Математический анализ-4

Лектор: доц. Косухин Олег Николаевич

20 февраля 2026 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Лекция 1 **3**
1.1 Повторение построения интеграла Римана 3
1.2 Кратный интеграл Римана 3
1.3 Суммы Дарбу 5
1.4 Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе 7

1 Лекция 1

1.1 Повторение построения интеграла Римана

Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$. Выбиралось разбиение $T = \{\Delta_j\}_{j=1}^n$ отрезка $[a, b]$ и разметка $H = \{\xi_j\}_{j=1}^n$. Диаметром $d(T)$ разбиения T называлась наибольшая из длин отрезков разбиения. Интегральной суммой на заданом размеченом разбиении называли следующее выражение:

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|\Delta_j|$$

где $|\Delta_j|$ - длина отрезка Δ_j. Тогда интералом Римана назывался предел

$$I = \lim_{d(T)\to 0} \sigma(f, T, H)$$

Также интеграл Римана можно ввести через суммы Дарбу. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f, T) = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot |\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f, T) = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x\in\Delta_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(x)$$

Далее вводился верхний и нижний инградлы Дарбу

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(f, T), \quad I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Если верхний и нижний интегралы совпадают

$$I = I_* = I^*$$

то I в точности интеграл Римана.
Нашей целью является перенос этой конструкции в $\mathbb{R}^k$ при $k \geq 2$.

1.2 Кратный интеграл Римана

Определение. Замкнутым брусом в $\mathbb{R}^k$ называется декартово проиведение

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

Определение. Пусть дан брус $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$, а $T_1, \dots, T_k$ являются разбиениями $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ соответсвенно. Тогда

$$T = T_1 \times \dots \times T_k$$

называется разбиением бруса R. Брус из разбиения $T = T_1 \times \dots \times T_k$ будем обозначать $\Delta_{j_1,\dots,j_k}$, а его объем $|\Delta_{j_1,\dots,j_k}|$. Разметкой разбиения также назовем множество $H = \{\xi_{j_1,\dots,j_k}\}_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}$, где $\xi_{j_1,\dots,j_k} \in \Delta_{j_1,\dots,j_k}$.

Определение. Интегральной суммой называется выражение

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} = f(\xi_{j_1,\dots,j_k}) \cdot |\Delta_{j_1,\dots,j_k}|$$

Для краткости будем писать

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

Для корректности определения осталось ввести понятие объема.

Определение. Пусть $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subset \mathbb{R}^k$. Объемом назовем функцию, которая обладает следующими свойствами:

1. $V(\Phi) \geq 0$
2. $\Phi_1 = \Phi_2$
3. $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$, если $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$
4. Объем единичного куба равен 1.

таким образом, объемом бруса R называется

$$V(R) = (b_1 - a_1) \dots (b_k - a_k)$$

Определение. Диаметром бруса R назовем

$$\operatorname{diam}(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_k - a_k)^2}$$

Тогда диаметром разбиения $d(T)$ называется наибольший из диаметров Δ_j.

Определение. I называется кратным интегралом функции f по брусу R, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0, \; \forall T : d(T) < \delta \; \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

1.3 Суммы Дарбу

Определение. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f,T) = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x\in\Delta_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(x)$$

Определение. Разбиение $T' = T'_1 \times \dots \times T'_k$ называется измельчением разбиения $T = T_1 \times \dots \times T_k$, если $\forall i = 1,\dots,k : \ T'_i$ является имельчением T_i.

Рассмотрим аналогичные одномерному случаю свойства сумм Дарбу:

Утверждение. Для любого разбиения T и любой его разметки H:

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \sigma(f,T,H) \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Утверждение. Если T' — измельчение T, то

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \overline{\overline{s}}(f,T'), \ \underline{\underline{S}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Доказательство. Сравним $\overline{\overline{s}}(f,T)$ и $\overline{\overline{s}}(f,T')$, где T' получена добавлением точки. После добавления, брус Δ_j разбился на два новых бруса Δ'_j и Δ''_j, обозначим: m'_j, m''_j - инфинумы f на Δ'_j и Δ''_j соответсвенно. Тогда

$$\overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \overset{(1)}{=} \sum_j (m'_j \cdot |\Delta'_j| + m''_j \cdot |\Delta''_l| - m_j(|\Delta'_j| + |\Delta''_j|)) =$$

$$= \sum_j ((m'_j - m_j) \cdot |\Delta'_j| + (m''_j - m_j) \cdot |\Delta''_j|) \overset{(2)}{\ge} 0$$

(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез
(2): $m'_j \ge m_j, \ m''_j \ge m_j$
Аналогично показывается, что $\underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T') \ge 0$. □

Утверждение. Пусть к разбиению T добавили p точек (к разбиениям $T_1,\dots,T_k$). Тогда

$$0 \le \overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \le (M-m)\cdot d^{k-1} \cdot \delta \cdot p$$

$$0 \le \underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T') \le (M-m)\cdot d^{k-1} \cdot \delta \cdot p$$

где $M = \sup\limits_{x\in R} f(x), \ m = \inf\limits_{x\in R} f(x), \ d$ — диаметр $R, \ \delta = d(T)$ - диаметр T.

Доказательство.

$$\overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \overset{(1)}{=} \sum_j ((m'_j - m_j)\cdot|\Delta_j| + (m''_j)\cdot|\Delta''_j|) \overset{(2)}{\le}$$

$$\overset{(2)}{\le} \sum_j ((M-m)\cdot|\Delta'_j| + (M-m)\cdot|\Delta''_j|) = (M-m)\sum_j(|\Delta'_j| + |\Delta''_j|) =$$

$$= (M-m)\cdot|R_1| \le (M-m)\cdot d^{k-1}\cdot\delta$$

где $|R_1|$ — суммарный объём тех брусов, которые были разрезаны. Проделав эту операцию p раз, получим искомое утверждение.
(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез
(2): $m'_j, m''_j \le M,\ m_j \ge m$. Аналогично для верхней суммы Дарбу. □

Утверждение.

$$\overline{\overline{s}}(f,T) = \inf_H \sigma(f,T,H), \quad \underline{\underline{s}}(f,T) = \sup_H \sigma(f,T,H)$$

Доказательство.

$$\sigma(f,T,H) = \sum_j f(\xi_j)\cdot|\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j m_j\cdot|\Delta_j|$$

Поскольку m_j — инфинум, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \xi_j \in \Delta_j : 0 \le f(\xi_j) - m_j < \frac{\varepsilon}{|R|}$$

отсюда

$$0 \le \sigma(f,T,H) - \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j (f(\xi_j) - m_j)\cdot|\Delta_j| < \sum_j \frac{\varepsilon}{|R|}\cdot|\Delta_j|$$

а это в точности означает, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) = \inf_H \sigma(f,T,H)$$

Аналогично для верхней суммы Дарбу. □

Утверждение. Пусть T' и T'' — любые разбиения R. Тогда

$$\overline{\overline{s}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T'')$$

Доказательство. Пусть T объединяет в себе все разрезы T_1 и T_2. Тогда T — измельчение и для T' и для T''. Тогда по доказанному выше свойству и определению сумм Дарбу, получим

$$\overline{\overline{s}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T) \le \underline{\underline{S}}(f,T) \le \underline{\underline{S}}(f,T'')$$

□

Определение. Нижним интегралом Дарбу называется

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(f, T),$$

верхним интегралом Дарбу называется

$$I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Из определений ясно, что $I_* \leq I^*$.

1.4 Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе

Теорема. (Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе)
Если существует интеграл I от f на R, то f ограничена на R, то есть

$$f \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow f \in \mathcal{B}(R)$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0, \; \forall T : d(T) < \delta \; \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

зафиксируем $j = j_0$

$$I - \varepsilon < f(\xi_{j_0}) \cdot |\Delta_{j_0}| + \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j| < I + \varepsilon$$

для $j \neq j_0$ выберем произвольным образом ξ_j и обозначим

$$c = \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

тогда $\forall \xi_{j_0} \in \Delta_{j_0}$:

$$\frac{I - \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0|}} < f(\xi_{j_0}) < \frac{I + \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0|}}$$

значит f ограничена на каждом $\Delta_{j_0} \Rightarrow f$ - ограничена на R. $\square$

Пример. (Необходимое условие не является достаточным)
Рассмотрим

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1, \; x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Q} \\ 0, \; \text{иначе} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{s}} = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 0 \cdot |\Delta_j| = 0$$

$$\underline{\underline{S}} = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 1 \cdot |\Delta_j| = |R|$$

Итак

$$\forall I \in \mathbb{R} \;\; \exists\, \varepsilon = \frac{|R|}{3} > 0, \;\forall \delta > 0 \;\; \exists\, T, H, \; d(T) < \delta : |\sigma(f, T, H) - I| \geq \varepsilon$$

Значит функция не является интегрируемой.