Значит  $\forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) :$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - a + a - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < 2\varepsilon$$

( $\Leftarrow$ )

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{B}_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\forall x_n : x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \exists N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n > N_{\delta_\varepsilon} : |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n, m > N_{\delta_\varepsilon} : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

$t_n : t_n \rightarrow x_0, t_n \neq x_0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = b$ . Рассмотрим последовательность  $y_n : x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, y_n \rightarrow x_0$  если  $a \neq b$  то последовательность  $f(y_n)$  будет иметь два частичных предела  $\Rightarrow a = b$ .

□



## 6 Непрерывные функции

### 6.1 Локальные свойства непрерывных функций

**Определение.** Пусть  $D_f$  - область определения  $f(x)$ ,  $x_0 \in D_f$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

то  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ .

**Замечание.** Определение эквивалентно тому, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , если  $x_0$  не изолированная точка.

**Теорема.** Пусть  $f(x), g(x)$  - непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда:

1.  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  - непрерывна в точке  $x_0$
2.  $f(x)g(x)$  - непрерывна в точке  $x_0$
3. если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывна в точке  $x_0$

*Доказательство.* Если  $x_0$  - изолированная то очев. Если неизолированная, то по свойствам предела очевидно.  $\square$

**Теорема.** (Непрерывность композиции непрерывных функций)

Пусть  $f(x)$  определена в  $B_\delta(x_0)$  и  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а также  $f(B_\delta(x_0)) \subset B(y_0)$ ,  $f(x_0) = y_0$ . И пусть  $g(y)$  определена в  $B(y_0)$  и непрерывна в точке  $y_0$ . Тогда  $g(f(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* По Гейне:

$$\forall x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \rightarrow f(x_0). \forall y_n \rightarrow y_0, g(y_n) \rightarrow g(y_0)$$

$$y_n = f(x_n), g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$$

$\square$

### 6.2 Глобальные свойства непрерывных функций

**Определение.** Пусть  $f(x)$  - определена на  $X \subset \mathbb{R}$  и  $\forall x \in X : f(x)$  - непрерывна в точке  $x$ . Тогда говорят, что  $f(x)$  непрерывна на  $X$ , и пишут  $f(x) \in \mathcal{C}(X)$ .

**Теорема.** (1-я теорема Вейерштрасса)

Если  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , то  $f(x)$  - ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $f(x)$  неограничена, то есть

$$\forall M > 0 \exists x_M \in [a, b] : |f(x_M)| > M$$

Возьмем

$$x_1 : |f(x_1)| > 1, x_2 : |f(x_2)| > 2, \dots x_M : |f(x_M)| > M, \dots$$

Получаем последовательность

$$x_n \subset [a, b] \Rightarrow \exists x_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x_0$$

$f(x)$  непрерывна  $\Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ , но  $|f(x_{n_k})| \rightarrow \infty$  получаем противоречие.  $\square$

**Теорема.** (2-я теорема Вейерштрасса)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ . Тогда  $f(x)$  имеет максимальное  $\max f(x)$  и минимальное  $\min f(x)$  значения на  $[a, b]$

*Доказательство.* Пусть

$$\alpha = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

Значит

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) > \alpha - 1, \exists x_2 \in [a, b] : f(x_2) > \alpha - \frac{1}{2}, \dots$$

$$\exists x_n \in [a, b], f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n}, \dots$$

$$\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}, x_{n_k} \rightarrow x'$$

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x'), \alpha - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq \alpha \Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow \alpha$$

$\square$

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ .  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  и  $A \leq B$ . Тогда

$$\forall C : A \leq C \leq B \exists c \in [a, b], f(c) = C$$

*Доказательство.* Если  $A = B$  то очевидно, далее пусть  $A < B$ . Возьмем

$x_1 = \frac{a+b}{2}$ . Если  $f(\frac{a+b}{2}) = C$ , то все. Если  $f(\frac{a+b}{2}) \neq C$ , то  $f(\frac{a+b}{2}) > C$  или  $f(\frac{a+b}{2}) < C$ . Возьмем половину отрезка  $[a_1, b_1] : f(a_1) < C < f(b_1)$ , снова делим пополам и т.д. Получаем  $\{[a_n, b_n]\}$  последовательность вложенных отрезков  $\Rightarrow \exists c \in [a_n, b_n], \forall n, a_n \rightarrow c, b_n \rightarrow c$ . Тогда по непрерывности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq C, \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq C$$

$$\Rightarrow f(c) = C.$$

$\square$

## 6.3 Точки разрыва функции

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $B(x_0)$ .

1. Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ , то точка  $x_0$  называется точкой устранимого разрыва функции  $f(x)$ .
2. Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \alpha$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , то точка называется точкой разрыва 1 рода функции  $f(x)$ .
3. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов, то  $x_0$  называется точкой разрыва 2 рода функции  $f(x)$ .

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  определена на  $[a, b]$  и монотонна. Тогда у этой функции не может быть разрывов 2-го рода.

*Доказательство.* Пусть  $f(x) \leq f(b)$  и  $f$  монотонно возрастает. Так как  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ , то  $f$  - ограничена  $\Rightarrow \forall x_0 \in [a, b] \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ . Значит у  $f(x)$  не может быть разрывов 2-го рода.  $\square$

**Следствие.** Утверждение теоремы верно и для монотонной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(a, b)$ .

*Доказательство.*  $\exists [a_n, b_n] \subset (a, b) : (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$   $\square$

**Утверждение.** У монотонной функции разрывов не более чем счетное множество.

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  строго монотонна на  $[a, b]$  и  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $f(a) = \alpha$ ,  $f(b) = \beta$ . Тогда  $\exists f^{-1}(y) \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$  и она строго монотонна.

*Доказательство.* Пусть строго возрастает.  $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 : f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$ . Тогда  $f(x)$  - биекция между  $[a, b]$  и  $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists f^{-1}$ . Предположим, что она разрывная, но тогда нарушается биекция, и вообще нарушается условие того, что функция определена на всем отрезке  $[a, b]$ .  $\square$

## 6.4 Равномерная непрерывность

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $A$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta_\varepsilon : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

то  $f(x)$  называется равномерно непрерывной на  $A$ .

**Теорема.** (Теорема Кантора)

Если  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , то  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Возьмем последовательность

$$\delta_n = \frac{1}{n} : \exists x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \frac{1}{n} : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Тогда  $\exists x'_{n_k} \rightarrow x_0, \exists x''_{n_k} \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  и  $f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  - противоречие.  $\square$

## 6.5 Элементарные функции

### 1. Показательная функция

Пусть  $a > 1$

(i) Определим показательную функцию для натурального аргумента:

$$a^n := \prod_{j=1}^n a, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ из определения очевидно свойство: } a^{n+m} = a^n a^m.$$

(ii) Для целого аргумента  $n$  определим функцию так:

$$a^n := \begin{cases} a^n, & n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{a^k}, & n = -k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

(iii) Теперь доопределим функцию для рационального аргумента:

Пусть  $a^{\frac{1}{n}} = b$ , где  $b^n = a$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ . Пусть  $A = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} : x^n \leq a\}$ ,

$B = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 1} : x^n > a\}$ ,  $A \cup B = \mathbb{R}_{\geq 1}$ . По аксиоме полноты

$\exists b : x_1 \leq b \leq x_2, \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in B$  и  $b = a^{\frac{1}{n}}$ .

Далее  $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m$ .

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

$$(1 + \frac{a}{n})^n > 1 + a > a \Rightarrow 1 + \frac{a}{n} > a^{\frac{1}{n}} > 1$$

по теореме о двух милиционерах  $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

Пусть  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, r_n \rightarrow x_0 - 0, s_n \rightarrow x_0 + 0$ . Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \alpha, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \beta, \alpha \leq \beta$$

Пусть  $\alpha < \beta$ ,  $a^{s_n} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{s_n-r_n} - 1) \rightarrow \beta - \alpha > 0$ . Рассмотрим подпоследовательность  $0 < s_{n_k} - r_{n_k} < \frac{1}{k}$ . Тогда  $1 < a^{s_{n_k}-r_{n_k}} < a^{\frac{1}{k}}$ . По теореме о двух милиционерах

$$a^{s_{n_k}-r_{n_k}} \rightarrow 1 \Rightarrow a^{s_{n_k}} - a^{r_{n_k}} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = \beta = a^{x_0}$$

Непрерывность и монотонность есть по построению.

(v) Доопределим функцию при  $0 < a < 1$ :

$$a^x := \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

2. Функция, обратная к  $y = a^x$  называется логарифмом и обозначается

$$x = \log_a y$$

Далее пишем  $y = \log_a x$ . Известны следующие свойства:

$$\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a x, \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Отдельно выделяют  $\log_e x$ , его называют натуральным логарифмом и обозначают  $\ln x$ .

3. Степенная функция.

$\forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  степенная функция определяется как

$$x^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln x}$$

Распространяем: при  $\alpha \geq 0$  доопределим  $x^\alpha$  в точке  $x = 0$  по непрерывности (ищем предел и добавляем его как значение), при  $\alpha \in \mathbb{Z}$  доопределяем  $x^\alpha$  при  $x < 0$  четно, если  $\alpha$  - четное и нечетное, если  $\alpha$  - нечетное.

4. Тригонометрические функции:

$y = \sin x$  определим так: возьмем окружность единичного радиуса, на  $[0, 2\pi]$  синус - ордината.

$$\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq |x|, \sin(x + \delta) - \sin x = |2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right)| \leq \delta.$$

$\cos x$  определяем в соответствии с определением синуса.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

5. Обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x$ , обратную к  $\sin x$  определяем на области, где будет биекция с  $\sin x$  (обычно берут  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ). Аналогично определяются обратные к  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ .

6. Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Для этих функций можно получить формулы, аналогичные тем, что верны для тригонометрических функций.

## 6.6 Замечательные пределы

**Теорема.** (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.*  $\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$  и  $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ . По теореме о двух милиционерах  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ . □

**Утверждение.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

*Доказательство.* Воспользуемся определением по Гейне. Пусть  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ :

$$\left(1 + \frac{1}{[\alpha_n] + 1}\right)^{[\alpha_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n]}\right)^{[\alpha_n] + 1}$$

$\Rightarrow$  по лемме о двух милиционерах  $\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \rightarrow e$ . Теперь пусть  $\beta_n \rightarrow -\infty$ :

$$\left(1 + \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = \left(\frac{\beta_n + 1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = \left(\frac{\beta_n}{\beta_n + 1}\right)^{-\beta_n} = \left(1 - \frac{1}{\beta_n + 1}\right)^{-\beta_n}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**Утверждение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

*Доказательство.* В силу непрерывности натурального логарифма:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

□

**Теорема.** (Второй замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

*Доказательство.* Пусть  $t = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + t \Rightarrow x = \ln(1 + t)$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = 1$$

□

## 7 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### 7.1 Производная функции

В следующих определениях предполагается, что  $f(x)$  определена в  $B(x_0)$ .

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется (если он существует) предел

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  по множеству  $A$  называется (если он существует) предел

$$f'_A(x_0) := \lim_{A \ni \Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Если  $A = (x_0 - \Delta x, x_0)$  или  $(x_0, x_0 + \Delta x)$ , то пишут  $f'_-(x_0)$  или  $f'_+(x_0)$ .

**Замечание.** Если обозначить  $\Delta x = x - x_0$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Теорема.** Если существует производная функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , то  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*

$$\exists f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x) + \bar{o}(1)$$

Так как  $x - x_0 = \bar{o}(1)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то это равенство можно записать в виде:

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x) + \bar{o}(1))(x - x_0) = \bar{o}(1)$$

Значит

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

**Теорема.** Если у функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существуют производные в точке  $x_0$ , то  $\forall C \in \mathbb{R}$  выполнено:

$$1. \exists (Cf(x_0))' = Cf'(x_0).$$



$$2. \exists (f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

**Теорема.** Если  $\exists f'(x_0)$  и  $\exists g'(x_0)$ , то  $\exists (f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \end{aligned}$$

в последнем переходе используется непрерывность  $g(x)$

( $\exists g'(x_0) \Rightarrow g(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ ). □

**Теорема.** Если  $\exists f'(x_0)$ ,  $\exists g'(x_0)$  и  $g(x_0) \neq 0$ , то

$$\exists \left( \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - (g(x) - g(x_0))f(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

в последнем переходе используется непрерывность  $g(x)$ . □

**Теорема.** Пусть  $y = f(x)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $\exists f'(x_0)$ ,  $\exists g'(y_0)$ . Тогда

$$\exists (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

*Доказательство.* Пусть  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  и  $f(x_n) \neq f(x_0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} (g(f(x_0)))' &= \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = \\ &= \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0) \end{aligned}$$

Остался случай, когда в любой окрестности  $x_0$  есть бесконечно много точек, в которых  $f(x_n) = f(x_0)$ . Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) = 0$$

□

**Пример.**  $(f(g(h(a(x)))))' = f'(g(h(a(x)))) \cdot g'(h(a(x))) \cdot h'(a(x)) \cdot a'(x)$

## 7.2 Дифференцируемые функции

**Определение.** Разность  $\Delta x = x - x_0$  называется приращением аргумента. Разность  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  называется полным приращением функции.

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $B(x_0)$ . Если  $\exists A \in \mathbb{R}$  такое, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

то  $f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , а главная линейная часть приращения функции  $A\Delta x$  называется (первым) дифференциалом  $f(x)$  в точке  $x_0$ , его обозначают  $df = A\Delta x$ .

Если функция  $f(x)$  дифференцируема на  $X \subset \mathbb{R}$ , то пишут  $f(x) \in \mathcal{D}(X)$

**Теорема.**  $f(x) \in \mathcal{D}(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$ .

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$  :  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ , значит

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \bar{o}(1) \Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

$(\Leftarrow)$  :  $\exists f'(x_0)$ , значит

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

□

**Замечание.**

$$1. df = f'(x_0)\Delta x$$

$$2. dx = x'\Delta x = \Delta x \Rightarrow df = f'(x)dx$$

**Примеры.**

$$1. \ y = y(x) \ dy = y'(x) \ dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{y'(x)} dy$$

$$2. \ x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$2x \ dx + 2y \ dy = 0 \Leftrightarrow dy = -\frac{x}{y} dx = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$3. \ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad \begin{cases} dx = x'_t dt, \\ dy = y'_t dt. \end{cases} \quad dy = \frac{y'_t}{x'_t} dx \quad \begin{cases} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$$

**Теорема.** (Теорема о производной обратной функции)

Пусть  $\exists y' = f'(x_0)$ ,  $f'(x_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists x = f^{-1}(y)$  и

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Доказательство.*

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

### 7.3 Производные элементарных функций

$$1. \ (e^x)' = e^x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

$$2. \ y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$3. \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \frac{\alpha}{x} \cdot e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$4. \ (\sin x)' = \cos x.$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x_0 \cos \frac{\Delta x}{2} - \sin x_0 \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0 \end{aligned}$$

$$5. y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

## 7.4 Касательная. Геометрический смысл первого дифференциала

**Определение.** Луч  $l_0$  с началом в точке  $(x_0, y_0)$  и углом  $\alpha_0 \in [-\pi, \pi]$  к положительному направлению оси  $Ox$ , называется предельным положением семейства лучей  $l(t)$  с началом в точке  $(x_0, y_0)$  и углом  $\alpha(t) \in [-\pi, \pi]$ , если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha_0$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $[x_0, x_0 + \delta)$ . Если семейство лучей  $l(x, x_0)$ , проходящих через точки  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x, f(x))$ , где  $x \in [x_0, x_0 + \delta)$  имеет предельное положение при  $x \rightarrow x_0 + 0$ , то это предельное положение называется правой полукасательной. Аналогично определяется левая полукасательная. У правой полукасательной  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , у левой  $\alpha \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

**Определение.** Если углы наклона у правой и левой полукасательной отличаются на  $\pi$ , то образованная этими лучами прямая называется касательной прямой.

**Определение.**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_+ &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \\ \operatorname{tg} \alpha_- &= \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \end{aligned}$$

**Утверждение.** Уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



$$df = f'(x)dx$$

**Утверждение.** (Инвариантность формы первого дифференциала)

Пусть  $y = y(x)$ . Если переменная  $x$  - независимая, то

$$dy = y'(x)dx$$

Если  $x = x(t)$ , то дифференциал  $dy$  все равно вычисляется по той же формуле.

*Доказательство.*

$$dy = y'(x)x'(t)dt = y'(x)dx$$

□

## 7.5 Производные и дифференциалы старших порядков

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $B(x_0)$ ,  $f(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$ . Если  $\exists (f'(x_0))'$ , то говорят, что у функции есть вторая производная в точке  $x_0$ , и обозначают  $f''(x_0)$ . Аналогично определяется производная порядка  $n \in \mathbb{N}$ , обозначают  $f^{(n)}(x)$ .

**Определение.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$ ,  $f'(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$ . Возьмем первый дифференциал от первого дифференциала

$$\delta(f'(x)dx) = \delta(f'(x))dx = f''(x)\delta x dx \quad (*)$$

Выражение  $(*)$ , взятое при  $\delta x = dx$ , называется вторым дифференциалом  $f(x)$ , обозначается  $d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2$ . Аналогично определяется дифференциал порядка  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\delta(f^{(n-1)}(x)dx) = f^{(n)}(x)dx^{n-1}\delta x|_{\delta x=dx} = f^{(n)}dx^n = d^n f(x)$$

**Пример.** (Неинвариантность формы дифференциала старших порядков)

$$d^2 y(x) = y''(x)dx^2 \neq y''(x(t))x'(t)^2 dt^2$$

$$d(dy(x(t))) = d(y'(x(t))x'(t)dt) = (y''(x(t))x'(t)^2 + y'(x(t))x''(t))dt^2$$

**Определение.** Запись  $f(x) \in \mathcal{C}^n[a, b]$  обозначает, что у функции  $f$  есть  $n$  производных и они все непрерывны на отрезке  $[a, b]$ .

## 7.6 Свойства дифференцируемых функций

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена в  $B(x_0)$ . Если  $\forall x \in \mathring{B}(x_0)$  и  $f(x) > f(x_0)$ , то  $x_0$  - точка минимума. Если  $f(x) < f(x_0)$ , то  $x_0$  - точка максимума. Такие точки называют точками экстремума.

**Теорема.** (Теорема Ферма)

Пусть  $f(x)$  определена в  $B(x_0)$ , пусть существуют левая и правая производные в точке  $x_0$ . Тогда

$$1. x_0 - \text{точка максимума} \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0 \text{ и } f'_+(x_0) \leq 0.$$

$$2. x_0 - \text{точка минимума} \Rightarrow f'_-(x_0) \leq 0 \text{ и } f'_+(x_0) \geq 0.$$

*Доказательство.* (для точки максимума)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ при } x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ при } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

□

**Следствие.** Если  $f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$  и  $\exists f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема.** (Необходимое условие существования локального экстремума)

Если  $f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то либо  $f'(x_0) = 0$ , либо не существует производной в точке  $x_0$ .

**Теорема.** (Теорема Ролля)

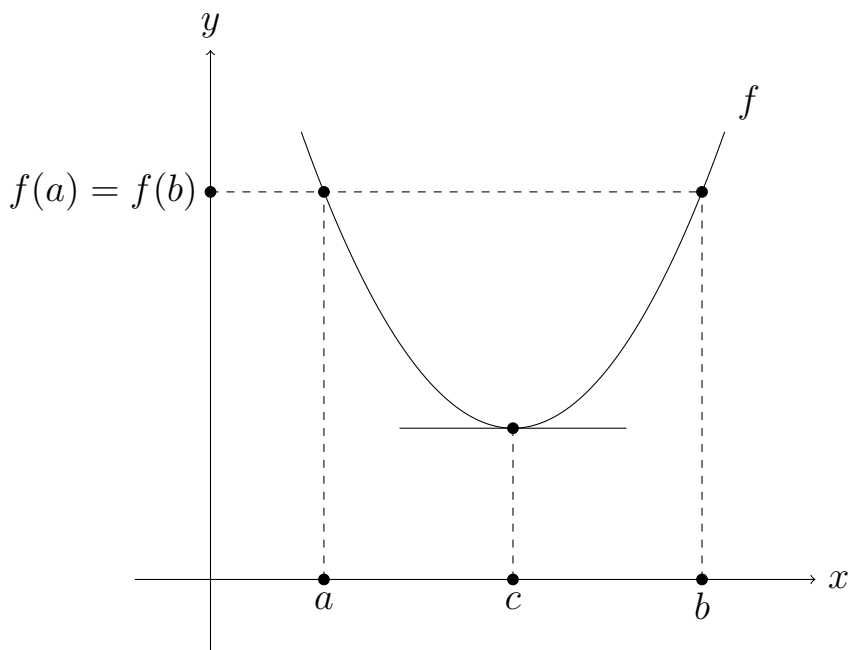
Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ . Если  $f(a) = f(b)$ , то  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

*Доказательство.* Если  $\exists x_{\max}$  такой, что  $\forall a : f(x_{\max}) > f(a) \Rightarrow f'(x_{\max}) = 0$ .

Если  $\exists x_{\min}$  такой, что  $\forall a : f(x_{\min}) < f(a) \forall a \Rightarrow f'(x_{\min}) = 0$ .

Если  $\forall x \in (a, b) : f(x) = f(a) = f(b)$ , то  $f'(x) = 0$  □

Геометрически это означает, что при таких условиях найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.



## 7.7 Формула Лагранжа. Геометрический смысл и приложения

**Теорема.** (Формула Лагранжа, формула дифференциального среднего)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$  :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

*Доказательство.* Введем функцию  $\varphi(x)$  :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow \varphi(a) = f(a), \varphi(b) = f(a)$$

Тогда по теореме Ролля  $\exists c \in (a, b)$  :

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

□

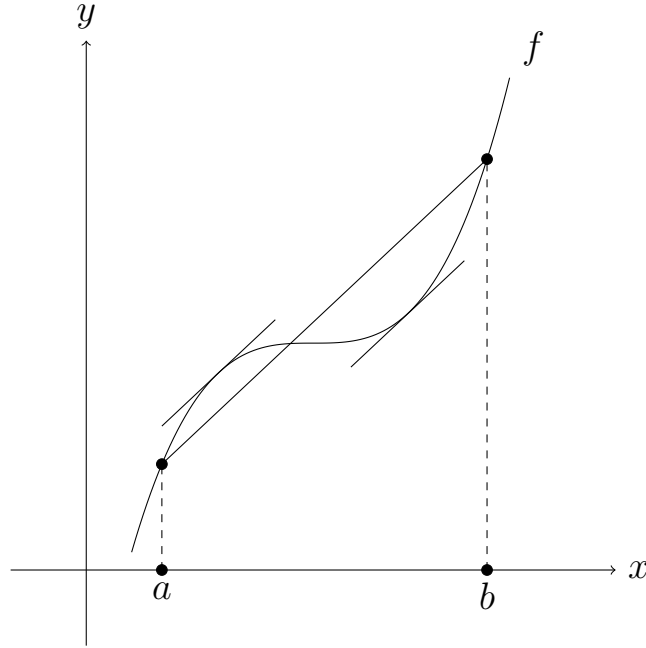
**Следствие.** (Важное следствие из формулы Лагранжа)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ . Если  $f'(x) \equiv 0$ , то  $f(x) = \text{const}$ .

*Доказательство.*  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$  □

Геометрически теорема Лагранжа означает, что в некоторой точке  $(c, f(c))$ , где  $c \in (a, b)$ , касательная к графику функции будет параллельна хорде, соединяющей точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ .

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Отметим, что точек, удовлетворяющих формуле Лагранжа, может быть несколько.

**Теорема.** (Формула Коши)

Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Заметим, что  $g(b) \neq g(a)$ , так как иначе, по теореме Ролля существует  $c \in (a, b) : g'(c) = 0$ . Введем функцию  $\varphi(x)$  :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \Rightarrow \varphi(b) = f(a), \varphi(a) = f(a)$$

Тогда по теореме Ролля  $\exists c \in (a, b) :$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$$

□



**Теорема.** (Связь монотонной функции и знака ее производной)

1. Пусть  $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ .

- Если  $f(x)$  неубывает на  $(a, b)$ , то  $\forall c \in (a, b) : f'(c) \geq 0$ .
- Если  $f(x)$  невозрастает на  $(a, b)$ , то  $\forall c \in (a, b) : f'(c) \leq 0$ .

2. • Пусть  $f'(x) \geq 0$ . Тогда  $f(x)$  неубывает.  
 • Пусть  $f'(x) \leq 0$ . Тогда  $f(x)$  невозрастает.

3. • Пусть  $f'(x) > 0$ . Тогда  $f(x)$  строго возрастает.  
 • Пусть  $f'(x) < 0$ . Тогда  $f(x)$  строго убывает.

*Доказательство.* Воспользуемся формулой Лагранжа:

1. Докажем для неубывающей:  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \leq x_2 :$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

2. Докажем для неубывающей:  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \leq x_2 :$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

3. Докажем для возрастающей:  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 :$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}(B(x_0)), f(x) \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{B}(x_0))$

1. Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = f'(x_0 - 0)$ , то  $\exists f'_-(x_0)$  и  $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$ .

2. Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$ , то  $\exists f'_+(x_0)$  и  $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$ .

*Доказательство.* Докажем для правой производной. По формуле Лагранжа  $\exists c \in (x_0, x)$ :

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \rightarrow x_0 + 0, \quad c \rightarrow x_0 + 0$$

Тогда

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

□

**Следствие.** Если  $f(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ , то  $f'(x)$  может иметь разрывы только второго рода.

*Доказательство.* Покажем, что у такой функции не может быть устранимых разрывов и разрывов первого рода:

1. Если  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ , то  $\exists f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .
2. Если  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ , тогда  $f'(x_0)$  не существует.

Таким образом, могут быть разрывы только второго рода. □

**Теорема.** (Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{D}[a, b]$ ,  $f'_+(a) = A$ ,  $f'_-(b) = B$ ,  $C$  - число между  $A$  и  $B$ . Тогда  $\exists c \in [a, b]$  такая, что  $f'(c) = C$ .

*Доказательство.* Тривиальный случай: Если  $A = B$ , то очев. Далее  $A \neq B$

1. Пусть  $A < 0$ ,  $B > 0$ ,  $C = 0$ . Тогда

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, x \in [a, a + \delta) : f(x) < f(a)$$

$$\frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, x \in (b - \delta, b] : f(x) < f(b)$$

(при достаточно малых  $\Delta x$ )  $\Rightarrow x_{\min} \in (a, b) \Rightarrow f'(x_{\min}) = 0$ ,  $c = x_{\min}$ .

2. Пусть  $A > 0$ ,  $B < 0$ ,  $C = 0$ . Тогда рассмотрим  $g(x) = -f(x)$ , а для нее верен предыдущий случай.
3. Пусть  $A \neq B$  - любые,  $C$  - между  $A$  и  $B$  - любое. Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - Cx$ . Тогда  $g'(a) = A - C$ ,  $g'(b) = B - C$ . Заметим, что  $g'(a)$  и  $g'(b)$  разных знаков  $\Rightarrow \exists g'(c) = 0$  (свели к первому и второму случаю).

□

## 7.8 Правила Лопиталю

**Теорема.** Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(B(x_0))$ ,  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ,  $g(x) \neq 0$  в  $\dot{B}(x_0)$  и  $g'(x) \neq 0$  в  $B(x_0)$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

*Доказательство.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(\mathring{B}(x_0))$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  и  $g'(x) \neq 0$   $\forall x \in \mathring{B}(x_0)$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

А также

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

*Доказательство.*<sup>9</sup> Из существования предела отношения производных имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{B}(x_0) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$$

Доопределим функции в точке  $x_0$ :  $f(x_0) := 0$ ,  $g(x_0) := 0$ . Тогда  $f(x), g(x) \in \mathcal{C}(x_0)$  при этих всех условиях выполнена теорема Коши:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

Аналогично, условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{B}(x_0) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| > \varepsilon$$

влечет выполнение

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| > \varepsilon$$

где  $x \in \mathring{B}(x_0)$ , а  $c$  - точка между  $x$  и  $x_0$ . □

**Теорема.** Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(a, +\infty)$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

А также

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Для  $x \rightarrow -\infty$  верно аналогичное утверждение.

*Доказательство.* Сделав замену, сведем теорему к предыдущей. □

---

<sup>9</sup>Доказательство модифицировано в соответствии со старым конспектом лекций Подольского и курсом лекций Солодова на teach-in

**Теорема.** Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{D}(x_0 - \delta, x_0)$ ,  $f(x), g(x) \rightarrow \pm\infty$ ,  $x \rightarrow x_0 - 0$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in \mathring{B}(x_0)$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

А также

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

Для правой полуокрестности верно аналогичное утверждение.

*Доказательство.* <sup>10</sup> Пусть  $x_2 < x_1 < x_0$ . По формуле Коши  $\exists c \in (x_2, x_1)$ :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) + \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot g(x_1) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot g(x_2)$$

поделив это равенство на  $g(x_1)$ , получим:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f(x_2)}{g(x_1)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(x_2)}{g(x_1)}$$

По условию существования предела отношения производных выберем такой  $\delta_1$ , что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > x_0 - x_2$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$ , значит

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| < |A| + \varepsilon$$

По неравенству треугольника:

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - A \right| \leq \left| \frac{f(x_2)}{g(x_1)} \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \cdot \left| \frac{g(x_2)}{g(x_1)} \right|$$

Ввиду расположения точки  $c$ :

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

Поскольку  $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{g(x)} = 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) : \frac{1}{g(x)} < \varepsilon$ .

Значит

$$\left| \frac{f(x_2)}{g(x_1)} \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left| \frac{g(x_2)}{g(x_1)} \right| < \frac{\varepsilon}{|A| + \varepsilon}$$

Значит, выбрав  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , получим:

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - A \right| < \varepsilon + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{|A| + \varepsilon} (|A| + \varepsilon) = 3\varepsilon$$

Аналогично

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$$

□

<sup>10</sup> Доказательство модифицировано в соответствии с курсом лекций Солодова на teach-in

## 7.9 Формулы Тейлора

**Определение.** Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ . Формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x, x_0)$$

называется формулой Тейлора с центром в точке  $x_0$  и остаточным членом  $r_n(x, x_0)$ .

**Теорема.** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0)$ . Тогда остаточный член  $r_n(x, x_0) = \bar{o}(x - x_0)^n$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема.** (Остаточный член в общей форме)

Пусть  $f(t) \in \mathcal{C}^n[x_0, x]$ ,  $f^{(n)} \in \mathcal{D}(x_0, x)$ ,  $\varphi(t) \in \mathcal{C}[x_0, x]$ ,  $\varphi(t) \in \mathcal{D}(x_0, x)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ . Тогда  $\exists c \in (x_0, x)$  такая, что

$$r_n(x_0, x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

*Доказательство.* Введем вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \\ \psi(x_0) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \psi(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(x, x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} &= \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = \\
&= \frac{1}{\varphi'(c)} \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!} (x - c)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!} (x - c)^{k-1} \right) = \\
&= \frac{1}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n
\end{aligned}$$

Отсюда

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

□

**Следствие.** (Остаточный член в форме Лагранжа)

Возьмем  $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ . Тогда

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

**Формулы Тейлора элементарных функций с центром в нуле**

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \bar{o}(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

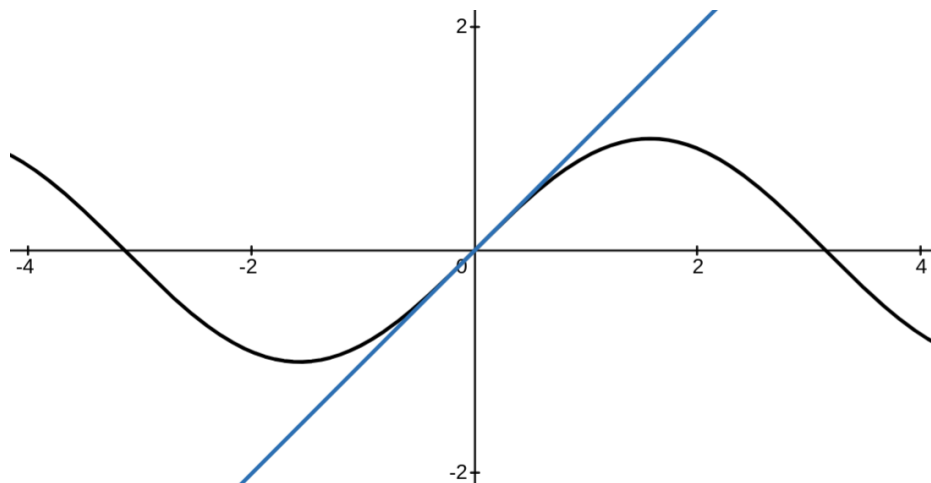
$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k + \bar{o}(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k + \bar{o}(x^{2n})$$

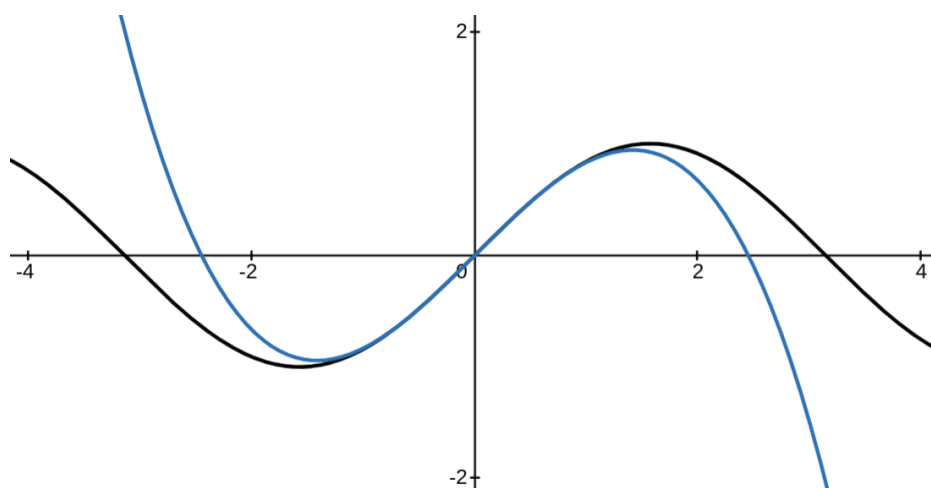
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} (-1)^{k+1} + \bar{o}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

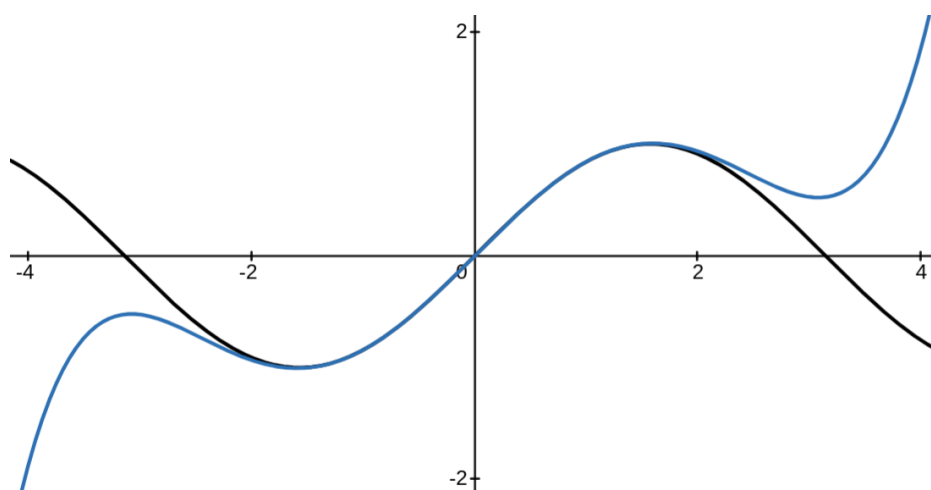
**Пример.** Рассмотрим несколько первых членов ряда для синуса



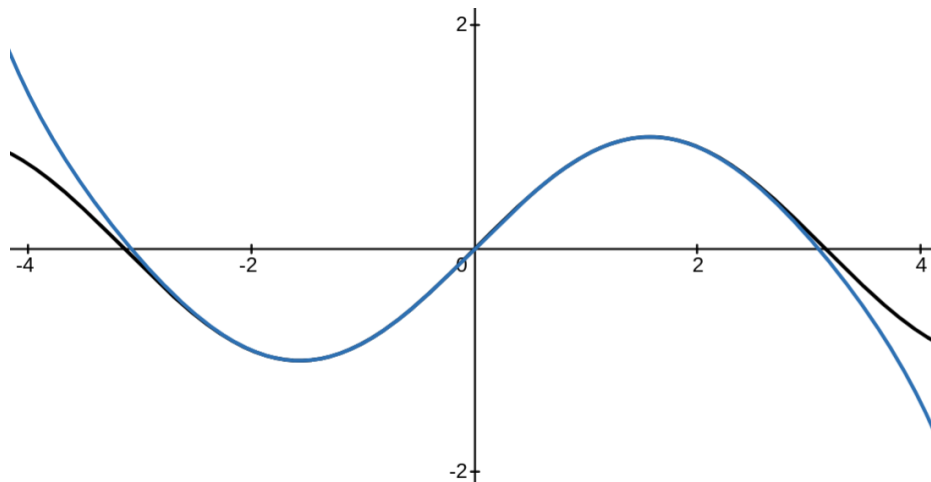
$$\sin x = x + \bar{o}(x)$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^3)$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \bar{o}(x^5)$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \bar{o}(x^7)$$

## 7.10 Экстремум функции

**Теорема.** (Достаточное условие локального экстремума 1)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}(B(x_0))$ ,  $f(x) \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{B}(x_0))$ .

Если при  $x < x_0 : f'(x) > 0$  или при  $x > x_0 : f'(x) < 0$ , то  $x_0$  - точка максимума.

Если при  $x < x_0 : f'(x) < 0$  или при  $x > x_0 : f'(x) > 0$ , то  $x_0$  - точка минимума.

*Доказательство.* По формуле Лагранжа:  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$  □

**Теорема.** (Достаточное условие локального экстремума 2)

Пусть  $\exists f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ,  $f^{(k)}(x_0) = 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

1. Если  $n = 2k + 1$ , то экстремум нет.

2. Если  $n = 2k$ , то

- если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  точка минимума
- если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  точка максимума.

*Доказательство.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{o}(x - x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1) \right)$$

Заметим, что знак  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \bar{o}(1)$  совпадает со знаком  $f^{(n)}(x_0)$  в некоторой проколотой окрестности  $x_0$ . Значит,



1. Если  $n = 2k + 1$ , то  $(x - x_0)^n$  меняет знак при переходе  $x$  через точку  $x_0 \Rightarrow$  при этом переходе  $f(x) - f(x_0)$  тоже меняет свой знак  $\Rightarrow x_0$  - не экстремум.
2. Если  $n = 2k$ , то  $(x - x_0)^n$  не меняет знак при переходе  $x$  через точку  $x_0 \Rightarrow$  если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $\forall x \in \mathring{B}(x_0) : f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  - точка минимума. Аналогично при  $f^{(n)}(x_0) < 0 : x_0$  - точка максимума.

□

### Схема поиска глобального экстремума

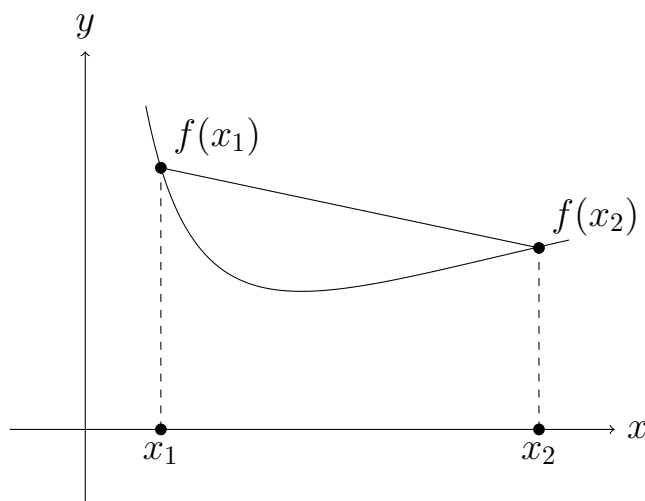
1. Ищем точки интервала  $(a, b)$ , где  $f'(x) = 0$  или где ее не существует.
2. Находим значение во всех этих точках и значения на концах отрезка.
3. Сравниваем их между собой.

## 7.11 Выпуклые функции

**Определение.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}(I)$ . Если  $\forall x_1, x_2 \in I$  и  $\forall x : x_1 < x < x_2$ :

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

то  $f(x)$  называется выпуклой вниз. Если выполнено обратное неравенство, то  $f(x)$  называется выпуклой вверх. Пример выпуклой вниз функции :



**Теорема.** (Достаточное условие выпуклости)

Пусть  $f'(x) \in \mathcal{D}(I)$ .

- Если  $f''(x) > 0$ , то  $f(x)$  выпукла вниз.
- Если  $f''(x) < 0$ , то  $f(x)$  выпукла вверх.

*Доказательство.* Пусть

$$l_1(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} f(x) - l_1(x) &= \\ &= f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{(f(x) - f(x_2))(x - x_1) + (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{-f'(\xi)(x_2 - x)(x - x_1) + f'(\eta)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{-f''(\chi)(\xi - \eta)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

□

**Теорема.** Пусть  $f'(x) \in \mathcal{D}(I)$ . Если  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ), то  $\forall x_0 \in I$ :

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

*Доказательство.* Пусть  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = l_2(x)$

$$f(x) - l_2(x) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

знаки скобок  $(\xi - x_0)$  и  $(x - x_0)$  одинаковы, значит  $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$

□

**Определение.** Если  $f(x) - l_2(x)$  при проходе через точку  $x_0$  меняет знак (разные знаки в левой и правой окрестности), то точка  $x_0$  называется точкой перегиба.

**Теорема.** (Необходимое условие наличия точки перегиба)

Пусть  $f''(x) \in \mathcal{C}(B(x_0))$ . Если  $x_0$  - точка перегиба, то  $f''(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Если  $f''(x_0) > 0$ , то в силу непрерывности  $f''(x) > 0$  в  $B(x_0)$ , значит  $x_0$  - не точка перегиба. Аналогично для  $f''(x_0) < 0$ .

□

**Теорема.** (Достаточное условие наличия точки перегиба)

Пусть  $f''(x) \in \mathcal{C}(I)$ . Если  $f''(x)$  меняется знак при проходе точки  $x_0$ , то  $x_0$  - точка перегиба.

*Доказательство.*  $f(x) - l_2(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$

□

**Теорема.** Пусть  $f''(x_0) = 0$ ,  $f'''(x_0) \neq 0$ . Тогда  $x_0$  - точка перегиба.

*Доказательство.*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \bar{o}((x - x_0)^3)$$

Тогда

$$f(x) - l_2(x) = (x - x_0)^3 \left( \frac{f'''(x_0)}{6} + \bar{o}(1) \right)$$

□

**Определение.** Если при  $x \rightarrow a - 0$  ( $x \rightarrow a + 0$ ) :  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ , то прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой.

**Определение.** Если при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) :  $(f(x) - kx - b) \rightarrow 0$ , то прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой.

**Теорема.** Прямая  $y = kx + b$  является наклонной асимптотой графика функции  $f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$ , аналогично к  $-\infty$ .

**Теорема.** (Неравенство Йенсена)

Пусть  $f(x)$  выпукла вниз в каждой точке  $I$ . Пусть  $\forall i : \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Тогда  $\forall x_i \subset I$ : (Если  $f(x)$  выпукла вверх, то выполнено обратное неравенство)

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . Если  $n = 1$  - очев. Для  $n = 2$  так как  $f(x)$  - выпукла вверх:  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$  Пусть верно для  $n$ . Тогда пользуясь неравенством для  $n = 1$  и  $n = 2$  получим:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left(\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \\ &= f\left(\alpha_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot x_i\right)\right) \geq \\ &\geq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} x_i\right) \geq \\ &\geq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot f(x_i)\right) = \\ &= \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) \end{aligned}$$

□

**Утверждение.** (Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

*Доказательство.*  $f(x) = \ln x$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  - выпукла вверх. Тогда

$$\ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_k^{\frac{1}{n}}\right)$$

Взяв ехр от обеих частей, получим искомое неравенство. □

**Утверждение.** (Неравенство Юнга)

$\forall a, b > 0, \forall p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством Йенсена для логарифма:

$$\ln\left(\frac{1}{p} \cdot x_1 + \frac{1}{q} \cdot x_2\right) \geq \frac{1}{p} \cdot \ln x_1 + \frac{1}{q} \cdot \ln x_2$$

$x_1 = a^p, x_2 = b^q$ . Тогда

$$\ln \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq \ln a + \ln b = \ln ab$$

Взяв ехр от обеих частей, получим искомое неравенство. □