

Математический анализ-4

Лектор: доц. Косухин Олег Николаевич

23 февраля 2026 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Контакты: [Telegram](#), [GitHub](#)

Содержание

1 Лекция 1	3
1.1 Повторение построения интеграла Римана	3
1.2 Кратный интеграл Римана	3
1.3 Суммы Дарбу	5
1.4 Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе	7
2 Лекция 2	9
2.1 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе	9
3 Лекция 3	12
3.1 Мера Жордана в \mathbb{R}^k	12

1 Лекция 1

1.1 Повторение построения интеграла Римана

Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$. Выбиралось разбиение $T = \{\Delta_j\}_{j=1}^n$ отрезка $[a, b]$ и разметка $H = \{\xi_j\}_{j=1}^n$. Диаметром $d(T)$ разбиения T называлась наибольшая из длин отрезков разбиения. Интегральной суммой на заданом размеченном разбиении называли следующее выражение:

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |\Delta_j|$$

где $|\Delta_j|$ — длина отрезка Δ_j . Тогда интервалом Римана назывался предел

$$I = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, H)$$

Также интеграл Римана можно ввести через суммы Дарбу. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{S}(f, T) = \sum_{j=1}^n M_j \cdot |\Delta_j|, \quad \bar{s}(f, T) = \sum_{j=1}^n m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x \in \Delta_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(x)$$

Далее вводился верхний и нижний интегралы Дарбу

$$I_* = \sup_T \bar{s}(f, T), \quad I^* = \inf_T \underline{S}(f, T)$$

Если верхний и нижний интегралы совпадают

$$I = I_* = I^*$$

то I в точности интеграл Римана.

Нашей целью является перенос этой конструкции в \mathbb{R}^k при $k \geq 2$.

1.2 Кратный интеграл Римана

Определение. Замкнутым бруском в \mathbb{R}^k называется декартово произведение

$$\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

Определение. Пусть дан брус $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$, а T_1, \dots, T_k являются разбиениями $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ соответственно. Тогда

$$T = T_1 \times \cdots \times T_k$$

называется разбиением бруса Π . Брус из разбиения $T = T_1 \times \cdots \times T_k$ будем обозначать Δ_{j_1, \dots, j_k} , а его объем $|\Delta_{j_1, \dots, j_k}|$. Разметкой разбиения также назовем множество $H = \{\xi_{j_1, \dots, j_k}\}_{j_1, \dots, j_k=1}^n$, где $\xi_{j_1, \dots, j_k} \in \Delta_{j_1, \dots, j_k}$.

Определение. Интегральной суммой называется выражение

$$\sigma(f, T, H) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{j_k=1}^{n_k} = f(\xi_{j_1, \dots, j_k}) \cdot |\Delta_{j_1, \dots, j_k}|$$

Для краткости будем писать

$$\sigma(f, T, H) = \sum_j f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

Для корректности определения осталось ввести понятие объема.

Определение. Пусть $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \subset \mathbb{R}^k$. Объемом назовем функцию, которая обладает следующими свойствами:

1. $V(\Phi) \geq 0$
2. $\Phi_1 = \Phi_2$
3. $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$, если $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$
4. Объем единичного куба равен 1.

таким образом, объемом бруса Π называется

$$V(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)$$

Определение. Диаметром бруса Π назовем

$$\text{diam}(\Pi) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_k - a_k)^2}$$

Тогда диаметром разбиения $d(T)$ называется наибольший из диаметров Δ_j .

Определение. I называется кратным интегралом функции f по брусу Π , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T : d(T) < \delta \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

1.3 Суммы Дарбу

Определение. Назовем верней и нижней суммой Дарбу соответственно выражения:

$$\underline{\underline{S}}(f, T) = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j|, \quad \bar{\bar{s}}(f, T) = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j|$$

где

$$M_j = \sup_{x \in \Delta_j} f(x), \quad m_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(x)$$

Определение. Разбиение $T' = T'_1 \times \cdots \times T'_k$ называется измельчением разбиения $T = T_1 \times \cdots \times T_k$, если $\forall i = 1, \dots, k : T'_i$ является имельчением T_i .

Рассмотрим аналогичные одномерному случаю свойства сумм Дарбу:

Утверждение. Для любого разбиения T и любой его разметки H :

$$\bar{\bar{s}}(f, T) \leq \sigma(f, T, H) \leq \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Утверждение. Если T' — измельчение T , то

$$\bar{\bar{s}}(f, T) \leq \bar{\bar{s}}(f, T'), \quad \underline{\underline{S}}(f, T') \leq \underline{\underline{S}}(f, T)$$

Доказательство. Сравним $\bar{\bar{s}}(f, T)$ и $\bar{\bar{s}}(f, T')$, где T' получена добавлением разреза. После добавления, брус Δ_j разился на два новых бруса Δ'_j и Δ''_j , обозначим: m'_j, m''_j - инфинумы f на Δ'_j и Δ''_j соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\bar{s}}(f, T') - \bar{\bar{s}}(f, T) &\stackrel{(1)}{=} \sum_j (m'_j \cdot |\Delta'_j| + m''_j \cdot |\Delta''_j| - m_j(|\Delta'_j| + |\Delta''_j|)) = \\ &= \sum_j ((m'_j - m_j) \cdot |\Delta'_j| + (m''_j - m_j) \cdot |\Delta''_j|) \stackrel{(2)}{\geq} 0 \end{aligned}$$

(1): Суммируем только по тем брусям, которым прошел разрез

(2): $m'_j \geq m_j, m''_j \geq m_j$

Аналогично показывается, что $\underline{\underline{S}}(f, T) - \underline{\underline{S}}(f, T') \geq 0$. \square

Утверждение. Пусть к разбиению T добавили p разрезов (к разбиениям T_1, \dots, T_k). Тогда

$$0 \leq \bar{\bar{s}}(f, T') - \bar{\bar{s}}(f, T) \leq (M - m) \cdot d^{k-1} \cdot \delta \cdot p$$

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \underline{\underline{S}}(f, T') \leq (M - m) \cdot d^{k-1} \cdot \delta \cdot p$$

где $M = \sup_{x \in R} f(x), m = \inf_{x \in R} f(x), d$ — диаметр Π , $\delta = d(T)$ - диаметр T .

Доказательство.

$$\begin{aligned}\bar{\bar{s}}(f, T') - \bar{\bar{s}}(f, T) &\stackrel{(1)}{=} \sum_j ((m'_j - m_j) \cdot |\Delta_j| + (m''_j) \cdot |\Delta''_j|) \stackrel{(2)}{\leq} \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \sum_j ((M - m) \cdot |\Delta'_j| + (M - m) \cdot |\Delta''_j|) = (M - m) \sum_j (|\Delta'_j| + |\Delta''_j|) = \\ &= (M - m) \cdot |\Pi_1| \leq (M - m) \cdot d^{k-1} \cdot \delta\end{aligned}$$

где $|\Pi_1|$ — суммарный объём тех брусов, которые были разрезаны. Проделав эту операцию p раз, получим искомое утверждение.

(1): Суммируем только по тем брусам, которым прошел разрез

(2): $m'_j, m''_j \leq M, m_j \geq m$. Аналогично для верхней суммы Дарбу. \square

Утверждение.

$$\bar{\bar{s}}(f, T) = \inf_H \sigma(f, T, H), \quad \underline{\underline{s}}(f, T) = \sup_H \sigma(f, T, H)$$

Доказательство.

$$\sigma(f, T, H) = \sum_j f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|, \quad \bar{\bar{s}}(f, T) = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j|$$

Поскольку m_j — инфинум, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi_j \in \Delta_j : 0 \leq f(\xi_j) - m_j < \frac{\varepsilon}{|R|}$$

отсюда

$$0 \leq \sigma(f, T, H) - \bar{\bar{s}}(f, T) = \sum_j (f(\xi_j) - m_j) \cdot |\Delta_j| < \sum_j \frac{\varepsilon}{|R|} \cdot |\Delta_j|$$

а это в точности означает, что

$$\bar{\bar{s}}(f, T) = \inf_H \sigma(f, T, H)$$

Аналогично для верхней суммы Дарбу. \square

Утверждение. Пусть T' и T'' — любые разбиения бруса Π . Тогда

$$\bar{\bar{s}}(f, T') \leq \underline{\underline{s}}(f, T'')$$

Доказательство. Пусть T объединяет в себе все разрезы T_1 и T_2 . Тогда T — измельчение и для T' и для T'' . Тогда по доказанному выше свойству и определению сумм Дарбу, получим

$$\bar{\bar{s}}(f, T') \leq \underline{\underline{s}}(f, T) \leq \underline{\underline{s}}(f, T) \leq \underline{\underline{s}}(f, T'')$$

\square

Определение. Нижним интегралом Дарбу называется

$$I_* = \sup_T \bar{s}(f, T),$$

верхним интегралом Дарбу называется

$$I^* = \inf_T \underline{s}(f, T)$$

Из определений ясно, что $I_* \leq I^*$.

1.4 Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе

Теорема (Необходимое условие интегрируемости по Риману на брусе).

Если существует интеграл I от f на Π , то f ограничена на Π , то есть

$$f \in \mathcal{R}(\Pi) \Rightarrow f \in \mathcal{B}(\Pi)$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall T : d(T) < \delta \forall H : |\sigma(f, T, H) - I| < \varepsilon$$

зафиксируем $j = j_0$

$$I - \varepsilon < f(\xi_{j_0}) \cdot |\Delta_{j_0}| + \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j| < I + \varepsilon$$

для $j \neq j_0$ выберем произвольным образом ξ_j и обозначим

$$c = \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$$

тогда $\forall \xi_{j_0} \in \Delta_{j_0}$:

$$\frac{I - \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0}|} < f(\xi_{j_0}) < \frac{I + \varepsilon - c}{|\Delta_{j_0}|}$$

значит f ограничена на каждом $\Delta_{j_0} \Rightarrow f$ - ограничена на Π . \square

Пример (Необходимое условие не является достаточным).

Рассмотрим

$$f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} 1, & x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\bar{s} = \sum_j m_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 0 \cdot |\Delta_j| = 0$$

$$\underline{\underline{S}} = \sum_j M_j \cdot |\Delta_j| = \sum_j 1 \cdot |\Delta_j| = |\Pi|$$

Итак

$$\forall I \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon = \frac{|\Pi|}{3} > 0, \ \forall \delta > 0 \ \exists T, H, \ d(T) < \delta : |\sigma(f, T, H) - I| \geq \varepsilon$$

Значит функция не является интегрируемой.

2 Лекция 2

2.1 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе

Определение. Разность сумм Дарбу

$$\Omega(f, T) = \underline{S}(f, T) - \bar{s}(f, T)$$

называется Ω -суммой.

Замечание. Пусть $T = \{\Delta_j\}$

$$\Omega(f, T) = \sum_i \left(\sup_{x \in \Delta_i} f(x) - \inf_{x \in \Delta_i} f(x) \right) \cdot |\Delta_i|$$

$\sup_{x \in \Delta_i} f(x) - \inf_{x \in \Delta_i} f(x) := \omega_i$ называют колебаниями f на Δ_i .

В одномерном случае доказывалось утверждение

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости на отрезке).

Следующие условия эквивалентны:

1. $f \in \mathcal{R}[a, b]$
2. $I^*(f, [a, b]) = I_*(f, [a, b])$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : d(T) < \delta : \Omega(f, T) < \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0 \exists T : \Omega(f, T) < \varepsilon$

Рассмотрим аналогичное утверждение и докажем его

Теорема (Критерий Дарбу интегрируемости на брусе).

Следующие условия эквивалентны:

1. $f \in \mathcal{R}(\Pi)$
2. $I^*(f, \Pi) = I_*(f, \Pi)$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, d(T) < \delta : \Omega(f, T) < \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0 \exists T : \Omega(f, T) < \varepsilon$

Доказательство. Докажем по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

1. $(1) \Rightarrow (2)$:

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T, H, \ d(T) < \delta : |I - \sigma(f, T, H)| < \varepsilon$$

Знаем, что

$$\underline{\underline{S}}(f, T) = \sup_H \sigma(f, T, H), \quad \bar{s}(f, T) = \inf_H \sigma(f, T, H)$$

тогда

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, H) < I + \varepsilon$$

отсюда

$$I - \varepsilon \leq \bar{s}(f, T) < I + \varepsilon, \quad I - \varepsilon < \underline{\underline{S}}(f, T) \leq I + \varepsilon$$

таким образом $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T, \ d(T) < \delta$:

$$|I - \bar{s}(f, T)| < \varepsilon, \quad |I - \underline{\underline{S}}(f, T)| < \varepsilon$$

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} \bar{s}(f, T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \underline{\underline{S}}(f, T) = I$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T, \ d(T) < \delta : \bar{s}(f, T) \geq I - \varepsilon \Rightarrow \sup_T \bar{s}(f, T) = I_* \geq I$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T, \ d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(f, T) \leq I + \varepsilon \Rightarrow \inf_T \underline{\underline{S}}(f, T) = I^* \leq I$$

При этом известно, что $I_* \leq I \leq I^*$. Таким образом, $I_* = I = I^*$

2. $(2) \Rightarrow (4)$:

$$\sup_T \underline{\underline{S}}(f, T) = \inf_T \bar{s}(f, T)$$

По свойству точных граней $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T_1, T_2$:

$$0 \leq I - \bar{s}(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - I < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - \bar{s}(f, T_1) < \varepsilon$$

Тогда если $T = T_1 \cup T_2$, то

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \bar{s}(f, T) \leq \underline{\underline{S}}(f, T_2) - \bar{s}(f, T_1) < \varepsilon$$

3. $(4) \Rightarrow (3)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T_\varepsilon : \Omega(f, T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть разбиение T_1 получено из разбиения T добавлением p разрезов. Тогда

$$0 \leq \underline{\underline{S}}(f, T) - \underline{\underline{S}}(f, T') \leq (M - m) \cdot d^{k-1} \cdot d(T) \cdot p$$

$$0 \leq \Omega(f, T_1) \leq \Omega(f, T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Omega(f, T) - \Omega(f, T_1) = (\underline{S}(f, T) - \bar{s}(f, T)) - (\underline{S}(f, T_1) - \bar{s}(f, T_1)) = \\ &= (\underline{S}(f, T) - \underline{S}(f, T_1)) - (\bar{s}(f, T_1) - \bar{s}(f, T)) \leq 2(M-m) \cdot d^{k-1} \cdot d(T) \cdot p \stackrel{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(1): при условии что мы берем

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4(M-m) \cdot d^{k-1} \cdot p} > 0$$

Итак при $d(T) < \delta$:

$$\Omega(f, T) = (\Omega(f, T) - \Omega(f, T_1)) + \Omega(f, T_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. (3) \Rightarrow (1):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T, d(T) < \delta : \underline{S}(f, T) - \bar{s}(f, T) < \varepsilon$$

Отсюда следует что выполнено условие (2): $I_* = I^*$, а это означает, что

$$\bar{s}(f, T) \leq I \leq \underline{S}(f, T)$$

Также известно, что

$$\bar{s}(f, T) \leq \sigma(f, T, H) \leq \underline{S}(f, T)$$

объединяя эти два факта, получим, что

$$|I - \sigma(f, T, H)| \leq \underline{S}(f, T) - \bar{s}(f, T) < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть Π — замкнутый брус в \mathbb{R}^k , $f \in \mathcal{C}(\Pi)$. Тогда $f \in \mathcal{R}(\Pi)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{C}(\Pi) \Rightarrow f$ - равномерно непрерывна на Π ($f \in \mathcal{UC}(f)$):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2, \rho(x_1, x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2|\Pi|}$$

Хотим показать, что

$$\Omega(f, T) = \sum_i \omega_i \cdot |\Delta_i| < \varepsilon$$

При этом

$$\omega_i = \sup_{x_1 \in \Delta_i} f(x_1) - \inf_{x_2 \in \Delta_i} f(x_2) \leq \frac{\varepsilon}{2|\Pi|}$$

таким образом

$$\Omega(f, T) \leq \frac{\varepsilon}{2|\Pi|} \sum_i |\Delta_i| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

3 Лекция 3

3.1 Мера Жордана в \mathbb{R}^k

Определение. Выберем семейство элементарных множеств Π_i . Тогда семейство множеств вида $\bigsqcup_{i=1}^n \Pi_i$, замкнутое относительно пересечения и симметрической разности называется кольцом множеств.

Определение. Пусть Φ – ограниченное множество в \mathbb{R}^k . Тогда

1. внешней мерой Жордана называется число

$$\mu^*(\Phi) = \inf\{\mu(P) : P \text{ -- элементарное множество, такое, что } \Phi \subset P\}$$

2. внутренней мерой Жордана называется число

$$\mu_*(\Phi) = \sup\{\mu(Q) : Q \text{ -- элементарное множество, такое, что } Q \subset \Phi\}$$

3. Если $\mu^*(\Phi) = \mu_*(\Phi)$, то назовем число

$$\mu(\Phi) = \mu^*(\Phi) = \mu_*(\Phi)$$

мерой Жордана, а Φ измеримым по Жордану.

4. Если Π_i – элементарное множество, то по определению положим

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(\Pi_i)$$

Определение. Функция

$$\chi_i = \Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Phi, \\ 0, & x \notin \Phi \end{cases}$$

называется индикатором множества Φ .

Теорема. Множество Φ измеримо по Жордану \Leftrightarrow по любому брусу Π такому, что $\Phi \subseteq \Pi$ существует интеграл от χ_Φ по Π . При этом

$$\mu(\Phi) = \overbrace{\int_{\Pi} \cdots \int_{\Pi}}^k \chi_\Phi(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Доказательство.

(\Rightarrow): Пусть $\mu_*(\Phi) = \mu^*(\Phi) = \mu(\Phi)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon, P_\varepsilon > \Phi > Q_\varepsilon$:

$$\mu(P_\varepsilon) < \mu(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(Q_\varepsilon) > \mu(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P_\varepsilon = \bigsqcup_{i=1}^n \Pi_i$$

можно считать, что P_ε лежат внутри бруса Π , если это не так, то, не увеличив оценку, заменим P_ε на

$$\widehat{P}_\varepsilon = \bigsqcup_{i=1}^n (\Pi_i \cap \Pi)$$

$$P_\varepsilon = \bigsqcup_i \Pi_i, \quad Q_\varepsilon = \bigsqcup_j \Pi'_j$$

продолжив все грани Π_i и Π'_j , получим разбиение T бруса Π , при этом поскольку

$$\bar{s}(\chi_\Phi, T) = \sum_p \inf_{x \in \Delta p} \chi_\Phi(x) |\Delta p|, \quad \underline{s}(\chi_\Phi, T) = \sum_p \sup_{x \in \Delta p} \chi_\Phi(x) |\Delta p|$$

то $\bar{s}(\chi_\Phi, T)$ состоит из элементарных множеств, которые полностью содержатся в Φ , а $\underline{s}(\chi_\Phi, T)$ из элементарных множеств, которые пересекаются с Φ хотя бы по одной точке. Значит

$$\bar{s}(\chi_\Phi, T) \geq \mu(Q_\varepsilon), \quad \underline{s}(\chi_\Phi, T) \leq \mu(P_\varepsilon)$$

таким образом

$$\Omega(\chi_\Phi, T) = \underline{s}(\chi_\Phi, T) - \bar{s}(\chi_\Phi, T) \leq \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

значит существует

$$I = \overbrace{\int \cdots \int}_{\Pi}^k \chi_\Phi(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

$$\mu(Q_\varepsilon) \leq \bar{s}(\chi_\varphi, T) \leq I \leq \underline{s}(\chi_\varphi, T) \leq \mu(P_\varepsilon)$$

итак $\forall \varepsilon > 0$

$$|I - \mu(\Phi)| \leq \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

значит

$$I = \mu(\Phi)$$

(\Leftarrow): Пусть существует

$$I = \overbrace{\int_{\Pi} \cdots \int}^k \chi_{\Phi}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение T такое, что

$$\Omega(\chi_{\Phi}, T) = \sum_p (\sup_{\Delta p} \chi_{\Phi} - \inf_{\Delta p} \chi_{\Phi}) \cdot |\Delta p| < \varepsilon \quad (*)$$

Заметим, что Δp делятся на группы:

1. $\sup \chi_{\Phi} = \inf \chi_{\Phi} = 1$ — находится внутри
2. $\sup \chi_{\Phi} = 1, \inf \chi_{\Phi} = 0$ — содержит границу
3. $\sup \chi_{\Phi} = \inf \chi_{\Phi} = 0$ — находится снаружи

Определим Q_{ε} как объединение брусов из первой группы, а P_{ε} как объединение брусов из первой и второй группы. Заметим, что $\bar{s}(\chi_{\Phi}, T)$ это в является объединением брусов из первой группы, а $\underline{S}(\chi_{\Phi}, T)$ объединением ячеек из первой и второй группы. Значит

$$\bar{s}(\chi_{\Phi}, T) = \mu(Q_{\varepsilon}), \quad \underline{S}(\chi_{\Phi}, T) = \mu(P_{\varepsilon}) \quad (*)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \Omega(\chi_{\Phi}, T) &= \mu(P_{\varepsilon}) - \mu(Q_{\varepsilon}) \\ \mu^*(\Phi) - \mu_*(\Phi) &\leq \mu(P_{\varepsilon}) - \mu(Q_{\varepsilon}) < \varepsilon \end{aligned}$$

Известно, что

$$\begin{aligned} \bar{s}(\chi_{\Phi}, T) &\leq I \leq \underline{S}(\chi_{\Phi}, T) \\ \mu(Q_{\varepsilon}) &\leq \mu(\Phi) \leq \mu(P_{\varepsilon}) \end{aligned}$$

комбинируя эти результаты и используя соотношения (*), получим

$$|I - \mu(\Phi)| \leq \Omega(\chi_{\Phi}, T) < \varepsilon$$

□

Следствие. Пусть Φ измеримо по Жордану и $\Phi \subset \Pi_1, \Phi \subset \Pi_2$. Тогда

$$\overbrace{\int_{\Pi_1} \cdots \int}^k \chi_{\Phi}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \overbrace{\int_{\Pi_2} \cdots \int}^k \chi_{\Phi}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Теорема (Критерий измеримости по Жордану).

Следующие условия эквивалентны:

1. Φ измеримо по Жордану
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists$ элементарные множества $P_\varepsilon, Q_\varepsilon : Q_\varepsilon \subset \Phi \subset P_\varepsilon$ такие, что
$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$
3. $\mu(\partial\Phi) = 0$

Доказательство. Докажем по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

1. $(1) \Rightarrow (2)$:

Пусть Φ измеримо по Жордану. Тогда существует интеграл

$$\overbrace{\int \cdots \int}_{\Pi}^k \chi_{\Phi}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Во второй части доказательства предыдущей теоремы было показано, что

$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

2. $(2) \Rightarrow (3)$:

Пусть

$$\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

Заметим, что $P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon$ является элементарным множеством. Тогда

$$\partial\Phi \subset \overline{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon}$$

при этом

$$\mu\left(\overline{P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon}\right) = \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

3. $(3) \Rightarrow (1)$:

Пусть $\mu(\partial\Phi) = 0$. Тогда существует элементарное множество R_ε , содержащее $\partial\Phi$ и такое, что $\mu(R_\varepsilon) < \varepsilon$. Продолжим грани брусов в его составе и получим разбиение T бруса Π , который содержит Φ . Поскольку

$$\bar{s}(\chi_{\Phi}, T) = \sum_p \inf_{x \in \Delta p} \chi_{\Phi}(x) |\Delta p|, \quad \underline{s}(\chi_{\Phi}, T) = \sum_p \sup_{x \in \Delta p} \chi_{\Phi}(x) |\Delta p|$$

то $\overline{\underline{s}}(\chi_\Phi, T)$ состоит из элементарных множеств, которые полностью содержатся в Φ , а $\underline{\overline{s}}(\chi_\Phi, T)$ из элементарных множеств, которые пересекаются с Φ хотя бы по одной точке. Отсюда понятно, что

$$\Omega(\chi_\Phi, T) \leq \mu(R_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит, по предыдущей теореме Φ измеримо по Жордану.

□

Пример (Неизмеримого по Жордану множества).

Пусть $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Заметим, что $(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k \subset ([0, 1])^k$ и $\partial(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k = ([0, 1])^k$. Таким образом $\mu(\partial(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k) = 1 \neq 0$, значит, $(\mathbb{Q}_{[0,1]})^k$ неизмеримо по Жордану.

Пример (Ковер Серпинского).

Появится позже.

Пример. Тут еще был какой-то пример.