Математический анализ-1

Лектор: Подольский Владимир Евгеньевич

Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа, tg: @fourkenz

Содержание

1 Элементы теории множеств

1.1 Условности и обозначения

Определение. Кванторами будем назать символы, заменяющие слова в выражениях.

Замечание. Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- $\forall$ - квантор всеобщности
- $\exists$ - квантор существования
- ! - квантор единственности
- Запись $A \Rightarrow B$ обозначает, что из высказывания A, следует высказывание B.
- Запись $A \Leftrightarrow B$ обозначает, что высказывание A равносильно высказыванию B.
- Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A, отрицанием такой записи будет $a \notin A$
- Если x - объект, а P - свойство, то запись $\{x : P(x)\}$ означает класс всех объектов обладающих свойством P.

Определение. Множество не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Определение. Множество A' является подмножеством множества A, если $\forall a \in A'$ верно $a \in A$. Запись $A' \subset A$ обозначает, что A' является подмножеством A.

Определение. Для любого множества A выполнено:

1. $\varnothing \subset A$.
2. $A \subset A$.

Определение. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется собственным подмножеством множества B.

1.2 Операции над множествами

Определение. Множество $C = A \cup B$ называется объединением множеств A и B, если $(\forall a \in A : a \in C)$ и $(\forall b \in B : b \in C)$ и $\forall c \in C$ выполнено ($c \in A$ или $c \in B$).

Определение. Множество $C = A \cap B$ называется пересечением множеств A и B, если $\forall c \in C : (c \in A$ и $c \in B)$ и $(\forall c : c \in A$ и $c \in B)$ выполнено $c \in C$.

Определение. Множество $C = A \setminus B$ называется разностью множеств A и B, если $\forall c \in C : (c \in A$ и $c \notin B)$ и $(\forall a \in A : a \notin B)$ выполнено $a \in C$.

Утверждение. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство. $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A$ или $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ или $(a \in B$ и $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ или $a \in B)$ и $(a \in A$ или $a \in C)$. □

Утверждение. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство. $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A$ и $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \in B$ или $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \in B)$ или $(a \in A$ и $a \in C)$. □

1.3 Декартово произведение множеств

Определение. Множество A называется одноэлементным, если $\exists a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\} = \varnothing$.

Определение. Множество A называется двуэлементным, если $\exists a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\}$ - одноэлементное.

Определение. Пусть $x \in X, y \in Y$. Упорядоченной парой называется двуэлементное множество $\{x, \{x, y\}\}$, упорядоченную пару обозначают (x, y).

Определение. Множество всех упорядоченных пар (x, y) называется декартовым произведением множеств X и Y, где $x \in X, y \in Y$. Декартово произведение обозначают $X \times Y$.

1.4 Отображения

Определение. Пусть X, Y - множества. Подмножество $f \subset X \times Y$ такое, что $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ называется отображением из X в Y, и обозначается $f : X \to Y$.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Множество $\{x : \exists (x, y) \in f\} = D_f$ называется областью определения функции f.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Множество $\{y : \exists (x, y) \in f\} = R_f$ называется областью значений функции f.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. f - инъекция $\Leftrightarrow \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f :$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. f - сюръекция $\Leftrightarrow Y = R_f$

Замечание. Обычно используют определение f - сюръекция $\Leftrightarrow \forall y \in Y$
$\exists x \in X : y = f(x)$.

Определение. f - биекция $\Leftrightarrow f$ - инъекция и f - сюръекция.

Определение. Пусть $f : X \to Y, X_1 \subset X$. Множество $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} = f|_{X_1}$ называется ограничением f на X_1.

Замечание. Запись $(x, y) \in f$ часто заменяют на $y = f(x)$.

Определение. Пусть $f : X \to Y, X_1 \subset X$. Множество $\{y \in Y : \exists x \in X_1 :$
$y = f(x)\} = f(X_1)$ называют образом множества X_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y, Y_1 \subset Y$. Множество $\{x \in X : \exists y \in Y_1 :$
$y = f(x)\} = f^{-1}(Y_1)$ называют полным прообразом множества Y_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Если $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$ - одноэлементное множество, то подмножество $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$ является отображением и называется обратным отображением к f. Если у отображения f существует обратное отображение f^{-1}, то оно называется обратимым.

Утверждение. f - обратимое $\Leftrightarrow f$ - биекция.

Замечание. Иногда $f : X \to Y$ записывают в виде y_x и называют индексацией y элементами x.

1.5 Операции над множествами (продолжение)

Утверждение. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ или ... или $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ и ... и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} A_\alpha)$. □

Утверждение. $\bigcap\limits_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ и ... и $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ или ... или $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in A} A_\alpha)$. □

2 Действительные числа

2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

Определение. (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве $\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!$ элемент называемый следующим и обозначаю-щийся как $S(n)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ не более одного элемента $\mathbb{N}$, для которого n - следующий.

3. $\exists!$ элемент $\mathbb{N}$ не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается 1 и называется единицей.

4. (Аксиома индукции) Пусть $M \subset \mathbb{N}$, такое, что $1 \in M$ и $\forall m \in M :$ $S(m) \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

Множество удовлетворяющее этим аксиомам называется множеством натуральных чисел и обозначается $\mathbb{N}$.

Определение. Рассмотрим множество X. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ биекция $\varphi : X \to \{1, \dots n\}$, то X называется n-элементным, или говорят, что количество элементов в X равно n. Тот факт что множество X - n-элементное обозначается как $|X| = n$ или $cardX = n$.

Замечание. По определению считаем, что $card(\varnothing) = 0$.

Определение. Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множества называются бесконечными.

2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

Определение. $R \subset X \times Y$ называется отношением между элементами X и Y. Обозначают xRy, если $(x, y) \in R$.

Определение. Отношение R называется отношением порядка, если выполнено:

1. $\forall x, y : xRy$ или yRx.

2. Если верно xRy и yRx, то $x = y$.

3. Если xRy и yRz, то xRz.

Такое отношение обозначают $\leq$.

Теорема. $\exists!$ отношение порядка на $\mathbb{N}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$. (Можно использовать на экзамене без доказательства)

Теорема. (Принцип наименьшего элемента)
$M \subset \mathbb{N}, M \neq \varnothing$ имеет наименьшей элемент, т.е. $\exists n_{min} \in M, \forall n \in M : n_{min} \leq n$.

Доказательство. База: Если $1 \in M$, то $n_{min} = 1$. Пусть $1 \notin M$, тогда $1 \in \mathbb{N} \backslash M$. Шаг: Пусть $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M$. Тогда $S(n) \in \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow$ по аксиоме индукции $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \varnothing$ - противоречие. □

2.3 Арифметические операции

Определение. Рассмотрим $A, B, card(A) = n, card(B) = k, n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда число $card(A \cup B)$ называется суммой n и k и обозначается $card(A \cup B) = n + k$.

Замечание. Естественно выполняется $n + k = k + n$ (коммутативность) и $(n + k) + m = n + (k + m)$ (ассоциативность).

Замечание. $n + 0 = 0 + n = n$, т.к. $cardA = card(A \cup \varnothing)$.

Замечание. $A \leftrightarrow \{1, \dots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \dots, k\}$. Возьмем
$card(A \cup B) = \{1, \dots, n\} \cup \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots)}_{k}\}$,
(где $\{1, \dots, k\} \leftrightarrow \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots)}_{k}\}) \Rightarrow S(n) = n + 1$.

Определение. $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} n = nk$ называется произведением n на k.

Замечание. $nk = \underbrace{(n + n + \dots + n)}_{k}$.

Замечание. Выполнены:

- $nk = kn$ (коммутативность)
- $n(km) = (nk)m$ (ассоциативность)
- $k(n + m) = kn + km$ (дистрибутивность)
- Если $k \leq n$, то $k + m \leq n + m$ и если $k \leq m$, то $kn \leq mn$

Определение. Если $n+k=m$, то $n=m-k, k=m-n$ называются разностью m и n.

Замечание. $m-0=m$, $m+0=m$, $m-m=0$.

Определение. $nk=m, \frac{m}{n}=k, \frac{m}{k}=n$.

2.4 Целые числа

Определение. Введем набор символов $-\mathbb{N}=\{\ldots,-2,-1\}$. Множество символов $-\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$ называются целыми числами и обозначаются $\mathbb{Z}$.

Замечание. Принимаем выполнеными следующие свойства:

1. $k+(-n)=\begin{cases} k-n, \text{если } k\geq n, \\ -(n-k), \text{если } k<n. \end{cases}$.
   $(-k)+(-n)=-(k+n)$
2. $k\cdot 0=(-k)\cdot 0=0$,
   $(-k)\cdot n=(-kn)$,
   $(-k)(-n)=kn$.
3. $(\pm k)((\pm n)+(\pm m))=(\pm k)(\pm n)+(\pm k)(\pm m)$.
4. $\forall k:(-k)\leq 0$,
   $(-k)\leq(-n)$, если $n\leq k$.
5. $\forall(\pm k),(\pm n),(\pm m)\in\mathbb{Z}$, если $(\pm k)\leq(\pm n)$, то $(\pm k)+(\pm m)\leq(\pm n)+(\pm m)$.
6. $\forall(\pm n),(\pm k)\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}$, если $(\pm n)\leq(\pm k)$, то $(\pm n)m\leq(\pm k)m$.

Далее пишем $-k$ вместо $(-k)$.
$\forall k,n\in\mathbb{Z}\ \exists(k-n)=k+(-n)$.

2.5 Рациональные числа

Определение. Множество $\mathbb{Q}=(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

а также введено отношение порядка:

$$\frac{m}{n}\leq\frac{p}{q}$$

Свойства операций ($a, b, c \in \mathbb{Q}$):

(1) $a + b = b + a$

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(3) $\exists!\ 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$

(4) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$

(5) $ab = ba$

(6) $a(bc) = (ab)c$

(7) $\exists!\ 1 \in \mathbb{Q}\ \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(8) $\forall a \neq 0\ \exists!\ a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

(9) $a(b + c) = ab + ac$

(10) $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ a \leq b$ или $b \leq q$

(11) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$

(12) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(13) $\forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(14) $\forall c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

Определение. Мнножество X с операциями $(\cdot, +)$ и отношением порядка $\leq$ называется упорядоченным полем.

Замечание. $\mathbb{Q}$ - упорядоченное поле.

Определение. Упорядоченное поле X называется архимедовым, если
(15) $\forall x \in X\ \exists n \in \mathbb{N} : a \leq n \cdot 1$.

Замечание. $\mathbb{Q}$ - архимедово поле.

Замечание. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$.

Замечание. $\forall m \in \mathbb{Z}$ число $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ можно отождествить с m.

2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

Определение. (Аксиома полноты)
(16) $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$.

Пример. Аксиома полноты не выполняется в $\mathbb{Q}$.
$A = \{a \leq 0$ или $a > 0 : a^2 < 2\}$, $B = \{b > a : b^2 > 2\}$,
но $\nexists \frac{m}{n}, \frac{m^2}{n^2} = 2$

2.8 Модели вещественных чисел

2.8.1 Модель бесконечных десятичных дробей

Определение. Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \to X$ называется последовательностью элементов X.

Определение. Выражение вида $\pm a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечной десятичной дробью, если $a_0 \in \mathbb{N}$ или $a_0 = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Определение. Введем отношение порядка $\leq$ на множестве всех бесконечных дробей следующим образом:

1. Если $a_0 \leq 0$, $b_0 > 0$, то $a \leq b$.

2. Если $a_0, b_0 \geq 0$, то $a \leq b$

   - если $a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0$, $a_1 < b_1$ или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, или ... или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n < b_n$.
   - если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n \neq 9, b_n = a_{n+1}$. $a_{n+k} = 9$. $a_{n+k} = 9$, $k \in \mathbb{N}$, $b_{n+k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, т.е $a = \overline{a_0 a_1 ... a_n (0)}$, а $b = \overline{b_0 b_1 ... b_n (9)}$ (в числе a начиная с a_{n+1} все a_i равны 9, а в числе b начиная с b_{n+1} все b_i равны 0), то $a = b$.

3. Если $a_0, b_0 < 0$, то $a < b$, если $-b < -a$ (случай 3 сведен к случаю 2)

Теорема. Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка ($\leq$) удовлетворяет аксиоме полноты.

Доказательство. (Еще не смог привести это в адекватный, читаемый вид. Пока что написано так, как ВЕ написал на доске)
Пусть $A, B \subset \{$множество бесконечных десятичных дробей$\}$ и $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$.

1. $a < 0, b \geq 0$, тогда $c = 0$.

2. $a > 0, b > 0$
   Пусть
   $\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0 b_1} b_2 \dots \in B\}$,
   $\vdots$
   $\Rightarrow \overline{b} = \overline{b_0 b_1 b_2} \dots \overline{b_n} \dots$.
   $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \overline{b} \leq b$.
   Предположим, что $\exists a' \in A, a' > \overline{b_0} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : a' = a_0 a_1 \dots a_k \dots$, но тогда $a' > \overline{b_0}, \overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_k}, ... \in B$ - противоречие.

3. $a < 0, b < 0$ очевидно.

□

2.8.2 Сечения $\mathbb{Q}$

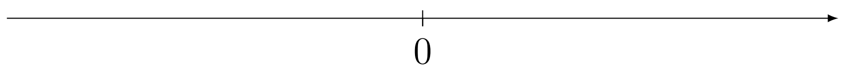
Определение. (Дедекиндовы сечения)
Пусть $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B \neq \varnothing, A \cup B = \mathbb{Q}, \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ и в B не существует минимального элемента, тогда (A, B) - пара сечений $\mathbb{Q}$.

Теорема. На множестве всех пар сечений $\{(A, B)\}$ можно ввести операции $(+), (\cdot)$ и отношение $(\leq)$, так что будут выполняться $(1) - (16)$.

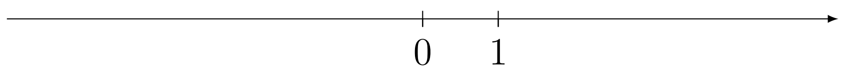
Доказательство. Без доказательства. □

2.8.3 Геометрическая модель числовой прямой

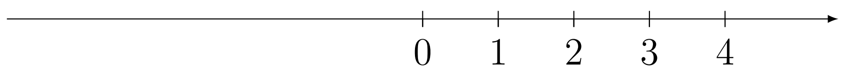
Выбираем точку, называем ее 0



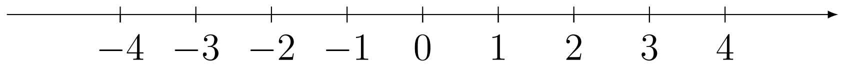
затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



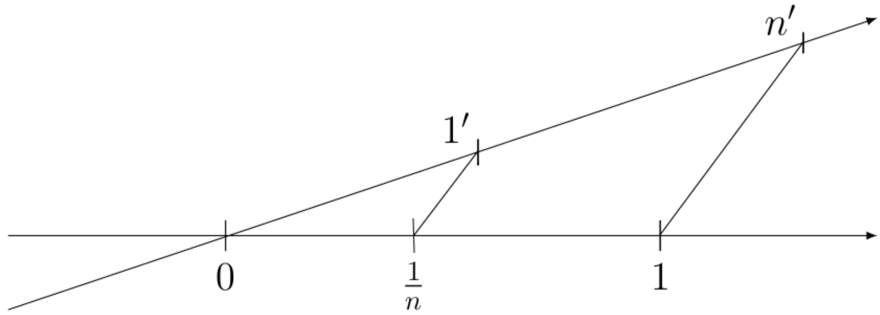
затем вводим сложение и получаем $2, 3, 4$, и т.д. (натуральный ряд)



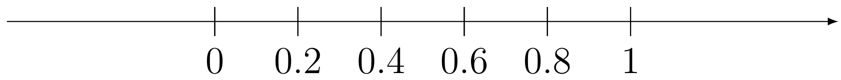
затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



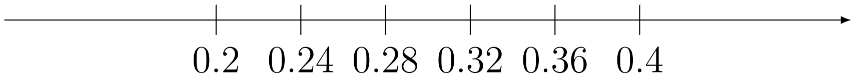
Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее $1'$ и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через n' и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через $1'$ проходит через $\frac{1}{n}$ (по теореме Фаллеса)



таким образом складывая m раз $\frac{1}{n}$, получим любое рациональное число $\frac{m}{n}$.
Построим бесконечную десятичную дробь, например $0,37152\ldots$.
Разобьем отрезок:



$0,37152\ldots$ находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:



$0,37152\ldots$ находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д. Получаем последовательность вложеных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.
Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняеются (1)-(16).

2.9 Принципы полноты

2.9.1 Верхние и нижние грани множества

Определение.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется максимальным элементом множества A $(\max A \subset \mathbb{R})$, $A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \geq a'$ и $a \in A$.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется минимальным элементом множества A $(\min A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \leq a'$ и $a \in A$.

Определение.

- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \leq m$.
- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \geq m$.

Определение.

- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченым сверху, если у A существует верхняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченым снизу, если у A существует нижняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченым, если A ограничено и сверху и снизу.

Определение.

- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, B - множество верхних граней A. Элемент $c = \min B$ называется точной верхней гранью A и обозначается $\sup A$.
- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, B - множество нижних граней A. Элемент $c = \max B$ называется точной нижней гранью A и обозначается $\inf A$.

2.9.2 Принцип полноты Вейерштрасса

Теорема. (Принцип полноты Вейерштрасса)
Для каждого ограниченого сверху или снизу множества A существует $\sup A$ или $\inf A$ соответственно.

Доказательство. Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)
A - ограничено сверху, B - множество верхних граней. Значит $\forall a \in A$ и $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$ по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$. $\square$

Определение. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ рассмотрим следующие множетсва:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - отрезок

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

Определение. $\forall a \in \mathbb{R}$ функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

Определение. Для любого промежутка с концами $\forall a, b \in \mathbb{R}$ длиной называется число $|b - a|$.

Определение. Рассмотрим последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ выполнено $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

2.9.3 Принцип вложеных отрезков (принцип полноты Кантора)

Теорема. (Принцип вложеных отрезков)
Пусть последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$. Если $|b_n - a_n| \to 0$ то c - единственная.

Доказательство. $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \le a_m$

- если $n < m$, то $a_n \le a_m < b_m$.
- если $m > n$, то $a_n \le b_n \le b_m$.

Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R}$: $a_n \le c \le b_m, \forall n, m \Rightarrow a_n \le c \le b_n, \forall n$. Если $|b_n - a_n| \to 0$, то $\nexists c_1, c_2 : c_1 \ne c_2$ - различные общие точки. Значит $|c_2 - c_1| > 0$ и $[c_1, c_2] \subset [a_n, b_n], \forall n$ и $|b_n - a_n| \ge |c_2 - c_1| \not\to 0$ противоречие. □

Теорема. (Неравенство Бернулли)
Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{n}, x_k \in \mathbb{R}\, \forall k : x_k > 0$ или $x_k \in (-1, 0)$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Доказательство. Индукция по n. База: $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$. Пусть при n утверждение верно.

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + x_n) \geq (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + (\sum_{k=1}^{n} x_k) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_n$$

$\square$

Определение. Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ называется биномиальным коэффициентом и обозначается C_n^k.

Замечание. По определнию считается, что $0! = 1$.

Теорема. (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Доказательство. Индукция по n. База: для $n = 1$ верно. Пусть верно для n. Распишем выражение для $n + 1$:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m+1} =$$

$$= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^n b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1}$$

$\square$

Определение. Отношение $\sim$ называется отношение эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1. $x \sim x$ (Рефлексивность)
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Симметричность)

3. $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Транзитивность)

Определение. Множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

Теорема. Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Пусть A, B, C - множества, $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.

2. Для любой биекции $\varphi : A \to B$ существует $\varphi^{-1} : B \to A$.

3. $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$, то $\varphi \circ \psi : A \to C$.

$\square$

Теорема. Конечные множества равномощны $\Leftrightarrow$ они содержат одинаковое количество элементов.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\varphi : A \to \{1, \ldots, n\}$, $\psi : B \to \{1, \ldots, n\}$
$\Rightarrow \exists\, \psi^{-1} : \{1, \ldots, n\} \to B$. Тогда $\varphi \circ \psi^{-1} : A \to B$ - искомая биекция.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi : A \to B$ - биекция. Если $A = \varnothing$, то $B = \varnothing$. Докажем индукцией по количеству элементов. Пусть $A = \{a\}$, тогда $\exists\, b \in B : \varphi(a) = b$. Пусть утверждение верно для случая когда A - n-элементное множество. Теперь если A - $n+1$-элементное, то $\exists\, \varphi : A \to \{1, 2, ..., n+1\}$ - биекция. Значит $\exists\, a \in A$, что $\varphi(a) = n+1$. Тогда $A \setminus \{a\}$ - n-элементное. Также $\exists\, b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$ - n-элементное $\Rightarrow B$ - $n+1$-элементное.

$\square$

Определение. Множества равномощные $\mathbb{N}$ называются счетными.

Теорема. A_i - счетные множества $\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$ - счетно.

Доказательство. Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \end{matrix}$$

$\square$

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

Примеры.

1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$
2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами).

Теорема. (Теорема Кантора)
Множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчетно.

Доказательство. Предположим, что оно счетно. Тогда все последовательности нулей и единиц можно перенумеровать. Составим бесконечную вниз таблицу, строками которой будут наши последовательности:
$a_1 = \underline{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \dots$
$a_2 = a_{21}\ \underline{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ \dots$
$a_3 = a_{31}\ a_{32}\ \underline{a_{33}}\ a_{34}\ \dots$
$a_4 = a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \underline{a_{44}}\ \dots$
a_{ij} - j-й член i-й последовательности. Рассмотри последовательность b у которой $b_i = 1 - a_{ii}$. Такая последовательность отличается от всех последовательностей на i-й позиции, значит она не была посчитана, получаем противоречие. □

Утверждение.

1. Алгебраических чисел счетно.
2. Действительных чисел несчетно.

Определение. Действительные числа не являющееся алгебраическими называются трансцендентными.