Математический анализ-1

Лектор: Подольский Владимир Евгеньевич

13 октября 2024 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа tg: @fourkenz

Содержание

1 Элементы теории множеств

1.1 Условности и обозначения

Определение. Кванторами будем назать символы, заменяющие слова в выражениях.

Замечание. Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- $\forall$ - квантор всеобщности
- $\exists$ - квантор существования
- ! - квантор единственности
- Запись $A \Rightarrow B$ обозначает, что из высказывания A, следует высказывание B.
- Запись $A \Leftrightarrow B$ обозначает, что высказывание A равносильно высказыванию B.
- Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A, отрицанием такой записи будет $a \notin A$
- Если x - объект, а P - свойство, то запись $\{x : P(x)\}$ означает класс всех объектов обладающих свойством P.

Определение. Множество не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Определение. Множество A' является подмножеством множества A, если $\forall a : a \in A' \Rightarrow a \in A$. Запись $A' \subset A$ обозначает, что A' является подмножеством A.

Определение. Для любого множества A выполнено:

1. $\varnothing \subset A$.
2. $A \subset A$.

Определение. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется собственным подмножеством множества B.

1.2 Операции над множествами

Определение. Множество $C = A \cup B$ называется объединением множеств A и B, если $\forall a : (a \in A \Rightarrow a \in C)$ и $\forall b : (b \in B \Rightarrow b \in C)$, а также $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ или $c \in B)$.

Определение. Множество $C = A \cap B$ называется пересечением множеств A и B, если $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ и $c \in B)$, а также $\forall c : (c \in A$ и $c \in B) \Rightarrow c \in C$.

Определение. Множество $C = A \setminus B$ называется разностью множеств A и B, если $\forall c : (c \in A$ и $c \notin B) \Rightarrow c \in C$, а также $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A$ и $c \notin B)$

Утверждение. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство. $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A$ или $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ или $(a \in B$ и $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ или $a \in B)$ и $(a \in A$ или $a \in C)$. $\square$

Утверждение. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство. $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A$ и $a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \in B$ или $a \in C) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \in B)$ или $(a \in A$ и $a \in C)$. $\square$

1.3 Декартово произведение множеств

Определение. Множество A называется одноэлементным, если $\exists\, a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\} = \varnothing$.

Определение. Множество A называется двуэлементным, если $\exists\, a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\}$ - одноэлементное.

Определение. Пусть $x \in X, y \in Y$. Упорядоченной парой называется двуэлементное множество $\{x, \{x, y\}\}$, упорядоченную пару обозначают (x, y).

Определение. Множество всех упорядоченных пар (x, y) называется декартовым произведением множеств X и Y, где $x \in X, y \in Y$. Декартово произведение обозначают $X \times Y$.

1.4 Отображения

Определение. Пусть X, Y - множества. Подмножество $f \subset X \times Y$ такое, что $\forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f : y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ называется отображением из X в Y, и обозначается $f : X \to Y$.

Замечание. Запись $(x, y) \in f$ часто заменяют на $y = f(x)$.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Множество $\{x : \exists\ (x, y) \in f\} = D_f$ называется областью определения функции f.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Множество $\{y : \exists\ (x, y) \in f\} = R_f$ называется областью значений функции f.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. f - инъекция $\Leftrightarrow \forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f :$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. f - сюръекция $\Leftrightarrow Y = R_f$

Замечание. Обычно используют определение f - сюръекция $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ $\exists\ x \in X : y = f(x)$.

Определение. f - биекция $\Leftrightarrow$ f - инъекция и f - сюръекция.

Определение. Пусть $f : X \to Y,\ X_1 \subset X$. Множество $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} =$ $f\big|_{X_1}$ называется ограничением f на X_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y,\ X_1 \subset X$. Множество $f(X_1) =$ $\{y \in Y : \exists\ x \in X_1 : (x, y) \in f\}$ называют образом множества X_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y,\ Y_1 \subset Y$. Множество $f^{-1}(Y_1) =$ $\{x \in X : \exists\ y \in Y_1 : (x, y) \in f\}$ называют полным прообразом множества Y_1.

Определение. Пусть $f : X \to Y$. Если $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$ - одноэлементное множество, то подмножество $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$ является отображением и называется обратным отображением к f. Если у отображения f существует обратное отображение f^{-1}, то оно называется обратимым.

Утверждение. f - обратимое $\Leftrightarrow$ f - биекция.

Замечание. Иногда $f : X \to Y$ записывают в виде y_x и называют индексацией y элементами x.

1.5 Операции над множествами (продолжение)

Утверждение. $\bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcup\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ или $\ldots$ или $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ и $\ldots$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$. $\square$

Утверждение. $\bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcap\limits_{\alpha}(A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_1})$ и $\ldots$ и $(a \in A$ и $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A$ и $(a \notin A_{\alpha_1}$ или $\ldots$ или $a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)$. $\square$

2 Действительные числа

2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

Определение. (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве $\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!$ элемент называемый следующим и обозначающийся как $S(n)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ не более одного элемента $\mathbb{N}$, для которого n - следующий.

3. $\exists!$ элемент $\mathbb{N}$ не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается 1 и называется единицей.

4. (Аксиома индукции) Пусть $M \subset \mathbb{N}$, такое, что $1 \in M$ и $\forall m \in M$: $S(m) \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

Множество удовлетворяющее этим аксиомам называется множеством натуральных чисел и обозначается $\mathbb{N}$.

Определение. Рассмотрим множество X. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ биекция $\varphi : X \to \{1, \dots n\}$, то X называется n-элементным, или говорят, что количество элементов в X равно n. Тот факт что множество X - n-элементное обозначается как $|X| = n$ или $cardX = n$.

Замечание. По определению считаем, что $card(\varnothing) = 0$.

Определение. Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множетсва называются бесконечными.

2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

Определение. $R \subset X \times Y$ называется отношением между элементами X и Y. Обозначают xRy, если $(x, y) \in R$.

Определение. Отношение R называется отношением порядка, если $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ выполнено:

1. xRy или yRx.

2. (xRy и yRx) $\Rightarrow x = y$.

3. $(xRy$ и $yRz) \Rightarrow xRz$.

Такое отношение обозначают $\leq$.

Теорема. $\exists!$ отношение порядка на $\mathbb{N}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$. (Можно использовать на экзамене без доказательства)

Теорема. (Принцип наименьшего элемента)
$M \subset \mathbb{N}, M \neq \varnothing$ имеет наименьшей элемент, т.е. $\exists n_{min} \in M, \forall n \in M : n_{min} \leq n$.

Доказательство. Предположим, что в M нет минимального элемента.
База: если $1 \in M$, то $n_{min} = 1 \Rightarrow 1 \notin M \Rightarrow 1 \in \mathbb{N} \setminus M$.
Шаг: $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N} \setminus M$, тогда по аксиоме индукции $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \varnothing$ - противоречие. $\square$

2.3 Арифметические операции

Определение. Рассмотрим $A, B, card(A) = n, card(B) = k, n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда число $card(A \cup B)$ называется суммой n и k и обозначается $card(A \cup B) = n + k$.

Замечание. Естественно выполняется $n + k = k + n$ (коммутативность) и $(n + k) + m = n + (k + m)$ (ассоциативность).

Замечание. $n + 0 = 0 + n = n$, т.к. $cardA = card(A \cup \varnothing)$.

Замечание. $A \leftrightarrow \{1, \dots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \dots, k\}$. Возьмем
$card(A \cup B) = \{1, \dots, n\} \cup \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots)}_{k}\}$,
(где $\{1, \dots, k\} \leftrightarrow \{\underbrace{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots)}_{k}\}$)
Из тех же сообжажений получаем, что $S(n) = n + 1$.

Определение. $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} n = nk$ называется произведением n на k.

Замечание. $nk = \underbrace{(n + n + \dots + n)}_{k}$.

Замечание. Выполнены:

- $nk = kn$ (коммутативность)
- $n(km) = (nk)m$ (ассоциативность)
- $k(n + m) = kn + km$ (дистрибутивность)

- Если $k \leq n$, то $k+m \leq n+m$ и если $k \leq m$, то $kn \leq mn$

Определение. Если $n+k=m$, то $n=m-k$ называется разностью m и k, $k=m-n$ называется разностью m и n.

Замечание. $m-0=m$, $m+0=m$, $m-m=0$.

Определение. $nk=m, \frac{m}{n}=k, \frac{m}{k}=n$.

2.4 Целые числа

Определение. Введем набор символов $-\mathbb{N}=\{\ldots,-2,-1\}$. Множество символов $-\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$ называются целыми числами и обозначаются $\mathbb{Z}$.

Замечание. Принимаем выполнеными следующие свойства:

1. $k+(-n)=\begin{cases} k-n, \text{если } k \geq n, \\ -(n-k), \text{если } k<n. \end{cases}$.
   $(-k)+(-n)=-(k+n)$
2. $k \cdot 0=(-k) \cdot 0=0$,
   $(-k) \cdot n=(-kn)$,
   $(-k)(-n)=kn$.
3. $(\pm k)((\pm n)+(\pm m))=(\pm k)(\pm n)+(\pm k)(\pm m)$.
4. $\forall k:(-k) \leq 0$,
   $(-k) \leq(-n)$, если $n \leq k$.
5. $\forall(\pm k),(\pm n),(\pm m) \in \mathbb{Z}$, если $(\pm k) \leq(\pm n)$, то $(\pm k)+(\pm m) \leq(\pm n)+(\pm m)$.
6. $\forall(\pm n),(\pm k) \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, если $(\pm n) \leq(\pm k)$, то $(\pm n) m \leq(\pm k) m$.

Далее пишем $-k$ вместо $(-k)$.
$\forall k, n \in \mathbb{Z}\ \exists(k-n)=k+(-n)$.

2.5 Рациональные числа

Определение. Множество $\mathbb{Q}=(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

а также введено отношение порядка:
$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$$

Свойства операций ($a, b, c \in \mathbb{Q}$):

(1) $a + b = b + a$

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(3) $\exists!\ 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$

(4) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$

(5) $ab = ba$

(6) $a(bc) = (ab)c$

(7) $\exists!\ 1 \in \mathbb{Q}\ \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(8) $\forall a \neq 0\ \exists!\ a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

(9) $a(b + c) = ab + ac$

(10) $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ a \leq b$ или $b \leq a$

(11) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$

(12) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(13) $\forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(14) $\forall c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

Определение. Множество X с операциями $(\cdot, +)$ и отношением порядка $\leq$ называется упорядоченным полем.

Замечание. $\mathbb{Q}$ - упорядоченное поле.

Определение. Упорядоченное поле X называется архимедовым, если
(15) $\forall a \in X : \exists\ n \in \mathbb{N} : a \leq n$.

Замечание. $\mathbb{Q}$ - архимедово поле.

Замечание. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$.

Замечание. $\forall m \in \mathbb{Z}$ число $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ можно отождествить с m.

2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

Определение. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

Определение. (Аксиома полноты)
(16) $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b \ \exists \ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$.

Пример. Аксиома полноты не выполняется в $\mathbb{Q}$.
$A = \{a \leq 0$ или $a > 0 : a^2 < 2\}$, $B = \{b > a : b^2 > 2\}$,
но $\nexists \frac{m}{n}, \frac{m^2}{n^2} = 2$

2.8 Модели действительных чисел

2.8.1 Модель бесконечных десятичных дробей

Определение. Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \to X$ называется последовательностью элементов X.

Определение. Выражение вида $\pm a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечной десятичной дробью, если $a_0 \in \mathbb{N}$ или $a_0 = 0$ и $\forall i \in \mathbb{N}$ $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Определение. Введем отношение порядка $\leq$ на множестве всех бесконечных дробей следующим образом:

1. Если $a_0 \leq 0$, $b_0 > 0$, то $a \leq b$.

2. Если $a_0, b_0 \geq 0$, то $a \leq b$

   - если $a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0$, $a_1 < b_1$ или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, или ... или $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n < b_n \ldots$
   - если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n \neq 9, b_n = a_n + 1$. $a_{n+k} = 9$, $b_{n+k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, т.е $a = \overline{a_0 a_1 ... a_n (9)}$, а $b = \overline{b_0 b_1 ... b_n (0)}$.
     (в числе a начиная с a_{n+1} все a_i равны 9, а в числе b начиная с b_{n+1} все b_i равны 0), то $a = b$.

3. Если $a_0, b_0 < 0$, то $a < b$, если $-b < -a$ (случай 3 сведен к случаю 2)

Теорема. Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка ($\leq$) удовлетворяет аксиоме полноты.

Доказательство. Пусть $A, B \subset \{$множество бесконечных десятичных дробей$\}$ и $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$.

1. $a < 0, b \geq 0$, тогда $c = 0$.

2. $a > 0, b > 0$
   Пусть
   $\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \dots \in B\}$,
   $\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0}\,\overline{b_1} b_2 \dots \in B\}$,
   $\vdots$
   Возьмем $\overline{b} = \overline{b_0 b_1 b_2 \dots b_n \dots} \in B$, тогда
   $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \overline{b} \leq b$.

3. $a < 0, b < 0$ строим число по аналогии с пунктом 2.

$\square$

2.8.2 Сечения $\mathbb{Q}$

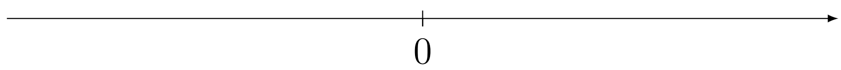
Определение. (Дедекиндовы сечения)
Пусть $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{Q}$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B : a \leq b$ и в B не существует минимального элемента, тогда (A, B) - пара сечений $\mathbb{Q}$.

Теорема. На множестве всех пар сечений $\{(A, B)\}$ можно ввести операции $(+), (\cdot)$ и отношение $(\leq)$, так что будут выполняться $(1) - (16)$.

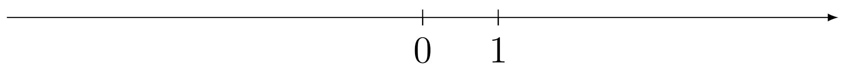
Доказательство. Без доказательства. $\square$

2.8.3 Геометрическая модель числовой прямой

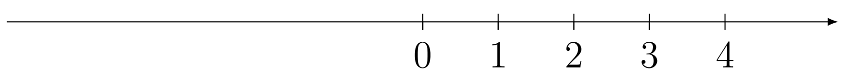
Выбираем точку, называем ее 0



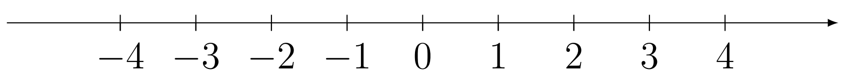
затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



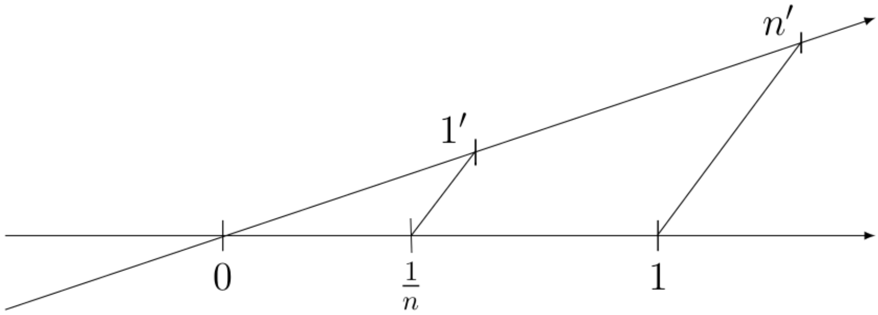
затем вводим сложение и получаем $2, 3, 4$, и т.д. (натуральный ряд)



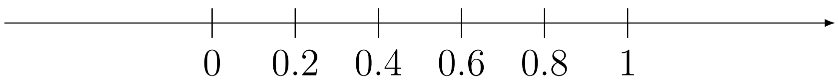
затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



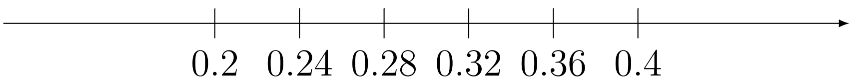
Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее $1'$ и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через n' и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через $1'$ проходит через $\frac{1}{n}$ (по теореме Фаллеса)



таким образом складывая m раз $\frac{1}{n}$, получим любое рациональное число $\frac{m}{n}$.
Построим бесконечную десятичную дробь, например $0,37152\ldots$.
Разобьем отрезок:



$0,37152\ldots$ находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:



$0,37152\ldots$ находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д. Получаем последовательность вложеных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.
Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняеются (1)-(16).

2.9 Принципы полноты

2.9.1 Верхние и нижние грани множества

Определение.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется максимальным элементом множества A $(\max A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \geq a'$ и $a \in A$.
- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется минимальным элементом множества A $(\min A \subset \mathbb{R}), A \neq \varnothing$, если $\forall a' \in A : a \leq a'$ и $a \in A$.

Определение.

- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \leq m$.
- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, если $\forall a \in A : a \geq m$.

Определение.

- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченым сверху, если у A существует верхняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ называется ограниченым снизу, если у A существует нижняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченым, если A ограничено и сверху и снизу.

Определение.

- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, B - множество верхних граней A. Элемент $c = \min B$ называется точной верхней гранью A и обозначается $\sup A$.
- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, B - множество нижних граней A. Элемент $c = \max B$ называется точной нижней гранью A и обозначается $\inf A$.

2.9.2 Принцип полноты Вейерштрасса

Теорема. (Принцип полноты Вейерштрасса)
Для каждого ограниченого сверху или снизу множества A существует $\sup A$ или $\inf A$ соответственно.

Доказательство. Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)
A - ограничено сверху, B - множество верхних граней. Значит $\forall a \in A$ и $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$ по аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$. $\square$

Определение. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ рассмотрим следующие множетсва:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - отрезок
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

Определение. $\forall a \in \mathbb{R}$ функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

Определение. Для любого промежутка с концами $a, b \in \mathbb{R}$ длиной называется число $|b - a|$.

Определение. Рассмотрим последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ выполнено $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

2.9.3 Принцип вложеных отрезков (принцип полноты Кантора)

Теорема. (Принцип вложеных отрезков)
Пусть последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$. Если $|b_n - a_n| \to 0$ то c - единственная.

Доказательство. $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$, т.к

- если $n < m$, то $a_n \leq a_m \leq b_m$.
- если $n > m$, то $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Значит для $\forall m, n \in \mathbb{N}$: Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \ \forall n, m \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n, \ \forall n$.
Пусть $|b_n - a_n| \to 0$, предположим, что $\exists \ c_1$ и $c_2 : c_1 \neq c_2$ - различные общие точки, значит $|c_2 - c_1| > 0$. Получаем, что $0 < |c_2 - c_1| < |b_n - a_n|, \ \forall n$, значит $|c_2 - c_1| \to 0$ получаем противоречие. $\square$

2.10 Неравенство Бернулли и Бином Ньютона

Теорема. (Неравенство Бернулли)
Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n, x_k \in \mathbb{R}\, \forall k : x_k > 0$ или $x_k \in (-1, 0)$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1} x_k$$

Доказательство. Индукция по n. База: $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$. Пусть при n утверждение верно.

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + x_n) \geq (1 + x_{n+1})(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + (\sum_{k=1}^{n} x_k) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_n$$

$\square$

Определение. Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ называется биномиальным коэффициентом и обозначается C_n^k.

Замечание. По определнию считается, что $0! = 1$.

Теорема. (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Доказательство. Индукция по n. База: для $n = 1$ верно. Пусть верно для n. Распишем выражение для $n + 1$:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m+1} =$$

$$= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^n b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1}$$

$\square$

2.11 Отношение эквивалентности. Равномощные множества

Определение. Отношение $\sim$ называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1. $x \sim x$ (Рефлексивность)
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Симметричность)
3. $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Транзитивность)

Определение. Множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

Теорема. Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Пусть A, B, C - множества, $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.
2. Для любой биекции $\varphi : A \to B$ существует $\varphi^{-1} : B \to A$.
3. $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$, то $\varphi \circ \psi : A \to C$.

□

Теорема. Конечные множества равномощны $\Leftrightarrow$ они содержат одинаковое количество элементов.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\varphi : A \to \{1, \dots, n\},\ \psi : B \to \{1, \dots, n\}$
$\Rightarrow \exists\ \psi^{-1} : \{1, \dots, n\} \to B$. Тогда $\varphi \circ \psi^{-1} : A \to B$ - искомая биекция.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi : A \to B$ - биекция. Если $A = \varnothing$, то $B = \varnothing$. Докажем индукцией по количеству элементов. Пусть $A = \{a\}$, тогда $\exists\ b \in B : \varphi(a) = b$. Пусть утверждение верно для случая когда A - n-элементное множество. Теперь если A - $n+1$-элементное, то $\exists\ \varphi : A \to \{1, 2, ..., n+1\}$ - биекция. Значит $\exists\ a \in A$, что $\varphi(a) = n + 1$. Тогда $A \setminus \{a\}$ - n-элементное. Также $\exists\, b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$ - n-элементное $\Rightarrow B$ - $n+1$-элементное.

□

Определение. Множества равномощные $\mathbb{N}$ называются счетными.

Теорема. Объединение не более чем счетного числа счетных множеств счетно.

Доказательство. Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & & & & & \vdots
\end{array}$$

$\square$

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

Теорема. Объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Примеры.

1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$
2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами).

2.12 Теорема Кантора и аксиома выбора

Теорема. (Теорема Кантора)
Множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчетно.

Доказательство. Предположим, что оно счетно. Тогда все последовательности нулей и единиц можно перенумеровать. Составим бесконечную вниз таблицу, строками которой будут наши последовательности:

$$\begin{array}{l}
a_1 = \underline{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots \\
a_2 = a_{21}\ \underline{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ \ldots \\
a_3 = a_{31}\ a_{32}\ \underline{a_{33}}\ a_{34}\ \ldots \\
a_4 = a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \underline{a_{44}}\ \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

a_{ij} - j-й член i-й последовательности. Рассмотрим последовательность b у которой $b_i = 1 - a_{ii}$. Такая последовательность отличается от каждой i-й последовательности на i-й позиции, значит она не была посчитана, получаем противоречие. □

Утверждение.

1. Алгебраических чисел счетно.
2. Действительных чисел несчетно.

Определение. Действительные числа не являющееся алгебраическими называются трансцендентными.

Определение. Множества равномощные множеству последовательностей нулей и единиц называются множествами мощности континуума.

Теорема. У любого множетсва мощность множества всех подмножеств строго больше чем мощность самого множества.

Определение. Для множеств A и B обозначим $|A| \leq |B|$, если $\exists\ B' \subset B$ для которого $\exists\ \varphi : A \to B'$ - биекция.

Теорема. Сравнение мощностей множеств $|A| \leq |B|$ является отношением порядка.

1. $\forall A, B : |A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
3. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Доказательство. Без доказательства. □

Аксиома. (Аксиома выбора)
Если существует множетсво неких множеств, то из каждоко множества можно выбрать по одному элементу и составить из них другое множество.

Утверждение. Множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Доказательство. Каждому $A \subset \mathbb{N}$ ставим в соответствие характеристическую последовательность, которая принимает значения: единицу, если элемент лежит в подмножестве и ноль иначе. □

Теорема. У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.

Доказательство. Выбираем элемент и сразу присваиваем ему номер, продолжая это действие, построим счетное множество. □

Теорема. Пусть A - бесконечное, B - не более чем счетное $\Rightarrow A \sim A \cup B$

Доказательство. Пусть $A' \subset A$. Тогда $A \sim (A \setminus A') \cup A' \sim (A \setminus A') \cup (A' \cup B) \sim$
$\sim (A \cup B)$. □

3 Топология $\mathbb{R}$

Определение. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$ отрезок $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки x.

Определение. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$ отрезок $\mathring{B}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$ называется проколотой ε-окрестностью точки x.

Определение. Точка $x \in A \subset \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества A, если $\exists\ B_\varepsilon(x) \subset A$. Множество всех внутренних точек $x \in A$ называется внутренностью множетсва A.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R} \setminus A$ называется внешней точкой для множества $A \subset \mathbb{R}$, если x - внутренняя точка для $\mathbb{R} \setminus A$. Множество всех внешних точек $x \in A$ называется внешностью множетсва A.

Определение. Точка называется граничной для множества $A \subset \mathbb{R}$, если она не является ни внешней ни внутренней для A. Множество всех граничных точек называется границей и обозначается ∂A.

Определение. (Множество Кантора)
Разбиваем отрезок $[0, 1]$ на три части и выбрасываем середину, затем каждый из получившихся отрезков разбиваем на три части и выбрасываем середину, и т.д.

- Суммарная длина всех выброшеных интервалов равна 1.
- Концов отрезков счетное множество.
- Общее количество точек имеет мощность континуума.

Определение. Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Замечание. Любой интервал - открытое множество

Определение. Множество называется $A \subset \mathbb{R}$ замкнутым, если все его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

Замечание. Отрезок - и не открытое и не замкнутое множество.

Замечание. По определению считаем, что $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ и открыты и замкнуты одновременно.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности точки x бесконечно много точек A, т.е $\forall \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \varnothing$. Множество всех предельных точек A обозначается A'

Определение. Точка $x \in A$ называется изолированной точкой $A \subset \mathbb{R}$, если $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \varnothing$.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется точкой прикосновения $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$.

Утверждение. Точки прикосновения множества A являются либо внутренними, либо граничными.

Доказательство. Точка прикосновения не может являются внешней точкой $\Rightarrow$ она либо внутренняя либо граничная. $\square$

Утверждение. Точки прикосновения являются либо предельными, либо изолированными.

Доказательство. э Следует из определения. $\square$

Теорема. (Критерий замкнутости множества)
Следующие условия эквивалетны:

(0) $A \subset \mathbb{R}$ - замкнуто.

(1) $\partial A \subset A$,

(2) Все точки прикосновения содержатся в A,

(3) $A' \subset A$.

Доказательство. Докажем по цепочке $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (0)$.

1. $(0) \Rightarrow (1) : A$ - замкнуто $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто $\Rightarrow \partial A \not\subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \partial A \subset A$.

2. (1) $\Rightarrow$ (2) : Все точки прикосновения являются граничными или внутренними. Поскольку $\partial A \subset A$ то все точки прикосновения содержатся в A.

3. (2) $\Rightarrow$ (3) : Если x - предельная, то $x \in A$ или x - точка прикосновения. Поскольку все точки прикосновения содержатся в A, то и все предельные точки содержатся в A.

4. (3) $\Rightarrow$ (0) : $A' \subset A \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A : x \notin A' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A \; \exists \; \mathring{B}_\varepsilon : \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing \Rightarrow x$ - внешняя точка A, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$ - открыто $\Rightarrow A$ - замкнуто.

$\square$

Теорема. Пусть A - множество индексов. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - открытые, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - замкнутые. Тогда:

1. $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открыто.

2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ - открыто.

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ - замкнуто.

4. $\bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ - замкнуто.

Доказательство.

1. Пусть $u \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \Rightarrow \exists \; \alpha_0 : u \in U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists \; B(u) \in U_{\alpha_0} \Rightarrow B(u) \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ $\Rightarrow \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открыто.

2. Пусть $u \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots n\} \exists \; \varepsilon_i : B_{\varepsilon_i} \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists \; \varepsilon_i = \min\{\varepsilon_{i_0}\} \Rightarrow$ $B_{\varepsilon_{i_0}} \subset U_{\alpha_i} \forall i \Rightarrow B_{\varepsilon_{i_0}} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ - открыто.

3. (3) и (4) следуют из (1), (2) и законов Моргана.

$\square$

Примеры.

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1]$.

2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$.

Теорема. Если A - ограничено сверху или снизу и замкнуто, то существует $\max A$ или $\min A$ соответственно.

Доказательство. По принципу поноты Вейерштрасса $\exists\ \alpha = \sup A$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ a_\varepsilon \in (\alpha - \varepsilon, \alpha] \Rightarrow \alpha$ - точка прикосновения $\Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$. $\square$