

Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

21 марта 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа

Telegram: [@fourkenz](https://t.me/fourkenz)

GitHub: [yakovlevki](https://github.com/yakovlevki)

Содержание

1	Неопределенный интеграл	3
1.1	Первообразная и неопределенный интеграл	3
1.2	Свойства неопределённого интеграла	3
1.3	Таблица неопределенных интегралов	4
1.4	Интегрирование рациональных функций	5
1.5	Метод Остроградского	7
2	Интеграл Римана	7
2.1	Интегрируемость по Риману	7
2.2	Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману	9
2.3	Классы интегрируемых функций	11
2.4	Критерий Лебега интегрируемости по Риману	12
2.5	Свойства интеграла Римана	12
2.6	Первая теорема о среднем	16
2.7	Интеграл с переменным верхним пределом	17
2.8	Формула Ньютона-Лейбница	18
2.9	Замена переменной и интегрирование по частям	19
3	Спрямолинейные кривые и квадратуемые фигуры	20
3.1	Кривая в \mathbb{R}^n	20
3.2	Спрямолинейность гладкой кривой и формула ее длины	21
3.3	Площадь плоской фигуры	22

1 Неопределенный интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a, b) . Если существует $F(x)$ определённая на (a, b) такая, что $F(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ и $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной функцией для $f(x)$.

Определение. Пусть $f(x)$ определена на (a, b) . Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ называется неопределённым интегралом $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

Теорема. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на (a, b) . Тогда

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\}, \quad C = const, \quad C \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Пусть $\varphi(x)$ - первообразная $f(x)$. Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа $\varphi(x) - F(x) = const$, ч.т.д. □

1.2 Свойства неопределённого интеграла

1. $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

(При $c = 0$ множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. (Замена переменной)

Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a, b) .

Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ и $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ Тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на (α, β) .

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть $u, v \in \mathcal{D}(a, b)$.

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\int (uv)' dx = \int uv' dx + \int u' v dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Замечание. Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

1.3 Таблица неопределенных интегралов

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + \begin{cases} C_1, & x > 0 \\ C_2, & x < 0 \end{cases}$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

Замечание. Все равенства верны только на промежутках.

1.4 Интегрирование рациональных функций

Хотим научиться находить интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - многочлены. Разложим $Q(x)$ на неприводимые многочлены:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}$$

Теперь разложим дробь в сумму простейших:

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = & \int \left(\tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{\aleph_{1i}}{(x - a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n} \frac{\aleph_{ni}}{(x - a_n)^{\alpha_{ni}}} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\beta_1} \frac{\rho_{1j}x + \omega_{1j}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_{1j}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\rho_{kj}x + \omega_{kj}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_{kj}}} \right) dx \end{aligned}$$

Осталось понять как интегрировать слагаемые вида

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

1.

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = \begin{cases} \ln |x - a|, & n = 1 \\ \frac{(x - a)^{1-n}}{1 - n}, & n > 1 \end{cases}$$

2. Сначала преобразуем знаменатель:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$, поскольку у $x^2 + px + q$ нет вещественных корней.

Сделаем замену

$$t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow x = t - \frac{p}{2}, \quad q_1^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{\alpha t - \frac{\alpha p}{2} + \beta}{(t^2 + q_1^2)^k} d(t - \frac{p}{2}) = \int \frac{\alpha_1 t + \beta_1}{(t^2 + q_1^2)^k} dt$$

где $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta - \frac{\alpha p}{2}$. Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{t}{(t^2 + q_1^2)^k} dt \quad \text{и} \quad I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + q_1^2)^k}$$

(i)

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{(t^2 + q_1^2)^k} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{(t^2 + q_1^2)^k} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + q_1^2)}{(t^2 + q_1^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(t^2 + q_1^2), & k = 1 \\ \frac{(t^2 + q_1^2)^{1-k}}{2(1-k)}, & k > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} - \int t d\left(\frac{1}{t^2 + q^2}\right)^k = \\ &= \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + 2k \int \left(\frac{t^2 + q^2 - q^2}{(t^2 + q^2)^{k+1}}\right) dt = \\ &= \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + 2k I_k - 2k q^2 I_{k+1} \\ I_{k+1} &= \frac{1}{2k q^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} + \frac{2k-1}{2k q^2} I_k \end{aligned}$$

Замечание.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 z + 1 &= \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} \\ \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} &= \left| \begin{array}{l} t = q \operatorname{tg} z \\ dt = \frac{q}{\cos^2 z} dz \end{array} \right| = \int \frac{q dz}{\cos^2 z (q^2 \operatorname{tg}^2 z + q^2)^k} = \int \frac{\cos^{2k-2} z}{q^{2k-1}} dz \end{aligned}$$

1.5 Метод Остроградского

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}} dx = \\ &= \frac{P_1(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j - 1}} + \\ &\quad + \int \frac{P_2(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i) \cdot \prod_{j=1}^k (x^2 + b_j x + c_j)} dx \end{aligned}$$

2 Интеграл Римана

2.1 Интегрируемость по Риману

Определение. $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$ называется разбиением отрезка, если $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Обозначается $T_{[a,b]}^+$. Если $b = x_0 > \dots > x_n = a$, то обозначают $T_{[a,b]}^-$.

Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ или $[x_i, x_{i-1}]$ называются отрезками разбиения, их обычно обозначают Δ_i .

Длина отрезка Δ_i обозначается $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$.

Длина наибольшего из отрезков называется диаметром разбиения

$$d(T) = \max |x_i - x_{i-1}| = \max \Delta x_i.$$

Определение. Пусть $T_{[a,b]}$ - разбиение отрезка $[a, b]$. Разметкой для $T_{[a,b]}$ называется множество точек $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ такое, что $\forall i : \xi_i \in \Delta_i$.

Если $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ является разметкой для $\{x_i\}_{i=0}^n$, то пара $(\{x_i\}_{i=0}^n, \{\xi_i\}_{i=1}^n)$ называется размеченным разбиением и обозначается $T(\xi)$.

Определение. Сумма

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется интегральной суммой. Иногда ее обозначают $\sigma_T(\xi)$ или $\sigma(T_{[a,b]}(\xi))$

Определение. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $T_{[a,b]}(\xi)$. Если

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T(\xi) \subset \{T : d(T) < \delta\} : \left| \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

то говорят, что $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, а число I называют интегралом Римана на размеченных разбиениях на отрезке $[a, b]$. Интеграл Римана обозначают

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad I = \int_b^a f(x) dx$$

для T^+ и T^- соответственно.

Замечание. Можно считать определение интеграла определением предела интегральных сумм и писать

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = I$$

где d - диаметр разбиения.

Утверждение.

$$\text{Если } \exists \int_a^b f(x) dx, \text{ то } \exists \int_b^a f(x) dx \text{ и } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Определение. Класс функций, интегрируемых на $[a, b]$ по Риману, обозначается $\mathcal{R}[a, b]$.

Теорема. Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$, что $|f(x_n)| > n$ и пусть

$$\exists \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{i=0}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = I$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\left| \sum_{i=0}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < 1$$

Возмем Δ_k такой, что $\tilde{x} \in \Delta_k \Rightarrow f(x)$ - неограничена на Δ_k . Тогда, зафиксировав точки в остальных отрезках разбиения, получим

$$I - \sum_{i=1, i \neq k}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 1 < f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < I - \sum_{i=1, i \neq k}^N f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + 1$$

противоречие с тем, что $f(x)$ принимает сколь угодно большие на Δ_k . □

2.2 Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Далее рассматриваем разбиения T^+

Определение. Пусть T_1 и T_2 - разбиения отрезка $[a, b]$ такие, что $T_1 \subset T_2$. Тогда T_2 называется измельчением T_1 .

Определение. Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, $\{x_i\}_{i=0}^n = T$ - разбиение $[a, b]$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\bar{S}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad \underline{S}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Тогда $\bar{S}_f(T)$ называется нижней суммой Дарбу, а $\underline{S}_f(T)$ верхней суммой Дарбу.

Лемма 1. Пусть T_1 - измельчение T . Тогда

$$\bar{S}(T) \leq \bar{S}(T_1) \quad \text{и} \quad \underline{S}(T) \geq \underline{S}(T_1)$$

Доказательство. Докажем для нижней суммы. Рассмотрим случай, когда $T_1 = T \cup \{x'_j\}$, $x'_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Тогда сократятся все отрезки кроме $[x_j, x_{j+1}]$:

$$\begin{aligned} \bar{S}(T_1) - \bar{S}(T) &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x_{j+1} - x_j) = \\ &= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x'_j - x_j) - m_j(x_{j+1} - x'_j) \geq 0 \end{aligned}$$

значит, по индукции, это верно для любого измельчения. □

Лемма 2.

$$\forall T_1, T_2 : \bar{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2)$$

Доказательство. Рассмотрим объединение любых двух разбиений T_1 и T_2 : $T = T_1 \cup T_2$. Тогда T является измельчением и T_1 и T_2 . Тогда по лемме 1 получаем:

$$\bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T) \quad \text{и} \quad \underline{S}(T) \leq \underline{S}(T_2) \Rightarrow \bar{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_2)$$

□

Лемма 3. $\forall T_{[a,b]} :$

$$\begin{aligned} \bar{S}(T) &= \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ \underline{S}(T) &= \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем для верхней суммы, для нижней аналогично.

Докажем более общее утверждение - рассмотрим некоторое семейство множеств $\{X_i : X_i \subset \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ и множество $\{a_i\}_{i=1}^n$ такие, что $\forall i$ X_i ограничено и $a_i \geq 0$.

Каждое X_i из принципа полноты Вейерштрасса имеет супремум, и при этом

$$\forall \varepsilon > 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \exists x_i \in X_i : x_i > \sup X_i - \varepsilon$$

Домножив каждое из неравенств на число (i -е нер-во на a_i) и сложив, получим

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i > \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

Отсюда в силу свойства супремума

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

но при этом

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

Значит,

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i \sup X_i$$

При $X_i = f([x_{i-1}, x_i])$ (ограничены в силу интегрируемости f) и $a_i = x_i - x_{i-1}$ получим

$$\sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sup_{\{\xi_i\}} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{S}}(T)$$

□

Теорема. (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)

$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f$ - ограничена и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T_{[a,b]} : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}_f(T) - \overline{\overline{S}}_f(T) < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow) :

$$\exists I = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T(\xi) : d(T) < \delta_\varepsilon :$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(T(\xi)) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \overline{\overline{S}}_f(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \underline{\underline{S}}_f(T) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon.$$

(\Leftarrow) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall T : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \quad (1)$$

из леммы 2 по аксиоме полноты:

$$\exists I \in \mathbb{R}, \forall T : \overline{\overline{S}}(T) \leq I \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad (2)$$

из (1) следует, что I - единственно, а также известно, что

$$\forall T(\xi) : \overline{\overline{S}}(T) \leq \sigma_f(T(\xi)) \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad (3)$$

значит из (2) и (3) получаем:

$$|\sigma_f(T(\xi)) - I| < \varepsilon$$

□

2.3 Классы интегрируемых функций

Теорема. Если $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. $f(x) \in \mathcal{C}[a, b] \Rightarrow f(x)$ - равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Пусть $T : d(T) < \delta$. Тогда:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_{i_{\max}}) - f(x_{i_{\min}}))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

($x_{i_{\min}}$ и $x_{i_{\max}}$ существуют по второй теореме Вейерштрасса)

□

Теорема. Пусть $f(x)$ - монотонна на $[a, b]$. Тогда $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. Докажем для неубывающей. Если $f(x) = \text{const}$, то очевидно.

Пусть $d(T) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) < \\ &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

Поскольку $f(x)$ неубывает на $[a, b]$, то минимум на этом отрезке достигается в $f(a)$, а максимум в $f(b)$. Значит, при выносе $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ за скобку, сумма слагаемых вида $f(x_i) - f(x_{i-1})$ схлопнется в $f(b) - f(a)$. □

2.4 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, и если $\forall \varepsilon > 0 \exists \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ (или конечное) таких, что

$$A \subset \bigcup_i (a_i, b_i), \sup_n \sum_{i=1}^N |b_i - a_i| < \varepsilon$$

Тогда A называется множеством меры 0 по Лебегу. Обозначается $\mu(A) = 0$.

Теорема. (Свойства множеств с мерой 0 по Лебегу)

1. $B \subset A, \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$
2. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$

Доказательство.

1. Очевидно
2. $\forall i \exists \{(a_{i_l}, b_{i_l})\}_{l=1}^{\infty} :$

$$A_i \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}), \sum_{l=1}^{\infty} |b_{i_l} - a_{i_l}| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}) \right), \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |b_{i_l} - a_{i_l}| \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

□

Теорема. (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)

$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f(x)$ ограничена и для множества P точек разрыва функции $f(x)$ выполнено $\mu(P) = 0$.

Доказательство. Без доказательства.

□

2.5 Свойства интеграла Римана

Теорема 1. (Интегрируемость на подотрезках)

Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $[c, d] \subset [a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[c, d]$.

Доказательство. Так как $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $\forall T_{[a,b]}(\xi) : \sigma_f(T_{[a,b]}(\xi)) \rightarrow I$. Значит если $\{c, d\} \in T_{[a,b]}$, то $\sigma_f(T_{[a,b] \cup \{c,d\}}(\xi)) :$

$$\varepsilon > \underline{S}_{[a,b] \cup \{c,d\}} - \overline{S}_{[a,b] \cup \{c,d\}} = \sum_{k=1}^i (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^j (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^N (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=i+1}^j (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \underline{S}_{[c,d]} - \overline{S}_{[c,d]}$$

□

Теорема 2. (Аддитивность)

Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $c \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство. Пусть $c \in T_{[a,b]}(\xi)$. Тогда

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) = \sigma_f(T_{[a,c]}) + \sigma_f(T_{[c,b]})$$

$$\sigma_f(T_{[a,c]}) \rightarrow \int_a^c f(x) dx, \quad \sigma_f(T_{[c,b]}) \rightarrow \int_c^b f(x) dx$$

а также

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Теперь пусть $c \notin T_{[a,b]}$. Рассмотрим $T'_{[a,b] \cup c} = T_{[a,b]} \cup \{c\}$

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) - \sigma_f(T'_{[a,b] \cup c}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - f(\xi'_j)(c - x_{j-1}) - f(\xi''_j)(x_j - c) \rightarrow 0$$

□

Замечание. Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, c]$, $b < c$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Теорема 3. (Линейность)

Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство.

$$\sigma_{\alpha f(x) + \beta g(x)}(T) = \alpha \sigma_f(T) + \beta \sigma_g(T)$$

□

Теорема 4. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $f(x) \geq 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Доказательство.

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \sigma_f(T) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

□

Следствие. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Теорема 5. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $f(x) \geq 0$, $\exists c \in [a, b]$, что $f(x)$ непрерывна в точке c и $f(c) > 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

Доказательство. По теореме об отделимости

$\exists \delta > 0 : f(x) > \frac{f(c)}{2}$ в $(c - \delta, c + \delta)$:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta = \delta f(c) > 0$$

□

Теорема 6. $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. Пусть

$$M_1 = \sup_{[a,b]} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{[a,b]} |g(x)|$$

Ограничим значение $\underline{S}_{f \cdot g} - \overline{\overline{S}}_{f \cdot g}$, ограничив разность точных граней на одном отрезке разбиения: (далее супремум рассматривается по всем $x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]$)

$$\begin{aligned} M_i(f(x)g(x)) - m_i(f(x)g(x)) &= \sup(f(x')g(x') - f(x'')g(x'')) = \\ &= \sup(f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')) = \\ &= \sup(f(x')(g(x') - g(x'')) + g(x'')(f(x') - f(x''))) \leq \\ &\leq \sup |f(x)| \cdot \sup(g(x') - g(x'')) + \sup |g(x)| \cdot \sup(f(x') - f(x'')) \leq \\ &\leq M_1(M_{ig} - m_{ig}) + M_2(M_{if} - m_{if}) \end{aligned}$$

Отсюда, домножив неравенства на длины соответствующих отрезков и сложив, получим

$$\underline{S}_{f \cdot g} - \overline{S}_{f \cdot g} \leq M_1(\underline{S}_g - \overline{S}_g) + M_2(\underline{S}_f - \overline{S}_f)$$

Отсюда из интегрируемости f и g и критерия Дарбу $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. \square

Теорема 7. $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geq \delta > 0$. Тогда $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. $\forall x', x'' \in [a, b]$:

$$\left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right| = \left| \frac{f(x'') - f(x')}{f(x')f(x'')} \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot |f(x'') - f(x')|$$

Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему (на всякий случай приведём аналогичную выкладку, необходимую для доказательства)

$$\begin{aligned} M_i\left(\frac{1}{f(x)}\right) - m_i\left(\frac{1}{f(x)}\right) &= \sup\left(\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sup |f(x'') - f(x')| = \frac{1}{\delta^2} (M_{if} - m_{if}) \end{aligned}$$

\square

Следствие. Из пунктов 6 и 7 следует интегрируемость дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Теорема 8. $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$

Доказательство. $\forall x', x'' \in [a, b]$:

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$$

Далее совпадает с предыдущим доказательством. \square

Замечание. Обратное утверждение неверно:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \subset [0, 1] \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow |f(x)| \equiv 1$ на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 9. $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Доказательство.

$$|\sigma_f| \leq \sigma_{|f|}$$

□

Замечание.

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \sup_{[a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b 1 \, dx$$

2.6 Первая теорема о среднем

Теорема. (Первая теорема о среднем)

Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(x) \geq 0$, $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$. Тогда $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

Доказательство.

$$m \cdot \sigma_g(T) \leq \sigma_{f \cdot g}(T) \leq M \cdot \sigma_g(T)$$

Тогда

$$m \cdot \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

Рассмотрим случаи:

1.

$$\int_a^b g(x) \, dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = 0$$

В этом случае равенство верно для любого μ .

2.

$$\int_a^b g(x) \, dx \neq 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} \leq M$$

Значит, подойдет μ , равное значению этой дроби

□

2.7 Интеграл с переменным верхним пределом

Определение. Интегралом с переменным верхним пределом называется интеграл вида:

$$\int_a^x f(t) dt$$

Теорема. Пусть $f(t) \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. $\forall x_0 \in [a, b]$ и $\Delta x \rightarrow 0$:

$$|\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \right| \leq M_{f([a, b])} \cdot |\Delta x| \rightarrow 0$$

□

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и f непрерывна в $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

имеет производную в x_0 и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x) dx - \frac{f(x_0)}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} 1 dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \leq \sup_{[a, b]} |f(x) - f(x_0)| \cdot 1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Следствие. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$. Тогда $\forall c \in (a, b)$:

$$\exists \left(\int_c^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ то есть } \int_c^x f(t) dt - \text{ первообразная } f(x)$$

Доказательство. Очевидно. □

Замечание. Интервал в формулировке следствия взят для применимости теоремы к неограниченным на интервале функциям (например $\operatorname{tg}(x)$ на $[0, \pi]$), для которых тем не менее применима предыдущая теорема по аналогичным рассуждениям.

2.8 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $f(x) \in \mathcal{C}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n)$.

$$\exists F(x) : F(x) \in \mathcal{D}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n), F'(x) = f(x), F(x) \in \mathcal{C}[a, b]$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$, $F'(x) = f(x)$ на (a, b) . Но интеграл

$$\int_a^x f(t) dt$$

тоже первообразная $f(x)$ на $(a, b) \Rightarrow \exists C :$

$$F(x) + C = \int_a^x f(t) dt$$

$\Rightarrow F(a) + C = 0$. Тогда

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Общий случай:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

□

2.9 Замена переменной и интегрирование по частям

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(a, b)$, $\varphi(t) \in \mathcal{C}^1(\alpha, \beta)$, $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$.

$\forall \alpha_0, \beta_0 \in (\alpha, \beta)$ и $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$. Тогда

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Доказательство. $f \in \mathcal{C}(a, b) \Rightarrow \exists F'(x) = f(x)$

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx = F(b_0) - F(a_0)$$

Но $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, а значит

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta_0)) - F(\varphi(\alpha_0))$$

□

Теорема. (Интегрирование по частям)

Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Доказательство.

$$f(x) \cdot g(x)|_a^b = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

□

3 Спрямяемые кривые и квадратуемые фигуры

3.1 Кривая в \mathbb{R}^n

Определение. Кривой в \mathbb{R}^n называется непрерывное отображение:

$$\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Замечание.

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

Определение. Рассмотрим $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Если $\exists t_1 \neq t_2 : \bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, то $\bar{\gamma}(t_1)$ называется точкой самопересечения. Мощность подмножества $[a, b]$, точки которого переходят в $\bar{\gamma}(t_1)$ называются кратностью точки самопересечения. Если кривая не имеет точек пересечения, то она называется простой.

Определение. Если $\bar{\gamma}(t)$ имеет единственную точку самопересечения $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$, то кривая называется простой замкнутой.

Определение. Множество точек $\{\bar{\gamma}(t_i)\}_{i=0}^n$ называется разбиением кривой, если $\{t_i\}_{i=0}^n$ является разбиением отрезка $[a, b]$. Обозначается $T_{\bar{\gamma}}$.

Определение. $L(T_{\bar{\gamma}})$ - множество отрезков $\{[\bar{\gamma}(t_{i-1}), \bar{\gamma}(t_i)]\}_{i=1}^n$ называется вписанной в $\bar{\gamma}(t)$ ломаной, а число $|L(T_{\bar{\gamma}})|$ - длиной ломаной.

Утверждение. Если $T'_{\bar{\gamma}}$ - измельчение $T_{\bar{\gamma}}$, то

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| \leq |L(T'_{\bar{\gamma}})|$$

Доказательство. Очевидно. □

Определение. Если множество $\{|L(T_{\bar{\gamma}})|\}_{T_{\bar{\gamma}}}$ ограничено, то кривая $\bar{\gamma}(t)$ называется спрямяемой, а

$$\sup_{T_{\bar{\gamma}}} \{|L(T_{\bar{\gamma}})|\} = |\bar{\gamma}|$$

называется длиной кривой.

3.2 Спрямоаемость гладкой кривой и формула ее длины

Теорема. Пусть

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in C^1[a, b]$$

Тогда $\bar{\gamma}(t)$ спрямоема и

$$|\bar{\gamma}| = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t)} dt$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |L(T_{\bar{\gamma}})| &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2} = (1) \\ &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij}) \cdot (t_i - t_{i-1})^2} = \\ &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} (t_i - t_{i-1}) \leq M \cdot \sqrt{n} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Переход (1) по формуле Лагранжа.

$\Rightarrow \bar{\gamma}$ спрямоема.

$$\begin{aligned} \left| |L(T_{\bar{\gamma}})| - \sigma \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2} \right| &= \\ \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\nu_i)} (t_i - t_{i-1}) \right| &= \\ \left| \sum_{i=1}^N \left(\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} - \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\nu_i)} \right) (t_i - t_{i-1}) \right) \right| &\leq \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |x_j'(\xi_{ij}) - x_j'(\nu_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}) &< \varepsilon \cdot n \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Последняя оценка сделана с применением леммы, которая доказана чуть ниже

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, d(T) < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| |L(T_{\bar{\gamma}})| - \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t)} dt \right| < 2\varepsilon n(b-a)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists L(T_{\bar{\gamma}}^*)$, что $|L(T_{\bar{\gamma}}^*)| > |\bar{\gamma}| - \varepsilon$ (свойство точной верхней грани).

Измельчаем $T_{\bar{\gamma}}^*$ до тех пор, пока $d(T_{\bar{\gamma}}^{**}) < \delta_\varepsilon$. □

Лемма.

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^k ((a_i - b_i)(a_i + b_i))}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}} \right| = \\ &= \left| \left(\frac{(a_i + b_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}} \right) \cdot \sum_{i=1}^k (a_i - b_i) \right| \leq (*) \\ &\leq 1 \cdot \left| \sum_{i=1}^k (a_i - b_i) \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i| \end{aligned}$$

$$(*) : \quad a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2}, \quad b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \Rightarrow \frac{(a_i + b_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}} \leq 1$$

□

3.3 Площадь плоской фигуры

Определение. Множество $\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$ называется ε -окрестностью точки (x_0, y_0) .

Определение. Множество $A \in \mathbb{R}^2$ называется ограниченным, если $\exists R > 0 : A \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Определение. Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется фигурой.

Определение. Пусть $A = \{A_\alpha\}_\alpha$. Функция $\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется площадью, если

1. $\mu(A) \geq 0$
2. Если $\exists \mu(A_1), \mu(A_2)$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то $\exists \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.
3. Если $\exists \mu(A_1)$ и A_2 конгруэнтна A_1 , то $\exists \mu(A_2) = \mu(A_1)$.
4. Если $\exists \mu(A_1), \mu(A_2)$ и $A_1 \subset A_2$, то $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.
5. Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab .

Замечание. Существует площадь отрезка и площадь точки и они равны нулю. По определению считаем, что $\mu(\emptyset) = 0$

Утверждение. Существует площадь треугольника равная $\frac{1}{2}ah$.

Доказательство. очев. □

Определение. Фигура, полученная конечным объединением непересекающихся треугольников называется многоугольником.

Теорема. Площадь многоугольной фигуры не зависит от разбиения на треугольники.

Доказательство. Без доказательства. □

Определение. Для любой фигуры A , замкнутая многоугольная фигура $P \supset A$ называется описанной. Открытая многоугольная фигура $Q \subset A$ называется вписанной.

Замечание. Для любой фигуры существует описанная и вписанная (пустое множество).

Определение. Число $\mu^*(A) = \inf_{A \subset P} \mu(P)$ называется верхней площадью A .

Число $\mu_*(A) = \sup_{Q \subset A} \mu(Q)$ называется нижней площадью A .

Определение. Если $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, то $\exists \mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$. Такое множество A называется квадратуемым.

Теорема. (Первый критерий квадратуемости)

Фигура A квадратуема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon, \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство. (\Rightarrow) A - квадратуема $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$, но

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q_\varepsilon : \mu_*(A) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon.$$

$$(\Leftarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon, \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$$

□

Теорема. (2-й критерий квадратуемости)

Фигура A квадратуема $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$.

Доказательство.

(\Rightarrow) A - квадратуема $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon, \partial A \subset P \setminus Q$,
 Q - внутренние точки A , $\mathbb{R}^2 \setminus P$ - внешние точки A . В частности,
 $\partial A \subset P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon \Rightarrow \mu^*(\partial A) < \varepsilon \Rightarrow \mu(A) = 0$.

(\Leftarrow)

Лемма. Если B покрывается P с $\mu(P) < \varepsilon$, то существует $h > 0$ такое, что $B \subset \cup$ (квадратная сетка с шагом h), $\mu(\cup(\text{кв.})) < 72\varepsilon$.

Доказательство. $P = \cup \Delta \Rightarrow P = \cup$ (прямоугольные треугольники) с $\mu < \varepsilon \Rightarrow P \subset \cup$ (прямоугольники) с $\mu < 2\varepsilon \Rightarrow P \subset \cup$ (квадраты) с $\mu < 4\varepsilon \Rightarrow P \subset$ (квадраты со сторонами, параллельными осям), $\mu < 8\varepsilon \Rightarrow$ возьмем h , равное стороне наименьшего квадрата, и построим сетку с шагом $h \Rightarrow \mu(\cup(\text{кв.})) < 72\varepsilon$. □

$\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \supset \partial A, \mu(P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \exists h > 0, \partial A \subset \cup(\text{кв.}) = A_2$ с $\mu() < 72\varepsilon$.

$A_1 = \cup$ (квадраты сетки, целиком состоящие из внутренних точек A)
 $\Rightarrow A \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow A_1 \cup A_2 = P, A_1 = Q, \mu(P) - \mu(Q) = \mu(A_2) < 72\varepsilon$

□

Теорема. Если $\bar{\gamma}(t)$ - простая спрямляемая фигура, то $\mu(\bar{\gamma}(t)) = 0$.

Доказательство. Делим $\bar{\gamma}(t)$ на n одинаковых по длине кусков. $\{\bar{\gamma}(t_k)\}_{k=1}^{n+1}$.
 $\bar{\gamma}(t) \subset \cup$ (квадратов с центрами в $\bar{\gamma}(t_k)$ и стороной $|\frac{2\bar{\gamma}(t)}{n}|$).

$$\mu(\cup(\text{кв.}...)) < \frac{4|\bar{\gamma}(t)|^2}{n^2} \cdot (n+1) \rightarrow 0$$

□

Теорема. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $f(x) \geq 0$, тогда $A = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ квадратуема и

$$\mu(A) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Доказательство. $f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T : d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$ □