Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

6 сентября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left|\sum_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Очевидно по критерию коши для последовательности

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = S_m - S_{k-1}$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев. □

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)
Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса для последовательности S_n. □

Теорема. (Признак сравнения)
Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0)$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

расходится.

Доказательство. Очевидно из неравенства

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

□

Теорема. (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

□

Пример. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Пример. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
сходится.

Пример. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$
сходится.

Теорема. (Признак Коши)
Пусть дан ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$
такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд (1) сходится.

2. Если $\exists \, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд (1) расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд (1) сходится по признаку сравнения.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд (1) расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$- сходится
2. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$ - расходится

Доказательство. Очев. □

Пример. Пример, что при $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1. $$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$

   расходится

2. $$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$

   сходится

Теорема. (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N} : f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ на $[k, k+1]$. Проинтегрируем неравентсво на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\, dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\, dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

□

Пример. (Степенно-логарифмический ряд)

1.
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.
$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln^\beta x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^\beta n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.
$$\int\limits_{10}^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\gamma x} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln^\gamma x} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

Теорема. (Схема Куммера)

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty},\ c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такая, что
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$
то ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
сходится.

2. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится.

Доказательство. 1.

$$c_N \cdot a_N - c_N \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}$$

$$\vdots$$

$$c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}$$

теперь сложим все неравенства

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

значит ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{N+m}$$

сходится

2.

$$c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \leq 0$$
$$\frac{c_N}{c_{N+1}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N}$$
$$\frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}$$
$$\frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

по признаку сравнения

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

□

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$
   значит если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$
   то ряд (1) сходится. Если
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$
   значит если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$
   то ряд (1) расходится.
   Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$
   то ряд (1) сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$
   то ряд (2) расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (1) сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

Значит если

$$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$$

то ряд (1) расходится. Запишем в предельной форме:
Если

$$\exists \lim_{n \to \infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q > 1$$

то ряд (1) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \to \infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q < 1$$

то ряд (1) расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
   Выводится из признака Бертрана.