# Математический анализ-2

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

21 марта 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, Егор Соколов, 108 группа
Telegram: @fourkenz
GitHub: yakovlevki

# Содержание

# 1 Неопределенный интеграл

## 1.1 Первообразная и неопреленный интеграл

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена на $(a, b)$. Если существует $F(x)$ определённая на $(a, b)$ такая, что $F(x) \in \mathcal{D}(a, b)$ и $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной функцией для $f(x)$.

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена на $(a, b)$. Совокупность всех первообразных функций для $f(x)$ называется неопределённым интегралом $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx$$

**Теорема.** Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $(a, b)$. Тогда

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\},\ C = const,\ C \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

$$(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Пусть $\varphi(x)$ - первообразная $f(x)$. Тогда:

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

т.е. по следствию из теоремы Лагранжа $\varphi(x) - F(x) = const$, ч.т.д. □

## 1.2 Свойства неопределённого интеграла

1. $\forall c \in \mathbb{R}$ :

   $$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

   (При $c = 0$ множества получаются разными: первое - произвольная константа, а второе - ноль; в рассуждениях этот случай будет опускаться)

2. $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. (Замена переменной)
   Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на $(a, b)$.
   Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ и $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$ Тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на $(\alpha, \beta)$.

   $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{где } x = \varphi(t)$$

4. (Интегрирование по частям) Пусть $u, v \in \mathcal{D}(a,b)$.

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\int (uv)'dx = \int uv'dx + \int u'vdx$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

**Замечание.** Неопределённый интеграл - операция на дифференциалах:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

## 1.3 Таблица неопределенных интегралов

| | |
|---|---|
| $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$ | $\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + \begin{cases} C_1, \ x > 0 \\ C_2, \ x < 0 \end{cases}$ |
| $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ |
| $\int e^x \, dx = e^x + C$ | $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\int -\frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \operatorname{ctg} x + C$ | $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ | $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ |

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$ | |

**Замечание.** Все равенства верны только на промежутках.

## 1.4 Интегрирование рациональных функций

Хотим научиться находить интеграл

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены. Разложим $Q(x)$ на неприводимые многочлены:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k}$$

Теперь разложим дробь в сумму простейших:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int(\tilde{P} + \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{\aleph_{1i}}{(x-a_1)^{\alpha_{1i}}} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_n}\frac{\aleph_{ni}}{(x-a_n)^{\alpha_{ni}}} + \\ + \sum_{j=1}^{\beta_1}\frac{\rho_{1j}x+\omega_{1j}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_{1i}}} + \dots + \sum_{j=1}^{\beta_k}\frac{\rho_{kj}x+\omega_{kj}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_{kj}}})\,dx$$

Осталось понять как интегрировать слагаемые вида

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \int\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

1. $$\int\frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a|,\ n=1 \\ \dfrac{(x-a)^{1-n}}{1-n},\ n>1 \end{cases}$$

2. Сначала преобразуем знаменатель:

$$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})$$

причем $q-\frac{p^2}{4} > 0$, поскольку у $x^2+px+q$ нет вещественных корней. Сделаем замену

$$t = x+\frac{p}{2} \Rightarrow x = t-\frac{p}{2},\ q_1^2 = q-\frac{p^2}{4}$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\alpha t-\frac{\alpha p}{2}+\beta}{(t^2+q_1^2)^k}\,d(t-\frac{p}{2}) = \int \frac{\alpha_1 t+\beta_1}{(t^2+q_1^2)^k}\,dt$$

где $\alpha_1=\alpha,\ \beta_1=\beta-\frac{\alpha p}{2}$. Далее осталось рассмотреть два интеграла:

$$\int \frac{t}{(t^2+q_1^2)^k}\,dt \quad \text{и} \quad I_k = \int \frac{dt}{(t^2+q_1^2)^k}$$

(i)

$$\int \frac{t}{(t^2+q_1^2)^k}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+q_1^2)^k} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+q_1^2)}{(t^2+q_1^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(t^2+q_1^2), & k=1 \\ \frac{(t^2+q_1^2)^{1-k}}{2(1-k)}, & k>1 \end{cases}$$

(ii)

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \frac{t}{(t^2+q^2)^k} - \int t d(\frac{1}{t^2+q^2})^k =$$
$$= \frac{t}{(t^2+q^2)^k} + 2k\int \left(\frac{t^2+q^2-q^2}{(t^2+q^2)^{k+1}}\right) dt =$$
$$= \frac{t}{(t^2+q^2)^k} + 2kI_k - 2kq^2 I_{k+1}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2kq^2}\cdot\frac{t}{(t^2+q^2)^k} + \frac{2k-1}{2kq^2}I_k$$

**Замечание.**

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \frac{\sin^2 z+\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+q^2)^k} = \left| \begin{array}{c} t = q\operatorname{tg} z \\ dt = \frac{q}{\cos^2 z}dz \end{array} \right| = \int \frac{qdz}{\cos^2 z(q^2\operatorname{tg}^2 z+q^2)^k} = \int \frac{\cos^{2k-2} z}{q^{2k-1}}dz$$

### 1.5 Метод Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{P(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k}(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}}\,dx =$$

$$= \frac{P_1(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i-1} \cdot \prod\limits_{j=1}^{k}(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j-1}} +$$

$$+ \int \frac{P_2(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i) \cdot \prod\limits_{j=1}^{k}(x^2+b_jx+c_j)}\,dx$$

# 2 Интеграл Римана

### 2.1 Интегрируемость по Риману

**Определение.** $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ называется разбиением отрезка, если $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Обозначается $T^{+}_{[a,b]}$. Если $b = x_0 > \cdots > x_n = a$, то обозначают $T^{-}_{[a,b]}$.
Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ или $[x_i, x_{i-1}]$ называются отрезками разбиения, их обычно обозначают $\Delta_i$.
Длина отрезка $\Delta_i$ обозначается $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$.
Длина наибольшего из отрезков называется диаметром разбиения $d(T) = \max|x_i - x_{i-1}| = \max \Delta x_i$.

**Определение.** Пусть $T_{[a,b]}$ - разбиение отрезка $[a,b]$. Разметкой для $T_{[a,b]}$ называется множество точек $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ такое, что $\forall i : \xi_i \in \Delta_i$.
Если $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ является разметкой для $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, то пара $(\{x_i\}_{i=0}^{n}, \{\xi_i\}_{i=1}^{n})$ называется размеченым разбиением и обозначается $T(\xi)$.

**Определение.** Сумма

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

называется интегральной суммой. Иногда ее обозначают $\sigma_T(\xi)$ или $\sigma(T_{[a,b]}(\xi))$

**Определение.** Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$. Рассмотрим $T_{[a,b]}(\xi)$. Если

$$\exists\, I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, T(\xi) \subset \{T : d(T) < \delta\} : \left| \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

то говорят, что $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, а число $I$ называют интегралом Римана на размеченных разбиениях на отрезке $[a,b]$. Интеграл Римана обозначают

$$I = \int\limits_a^b f(x)\ dx \quad \text{или} \quad I = \int\limits_b^a f(x)\ dx$$

для $T^+$ и $T^-$ соответственно.

**Замечание.** Можно считать определение интеграла определением предела интегральных сумм и писать

$$\lim_{d\to 0}\left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right) = I$$

где $d$ - диаметр разбиения.

**Утверждение.**

$$\text{Если } \exists \int\limits_a^b f(x)\ dx, \text{ то } \exists \int\limits_b^a f(x)\ dx \text{ и } \int\limits_a^b f(x)\ dx = -\int\limits_b^a f(x)\ dx$$

**Определение.** Класс функций, интегрируемых на $[a,b]$ по Риману, обозначается $\mathcal{R}[a,b]$.

**Теорема.** Если $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f(x)$ - ограничена на $[a,b]$.

*Доказательство.* Предположим, что $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b],\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \widetilde{x}$, что $|f(x_n)| > n$ и пусть

$$\exists \lim_{d\to 0}\left(\sum_{i=0}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right) = I$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\left|\sum_{i=0}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < 1$$

Возмем $\Delta_k$ такой, что $\widetilde{x} \in \Delta_k \Rightarrow f(x)$ - неограничена на $\Delta_k$. Тогда, зафиксировав точки в остальных отрезках разбиения, получим

$$I - \sum_{i=1, i\neq k}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 1 < f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < I - \sum_{i=1, i\neq k}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + 1$$

противоречие с тем, что $f(x)$ принимает сколь угодно большие на $\Delta_k$. $\square$

## 2.2 Суммы Дарбу. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Далее рассматриваем разбиения $T^+$

**Определение.** Пусть $T_1$ и $T_2$ - разбиения отрезка $[a, b]$ такие, что $T_1 \subset T_2$. Тогда $T_2$ называется измельчением $T_1$.

**Определение.** Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, $\{x_i\}_{i=0}^n = T$ - разбиение $[a, b]$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x),\ M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\overline{\overline{S}}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),\ \underline{\underline{S}}_f(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Тогда $\overline{\overline{S}}_f(T)$ называется нижней суммой Дарбу, а $\underline{\underline{S}}_f(T)$ верхней суммой Дарбу.

**Лемма 1.** Пусть $T_1$ - измельчение $T$. Тогда

$$\overline{\overline{S}}(T) \leq \overline{\overline{S}}(T_1) \ \text{ и } \ \underline{\underline{S}}(T) \geq \underline{\underline{S}}(T_1)$$

*Доказательство.* Докажем для нижней суммы. Рассмотрим случай, когда $T_1 = T \cup \{x'_j\},\ x'_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Тогда сократятся все отрезки кроме $[x_j, x_{j+1}]$ :

$$\overline{\overline{S}}(T_1) - \overline{\overline{S}}(T) = m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x_{j+1} - x_j) =$$
$$= m_{1j}(x'_j - x_j) + m_{2j}(x_{j+1} - x'_j) - m_j(x'_j - x_j) - m_j(x_{j+1} - x'_j) \geq 0$$

значит, по индукции, это верно для любого измельчения. □

**Лемма 2.**

$$\forall\ T_1, T_2 : \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим объединение любых двух разбиений $T_1$ и $T_2$: $T = T_1 \cup T_2$. Тогда $T$ является измельчением и $T_1$ и $T_2$. Тогда по лемме 1 получаем:

$$\overline{\overline{S}}(T_1) \leq \overline{\overline{S}}(T) \ \text{ и } \ \underline{\underline{S}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \Rightarrow \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$$

□

**Лемма 3.** $\forall\ T_{[a,b]}$ :

$$\overline{\overline{S}}(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{\underline{S}}(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

*Доказательство.* Докажем для верхней суммы, для нижней аналогично. Докажем более общее утверждение - рассмотрим некоторое семейство множеств $\{X_i : X_i \subset \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ и множество $\{a_i\}_{i=1}^n$ такие, что $\forall i$ $X_i$ ограничено и $a_i \geq 0$. Каждое $X_i$ из принципа полноты Вейерштрасса имеет супремум, и при этом

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall i = \{1, \dots, n\}\ \exists\ x_i \in X_i : x_i > \sup X_i - \varepsilon$$

Домножив каждое из неравенств на число ($i$-е нер-во на $a_i$) и сложив, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i - \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Отсюда в силу свойства супремума

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$$

но при этом

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$$

Значит,

$$\sup_{\{x_i\}} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sup X_i$$

При $X_i = f([x_{i-1}, x_i])$ (ограничены в силу интегрируемости $f$) и $a_i = x_i - x_{i-1}$ получим

$$\sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\{\xi_i\}} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \underline{\underline{S}}(T)$$

$\square$

**Теорема.** (Критерий Дарбу интегрируемости по Риману)
$f(x) \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow f$ - ограничена и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\ T_{[a,b]} : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S_f}}(T) - \overline{\overline{S}}_f(T) < \varepsilon$$

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$ :

$$\exists\ I = \int\limits_a^b f(x)\ dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall T(\xi) : d(T) < \delta_\varepsilon :$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(T(\xi)) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Big| \overline{\overline{S_f}}(T) - I \Big| \leq \frac{\varepsilon}{3},\quad \Big| \underline{\underline{S_f}}(T) - I \Big| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \ \forall T : d(T) < \delta_\varepsilon : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \tag{1}$$

из леммы 2 по аксиоме полноты:

$$\exists \ I \in \mathbb{R}, \ \forall \ T : \overline{\overline{S}}(T) \leq I \leq \underline{\underline{S}}(T) \tag{2}$$

из (1) следует, что $I$ - единственно, а также известно, что

$$\forall \ T(\xi) : \overline{\overline{S}}(T) \leq \sigma_f(T(\xi)) \leq \underline{\underline{S}}(T) \tag{3}$$

значит из (2) и (3) получаем:

$$| \ \sigma_f(T(\xi)) - I \ | < \varepsilon$$

□

## 2.3 Классы интегрируемых функций

**Теорема.** Если $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.* $f(x) \in \mathcal{C}[a, b] \Rightarrow f(x)$ - равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Пусть $T : d(T) < \delta$. Тогда:

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i_{max}}) - f(x_{i_{min}}))(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a)$$

($x_{i_{min}}$ и $x_{i_{max}}$ существуют по второй теореме Вейерштрасса) □

**Теорема.** Пусть $f(x)$ - монотонна на $[a, b]$. Тогда $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$

*Доказательство.* Докажем для неубывающей. Если $f(x) = const$, то очевидно. Пусть $d(T) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Поскольку $f(x)$ неубывает на $[a, b]$, то минимум на этом отрезке достигается в $f(a)$, а максимум в $f(b)$. Значит, при выносе $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ за скобку, сумма слагаемых вида $f(x_i) - f(x_{i-1})$ схлопнется в $f(b) - f(a)$. □

## 2.4 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

**Определение.** Пусть $A \subset \mathbb{R}$, и если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ (или конечное) таких, что

$$A \subset \bigcup_i (a_i, b_i), \ \sup_n \sum_{i=1}^{N} |b_i - a_i| < \varepsilon$$

Тогда $A$ называется множеством меры 0 по Лебегу. Обозначается $\mu(A) = 0$.

**Теорема.** (Свойства множеств с мерой 0 по Лебегу)

1. $B \subset A, \ \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$
2. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \ \mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$

*Доказательство.*

1. Очевидно
2. $\forall i \ \exists \ \{(a_{i_l}, b_{i_l})\}_{i=1}^{\infty}$ :

$$A_i \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}), \ \sum_{l=1} |b_{i_l} - a_{i_l}| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left( \bigcup_{l=1}^{\infty} (a_{i_l}, b_{i_l}) \right), \ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |b_{i_l} - a_{i_l}| \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

□

**Теорема.** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)
$f(x) \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f(x)$ ограничена и для множества $P$ точек разрыва функции $f(x)$ выполнено $\mu(P) = 0$.

*Доказательство.* Без доказательства. □

## 2.5 Свойства интеграла Римана

**Теорема 1.** (Интегрируемость на подотрезках)
Если $f(x) \in \mathcal{R}[a, b], \ [c, d] \subset [a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[c, d]$.

*Доказательство.* Так как $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $\forall \ T_{[a,b]}(\xi) : \sigma_f(T_{[a,b]}(\xi)) \to I$. Значит если $\{c, d\} \in T_{[a,b]}$, то $\sigma_f(T_{[a,b] \cup \{c,d\}}(\xi))$ :

$$\varepsilon > \underline{\underline{S}}_{[a,b] \cup \{c,d\}} - \overline{\overline{S}}_{[a,b] \cup \{c,d\}} = \sum_{k=1}^{i} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^{j} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=i+1}^{j} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \underline{\underline{S}}_{[c,d]} - \overline{\overline{S}}_{[c,d]}$$

$\square$

**Теорема 2.** (Аддитивность)
Если $f(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ c \in [a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

*Доказательство.* Пусть $c \in T_{[a,b]}(\xi)$. Тогда

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) = \sigma_f(T_{[a,c]}) + \sigma_f(T_{[c,b]})$$

$$\sigma_f(T_{[a,c]}) \to \int\limits_a^c f(x)\ dx,\ \sigma_f(T_{[c,b]}) \to \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

а также

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

Теперь пусть $c \notin T_{[a,b]}$. Рассмотрим $T'_{[a,b]\cup c} = T_{[a,b]} \cup \{c\}$

$$\sigma_f(T_{[a,b]}) - \sigma_f(T'_{[a,b]\cup c}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - f(\xi'_j)(c - x_{j-1}) - f(\xi''_j)(x_j - c) \to 0$$

$\square$

**Замечание.** Если $f(x) \in \mathcal{R}[a,c],\ b < c$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$$

**Теорема 3.** (Линейность)
Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \cdot \int\limits_a^b f(x)\ dx + \beta \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

*Доказательство.*

$$\sigma_{\alpha f(x)+\beta g(x)}(T) = \alpha\sigma_f(T) + \beta\sigma_g(T)$$

$\square$

**Теорема 4.** Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ f(x) \geq 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

*Доказательство.*

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \sigma_f(T) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

□

**Следствие.** Если $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

**Теорема 5.** Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ f(x) \geq 0,\ \exists\ c \in [a,b]$, что $f(x)$ непрерывна в точке $c$ и $f(c) > 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx > 0$$

*Доказательство.* По теореме об отделимости
$\exists\ \delta > 0 : f(x) > \frac{f(c)}{2}$ в $(c-\delta, c+\delta)$ :

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx \geq \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\ dx > \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\ dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta = \delta f(c) > 0$$

□

**Теорема 6.** $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

*Доказательство.* Пусть

$$M_1 = \sup_{[a,b]} |f(x)|,\ M_2 = \sup_{[a,b]} |g(x)|$$

Ограничим значение $\underline{\underline{S}}_{f\cdot g} - \overline{\overline{S}}_{f\cdot g}$, ограничив разность точных граней на одном отрезке разбиения: (далее супремум рассматривается по всем $x', x'' \in [x_i, x_{i-1}]$)

$$\begin{aligned}
M_i(f(x)g(x)) - m_i(f(x)g(x)) &= \sup(f(x')g(x') - f(x'')g(x'')) = \\
&= \sup(f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')) = \\
&= \sup(f(x')(g(x') - g(x'')) + g(x'')(f(x') - f(x''))) \leq \\
&\leq \sup|f(x)| \cdot \sup(g(x') - g(x'')) + \sup|g(x)| \cdot \sup(f(x') - f(x'')) \leq \\
&\leq M_1(M_{ig} - m_{ig}) + M_2(M_{if} - m_{if})
\end{aligned}$$

Отсюда, домножив неравенства на длины соответствующих отрезков и сложив, получим

$$\underline{\underline{S}}_{f\cdot g} - \overline{\overline{S}}_{f\cdot g} \leq M_1(\underline{\underline{S}}_g - \overline{\overline{S}}_g) + M_2(\underline{\underline{S}}_f - \overline{\overline{S}}_f)$$

Отсюда из интегрируемости $f$ и $g$ и критерия Дарбу $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. □

**Теорема 7.** $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) \geq \delta > 0$. Тогда $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{R}[a,b]$

*Доказательство.* $\forall x', x'' \in [a,b]$:

$$\left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right| = \left| \frac{f(x'') - f(x')}{f(x')f(x'')} \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot \left| f(x'') - f(x') \right|$$

Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему (*на всякий случай приведём аналогичную выкладку, необходимую для доказательства*)

$$M_i(\frac{1}{f(x)}) - m_i(\frac{1}{f(x)}) = \sup(\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2} \sup |f(x'') - f(x')| = \frac{1}{\delta^2}(M_{if} - m_{if})$$

□

**Следствие.** Из пунктов 6 и 7 следует интегрируемость дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$.

**Теорема 8.** $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда $|f(x)| \in \mathcal{R}[a,b]$

*Доказательство.* $\forall x', x'' \in [a,b]$:

$$\big|\, |f(x')| - |f(x'')| \,\big| \leq |f(x') - f(x'')|$$

Далее совпадает с предыдущим доказательством. □

**Замечание.** Обратное утверждение неверно:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q} \subset [0,1] \\ -1, \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow |f(x)| \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$.

**Теорема 9.** $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\ dx$$

*Доказательство.*

$$|\sigma_f| \leq \sigma_{|f|}$$

$\square$

**Замечание.**

$$\int\limits_a^b |f(x)|\ dx \leq \sup_{[a,b]} |f(x)| \cdot \int\limits_a^b 1\ dx$$

## 2.6 Первая теорема о среднем

**Теорема.** (Первая теорема о среднем)
Пусть $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ g(x) \geq 0,\ M = \sup f(x),\ m = \inf f(x)$. Тогда $\exists\ \mu \in [m, M]$:

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = \mu \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

*Доказательство.*

$$m \cdot \sigma_g(T) \leq \sigma_{f \cdot g}(T) \leq M \cdot \sigma_g(T)$$

Тогда

$$m \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx \leq \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx \leq M \cdot \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

Рассмотрим случаи:

1.
$$\int\limits_a^b g(x)\ dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx = 0$$

   В этом случае равенство верно для любого $\mu$.

2.
$$\int\limits_a^b g(x)\ dx \neq 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\ dx}{\int\limits_a^b g(x)\ dx} \leq M$$

   Значит, подойдет $\mu$, равное значению этой дроби

$\square$

## 2.7 Интеграл с переменным верхним пределом

**Определение.** Интегралом с переменным верхним пределом называется интеграл вида:

$$\int\limits_a^x f(t)\ dt$$

**Теорема.** Пусть $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

непрерывна на $[a,b]$.

*Доказательство.* $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\Delta x \to 0:$

$$|\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\ dt \right| \leq M_{f([a,b])} \cdot |\Delta x| \to 0$$

□

**Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f$ непрерывна в $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

имеет производную в $x_0$ и $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

*Доказательство.*

$$\left| \frac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\ dx - \frac{f(x_0)}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1\ dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))\ dx \right| \leq \sup_{[a,b]} |f(x) - f(x_0)| \cdot 1 \longrightarrow 0.$$

□

**Следствие.** Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(a,b)$. Тогда $\forall c \in (a,b)$:

$$\exists \left( \int\limits_c^x f(t)dt \right)' = f(x), \text{ то есть } \int\limits_c^x f(t)dt \text{ - первообразная } f(x)$$

*Доказательство.* Очевидно. $\square$

**Замечание.** Интервал в формулировке следствия взят для применимости теоремы к неограниченным на интервале функциям (например $\operatorname{tg}(x)$ на $[0, \pi]$), для которых тем не менее применима предыдущая теорема по аналогичным рассуждениям.

## 2.8 Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема.** (Формула Ньютона-Лейбница)
Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a, b],\ f(x) \in \mathcal{C}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n)$.

$$\exists\ F(x) :\ F(x) \in \mathcal{D}([a, b] \setminus \{x_i\}_{i=1}^n),\ F'(x) = f(x),\ F(x) \in \mathcal{C}[a, b]$$

Тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.* Пусть сначала $f(x) \in \mathcal{C}(a, b),\ F'(x) = f(x)$ на $(a, b)$. Но интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)\ dt$$

тоже первообразная $f(x)$ на $(a, b) \Rightarrow \exists\ C$ :

$$F(x) + C = \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

$\Rightarrow F(a) + C = 0$. Тогда

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)\ dt$$

Общий случай:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\ dt = \int\limits_a^b f(t)\ dt$$

$\square$

## 2.9 Замена переменной и интегрирование по частям

**Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathcal{C}(a,b),\ \varphi(t) \in \mathcal{C}^1(\alpha,\beta),\ \varphi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$.
$\forall \alpha_0, \beta_0 \in (\alpha,\beta)$ и $a_0 = \varphi(\alpha_0),\ b_0 = \varphi(\beta_0)$. Тогда

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)\ dx = \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt$$

*Доказательство.* $f \in \mathcal{C}(a,b) \Rightarrow \exists\ F'(x) = f(x)$

$$\int\limits_{a_0}^{b_0} f(x)\ dx = F(b_0) - F(a_0)$$

Но $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, а значит

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(\beta_0)) - F(\varphi(\alpha_0))$$

$\square$

**Теорема.** (Интегрирование по частям)
Пусть $f(x),\ g(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int\limits_{a}^{b} f'(x)g(x)\ dx$$

*Доказательство.*

$$f(x) \cdot g(x)|_a^b = \int\limits_{a}^{b} (f(x) \cdot g(x))'\ dx = \int\limits_{a}^{b} f'(x)g(x)\ dx + \int\limits_{a}^{b} f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

$\square$

# 3 Спрямляемые кривые и квадрируемые фигуры

## 3.1 Кривая в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Кривой в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывное отображение:

$$\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

**Замечание.**

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

**Определение.** Рассмотрим $\bar{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Если $\exists\ t_1 \neq t_2 : \bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, то $\bar{\gamma}(t_1)$ называется точкой самопересечения. Мощность подмножеста $[a, b]$, точки которого переходят в $\bar{\gamma}(t_1)$ называется кратностью точки самопересечения. Если кривая не имеет точек самопересечения, то она называется простой.

**Определение.** Если $\bar{\gamma}(t)$ имеет единственную точку самопересечения $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$, то кривая называется простой замкнутой.

**Определение.** Множество точек $\{\bar{\gamma}(t_i)\}_{i=0}^N$ называется разбиением кривой, если $\{t_i\}_{i=0}^N$ является разбиением отрезка $[a, b]$. Обозначается $T_\gamma$.

**Определение.** $L(T_{\bar{\gamma}})$ - множество отрезков $\{[\bar{\gamma}(t_{i-1}), \bar{\gamma}(t_i)]\}_{i=1}^N$ называется вписанной в $\bar{\gamma}(t)$ ломаной, а число $|L(T_{\bar{\gamma}})|$ - длиной ломаной.

**Утверждение.** Если $T'_{\bar{\gamma}}$ - измельчение $T_{\bar{\gamma}}$, то

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| \leq |L(T'_{\bar{\gamma}})|$$

*Доказательство.* Очевидно. □

**Определение.** Если множество $\{|L(T_{\bar{\gamma}})|\}_{T_{\bar{\gamma}}}$ ограничено, то кривая $\bar{\gamma}(t)$ называется спрямляемой, а

$$\sup_{T_{\bar{\gamma}}}\{|L(T_{\bar{\gamma}})|\} = |\bar{\gamma}|$$

называется длиной кривой.

## 3.2 Спрямляемость гладкой кривой и формула ее длины

**Теорема.** Пусть

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in C^1[a, b]$$

Тогда $\bar{\gamma}(t)$ спрямляема и

$$|\bar{\gamma}| = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(t)}\ dt$$

*Доказательство.*

$$|L(T_{\bar{\gamma}})| = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2} = (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(\xi_{ij}) \cdot (t_i - t_{i-1})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2(\xi_{ij})}(t_i - t_{i-1}) \leqslant M \cdot \sqrt{n} \cdot (b - a)$$

Переход (1) по формуле Лагранжа, а последняя оценка устроена так: каждое из $x_j$ - непрерывно на кадом отрезке разбиения, значит, по второй теореме Вейерштрасса, у нее есть максимум. Возьмем $M$ - максимум из этих максимальных значений на отрезке разбиения, тогда

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j'^2} \leq M \cdot \sqrt{n}$$

остается вынести это за скобку и сумма длин отрезков разбиения схлопнется в $b - a$. $\Rightarrow \bar{\gamma}$ спрямляема.

$$\left| |L(T_{\bar\gamma})| - \sigma_{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})}(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\nu_i)}(t_i - t_{i-1}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^N \left( \left( \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\xi_{ij})} - \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(\nu_i)} \right) (t_i - t_{i-1}) \right) \right| \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |x_j^{'}(\xi_{ij}) - x_j^{'}(\nu_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot n \cdot (b-a)$$

Последняя оценка сделана с применением леммы, которая доказана чуть ниже.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \ d(T) < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| |L(T_{\bar\gamma})| - \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t) dt} \right| < 2\varepsilon n(b-a)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ L(T^*_{\bar\gamma})$, что $|L(T^*_{\bar\gamma})| > |\bar\gamma| - \varepsilon$ (свойство точной верхней грани).
Измельчаем $T^*_{\bar\gamma}$ до тех пор, пока $d(T^*_{\bar\gamma}) < \delta_\varepsilon$. □

**Лемма.**

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|$$

*Доказательство.*

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} \right| = \left| \frac{\sum\limits_{i=1}^k ((a_i - b_i)(a_i + b_i))}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^k b_i^2}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^k \left( (a_i - b_i) \cdot \frac{(a_i + b_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^k b_i^2}} \right) \right| \leq (*)$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^n 1 \cdot (a_i - b_i) \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|$$

$$(*): \quad a_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2},\ b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} \ \Rightarrow \ \frac{(a_i+b_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2}} \le 1$$

□

## 3.3 Квадрируемые фигуры

Далее работаем в $\mathbb{R}^2$.

**Определение.** Множество $\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\} \subset \mathbb{R}^2$ называется $\varepsilon$-окрестностью точки $(x_0, y_0)$.

**Определение.** Множество $A \in \mathbb{R}^2$ называется ограниченным, если $\exists R > 0 :$ $A \subset \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$.

**Определение.** Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется фигурой.

**Определение.** Пусть $A = \{A_\alpha\}_\alpha$. Функция $\mu : A \to \mathbb{R}$ называется площадью, если

1. $\mu(A) \ge 0$
2. Если $\exists\ \mu(A_1),\ \mu(A_2)$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $\exists\ \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.
3. Если $\exists\ \mu(A_1)$ и $A_2$ конгруэнтна $A_1$, то $\exists\ \mu(A_2) = \mu(A_1)$.
4. Если $\exists\ \mu(A_1),\ \mu(A_2)$ и $A_1 \subset A_2$, то $\mu(A_1) \le \mu(A_2)$.
5. Площадь прямоугольника со сторонами $a$ и $b$ равна $ab$.

**Замечание.** Существует площадь отрезка и площадь точки, и они равны нулю. По определению считаем, что $\mu(\varnothing) = 0$

**Утверждение.** Существует площадь треугольника, равная половине произведения основания на высоту.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный треугольник. Проведем в нем высоту, тогда он разобьется на два прямоугольных треугольника, которые можно достроить до прямоугольников. Тогда площадь искомого треугольника равна сумме половин площадей достроенных прямоугольников. □

**Определение.** Фигура, полученная конечным объединением непересекающихся треугольников, называется многоугольником.

**Теорема.** Площадь многоугольной фигуры не зависит от разбиения на треугольники.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Определение.** Для любой фигуры $A$, замкнутая многоугольная фигура $P \supset A$ называется описанной. Открытая многоугольная фигура $Q \subset A$ называется вписанной.

**Замечание.** Далее, если фигура обозначена $P$, то считаем ее замкнутой описанной, а если $Q$ то открытой вписанной.

**Замечание.** Для любой фигуры существует описанная (поскольку любая фигура ограничена) и вписанная (пустое множество).

**Определение.** Число $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset P} \mu(P)$ называется верхней площадью $A$.
Число $\mu_*(A) = \sup\limits_{Q \subset A} \mu(Q)$ называется нижней площадью $A$.

**Определение.** Если $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, то $\exists\ \mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$. Такая фигура $A$ называется квадрируемой.

## 3.4 Первый и второй критерии квадрируемости

**Теорема.** (Первый критерий квадрируемости)
Фигура $A$ квадрируема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon,\ Q_\varepsilon,\ \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$ : $A$ - квадрируема $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$, но

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ Q_\varepsilon : \mu_*(A) - \mu(Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon,\ Q_\varepsilon,\ \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$$

□

**Теорема.** (Второй критерий квадрируемости)
Фигура $A$ квадрируема $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0$.

*Доказательство.*

$(\Rightarrow):$ $A$ - квадрируема $\Rightarrow$ по первому критерию квадрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P_\varepsilon, \ Q_\varepsilon : \mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\partial A \subset P \setminus Q, \ Q$ - внутренние точки $A, \ \mathbb{R}^2 \setminus P$ - внешние точки $A$.
В частности, $\partial A \subset P_\varepsilon \setminus Q_\varepsilon \Rightarrow \mu^*(\partial A) < \varepsilon \Rightarrow \mu(\partial A) = 0$.

$(\Leftarrow):$ $\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P_\varepsilon \supset \partial A, \ \mu(P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \exists \ h > 0$,
$\partial A \subset \cup$(кв. сетка с шагом h) $= A_2 : \mu(A_2) < 72\varepsilon$ (по лемме ниже).
$A_1 = \cup$(квадраты сетки, целиком состоящие из внутренних точек A)
$\Rightarrow A \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow A_1 \cup A_2 = P, \ A_1 = Q, \ \mu(P) - \mu(Q) = \mu(A_2) < 72\varepsilon$

□

**Лемма.** Если $B$ покрывается $P$ с $\mu(P) < \varepsilon$, то существует $h > 0$ такое, что $B \subset \cup$(кв. сетка с шагом h), $\mu(\cup$(кв. сетка с шагом h)$) < 72\varepsilon$.

*Доказательство.* $P$ - фигура $\Rightarrow P$ - это объединение треугольников $\Rightarrow P$ - объединение прямоугольных треугольников с $\mu < \varepsilon \Rightarrow P$ лежит в объединении прямоугольников с $\mu < 2\varepsilon \Rightarrow P$ лежит в объединении квадратов с $\mu < 4\varepsilon \Rightarrow P$ лежит в объединении квадратов со сторонами, параллельными осям координат с $\mu < 8\varepsilon \Rightarrow$ возьмем $h$, равное стороне наименьшего квадрата, и построим сетку с шагом $h \Rightarrow \mu(\cup$(кв. сетка с шагом h)$) < 72\varepsilon$, поскольку в самом худшем случае, когда существует квадрат чуть больше самого маленького, понадобится 9 квадратов чтобы его накрыть, при этом площадь увеличится почти в 9 раз. □

## 3.5 Квадрируемость простой спрямляемой кривой и криволинейной трапеции

**Теорема.** Если $\bar{\gamma}(t)$ - простая спрямляемая фигура, то $\mu(\bar{\gamma}(t)) = 0$.

*Доказательство.* Делим $\bar{\gamma}(t)$ на $n$ одинаковых по длине кусков. $\{\bar{\gamma}(t_k)\}_{k=1}^{n+1}$. $\bar{\gamma}(t) \subset \cup$(квадратов с центрами в $\bar{\gamma}(t_k)$ и стороной $|\frac{2\bar{\gamma}(t)|}{n}|$).

$$\mu(\cup(\text{кв...})) < \frac{4|\bar{\gamma}(t)|^2}{n^2} \cdot (n+1) \to 0$$

□

**Теорема.** Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a,b],\ f(x) \geq 0$, тогда фигура $A:$

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

квадрируема и

$$\mu(A) = \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

*Доказательство.*

$$f(x) \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall T : d(T) < \delta : \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$$

Значит выполнено: $\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon) < \varepsilon$ и $A$ - квадрируема по первому критерию квадрируемости. При этом

$$\mu^*(A) = \mu_*(a) = \mu(A) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$$

$\square$