

Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

19 сентября 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Контакты: [Telegram](#), [GitHub](#)

Содержание

1	Ряды	3
1.1	Определение ряда и простейшие свойства	3
1.2	Знакопостоянные ряды	4
1.3	Знакопеременные ряды	12
1.4	Функциональные последовательности и ряды	17

1 Ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall k, m > N_{\varepsilon} : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для последовательности S_n :

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев.

□

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad (*)$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд (*) сходится. \square

Теорема. (Признак сравнения)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n \geq 0) \tag{2}$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.
2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$$

\square

Теорема. (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. \square

Примеры.

1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится по Критерию Коши.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

сходится.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится.

Теорема. (Признак Коши)

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{*}$$

такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд (*) сходится.

2. Если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд (*) расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд (*) сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

□

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

то ряд $(*)$ сходится

2. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$

то ряд $(*)$ расходится

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

□

Пример. При $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

2.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

Теорема. (Интегральный признак)

Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int_1^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^N f(k) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\beta x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\gamma (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (*)$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$, $c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$

то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$:

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

значит

$$\sum_{m=1}^k a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

и ряд сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{array} \right.$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит расходится и ряд (*).

□

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)

Возьмем $c_n = 1$:

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Если

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

2. (Признак Раабе)

Возьмем $c_n = n$:

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n + 1) \geq \alpha$$

Значит если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

Значит если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

3. (Признак Бертрانا, без доказательства, знать формулировку)

Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - 1\right) \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - 1\right)\right) = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - 1\right)\right) = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)

Выводится из признака Бертрана.

Формулировка появится позже.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^N a_n \right| \leq \sum_{n=k}^N |a_n| < \varepsilon$$

□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad (2)$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Рассмотрим

$$S_k^\sigma = \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max_{1 \leq n \leq k} \sigma(n)$, $S_n \rightarrow S$. Тогда

$$S_k^\sigma \leq S_N \Rightarrow S_k^\sigma \leq S \Rightarrow \exists S^\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^\sigma$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^\sigma \Rightarrow S = S^\sigma$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty, \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ \hline a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ \hline a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1, \dots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме (*).

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m \quad (*)$$

сходится абсолютно и равен AB .

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда (*), которые имеют вид S_{N^2} :

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \rightarrow AB, \quad N \rightarrow \infty$$

Теперь перейдем к общему виду S_{N^2+M} , ($1 \leq M \leq 2N$) и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \dots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \dots + |b_N|) \rightarrow 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит $S_{N^2+M} \rightarrow AB$. \square

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0. \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad (2)$$

расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит оба ряда расходятся. \square

Теорема. (Теорема Римана)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R} \exists \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists \sigma_{\pm\infty}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{\pm\infty}} = \pm\infty$$

$\exists \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. доказали картинками))))))

доказательство появится немного позже

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(\mathcal{A}): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а b_n монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

(\mathcal{D}): Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^p a_n, \quad A_{k-1} = 0 \Rightarrow a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n &= \sum_{n=k}^m (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1} \cdot b_n = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \end{aligned}$$

(A):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

(D):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)

Если a_n монотонно убывает и $a_n \rightarrow 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad (*)$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд (*) сходится.

□

1.4 Функциональные последовательности и ряды

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0, 1]$

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

2.

$$\sin \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A , и пишут $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

Примеры.

1. На $[0, 1]$

$$x^n \not\Rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

поскольку $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N_\varepsilon \exists n > N_\varepsilon, \exists x_{\varepsilon_0} \in [0, 1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.

2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \Rightarrow 0$.

3. $f_n = x^n - x^{2n}$ на $[0, 1] : f_n \Rightarrow 0$.

$$f'_n = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \quad f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4. $f_n = \sin \frac{x}{n} \not\Rightarrow 0$ на \mathbb{R} , но $\forall [a, b] : \sin \frac{x}{n} \Rightarrow 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \sup_A |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Доказательство.

(\Rightarrow) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(\Leftarrow):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

□

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow):

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_m(x)| &= |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

(\Leftarrow): Заметим, что есть поточечная сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$, тогда

$$|f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon, n \rightarrow \infty$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности)

Пусть $f_n(x) \rightarrow f(x)$ на A . Если

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^\infty, c_n \geq 0, c_n \rightarrow 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n \xrightarrow{A} f$$

Доказательство. Очев по первому критерию. □

Теорема. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n > N, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$n > N_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \xRightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n \in \mathcal{C}[a, b]$. Тогда

$$\int_a^x f_n(x) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

Доказательство.

$$\left| \int_a^x f_n(x) - \int_a^x f(x) \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a| < \varepsilon \cdot |b - a|$$

□

Теорема. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0) \rightarrow \alpha$. Пусть $f'_n(x) \xRightarrow{[a,b]} g(x)$. Тогда $f_n(x) \xRightarrow{[a,b]} f(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство.

$$\int_{x_0}^x f'_n(x) dx \Rightarrow \int_{x_0}^x g(x) dx \Rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) \Rightarrow \int_{x_0}^x g(x) dx$$

отсюда

$$f_n(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x g(x) dx + \alpha = f(x)$$

□

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$ определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\}, \{S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad (*)$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд $(*)$ сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если $S_n(x) \Rightarrow S(x)$, то говорят, что сходится равномерно.

3. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \quad (1)$$

то говорят, что ряд (*) сходится абсолютно, если ряд (1) расходится, а ряд (*) сходится, то ряд (*) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

тогда и только тогда когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall m, k > N_\varepsilon, \forall x \in A : \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Очевидно из критерия Коши для функциональных последовательностей. \square

Теорема. (Необходимое условие сходимости)

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

$$\text{то } |a_n(x)| \xrightarrow{A} 0$$

Доказательство. Очев. \square

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

Тогда $S(x)$ непрерывная в точке x_0 .

Доказательство. Очев по теореме для последовательностей. \square

Теорема. Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) \Rightarrow \int_a^x S(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)$$

Доказательство. очев. □

Теорема. Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \alpha$$

$x_0 \in [a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} g(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow}, S(x) \in \mathcal{C}^1[a, b], S'(x) = g(x)$$

Доказательство. очев. □

Теорема. (Признак Вейерштрасса)

Пусть $\forall n : |a_n(x)| < \alpha_n, \forall x \in A$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} S(x)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=k}^n a_n(x) \leq \sum_{n=k}^m |a_n(x)| \leq \sum_{n=k}^n \alpha_n < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A .

(\mathcal{A} :) Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} S(x)$$

и $\exists M, \forall x \in A, \forall n : |b_n(x)| < M, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна по номеру $\forall x \in A$.

(\mathcal{D} :) Пусть $\forall x \in A, \forall N :$

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq M$$

$\exists M, \forall x \in A, \forall n : |b_n(x)| < M, \{b_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in A, b_n(x) \xrightarrow{A} 0$.
Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=k}^m A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) \cdot b_m(x) \quad (*)$$

$$(\mathcal{A}): |*| \leq \varepsilon \cdot |b_k(x) - b_m(x)| + |b_m(x)| < \varepsilon \cdot 3M$$

$$(\mathcal{D}): |*| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$$

□