# Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

6 сентября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

# Содержание

# 1 Ряды

## 1.1 Определение ряда и простейшие свойства

**Определение.** Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$a_n$ называется общим членом ряда, $S_n$ называется частичной суммой ряда.

**Определение.** Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а $S$ суммой ряда.

**Определение.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

**Теорема.** (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Очевидно по критерию коши для последовательности

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = S_m - S_{k-1}$$

$\square$

**Теорема.** Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

*Доказательство.* Очев. $\square$

**Теорема.** (Необходимое условие сходимости ряда)
Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$.

*Доказательство.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

$\square$

## 1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

**Теорема.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$$

Если последовательность $S_n$ ограничена, то этот ряд сходится.

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса для последовательности $S_n$. $\square$

**Теорема.** (Признак сравнения)
Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0)$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

расходится.

*Доказательство.* Очевидно из неравенства

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

□

**Теорема.** (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. □

**Пример.** Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

**Пример.**
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

**Пример.** Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$
сходится.

**Пример.** Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

**Упражнение.** Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$
сходится.

**Теорема.** (Признак Коши)
Пусть дан ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$
такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $\exists \ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

*Доказательство.*

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.
2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

**Следствие.** (Признак Коши в предельной форме)

1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд $(*)$ сходится
2. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $(*)$ расходится

*Доказательство.* Очев. $\square$

**Пример.** Пример, что при $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1. $$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$
   расходится
2. $$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$
   сходится

**Теорема.** (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \ \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\ dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* $\forall k \in \mathbb{N} : f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ на $[k, k+1]$. Проинтегрируем неравентсво на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\ dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\ dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

$\square$

**Пример.** (Степенно-логарифмическая шкала)

1. $$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \le 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \le 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2. $$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\beta x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \le 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \le 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3. $$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\gamma x} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \le 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\gamma x} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \le 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

**Теорема.** (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0 \tag{$*$}$$

1. Если $\forall n \ge N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$, $c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что

   $$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \ge \alpha$$

   то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

   расходится и

   $$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \le 0$$

   то ряд $(*)$ расходится.

*Доказательство.*

1. Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_N \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

   сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

   поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

   значит

$$\sum_{m=1}^{k} a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

   и ряд сходится.

2. 

$$c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \leq 0$$
$$\frac{c_N}{c_{N+1}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

   Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

   перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

   отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

   расходится.

$\square$

**Пример.** Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$
   значит если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$
   значит если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Теперь
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$$

то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q > 1$$

то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q < 1$$

то ряд $(*)$ расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
   Выводится из признака Бертрана.