

Математический анализ-1

Лектор: Подольский Владимир Евгеньевич

6 октября 2024 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа

tg: @fourkenz

Содержание

1	Элементы теории множеств	3
1.1	Условности и обозначения	3
1.2	Операции над множествами	4
1.3	Декартово произведение множеств	4
1.4	Отображения	4
1.5	Операции над множествами (продолжение)	5
2	Действительные числа	6
2.1	Натуральные числа. Аксиоматика Пеано	6
2.2	Отношение порядка и принцип наименьшего элемента	6
2.3	Арифметические операции	7
2.4	Целые числа	8
2.5	Рациональные числа	8
2.6	Упорядоченные и архимедовы поля	9
2.7	Действительные числа. Аксиома полноты	10
2.8	Модели вещественных чисел	10
2.8.1	Модель бесконечных десятичных дробей	10
2.8.2	Сечения \mathbb{Q}	11
2.8.3	Геометрическая модель числовой прямой	11
2.9	Принципы полноты	12
2.9.1	Верхние и нижние грани множества	12
2.9.2	Принцип полноты Вейерштрасса	13
2.9.3	Принцип вложенных отрезков (принцип полноты Кантора)	14
2.10	Неравенство Бернулли и Бином Ньютона	14
2.11	Отношение эквивалентности. Равномощные множества	15
2.12	Теорема Кантора и аксиома выбора	17
3	Топология \mathbb{R}	19

1 Элементы теории множеств

1.1 Условности и обозначения

Определение. Кванторами будем называть символы, заменяющие слова в выражениях.

Замечание. Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- \forall - квантор всеобщности
- \exists - квантор существования
- $!$ - квантор единственности
- Запись $A \Rightarrow B$ обозначает, что из высказывания A , следует высказывание B .
- Запись $A \Leftrightarrow B$ обозначает, что высказывание A равносильно высказыванию B .
- Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A , отрицанием такой записи будет $a \notin A$
- Если x - объект, а P - свойство, то запись $\{x : P(x)\}$ означает класс всех объектов обладающих свойством P .

Определение. Множество не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается \emptyset .

Определение. Множество A' является подмножеством множества A , если $\forall a \in A'$ верно $a \in A$. Запись $A' \subset A$ обозначает, что A' является подмножеством A .

Определение. Для любого множества A выполнено:

1. $\emptyset \subset A$.
2. $A \subset A$.

Определение. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется собственным подмножеством множества B .

1.2 Операции над множествами

Определение. Множество $C = A \cup B$ называется объединением множеств A и B , если $(\forall a \in A : a \in C)$ и $(\forall b \in B : b \in C)$ и $\forall c \in C$ выполнено $(c \in A \text{ или } c \in B)$.

Определение. Множество $C = A \cap B$ называется пересечением множеств A и B , если $\forall c \in C : (c \in A \text{ и } c \in B)$ и $(\forall c : c \in A \text{ и } c \in B)$ выполнено $c \in C$.

Определение. Множество $C = A \setminus B$ называется разностью множеств A и B , если $\forall c \in C : (c \in A \text{ и } c \notin B)$ и $(\forall a \in A : a \notin B)$ выполнено $a \in C$.

Утверждение. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство. $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A \text{ или } a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A \text{ или } (a \in B \text{ и } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ или } a \in B) \text{ и } (a \in A \text{ или } a \in C)$. \square

Утверждение. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство. $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } a \in (B \cup C) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \in B \text{ или } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \in B) \text{ или } (a \in A \text{ и } a \in C)$. \square

1.3 Декартово произведение множеств

Определение. Множество A называется одноэлементным, если $\exists a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\} = \emptyset$.

Определение. Множество A называется двухэлементным, если $\exists a \in A$ такое, что $A \setminus \{a\}$ - одноэлементное.

Определение. Пусть $x \in X, y \in Y$. Упорядоченной парой называется двухэлементное множество $\{x, \{x, y\}\}$, упорядоченную пару обозначают (x, y) .

Определение. Множество всех упорядоченных пар (x, y) называется декартовым произведением множеств X и Y , где $x \in X, y \in Y$. Декартово произведение обозначают $X \times Y$.

1.4 Отображения

Определение. Пусть X, Y - множества. Подмножество $f \subset X \times Y$ такое, что $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ называется отображением из X в Y , и обозначается $f : X \rightarrow Y$.

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$. Множество $\{x : \exists (x, y) \in f\} = D_f$ называется областью определения функции f .

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$. Множество $\{y : \exists(x, y) \in f\} = R_f$ называется областью значений функции f .

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$. f - инъекция $\Leftrightarrow \forall(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$.

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$. f - сюръекция $\Leftrightarrow Y = R_f$

Замечание. Обычно используют определение f - сюръекция $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$.

Определение. f - биекция $\Leftrightarrow f$ - инъекция и f - сюръекция.

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y, X_1 \subset X$. Множество $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} = f|_{X_1}$ называется ограничением f на X_1 .

Замечание. Запись $(x, y) \in f$ часто заменяют на $y = f(x)$.

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y, X_1 \subset X$. Множество $\{y \in Y : \exists x \in X_1 : y = f(x)\} = f(X_1)$ называют образом множества X_1 .

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y, Y_1 \subset Y$. Множество $\{x \in X : \exists y \in Y_1 : y = f(x)\} = f^{-1}(Y_1)$ называют полным прообразом множества Y_1 .

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$. Если $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$ - одноэлементное множество, то подмножество $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$ является отображением и называется обратным отображением к f . Если у отображения f существует обратное отображение f^{-1} , то оно называется обратимым.

Утверждение. f - обратимое $\Leftrightarrow f$ - биекция.

Замечание. Иногда $f : X \rightarrow Y$ записывают в виде y_x и называют индексацией y элементами x .

1.5 Операции над множествами (продолжение)

Утверждение. $\bigcup_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcup_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_1}) \text{ или } \dots \text{ или } (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \notin A_{\alpha_1} \text{ и } \dots \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow A \setminus (\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha)$. \square

Утверждение. $\bigcap_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) = A \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha)$.

Доказательство. $a \in \bigcap_{\alpha \in A} (A \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_1}) \text{ и } \dots \text{ и } (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \notin A_{\alpha_1} \text{ или } \dots \text{ или } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow A \setminus (\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha)$. \square

2 Действительные числа

2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

Определение. (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве \mathbb{N} $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!$ элемент называемый следующим и обозначаемый как $S(n)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \exists$ не более одного элемента \mathbb{N} , для которого n - следующий.
3. $\exists!$ элемент \mathbb{N} не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается 1 и называется единицей.
4. (Аксиома индукции) Пусть $M \subset \mathbb{N}$, такое, что $1 \in M$ и $\forall m \in M : S(m) \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

Множество удовлетворяющее этим аксиомам называется множеством натуральных чисел и обозначается \mathbb{N} .

Определение. Рассмотрим множество X . Если для некоторого $n \in \mathbb{N} \exists$ биекция $\varphi : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$, то X называется n -элементным, или говорят, что количество элементов в X равно n . Тот факт что множество X - n -элементное обозначается как $|X| = n$ или $cardX = n$.

Замечание. По определению считаем, что $card(\emptyset) = 0$.

Определение. Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множества называются бесконечными.

2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

Определение. $R \subset X \times Y$ называется отношением между элементами X и Y . Обозначают xRy , если $(x, y) \in R$.

Определение. Отношение R называется отношением порядка, если выполнено:

1. $\forall x, y : xRy$ или yRx .
2. Если верно xRy и yRx , то $x = y$.

3. Если xRy и yRz , то xRz .

Такое отношение обозначают \leq .

Теорема. $\exists!$ отношение порядка на \mathbb{N} , такое, что $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$. (Можно использовать на экзамене без доказательства)

Теорема. (Принцип наименьшего элемента)

$M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$ имеет наименьший элемент, т.е. $\exists n_{\min} \in M, \forall n \in M : n_{\min} \leq n$.

Доказательство. База: Если $1 \in M$, то $n_{\min} = 1$. Пусть $1 \notin M$, тогда $1 \in \mathbb{N} \setminus M$.

Шаг: Пусть $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M$. Тогда $S(n) \in \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow$ по аксиоме индукции $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \emptyset$ - противоречие. \square

2.3 Арифметические операции

Определение. Рассмотрим $A, B, \text{card}(A) = n, \text{card}(B) = k, n, k \in \mathbb{N}$. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Тогда число $\text{card}(A \cup B)$ называется суммой n и k и обозначается $\text{card}(A \cup B) = n + k$.

Замечание. Естественно выполняется $n + k = k + n$ (коммутативность) и $(n + k) + m = n + (k + m)$ (ассоциативность).

Замечание. $n + 0 = 0 + n = n$, т.к. $\text{card} A = \text{card}(A \cup \emptyset)$.

Замечание. $A \leftrightarrow \{1, \dots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \dots, k\}$. Возьмем

$\text{card}(A \cup B) = \{1, \dots, n\} \cup \underbrace{\{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n)) \dots))\}}_k$,

(где $\{1, \dots, k\} \leftrightarrow \underbrace{\{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n)) \dots))\}}_k \Rightarrow S(n) = n + 1$).

Определение. $n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum_{i=1}^k n = nk$ называется произведением n на k .

Замечание. $nk = \underbrace{(n + n + \dots + n)}_k$.

Замечание. Выполнены:

- $nk = kn$ (коммутативность)
- $n(km) = (nk)m$ (ассоциативность)
- $k(n + m) = kn + km$ (дистрибутивность)
- Если $k \leq n$, то $k + m \leq n + m$ и если $k \leq m$, то $kn \leq mn$

Определение. Если $n + k = m$, то $n = m - k$, $k = m - n$ называются разностью m и n .

Замечание. $m - 0 = m$, $m + 0 = m$, $m - m = 0$.

Определение. $nk = m$, $\frac{m}{n} = k$, $\frac{m}{k} = n$.

2.4 Целые числа

Определение. Введем набор символов $-\mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$. Множество символов $-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ называются целыми числами и обозначаются \mathbb{Z} .

Замечание. Принимаем выполненными следующие свойства:

1. $k + (-n) = \begin{cases} k - n, & \text{если } k \geq n, \\ -(n - k), & \text{если } k < n. \end{cases}$
 $(-k) + (-n) = -(k + n)$
2. $k \cdot 0 = (-k) \cdot 0 = 0$,
 $(-k) \cdot n = (-kn)$,
 $(-k)(-n) = kn$.
3. $(\pm k)((\pm n) + (\pm m)) = (\pm k)(\pm n) + (\pm k)(\pm m)$.
4. $\forall k : (-k) \leq 0$,
 $(-k) \leq (-n)$, если $n \leq k$.
5. $\forall (\pm k), (\pm n), (\pm m) \in \mathbb{Z}$, если $(\pm k) \leq (\pm n)$, то $(\pm k) + (\pm m) \leq (\pm n) + (\pm m)$.
6. $\forall (\pm n), (\pm k) \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, если $(\pm n) \leq (\pm k)$, то $(\pm n)m \leq (\pm k)m$.

Далее пишем $-k$ вместо $(-k)$.

$\forall k, n \in \mathbb{Z} \exists (k - n) = k + (-n)$.

2.5 Рациональные числа

Определение. Множество $\mathbb{Q} = (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

а также введено отношение порядка:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$$

Свойства операций $(a, b, c \in \mathbb{Q})$:

$$(1) \ a + b = b + a$$

$$(2) \ a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(3) \ \exists! 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$$

$$(4) \ \forall a \in \mathbb{Q} \ \exists! (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$$

$$(5) \ ab = ba$$

$$(6) \ a(bc) = (ab)c$$

$$(7) \ \exists! 1 \in \mathbb{Q} \ \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$(8) \ \forall a \neq 0 \ \exists! a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

$$(9) \ a(b + c) = ab + ac$$

$$(10) \ \forall a, b \in \mathbb{Q} \ a \leq b \text{ или } b \leq a$$

$$(11) \ a \leq b \text{ и } b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$(12) \ a \leq b \text{ и } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$(13) \ \forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$(14) \ \forall c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$$

2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

Определение. Множество X с операциями $(\cdot, +)$ и отношением порядка \leq называется упорядоченным полем.

Замечание. \mathbb{Q} - упорядоченное поле.

Определение. Упорядоченное поле X называется архимедовым, если

$$(15) \ \forall x \in X \ \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n \cdot 1.$$

Замечание. \mathbb{Q} - архимедово поле.

Замечание. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$.

Замечание. $\forall m \in \mathbb{Z}$ число $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$ можно отождествить с m .

2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

Определение. Множество \mathbb{R} называется множеством действительных чисел, если $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

Определение. (Аксиома полноты)

(16) $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$.

Пример. Аксиома полноты не выполняется в \mathbb{Q} .

$A = \{a \leq 0 \text{ или } a > 0 : a^2 < 2\}, B = \{b > a : b^2 > 2\},$

но $\nexists \frac{m}{n}, \frac{m^2}{n^2} = 2$

2.8 Модели вещественных чисел

2.8.1 Модель бесконечных десятичных дробей

Определение. Отображение $\{a_n\} : \mathbb{N} \rightarrow X$ называется последовательностью элементов X .

Определение. Выражение вида $\pm a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называется бесконечной десятичной дробью, если $a_0 \in \mathbb{N}$ или $a_0 = 0 \forall i \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Определение. Введем отношение порядка \leq на множестве всех бесконечных дробей следующим образом:

1. Если $a_0 \leq 0, b_0 > 0$, то $a \leq b$.

2. Если $a_0, b_0 \geq 0$, то $a \leq b$

- если $a_0 < b_0$ или $a_0 = b_0, a_1 < b_1$ или $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 < b_2$,
или ... или $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n$.

- если $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n \neq 9, b_n = a_{n+1}, a_{n+k} = 9$.
 $a_{n+k} = 9, k \in \mathbb{N}, b_{n+k} = 0, k \in \mathbb{N}$, т.е. $a = \overline{a_0 a_1 \dots a_n(0)}$, а $b = \overline{b_0 b_1 \dots b_n(9)}$
(в числе a начиная с a_{n+1} все a_i равны 9, а в числе b начиная с b_{n+1} все b_i равны 0), то $a = b$.

3. Если $a_0, b_0 < 0$, то $a < b$, если $-b < -a$ (случай 3 сведен к случаю 2)

Теорема. Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка (\leq) удовлетворяет аксиоме полноты.

Доказательство. (Еще не смог привести это в адекватный, читаемый вид. Пока что написано так, как ВЕ написал на доске)

Пусть $A, B \subset \{\text{множество бесконечных десятичных дробей}\}$ и $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$.

1. $a < 0, b \geq 0$, тогда $c = 0$.

2. $a > 0, b > 0$

Пусть

$$\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \cdots \in B\},$$

$$\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \cdots \in B\},$$

$$\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0} \overline{b_1} b_2 \cdots \in B\},$$

\vdots

$$\Rightarrow \bar{b} = \overline{b_0 b_1 b_2} \dots \overline{b_n} \dots$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \bar{b} \leq b.$$

Предположим, что $\exists a' \in A, a' > \bar{b_0} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : a' = a_0 a_1 \dots a_k \dots$, но тогда $a' > \overline{b_0}, \overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_k}, \dots \in B$ - противоречие.

3. $a < 0, b < 0$ очевидно.

□

2.8.2 Сечения \mathbb{Q}

Определение. (Дедекиндовы сечения)

Пусть $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{Q}, \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ и в B не существует минимального элемента, тогда (A, B) - пара сечений \mathbb{Q} .

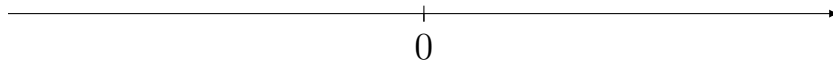
Теорема. На множестве всех пар сечений $\{(A, B)\}$ можно ввести операции $(+), (\cdot)$ и отношение (\leq) , так что будут выполняться (1) – (16).

Доказательство. Без доказательства.

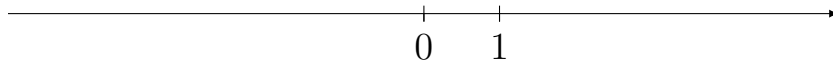
□

2.8.3 Геометрическая модель числовой прямой

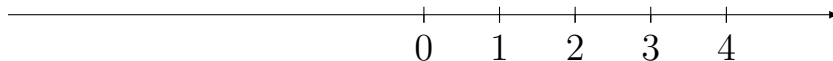
Выбираем точку, называем ее 0



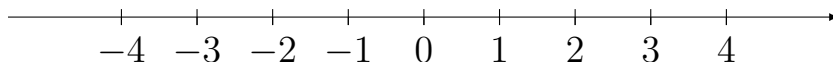
затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



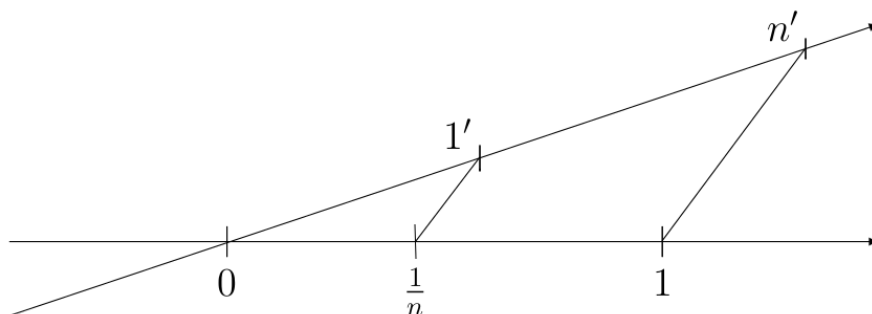
затем вводим сложение и получаем 2, 3, 4, и т.д. (натуральный ряд)



затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



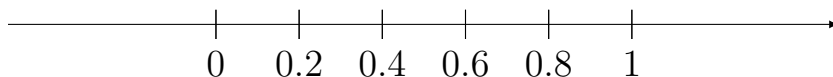
Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее $1'$ и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через n' и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через $1'$ проходит через $\frac{1}{n}$ (по теореме Фаллеса)



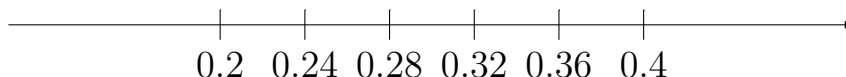
таким образом складывая m раз $\frac{1}{n}$, получим любое рациональное число $\frac{m}{n}$.

Построим бесконечную десятичную дробь, например $0,37152\dots$

Разобьем отрезок:



$0,37152\dots$ находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:



$0,37152\dots$ находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д.

Получаем последовательность вложенных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.

Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняются (1)-(16).

2.9 Принципы полноты

2.9.1 Верхние и нижние грани множества

Определение.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется максимальным элементом множества A ($\max A \subset \mathbb{R}$), $A \neq \emptyset$, если $\forall a' \in A : a \geq a'$ и $a \in A$.

- Элемент $a \in \mathbb{R}$ называется минимальным элементом множества A ($\min A \subset \mathbb{R}$), $A \neq \emptyset$, если $\forall a' \in A : a \leq a'$ и $a \in A$.

Определение.

- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, если $\forall a \in A : a \leq m$.
- Элемент $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, если $\forall a \in A : a \geq m$.

Определение.

- Множество $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ называется ограниченным сверху, если у A существует верхняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ называется ограниченным снизу, если у A существует нижняя грань.
- Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если A ограничено и сверху и снизу.

Определение.

- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, B - множество верхних граней A . Элемент $c = \min B$ называется точной верхней гранью A и обозначается $\sup A$.
- Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, B - множество нижних граней A . Элемент $c = \max B$ называется точной нижней гранью A и обозначается $\inf A$.

2.9.2 Принцип полноты Вейерштрасса

Теорема. (Принцип полноты Вейерштрасса)

Для каждого ограниченного сверху или снизу множества A существует $\sup A$ или $\inf A$ соответственно.

Доказательство. Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)
 A - ограничено сверху, B - множество верхних граней. Значит $\forall a \in A$ и $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$ по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$. \square

Определение. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ рассмотрим следующие множества:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - отрезок

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

Определение. $\forall a \in \mathbb{R}$ функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

Определение. Для любого промежутка с концами $\forall a, b \in \mathbb{R}$ длиной называется число $|b - a|$.

Определение. Рассмотрим последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Говорят, что $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ выполнено $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

2.9.3 Принцип вложенных отрезков (принцип полноты Кантора)

Теорема. (Принцип вложенных отрезков)

Пусть последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$. Если $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ то c - единственная.

Доказательство. $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq a_m$

- если $n < m$, то $a_n \leq a_m < b_m$.
- если $m > n$, то $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \forall n, m \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n, \forall n$. Если $|b_n - a_n| \rightarrow 0$, то $\nexists c_1, c_2 : c_1 \neq c_2$ - различные общие точки. Значит $|c_2 - c_1| > 0$ и $[c_1, c_2] \subset [a_n, b_n], \forall n$ и $|b_n - a_n| \geq |c_2 - c_1| \nrightarrow 0$ противоречие. \square

2.10 Неравенство Бернулли и Бином Ньютона

Теорема. (Неравенство Бернулли)

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n, x_k \in \mathbb{R} \forall k : x_k > 0$ или $x_k \in (-1, 0)$. Тогда

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$$

Доказательство. Индукция по n . База: $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$. Пусть при n утверждение верно.

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \geq (1 + x_{n+1}) \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

□

Определение. Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ называется биномиальным коэффициентом и обозначается C_n^k .

Замечание. По определению считается, что $0! = 1$.

Теорема. (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Доказательство. Индукция по n . База: для $n = 1$ верно. Пусть верно для n . Распишем выражение для $n + 1$:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^n C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} &= \sum_{m=1}^n C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m+1} = \\ &= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^n (C_n^{m-1} + C_n^m) a^m b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1} \end{aligned}$$

□

2.11 Отношение эквивалентности. Равномощные множества

Определение. Отношение \sim называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1. $x \sim x$ (Рефлексивность)
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Симметричность)
3. $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Транзитивность)

Определение. Множества называются равномошными, если между ними существует биекция.

Теорема. Равномошность множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Пусть A, B, C - множества, $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.
2. Для любой биекции $\varphi : A \rightarrow B$ существует $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$.
3. $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$, то $\varphi \circ \psi : A \rightarrow C$.

□

Теорема. Конечные множества равномошны \Leftrightarrow они содержат одинаковое количество элементов.

Доказательство. (\Leftarrow) Пусть $\varphi : A \rightarrow \{1, \dots, n\}, \psi : B \rightarrow \{1, \dots, n\}$
 $\Rightarrow \exists \psi^{-1} : \{1, \dots, n\} \rightarrow B$. Тогда $\varphi \circ \psi^{-1} : A \rightarrow B$ - искомая биекция.

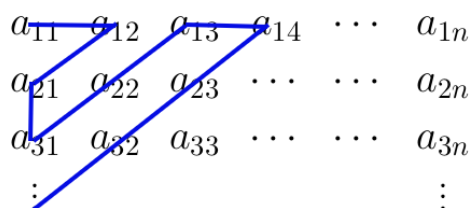
(\Rightarrow) Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ - биекция. Если $A = \emptyset$, то $B = \emptyset$. Докажем индукцией по количеству элементов. Пусть $A = \{a\}$, тогда $\exists b \in B : \varphi(a) = b$. Пусть утверждение верно для случая когда A - n -элементное множество. Теперь если A - $n + 1$ -элементное, то $\exists \varphi : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 1\}$ - биекция. Значит $\exists a \in A$, что $\varphi(a) = n + 1$. Тогда $A \setminus \{a\}$ - n -элементное. Также $\exists b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$ - n -элементное $\Rightarrow B$ - $n + 1$ -элементное.

□

Определение. Множества равномошные \mathbb{N} называются счетными.

Теорема. A_i - счетные множества $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$ - счетно.

Доказательство. Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:



□

Определение. Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

Примеры.

1. Множество целых чисел \mathbb{Z}
2. Множество рациональных чисел \mathbb{Q}
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами).

2.12 Теорема Кантора и аксиома выбора

Теорема. (Теорема Кантора)

Множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчетно.

Доказательство. Предположим, что оно счетно. Тогда все последовательности нулей и единиц можно перенумеровать. Составим бесконечную вниз таблицу, строками которой будут наши последовательности:

$$a_1 = \underline{a_{11}} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ \dots$$

$$a_2 = a_{21} \ \underline{a_{22}} \ a_{23} \ a_{24} \ \dots$$

$$a_3 = a_{31} \ a_{32} \ \underline{a_{33}} \ a_{34} \ \dots$$

$$a_4 = a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ \underline{a_{44}} \ \dots$$

a_{ij} - j -й член i -й последовательности. Рассмотрим последовательность b у которой $b_i = 1 - a_{ii}$. Такая последовательность отличается от каждой i -й последовательности на i -й позиции, значит она не была посчитана, получаем противоречие. □

Утверждение.

1. Алгебраических чисел счетно.
2. Действительных чисел несчетно.

Определение. Действительные числа не являющиеся алгебраическими называются трансцендентными.

Определение. Множества равномощные множеству последовательностей нулей и единиц называются множествами мощности континуума.

Теорема. У любого множества мощность множества всех подмножеств строго больше чем мощность самого множества.

Определение. Для множеств A и B обозначим $|A| \leq |B|$, если $\exists B' \subset B$ для которого $\exists \varphi : A \rightarrow B'$ - биекция.

Теорема. Сравнение мощностей множеств $|A| \leq |B|$ является отношением порядка.

1. $\forall A, B : |A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$
2. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
3. $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

Доказательство. Без доказательства. □

Аксиома. (Аксиома выбора)

Если существует множество неких множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу и составить из них другое множество.

Утверждение. Множество всех подмножеств \mathbb{N} равномощно множеству бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Доказательство. Каждому $A \subset \mathbb{N}$ ставим в соответствие характеристическую последовательность, которая принимает значения: единицу, если элемент лежит в подмножестве и ноль иначе. □

Теорема. У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.

Доказательство. Выбираем элемент и сразу присваиваем ему номер, продолжая это действие, построим счетное множество. □

Теорема. Пусть A - бесконечное, B - не более чем счетное $\Rightarrow A \sim A \cup B$

Доказательство. Пусть $A' \subset A$. Тогда $A \sim (A \setminus A') \cup A' \sim (A \setminus A') \cup (A' \cup B) \sim (A \cup B)$. □

3 Топология \mathbb{R}

Определение. $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$ отрезок $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ называется ε -окрестностью точки x .

Определение. $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$ отрезок $\mathring{B}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x + \varepsilon)$ называется проколотой ε -окрестностью точки x .

Определение. Точка $x \in A \subset \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества A , если $\exists B_\varepsilon(x) \subset A$. Множество всех внутренних точек $x \in A$ называется внутренностью множества A .

Определение. Точка $x \in \mathbb{R} \setminus A$ называется внешней точкой для множества $A \subset \mathbb{R}$, если x - внутренняя точка для $\mathbb{R} \setminus A$. Множество всех внешних точек $x \in A$ называется внешностью множества A .

Определение. Точка называется граничной для множества $A \subset \mathbb{R}$, если она не является ни внешней ни внутренней для A . Множество всех граничных точек называется границей и обозначается ∂A .

Определение. (Множество Кантора)

Разбиваем отрезок $[0, 1]$ на три части и выбрасываем середину, затем каждый из получившихся отрезков разбиваем на три части и выбрасываем середину, и т.д.

- Суммарная длина всех выброшенных интервалов равна 1.
- Концов отрезков счетное множество.
- Общее количество точек имеет мощность континуума.

Определение. Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Замечание. Любой интервал - открытое множество

Определение. Множество называется $A \subset \mathbb{R}$ замкнутым, если все его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

Замечание. Отрезок - и не открытое и не замкнутое множество.

Замечание. По определению считаем, что \emptyset и \mathbb{R} и открыты и замкнуты одновременно.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой окрестности точки x бесконечно много точек A , т.е $\forall \varepsilon > 0 \ A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.

Определение. Точка $x \in A$ называется изолированной точкой $A \subset \mathbb{R}$, если $\exists \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \emptyset$.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется точкой прикосновения $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.