

# Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

15 февраля 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа

Telegram: [@fourkenz](https://t.me/fourkenz)

GitHub: [yakovlevki](https://github.com/yakovlevki)

# Содержание

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Неопределенный интеграл</b>                    | <b>3</b> |
| 1.1      | Первообразная и неопределенный интеграл . . . . . | 3        |
| 1.2      | Свойства неопределённого интеграла . . . . .      | 3        |
| 1.3      | Таблица неопределенных интегралов . . . . .       | 4        |
| 1.4      | Интегрирование рациональных функций . . . . .     | 5        |
| 1.5      | Метод Остроградского . . . . .                    | 7        |
| <b>2</b> | <b>Интеграл Римана</b>                            | <b>7</b> |
| 2.1      | Интегрируемость по Риману . . . . .               | 7        |
| 2.2      | Суммы Дарбу . . . . .                             | 9        |
| 2.3      | Классы интегрируемых функций . . . . .            | 11       |

# 1 Неопределенный интеграл

## 1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $(a, b)$ . Если существует  $F(x)$  определённая на  $(a, b)$  такая, что  $F(x) \in \mathcal{D}(a, b)$  и  $F'(x) = f(x)$ , то  $F(x)$  называется первообразной функцией для  $f(x)$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $(a, b)$ . Совокупность всех первообразных функций для  $f(x)$  называется неопределённым интегралом  $f(x)$  и обозначается

$$\int f(x)dx$$

**Теорема.** Пусть  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$  на  $(a, b)$ . Тогда

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\}, \quad C = const, \quad C \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

$$(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Пусть  $\varphi(x)$  - первообразная  $f(x)$ . Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа  $\varphi(x) - F(x) = const$ , ч.т.д. □

## 1.2 Свойства неопределённого интеграла

1.  $\forall c \in \mathbb{R}$  :

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

(При  $c = 0$  множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. (Замена переменной)

Пусть  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$  на  $(a, b)$ .

Пусть  $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$  и  $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$  Тогда  $F(\varphi(t))$  является первообразной для  $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  на  $(\alpha, \beta)$ .

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть  $u, v \in \mathcal{D}(a, b)$ .

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\int (uv)' dx = \int uv' dx + \int u' v dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**Замечание.** Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

### 1.3 Таблица неопределенных интегралов

|  |   |
|--|---|
| $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ | $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases}$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$   | $\int \cos x dx = \sin x + C$   |
| $\int e^x dx = e^x + C$  | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$   |
| $\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$               | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$                                |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$                         | $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$                                  |

---


$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$


---

**Замечание.** Все равенства верны только на промежутках.

## 1.4 Интегрирование рациональных функций

Хотим научиться находить интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены. Разложим  $Q(x)$  на неприводимые многочлены:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}$$

Теперь разложим дробь в сумму простейших:

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = & \int \left( \tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{\aleph_{1i}}{(x - a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n} \frac{\aleph_{ni}}{(x - a_n)^{\alpha_{ni}}} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\beta_1} \frac{\rho_{1j}x + \omega_{1j}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_{1j}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\rho_{kj}x + \omega_{kj}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_{kj}}} \right) dx \end{aligned}$$

Осталось понять как интегрировать слагаемые вида

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

1.

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = \begin{cases} \ln |x - a|, & n = 1 \\ \frac{(x - a)^{1-n}}{1 - n}, & n > 1 \end{cases}$$

2. Сначала преобразуем знаменатель:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

причем  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ , поскольку у  $x^2 + px + q$  нет вещественных корней.

Сделаем замену

$$t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow x = t - \frac{p}{2}, \quad q_1^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{\alpha t - \frac{\alpha p}{2} + \beta}{(t^2 + q_1^2)^k} d(t - \frac{p}{2}) = \int \frac{\alpha_1 t + \beta_1}{(t^2 + q_1^2)^k} dt$$

где  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta - \frac{\alpha p}{2}$ . Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{t}{(t^2 + q_1^2)^k} dt \quad \text{и} \quad I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + q_1^2)^k}$$

(i)

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{(t^2 + q_1^2)^k} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{(t^2 + q_1^2)^k} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + q_1^2)}{(t^2 + q_1^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(t^2 + q_1^2), & k = 1 \\ \frac{(t^2 + q_1^2)^{1-k}}{2(1-k)}, & k > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} - \int t d\left(\frac{1}{t^2 + q^2}\right)^k = \\ &= \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + 2k \int \left(\frac{t^2 + q^2 - q^2}{(t^2 + q^2)^{k+1}}\right) dt = \\ &= \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + 2k I_k - 2k q^2 I_{k+1} \end{aligned}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k q^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + \frac{2k-1}{2k q^2} I_k$$

**Замечание.**

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = \left| \begin{array}{l} t = q \operatorname{tg} z \\ dt = \frac{q}{\cos^2 z} dz \end{array} \right| = \int \frac{q dz}{\cos^2 z (q^2 \operatorname{tg}^2 z + q^2)^k} = \int \frac{\cos^{2k-2} z}{q^{2k-1}} dz$$

## 1.5 Метод Остроградского

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}} dx = \\ &= \frac{P_1(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j - 1}} + \\ &\quad + \int \frac{P_2(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i) \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)} dx \end{aligned}$$

## 2 Интеграл Римана

### 2.1 Интегрируемость по Риману

**Определение.**  $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$  называется разбиением отрезка, если  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Обозначается  $T_{[a,b]}^+$ . Если  $b = x_0 > \dots > x_n = a$ , то обозначают  $T_{[a,b]}^-$ .

Отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  или  $[x_i, x_{i-1}]$  называются отрезками разбиения, их обычно обозначают  $\Delta_i$ .

Длина отрезка  $\Delta_i$  обозначается  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ .

Длина наибольшего из отрезков называется диаметром разбиения

$$d(T) = \max |x_i - x_{i-1}| = \max \Delta x_i.$$

**Определение.** Пусть  $T_{[a,b]}$  - разбиение отрезка  $[a, b]$ . Разметкой для  $T_{[a,b]}$  называется множество точек  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  такое, что  $\forall i : \xi_i \in \Delta_i$ .

Если  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  является разметкой для  $\{x_i\}_{i=0}^n$ , то пара  $(\{x_i\}_{i=0}^n, \{\xi_i\}_{i=1}^n)$  называется размеченным разбиением и обозначается  $T(\xi)$ .

**Определение.** Сумма

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется интегральной суммой. Иногда ее обозначают  $\sigma_T(\xi)$

**Определение.** Пусть  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . Рассмотрим  $T_{[a,b]}(\xi)$ . Если

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T(\xi) \subset \{T : d(T) < \delta\} : \left| \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

то говорят, что  $f(x)$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$ , а число  $I$  называют интегралом Римана на размеченных разбиениях на отрезке  $[a, b]$ . Интеграл Римана обозначают

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad I = \int_b^a f(x) dx$$

для  $T^+$  и  $T^-$  соответственно.

**Замечание.** Можно считать определение интеграла определением предела интегральных сумм и писать

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = I$$

где  $d$  - диаметр разбиения.

**Утверждение.**

$$\text{Если } \exists \int_a^b f(x) dx, \text{ то } \exists \int_b^a f(x) dx \text{ и } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Определение.** Класс функций, интегрируемых на  $[a, b]$  по Риману, обозначается  $\mathcal{R}[a, b]$ .

**Теорема.** Если  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f(x)$  - ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ , что  $|f(x_n)| > n$  и пусть

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \left( \sum_{i=0}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = I$$

то есть

$$\left| \sum_{i=0}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < 1$$

Возьмем  $\Delta_k$  такой, что  $\tilde{x} \in \Delta_k$ . Тогда

$$I - \sum_{i=1, i \neq k}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 1 < f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < I - \sum_{i=1, i \neq k}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + 1$$

с какого то номера все точки лежат в этом отрезке. □



## 2.2 Суммы Дарбу

Далее рассматриваем разбиения  $T^+$

**Определение.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  - разбиения отрезка  $[a, b]$  такие, что  $T_1 \subset T_2$ . Тогда  $T_2$  называется измельчением  $T_1$ .

**Определение.** Пусть  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ ,  $\{x_i\}_{i=1}^n = T$  - разбиение  $[a, b]$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\bar{\bar{S}}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad \underline{\underline{S}}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Тогда  $\bar{\bar{S}}_f(T)$  называется нижней суммой Дарбу, а  $\underline{\underline{S}}_f(T)$  верхней суммой Дарбу.

**Лемма.** (1) Пусть  $T_1$  - измельчение  $T$ . Тогда  $\bar{\bar{S}}(T) \leq \bar{\bar{S}}(T_1)$  и  $\underline{\underline{S}}(T) \geq \underline{\underline{S}}(T_1)$

*Доказательство.* Дополним  $T$  до измельчения:  $T_1 = T \cup \{x'_j \in [x_j, x_{j+1}]\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}}(T_1) - \bar{\bar{S}}(T) &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - \\ &\quad - m_j(x'_j - x_j) - m_j(x_{j+1} - x'_j) \geq 0 \end{aligned}$$

□

**Лемма.** (2)

$$\forall T_1, T_2 : \bar{\bar{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим объединение любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$ :

$T = T_1 \cup T_2$ . Тогда  $T$  является измельчением и  $T_1$  и  $T_2$ . Тогда по лемме 1 получаем:

$$\bar{\bar{S}}(T_1) \leq \bar{\bar{S}}(T) \quad \text{и} \quad \underline{\underline{S}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \Rightarrow \bar{\bar{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

□

**Лемма.** (3)  $\forall T_{[a,b]} :$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}}(T) &= \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ \underline{\underline{S}}(T) &= \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $\{X_i : X_i \subset \mathbb{R}\}_{i=1}^n$  такое, что  $X_i$  - ограничено  $\forall i$ , а также  $\{a_i\}_{i=1}^n : a_i \geq 0 \forall i$  Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \exists x_i \in X_i : x_i > \sup X_i - \varepsilon$$

Значит

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i x_i &> \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n a_i \\ \sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n a_i x_i &\geq \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i \end{aligned}$$

но

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

отсюда получаем:

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

□

**Теорема.**  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f$  - ограничена и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T_{[a,b]} : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}_f(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) :

$$\exists I = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T(\xi) : d(T) < \delta_\varepsilon$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(T(\xi)) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \overline{\overline{S}}_f(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \underline{\underline{S}}_f(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \quad (1)$$

из леммы 2 по аксиоме полноты:

$$\exists I \in \mathbb{R}, \forall T_1, T_2 : \overline{\overline{S}}(T) \leq I \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad (2)$$

из (1) следует, что  $I$  - единственно, но

$$\forall T(\xi) : \overline{\overline{S}}(T) \leq \sigma_f(T(\xi)) \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad (3)$$

из (2) и (3) получаем:

$$|\sigma_f(T(\xi)) - I| < \varepsilon$$

□

## 2.3 Классы интегрируемых функций

**Теорема.** Если  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.*  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b] \Rightarrow f(x)$  - равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Пусть  $T : d(T) < \delta$

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_{i_{\max}}) - f(x_{i_{\min}}))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b-a)$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  - монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.* Докажем для неубывающей. Если  $f(x) = \text{const}$ , то очевидно.

Пусть  $d(T) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \\ &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

□