

# Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

21 марта 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа

Telegram: [@fourkenz](https://www.t.me/fourkenz)

GitHub: [yakovlevki](https://github.com/yakovlevki)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Неопределенный интеграл</b>	<b>3</b>
1.1	Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	3
1.2	Свойства неопределённого интеграла . . . . .	3
1.3	Таблица неопределенных интегралов . . . . .	4
1.4	Интегрирование рациональных функций . . . . .	5
1.5	Метод Остроградского . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Интеграл Римана</b>	<b>7</b>
2.1	Интегрируемость по Риману . . . . .	7
2.2	Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману . . . . .	9
2.3	Классы интегрируемых функций . . . . .	11
2.4	Критерий Лебега интегрируемости по Риману . . . . .	12
2.5	Свойства интеграла Римана . . . . .	12
2.6	Первая теорема о среднем . . . . .	16
2.7	Интеграл с переменным верхним пределом . . . . .	17
2.8	Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	18
2.9	Замена переменной и интегрирование по частям . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Спрямоаемые кривые и квадратуемые фигуры</b>	<b>20</b>
3.1	Кривая в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
3.2	Спрямоаемость гладкой кривой и формула ее длины . . . . .	21
3.3	Квадратуемые фигуры . . . . .	23
3.4	Первый и второй критерии квадратуемости . . . . .	24
3.5	Квадратуемость простой спрямоаемой кривой и криволинейной трапеции . . . . .	25

# 1 Неопределенный интеграл

## 1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $(a, b)$ . Если существует  $F(x)$  определённая на  $(a, b)$  такая, что  $F(x) \in \mathcal{D}(a, b)$  и  $F'(x) = f(x)$ , то  $F(x)$  называется первообразной функцией для  $f(x)$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $(a, b)$ . Совокупность всех первообразных функций для  $f(x)$  называется неопределённым интегралом  $f(x)$  и обозначается

$$\int f(x)dx$$

**Теорема.** Пусть  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$  на  $(a, b)$ . Тогда

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\}, \quad C = \text{const}, \quad C \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

$$(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Пусть  $\varphi(x)$  - первообразная  $f(x)$ . Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа  $\varphi(x) - F(x) = \text{const}$ , ч.т.д. □

## 1.2 Свойства неопределённого интеграла

1.  $\forall c \in \mathbb{R}$  :

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

(При  $c = 0$  множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. (Замена переменной)

Пусть  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$  на  $(a, b)$ .

Пусть  $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$  и  $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$  Тогда  $F(\varphi(t))$  является первообразной для  $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  на  $(\alpha, \beta)$ .

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть  $u, v \in \mathcal{D}(a, b)$ .

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\int (uv)' dx = \int uv' dx + \int u' v dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**Замечание.** Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

### 1.3 Таблица неопределённых интегралов

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases}$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

---


$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$


---

**Замечание.** Все равенства верны только на промежутках.

## 1.4 Интегрирование рациональных функций

Хотим научиться находить интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены. Разложим  $Q(x)$  на неприводимые многочлены:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}$$

Теперь разложим дробь в сумму простейших:

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = & \int \left( \tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{\aleph_{1i}}{(x - a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n} \frac{\aleph_{ni}}{(x - a_n)^{\alpha_{ni}}} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\beta_1} \frac{\rho_{1j}x + \omega_{1j}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_{1j}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\rho_{kj}x + \omega_{kj}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_{kj}}} \right) dx \end{aligned}$$

Осталось понять как интегрировать слагаемые вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

1.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln |x-a|, & n = 1 \\ \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}, & n > 1 \end{cases}$$

2. Сначала преобразуем знаменатель:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

причем  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ , поскольку у  $x^2 + px + q$  нет вещественных корней.

Сделаем замену

$$t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow x = t - \frac{p}{2}, \quad q_1^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{\alpha t - \frac{\alpha p}{2} + \beta}{(t^2 + q_1^2)^k} d(t - \frac{p}{2}) = \int \frac{\alpha_1 t + \beta_1}{(t^2 + q_1^2)^k} dt$$

где  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta - \frac{\alpha p}{2}$ . Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{t}{(t^2 + q_1^2)^k} dt \quad \text{и} \quad I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + q_1^2)^k}$$

(i)

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{(t^2 + q_1^2)^k} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{(t^2 + q_1^2)^k} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + q_1^2)}{(t^2 + q_1^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(t^2 + q_1^2), & k = 1 \\ \frac{(t^2 + q_1^2)^{1-k}}{2(1-k)}, & k > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} - \int t d\left(\frac{1}{t^2 + q^2}\right)^k = \\ &= \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + 2k \int \left(\frac{t^2 + q^2 - q^2}{(t^2 + q^2)^{k+1}}\right) dt = \\ &= \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + 2k I_k - 2k q^2 I_{k+1} \end{aligned}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k q^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + \frac{2k-1}{2k q^2} I_k$$

**Замечание.**

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = \left| \begin{array}{l} t = q \operatorname{tg} z \\ dt = \frac{q}{\cos^2 z} dz \end{array} \right| = \int \frac{q dz}{\cos^2 z (q^2 \operatorname{tg}^2 z + q^2)^k} = \int \frac{\cos^{2k-2} z}{q^{2k-1}} dz$$

## 1.5 Метод Остроградского

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}} dx = \\ &= \frac{P_1(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j - 1}} + \\ &\quad + \int \frac{P_2(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i) \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)} dx \end{aligned}$$

## 2 Интеграл Римана

### 2.1 Интегрируемость по Риману

**Определение.**  $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$  называется разбиением отрезка, если  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Обозначается  $T_{[a,b]}^+$ . Если  $b = x_0 > \dots > x_n = a$ , то обозначают  $T_{[a,b]}^-$ .

Отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  или  $[x_i, x_{i-1}]$  называются отрезками разбиения, их обычно обозначают  $\Delta_i$ .

Длина отрезка  $\Delta_i$  обозначается  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ .

Длина наибольшего из отрезков называется диаметром разбиения

$$d(T) = \max |x_i - x_{i-1}| = \max \Delta x_i.$$

**Определение.** Пусть  $T_{[a,b]}$  - разбиение отрезка  $[a, b]$ . Разметкой для  $T_{[a,b]}$  называется множество точек  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  такое, что  $\forall i : \xi_i \in \Delta_i$ .

Если  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  является разметкой для  $\{x_i\}_{i=0}^n$ , то пара  $(\{x_i\}_{i=0}^n, \{\xi_i\}_{i=1}^n)$  называется размеченным разбиением и обозначается  $T(\xi)$ .

**Определение.** Сумма

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется интегральной суммой. Иногда ее обозначают  $\sigma_T(\xi)$  или  $\sigma(T_{[a,b]}(\xi))$

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . Рассмотрим  $T_{[a,b]}(\xi)$ . Если

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T(\xi) \subset \{T : d(T) < \delta\} : \left| \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

то говорят, что  $f(x)$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$ , а число  $I$  называют интегралом Римана на размеченных разбиениях на отрезке  $[a, b]$ . Интеграл Римана обозначают

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad I = \int_b^a f(x) dx$$

для  $T^+$  и  $T^-$  соответственно.

**Замечание.** Можно считать определение интеграла определением предела интегральных сумм и писать

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = I$$

где  $d$  - диаметр разбиения.

**Утверждение.**

$$\text{Если } \exists \int_a^b f(x) dx, \text{ то } \exists \int_b^a f(x) dx \text{ и } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Определение.** Класс функций, интегрируемых на  $[a, b]$  по Риману, обозначается  $\mathcal{R}[a, b]$ .

**Теорема.** Если  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f(x)$  - ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ , что  $|f(x_n)| > n$  и пусть

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \left( \sum_{i=0}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = I$$

Возьмем  $\varepsilon = 1$ . Тогда

$$\left| \sum_{i=0}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < 1$$

Возмем  $\Delta_k$  такой, что  $\tilde{x} \in \Delta_k \Rightarrow f(x)$  - неограничена на  $\Delta_k$ . Тогда, зафиксировав точки в остальных отрезках разбиения, получим

$$I - \sum_{i=1, i \neq k}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 1 < f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < I - \sum_{i=1, i \neq k}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + 1$$

противоречие с тем, что  $f(x)$  принимает сколь угодно большие на  $\Delta_k$ . □



## 2.2 Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Далее рассматриваем разбиения  $T^+$

**Определение.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  - разбиения отрезка  $[a, b]$  такие, что  $T_1 \subset T_2$ . Тогда  $T_2$  называется измельчением  $T_1$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ ,  $\{x_i\}_{i=0}^n = T$  - разбиение  $[a, b]$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\bar{S}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad \underline{S}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Тогда  $\bar{S}_f(T)$  называется нижней суммой Дарбу, а  $\underline{S}_f(T)$  верхней суммой Дарбу.

**Лемма 1.** Пусть  $T_1$  - измельчение  $T$ . Тогда

$$\bar{S}(T) \leq \bar{S}(T_1) \quad \text{и} \quad \underline{S}(T) \geq \underline{S}(T_1)$$

*Доказательство.* Докажем для нижней суммы. Рассмотрим случай, когда  $T_1 = T \cup \{x'_j\}$ ,  $x'_j \in [x_j, x_{j+1}]$ . Тогда сократятся все отрезки кроме  $[x_j, x_{j+1}]$ :

$$\begin{aligned} \bar{S}(T_1) - \bar{S}(T) &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x_{j+1} - x_j) = \\ &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x'_j - x_j) - m_j(x_{j+1} - x'_j) \geq 0 \end{aligned}$$

значит, по индукции, это верно для любого измельчения. □

**Лемма 2.**

$$\forall T_1, T_2 : \bar{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим объединение любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$ :  $T = T_1 \cup T_2$ . Тогда  $T$  является измельчением и  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда по лемме 1 получаем:

$$\bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T) \quad \text{и} \quad \underline{S}(T) \leq \underline{S}(T_2) \Rightarrow \bar{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2)$$

□

**Лемма 3.**  $\forall T_{[a,b]} :$

$$\begin{aligned} \bar{S}(T) &= \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ \underline{S}(T) &= \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Докажем для верхней суммы, для нижней аналогично.

Докажем более общее утверждение - рассмотрим некоторое семейство множеств  $\{X_i : X_i \subset \mathbb{R}\}_{i=1}^n$  и множество  $\{a_i\}_{i=1}^n$  такие, что  $\forall i$   $X_i$  ограничено и  $a_i \geq 0$ .

Каждое  $X_i$  из принципа полноты Вейерштрасса имеет супремум, и при этом

$$\forall \varepsilon > 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \exists x_i \in X_i : x_i > \sup X_i - \varepsilon$$

Домножив каждое из неравенств на число ( $i$ -е нер-во на  $a_i$ ) и сложив, получим

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i > \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

Отсюда в силу свойства супремума

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

но при этом

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

Значит,

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

При  $X_i = f([x_{i-1}, x_i])$  (ограничены в силу интегрируемости  $f$ ) и  $a_i = x_i - x_{i-1}$  получим

$$\sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{\{\xi_i\}} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{S}}(T)$$

□

**Теорема.** (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)

$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f$  - ограничена и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T_{[a,b]} : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}_f(T) - \overline{\overline{S}}_f(T) < \varepsilon$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) :

$$\exists I = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T(\xi) : d(T) < \delta_\varepsilon :$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(T(\xi)) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \overline{\overline{S}}_f(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \underline{\underline{S}}_f(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \quad (1)$$

из леммы 2 по аксиоме полноты:

$$\exists I \in \mathbb{R}, \forall T : \overline{\overline{S}}(T) \leq I \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad (2)$$

из (1) следует, что  $I$  - единственно, а также известно, что

$$\forall T(\xi) : \overline{\overline{S}}(T) \leq \sigma_f(T(\xi)) \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad (3)$$

значит из (2) и (3) получаем:

$$|\sigma_f(T(\xi)) - I| < \varepsilon$$

□

## 2.3 Классы интегрируемых функций

**Теорема.** Если  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.*  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b] \Rightarrow f(x)$  - равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Пусть  $T : d(T) < \delta$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_{i_{max}}) - f(x_{i_{min}}))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

( $x_{i_{min}}$  и  $x_{i_{max}}$  существуют по второй теореме Вейерштрасса)

□

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  - монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.* Докажем для неубывающей. Если  $f(x) = \text{const}$ , то очевидно.

Пусть  $d(T) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \\ &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

Поскольку  $f(x)$  неубывает на  $[a, b]$ , то минимум на этом отрезке достигается в  $f(a)$ , а максимум в  $f(b)$ . Значит, при выносе  $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$  за скобку, сумма слагаемых вида  $f(x_i) - f(x_{i-1})$  схлопнется в  $f(b) - f(a)$ . □

## 2.4 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

**Определение.** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ , и если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$  (или конечное) таких, что

$$A \subset \bigcup_i (a_i, b_i), \sup_n \sum_{i=1}^N |b_i - a_i| < \varepsilon$$

Тогда  $A$  называется множеством меры 0 по Лебегу. Обозначается  $\mu(A) = 0$ .

**Теорема.** (Свойства множеств с мерой 0 по Лебегу)

1.  $B \subset A, \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$
2.  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$

*Доказательство.*

1. Очевидно
2.  $\forall i \exists \{(a_{i_l}, b_{i_l})\}_{l=1}^{\infty} :$

$$A_i \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}), \sum_{l=1}^{\infty} |b_{i_l} - a_{i_l}| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left( \bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}) \right), \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |b_{i_l} - a_{i_l}| \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)

$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f(x)$  ограничена и для множества  $P$  точек разрыва функции  $f(x)$  выполнено  $\mu(P) = 0$ .

*Доказательство.* Без доказательства.

□

## 2.5 Свойства интеграла Римана

**Теорема 1.** (Интегрируемость на подотрезках)

Если  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $[c, d] \subset [a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[c, d]$ .

*Доказательство.* Так как  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $\forall T_{[a,b]}(\xi) : \sigma_f(T_{[a,b]}(\xi)) \rightarrow I$ . Значит если  $\{c, d\} \in T_{[a,b]}$ , то  $\sigma_f(T_{[a,b] \cup \{c,d\}}(\xi)) :$

$$\varepsilon > \underline{S}_{[a,b] \cup \{c,d\}} - \overline{S}_{[a,b] \cup \{c,d\}} = \sum_{k=1}^i (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^j (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^N (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=i+1}^j (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \underline{S}_{[c,d]} - \overline{S}_{[c,d]}$$

□

**Теорема 2.** (Аддитивность)

Если  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $c \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

*Доказательство.* Пусть  $c \in T_{[a,b]}(\xi)$ . Тогда

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) = \sigma_f(T_{[a,c]}) + \sigma_f(T_{[c,b]})$$

$$\sigma_f(T_{[a,c]}) \rightarrow \int_a^c f(x) dx, \quad \sigma_f(T_{[c,b]}) \rightarrow \int_c^b f(x) dx$$

а также

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Теперь пусть  $c \notin T_{[a,b]}$ . Рассмотрим  $T'_{[a,b] \cup c} = T_{[a,b]} \cup \{c\}$

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) - \sigma_f(T'_{[a,b] \cup c}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - f(\xi'_j)(c - x_{j-1}) - f(\xi''_j)(x_j - c) \rightarrow 0$$

□

**Замечание.** Если  $f(x) \in \mathcal{R}[a, c]$ ,  $b < c$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Теорема 3.** (Линейность)

Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.*

$$\sigma_{\alpha f(x) + \beta g(x)}(T) = \alpha \sigma_f(T) + \beta \sigma_g(T)$$

□

**Теорема 4.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

*Доказательство.*

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \sigma_f(T) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

□

**Следствие.** Если  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

**Теорема 5.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $\exists c \in [a, b]$ , что  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$  и  $f(c) > 0$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

*Доказательство.* По теореме об отделимости

$\exists \delta > 0 : f(x) > \frac{f(c)}{2}$  в  $(c - \delta, c + \delta)$  :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta = \delta f(c) > 0$$

□

**Теорема 6.**  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда  $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.* Пусть

$$M_1 = \sup_{[a,b]} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{[a,b]} |g(x)|$$

Ограничим значение  $\underline{S}_{f \cdot g} - \overline{\overline{S}}_{f \cdot g}$ , ограничив разность точных граней на одном отрезке разбиения: (далее супремум рассматривается по всем  $x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]$ )

$$\begin{aligned} M_i(f(x)g(x)) - m_i(f(x)g(x)) &= \sup(f(x')g(x') - f(x'')g(x'')) = \\ &= \sup(f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')) = \\ &= \sup(f(x')(g(x') - g(x'')) + g(x'')(f(x') - f(x''))) \leq \\ &\leq \sup |f(x)| \cdot \sup(g(x') - g(x'')) + \sup |g(x)| \cdot \sup(f(x') - f(x'')) \leq \\ &\leq M_1(M_{ig} - m_{ig}) + M_2(M_{if} - m_{if}) \end{aligned}$$

Отсюда, домножив неравенства на длины соответствующих отрезков и сложив, получим

$$\underline{S}_{f \cdot g} - \overline{S}_{f \cdot g} \leq M_1(\underline{S}_g - \overline{S}_g) + M_2(\underline{S}_f - \overline{S}_f)$$

Отсюда из интегрируемости  $f$  и  $g$  и критерия Дарбу  $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ .  $\square$

**Теорема 7.**  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \geq \delta > 0$ . Тогда  $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.*  $\forall x', x'' \in [a, b]$ :

$$\left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right| = \left| \frac{f(x'') - f(x')}{f(x')f(x'')} \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot |f(x'') - f(x')|$$

Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему (на всякий случай приведем аналогичную выкладку, необходимую для доказательства)

$$\begin{aligned} M_i\left(\frac{1}{f(x)}\right) - m_i\left(\frac{1}{f(x)}\right) &= \sup\left(\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sup |f(x'') - f(x')| = \frac{1}{\delta^2} (M_{if} - m_{if}) \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие.** Из пунктов 6 и 7 следует интегрируемость дроби  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Теорема 8.**  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда  $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.*  $\forall x', x'' \in [a, b]$ :

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$$

Далее совпадает с предыдущим доказательством.  $\square$

**Замечание.** Обратное утверждение неверно:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \subset [0, 1] \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow |f(x)| \equiv 1$  на отрезке  $[0, 1]$ .

**Теорема 9.**  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

*Доказательство.*

$$|\sigma_f| \leq \sigma_{|f|}$$

□

**Замечание.**

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \sup_{[a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b 1 \, dx$$

## 2.6 Первая теорема о среднем

**Теорема.** (Первая теорема о среднем)

Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$ ,  $M = \sup f(x)$ ,  $m = \inf f(x)$ . Тогда  $\exists \mu \in [m, M]$ :

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

*Доказательство.*

$$m \cdot \sigma_g(T) \leq \sigma_{f \cdot g}(T) \leq M \cdot \sigma_g(T)$$

Тогда

$$m \cdot \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

Рассмотрим случаи:

1.

$$\int_a^b g(x) \, dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = 0$$

В этом случае равенство верно для любого  $\mu$ .

2.

$$\int_a^b g(x) \, dx \neq 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} \leq M$$

Значит, подойдет  $\mu$ , равное значению этой дроби

□



## 2.7 Интеграл с переменным верхним пределом

**Определение.** Интегралом с переменным верхним пределом называется интеграл вида:

$$\int_a^x f(t) dt$$

**Теорема.** Пусть  $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$ . Тогда функция

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

непрерывна на  $[a, b]$ .

*Доказательство.*  $\forall x_0 \in [a, b]$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$|\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \right| \leq M_{f([a, b])} \cdot |\Delta x| \rightarrow 0$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f$  непрерывна в  $x_0 \in [a, b]$ . Тогда функция

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

имеет производную в  $x_0$  и  $\varphi'(x_0) = f(x_0)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x) dx - \frac{f(x_0)}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} 1 dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \leq \sup_{[a, b]} |f(x) - f(x_0)| \cdot 1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$ . Тогда  $\forall c \in (a, b)$ :

$$\exists \left( \int_c^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ то есть } \int_c^x f(t) dt - \text{ первообразная } f(x)$$

*Доказательство.* Очевидно. □

**Замечание.** Интервал в формулировке следствия взят для применимости теоремы к неограниченным на интервале функциям (например  $\operatorname{tg}(x)$  на  $[0, \pi]$ ), для которых тем не менее применима предыдущая теорема по аналогичным рассуждениям.

## 2.8 Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема.** (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $f(x) \in \mathcal{C}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n)$ .

$$\exists F(x) : F(x) \in \mathcal{D}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n), F'(x) = f(x), F(x) \in \mathcal{C}[a, b]$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.* Пусть сначала  $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$ ,  $F'(x) = f(x)$  на  $(a, b)$ . Но интеграл

$$\int_a^x f(t) dt$$

тоже первообразная  $f(x)$  на  $(a, b) \Rightarrow \exists C :$

$$F(x) + C = \int_a^x f(t) dt$$

$\Rightarrow F(a) + C = 0$ . Тогда

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Общий случай:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

□

## 2.9 Замена переменной и интегрирование по частям

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$ ,  $\varphi(t) \in \mathcal{C}^1(\alpha, \beta)$ ,  $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ .

$\forall \alpha_0, \beta_0 \in (\alpha, \beta)$  и  $a_0 = \varphi(\alpha_0)$ ,  $b_0 = \varphi(\beta_0)$ . Тогда

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

*Доказательство.*  $f \in \mathcal{C}(a, b) \Rightarrow \exists F'(x) = f(x)$

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx = F(b_0) - F(a_0)$$

Но  $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ , а значит

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta_0)) - F(\varphi(\alpha_0))$$

□

**Теорема.** (Интегрирование по частям)

Пусть  $f(x), g(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

*Доказательство.*

$$f(x) \cdot g(x)|_a^b = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

□

## 3 Спрямяемые кривые и квадратуемые фигуры

### 3.1 Кривая в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Кривой в  $\mathbb{R}^n$  называется непрерывное отображение:

$$\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Замечание.**

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

**Определение.** Рассмотрим  $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Если  $\exists t_1 \neq t_2 : \bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$ , то  $\bar{\gamma}(t_1)$  называется точкой самопересечения. Мощность подмножества  $[a, b]$ , точки которого переходят в  $\bar{\gamma}(t_1)$  называется кратностью точки самопересечения. Если кривая не имеет точек пересечения, то она называется простой.

**Определение.** Если  $\bar{\gamma}(t)$  имеет единственную точку самопересечения  $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$ , то кривая называется простой замкнутой.

**Определение.** Множество точек  $\{\bar{\gamma}(t_i)\}_{i=0}^n$  называется разбиением кривой, если  $\{t_i\}_{i=0}^n$  является разбиением отрезка  $[a, b]$ . Обозначается  $T_{\bar{\gamma}}$ .

**Определение.**  $L(T_{\bar{\gamma}})$  - множество отрезков  $\{[\bar{\gamma}(t_{i-1}), \bar{\gamma}(t_i)]\}_{i=1}^n$  называется вписанной в  $\bar{\gamma}(t)$  ломаной, а число  $|L(T_{\bar{\gamma}})|$  - длиной ломаной.

**Утверждение.** Если  $T'_{\bar{\gamma}}$  - измельчение  $T_{\bar{\gamma}}$ , то

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| \leq |L(T'_{\bar{\gamma}})|$$

*Доказательство.* Очевидно. □

**Определение.** Если множество  $\{|L(T_{\bar{\gamma}})|\}_{T_{\bar{\gamma}}}$  ограничено, то кривая  $\bar{\gamma}(t)$  называется спрямяемой, а

$$\sup_{T_{\bar{\gamma}}} |L(T_{\bar{\gamma}})| = |\bar{\gamma}|$$

называется длиной кривой.

### 3.2 Спряmlяемость гладкой кривой и формула ее длины

**Теорема.** Пусть

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in C^1[a, b]$$

Тогда  $\bar{\gamma}(t)$  спряmlяема и

$$|\bar{\gamma}| = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t)} dt$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |L(T_{\bar{\gamma}})| &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2} = (1) \\ &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij}) \cdot (t_i - t_{i-1})^2} = \\ &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} (t_i - t_{i-1}) \leq M \cdot \sqrt{n} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Переход (1) по формуле Лагранжа, а последняя оценка устроена так: каждое из  $x_j$  - непрерывно на кадом отрезке разбиения, значит, по второй теореме Вейерштрасса, у нее есть максимум. Возьмем  $M$  - максимум из этих максимальных значений на отрезке разбиения, тогда

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2} \leq M \cdot \sqrt{n}$$

остается вынести это за скобку и сумма длин отрезков разбиения схлопнется в  $b - a$ .  $\Rightarrow \bar{\gamma}$  спряmlяема.

$$\begin{aligned}
& \left| |L(T_{\bar{\gamma}})| - \sigma \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2} \right| = \\
& \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})(t_i - t_{i-1})} - \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\nu_i)(t_i - t_{i-1})} \right| = \\
& \left| \sum_{i=1}^N \left( \left( \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} - \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\nu_i)} \right) (t_i - t_{i-1}) \right) \right| \leq \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |x_j'(\xi_{ij}) - x_j'(\nu_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot n \cdot (b - a)
\end{aligned}$$

Последняя оценка сделана с применением леммы, которая доказана чуть ниже

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad d(T) < \delta_\varepsilon \\
& \Rightarrow \left| |L(T_{\bar{\gamma}})| - \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t)} dt \right| < 2\varepsilon n(b - a)
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists L(T_{\bar{\gamma}}^*)$ , что  $|L(T_{\bar{\gamma}}^*)| > |\bar{\gamma}| - \varepsilon$  (свойство точной верхней грани).  
 Измельчаем  $T_{\bar{\gamma}}^*$  до тех пор, пока  $d(T_{\bar{\gamma}}^*) < \delta_\varepsilon$ . □

**Лемма.**

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\left| \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^k ((a_i - b_i)(a_i + b_i))}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}} \right| = \\
&= \left| \sum_{i=1}^k \left( (a_i - b_i) \cdot \frac{(a_i + b_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}} \right) \right| \leq (*) \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^k 1 \cdot (a_i - b_i) \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|
\end{aligned}$$

$$(*) : \quad a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2}, \quad b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \Rightarrow \frac{(a_i + b_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}} \leq 1$$

□

### 3.3 Квадрируемые фигуры

Далее работаем в  $\mathbb{R}^2$ .

**Определение.** Множество  $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\} \subset \mathbb{R}^2$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $(x_0, y_0)$ .

**Определение.** Множество  $A \in \mathbb{R}^2$  называется ограниченным, если  $\exists R > 0 : A \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

**Определение.** Ограниченное множество  $A \subset \mathbb{R}^2$  называется фигурой.

**Определение.** Пусть  $A = \{A_\alpha\}_\alpha$ . Функция  $\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$  называется площадью, если

1.  $\mu(A) \geq 0$
2. Если  $\exists \mu(A_1), \mu(A_2)$  и  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то  $\exists \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ .
3. Если  $\exists \mu(A_1)$  и  $A_2$  конгруэнтна  $A_1$ , то  $\exists \mu(A_2) = \mu(A_1)$ .
4. Если  $\exists \mu(A_1), \mu(A_2)$  и  $A_1 \subset A_2$ , то  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ .
5. Площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  равна  $ab$ .

**Замечание.** Существует площадь отрезка и площадь точки, и они равны нулю. По определению считаем, что  $\mu(\emptyset) = 0$

**Утверждение.** Существует площадь треугольника, равная половине произведения основания на высоту.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный треугольник. Проведем в нем высоту, тогда он разобьется на два прямоугольных треугольника, которые можно достроить до прямоугольников. Тогда площадь искомого треугольника равна сумме половин площадей построенных прямоугольников. □

**Определение.** Фигура, полученная конечным объединением непересекающихся треугольников, называется многоугольником.

**Теорема.** Площадь многоугольной фигуры не зависит от разбиения на треугольники.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Определение.** Для любой фигуры  $A$ , замкнутая многоугольная фигура  $P \supset A$  называется описанной. Открытая многоугольная фигура  $Q \subset A$  называется вписанной.

**Замечание.** Далее, если фигура обозначена  $P$ , то считаем ее замкнутой описанной, а если  $Q$  то открытой вписанной.

**Замечание.** Для любой фигуры существует описанная (поскольку любая фигура ограничена) и вписанная (пустое множество).

**Определение.** Число  $\mu^*(A) = \inf_{A \subset P} \mu(P)$  называется верхней площадью  $A$ .

Число  $\mu_*(A) = \sup_{Q \subset A} \mu(Q)$  называется нижней площадью  $A$ .

**Определение.** Если  $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ , то  $\exists \mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$ . Такая фигура  $A$  называется квадратуемой.

### 3.4 Первый и второй критерии квадратуемости

**Теорема.** (Первый критерий квадратуемости)

Фигура  $A$  квадратуема  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon, \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$

*Доказательство.*

$(\Rightarrow) : A$  - квадратуема  $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$ , но

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q_\varepsilon : \mu_*(A) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

$(\Leftarrow) :$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon, \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$$

□

**Теорема.** (Второй критерий квадратуемости)

Фигура  $A$  квадратуема  $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$ .



*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) :  $A$  - квадрируема  $\Rightarrow$  по первому критерию квадрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\partial A \subset P \setminus Q$ ,  $Q$  - внутренние точки  $A$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  - внешние точки  $A$ .

В частности,  $\partial A \subset P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon \Rightarrow \mu^*(\partial A) < \varepsilon \Rightarrow \mu(\partial A) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) :  $\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \supset \partial A, \mu(P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \exists h > 0$ ,

$\partial A \subset \cup(\text{кв. сетка с шагом } h) = A_2 : \mu(A_2) < 72\varepsilon$  (по лемме ниже).

$A_1 = \cup(\text{квадраты сетки, целиком состоящие из внутренних точек } A)$

$\Rightarrow A \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow A_1 \cup A_2 = P, A_1 = Q, \mu(P) - \mu(Q) = \mu(A_2) < 72\varepsilon$

□

**Лемма.** Если  $B$  покрывается  $P$  с  $\mu(P) < \varepsilon$ , то существует  $h > 0$  такое, что  $B \subset \cup(\text{кв. сетка с шагом } h), \mu(\cup(\text{кв. сетка с шагом } h)) < 72\varepsilon$ .

*Доказательство.*  $P$  - фигура  $\Rightarrow P$  - это объединение треугольников

$\Rightarrow P$  - объединение прямоугольных треугольников с  $\mu < \varepsilon \Rightarrow P$  лежит в объединении прямоугольников с  $\mu < 2\varepsilon \Rightarrow P$  лежит в объединении квадратов с  $\mu < 4\varepsilon \Rightarrow P$  лежит в объединении квадратов со сторонами, параллельными осям координат с  $\mu < 8\varepsilon \Rightarrow$  возьмем  $h$ , равное стороне наименьшего квадрата, и построим сетку с шагом  $h \Rightarrow \mu(\cup(\text{кв. сетка с шагом } h)) < 72\varepsilon$ , поскольку в самом худшем случае, когда существует квадрат чуть больше самого маленького, понадобится 9 квадратов чтобы его накрыть, при этом площадь увеличится почти в 9 раз.

□

### 3.5 Квадрируемость простой спрямляемой кривой и криволинейной трапеции

**Теорема.** Если  $\bar{\gamma}(t)$  - простая спрямляемая фигура, то  $\mu(\bar{\gamma}(t)) = 0$ .

*Доказательство.* Делим  $\bar{\gamma}(t)$  на  $n$  одинаковых по длине кусков.  $\{\bar{\gamma}(t_k)\}_{k=1}^{n+1}$ .  $\bar{\gamma}(t) \subset \cup(\text{квадратов с центрами в } \bar{\gamma}(t_k) \text{ и стороной } |\frac{2\bar{\gamma}(t)}{n}|)$ .

$$\mu(\cup(\text{кв.}...)) < \frac{4|\bar{\gamma}(t)|^2}{n^2} \cdot (n+1) \rightarrow 0$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ , тогда фигура  $A$  :

$$A = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

квадрируема и

$$\mu(A) = \int_a^b f(x) \, dx$$

*Доказательство.*

$$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T : d(T) < \delta : \underline{S}(T) - \overline{S}(T) < \varepsilon$$

Значит выполнено:  $\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$  и  $A$  - квадрируема по первому критерию квадрируемости. При этом

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A) \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx$$

□