Математический анализ-4

Лектор: доц. Косухин Олег Николаевич

21 февраля 2026 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Повторение построения интеграла Римана

Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$. Выбиралось разбиение $T = \{\Delta_j\}_{j=1}^n$ отрезка $[a, b]$ и разметка $H = \{\xi_j\}_{j=1}^n$. Диаметром $d(T)$ разбиения T называлась наибольшая из длин отрезков разбиения. Интегральной суммой на заданом размеченом разбиении называли следующее выражение:

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|\Delta_j|$$

где $|\Delta_j|$ - длина отрезка Δ_j. Тогда интералом Римана назывался предел

$$I = \lim_{d(T)\to 0} \sigma(f, T, H)$$

Также интеграл Римана можно ввести через суммы Дарбу. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f, T) = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot |\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f, T) = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x\in\Delta_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(x)$$

Далее вводился верхний и нижний инградлы Дарбу

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(f, T), \quad I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Если верхний и нижний интегралы совпадают

$$I = I_* = I^*$$

то I в точности интеграл Римана.
Нашей целью является перенос этой конструкции в $\mathbb{R}^k$ при $k \geq 2$.

1.2 Кратный интеграл Римана

Определение. Замкнутым брусом в $\mathbb{R}^k$ называется декартово проиведение

$$\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

Определение. Пусть дан брус $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$, а $T_1, \dots, T_k$ являются разбиениями $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ соответсвенно. Тогда

$$T = T_1 \times \dots \times T_k$$

называется разбиением бруса Π. Брус из разбиения $T = T_1 \times \dots \times T_k$ будем обозначать $\Delta_{j_1,\dots,j_k}$, а его объем $|\Delta_{j_1,\dots,j_k}|$. Разметкой разбиения также назовем множество $H = \{\xi_{j_1,\dots,j_k}\}_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}$, где $\xi_{j_1,\dots,j_k} \in \Delta_{j_1,\dots,j_k}$.

Определение. Интегральной суммой называется выражение

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} = f(\xi_{j_1,\dots,j_k}) \cdot |\Delta_{j_1,\dots,j_k}|$$

Для краткости будем писать

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

Для корректности определения осталось ввести понятие объема.

Определение. Пусть $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subset \mathbb{R}^k$. Объемом назовем функцию, которая обладает следующими свойствами:

1. $V(\Phi) \geq 0$
2. $\Phi_1 = \Phi_2$
3. $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$, если $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$
4. Объем единичного куба равен 1.

таким образом, объемом бруса Π называется

$$V(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_k - a_k)$$

Определение. Диаметром бруса Π назовем

$$\operatorname{diam}(\Pi) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_k - a_k)^2}$$

Тогда диаметром разбиения $d(T)$ называется наибольший из диаметров Δ_j.

Определение. I называется кратным интегралом функции f по брусу Π, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \ \forall T : d(T) < \delta \ \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

1.3 Суммы Дарбу

Определение. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f,T) = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j|, \;\; \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x\in\Delta_j} f(x), \;\; m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(x)$$

Определение. Разбиение $T' = T_1' \times \dots \times T_k'$ называется измельчением разбиения $T = T_1 \times \dots \times T_k$, если $\forall i = 1,\dots,k: \; T_i'$ является имельчением T_i.

Рассмотрим аналогичные одномерному случаю свойства сумм Дарбу:

Утверждение. Для любого разбиения T и любой его разметки H:

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \sigma(f,T,H) \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Утверждение. Если T' — измельчение T, то

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \overline{\overline{s}}(f,T'), \;\underline{\underline{S}}(f,T') \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Доказательство. Сравним $\overline{\overline{s}}(f,T)$ и $\overline{\overline{s}}(f,T')$, где T' получена добавлением разреза. После добавления, брус Δ_j разбился на два новых бруса Δ_j' и Δ_j'', обозначим: m_j', m_j'' - инфинумы f на Δ_j' и Δ_j'' соответсвенно. Тогда

$$\overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \overset{(1)}{=} \sum_j (m_j' \cdot |\Delta_j'| + m_j'' \cdot |\Delta_l''| - m_j(|\Delta_j'| + |\Delta_j''|)) =$$

$$= \sum_j ((m_j' - m_j)\cdot|\Delta_j'| + (m_j'' - m_j)\cdot|\Delta_j''|) \overset{(2)}{\ge} 0$$

(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез
(2): $m_j' \ge m_j, \; m_j'' \ge m_j$
Аналогично показывается, что $\underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T') \ge 0$. □

Утверждение. Пусть к разбиению T добавили p разрезов (к разбиениям $T_1,\dots,T_k$). Тогда

$$0 \le \overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \le (M-m)\cdot d^{k-1}\cdot\delta\cdot p$$

$$0 \le \underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T') \le (M-m)\cdot d^{k-1}\cdot\delta\cdot p$$

где $M = \sup\limits_{x\in R} f(x), \; m = \inf\limits_{x\in R} f(x), \; d$ — диаметр $\Pi, \; \delta = d(T)$ - диаметр T.

Доказательство.

$$\overline{\overline{s}}(f,T') - \overline{\overline{s}}(f,T) \overset{(1)}{=} \sum_j ((m'_j - m_j)\cdot|\Delta_j| + (m''_j)\cdot|\Delta''_j|) \overset{(2)}{\leq}$$

$$\overset{(2)}{\leq} \sum_j ((M-m)\cdot|\Delta'_j| + (M-m)\cdot|\Delta''_j|) = (M-m)\sum_j(|\Delta'_j| + |\Delta''_j|) =$$

$$= (M-m)\cdot|\Pi_1| \leq (M-m)\cdot d^{k-1}\cdot\delta$$

где $|\Pi_1|$ — суммарный объём тех брусов, которые были разрезаны. Проделав эту операцию p раз, получим искомое утверждение.

(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез

(2): $m'_j, m''_j \leq M,\ m_j \geq m$. Аналогично для верхней суммы Дарбу. □

Утверждение.

$$\overline{\overline{s}}(f,T) = \inf_H \sigma(f,T,H), \quad \underline{\underline{s}}(f,T) = \sup_H \sigma(f,T,H)$$

Доказательство.

$$\sigma(f,T,H) = \sum_j f(\xi_j)\cdot|\Delta_j|, \quad \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j m_j\cdot|\Delta_j|$$

Поскольку m_j — инфинум, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \xi_j \in \Delta_j : 0 \leq f(\xi_j) - m_j < \frac{\varepsilon}{|R|}$$

отсюда

$$0 \leq \sigma(f,T,H) - \overline{\overline{s}}(f,T) = \sum_j (f(\xi_j) - m_j)\cdot|\Delta_j| < \sum_j \frac{\varepsilon}{|R|}\cdot|\Delta_j|$$

а это в точности означает, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) = \inf_H \sigma(f,T,H)$$

Аналогично для верхней суммы Дарбу. □

Утверждение. Пусть T' и T'' — любые разбиения бруса П. Тогда

$$\overline{\overline{s}}(f,T') \leq \underline{\underline{S}}(f,T'')$$

Доказательство. Пусть T объединяет в себе все разрезы T_1 и T_2. Тогда T — измельчение и для T' и для T''. Тогда по доказанному выше свойству и определению сумм Дарбу, получим

$$\overline{\overline{s}}(f,T') \leq \underline{\underline{S}}(f,T) \leq \underline{\underline{S}}(f,T) \leq \underline{\underline{S}}(f,T'')$$

□

Определение. Нижним интегралом Дарбу называется

$$I_* = \sup_T \overline{\overline{s}}(f, T),$$

верхним интегралом Дарбу называется

$$I^* = \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Из определений ясно, что $I_* \leq I^*$.

1.4 Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе

Теорема (Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе)**.**
Если существует интеграл I от f на Π, то f ограничена на Π, то есть

$$f \in \mathcal{R}(\Pi) \Rightarrow f \in \mathcal{B}(\Pi)$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0, \ \forall T : d(T) < \delta \ \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

зафиксируем $j = j_0$

$$I - \varepsilon < f(\xi_{j_0}) \cdot |\Delta_{j_0}| + \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j| < I + \varepsilon$$

для $j \neq j_0$ выберем произвольным образом ξ_j и обозначим

$$c = \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

тогда $\forall \xi_{j_0} \in \Delta_{j_0}$:

$$\frac{I - \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0|}} < f(\xi_{j_0}) < \frac{I + \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0|}}$$

значит f ограничена на каждом $\Delta_{j_0} \Rightarrow f$ - ограничена на Π. □

Пример (Необходимое условие не является достаточным)**.**
Рассмотрим

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1, \ x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Q} \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{s}} = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 0 \cdot |\Delta_j| = 0$$

$$\underline{\underline{S}} = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 1 \cdot |\Delta_j| = |\Pi|$$

Итак

$$\forall I \in \mathbb{R} \;\; \exists\, \varepsilon = \frac{|\Pi|}{3} > 0, \; \forall \delta > 0 \;\; \exists\, T, H, \; d(T) < \delta : |\sigma(f, T, H) - I| \geq \varepsilon$$

Значит функция не является интегрируемой.

2 Лекция 2

2.1 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе

Определение. Разность сумм Дарбу

$$\Omega(f,T) = \underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T)$$

называется Ω-суммой.

Замечание. Пусть $T = \{\Delta_j\}$

$$\Omega(f,T) = \sum_i \left(\sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x) \right) \cdot |\Delta_i|$$

$\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x) := \omega_i$ называют колебаниями f на Δ_i.

В одномерном случае доказывалось утверждение

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости на отрезке)**.**
Следующие условия эквивалентны:

1. $f \in \mathcal{R}[a,b]$
2. $I^*(f) = I_*(f)$
3. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 : \forall T : d(T) < \delta : \Omega(f,T) < \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; T : \Omega(f,T) < \varepsilon.$

Рассмотрим аналогичное утверждение и докажем его

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости на брусе)**.**
Следующие условия эквивалентны:

1. $f \in \mathcal{R}(\Pi)$;
2. $I^*(f,\Pi) = I_*(f,\Pi)$;
3. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 : \forall T,\ d(T) < \delta : \Omega(f,T) < \varepsilon$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; T : \Omega(f,T) < \varepsilon.$

Доказательство.

1. (1) $\Rightarrow$ (2):

$$\exists\ I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ T, H,\ d(T) < \delta : |I - \sigma(f, T, H)| < \varepsilon$$

Знаем, что

$$\underline{\underline{S}}(f, T) = \sup_{H} \sigma(f, T, H), \quad \overline{\overline{s}}(f, T) = \inf_{H} \sigma(f, T, H)$$

тогда

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, H) < I + \varepsilon$$

отсюда

$$I - \varepsilon \leq \overline{\overline{s}}(f, T) < I + \varepsilon, \quad I - \varepsilon < \underline{\underline{S}}(f, T) \leq I + \varepsilon$$

таким образом $\exists\ I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall T,\ d(T) < \delta$:

$$|I - \overline{\overline{s}}(f, T)| < \varepsilon, \quad |I - \overline{\overline{s}}(f, T)| < \varepsilon$$

$$\lim_{d(T) \to 0} \overline{\overline{s}}(f, T) = \lim_{d(T) \to 0} \underline{\underline{S}}(f, T) = I$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T,\ d(T) < \delta : \overline{\overline{s}}(f, T) \geq I - \varepsilon \Rightarrow \sup_{T} \overline{\overline{s}}(f, T) = I_* \geq I$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T,\ d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(f, T) \leq I + \varepsilon \Rightarrow \inf_{T} \underline{\underline{S}}(f, T) = I^* \leq I$$

При этом известно, что $I_* \leq I \leq I^*$. Таким образом, $I_* = I = I^*$

2. (2) $\Rightarrow$ (4):

$$\sup_{T} \underline{\underline{S}}(f, T) = \inf_{T} \overline{\overline{s}}(f, T)$$

По свойству точных граней $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T_1, T_2$:

$$0 \leq I - \overline{\overline{s}}(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq I - \underline{\underline{S}}(f, T_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - \overline{\overline{s}}(f, T_1) < \varepsilon$$

Тогда если $T = T_1 \cup T_2$, то

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \overline{\overline{s}}(f, T) \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - \overline{\overline{s}}(f, T_1) < \varepsilon$$

3. (4) $\Rightarrow$ (3):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T_\varepsilon : \Omega(f, T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть разбиение T_1 получено из разбиения T добавлением p разрезов. Тогда

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \underline{\underline{S}}(f, T') \leq (M - m) \cdot d^{k-1} \cdot d(T) \cdot p$$

$$0 \le \Omega(f, T_1) \le \Omega(f, T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \le \Omega(f,T) - \Omega(f,T_1) = (\underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T)) - (\underline{\underline{S}}(f,T_1) - \overline{\overline{s}}(f,T_1)) =$$
$$= (\underline{\underline{S}}(f,T) - \underline{\underline{S}}(f,T_1)) - (\overline{\overline{s}}(f,T_1) - \overline{\overline{s}}(f,T)) \le 2(M-m)\cdot d^{k-1}\cdot d(T)\cdot p \overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

(1): при условии что мы берем

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(M-m)\cdot d^{k-1}\cdot p} > 0$$

Итак при $d(T) < \delta$:

$$\Omega(f,T) = (\Omega(f,T) - \Omega(f,T_1)) + \Omega(f,T_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. (3) $\Rightarrow$ (1):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall T, \ d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T) < \varepsilon$$

Отсюда следует что выполнено условие (2): $I_* = I^*$, а это означает, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le I \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

Также известно, что

$$\overline{\overline{s}}(f,T) \le \sigma(f,T,H) \le \underline{\underline{S}}(f,T)$$

объединяя эти два факта, получим, что

$$|I - \sigma(f,T,H)| \le \underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{s}}(f,T) < \varepsilon$$

$\square$