Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

14 ноября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Числовые ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию коши для последовательности S_n:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев. □

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0 \tag{$*$}$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд $(*)$ сходится. □

Теорема. (Признак сравнения)
Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0) \tag{2}$$

и $a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.
2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

□

Следствие. (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c-\varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c+\varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. □

Примеры.

1. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

2. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$
сходится.

4. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$
сходится.

Теорема. (Признак Коши)
Пусть дан знакоположительный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{$*$}$$

1. Если $\exists\ 0 < q < 1,\ \forall n > N : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд $(*)$ сходится.

2. Если $\exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$
то ряд $(*)$ сходится

2. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$
то ряд $(*)$ расходится

3. Если
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q = 1$$
то ряд $(*)$ может как сходиться так и расходиться.

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

3. $q = 1$, приведем пример рядов

   (a)
   $$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
   расходится.

   (b)
   $$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
   сходится.

$\square$

Теорема. (Признак Д'Аламбера)
Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. Если $\exists\ 0 < q < 1,\ \forall n > N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $\exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} \ge 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\forall n > N : a_{n+1} \le a_n \cdot q$, значит
$$a_{N+1} \le a_N \cdot q, \quad a_{N+2} \le a_{N+1} \cdot q \le a_N \cdot q^2, \quad \dots$$
таким образом, $\forall k \in \mathbb{N}$:
$$a_{N+k} \le a_N \cdot q^k$$
По признаку сравнения с геометрической прогрессией, ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$
сходится, значит ряд $(*)$ также сходится.
2. $\exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} \ge 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Д'Аламбера в предельной форме)
Пусть существует предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

1. Если $q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $q > 1$, то ряд $(*)$ расходится.
3. Если то ряд $(*)$ может как сходиться так и расходиться.

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

3. $q = 1$, приведем пример рядов

   (a)
   $$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
   расходится.

   (b)
   $$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
   сходится.

$\square$

Теорема. (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\ dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\ dx \geq f(k+1)$$

теперь для каждого $k = 1, \dots, N$ сложим полученные неравенства:

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\ dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. $\square$

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1.
$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.
$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\beta} x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.
$$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^{\gamma}(\ln n)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера)
Рассмотрим знакоположительный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$, $c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$
то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

   сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

   поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

   значит

$$\sum_{m=1}^{k} a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

   отсюда получаем, что начиная с какого-то номера, частичные суммы ряда ограничены. Значит ряд, поскольку он знакоположительный, сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

   Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит расходится и ряд $(*)$.

$\square$

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:

   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

   значит если

   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

   то ряд $(*)$ сходится. Если

   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

   значит если

   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если

   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

   то ряд $(*)$ сходится. Если

   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

   то ряд $(*)$ расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$
   Значит если
   $$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Теперь
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$
   Значит если
   $$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если
   $$\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\right) = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\right) = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
   Выводится из признака Бертрана.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

   где θ_n - ограниченная последовательность, $\varepsilon > 0$ - произвольное. Тогда при

   (a) $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$ - сходится, $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.
   (b) $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$ - сходится, $\mu < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.
   (c) $\lambda = 1,\ \mu = 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^{N} a_n \right| \leq \sum_{n=k}^{N} |a_n| < \varepsilon$$

□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tag{2}$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Рассмотрим

$$S_k^\sigma = \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max\limits_{1 \leq n \leq k} \sigma(n),\ S_n \to S$. Тогда

$$S_k^\sigma \leq S_N \Rightarrow S_k^\sigma \leq S \Rightarrow \exists\ S^\sigma = \lim_{k\to\infty} S_k^\sigma$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^\sigma \Rightarrow S = S^\sigma$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a,\ a \geq 0, \\ 0,\ a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1,k=1}^{\infty,\ \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1,\ \ldots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_nb_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме $(*)$.

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = A,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_nb_k)_m \qquad (*)$$

сходится абсолютно и равен AB.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда $(*)$, которые имеют вид S_{N^2}:

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \to AB,\ N \to \infty$$

Теперь перейдем к общему виду $S_{N^2+M},\ (1 \leq M \leq 2N)$ и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M}(a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M}(a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \cdots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \cdots + |b_N|) \to 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит $S_{N^2+M} \to AB$. $\square$

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n, \ a_n > 0, \\ 0, \ a_n \le 0. \end{cases}, \ a_n^- = \begin{cases} 0, \ a_n \ge 0, \\ a_n, \ a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{2}$$

расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит оба ряда расходятся. □

Теорема. (Теорема Римана)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists\ \sigma_{+\infty}$ и $\sigma_{-\infty}$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{+\infty}(n)} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{-\infty}(n)} = -\infty$$

$\exists\ \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. доказали картинками)))))
доказательство появится немного позже □

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

($\mathcal{A}$): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а b_n монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

($\mathcal{D}$): Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^{p} a_n, \;\; A_{k-1} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1} \cdot b_n =$$
$$= \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m$$

$(\mathcal{A})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \overset{(1)}{\leq} 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

(1):

$$|A_p| = \left| \sum_{n=k}^{p} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{p} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \right| \leq 2M$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)
Если a_n монотонно убывает и $a_n \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad (*)$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1, \;\; \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд $(*)$ сходится. □

2 Функциональные последовательности и ряды

2.1 Функциональные последовательности

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0,1]$:
$$x^n \to \begin{cases} 1, \ x = 1, \\ 0, \ x \in [0,1). \end{cases}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\sin \frac{x}{n} \to 0$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A, и пишут $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Примеры.

1. На $[0,1]$
$$x^n \not\rightrightarrows \begin{cases} 1, \ x = 1, \\ 0, \ x \in [0,1]. \end{cases}$$
поскольку $\exists \ \varepsilon_0 > 0, \ \forall N_\varepsilon \ \exists \ n > N_\varepsilon, \ \exists \ x_{\varepsilon_0} \in [0,1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.

2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \rightrightarrows 0$.

3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0,1] : f_n \rightrightarrows 0$.
$$f_n' = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \ f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \not\rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$, но $\forall a, b, \ \forall x \in [a,b] : \sin \frac{x}{n} \rightrightarrows 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \sup_A |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Доказательство.

(⇒):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит, после предельного перехода, получаем:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(⇐):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

(⇒):

$$|f_k(x) - f_m(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq$$
$$\leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$$

(⇐): Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$. Тогда после предельного перехода получим, что $\forall x \in A$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимотси последовательности) Пусть $\forall x \in A : f_n(x) \to f(x)$. Если

$$\exists \ \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \ c_n \geq 0, \ c_n \to 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$$

Доказательство. Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. Пусть $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall n > N,\ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N_\varepsilon$ и запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le \\ \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. (Почленное интегрирование)
Пусть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^x f_n(t)\ dt\ \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_a^x f_n(t)\ dt - \int\limits_a^x f(t)\ dt \right| \le \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b-a| < \varepsilon \cdot |b-a|$$

□

Теорема. (Почленное дифференцирование)
Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ \exists\ x_0 \in [a,b]$:

$f_n(x_0) \to \alpha$. Пусть $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$. Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$ и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\ dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt\ \Rightarrow\ f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt$$

отсюда

$$f_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt + \alpha = f(x)$$

□

2.2 Функциональные ряды

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$, определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\},\ \{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд (1) сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, то говорят, что ряд (1) сходится равномерно.
3. Если сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$
то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m, k > N_\varepsilon,\ \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для функциональных последовательностей

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Необходимое условие равномерной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда $|a_n(x)| \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство.

$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \rightrightarrows S(x) - S(x) = 0$$

$\square$

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $S_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$ и $\forall n : a_n(x)$ непрерывна в точке x_0. Значит, $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0, и по теореме для функциональных последовательностей, $S(x)$ непрерывна в точке x_0. $\square$

Теорема. (Почленное интегрирование)
Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right) \rightrightarrows \int_a^x S(t)\ dt$$

Доказательство. $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. Проинтегрируем почленно:

$$\int_a^x S_n(t)\ dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x S(t)\ dt$$

что можно $\forall x \in [a, b]$ записать, как:

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{k} a_n(t) \right) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt$$

Таким образом

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt = \lim_{k \to \infty} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{k} a_n(t) \right) dt =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right)$$

$\square$

Теорема. (Почленное дифференцирование)
Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \alpha$$

где $x_0 \in [a,b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} G(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \ S(x) \in \mathcal{C}^1[a,b], \ S'(x) = G(x)$$

Доказательство. Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности $S_n(x)$. □

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Пусть $\forall n : |a_n(x)| < \alpha_n, \ \forall x \in A$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \ \{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A.

($\mathcal{A}$:) Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$$

и $\exists \ M > 0, \ \forall x \in A, \ \forall n : |b_n(x)| < M$ и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$.

($\mathcal{D}$:) Пусть $\exists \ M > 0, \ \forall x \in A, \ \forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right| \leq M$$

и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$, причем $b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$$

Доказательство. Аналогично как для числовых рядов. Введем:

$$A_p(x) = \sum_{n=k}^{p} a_n(x),\ A_{k-1}(x) = 0 \ \Rightarrow\ a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

отсюда

$$\sum_{n=k}^{m} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=k}^{m} (A_n(x) - A_{n-1}(x))\ b_n(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m} A_n(x) b_n(x) - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1}(x) b_n(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m} A_n(x) b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x) b_{n+1}(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x)$$

$(\mathcal{A})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x) \right| \leq \varepsilon \cdot 3M$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x) \right| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$$

□

2.3 Степенные ряды

Определение. Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

называются степенными рядами. a_n - коэффициэнты степенного ряда, x_0 - центр разложения.

Замечание. В центре разложения ряд сходится.

Замечание. Сдвиг $x - x_0 \mapsto x$ не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема. (Первая теорема Абеля)
Рассмотрим стеепнной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

1. Если существует $x_1 \in \mathbb{R}$, что $(*)$ сходится в точке x_1, то для любых x, таких, что $|x| < |x_1|$ ряд $(*)$ сходится.

2. Если существует $x_2 \in \mathbb{R}$, что ряд $(*)$ расходится в точке x_2, то для любых x, таких что $|x| > |x_2|$ ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Пусть $x : |x| < |x_1|$.
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \right) \overset{(1)}{\leq} M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$
(1): Поскольку сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$$
то $a_n x_1^n \to 0 \Rightarrow |a_n x_1^n| < M$
Таким образом, ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. Теперь пусть $x : |x| > |x_2|$. От противного: пусть есть точка $y : |y| > |x_2|$, в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках $x : |x| < |y|$, а значит и в x_2 - противоречие.

$\square$

Замечание. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ сходится, $A \neq \varnothing$, так как $\{0\} \in A$.
Пусть $B \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ расходится и пусть $B \neq \varnothing$.
Тогда из первой теоремы Абеля следует, что $A = \{0\}$ или $\exists\, a > 0 : (-a, a) \subset A$, а также $\exists\, b > 0 : (-\infty, -b) \cap (b, +\infty) \subset B$.

Утверждение. $a = b$

Доказательство. Предположим что это не так, тогда $a < b$ или $b < a$. Пусть для определенности $a < b$, по аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R} : a \le c \le b$. Значит c не лежит ни в A ни в B, а такого быть не может, противоречие. $\square$

Определение. Число $a = b$ называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R. Формально полагают, что если $R = 0$, то $A = \{0\}$, если $B = \varnothing$, то $R := +\infty$.

Теорема. (Формула Коши-Адамара)
Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Если предел равен нулю, то $R = +\infty$.
Если предел равен бесконечности, то $R = 0$.

Доказательство. Применим признак Коши к ряду

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1\ - \text{ сходится, и } |x| < R, \\ l > 1\ - \text{ расходится, и } |x| > R \end{cases}$$

$\square$

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \tag{$*$}$$

и пусть $R > 0$.

1. $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ряд равномерно сходится.

2. $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.

3. $\forall x \in (-R, R)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int\limits_0^x S(t)\ dt$$

4. $S(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(-R, R)$.

Доказательство.

1. $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot (R - \varepsilon)^n$ по признаку Вейерштрасса.

2. из пункта 1: $\forall \varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R + \varepsilon, R - \varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.

3. Поскольку ряд $(*)$ равномерно сходится на любом отрезке внутри $(-R, R)$, то можно почленно интегрировать
$$\int\limits_0^x S(t)\ dt = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x a_n t^n\ dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

4. Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$
значит $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha x^n$$
имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости R. Тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

$\square$

Теорема. (Вторая теорема Абеля)
Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ \ R > 0$$
Пусть
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$
сходится. Тогда $S(x) \in \mathcal{C}[0, R]$ то есть
$$\exists \lim_{x\to R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = S(R)$$

Доказательство.
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$$
а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на $[0, R]$. $\square$

2.4 Ряды Тейлора

Определение. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(B(x_0))$. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром ряда x_0.

Замечание. Далее везде центр разложения в 0.

Теорема. Если в некоторой окрестности нуля выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Доказательство. Подставим $x = 0$, тогда $a_0 = f(0)$. Продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_1 = f'(0)$. Снова продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_2 = \frac{f''(x)}{2}$. Продолжая выполнять эту операцию, для каждого n получим $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$. $\square$

Теорема. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(-a, a)$ и $|f^{(n)}(x)| \leq A^n,\ A > 0$.
Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot x^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\forall x \in (-a, a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Тогда

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| \leq \frac{A^{N+1} \cdot a^{N+1}}{(N+1)!} \to 0$$

$\square$

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

Несложно проверить, что $f(x) \in C^\infty(B(0)),\ \ f^{(n)}(0) = 0$.
Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \neq f(x)$$

Пример. (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)
Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Этот ряд сходится на $(-1, 1)$, причём

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \to 1-0]{} \frac{1}{2}$$

но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

не сходится.

Лемма. Если $a_n \to A$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n \to A$$

Доказательство.

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n - A \right| = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n - AN \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N_1} a_n - AN_1 \right| + \frac{1}{N} \sum_{n=N_1+1}^{N} |a_n - A| < \varepsilon \cdot \frac{N - N_1}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Теорема Таубера)
Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на $(-1, 1)$, существует

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

и пусть $a_n = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{n}),\ n \to \infty$.
Тогда существует
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$
Доказательство. Обозначим $\forall x \in (0, 1)$
$$N_x = \left[\frac{1}{1-x}\right]$$
и введём функцию
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
Если $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1-0$, то теорема доказана.
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$
$$\left|\sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)(1+x+...x+x^{n-1})\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n| n \leq \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n n| \to 0,\ x \to 1-0$$
$$\left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n\right| < \frac{1}{N_x+1} \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \varepsilon x^n <$$
$$< \frac{\varepsilon}{N_x+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{N_x+1} \cdot \frac{1}{1-x} < \varepsilon$$
Отсюда $|\varphi(x)| < 2\varepsilon\ \forall n > N_x$. □

3 Бесконечные произведения

Определение. Рассмотрим $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k\}_{n=1}^{\infty}$.
Пара последовательностей $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется бесконечным произведением чисел $\{u_n\}$, обозначается
$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$
u_n - общий член, Π_n - частичное произведение.

Определение. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = a \neq 0$. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся, если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = 0$. Если $\exists n : u_n = 0$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся к 0.

Теорема. (Необходимое условие сходимости) Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $u_n \to 1$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1$$

$\square$

Следствие. Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n,\ a_n \to 0$$

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln{(1 + a_n)}$$

сходится.

Доказательство.

($\Rightarrow$):

$$\Pi_N \text{ - сходится} \Rightarrow \ln(\Pi_N) \text{ - сходится, } \ln(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} ln(1+a_n) \text{ - сходится}$$

($\Leftarrow$):

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1 + a_n) \text{ - сходится} \Rightarrow e^{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \ln(1+a_n)\right)} \text{ - сходится} \Rightarrow \Pi_N \text{ - сходится}$$

$\square$

Определение. Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответсвующий ряд из логарифмов.

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$$

из этого следует утверждение в обе стороны. □

Следствие. Если a_n знакопостоянны, то произведение и соответсвующий ряд из логарифмов сходятся или расходится одновременно.

Теорема. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Доказательство.

$$\ln(1+a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{\bar{o}}(a_n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

□

Замечание. Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n(x))$$

анализируя соответсвующий функциональный ряд из логарифмов.

Пример. (Пример Эйлера)
Пусть p_k обозначает k-е простое число. Тогда при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ls}}\right) = \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} < \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Тогда

$$\sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),\ N \to \infty$$

3.1 Разложение синуса в бесконечное произведение

Теорема. $\forall x \neq \pi k$:

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Доказательство. $\forall n : \sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$
это утверждение можно показать по индукции, с базой $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin\left((2n+1)x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2n+1},\ k \in \mathbb{Z}$$

при этом

$$P_n(\sin^2 x) = 0,\ x = \frac{\pi k}{2n+1},\ k = 1, \dots, n$$

$$P_n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1},\ k = 1, \dots, n$$

Заметим, что

$$P_n(\sin^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} \to 1,\ x \to 0$$

Тогда

$$P_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{\omega}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}})$$

$$P_n(\sin^2 x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}$$

сделаем замену: $(2n+1)x = t$

$$\frac{\sin t}{(2n+1)\cdot\sin\frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Лемма. $\forall \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}:$

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \le \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1$$

Доказательство. Очев по индукции. $\square$

Возьмем $\forall t \in \mathbb{R},\ |t| < n, m < n$

$$\frac{\sin t}{(2n+1)\cdot\sin\frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)\cdot R_{n,m}(t) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} R_{n,m}(t) = R_m(t)$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)\cdot R_m(t)$$

Вернемся к $R_{m,n}$:

$$\left|\prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)\right| \le \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{\sin^2\frac{t}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \le$$
$$\le \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{(\frac{2}{\pi}\cdot\pi k)^2}\right) - 1 = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 <$$
$$< \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \to 0$$

при $m \to \infty \Rightarrow R_m(t) \to 1,\ m \to \infty$. Значит

$$\sin t = t\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

$\square$

Следствие. (Формула Валлиса)
При $t = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right)$$

4 Интегралы с параметром

4.1 Собственные интегралы с параметром

Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}[a,b],\ \varphi(y) \le \psi(y)$. Рассмотрим $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x,y) : y \in [a,b],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

см. рисунок ниже

Определение. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}[\varphi(y),\psi(y)]$. Интеграл

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx$$

называется собственным интегралом с параметром.

Теорема. Пусть $\varphi(x),\ \psi(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ f(x,y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \in \mathcal{C}[a,b]$$

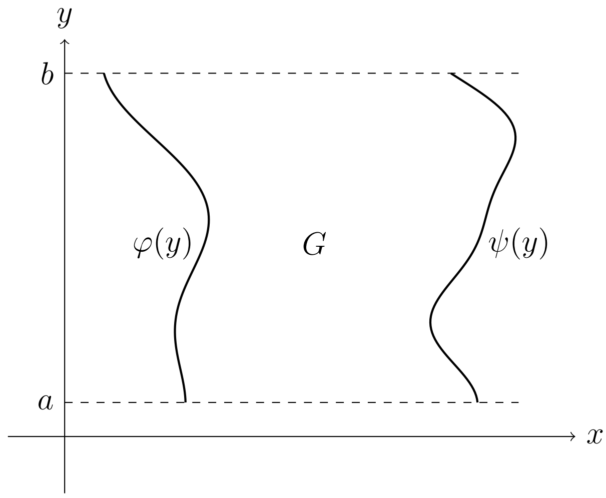
Доказательство.

$$|F(y+\Delta y) - F(y)| = \Bigg| \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx -$$

$$- \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx\ - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx\ \Bigg| \overset{(1)}{\le}$$

$$\overset{(1)}{\le} \Bigg| \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx\ \Bigg| + \Bigg| \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx\ \Bigg| +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|\ dx \overset{(2)}{\le} M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \max_y |\psi(y) - \varphi(y)|$$



(1):

$$\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx = \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx +$$

$$\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx + \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx + \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx$$

(2): Первые два слагаемых оцениваются так: $f(x, y+\Delta y) \le M$, так как $f \in \mathcal{C}(G)$ и, поскольку $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны, то $|\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)| < \varepsilon$ и $|\psi(y+\Delta y) - \psi(y)| < \varepsilon$.

Последнее слагаемое оценивается так: $f \in \mathcal{C}(G)$, значит, f равномерно непрерывна (так как G - компакт) $\Rightarrow$ при $\Delta y \to 0 : |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \varepsilon$ $\square$

Теорема. Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ f(x,y) \in \mathcal{C}(G),\ \exists\ f'_y(x,y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда $F(y) \in \mathcal{C}^1(G)$ и

$$F'(y) = \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx\right)' = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\ dx + f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\Delta y}(F(y+\Delta y)-F(y)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}\Bigg(\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\;dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\;dx \Bigg) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\;dx -$$

$$- \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\;dx + \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x,y+\Delta y)-f(x,y))\;dx \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{\Delta y}(\psi(y+\Delta y)-\psi(y))\cdot f(\psi(y+\theta_1\Delta y), y+\Delta y) -$$

$$- \frac{1}{\Delta y}(\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)) f(\varphi(y+\theta_2\Delta y), y+\Delta y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y+\theta_3\Delta y)\;dx$$

(1): Аналогично предыдущей теореме

(2): Применяем теорему о среднем к первому и второму слагаемому, и теорему Лагранжа к третьему слагаемому ($0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1$)

Значит существует предел при $\Delta y \to 0$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \psi'(y) f(\psi(y),y) - \varphi'(y) f(\varphi(y),y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\;dx$$

□

Теорема. Пусть $f(x,y)\in\mathcal{C}([a,b]\times[c,d])$. Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\;dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\;dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t) = \int\limits_c^t \left(\int\limits_a^b f(x,y)\;dx \right) dy,\; G(t) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\;dy \right) dx$$

$$F'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\;dx,\; G'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\;dx$$

Отсюда $F(t) - G(t) = \widetilde{C}$. Заметим, что $F(C) = G(C) = 0 \Rightarrow \widetilde{C} = 0$. Значит $F(t) = G(t)$, в частности для $t = d$. $\square$

4.2 Несобственные интегралы с параметром

Определение. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$$

Пусть на $Y \subset \mathbb{R}$:

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx = F(y)$$

Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A \in [a,\omega) : \forall a' > A,\ \forall y \in Y$:

$$\left| \int\limits_a^{a'} f(x,y)\,dx - F(y) \right| < \varepsilon$$

то

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y)$$

Далее, без ограничения общности будем писать $\omega = +\infty$.

Теорема. (Критерий Коши)

$$\int\limits_a^{a'} f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A > a,\ \forall a_1, a_2 > A,\ \forall y \in Y$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_{a_2}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < 2\varepsilon$$

($\Leftarrow$):

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx \right| < \varepsilon$$

Тогда при $a_2 \to +\infty$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x,y)\ dx \right| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Рассмотрим

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\ dx,\ y \in Y$$

Если $\exists\ g(x)$ такая, что $|f(x,y)| < g(x)$ и сходится интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\ dx$$

то интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\ dx$$

сходится равномерно на Y.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx \right| \leq \int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)\ dx < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости)
Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)\ dx,\ y \in Y$$

Пусть $|f(x,y)|,\ |g(x,y)| < M$

$(\mathcal{A})$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

$g(x,y)$ монотонна $\forall y$. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left|\int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx\right| < M$$

$g(x,y)$ монотонна и $g(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| = \left|g(a_1,y)\cdot\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx + g(a_2,y)\cdot\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx\right| \le$$

$$\le |g(a_1,y)|\cdot\left|\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx\right| + |g(a_2,y)|\cdot\left|\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx\right| = (*)$$

$(\mathcal{A}):\ (*) \le \varepsilon\cdot M + \varepsilon\cdot M$

$(\mathcal{D}):\ (*) \le \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M$ $\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty)\times[c,d])$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$$

Тогда $F(y)\in\mathcal{C}[c,d]$.

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y+\Delta y)\,dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_a^{A} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < 3\varepsilon$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty] \times [c,d])$, $\exists\ f'_y(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty] \times [c,d])$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx = F(y),\ \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\ dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} G(y)$$

Тогда $\exists\ F'(y) = G(y)$.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to +\infty$ и

$$F_n(y) = \int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx$$

По теореме о дифференцираваннии функциональных последовательностей и теореме о дифференцировании собственных интегралов:

$$F'_n(y) \rightrightarrows G(y) \Rightarrow F'(y) = G(y)$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty] \times [c,d])$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \rightrightarrows F(y)$$

Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to +\infty$

$$F_n(y) = \int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx$$

Тогда по теореме для собственных интегралов:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^{x_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_c^d F_n(y)\ dy \right) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \right) dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{x_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

$\square$

Теорема. (Признак Дини равномерной сходимости последовательности)
Пусть $\forall n : f_n(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ \forall x \in [a,b] : f_n(x)$ монотонны по n и

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$$

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство.

$$\forall x_0 \in [a,b],\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_{\varepsilon,x_0},\ \forall n \geq N_{\varepsilon,x_0} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Отсюда $\exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$:

$|f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x) - f(x)| \leq |f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x) - f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x_0)| + |f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$

Из монотонности следует, что для всех номеров, больших данного, неравенство выполняется.
Рассмотрим накрытие:

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} B_{\delta_\varepsilon}(x) \Rightarrow \exists\ \{x_i\}_{i=1}^k,\ [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$$

Возьмем $N_\varepsilon = \max\limits_{i=1,\dots,k}(N_{\varepsilon,x_i})$. Тогда

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n > N_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty) \times [b,+\infty)),\ f(x,y) \geq 0$. Пусть существует

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \in \mathcal{C}[b,+\infty)$$

и пусть существует

$$G(x) = \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\ dy \in \mathcal{C}[a,+\infty)$$

Если существует

$$\int\limits_b^{+\infty} F(y)\ dy = I$$

то существует

$$\int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I$$

Доказательство. Введем монотонные последовательности $a_n \to +\infty$, $b_k \to +\infty$

$$F_n(y) = \int\limits_a^{a_n} f(x, y)\ dx,\ G_k(x) = \int\limits_b^{b_k} f(x, y)\ dy$$

Заметим, что по признаку Дини

$$F_n(y) \rightrightarrows F(y),\ G_k(x) \rightrightarrows G(x)$$

по теореме для собственных интегралов

$$\int\limits_b^{b_k} \left(\int\limits_a^{a_n} f(x, y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^{a_n} \left(\int\limits_b^{b_k} f(x, y)\ dy \right) dx$$

Пусть

$$C_{nk} = \int\limits_b^{b_k} F_n(y)\ dy = \int\limits_a^{a_n} G_k(x)\ dx$$

Тогда

$$C_{nk} = \int\limits_b^{b_k} F_n(y)\ dy \le \int\limits_b^{b_k} F(y)\ dy \le \int\limits_b^{+\infty} F(y)\ dy = I$$

но с другой стороны

$$C_{nk} = \int\limits_a^{a_n} G_k(x)\ dx \le \int\limits_a^{a_n} G(x)\ dx \to \int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I' \le I$$

Теперь мы знаем что существует интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I'$$

и можем повторить это рассуждение в другом порядке (сначала для G, а потом для F) и получить, что $I \le I' \Rightarrow I = I'$. $\square$

Следствие. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty))$. Пусть существуют

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\ dx \in \mathcal{C}[b, +\infty),\ \int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)|\ dx$$

и пусть существуют

$$G(x) = \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\ dy \in \mathcal{C}[a,+\infty),\ \int\limits_b^{+\infty} |f(x,y)|\ dy$$

Если существуют

$$\int\limits_b^{+\infty} F(y)\ dy = I,\ \int\limits_b^{+\infty} |F(y)|\ dy$$

то существуют

$$\int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I,\ \int\limits_a^{+\infty} |F(y)|\ dy$$

Доказательство. Заметим, что $|f(x,y)| - f(x,y) \geq 0,\ |f(x,y)| \geq 0 \Rightarrow$ верны условия теоремы. □

Теорема. $\forall a \in \mathbb{R}:$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{sgn}(a)$$

Доказательство. Пусть

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ dx,$$

Заметим, что $I(0) = 0,\ I(-a) = I(a)$. Далее рассматриваем только $a > 0$. Введем

$$I(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot e^{-\varepsilon x}\ dx,\ \varepsilon \geq 0$$

Пусть $a \geq a_0 > 0,\ \varepsilon \geq 0$. По теоремам выше $I(a,\varepsilon)$ непрерывна.

$$I'_a(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x}\ dx$$

при $a \geq a_0 > 0,\ \varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$. Интегрируем по частям:

$$I'_a(a,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a} \int\limits_0^{+\infty} \sin ax \cdot e^{-\varepsilon x}\ dx = \frac{\varepsilon}{a^2} - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x}$$

$$I'_a(a,\ \varepsilon) \cdot (1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}) = \frac{\varepsilon}{a^2} \Rightarrow I'_a(a,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + a^2} \Rightarrow I_a(a,\varepsilon) = \arctan\frac{a}{\varepsilon} + C(\varepsilon)$$

При $a = 0 : I(a, \varepsilon) = 0 \Rightarrow C(\varepsilon) = 0$. Значит

$$I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon}$$

При $\varepsilon \to 0+$ из непрерывности

$$I(a) = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

5 Эйлеровы интегралы

5.1 Гамма-функция Эйлера

Рассмотрим последовательность

$$\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)!\ n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)} \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

Преобразуем это выражение:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k \cdot x(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)! \cdot x(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1})}$$

$$n^x = \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

таким образом

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1})} \cdot \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

Поскольку $(1+\frac{x}{k})^{-1}(1+\frac{1}{k})^x = O(\frac{1}{k^2})$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

Этот предел обозначают $\Gamma(x)$.

Определение. $\Gamma(x)$ называется гамма-функцией Эйлера.

Теорема. (Основное функциональное соотношение)
$\forall x \in D(\Gamma)$:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\ n^{x+1} \cdot \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k+1)(n-1)!\ n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n} = x$$

$\square$

Теорема. $\forall x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_0^1 (1-t)^n\, dt^x = \frac{n}{x} \int\limits_0^1 t^x (1-t)^{n-1}\, dt = \dots =$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \cdot \int\limits_0^1 t^{x+n-1}\, dt = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)} =$$

$$= \frac{n!\,(n+1)^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)} \cdot \frac{1}{(n+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \cdot \Gamma_{n+1}(x)$$

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \cdot \int\limits_0^1 t^{x-1} (1-t)^n\, dt = \left| t = \frac{\tau}{n} \right| = \frac{(n+1)^x}{\tau^x} \cdot \int\limits_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n\, d\tau$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^x}{n^x} = 1$$

то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n\, d\tau = \Gamma(x)$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Таким образом, условия теоремы равносильны

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n t^{x-1} (e^t - (1 - \frac{t}{n})^n)\, dt = 0$$

$$e^{\alpha} \geq 1 - \alpha \ \Rightarrow\ e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \ \Rightarrow\ e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

отсюда

$$0 \leq \int\limits_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) \, dt$$

$$e^{\alpha} \geq 1 + \alpha \;\Rightarrow\; e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \;\Rightarrow\; e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

$$\int\limits_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) \, dt = \int\limits_0^n t^{x-1} e^{-t} (1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n) \, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \right) \, dt = \int\limits_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \right) \, dt \overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \int\limits_0^n t^{x-1} e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \right) \, dt = \frac{1}{n} \int\limits_0^n t^{x+1} e^{-t} \, dt \leq \frac{C}{n} \to 0$$

(1): По неравентсву Бернулли □

Утверждение.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} \, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$$

Таким образом

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$$

Шаг: Пусть верно для n, то есть

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

По основному функциональному соотношению:

$$\Gamma(n+1) = (n+1) \cdot \Gamma(n) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

□

Теорема. (Формула дополнения для гамма-функции Эйлера)
$\forall x \notin \mathbb{Z}$:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin{(\pi x)}}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x)$$

отсюда

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) &= \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) = \\ &= \frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\cdot(-x)\cdot\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x} = \\ &= \frac{\pi}{\pi x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}\cdot 1 \overset{(1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\end{aligned}$$

(1): по формуле разложения синуса в бесконечное произведение:

$$\sin(\pi x) = \pi x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

□

Пример. (Интеграл Эйлера-Пуассона)
Заметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Таким образом, можем посчитать интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5.2 Формула Стирлинга

Теорема. (Формула Стирлинга)
Для $|\alpha_n| \le 2$:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}\left(1+\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Доказательство.

$$n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^n e^t\,dt$$

Исследуем подинтегральную функцию на максимум:

$$(t^n e^{-t})' = n\cdot t^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t} = 0 \;\Rightarrow\; t_{\max} = n \;\Rightarrow\; \max(t^n e^{-t}) = n^n e^{-n}$$

отсюда

$$n! = n^n e^{-n} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t}\,dt$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{n\ln\frac{t}{n}+n-t}\,dt$$

Сделаем замену $-x^2 = n\ln\frac{t}{n} + n - t = n\ln\left(1+\frac{t-n}{n}\right) + n - t$

По формуле Тейлора с остаточным членов в форме Лагранжа:

$$\ln(1+\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta\tau)^2},\ |\theta| < 1$$

$$\begin{aligned} n\ln\left(1+\frac{t-n}{n}\right) + n - t &= \\ = n\left(\frac{t-n}{n} - \frac{(t-n)^2}{2n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\theta_n\cdot\frac{t-n}{n}\right)^2}\right) + n - t &= \\ = -\frac{(t-n)^2}{2n}\cdot\frac{1}{\left(1+\theta_n\cdot\frac{t-n}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

отсюда, после раскрытия модуля

$$x = \frac{t-n}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{1}{1+\theta_n\cdot\frac{t-n}{n}} = \frac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n+\theta_n(t-n)}$$

$$nx + \theta_n(t-n)x = \sqrt{\frac{n}{2}}\cdot(t-n)$$

$$nx = (t-n)\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x\right) \ \Rightarrow\ t-n = \frac{nx}{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x} \ \Rightarrow\ t = \frac{nx + n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x}$$

отсюда

$$\begin{aligned} dt = 2x\cdot\frac{nx+n(\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x)}{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x}\cdot\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x}{nx}\,dx &= \\ = 2(x+\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x)\,dx = (\sqrt{2n}+2(1-\theta_n)x)\,dx \end{aligned}$$

после всех преобразований, получим

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{+\infty} e^{n\ln\frac{t}{n}+n-t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cdot(\sqrt{2n}+2(1+\theta_n)x)\,dx &= \\ = \sqrt{2\pi n} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-\theta_n)e^{-x^2}\,dx^2 = \sqrt{2\pi n} + \beta_n,\ |\beta| \le 4 \end{aligned}$$

итого

$$n! = n^n e^n(\sqrt{2\pi n} + \beta_n) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

□