

# Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

8 января 2026 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Контакты: [Telegram](#), [GitHub](#)

# Содержание

<b>1 Числовые ряды</b>	<b>3</b>
1.1 Определение ряда и простейшие свойства . . . . .	3
1.2 Знакопостоянные ряды . . . . .	4
1.3 Знакопеременные ряды . . . . .	14
<b>2 Функциональные последовательности и ряды</b>	<b>20</b>
2.1 Функциональные последовательности . . . . .	20
2.2 Функциональные ряды . . . . .	23
2.3 Степенные ряды . . . . .	27
2.4 Ряды Тейлора . . . . .	30
<b>3 Бесконечные произведения</b>	<b>34</b>
3.1 Связь бесконечных произведений и рядов . . . . .	34
3.2 Разложение синуса в бесконечное произведение . . . . .	37
<b>4 Интегралы с параметром</b>	<b>41</b>
4.1 Собственные интегралы с параметром . . . . .	41
4.2 Несобственные интегралы с параметром . . . . .	44
<b>5 Эйлеровы интегралы</b>	<b>53</b>
5.1 Гамма-функция Эйлера . . . . .	53
5.2 Формула Стирлинга . . . . .	56
5.3 Бета-функция Эйлера . . . . .	58
<b>6 Ряды Фурье</b>	<b>61</b>
6.1 Ядро Дирихле . . . . .	65
6.2 Ядро Фейера . . . . .	71

# 1 Числовые ряды

## 1.1 Определение ряда и простейшие свойства

**Определение.** Пара последовательностей

$$a_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$a_n$  называется общим членом ряда,  $S_n$  называется частичной суммой ряда.

**Определение.** Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а  $S$  - суммой ряда.

**Определение.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

**Теорема.** (Критерий Коши сходимости ряда)

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall k, m > N_{\varepsilon} : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* По критерию Коши для последовательности  $S_n$ :

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

**Теорема.** Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда  $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ряды

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

*Доказательство.* Очев.

**Теорема.** (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

## 1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$  или  $a_n \leq 0$ .

**Теорема.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \tag{*}$$

Если последовательность  $S_n$  ограничена, то этот ряд сходится.

*Доказательство.* Поскольку  $a_n > 0$ , то последовательность  $S_n$  возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у  $S_n$  существует предел, значит ряд (\*) сходится.  $\square$

**Теорема.** (Признак сравнения)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n \geq 0) \tag{2}$$

и  $a_n \leq b_n$ . Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.
2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

*Доказательство.* Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$$

$\square$

**Следствие.** (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* Выберем  $\varepsilon > 0$  такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы.  $\square$

## Примеры.

1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится по Критерию Коши.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

при  $\alpha < 1$  расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

сходится.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

**Упражнение.** Доказать, что при  $\alpha > 1$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

сходится.

**Теорема.** (Признак Коши)

Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{*}$$

1. Если  $\exists q : 0 < q < 1, \forall n > N : \sqrt[n]{a_n} \leq q$ , то ряд (\*) сходится.
2. Если  $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , что  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$ , то ряд (\*) расходится.

*Доказательство.*

1.  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$  ряд (\*) сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2.  $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$  ряд (\*) расходится.

□

**Следствие.** (Признак Коши в предельной форме)

1. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

то ряд (\*) сходится

2. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$

то ряд (\*) расходится

3. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q = 1$$

то ряд (\*) может как сходиться так и расходиться.

*Доказательство.*

1.  $q < 1$ , значит, начиная с некоторого номера, выполнено:  $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$  следовательно, по утверждению теоремы ряд (\*) сходится.
2.  $q > 1$ , значит, начиная с некоторого номера, выполнено:  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  следовательно, по утверждению теоремы ряд (\*) расходится.
3.  $q = 1$ , приведем пример рядов

(a)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

(b)

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

□

**Теорема.** (Признак Д'Аламбера)

Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. Если  $\exists q : 0 < q < 1, \forall n > N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , то ряд  $(*)$  сходится.
2. Если  $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} \geq 1$ , то ряд  $(*)$  расходится.

*Доказательство.*

1.  $\forall n > N : a_{n+1} \leq a_n \cdot q$ , значит

$$a_{N+1} \leq a_N \cdot q, \quad a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot q \leq a_N \cdot q^2, \quad \dots$$

таким образом,  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$a_{N+k} \leq a_N \cdot q^k$$

По признаку сравнения с геометрической прогрессией, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

сходится, значит, ряд  $(*)$  также сходится.

2.  $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$  ряд  $(*)$  расходится.

□

**Следствие.** (Признак Д'Аламбера в предельной форме)

Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

1. Если  $q < 1$ , то ряд  $(*)$  сходится.
2. Если  $q > 1$ , то ряд  $(*)$  расходится.
3. Если то ряд  $(*)$  может как сходиться так и расходиться.

*Доказательство.*

1.  $q < 1$ , значит, начиная с некоторого номера, выполнено:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < Q < 1$  следовательно, по утверждению теоремы ряд  $(*)$  сходится.

2.  $q > 1$ , значит, начиная с некоторого номера, выполнено:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  следовательно, по утверждению теоремы ряд (\*) расходится.

3.  $q = 1$ , приведем пример рядов

(a)

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

(b)

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

□

**Теорема.** (Интегральный признак)

Пусть  $f(x)$  определена на  $[1, +\infty)$ , монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int_1^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.*  $f(x)$  монотонно убывает, значит,  $\forall k \in \mathbb{N}$  и  $x \in [k, k+1] : f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ . Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

теперь для каждого  $k = 1, \dots, N$  сложим полученные неравенства:

$$\sum_{k=1}^N f(k) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

**Пример.** (Степенно-логарифмическая шкала)

1.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln^\beta x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\gamma (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^\gamma (\ln n)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

**Теорема.** (Схема Куммера)

Рассмотрим знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. Если  $\forall n \geq N$  существует последовательность  $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$ ,  $c_n > 0$  и существует  $\alpha > 0$  такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$

то ряд  $(*)$  сходится.

2. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд (\*) расходится.

*Доказательство.*

1. Рассмотрим неравенства для  $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{array} \right.$$

сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

поскольку  $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$ , то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

значит

$$\sum_{m=1}^k a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

отсюда получаем, что начиная с какого-то номера, частичные суммы ряда ограничены. Значит, ряд, поскольку он знакоположительный, сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для  $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_{N+1}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{array} \right.$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит, расходится и ряд (\*).

□

**Примеры.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)

Возьмем  $c_n = 1$ :

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

значит, если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит, если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

то ряд (\*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

то ряд (\*) расходится.

2. (Признак Раабе)

Возьмем  $c_n = n$ :

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n + 1) \geq \alpha$$

Значит, если

$$n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (\*) сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

Значит, если

$$n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (\*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q > 1$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q < 1$$

то ряд (\*) расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)

Возьмем  $c_n = n \cdot \ln(n)$  Если

$$\ln n \cdot \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\ln n \cdot \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (\*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n \cdot \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) = q > 1$$

то ряд (\*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n \cdot \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) = q < 1$$

то ряд (\*) расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)

Выводится из признака Бертрана.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

где  $\theta_n$  - ограниченная последовательность,  $\varepsilon > 0$  - произвольное. Тогда при

- (a)  $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$  - сходится,  $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$  - расходится.
- (b)  $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$  - сходится,  $\mu < 1 \Rightarrow (*)$  - расходится.
- (c)  $\lambda = 1, \mu = 1 \Rightarrow (*)$  - расходится.

### 1.3 Знакопеременные ряды

**Определение.** Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

**Утверждение.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

*Доказательство.* По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^N a_n \right| \leq \sum_{n=k}^N |a_n| < \varepsilon$$

□

**Определение.** Биекция  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется перестановкой натурального ряда.

**Теорема.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки  $\sigma$  натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad (2)$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

*Доказательство.* Пусть  $a_n \geq 0$ . Рассмотрим

$$S_k^\sigma = \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)}$$

Пусть  $N = \max_{1 \leq n \leq k} \sigma(n)$ ,  $S_n \rightarrow S$ . Тогда

$$S_k^\sigma \leq S_N \Rightarrow S_k^\sigma \leq S \Rightarrow \exists S^\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^\sigma$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^\sigma \Rightarrow S = S^\sigma$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

**Определение.** Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \cdots & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & & \cdots & & \\
 \hline
 & \leftarrow & & \downarrow & & & \\
 a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & & \cdots & & \\
 \hline
 & \leftarrow & \leftarrow & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & 
 \end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2, a_1 b_3, a_2 b_3, a_3 b_3, a_3 b_2, a_3 b_1, \dots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме (\*).

**Утверждение.** Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m \tag{*}$$

сходится абсолютно и равен  $AB$ .

*Доказательство.* Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда (\*), которые имеют вид  $S_{N^2}$ :

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \rightarrow AB, \quad N \rightarrow \infty$$

Теперь перейдем к общему виду  $S_{N^2+M}$ , ( $1 \leq M \leq 2N$ ) и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \dots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \dots + |b_N|) \rightarrow 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит,  $S_{N^2+M} \rightarrow AB$ .  $\square$

**Определение.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд  $(*)$  называется условно сходящимся.

**Утверждение.** Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0. \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad (2)$$

расходятся к  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно.

*Доказательство.* Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд  $(1)$  сходится, а  $(2)$  расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда  $(2)$  сходится, а  $(1)$  расходится. Значит, оба ряда расходятся.  $\square$

**Теорема.** (Теорема Римана)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то  $\forall a \in \mathbb{R} \exists \sigma_a$  такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists \sigma_{+\infty}$  и  $\sigma_{-\infty}$  такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{+\infty}(n)} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{-\infty}(n)} = -\infty$$

$\exists \sigma$  такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

*Доказательство.* Было доказано картинками, строгое доказательство можно найти в [3]  $\square$

**Теорема.** (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

(A): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а  $b_n$  монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

(D): Если существует  $M$  такая, что  $\forall N \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < M$$

и  $b_n$  монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

*Доказательство.* Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^p a_n, \quad A_{k-1} = 0 \Rightarrow a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n &= \sum_{n=k}^m (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1} \cdot b_n = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \end{aligned}$$

(A):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

(D):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \stackrel{(1)}{\leq} 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

(1):

$$|A_p| = \left| \sum_{n=k}^p a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^p a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \right| \leq 2M$$

□

**Следствие.** (Признак Лейбница)

Если  $a_n$  монотонно убывает и  $a_n \rightarrow 0$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \tag{*}$$

сходится

*Доказательство.*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд (\*) сходится. □

## 2 Функциональные последовательности и ряды

### 2.1 Функциональные последовательности

**Определение.** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$  определены на  $A \subset \mathbb{R}$ . Если  $\forall x \in A$ :

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится на  $A$  поточечно.

**Примеры.**

1.  $\forall x \in [0, 1]$ :

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\sin \frac{x}{n} \rightarrow 0$$

**Определение.** Пусть  $\forall n : f_n(x)$  определены на  $A \subset \mathbb{R}$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{\varepsilon} : \forall n > N_{\varepsilon}, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что  $f_n(x)$  сходится равномерно к  $f(x)$  на  $A$ , и пишут  $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$ .

**Примеры.**

1. На  $[0, 1]$

$$x^n \not\rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

поскольку  $\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall N_{\varepsilon} \ \exists n > N_{\varepsilon}, \ \exists x_{\varepsilon_0} \in [0, 1)$  такой, что  $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$ .

2. на  $[0, \frac{1}{2}] : x^n \not\rightarrow 0$ .

3.  $f_n(x) = x^n - x^{2n}$  на  $[0, 1] : f_n \not\rightarrow 0$ .

$$f'_n = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \ f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4.  $f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \not\rightarrow 0$  на  $\mathbb{R}$ , но  $\forall a, b, \ \forall x \in [a, b] : \sin \frac{x}{n} \rightarrow 0$ .

**Теорема.** (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \sup_A |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит, после предельного перехода, получаем:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит,  $x \in A$ :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ):

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_m(x)| &= |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ): Для каждого  $x \in A$  применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Тогда после предельного перехода получим, что  $\forall x \in A$ :

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности) Пусть  $\forall x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Если

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, c_n \geq 0, c_n \rightarrow 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$$

*Доказательство.* Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

□

**Теорема.** Пусть  $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$ ,  $f_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in A$ . Тогда  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.* По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем  $n > N_\varepsilon$  и запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

**Теорема.** (Почленное интегрирование)

Пусть  $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$ ,  $f_n \in \mathcal{C}[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x f(t) dt$$

*Доказательство.*

$$\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b - a| < \varepsilon \cdot |b - a|$$

□

**Теорема.** (Почленное дифференцирование)

Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  такая, что  $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ ,  $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0) \rightarrow \alpha$ .

Пусть  $f'_n(x) \xrightarrow{[a,b]} g(x)$ . Тогда:

$$f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x), \quad f(x) \in \mathcal{C}^1[a, b] \text{ и } f'(x) = g(x)$$

*Доказательство.* По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt \Rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) \Rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt$$

отсюда

$$f_n(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt + \alpha = f(x)$$

□

## 2.2 Функциональные ряды

**Определение.** Рассмотрим  $\{a_n(x)\}$ , определенные на  $A \subset \mathbb{R}$ . Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\}, \{S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если  $\forall x \in A$  ряд (1) сходится к  $S(x)$ , то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если  $S_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$ , то говорят, что ряд (1) сходится равномерно на  $A$ .
3. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$

то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

**Теорема.** (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} : \forall m, k > N_{\varepsilon}, \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* По критерию Коши для функциональных последовательностей

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Необходимое условие равномерной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

Тогда  $|a_n(x)| \xrightarrow{A} 0$ .

*Доказательство.*

$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \xrightarrow{A} S(x) - S(x) = 0$$

□

**Теорема.** Пусть  $\forall n : a_n(x)$  определены на  $A$  и непрерывны в точке  $x_0 \in A$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

Тогда  $S(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*  $S_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$  и  $\forall n : a_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Значит,  $S_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , и по теореме для функциональных последовательностей,  $S(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . □

**Теорема.** (Почленное интегрирование)

Пусть  $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^x a_n(t) dt \right) \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x S(t) dt$$

*Доказательство.*  $S_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$ . Проинтегрируем почленно:

$$\int_a^x S_n(t) dt \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x S(t) dt$$

что можно  $\forall x \in [a, b]$  записать, как:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x \left( \sum_{n=1}^k a_n(t) \right) dt = \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x \left( \sum_{n=1}^k a_n(t) \right) dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left( \int_a^x a_n(t) dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^x a_n(t) dt \right) \end{aligned}$$

□

**Теорема.** (Почленное дифференцирование)

Пусть  $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \alpha$$

где  $x_0 \in [a, b]$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} G(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} S(x) \in \mathcal{C}^1[a, b], \quad S'(x) = G(x)$$

*Доказательство.* Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности  $S_n(x)$ . □

**Теорема.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Пусть  $\forall n : |a_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \forall x \in A$ . Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} S(x)$$

*Доказательство.* По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^m \alpha_n < \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим пару последовательностей  $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  на  $A$ .

( $\mathcal{A}$ ): Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A}$$

и  $\exists M > 0$ ,  $\forall x \in A$ ,  $\forall n : |b_n(x)| < M$  и  $b_n(x)$  монотонна  $\forall x \in A$ .

( $\mathcal{D}$ ): Пусть  $\exists M > 0$ ,  $\forall x \in A$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq M$$

и  $b_n(x)$  монотонна  $\forall x \in A$ , причем  $b_n(x) \xrightarrow{A} 0$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{A}$$

*Доказательство.* Аналогично как для числовых рядов. Введем:

$$A_p(x) = \sum_{n=k}^p a_n(x), \quad A_{k-1}(x) = 0 \Rightarrow a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n(x)b_n(x) &= \sum_{n=k}^m (A_n(x) - A_{n-1}(x)) b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1}(x)b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)b_{n+1}(x) = \\ &= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x)b_m(x) \end{aligned}$$

( $\mathcal{A}$ ):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x)b_m(x) \right| \leq \varepsilon \cdot 3M$$

( $\mathcal{D}$ ):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x)b_m(x) \right| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$$

□

## 2.3 Степенные ряды

**Определение.** Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называются степенными рядами.  $a_n$  - коэффициенты степенного ряда,  $x_0$  - центр разложения.

**Замечание.** В центре разложения ряд сходится.

**Замечание.** Сдвиг  $x - x_0 \mapsto x$  не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

**Теорема.** (Первая теорема Абеля)

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (*)$$

1. Если существует  $x_1 \in \mathbb{R}$ , что  $(*)$  сходится в точке  $x_1$ , то для любых  $x$ , таких, что  $|x| < |x_1|$  ряд  $(*)$  сходится.
2. Если существует  $x_2 \in \mathbb{R}$ , что ряд  $(*)$  расходится в точке  $x_2$ , то для любых  $x$ , таких что  $|x| > |x_2|$  ряд  $(*)$  расходится.

*Доказательство.*

1. Пусть  $x : |x| < |x_1|$ .

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \stackrel{(1)}{\leq} M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

(1): Поскольку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$$

то  $a_n x_1^n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n x_1^n| < M$

Таким образом, ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. Теперь пусть  $x : |x| > |x_2|$ . От противного: пусть есть точка  $y : |y| > |x_2|$ , в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках  $x : |x| < |y|$ , а значит, и в  $x_2$  - противоречие.

□

**Замечание.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (*)$$

Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - все точки, в которых ряд  $(*)$  сходится,  $A \neq \emptyset$ , так как  $\{0\} \in A$ .

Пусть  $B \subset \mathbb{R}$  - все точки, в которых ряд  $(*)$  расходится, и пусть  $B \neq \emptyset$ .

Тогда из первой теоремы Абеля следует, что  $A = \{0\}$  или  $\exists a > 0 : (-a, a) \subset A$ , а также  $\exists b > 0 : (-\infty, -b) \cup (b, +\infty) \subset B$ .

**Утверждение.**  $a = b$

*Доказательство.* Предположим что это не так, тогда  $a < b$  или  $b < a$ . Пусть для определенности  $a < b$ , по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ . Значит,  $c$  не лежит ни в  $A$ , ни в  $B$ , а такого быть не может, противоречие. □

**Определение.** Число  $a = b$  называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается  $R$ . Формально полагают, что если  $R = 0$ , то  $A = \{0\}$ , если  $B = \emptyset$ , то  $R := +\infty$ .

**Теорема.** (Формула Коши-Адамара)

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Если предел равен нулю, то  $R = +\infty$ .

Если предел равен бесконечности, то  $R = 0$ .

*Доказательство.* Применим признак Коши к ряду

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1 & \text{сходится, и } |x| < R, \\ l > 1 & \text{расходится, и } |x| > R \end{cases}$$

□

**Теорема.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \quad (*)$$

и пусть  $R > 0$ .

1.  $\forall \varepsilon > 0$  на отрезке  $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$  ряд равномерно сходится.
2.  $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$ .
3.  $\forall x \in (-R, R)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t) dt$$

4.  $S(x) \in \mathcal{C}^\infty(-R, R)$ .

*Доказательство.*

1.  $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot (R - \varepsilon)^n$  по признаку Вейерштрасса.
2. из пункта 1:  $\forall \varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R + \varepsilon, R - \varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$ .
3. Поскольку ряд (\*) равномерно сходится на любом отрезке внутри  $(-R, R)$ , то можно почленно интегрировать

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

4. Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

значит,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha x^n$$

имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости  $R$ . Тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

□

**Теорема.** (Вторая теорема Абеля)

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x), \quad R > 0$$

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Тогда  $S(x) \in \mathcal{C}[0, R]$  то есть

$$\exists \lim_{x \rightarrow R-0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = S(R)$$

*Доказательство.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left( \frac{x}{R} \right)^n$$

а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на  $[0, R]$ .  $\square$

## 2.4 Ряды Тейлора

**Определение.** Пусть  $f(x) \in C^\infty(B(x_0))$ . Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции  $f(x)$  с центром ряда  $x_0$ .

**Замечание.** Далее везде центр разложения в 0.

**Теорема.** Если в некоторой окрестности нуля выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

*Доказательство.* Подставим  $x = 0$ , тогда  $a_0 = f(0)$ . Продифференцируем и подставим  $x = 0$ , тогда  $a_1 = f'(0)$ . Снова продифференцируем и подставим  $x = 0$ , тогда  $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$ . Продолжая выполнять эту операцию, для каждого  $n$  получим  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .  $\square$

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in C^\infty(-a, a)$  и  $|f^{(n)}(x)| \leq A^n$ ,  $A > 0$ .

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$

*Доказательство.* По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа  $\forall x \in (-a, a)$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Тогда

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| \leq \frac{A^{N+1} \cdot a^{N+1}}{(N+1)!} \rightarrow 0$$

□

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Несложно проверить, что  $f(x) \in C^\infty(B(0))$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \neq f(x)$$

**Пример.** (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Этот ряд сходится на  $(-1, 1)$ , причём

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2}$$

но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

не сходится.

**Лемма.** Если  $a_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \rightarrow A, \quad N \rightarrow \infty$$

*Доказательство.* Оценим разность

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n - A \right| = \frac{1}{N} \cdot \left| \sum_{n=1}^N a_n - AN \right| = \frac{1}{N} \cdot \left| \sum_{n=1}^N (a_n - A) \right|$$

$$a_n \rightarrow A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1, \ \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Возьмем число  $N_1 < N$  и разобьём сумму на две части:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |a_n - A| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N_1} |a_n - A| + \frac{1}{N} \sum_{n=N_1+1}^N |a_n - A|$$

Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{n=N_1+1}^N |a_n - A| < \frac{1}{N} \cdot \varepsilon \cdot (N - N_1) = \varepsilon \cdot \frac{N - N_1}{N}$$

В итоге получаем

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n - A \right| \leq \frac{C}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

□

**Теорема.** (Теорема Таубера)

Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на  $(-1, 1)$ , существует

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = A$$

и пусть  $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Тогда существует

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

*Доказательство.* Обозначим  $\forall x \in (0, 1)$

$$N_x = \left[ \frac{1}{1-x} \right]$$

и введём функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Если  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 1 - 0$ , то теорема доказана. Разобьем исходный ряд на две суммы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N_x} a_n x^n + \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\left| \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n) \right| = \left| \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) \right| \stackrel{(1)}{\leq} \\ \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{N_x} |a_n| n \leq \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n| n \stackrel{(2)}{\rightarrow} 0, \quad x \rightarrow 1-0$$

(1): Поскольку  $x < 1$ , то  $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} < n$

(2):  $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow |a_n n| \rightarrow 0$ , значит, по лемме все выражение стремится к 0.

$$\left| \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n \right| \stackrel{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{N_x + 1} \sum_{n=N_x+1}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{N_x + 1} \cdot \frac{x^{N_x+1}}{1-x} < \varepsilon$$

(3):  $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow |a_n n| < \varepsilon$ , а также  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_x+1}$

Отсюда при  $x \rightarrow 1-0$ :  $|\varphi(x)| < 2\varepsilon$ .

□

### 3 Бесконечные произведения

**Определение.** Рассмотрим  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\Pi_n = \prod_{k=1}^n u_k\}_{n=1}^{\infty}$ .

Пара последовательностей  $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  называется бесконечным произведением чисел  $\{u_n\}$ , обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

$u_n$  - общий член,  $\Pi_n$  - частичное произведение.

**Определение.** Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n \quad (*)$$

1. называется сходящимся, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = a \neq 0$ .
2. называется расходящимся, если  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$ .
3. Если  $\exists n : u_n = 0$ , то произведение  $(*)$  называется расходящимся к 0.

**Теорема.** (Необходимое условие сходимости бесконечного произведения)

Если  $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, то  $u_n \rightarrow 1$ .

*Доказательство.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1$$

□

**Следствие.** Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n, \quad a_n \rightarrow 0$$

#### 3.1 Связь бесконечных произведений и рядов

**Теорема.** Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

сходится.

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ): Пусть произведение сходится, тогда  $\Pi_N \rightarrow \Pi$ . Поскольку  $\ln x \in \mathcal{C}(0, +\infty)$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(\Pi_N) = \ln(\Pi)$$

значит, ряд сходится.

( $\Leftarrow$ ): Пусть ряд сходится, тогда  $S_N \rightarrow S$ . Поскольку  $\exp x \in \mathcal{C}(0, +\infty)$ , то

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp(S_N) = \exp(S)$$

значит, произведение сходится.

□

**Определение.** Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответствующий ряд из логарифмов.

**Теорема.** Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

*Доказательство.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1 > 0$$

отсюда, по признаку сравнения в предельной форме, получаем утверждение теоремы. □

**Следствие.** Если  $a_n$  знакопостоянны, то произведение и соответствующий ряд из логарифмов сходятся или расходятся одновременно.

**Теорема.** Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

*Доказательство.* Разложим по формуле Тейлора:

$$\ln(1 + a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{o}(a_n^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

Значит, по признаку сравнения в предельной форме, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + a_n) - a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

сходятся или расходятся одновременно. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + a_n) - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

то есть ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + a_n) - a_n)$$

сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, комбинируя эти факты, получаем утверждение теоремы.  $\square$

**Замечание.** Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(x))$$

анализируя соответствующий функциональный ряд из логарифмов.

**Пример.** (Пример Эйлера)

Пусть  $p_k$  обозначает  $k$ -е простое число. Тогда при  $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{ls}}\right) = \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} < \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Тогда

$$\sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \quad N \rightarrow \infty$$

### 3.2 Разложение синуса в бесконечное произведение

**Лемма.**  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1) \sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$$

где  $P_n$  - многочлен  $n$ -й степени.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База  $n = 1$ :

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

Шаг: Пусть верно для  $m < 2n+1$  (нам понадобятся только  $2n-3$  и  $2n-1$ )

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n-3)x = 2 \sin(2n-1)x \cdot \cos 2x$$

Отсюда выразим  $\sin(2n+1)x$  и подставим выражения для  $2n-3$  и  $2n-1$ :

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)x &= 2 \sin(2n-1)x \cdot \cos 2x - \sin(2n-3)x = \\ &= (2n-1) \sin x \cdot P_{n-1}(\sin^2 x) \cdot (1 - 2 \sin^2 x) - (2n-3) \sin x \cdot P_{n-2}(\sin^2 x) = \\ &= (2n+1) \sin x \cdot \left( -\frac{2(2n-1)}{2n+1} \cdot P_n(\sin^2 x) + \frac{2n-1}{2n+1} \cdot P_{n-1}(\sin^2 x) - \frac{2n-3}{2n+1} \cdot P_{n-2}(\sin^2 x) \right) \end{aligned}$$

□

**Лемма.**  $\forall \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ :

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) - 1$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База  $n = 1$ :

$$|(1 + a_1) - 1| \leq (1 + |a_1|) - 1$$

Шаг: Пусть верно для  $n - 1$ :

$$\left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + |a_k|) - 1$$

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1 \right| &= \left| (1 + a_n) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right| \stackrel{(1)}{=} \\
&\stackrel{(1)}{=} \left| (1 + a_n) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - (1 + a_n) + a_n \right| = \\
&= \left| (1 + a_n) \left( \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right) + a_n \right| \leq \\
&\leq |1 + a_n| \cdot \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) - 1 \right| + |a_n| \stackrel{(2)}{\leq} \\
&\stackrel{(2)}{\leq} (1 + |a_n|) \cdot \left( \prod_{k=1}^{n-1} (1 + |a_k|) - 1 \right) + |a_n| = \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) - 1
\end{aligned}$$

(1): Добавили и вычли  $a_n$ .

(2): По предположению индукции и неравенству треугольника

$$|1 + a_n| \leq 1 + |a_n|$$

□

**Лемма.** Если  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , то  $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$

**Теорема.** (Разложение синуса в бесконечное произведение)

$\forall x \neq \pi k$ :

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right)$$

*Доказательство.*  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1) \sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$$

$$\sin((2n+1)x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

при этом

$$\sin \frac{\pi k}{2n+1} \neq 0$$

значит, обязан обнуляться многочлен:

$$P_n(\sin^2 x) = 0, \quad x = \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Таким образом, найдены все корни многочлена. Обозначим  $\omega = \sin^2 x$ , тогда

$$P_n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Разложим многочлен на множители:

$$P_n(\omega) = B \cdot \prod_{k=1}^n \left( \omega - \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right)$$

где  $B$  - коэффициент при старшем члене. Преобразуем:

$$\begin{aligned} P_n(\sin^2 x) &= B \cdot \prod_{k=1}^n \left( \sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right) = \\ &= B \cdot \prod_{k=1}^n \left( -\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right) \cdot \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) = A \cdot \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, из начального соотношения, получим

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} = A \cdot \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

Перейдя к пределу при  $x \rightarrow 0$  в обеих частях, получим

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} \rightarrow 1, \quad \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \rightarrow 1$$

значит,  $A = 1$  и выражение имеет вид:

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

сделаем замену  $t = (2n+1)x$ . Тогда

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

Возьмем  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t| < n$ ,  $m < n$  и представим произведение в виде

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \cdot R_{n,m}(t)$$

где

$$R_{n,m}(t) = \prod_{k=m+1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right)$$

Посмотрим на пределы при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} \rightarrow \frac{\sin t}{t}, \quad \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \right) \rightarrow \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

причем  $R_{n,m}(t)$  выражается через них, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,m}(t) = R_m(t)$$

Итак, перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right) \cdot R_m(t)$$

Оценим  $R_{n,m}$ , воспользовавшись леммами:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \right| &\leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \leq \\ &\leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{t^2}{(\frac{2}{\pi} \cdot \pi k)^2}\right) - 1 = \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 < \\ &< \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) = C$$

оно сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{t^2}{4k^2} \right|$$

при этом

$$\prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right)}{\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right)} \rightarrow \frac{C}{C} = 1, \quad m \rightarrow \infty$$

Значит,  $R_m(t) \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом, получаем утверждение теоремы:

$$\sin t = t \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

□

**Следствие.** (Формула Валлиса)

При  $t = \frac{\pi}{2}$

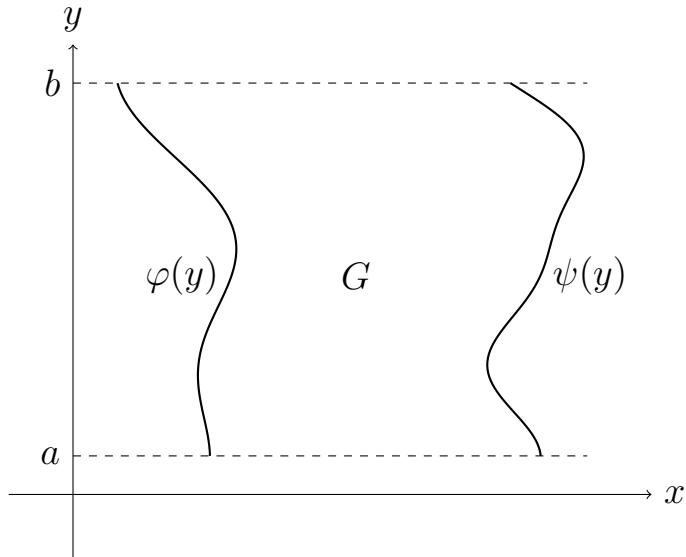
$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right)$$

## 4 Интегралы с параметром

### 4.1 Собственные интегралы с параметром

Пусть  $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $\varphi(y) \leq \psi(y)$ . Рассмотрим  $G \subset \mathbb{R}^2$ :

$$G = \{(x, y) : y \in [a, b], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$



**Определение.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{R}[\varphi(y), \psi(y)]$ . Интеграл

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

называется собственным интегралом с параметром.

**Теорема.** Пусть  $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$ . Тогда

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[a, b]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
|F(y + \Delta y) - F(y)| &= \left| \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right| \stackrel{(1)}{\leq} \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \left| \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \left| \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \\
&+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx \stackrel{(2)}{\leq} M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \max_y |\psi(y) - \varphi(y)|
\end{aligned}$$

(1):

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx = \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \\
&+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx = \\
&= \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx
\end{aligned}$$

(2): Первые два слагаемых оцениваются так:  $f(x, y + \Delta y) \leq M$ , так как  $f \in \mathcal{C}(G)$  и, поскольку  $\varphi(y)$  и  $\psi(y)$  непрерывны, то

$$|\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)| < \varepsilon, \quad |\psi(y + \Delta y) - \psi(y)| < \varepsilon$$

Последнее слагаемое оценивается так:  $f \in \mathcal{C}(G)$ , значит,  $f$  равномерно непрерывна (так как  $G$  - компакт)  $\Rightarrow$  при  $\Delta y \rightarrow 0 : |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$   $\square$

**Теорема.** Пусть  $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ ,  $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$ ,  $\exists f'_y(x, y) \in \mathcal{C}(G)$ . Тогда  $F(y) \in \mathcal{C}^1(G)$  и

$$F'(y) = \left( \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right)' = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta y} (F(y + \Delta y) - F(y)) &= \\
&= \frac{1}{\Delta y} \left( \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\Delta y} \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx + \frac{1}{\Delta y} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx \stackrel{(2)}{=} \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\Delta y} (\psi(y + \Delta y) - \psi(y)) \cdot f(\psi(y + \theta_1 \Delta y), y + \Delta y) - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y} (\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)) f(\varphi(y + \theta_2 \Delta y), y + \Delta y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y + \theta_3 \Delta y) dx
\end{aligned}$$

(1): Аналогично предыдущей теореме

(2): Применяем теорему о среднем к первому и второму слагаемому, и теорему Лагранжа к третьему слагаемому ( $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$ )

Значит, существует предел при  $\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \psi'(y) f(\psi(y), y) - \varphi'(y) f(\varphi(y), y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$ . Тогда

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_c^t \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad G(t) = \int_a^b \left( \int_c^t f(x, y) dy \right) dx \\
F'(t) &= \int_a^b f(x, t) dx, \quad G'(t) = \int_a^b f(x, t) dx
\end{aligned}$$

Отсюда  $F(t) - G(t) = \tilde{C}$ . Заметим, что  $F(c) = G(c) = 0 \Rightarrow \tilde{C} = 0$ . Значит,  $F(t) = G(t)$ , в частности для  $t = d$ .  $\square$

## 4.2 Несобственные интегралы с параметром

**Определение.** Пусть  $f(x, y)$  определена на  $[a, \omega] \times Y$ ,  $\forall y : f(x, y) \in \mathcal{R}[a, b] \forall b \in [a, \omega]$ . Тогда несобственным интегралом с параметром называется предел

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^\omega f(x, y) dx$$

**Определение.** Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^\omega f(x, y) dx$$

Пусть на  $Y \subset \mathbb{R}$ :

$$\int_a^\omega f(x, y) dx = F(y)$$

Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in [a, \omega] : \forall a' > A, \forall y \in Y :$

$$\left| \int_a^{a'} f(x, y) dx - F(y) \right| < \varepsilon$$

то

$$\int_a^\omega f(x, y) dx \stackrel{Y}{\rightrightarrows} F(y)$$

**Утверждение.** Несобственный интеграл

$$\int_a^\omega f(x, y) dx \stackrel{Y}{\rightrightarrows}$$

тогда и только тогда когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in [a, \omega], \forall a' > A, \forall y \in Y :$

$$\left| \int_{a'}^\omega f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$$\left| \int_{a'}^\omega f(x, y) dx \right| = \left| \int_a^{a'} f(x, y) dx - F(y) \right|$$

$\square$

Далее, без ограничения общности будем писать  $\omega = +\infty$ .

**Теорема.** (Критерий Коши равномерной сходимости)

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

тогда и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists A > a, \forall a_1, a_2 > A, \forall y \in Y$ :

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ):

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{a_1}^{+\infty} f(x, y) dx - \int_{a_2}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ):

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Тогда при  $a_2 \rightarrow +\infty$ :

$$\left| \int_{a_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in Y$$

Если  $\exists g(x)$  такая, что  $|f(x, y)| < g(x)$  и сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

сходится равномерно на  $Y$ .

*Доказательство.* По критерию Коши:

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx < \varepsilon$$

□

**Напоминание.** (Вторая теорема о среднем)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , а  $g(x)$  — монотонна. Тогда  $\exists c \in [a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x) dx + g(b) \cdot \int_c^b f(x) dx$$

**Теорема.** (Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx, \quad y \in Y$$

Пусть  $|f(x, y)|, |g(x, y)| < M$

(A):

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

$g(x, y)$  монотонна  $\forall y$ . Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

(D):

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| < M$$

$g(x, y)$  монотонна и  $g(x) \stackrel{Y}{\Rightarrow} 0$ . Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| &\stackrel{(1)}{=} \left| g(a_1, y) \cdot \int_{a_1}^c f(x, y) dx + g(a_2, y) \cdot \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq |g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \end{aligned}$$

(1): По второй теореме о среднем.

(A):

$$|g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M$$

(D):

$$|g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon \cdot 2M + \varepsilon \cdot 2M$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$  и

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c, d]}{\Rightarrow} F(y)$$

Тогда  $F(y) \in \mathcal{C}[c, d]$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| &\leq \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$ ,  $\exists f'_y(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = F(y), \quad \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \stackrel{[c, d]}{\Rightarrow} G(y)$$

Тогда  $\exists F'(y) = G(y)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \rightarrow +\infty$  и

$$F_n(y) = \int_a^{x_n} f(x, y) dx \rightarrow F(y)$$

Дифференцируя по теореме для собственных интегралов, получим, что для каждого  $n$  выполнено:

$$F'_n(y) = \int_a^{x_n} f'_y(x, y) dx, \quad F'_n(y) \stackrel{[c,d]}{\Rightarrow} G(y)$$

тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональных последовательностей:

$$F'(y) = G(y)$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$  и

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \Rightarrow F(y)$$

Тогда

$$\int_c^d \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \rightarrow +\infty$

$$F_n(y) = \int_a^{x_n} f(x, y) dx$$

Тогда по теореме для собственных интегралов:

$$\int_c^d \left( \int_a^{x_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{x_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_c^d F_n(y) dy \right) &= \int_c^d \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

□

**Теорема.** (Признак Дини равномерной сходимости последовательности)

Пусть  $\forall n : f_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b] : f_n(x)$  монотонны по  $n$  и

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$$

Тогда  $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$ .

*Доказательство.*

$$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x_0}, \forall n \geq N_{\varepsilon, x_0} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Отсюда  $\exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) :$

$$|f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x) - f(x)| \leq |f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x) - f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x_0)| + |f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Из монотонности следует, что для всех номеров, больших данного, неравенство выполняется.

Рассмотрим накрытие:

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} B_{\delta_\varepsilon}(x) \Rightarrow \exists \{x_i\}_{i=1}^k, [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$$

Возьмем  $N_\varepsilon = \max_{i=1, \dots, k} (N_{\varepsilon, x_i})$ . Тогда

$$\forall x \in [a, b], \forall n > N_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty)), f(x, y) \geq 0$ . Пусть существует

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[b, +\infty)$$

и пусть существует

$$G(x) = \int_b^{+\infty} f(x, y) dy \in \mathcal{C}[a, +\infty)$$

Если существует

$$\int_b^{+\infty} F(y) dy = I$$

то существует

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I$$

*Доказательство.* Введем монотонные последовательности  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $b_k \rightarrow +\infty$

$$F_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y) dx, \quad G_k(x) = \int_b^{b_k} f(x, y) dy$$

Заметим, что по признаку Дирихле

$$F_n(y) \rightrightarrows F(y), \quad G_k(x) \rightrightarrows G(x)$$

по теореме для собственных интегралов

$$\int_b^{b_k} \left( \int_a^{a_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{a_n} \left( \int_b^{b_k} f(x, y) dy \right) dx$$

Пусть

$$C_{nk} = \int_b^{b_k} F_n(y) dy = \int_a^{a_n} G_k(x) dx$$

Тогда

$$C_{nk} = \int_b^{b_k} F_n(y) dy \leq \int_b^{b_k} F(y) dy \leq \int_b^{+\infty} F(y) dy = I$$

но с другой стороны

$$C_{nk} = \int_a^{a_n} G_k(x) dx \leq \int_a^{a_n} G(x) dx \rightarrow \int_a^{+\infty} G(x) dx = I' \leq I$$

Теперь мы знаем, что существует интеграл

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I'$$

и можем повторить это рассуждение в другом порядке (сначала для  $G$ , а потом для  $F$ ) и получить, что  $I \leq I' \Rightarrow I = I'$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty))$ . Пусть существуют

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[b, +\infty), \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

и пусть существуют

$$G(x) = \int_b^{+\infty} f(x, y) dy \in \mathcal{C}[a, +\infty), \quad \int_b^{+\infty} |f(x, y)| dy$$

Если существуют

$$\int_b^{+\infty} F(y) dy = I, \quad \int_b^{+\infty} |F(y)| dy$$

то существуют

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I, \quad \int_a^{+\infty} |G(x)| dx$$

*Доказательство.* Заметим, что  $|f(x, y)| - f(x, y) \geq 0$ ,  $|f(x, y)| \geq 0 \Rightarrow$  верны условия теоремы.  $\square$

**Теорема.** (Интеграл Дирихле)

$\forall a \in \mathbb{R} :$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)$$

*Доказательство.* Пусть

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx,$$

Заметим, что  $I(0) = 0$ ,  $I(-a) = -I(a)$ . Далее рассматриваем только  $a > 0$ .

Введем

$$I(a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot e^{-\varepsilon x} dx$$

Пусть  $a \geq a_0 > 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . По теоремам выше,  $I(a, \varepsilon)$  непрерывна. Для почленного дифференцирования, докажем равномерную сходимость:

$$|\cos(ax) \cdot e^{\varepsilon x}| \leq e^{-\varepsilon x}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} = \frac{1}{\varepsilon}$$

получим

$$I'_a(a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx$$

при  $a \geq a_0 > 0$ ,  $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ . Интегрируем по частям:

$$I'_a(a, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{a}{\varepsilon} \cdot \int_0^{+\infty} \sin ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx = \frac{\varepsilon}{a^2} - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \cdot \int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx$$

получили уравнение:

$$I'_a(a, \varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow I'_a(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + a^2} \Rightarrow I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon} + C(\varepsilon)$$

При  $a = 0$ :  $I(a, \varepsilon) = 0 \Rightarrow C(\varepsilon) = 0$ . Значит

$$I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon}$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0+$  из непрерывности

$$I(a) = \frac{\pi}{2}$$

□

## 5 Эйлеровы интегралы

### 5.1 Гамма-функция Эйлера

Рассмотрим последовательность

$$\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)! n^x}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) &= \prod_{k=1}^{n-1} k \cdot x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right) \dots \left(1+\frac{x}{n-1}\right) = \\ &= (n-1)! \cdot x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right) \dots \left(1+\frac{x}{n-1}\right) \\ n^x &= \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \end{aligned}$$

таким образом

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{1}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right) \dots \left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \cdot \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \end{aligned}$$

Поскольку  $\left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x = 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ , то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x$$

Этот предел обозначают  $\Gamma(x)$ .

**Определение.**  $\Gamma(x)$  называется гамма-функцией Эйлера.

**Теорема.** (Основное функциональное соотношение)

$\forall x \in D(\Gamma)$ :

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

*Доказательство.*

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^{x+1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k+1)(n-1)! n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n} = x$$

□

**Теорема.** (Интегральное представление гамма-функции)

$\forall x > 0$ :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

*Доказательство.* Для начала вычислим интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt &= \frac{1}{x} \cdot \int_0^1 (1-t)^n dt^x = \frac{n}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{n-1} dt = \dots = \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \cdot \int_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \\ &= \frac{n! (n+1)^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \cdot \frac{1}{(n+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \cdot \Gamma_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \cdot \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \left| t = \frac{\tau}{n} \right| = \frac{(n+1)^x}{n^x} \cdot \int_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^x}{n^x} = 1$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau = \Gamma(x)$$

и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Таким образом, условия теоремы равносильны тому, что разность этих пределов равно нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt = 0$$

$$e^\alpha \geq 1 + \alpha \Rightarrow e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \Rightarrow e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

отсюда

$$\int_0^n t^{x-1} \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt \geq 0$$

$$e^\alpha \geq 1 + \alpha \Rightarrow e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \Rightarrow e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \int_0^n t^{x-1} \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt &= \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left( 1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left( 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \right) dt = \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left( 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \right) dt \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \int_0^n t^{x-1} e^{-t} \left( 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \right) dt = \frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t} dt \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(1): По неравенству Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

□

**Утверждение.**

$$\Gamma(n+1) = n!$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База  $n = 0$ :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Таким образом

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$$

Шаг: Пусть верно для  $n$ , то есть

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

По основному функциональному соотношению:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

□

**Теорема.** (Формула дополнения для гамма-функции Эйлера)

$\forall x \notin \mathbb{Z}$ :

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) &= \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \cdot (-x) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-x} = \\ &= \frac{\pi}{\pi x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \cdot 1 \stackrel{(1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \end{aligned}$$

(1): по формуле разложения синуса в бесконечное произведение:

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

□

**Пример.** (Интеграл Эйлера-Пуассона)

Заметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

Таким образом, можем посчитать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

## 5.2 Формула Стирлинга

**Теорема.** (Формула Стирлинга)

Для  $|\alpha_n| \leq 2$ :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

*Доказательство.*

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

Исследуем подынтегральную функцию на максимум:

$$(t^n e^{-t})' = n \cdot t^{n-1} e^{-t} - t^n e^{-t} = 0 \Rightarrow t_{\max} = n \Rightarrow \max(t^n e^{-t}) = n^n e^{-n}$$

отсюда

$$n! = n^n e^{-n} \cdot \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{n \ln \frac{t}{n} + n - t} dt$$

Сделаем замену  $-x^2 = n \ln \frac{t}{n} + n - t = n \ln(1 + \frac{t-n}{n}) + n - t$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\ln(1 + \tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \theta\tau)^2}, |\theta| < 1$$

$$\begin{aligned} n \ln \left(1 + \frac{t-n}{n}\right) + n - t &= \\ &= n \left( \frac{t-n}{n} - \frac{(t-n)^2}{2n^2} \cdot \frac{1}{(1 + \theta_n \cdot \frac{t-n}{n})^2} \right) + n - t = \\ &= -\frac{(t-n)^2}{2n} \cdot \frac{1}{(1 + \theta_n \cdot \frac{t-n}{n})^2} \end{aligned}$$

отсюда, после раскрытия модуля

$$x = \frac{t-n}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{1}{1 + \theta_n \cdot \frac{t-n}{n}} = \frac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n + \theta_n(t-n)}$$

$$nx + \theta_n(t-n)x = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot (t-n)$$

$$nx = (t-n) \left( \sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x \right) \Rightarrow t-n = \frac{nx}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x} \Rightarrow t = \frac{nx + n(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x)}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x}$$

отсюда

$$\begin{aligned} dt &= 2x \cdot \frac{nx + n(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x)}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x} \cdot \frac{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x}{nx} dx = \\ &= 2(x + \sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x) dx = (\sqrt{2n} + 2(1 - \theta_n)x) dx \end{aligned}$$

после всех преобразований, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{n \ln \frac{t}{n} + n - t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot (\sqrt{2n} + 2(1 + \theta_n)x) dx = \\ &= \sqrt{2\pi n} + \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \theta_n)e^{-x^2} dx^2 = \sqrt{2\pi n} + \beta_n, \quad |\beta| \leq 4 \end{aligned}$$

итого

$$n! = n^n e^n (\sqrt{2\pi n} + \beta_n) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

□

### 5.3 Бета-функция Эйлера

**Определение.**

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0$$

**Утверждение.**  $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$

*Доказательство.*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = |t = 1-x| = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = B(\beta, \alpha)$$

□

**Утверждение.**

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot B(\alpha, \beta)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} B(\alpha + 1, \beta) &= \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx = -\frac{1}{\beta} \int_0^1 x^\alpha d((1-x)^\beta) = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^\beta dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)(1-x)^{\beta-1} dx = \\ &\quad = \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha + 1, \beta) \end{aligned}$$

□

**Утверждение.**

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

*Доказательство.*

$$\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \left| t = \frac{1}{1+x} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\beta-1} (1+x)^{\alpha-1} (1+x)^2} dx$$

□

**Теорема.** (Связь между гамма и бета функциями)

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$

*Доказательство.* Сначала рассмотрим  $\alpha, \beta > 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \cdot \Gamma(\alpha + \beta) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \left( \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-t} dt \right) dx = |t = (1+x)y| = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \cdot \left( \int_0^{+\infty} (1+x)^{\alpha+\beta} \cdot y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y-yx} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y} \cdot e^{-yx} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y} \cdot \left( \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-yx} dx \right) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} \cdot e^{-y} \cdot \left( \int_0^{+\infty} (xy)^{\alpha-1} \cdot e^{-yx} d(yx) \right) dy = \\ &= \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta) \end{aligned}$$

Далее, используя рекуррентную формулу, распространяем на случай  $\alpha, \beta > 0$ .

□

**Замечание.** Интегралы вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\theta x \cdot \cos^\kappa x \, dx$$

сводятся к бета-функции.

## 6 Ряды Фурье

**Определение.** Выражения вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называются тригонометрическими полиномами.

**Определение.** Система функций

$$\{1, \{\cos(nx)\}_{n=1}^\infty, \{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty\}$$

называется тригонометрической системой.

**Определение.** Ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называются тригонометрическими рядами.

**Утверждение.** (Свойства тригонометрической системы)

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

$$\forall n \geq 1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \pi$$

$$\forall m, n \geq 1, m \neq n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \, dx = 0$$

$$\forall n \geq 0, m \geq 1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx) \, dx = 0$$

*Доказательство.* Очев. □

**Следствие.** Тригонометрическая система ортогональна относительно канонического скалярного произведения для функций (интеграл).

**Теорема.** Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \stackrel{[-\pi, \pi]}{\Rightarrow} f(x)$$

Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

*Доказательство.*  $\forall k$

$$\frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \sin(kx) \cos(nx) + b_n \cdot \sin kx \sin nx) \stackrel{[-\pi, \pi]}{\Rightarrow} f(x) \sin(kx)$$

По теореме о почленном интегрировании:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} b_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx$$

Аналогично  $a_k$ . □

**Определение.** Пусть существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

Тогда числа

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$ , а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называется рядом Фурье функции  $f(x)$ .

**Теорема.** Пусть существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

а также

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F_N(x))^2 dx = \min_T \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx$$

где  $T_N$  - тригонометрический полином степени не выше  $N$ .

*Доказательство.* Пусть

$$T_N = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx))$$

— произвольный тригонометрический полином степени  $N$  с коэффициентами:  $A_0, A_n, B_n$ .

Хотим минимизировать:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx$$

Раскрываем квадрат:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_N^2 dx$$

Вычислим:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N dx = \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f dx + \sum_{n=1}^N \left( A_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + B_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right)$$

Используем определение коэффициентов Фурье:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f dx = \pi \cdot a_0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \cos(nx) dx = \pi \cdot a_n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \sin(nx) dx = \pi \cdot b_n$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N dx = \pi \left( \frac{A_0 \cdot a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n a_n + B_n b_n) \right)$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} T_N^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} T_N^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx)) \right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \frac{A_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2) \end{aligned}$$

Возвращаемся к  $I$ :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left( \frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n a_n + B_n b_n) \right) + \pi \cdot \frac{A_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2)$$

Члены с  $A_0$ :

$$\pi \cdot \frac{A_0^2}{2} - 2\pi \cdot \frac{A_0 a_0}{2} = \pi \left( \frac{A_0^2}{2} - A_0 a_0 \right) = \pi \left( \frac{1}{2} (A_0 - a_0)^2 - \frac{1}{2} a_0^2 \right)$$

Члены с  $A_n, B_n$ :

$$\begin{aligned} \pi A_n^2 - 2\pi A_n a_n &= \pi ((A_n - a_n)^2 - a_n^2) \\ \pi B_n^2 - 2\pi B_n b_n &= \pi ((B_n - b_n)^2 - b_n^2) \end{aligned}$$

Получаем:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx + \frac{\pi}{2} (A_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{n=1}^N ((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2) - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$$

Обозначим (не зависит от  $A_0, A_n, B_n$ )

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$$

Итог:

$$I = C + \frac{\pi}{2} (A_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{n=1}^N ((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2)$$

Поскольку  $\pi > 0$  ясно, что  $I$  минимально, когда все квадраты равны нулю  $\implies$

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n, \quad \forall n$$

$$\implies T_N(x) = F_N(x)$$

**Следствие.** (Неравенство Бесселя)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

*Доказательство.* Из доказательства теоремы, заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \cdot \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) - \pi \cdot \frac{a_0^2}{2} \geq 0$$

это так, поскольку это часть слагаемых вычисленного интеграла от квадрата функции. Отсюда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

□

**Следствие.** При  $n \rightarrow \infty$  выполнено, что  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$

*Доказательство.* При  $n \rightarrow \infty$  ряд сходится, значит, по необходимому условию сходимости, выполнено  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$ . □

## 6.1 Ядро Дирихле

**Определение.**  $N$ -м ядром Дирихле называется

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx)$$

**Теорема.** (Свойства ядер Дирихле)

1.  $D_N$  непрерывная, четная и  $2\pi$ -периодичная функция.

2.  $D_N(0) = N + \frac{1}{2}$

3.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

4.  $\forall x \neq 2\pi k$ .

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{2 \cdot \sin(\frac{x}{2})}$$

*Доказательство.*

1. Очев

2.  $D_N(0) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos 0 = N + \frac{1}{2}$

3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx + \sum_{n=1}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \pi$$

4. Умножим обе части на  $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_N(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{n=1}^N 2 \cos(nx) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \cos(nx) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(nx - \frac{x}{2}\right)$$

Подставляем в сумму:

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_N(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{n=1}^N \left( \sin\left((n + \frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n - \frac{1}{2})x\right) \right)$$

Все промежуточные слагаемые сокращаются, остаётся:

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_N(x) = \sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)$$

Отсюда, при  $x \neq 2\pi k$ :

$$D_N(x) = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

□

### Замечание.

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^N \left( \cos(nx) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt + \sin(nx) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(t) \cdot \sum_{n=1}^N (\cos(nx) \cos(nt) + \sin(nx) \sin(nt)) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(t) \cdot \sum_{n=1}^N \cos(n(x-t)) \right) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_N(x-t) dt \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-\tau) D_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau) D_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_N(\tau) d\tau \end{aligned}$$

(1): Сделаем замену  $t = x - \tau$ . Отсюда

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+\tau) + f(x-\tau)) D_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x+\tau) + f(x-\tau)) D_N(\tau) d\tau$$

**Замечание.** Из неравенства

$$|f(x)| \leq \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

следует, что если существует интервал от квадрата, то существует и от модуля.

**Теорема.** (Принцип локализации Римана)

Пусть существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Тогда существование предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx_0) + b_n \cdot \sin(nx_0)) \right) = A$$

равносильно тому, что  $\forall \delta > 0$  существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt = A$$

*Доказательство.*

$$F_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt$$

значит, формулировка теоремы равносильна утверждению, что  $\forall \delta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt = 0$$

Выразим ядро Дирихле в явной форме:

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \cdot \sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin(Nt) \cos(\frac{t}{2}) + \cos(Nt) \sin(\frac{t}{2})}{2 \cdot \sin(\frac{t}{2})} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos(Nt) + \operatorname{ctg}(\frac{t}{2}) \sin(Nt) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \cdot \int_\delta^\pi &\cdot \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \cdot \cos(Nt) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \cdot \int_\delta^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \cdot \operatorname{ctg}(\frac{t}{2}) \sin(Nt) dt = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Определим две вспомогательные функции на  $[-\pi, \pi]$ :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}, & t \in [\delta, \pi] \\ 0, & t \in [-\pi, \delta] \end{cases} \implies I_1 = a_N(h) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, & t \in [\delta, \pi] \\ 0, & t \in [-\pi, \delta) \end{cases} \implies I_2 = b_N(g) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

По следствию коэффициенты Фурье интегрируемой функции стремятся к 0  $\square$

**Теорема.** (Признак сходимости Дирихле для ряда Фурье)

Пусть  $f(x)$  -  $2\pi$  периодическая, существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

для  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f_-(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f_+(x_0)$$

Если  $\forall \delta > 0$  таких, что существует интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt$$

то ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  и равен  $\frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t) dt - \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) D_N(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\delta (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \\ & \quad \frac{1}{\pi} \cdot \int_\delta^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) \cdot \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \end{aligned}$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{2 \sin \frac{t}{2}} dt < \varepsilon$$

$|I_2| < \varepsilon$  при большом  $N$  очевидно (как в принципе локализации Римана).  $\square$

**Определение.** Гёльдерова функция - это функция, для которой выполнено:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^\alpha$$

**Определение.** Условие Гёльдера в точке  $x_0$  для односторонних пределов:

$\exists C > 0, \alpha > 0, \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta) :$

$$|f(x_0 + t) - f_+(x_0)| \leq Ct^\alpha, |f(x_0 - t) - f_-(x_0)| \leq Ct^\alpha$$

**Следствие.** Если функция удовлетворяет условию Гёльдера в точке  $x_0$  (хотя бы односторонне), то теорема о сходимости Дини выполнима, т.е. ряд Фурье в этой точке сходится к среднему арифметическому односторонних пределов.

**Теорема.** Пусть  $f$  -  $2\pi$  периодическая,  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , везде кроме конечного числа точек (на периоде)  $\exists f'(x)$  и  $f'(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ . Тогда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \Rightarrow f(x)$$

*Доказательство.* Из условий теоремы существует интервал

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx, f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$$

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n}, b_n = \frac{\alpha_n}{n}$$

и, поскольку (используя неравенство:  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ )

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left( \alpha_n^2 + \frac{1}{n^2} \right), |b_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left( \beta_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$\square$

**Следствие.** Если  $f'(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  и Гёльдерова во всех точках, то ряд Фурье  $f(x)$  можно почленно дифференцировать.

*Доказательство.* очев.

$\square$

**Замечание.** (Про почленное интегрирование)

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

$$\int_0^x \left( f(x) - \frac{a_0}{2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \cdot \sin(nx) - \frac{b_n}{n} \cdot \cos(nx) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

$$\frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left( \alpha_n^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left( \beta_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

**Примеры.**

1. Возьмем  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  на  $(0, \pi)$  и продолжим ее периодически нечетным образом.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-x}{2} \cdot \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{\pi-x}{2} \cdot \cos(nx) \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \cos(nx) dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

2. Возьмем  $f(x) = |x|$  на  $[-\pi, \pi]$  и продолжим периодически.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \cos(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \cdot \cos(nx) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

Отсюда, поскольку ряд сходится равномерно от непрерывной функции к непрерывной функции, то можно подставить 0 и получить

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

отсюда можно получить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

## 6.2 Ядро Фейера

**Определение.** Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

значит, существуют  $D_N(x)$

Обозначим:

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Тогда:

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=0}^N F_N(x)$$

называются суммами Фейера.

$$\Psi_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=0}^N D_N(x)$$

называются ядрами Фейера.

**Лемма.** (Свойства ядер Фейера)

1.  $\psi_N(x)$  -  $2\pi$  периодическая, непрерывная, четная.

2.

$$\Psi_N(x) = \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2} \cdot x)}{2(N+1) \cdot \sin^2(\frac{x}{2})}$$

3.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x) dx = 1$$

4.  $\forall \delta > 0 :$

$$\int_{\delta}^{\pi} \Psi_N(x) dx \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ .

5.  $\Psi_N(x) \geq 0$

*Доказательство.*

2.

$$\sum_{n=0}^N D_N(x) = \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \sum_{n=0}^N \sin(Nx + \frac{1}{2}x) = \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})} \cdot \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

4.

$$0 \leq \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2} \cdot x)}{2(N+1) \cdot \sin^2(\frac{x}{2})} dx \leq \frac{1}{2(N+1)} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2(\frac{x}{2})} \leq \frac{C}{2(N+1)}$$

□

**Теорема.** (Теорема Фейера)

Если  $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  и  $2\pi$  периодическая, то  $\Phi_N(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \cdot \cos(nx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \cdot \sin(nx) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(t-x)) dt \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \cdot D_N(t) dt \end{aligned}$$

Получили:

$$F_N(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \cdot f(t+x) dt$$

отсюда

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(t) f(t+x) dt$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_N(x) - f(x)| &= \frac{1}{\pi} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x) \cdot (f(t+x) - f(x)) dt \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{-\delta} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)| dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)| dt + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot 2M \cdot 2
\end{aligned}$$

(будет пояснено)

□

**Теорема.** (Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции на отрезке многочленами)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , а также  $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon(x)$  такой, что

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

*Доказательство.* Линейной заменой получим, что достаточно доказать для отрезка  $[0, \pi]$ , затем непрерывно продолжаем ее до отрезка  $[-\pi, \pi]$ . Тогда по теореме Фейера существует тригонометрический многочлен, приближающий функцию. Затем раскладываем синусы и косинусы по формулам Тейлора и получаем утверждение теоремы.

(была доказана устно, тоже будет пояснено)

□

**Теорема.** (Равенство Парсеваля)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \\
&\quad + 2 \left( \frac{a_0}{2} - \frac{A_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^N ((a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2) - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists T_N(x)$  такой, что

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$$

отсюда

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

значит

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

□

## Список литературы

- [1] Лекции по математическому анализу, 1 семестр, Подольский В.Е., 2024
- [2] Лекции по математическому анализу, 2 семестр, Подольский В.Е., 2025
- [3] Лекции по математическому анализу, 3 семестр, Подольский В.Е., 2019