

Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

23 октября 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Контакты: [Telegram](#), [GitHub](#)

Содержание

1 Числовые ряды	3
1.1 Определение ряда и простейшие свойства	3
1.2 Знакопостоянные ряды	4
1.3 Знакопеременные ряды	12
2 Функциональные последовательности и ряды	18
2.1 Функциональные последовательности	18
2.2 Функциональные ряды	21
2.3 Степенные ряды	24
2.4 Ряды Тейлора	27
3 Бесконечные произведения	30
3.1 Разложение синуса в бесконечное произведение	32
4 Интегралы с параметром	35
4.1 Собственные интегралы с параметром	35
4.2 Несобственные интегралы с параметром	38

1 Числовые ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall k, m > N_{\varepsilon} : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для последовательности S_n :

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев.

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \tag{*}$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд (*) сходится. \square

Теорема. (Признак сравнения)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n \geq 0) \tag{2}$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.
2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$$

\square

Теорема. (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. \square

Примеры.

1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится по Критерию Коши.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

сходится.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

сходится.

Теорема. (Признак Коши)

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{*}$$

такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд (*) сходится.

2. Если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд (*) расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд (*) сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд (*) расходится.

□

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

то ряд (*) сходится

2. Если

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$

то ряд (*) расходится

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд (*) сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд (*) расходится.

□

Пример. При $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

2.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

Теорема. (Интегральный признак)

Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad \int_1^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^N f(k) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\beta} x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^{\gamma} (\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^{\gamma}(\ln n)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad (*)$$

- Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$, $c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$

то ряд $(*)$ сходится.

- Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

- Рассмотрим неравенства для $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{array} \right.$$

сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^k a_{N+m}$$

значит

$$\sum_{m=1}^k a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

и ряд сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для $n = N, N + 1, \dots, N + k - 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{array} \right.$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит расходится и ряд (*).

□

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

1. (Признак Д'Аламбера)

Возьмем $c_n = 1$:

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Если

$$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

2. (Признак Раабе)

Возьмем $c_n = n$:

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n + 1) \geq \alpha$$

Значит если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Теперь

$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$

Значит если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)

(Возможно ложса, нужно проверить)

Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right) \leq 1$$

то ряд (*) расходится. Запишем в предельной форме:

Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right) \right) = q > 1$$

то ряд (*) сходится. Если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) - 1 \right) \right) = q < 1$$

то ряд (*) расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)

Выводится из признака Бертрана.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

где θ_n - ограниченная последовательность, $\varepsilon > 0$ - произвольное. Тогда при

- (a) $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$ сходится, $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.
- (b) $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$ сходится, $\mu < 1 \Rightarrow (*)$ расходится.
- (c) $\lambda = 1, \mu = 1 \Rightarrow (*)$ расходится.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^N a_n \right| \leq \sum_{n=k}^N |a_n| < \varepsilon$$

□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad (2)$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Рассмотрим

$$S_k^{\sigma} = \sum_{n=1}^k a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max_{1 \leq n \leq k} \sigma(n)$, $S_n \rightarrow S$. Тогда

$$S_k^{\sigma} \leq S_N \Rightarrow S_k^{\sigma} \leq S \Rightarrow \exists S^{\sigma} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{\sigma}$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^{\sigma} \Rightarrow S = S^{\sigma}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty, \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1b_1 & | & a_1b_2 & | & a_1b_3 & | & \cdots \\ \hline a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & \cdots \\ \hline a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1, \dots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме (*).

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n b_k)_m \tag{*}$$

сходится абсолютно и равен AB .

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда (*), которые имеют вид S_{N^2} :

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \rightarrow AB, \quad N \rightarrow \infty$$

Теперь перейдем к общему виду S_{N^2+M} , ($1 \leq M \leq 2N$) и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \dots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \dots + |b_N|) \rightarrow 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит $S_{N^2+M} \rightarrow AB$. \square

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{*}$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд (*) называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0. \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0, \\ a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{2}$$

расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит оба ряда расходятся. \square

Теорема. (Теорема Римана)

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R} \exists \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists \sigma_{\pm\infty}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{\pm\infty}} = \pm\infty$$

$\exists \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. доказали картинками))))

доказательство появится немного позже \square

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(A): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а b_n монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

(D): Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^p a_n, \quad A_{k-1} = 0 \Rightarrow a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n \cdot b_n &= \sum_{n=k}^m (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1} \cdot b_n = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \end{aligned}$$

(A):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

(D):

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)

Если a_n монотонно убывает и $a_n \rightarrow 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \tag{*}$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд (*) сходится. □

2 Функциональные последовательности и ряды

2.1 Функциональные последовательности

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0, 1]$:

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin \frac{x}{n} \rightarrow 0$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_{\varepsilon} : \forall n > N_{\varepsilon}, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A , и пишут $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$.

Примеры.

1. На $[0, 1]$

$$x^n \not\rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

поскольку $\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall N_{\varepsilon} \ \exists n > N_{\varepsilon}, \ \exists x_{\varepsilon_0} \in [0, 1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.

2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \not\rightarrow 0$.

3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0, 1] : f_n \not\rightarrow 0$.

$$f'_n = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \ f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$

4. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \not\rightarrow 0$ на \mathbb{R} , но $\forall a, b, \ \forall x \in [a, b] : \sin \frac{x}{n} \rightarrow 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \sup_A |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Доказательство.

(\Rightarrow):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $\forall x \in A$:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(\Leftarrow):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \xrightarrow{A} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow):

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_m(x)| &= |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

(\Leftarrow): Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Тогда после предельного перехода получим, что $\forall x \in A$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимоти последовательности) Пусть $\forall x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x)$. Если

$$\exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, c_n \geq 0, c_n \rightarrow 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$$

Доказательство. Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{A} f(x)$, $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N, \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N_\varepsilon$ и запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f_n \in \mathcal{C}[a, b]$. Тогда

$$\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{} \int_a^x f(t) dt$$

Доказательство.

$$\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |x - a| < \varepsilon \cdot |x - a|$$

□

Теорема. (Теорема о почленном дифференцировании функциональных последовательностей)

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b]$:

$f_n(x_0) \rightarrow \alpha$. Пусть $f'_n(x) \xrightarrow{[a,b]} g(x)$. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \xrightarrow{} \int_{x_0}^x g(t) dt \Rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) \xrightarrow{} \int_{x_0}^x g(t) dt$$

отсюда

$$f_n(x) \xrightarrow{} \int_{x_0}^x g(t) dt + \alpha = f(x)$$

□

2.2 Функциональные ряды

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$, определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\}, \{S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд (1) сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если $S_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$, то говорят, что ряд (1) сходится равномерно.
3. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$

то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} : \forall m, k > N_{\varepsilon}, \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для функциональных последовательностей

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Необходимое условие равномерной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

тогда и только тогда, когда $|a_n(x)| \xrightarrow{A} 0$

Доказательство.

$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \Rightarrow S(x) - S(x) = 0$$

□

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$$

Тогда $S(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. $S_n(x) \xrightarrow{A} S(x)$ и $\forall n : a_n(x)$ непрерывна в точке x_0 . Значит, $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0 и по теореме для функциональных последовательностей, $S(x)$ непрерывна в точке x_0 . □

Теорема. Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) \Rightarrow \int_a^x S(t) dt$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^k a_n(t) \right) dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t) dt \right) \end{aligned}$$

□

Теорема. (Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов)
Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \alpha$$

где $x_0 \in [a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \xrightarrow{[a,b]} g(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{[a,b]}{\Rightarrow} S(x) \in \mathcal{C}^1[a, b], \quad S'(x) = g(x)$$

Доказательство. Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности $S_n(x)$. \square

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Пусть $\forall n : |a_n(x)| < \alpha_n, \forall x \in A$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} S(x)$$

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k+1}^m a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^m \alpha_n < \varepsilon$$

\square

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)

Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A .

(\mathcal{A} :) Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} S(x)$$

и $\exists M > 0, \forall x \in A, \forall n : |b_n(x)| < M$ и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$.

(\mathcal{D}):) Пусть $\forall x \in A, \exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N} :$

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq M$$

и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$, причем $b_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \stackrel{A}{\Rightarrow} S(x)$$

Доказательство. Аналогично как для числовых рядов. Введем:

$$A_p(x) = \sum_{n=k}^p a_n(x), \quad A_{k-1}(x) = 0 \Rightarrow a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^m a_n(x)b_n(x) &= \sum_{n=k}^m (A_n(x) - A_{n-1}(x)) b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k+1}^m A_{n-1}(x)b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^m A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)b_{n+1}(x) = \\ &= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x)b_m(x) \end{aligned}$$

$$(\mathcal{A}): |*| \leq \varepsilon \cdot |b_k(x) - b_m(x)| + |b_m(x)| < \varepsilon \cdot 3M$$

$$(\mathcal{D}): |*| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$$

□

2.3 Степенные ряды

Определение. Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называются степенными рядами. a_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - центр разложения.

Замечание. В центре разложения ряд сходится.

Замечание. Сдвиг $x - x_0 \mapsto x$ не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема. (Первая теорема Абеля)

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{*}$$

Если существует $x' \in \mathbb{R}$, что $(*)$ сходится в точке x' , то для любых x , таких, что $|x| < |x'|$ ряд $(*)$ сходится. Если существует $x'' \in \mathbb{R}$, что ряд $(*)$ расходится в точке x'' , то для любых x , таких что $|x| > |x''|$ ряд $(*)$ расходится.

Доказательство. Пусть $x : |x| < |x'|$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n(x')^n| \cdot \left| \frac{x}{x'} \right|^n \right) \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x'} \right|^n$$

Ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии. Теперь пусть $x : |x| > |x''|$. От противного: пусть есть точка $y : |y| > |x''|$ в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках $x : |x| < |y|$, а значит и в x'' - противоречие. \square

Замечание. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{*}$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ сходится, $A \neq \emptyset$, так как $\{0\} \in A$. Пусть $B \subset \mathbb{R}$ - все точки в которых ряд $(*)$ расходится и пусть $B \neq \emptyset$.

Тогда из первой теоремы Абеля следует, что $A = \{0\}$ или $\exists a > 0 : (-a, a) \subset A$, а также $\exists b > 0 : (-\infty, -b) \cap (b, +\infty) \subset B$.

Утверждение. $a = b$

Доказательство. Предположим что это не так, тогда $a < b$ ($b < a$). По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$. Значит c не лежит ни в A ни в B , а такого быть не может, противоречие. \square

Определение. $a = b$ называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R . Если $R = 0$, то $A = \{0\}$, если $B = \emptyset$, то $R := +\infty$.

Теорема. (Формула Коши-Адамара)

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Если предел равен нулю, то $R = +\infty$. Если предел равен бесконечности, то $R = 0$.

Доказательство. Применим признак Коши к ряду

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1 & \text{сходится, и } |x| < R, \\ l > 1 & \text{расходится, и } |x| > R \end{cases}$$

□

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \quad (*)$$

и пусть $R > 0$.

1. $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ ряд равномерно сходится.
2. $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t) dt$$

4. $S(x) \in \mathcal{C}^\infty(-R, R)$.

Доказательство.

1. $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot (R - \varepsilon)^n$ по признаку Вейерштрасса.
2. из пункта 1: $\forall \varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R + \varepsilon, R - \varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. Поскольку ряд $(*)$ равномерно сходится на любом отрезке внутри $[-R, R]$, то

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

4. Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

значит $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha x^n$$

имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости R . Тогда, По теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

□

Теорема. (Вторая теорема Абеля)

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x), \quad R > 0$$

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Тогда $S(x) \in C[0, R]$ то есть

$$\exists \lim_{x \rightarrow R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = S(R)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R} \right)^n$$

а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на $[0, R]$. □

2.4 Ряды Тейлора

Определение. Пусть $f(x) \in C^\infty(B(x_0))$. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром ряда x_0 .

Замечание. Далее везде центр разложения в 0.

Теорема. Если в некоторой окрестности нуля выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Доказательство. Подставим $x = 0$, тогда $a_0 = f(0)$. Продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_1 = f'(0)$. Снова продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$. Продолжая выполнять эту операцию, для каждого n получим $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. □

Теорема. Пусть $f(x) \in C^\infty(-a, a)$ и $|f^{(n)}(x)| \leq A^n$, $A > 0$.

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\forall x \in (-a, a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Тогда

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| \leq \frac{A^{N+1} \cdot a^{N+1}}{(N+1)!} \rightarrow 0$$

□

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Несложно проверить, что $f(x) \in C^\infty(B(0))$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \neq f(x)$$

Пример. (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Этот ряд сходится на $(-1, 1)$, причём

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2}$$

но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

не сходится.

Лемма. Если $a_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \rightarrow A$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n - A \right| &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N a_n - AN \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N_1} a_n - AN_1 \right| + \frac{1}{N} \sum_{n=N_1+1}^N |a_n - A| < \varepsilon \cdot \frac{N - N_1}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. (Теорема Таубера)

Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на $(-1, 1)$, существует

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

и пусть $a_n = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$.

Тогда существует

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

Доказательство. Обозначим $\forall x \in (0, 1)$

$$N_x = \left[\frac{1}{1-x} \right]$$

и введём функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Если $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1-0$, то теорема доказана.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n (1 - x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N_x} a_n (1 - x^n) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{N_x} a_n (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n| n \leq \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n n| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 1-0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n \right| &= \left| \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n \right| < \frac{1}{N_x + 1} \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \varepsilon x^n < \\ &< \frac{\varepsilon}{N_x + 1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{N_x + 1} \cdot \frac{1}{1 - x} < \varepsilon \end{aligned}$$

Отсюда $|\varphi(x)| < 2\varepsilon \ \forall n > N_x$. \square

3 Бесконечные произведения

Определение. Рассмотрим $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n = \prod_{k=1}^n u_k\}_{n=1}^{\infty}$.

Пара последовательностей $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется бесконечным произведением чисел $\{u_n\}$, обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

u_n - общий член, Π_n - частичное произведение.

Определение. $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = a \neq 0$.

$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся, если $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$. Если $\exists n : u_n = 0$, то $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся к 0.

Теорема. (Необходимое условие сходимости) Если $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $u_n \rightarrow 1$.

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi_n}{\prod_{n=1}^{n-1} u_n} = 1$$

\square

Следствие. Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n, \quad a_n \rightarrow 0$$

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

сходится.

Доказательство.

(\Rightarrow):

$$\Pi_N \text{ - сходится} \Rightarrow \ln(\Pi_N) \text{ - сходится}, \ln(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^N \ln(1+a_n) \text{ - сходится}$$

(\Leftarrow):

$$\sum_{n=1}^N \ln(1+a_n) \text{ - сходится} \Rightarrow e^{\left(\sum_{n=1}^N \ln(1+a_n)\right)} \text{ - сходится} \Rightarrow \Pi_N \text{ - сходится}$$

□

Определение. Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответствующий ряд из логарифмов.

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$$

из этого следует утверждение в обе стороны. □

Следствие. Если a_n знакопостоянны, то произведение и соответствующий ряд из логарифмов сходятся или расходятся одновременно.

Теорема. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Доказательство.

$$\ln(1 + a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{o}(a_n^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

□

Замечание. Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(x))$$

анализируя соответствующий функциональный ряд из логарифмов.

Пример. (Пример Эйлера)

Пусть p_k обозначает k -е простое число. Тогда при $s > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} \\ \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} &= \prod_{k=1}^N \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{ls}}\right) = \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &< \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

Тогда

$$\sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1} \cdot p_{k_2}^{l_2} \cdots \cdot p_{k_m}^{l_m})^s} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \quad N \rightarrow \infty$$

3.1 Разложение синуса в бесконечное произведение

Теорема. $\forall x \neq \pi k$:

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Доказательство. $\forall n : \sin((2n+1)x) = (2n+1) \sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$

это утверждение можно показать по индукции, с базой $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$$\sin((2n+1)x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

при этом

$$P_n(\sin^2 x) = 0, \quad x = \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$P_n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Заметим, что

$$P_n(\sin^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_n(\omega) &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\omega}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) \\ P_n(\sin^2 x) &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} \end{aligned}$$

сделаем замену: $(2n+1)x = t$

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Лемма. $\forall \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R} :$

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + a_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|) - 1$$

Доказательство. Очев по индукции. □

Возьмем $\forall t \in \mathbb{R}, |t| < n, m < n$

$$\frac{\sin t}{(2n+1) \cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) \cdot R_{n,m}(t) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,m}(t) = R_m(t)$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right) \cdot R_m(t)$$

Вернемся к $R_{m,n}$:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) \right| &\leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \leq \\ &\leq \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{t^2}{(\frac{2}{\pi} \cdot \pi k)^2}\right) - 1 = \prod_{k=m+1}^n \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 < \\ &< \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty \Rightarrow R_m(t) \rightarrow 1$, $m \rightarrow \infty$. Значит

$$\sin t = t \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

□

Следствие. (Формула Валлиса)

При $t = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right)$$

4 Интегралы с параметром

4.1 Собственные интегралы с параметром

Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}[a, b]$, $\varphi(y) \leq \psi(y)$. Рассмотрим $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x, y) : y \in [a, b], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

см. рисунок ниже

Определение. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{R}[\varphi(y), \psi(y)]$. Интеграл

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

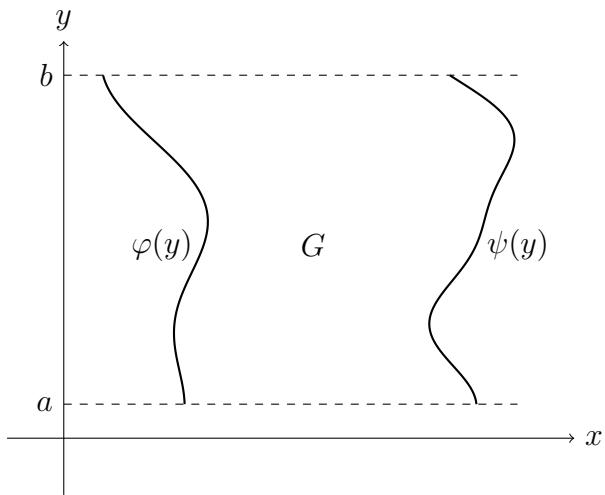
называется собственным интегралом с параметром.

Теорема. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[a, b]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |F(y + \Delta y) - F(y)| &= \left| \int_{\varphi(y + \Delta y)}^{\psi(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right| \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \left| \int_{\varphi(y + \Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \left| \int_{\psi(y)}^{\psi(y + \Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \\ &\quad + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx \stackrel{(2)}{\leq} M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \max_y |\psi(y) - \varphi(y)| \end{aligned}$$



(1):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx = \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \\
 & \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx = \\
 & = \int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx
 \end{aligned}$$

(2): Первые два слагаемых оцениваются так: $f(x, y + \Delta y) \leq M$, так как $f \in \mathcal{C}(G)$ и, поскольку $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны, то $|\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)| < \varepsilon$ и $|\psi(y + \Delta y) - \psi(y)| < \varepsilon$.

Последнее слагаемое оценивается так: $f \in \mathcal{C}(G)$, значит, f равномерно непрерывна (так как G - компакт) \Rightarrow при $\Delta y \rightarrow 0 : |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$ \square

Теорема. Пусть $\varphi(y), \psi(y) \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$, $\exists f'_y(x, y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда $F(y) \in \mathcal{C}^1(G)$ и

$$F'(y) = \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right)' = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta y} (F(y + \Delta y) - F(y)) &= \\
&= \frac{1}{\Delta y} \left(\int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\Delta y} \int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y) dx + \frac{1}{\Delta y} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx \stackrel{(2)}{=} \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\Delta y} (\psi(y + \Delta y) - \psi(y)) \cdot f(\psi(y + \theta_1 \Delta y), y + \Delta y) - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y} (\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)) f(\varphi(y + \theta_2 \Delta y), y + \Delta y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y + \theta_3 \Delta y) dx
\end{aligned}$$

(1): Аналогично предыдущей теореме

(2): Применяем теорему о среднем к первому и второму слагаемому, и теорему Лагранжа к третьему слагаемому ($0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$)

Значит существует предел при $\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \psi'(y) f(\psi(y), y) - \varphi'(y) f(\varphi(y), y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$. Тогда

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_c^t \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad G(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx \\
F'(t) &= \int_a^b f(x, t) dx, \quad G'(t) = \int_a^b f(x, t) dx
\end{aligned}$$

Отсюда $F(t) - G(t) = \tilde{C}$. Заметим, что $F(C) = G(C) = 0 \Rightarrow \tilde{C} = 0$. Значит $F(t) = G(t)$, в частности для $t = d$. \square

4.2 Несобственные интегралы с параметром

Определение. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^\omega f(x, y) dx$$

Пусть на $Y \subset \mathbb{R}$:

$$\int_a^\omega f(x, y) dx = F(y)$$

Если $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in [a, \omega) : \forall a' > A, \forall y \in Y :$

$$\left| \int_a^{a'} f(x, y) dx - F(y) \right| < \varepsilon$$

то

$$\int_a^\omega f(x, y) dx \stackrel{Y}{\rightrightarrows} F(y)$$

Далее, без ограничения общности будем писать $\omega = +\infty$.

Теорема. (Критерий Коши)

$$\int_a^{a'} f(x, y) dx \stackrel{Y}{\rightrightarrows} F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists A > a, \forall a_1, a_2 > A, \forall y \in Y :$

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

(\Rightarrow):

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{a_1}^{+\infty} f(x, y) dx - \int_{a_2}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon$$

(\Leftarrow):

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Тогда при $a_2 \rightarrow +\infty$:

$$\left| \int_{a_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in Y$$

Если $\exists g(x)$ такая, что $|f(x, y)| < g(x)$ и сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

сходится равномерно на Y .

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx, \quad y \in Y$$

Пусть $|f(x, y)|, |g(x, y)| < M$

(A):

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

$g(x, y)$ монотонна $\forall y$. Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

(D):

$$\left| \int_a^A f(x, y) dx \right| < M$$

$g(x, y)$ монотонна и $g(x) \stackrel{Y}{\Rightarrow} 0$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y) dx \stackrel{Y}{\Rightarrow}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| &= \left| g(a_1, y) \cdot \int_{a_1}^c f(x, y) dx + g(a_2, y) \cdot \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq |g(a_1, y)| \cdot \left| \int_{a_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(a_2, y)| \cdot \left| \int_c^{a_2} f(x, y) dx \right| = (*) \end{aligned}$$

(A) : $(*) \leq \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M$

(D) : $(*) \leq \varepsilon \cdot 2M + \varepsilon \cdot 2M$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [c, d])$ и

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c, d]}{\Rightarrow} F(y)$$

Тогда $F(y) \in \mathcal{C}[c, d]$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| &\leq \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty] \times [c, d])$, $\exists f'_y(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty] \times [c, d])$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = F(y), \quad \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \stackrel{[c, d]}{\Rightarrow} G(y)$$

Тогда $\exists F'(y) = G(y)$.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \rightarrow +\infty$ и

$$F_n(y) = \int_a^{x_n} f(x, y) dx$$

По теореме о дифференцировании функциональных последовательностей и теореме о дифференцировании собственных интегралов:

$$F'_n(y) \Rightarrow G(y) \Rightarrow F'(y) = G(y)$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty] \times [c, d])$ и

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \Rightarrow F(y)$$

Тогда

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \rightarrow +\infty$

$$F_n(y) = \int_a^{x_n} f(x, y) dx$$

Тогда по теореме для собственных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_c^d \left(\int_a^{x_n} f(x, y) dx \right) dy &= \int_a^{x_n} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_c^d F_n(y) dy \right) &= \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

□

Теорема. (Признак Дини равномерной сходимости последовательности)

Пусть $\forall n : f_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, $\forall x \in [a, b] : f_n(x)$ монотонны по n и

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$$

Тогда $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$.

Доказательство.

$$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x_0}, \forall n \geq N_{\varepsilon, x_0} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Отсюда $\exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) :$

$$|f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x) - f(x)| \leq |f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x) - f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x_0)| + |f_{N_{\varepsilon, x_0}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Из монотонности следует, что для всех номеров, больших данного, неравенство выполняется.

Рассмотрим накрытие:

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} B_{\delta_\varepsilon}(x) \Rightarrow \exists \{x_i\}_{i=1}^k, [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$$

Возьмем $N_\varepsilon = \max_{i=1, \dots, k} (N_{\varepsilon, x_i})$. Тогда

$$\forall x \in [a, b], \forall n > N_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty)), f(x, y) \geq 0$. Пусть существует

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[b, +\infty)$$

и пусть существует

$$G(x) = \int_b^{+\infty} f(x, y) dy \in \mathcal{C}[a, +\infty)$$

Если существует

$$\int_b^{+\infty} F(y) dy = I$$

то существует

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I$$

Доказательство. Введем монотонные последовательности $a_n \rightarrow +\infty$, $b_k \rightarrow +\infty$

$$F_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y) dx, \quad G_k(x) = \int_b^{b_k} f(x, y) dy$$

Заметим, что по признаку Дирихле

$$F_n(y) \rightrightarrows F(y), \quad G_k(x) \rightrightarrows G(x)$$

по теореме для собственных интегралов

$$\int_b^{b_k} \left(\int_a^{a_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{a_n} \left(\int_b^{b_k} f(x, y) dy \right) dx$$

Пусть

$$C_{nk} = \int_b^{b_k} F_n(y) dy = \int_a^{a_n} G_k(x) dx$$

Тогда

$$C_{nk} = \int_b^{b_k} F_n(y) dy \leq \int_b^{b_k} F(y) dy \leq \int_b^{+\infty} F(y) dy = I$$

но с другой стороны

$$C_{nk} = \int_a^{a_n} G_k(x) dx \leq \int_a^{a_n} G(x) dx \rightarrow \int_a^{+\infty} G(x) dx = I' \leq I$$

Теперь мы знаем что существует интеграл

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I'$$

и можем повторить это рассуждение в другом порядке (сначала для G , а потом для F) и получить, что $I \leq I' \Rightarrow I = I'$. \square

Следствие. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, +\infty) \times [b, +\infty))$. Пусть существуют

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \in \mathcal{C}[b, +\infty), \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

и пусть существуют

$$G(x) = \int_b^{+\infty} f(x, y) dy \in \mathcal{C}[a, +\infty), \quad \int_b^{+\infty} |f(x, y)| dy$$

Если существуют

$$\int_b^{+\infty} F(y) dy = I, \quad \int_b^{+\infty} |F(y)| dy$$

то существуют

$$\int_a^{+\infty} G(x) dx = I, \quad \int_a^{+\infty} |G(x)| dx$$

Доказательство. Заметим, что $|f(x, y)| - f(x, y) \geq 0$, $|f(x, y)| \geq 0 \Rightarrow$ верны условия теоремы. \square

Теорема. $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a)$$

Доказательство. Пусть

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx,$$

Заметим, что $I(0) = 0$, $I(-a) = I(a)$. Далее рассматриваем только $a > 0$. Введем

$$I(a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot e^{-\varepsilon x} dx, \quad \varepsilon \geq 0$$

Пусть $a \geq a_0 > 0$, $\varepsilon \geq 0$. По теоремам выше $I(a, \varepsilon)$ непрерывна.

$$I'_a(a, \varepsilon) = \int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx$$

при $a \geq a_0 > 0$, $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$. Интегрируем по частям:

$$I'_a(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a} \int_0^{+\infty} \sin ax \cdot e^{-\varepsilon x} dx = \frac{\varepsilon}{a^2} - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \cdot \int_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x}$$

$$I'_a(a, \varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) = \frac{\varepsilon}{a^2} \Rightarrow I'_a(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + a^2} \Rightarrow I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon} + C(\varepsilon)$$

При $a = 0$: $I(a, \varepsilon) = 0 \Rightarrow C(\varepsilon) = 0$. Значит

$$I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$ из непрерывности

$$I(a) = \frac{\pi}{2}$$

□