Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

6 января 2026 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Числовые ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию коши для последовательности S_n:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев. □

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0 \tag{$*$}$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд $(*)$ сходится. □

Теорема. (Признак сравнения)
Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0) \tag{2}$$

и $a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.

2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

□

Следствие. (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. □

Примеры.

1. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

2. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$
сходится.

4. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$
сходится.

Теорема. (Признак Коши)
Пусть дан знакоположительный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{$*$}$$

1. Если $\exists\ q : 0 < q < 1,\ \forall n > N : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, то ряд $(*)$ сходится.

2. Если $\exists\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$
то ряд $(*)$ сходится

2. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$
то ряд $(*)$ расходится

3. Если
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q = 1$$
то ряд $(*)$ может как сходиться так и расходиться.

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

3. $q = 1$, приведем пример рядов

   (a)
   $$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
   расходится.

   (b)
   $$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
   сходится.

$\square$

Теорема. (Признак Д'Аламбера)
Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. Если $\exists\, q:\; 0 < q < 1,\; \forall n > N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $\exists\, \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \ge 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\forall n > N : a_{n+1} \le a_n \cdot q$, значит

$$a_{N+1} \le a_N \cdot q, \quad a_{N+2} \le a_{N+1} \cdot q \le a_N \cdot q^2, \quad \dots$$

таким образом, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$a_{N+k} \le a_N \cdot q^k$$

По признаку сравнения с геометрической прогрессией, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

сходится, значит, ряд $(*)$ также сходится.

2. $\exists\, \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}} \ge 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Д'Аламбера в предельной форме)
Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

1. Если $q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.
2. Если $q > 1$, то ряд $(*)$ расходится.
3. Если то ряд $(*)$ может как сходиться так и расходиться.

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

3. $q = 1$, приведем пример рядов

   (a)
   $$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
   расходится.

   (b)
   $$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$
   и ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
   сходится.

□

Теорема. (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \ \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\ dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит, $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\ dx \geq f(k+1)$$

теперь для каждого $k = 1, \ldots, N$ сложим полученные неравенства:

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\ dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1.
$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2.
$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\beta} x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3.
$$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$
значит
$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^{\gamma}(\ln n)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера)
Рассмотрим знакоположительный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}$, $c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$
то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

расходится и

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_{N+1} \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$

сложив все неравенства, получим

$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то

$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$

значит

$$\sum_{m=1}^{k} a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$

отсюда получаем, что начиная с какого-то номера, частичные суммы ряда ограничены. Значит, ряд, поскольку он знакоположительный, сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит, расходится и ряд $(*)$.

$\square$

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$
   значит, если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$
   значит, если
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:
$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$
   Значит, если
$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Теперь
$$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$
   Значит, если
$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
$$\exists \lim_{n \to \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
$$\exists \lim_{n \to \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если
$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
$$\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \leq 1$$
   то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
$$\exists \lim_{n \to \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) = q > 1$$
   то ряд $(*)$ сходится. Если
$$\exists \lim_{n \to \infty} \left(\ln n \cdot \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \right) = q < 1$$
   то ряд $(*)$ расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
   Выводится из признака Бертрана.
   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$
   где θ_n - ограниченная последовательность, $\varepsilon > 0$ - произвольное. Тогда при
   (a) $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$ - сходится, $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.
   (b) $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$ - сходится, $\mu < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.
   (c) $\lambda = 1,\ \mu = 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$
ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:
$$\left| \sum_{n=k}^{N} a_n \right| \le \sum_{n=k}^{N} |a_n| < \varepsilon$$
□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tag{2}$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Рассмотрим

$$S_k^{\sigma} = \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max\limits_{1 \leq n \leq k} \sigma(n),\ S_n \to S$. Тогда

$$S_k^{\sigma} \leq S_N \Rightarrow S_k^{\sigma} \leq S \Rightarrow \exists\ S^{\sigma} = \lim_{k \to \infty} S_k^{\sigma}$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \leq S^{\sigma} \Rightarrow S = S^{\sigma}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a,\ a \geq 0, \\ 0,\ a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty,\ \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1,\ \ldots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_nb_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме $(*)$.

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = A,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_nb_k)_m \tag{$*$}$$

сходится абсолютно и равен AB.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда $(*)$, которые имеют вид S_{N^2}:

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \to AB,\ N \to \infty$$

Теперь перейдем к общему виду S_{N^2+M}, $(1 \leq M \leq 2N)$ и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M}(a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M}(a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \cdots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \cdots + |b_N|) \to 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит, $S_{N^2+M} \to AB$. $\square$

Определение. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$
сходится, а ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
условно сходится. Обозначим
$$a_n^+ \begin{cases} a_n, \ a_n > 0, \\ 0, \ a_n \leq 0. \end{cases}, \ a_n^- = \begin{cases} 0, \ a_n \geq 0, \\ a_n, \ a_n < 0. \end{cases}$$
Тогда ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{2}$$
расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$
сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$
сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит, оба ряда расходятся. □

Теорема. (Теорема Римана)
Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ \sigma_a$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$

$\exists\ \sigma_{+\infty}$ и $\sigma_{-\infty}$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{+\infty}(n)} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{-\infty}(n)} = -\infty$$

$\exists\ \sigma$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. Было доказано картинками, строгое доказательство можно найти в [3] □

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

($\mathcal{A}$): Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, а b_n монотонна и ограничена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

($\mathcal{D}$): Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^{p} a_n,\ \ A_{k-1} = 0 \ \Rightarrow \ a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1} \cdot b_n =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m$$

$(\mathcal{A})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \leq \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \overset{(1)}{\leq} 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

(1):

$$|A_p| = \left| \sum_{n=k}^{p} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{p} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \right| \leq 2M$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)
Если a_n монотонно убывает и $a_n \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \tag{$*$}$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1,\ \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд $(*)$ сходится. □

2 Функциональные последовательности и ряды

2.1 Функциональные последовательности

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0, 1]$:
$$x^n \to \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\sin\frac{x}{n} \to 0$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A, и пишут $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Примеры.

1. На $[0, 1]$
$$x^n \not\rightrightarrows \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$
поскольку $\exists \ \varepsilon_0 > 0, \ \forall N_\varepsilon \ \exists \ n > N_\varepsilon, \ \exists \ x_{\varepsilon_0} \in [0, 1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.
2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \rightrightarrows 0$.
3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0, 1] : f_n \not\rightrightarrows 0$.
$$f_n' = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \ f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$
4. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \not\rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$, но $\forall a, b, \ \forall x \in [a, b] : \sin\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \sup_A |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Доказательство.

($\Rightarrow$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит, после предельного перехода, получаем:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

($\Leftarrow$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит, $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

($\Rightarrow$):

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_m(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

($\Leftarrow$): Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$. Тогда после предельного перехода получим, что $\forall x \in A$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности) Пусть $\forall x \in A : f_n(x) \to f(x)$. Если

$$\exists \ \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \ c_n \geq 0, \ c_n \to 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$$

Доказательство. Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. Пусть $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall n > N,\ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N_\varepsilon$ и запишем определение непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Теорема. (Почленное интегрирование)
Пусть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^x f_n(t)\ dt\ \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_a^x f_n(t)\ dt - \int\limits_a^x f(t)\ dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b-a| < \varepsilon \cdot |b-a|$$

$\square$

Теорема. (Почленное дифференцирование)
Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ \exists\ x_0 \in [a,b] : f_n(x_0) \to \alpha$.

Пусть $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$. Тогда:

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f(x) \in \mathcal{C}^1[a,b] \text{ и } f'(x) = g(x)$$

Доказательство. По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\ dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\ dt \ \Rightarrow\ f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\ dt$$

отсюда

$$f_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\ dt + \alpha = f(x)$$

□

2.2 Функциональные ряды

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$, определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\},\ \{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд (1) сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.

2. Если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, то говорят, что ряд (1) сходится равномерно.

3. Если сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$
то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m, k > N_\varepsilon,\ \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для функциональных последовательностей
$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$
□

Теорема. (Необходимое условие равномерной сходимости)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$
Тогда $|a_n(x)| \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство.
$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \rightrightarrows S(x) - S(x) = 0$$
□

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$ и
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$
Тогда $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $S_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$ и $\forall n : a_n(x)$ непрерывна в точке x_0. Значит, $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0, и по теореме для функциональных последовательностей, $S(x)$ непрерывна в точке x_0. □

Теорема. (Почленное интегрирование)
Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ и
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$
Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right) \rightrightarrows \int_a^x S(t)\ dt$$

Доказательство. $S_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$. Проинтегрируем почленно:
$$\int_a^x S_n(t)\ dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x S(t)\ dt$$

что можно $\forall x \in [a, b]$ записать, как:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{k} a_n(t)\right) dt = \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\right) dt$$

Таким образом

$$\int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\right) dt = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{k} a_n(t)\right) dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\int\limits_a^x a_n(t)\ dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^x a_n(t)\ dt\right)$$

□

Теорема. (Почленное дифференцирование)
Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = \alpha$$

где $x_0 \in [a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} G(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}\ S(x) \in \mathcal{C}^1[a, b],\ S'(x) = G(x)$$

Доказательство. Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности $S_n(x)$. □

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Пусть $\forall n : |a_n(x)| < \alpha_n,\ \forall x \in A$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left|\ \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x)\ \right| \le \sum_{n=k+1}^{m} |a_n(x)| \le \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A.

$(\mathcal{A})$: Пусть
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$$
и $\exists\ M > 0,\ \forall x \in A,\ \forall n : |b_n(x)| < M$ и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$.

$(\mathcal{D})$: Пусть $\exists\ M > 0,\ \forall x \in A,\ \forall N \in \mathbb{N}:$
$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)\right| \leq M$$
и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$, причем $b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows}$$

Доказательство. Аналогично как для числовых рядов. Введем:
$$A_p(x) = \sum_{n=k}^{p} a_n(x),\ A_{k-1}(x) = 0\ \Rightarrow\ a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$
отсюда
$$\sum_{n=k}^{m} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=k}^{m} (A_n(x) - A_{n-1}(x))\ b_n(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m} A_n(x) b_n(x) - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1}(x) b_n(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m} A_n(x) b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x) b_{n+1}(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x)$$
$(\mathcal{A})$:
$$\left|\sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x)\right| \leq \varepsilon \cdot 3M$$
$(\mathcal{D})$:
$$\left|\sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x) b_m(x)\right| \leq 2M \cdot 3\varepsilon$$
□

2.3 Степенные ряды

Определение. Ряды вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$
называются степенными рядами. a_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - центр разложения.

Замечание. В центре разложения ряд сходится.

Замечание. Сдвиг $x - x_0 \mapsto x$ не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема. (Первая теорема Абеля)
Рассмотрим степенной ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

1. Если существует $x_1 \in \mathbb{R}$, что $(*)$ сходится в точке x_1, то для любых x, таких, что $|x| < |x_1|$ ряд $(*)$ сходится.
2. Если существует $x_2 \in \mathbb{R}$, что ряд $(*)$ расходится в точке x_2, то для любых x, таких что $|x| > |x_2|$ ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Пусть $x : |x| < |x_1|$.
$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \overset{(1)}{\leq} M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$
(1): Поскольку сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$$
то $a_n x_1^n \to 0 \Rightarrow |a_n x_1^n| < M$
Таким образом, ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. Теперь пусть $x : |x| > |x_2|$. От противного: пусть есть точка $y : |y| > |x_2|$, в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках $x : |x| < |y|$, а значит, и в x_2 - противоречие.

$\square$

Замечание. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$
Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ сходится, $A \neq \varnothing$, так как $\{0\} \in A$.
Пусть $B \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ расходится, и пусть $B \neq \varnothing$.
Тогда из первой теоремы Абеля следует, что $A = \{0\}$ или $\exists\, a > 0 : (-a, a) \subset A$, а также $\exists\, b > 0 : (-\infty, -b) \cap (b, +\infty) \subset B$.

Утверждение. $a = b$

Доказательство. Предположим что это не так, тогда $a < b$ или $b < a$. Пусть для определенности $a < b$, по аксиоме полноты $\exists\, c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$. Значит, c не лежит ни в A, ни в B, а такого быть не может, противоречие. $\square$

Определение. Число $a = b$ называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R. Формально полагают, что если $R = 0$, то $A = \{0\}$, если $B = \varnothing$, то $R := +\infty$.

Теорема. (Формула Коши-Адамара)
Пусть дан ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
Тогда
$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
Если предел равен нулю, то $R = +\infty$.
Если предел равен бесконечности, то $R = 0$.

Доказательство. Применим признак Коши к ряду
$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1 \ - \ \text{сходится, и } |x| < R, \\ l > 1 \ - \ \text{расходится, и } |x| > R \end{cases}$$
$\square$

Теорема. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \tag{$*$}$$
и пусть $R > 0$.

1. $\forall\varepsilon > 0$ на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ряд равномерно сходится.

2. $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.

3. $\forall x \in (-R, R)$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int\limits_0^x S(t)\ dt$$

4. $S(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(-R, R)$.

Доказательство.

1. $|a_n x^n| \le |a_n| \cdot (R-\varepsilon)^n$ по признаку Вейерштрасса.

2. из пункта 1: $\forall\varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R+\varepsilon, R-\varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.

3. Поскольку ряд $(*)$ равномерно сходится на любом отрезке внутри $(-R, R)$, то можно почленно интегрировать
$$\int\limits_0^x S(t)\ dt = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x a_n t^n\ dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

4. Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1$$
значит, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\alpha} x^n$$
имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости R. Тогда по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

$\square$

Теорема. (Вторая теорема Абеля)
Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ \ R > 0$$
Пусть
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Тогда $S(x) \in \mathcal{C}[0, R]$ то есть

$$\exists \lim_{x \to R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = S(R)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R} \right)^n$$

а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на $[0, R]$. □

2.4 Ряды Тейлора

Определение. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(B(x_0))$. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром ряда x_0.

Замечание. Далее везде центр разложения в 0.

Теорема. Если в некоторой окрестности нуля выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Доказательство. Подставим $x = 0$, тогда $a_0 = f(0)$. Продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_1 = f'(0)$. Снова продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_2 = \frac{f''(x)}{2}$. Продолжая выполнять эту операцию, для каждого n получим $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$. □

Теорема. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(-a, a)$ и $|f^{(n)}(x)| \leq A^n, \ A > 0$.
Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\forall x \in (-a, a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

Тогда

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| = \left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1}\right| \leq \frac{A^{N+1} \cdot a^{N+1}}{(N+1)!} \to 0$$

$\square$

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

Несложно проверить, что $f(x) \in C^\infty(B(0)),\ f^{(n)}(0) = 0$.
Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \equiv 0 \neq f(x)$$

Пример. (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)
Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Этот ряд сходится на $(-1, 1)$, причём

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \to 1-0]{} \frac{1}{2}$$

но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

не сходится.

Лемма. Если $a_n \to A$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \to A,\ N \to \infty$$

Доказательство. Оценим разность

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n - A\right| = \frac{1}{N} \cdot \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - AN\right| = \frac{1}{N} \cdot \left|\sum_{n=1}^{N}(a_n - A)\right|$$

$$a_n \to A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1,\ \forall n > N_1:\ |a_n - A| < \varepsilon$$

Возьмем число $N_1 < N$ и разобьём сумму на две части:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|a_n - A| = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N_1}|a_n - A| + \frac{1}{N}\sum_{n=N_1+1}^{N}|a_n - A|$$

Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{n=N_1+1}^{N}|a_n - A| < \frac{1}{N}\cdot\varepsilon\cdot(N - N_1) = \varepsilon\cdot\frac{N - N_1}{N}$$

В итоге получаем

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n - A\right| \leq \frac{C}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

□

Теорема. (Теорема Таубера)
Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

сходится на $(-1, 1)$, существует

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right) = A$$

и пусть $a_n = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{n}),\ n \to \infty$.
Тогда существует

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n = A$$

Доказательство. Обозначим $\forall x \in (0, 1)$

$$N_x = \left[\frac{1}{1-x}\right]$$

и введём функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x}a_n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Если $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1-0$, то теорема доказана. Разобьем исходный ряд на две суммы:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{N_x}a_n x^n + \sum_{n=N_x+1}^{\infty}a_n x^n$$

Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\left|\ \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x^n)\ \right| = \left|\ \sum_{n=0}^{N_x} a_n(1-x)(1+x+x^2+...+x^{n-1})\ \right| \overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{\frac{1}{1-x}} \cdot \sum_{n=0}^{N_x} |a_n| n \leq \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} |a_n n| \overset{(2)}{\to} 0,\ x \to 1-0$$

(1): Поскольку $x < 1$, то $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} < n$
(2): $a_n = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n}) \Rightarrow |a_n n| \to 0$, значит, по лемме все выражение стремится к 0.

$$\left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n\right| \overset{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{N_x+1} \sum_{n=N_x+1}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{N_x+1} \cdot \frac{x^{N_x+1}}{1-x} < \varepsilon$$

(3): $a_n = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{n}) \Rightarrow |a_n n| < \varepsilon$, а также $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_x+1}$
Отсюда $\forall n > N_x : |\varphi(x)| < 2\varepsilon$. $\square$

3 Бесконечные произведения

Определение. Рассмотрим $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k\}_{n=1}^{\infty}$.

Пара последовательностей $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется бесконечным произведением чисел $\{u_n\}$, обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

u_n - общий член, Π_n - частичное произведение.

Определение. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = a \neq 0$.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся, если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = 0$. Если $\exists n : u_n = 0$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся к 0.

Теорема. (Необходимое условие сходимости) Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $u_n \to 1$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1$$

$\square$

Следствие. Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n,\ a_n \to 0$$

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln{(1 + a_n)}$$

сходится.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\Pi_N \text{ - сходится} \Rightarrow \ln(\Pi_N) \text{ - сходится, } \ln(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \ln(1+a_n) \text{ - сходится}$$

($\Leftarrow$):

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1+a_n) \text{ - сходится} \Rightarrow e^{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \ln(1+a_n)\right)} \text{ - сходится} \Rightarrow \Pi_N \text{ - сходится}$$

$\square$

Определение. Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответствующий ряд из логарифмов.

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$$

из этого следует утверждение в обе стороны. $\square$

Следствие. Если a_n знакопостоянны, то произведение и соответствующий ряд из логарифмов сходятся или расходятся одновременно.

Теорема. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Доказательство.

$$\ln(1+a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{\bar{o}}(a_n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

$\square$

Замечание. Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n(x))$$

анализируя соответствующий функциональный ряд из логарифмов.

Пример. (Пример Эйлера)
Пусть p_k обозначает k-е простое число. Тогда при $s>1$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ls}}\right)=\sum\frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\cdots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}<\sum\frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\cdots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Тогда

$$\sum\frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\cdots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s),\ N\to\infty$$

3.1 Разложение синуса в бесконечное произведение

Теорема. $\forall x\neq\pi k$:

$$\sin x=x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)$$

Доказательство. $\forall n:\sin((2n+1)x)=(2n+1)\sin x\cdot P_n(\sin^2 x)$
это утверждение можно показать по индукции, с базой $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$$\sin\left((2n+1)x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2n+1},\ k\in\mathbb{Z}$$

при этом

$$P_n(\sin^2 x)=0,\ x=\frac{\pi k}{2n+1},\ k=1,\ldots,n$$

$$P_n(\omega)=0\Leftrightarrow\omega=\sin^2\frac{\pi k}{2n+1},\ k=1,\ldots,n$$

Заметим, что

$$P_n(\sin^2 x)=\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}\to 1,\ x\to 0$$

Тогда
$$P_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{\omega}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}})$$
$$P_n(\sin^2 x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}$$
сделаем замену: $(2n+1)x = t$
$$\frac{\sin t}{(2n+1)\cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Лемма. $\forall \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}:$
$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1$$

Доказательство. Очев по индукции. $\square$

Возьмем $\forall t \in \mathbb{R},\ |t| < n, m < n$
$$\frac{\sin t}{(2n+1)\cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)\cdot R_{n,m}(t) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} R_{n,m}(t) = R_m(t)$$
Перейдем к пределу при $n \to \infty$:
$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)\cdot R_m(t)$$
Вернемся к $R_{m,n}$:
$$\left|\prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1\right| \leq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \leq$$
$$\leq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{(\frac{2}{\pi}\cdot \pi k)^2}\right) - 1 = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 <$$
$$< \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \to 0$$
при $m \to \infty \Rightarrow R_m(t) \to 1,\ m \to \infty$. Значит
$$\sin t = t \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)$$
$\square$

Следствие. (Формула Валлиса)
При $t = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right)$$

4 Интегралы с параметром

4.1 Собственные интегралы с параметром

Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}[a,b],\ \varphi(y) \le \psi(y)$. Рассмотрим $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x,y) : y \in [a,b],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

см. рисунок ниже

Определение. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}[\varphi(y), \psi(y)]$. Интеграл

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx$$

называется собственным интегралом с параметром.

Теорема. Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}[a,b],\ f(x,y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \in \mathcal{C}[a,b]$$

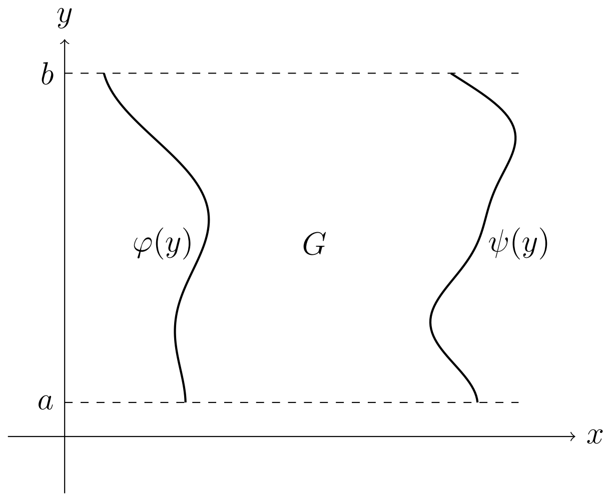
Доказательство.

$$|F(y+\Delta y) - F(y)| = \Bigg| \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx -$$

$$- \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx\ - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \Bigg| \overset{(1)}{\le}$$

$$\overset{(1)}{\le} \Bigg| \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx \Bigg| + \Bigg| \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx \Bigg| +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|\ dx \overset{(2)}{\le} M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \max_y |\psi(y) - \varphi(y)|$$



(1):

$$\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\;dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx = \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx +$$

$$\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx + \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\;dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)} f(x,y+\Delta y)\;dx + \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\;dx$$

(2): Первые два слагаемых оцениваются так: $f(x,y+\Delta y) \le M$, так как $f \in \mathcal{C}(G)$ и, поскольку $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны, то $|\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)| < \varepsilon$ и
$|\psi(y+\Delta y) - \psi(y)| < \varepsilon$.
Последнее слагаемое оценивается так: $f \in \mathcal{C}(G)$, значит, f равномерно непрерывна (так как G - компакт) $\Rightarrow$ при $\Delta y \to 0 : |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \varepsilon$ $\square$

Теорема. Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ f(x,y) \in \mathcal{C}(G),\ \exists\ f'_y(x,y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда $F(y) \in \mathcal{C}^1(G)$ и

$$F'(y) = \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\;dx \right)' = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\;dx + f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\Delta y}(F(y+\Delta y)-F(y)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}\Bigg(\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\ dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y+\Delta y)\ dx +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y+\Delta y)\ dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \Bigg) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\ dx -$$

$$- \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi(y+\Delta y)} f(x, y+\Delta y)\ dx + \frac{1}{\Delta y}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x, y+\Delta y) - f(x,y))\ dx \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{\Delta y}(\psi(y+\Delta y)-\psi(y)) \cdot f(\psi(y+\theta_1 \Delta y), y+\Delta y) -$$

$$- \frac{1}{\Delta y}(\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)) f(\varphi(y+\theta_2 \Delta y), y+\Delta y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y+\theta_3\Delta y)\ dx$$

(1): Аналогично предыдущей теореме

(2): Применяем теорему о среднем к первому и второму слагаемому, и теорему Лагранжа к третьему слагаемому ($0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$)

Значит, существует предел при $\Delta y \to 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \psi'(y) f(\psi(y), y) - \varphi'(y) f(\varphi(y), y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\ dx$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,b]\times[c,d])$. Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t) = \int\limits_c^t \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ dx \right) dy,\ \ G(t) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\ dy \right) dx$$

$$F'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\ dx,\ \ G'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\ dx$$

Отсюда $F(t) - G(t) = \widetilde{C}$. Заметим, что $F(c) = G(c) = 0 \Rightarrow \widetilde{C} = 0$. Значит, $F(t) = G(t)$, в частности для $t = d$. $\square$

4.2 Несобственные интегралы с параметром

Определение. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\;dx$$

Пусть на $Y \subset \mathbb{R}$:

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\;dx = F(y)$$

Если $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; A \in [a,\omega) : \forall a' > A,\; \forall y \in Y$:

$$\left| \int\limits_a^{a'} f(x,y)\;dx - F(y) \right| < \varepsilon$$

то

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\;dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y)$$

Далее, без ограничения общности будем писать $\omega = +\infty$.

Теорема. (Критерий Коши)

$$\int\limits_a^{a'} f(x,y)\;dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\;dx$$

тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; A > a,\; \forall a_1, a_2 > A,\; \forall y \in Y$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\;dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\;dx \right| = \left| \int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x,y)\;dx - \int\limits_{a_2}^{+\infty} f(x,y)\;dx \right| < 2\varepsilon$$

$(\Leftarrow)$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx \right| < \varepsilon$$

Тогда при $a_2 \to +\infty$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x,y)\ dx \right| \leq \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Рассмотрим

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\ dx,\ y \in Y$$

Если $\exists\ g(x)$ такая, что $|f(x,y)| < g(x)$ и сходится интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\ dx$$

то интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\ dx$$

сходится равномерно на Y.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx \right| \leq \int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)\ dx < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости)
Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)\ dx,\ y \in Y$$

Пусть $|f(x,y)|,\ |g(x,y)| < M$

$(\mathcal{A})$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

$g(x,y)$ монотонна $\forall y$. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)\ dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left|\ \int\limits_a^{A} f(x,y)\ dx\ \right| < M$$

$g(x,y)$ монотонна и $g(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)\ dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

Доказательство.

$$\left|\ \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)\ dx\ \right| = \left|\ g(a_1,y)\cdot\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)\ dx + g(a_2,y)\cdot\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)\ dx\ \right| \le$$

$$\le |g(a_1,y)|\cdot\left|\ \int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)\ dx\ \right| + |g(a_2,y)|\cdot\left|\ \int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)\ dx\ \right| = (*)$$

$(\mathcal{A}):\ \ (*) \le \varepsilon\cdot M + \varepsilon\cdot M$

$(\mathcal{D}):\ \ (*) \le \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M$ □

Теорема. Пусть $f(x,y)\in\mathcal{C}([a,+\infty)\times[c,d])$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$$

Тогда $F(y)\in\mathcal{C}[c,d]$.

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx\right| \le \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_a^{A} f(x,y+\Delta y)\ dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_a^{A} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_a^{A} f(x,y)\ dx\right| + \left|\int\limits_a^{A} f(x,y)\ dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx\right| < 3\varepsilon$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty) \times [c,d]),\ \exists\ f'_y(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty) \times [c,d])$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx = F(y),\ \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\ dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} G(y)$$

Тогда $\exists\ F'(y) = G(y)$.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to +\infty$ и

$$F_n(y) = \int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx$$

По теореме о дифференцировании функциональных последовательностей и теореме о дифференцировании собственных интегралов:

$$F'_n(y) \rightrightarrows G(y) \Rightarrow F'(y) = G(y)$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty) \times [c,d])$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \rightrightarrows F(y)$$

Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to +\infty$

$$F_n(y) = \int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx$$

Тогда по теореме для собственных интегралов:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^{x_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_c^d F_n(y)\ dy \right) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \right) dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{x_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

$\square$

Теорема. (Признак Дини равномерной сходимости последовательности)
Пусть $\forall n : f_n(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ \forall x \in [a,b] : f_n(x)$ монотонны по n и

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$$

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство.

$$\forall x_0 \in [a,b],\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_{\varepsilon,x_0},\ \forall n \geq N_{\varepsilon,x_0} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Отсюда $\exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$:

$|f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x) - f(x)| \leq |f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x) - f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x_0)| + |f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\varepsilon$

Из монотонности следует, что для всех номеров, больших данного, неравенство выполняется.
Рассмотрим накрытие:

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} B_{\delta_\varepsilon}(x) \Rightarrow \exists\ \{x_i\}_{i=1}^k,\ [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$$

Возьмем $N_\varepsilon = \max\limits_{i=1,\ldots,k}(N_{\varepsilon,x_i})$. Тогда

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n > N_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty) \times [b,+\infty)),\ f(x,y) \geq 0$. Пусть существует

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \in \mathcal{C}[b,+\infty)$$

и пусть существует

$$G(x) = \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\ dy \in \mathcal{C}[a,+\infty)$$

Если существует

$$\int\limits_b^{+\infty} F(y)\ dy = I$$

то существует

$$\int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I$$

Доказательство. Введем монотонные последовательности $a_n \to +\infty$, $b_k \to +\infty$

$$F_n(y) = \int\limits_a^{a_n} f(x,y)\ dx,\ G_k(x) = \int\limits_b^{b_k} f(x,y)\ dy$$

Заметим, что по признаку Дини

$$F_n(y) \rightrightarrows F(y),\ G_k(x) \rightrightarrows G(x)$$

по теореме для собственных интегралов

$$\int\limits_b^{b_k} \left(\int\limits_a^{a_n} f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^{a_n} \left(\int\limits_b^{b_k} f(x,y)\ dy \right) dx$$

Пусть

$$C_{nk} = \int\limits_b^{b_k} F_n(y)\ dy = \int\limits_a^{a_n} G_k(x)\ dx$$

Тогда

$$C_{nk} = \int\limits_b^{b_k} F_n(y)\ dy \leq \int\limits_b^{b_k} F(y)\ dy \leq \int\limits_b^{+\infty} F(y)\ dy = I$$

но с другой стороны

$$C_{nk} = \int\limits_a^{a_n} G_k(x)\ dx \leq \int\limits_a^{a_n} G(x)\ dx \to \int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I' \leq I$$

Теперь мы знаем, что существует интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I'$$

и можем повторить это рассуждение в другом порядке (сначала для G, а потом для F) и получить, что $I \leq I' \Rightarrow I = I'$. $\square$

Следствие. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty) \times [b,+\infty))$. Пусть существуют

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \in \mathcal{C}[b,+\infty),\ \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|\ dx$$

и пусть существуют

$$G(x) = \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\ dy \in \mathcal{C}[a,+\infty),\ \int\limits_b^{+\infty} |f(x,y)|\ dy$$

Если существуют

$$\int\limits_b^{+\infty} F(y)\ dy = I,\ \int\limits_b^{+\infty} |F(y)|\ dy$$

то существуют

$$\int\limits_a^{+\infty} G(x)\ dx = I,\ \int\limits_a^{+\infty} |G(x)|\ dx$$

Доказательство. Заметим, что $|f(x,y)| - f(x,y) \geq 0,\ |f(x,y)| \geq 0 \Rightarrow$ верны условия теоремы. □

Теорема. $\forall a \in \mathbb{R}:$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{sgn}(a)$$

Доказательство. Пусть

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\ dx,$$

Заметим, что $I(0) = 0,\ I(-a) = -I(a)$. Далее рассматриваем только $a > 0$. Введем

$$I(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot e^{-\varepsilon x}\ dx,\ \varepsilon \geq 0$$

Пусть $a \geq a_0 > 0,\ \varepsilon \geq 0$. По теоремам выше $I(a,\varepsilon)$ непрерывна.

$$I'_a(a,\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x}\ dx$$

при $a \geq a_0 > 0,\ \varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$. Интегрируем по частям:

$$I'_a(a,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a} \int\limits_0^{+\infty} \sin ax \cdot e^{-\varepsilon x}\ dx = \frac{\varepsilon}{a^2} - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \cos ax \cdot e^{-\varepsilon x}$$

$$I'_a(a,\ \varepsilon) \cdot (1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}) = \frac{\varepsilon}{a^2} \Rightarrow I'_a(a,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + a^2} \Rightarrow I_a(a,\varepsilon) = \arctan\frac{a}{\varepsilon} + C(\varepsilon)$$

При $a = 0 : I(a, \varepsilon) = 0 \Rightarrow C(\varepsilon) = 0$. Значит

$$I_a(a, \varepsilon) = \arctan \frac{a}{\varepsilon}$$

При $\varepsilon \to 0+$ из непрерывности

$$I(a) = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

5 Эйлеровы интегралы

5.1 Гамма-функция Эйлера

Рассмотрим последовательность

$$\Gamma_n(x) = \frac{(n-1)!\; n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)} \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

Преобразуем это выражение:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) = \prod_{k=1}^{n-1} k \cdot x(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1}) =$$

$$= (n-1)! \cdot x(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1})$$

$$n^x = \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

таким образом

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1})} \cdot \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n-1)^x}{(n-2)^x} \cdot \dots \cdot \frac{2^x}{1^x} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

Поскольку $(1+\frac{x}{k})^{-1}(1+\frac{1}{k})^x = 1 + O(\frac{1}{k^2})$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

Этот предел обозначают $\Gamma(x)$.

Определение. $\Gamma(x)$ называется гамма-функцией Эйлера.

Теорема. (Основное функциональное соотношение)
$\forall x \in D(\Gamma)$:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\; n^{x+1} \cdot \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k+1)(n-1)!\; n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n} = x$$

$\square$

Теорема. $\forall x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\, dt = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_0^1 (1-t)^n\, dt^x = \frac{n}{x} \int\limits_0^1 t^x (1-t)^{n-1}\, dt = \dots =$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \cdot \int\limits_0^1 t^{x+n-1}\, dt = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} =$$

$$= \frac{n!\ (n+1)^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} \cdot \frac{1}{(n+1)^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \cdot \Gamma_{n+1}(x)$$

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \cdot \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\, dt = \left| t = \frac{\tau}{n} \right| = \frac{(n+1)^x}{n^x} \cdot \int\limits_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n\, d\tau$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^x}{n^x} = 1$$

то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \tau^{x-1} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n\, d\tau = \Gamma(x)$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Таким образом, условия теоремы равносильны

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)\, dt = 0$$

$$e^{\alpha} \geq 1 + \alpha \ \Rightarrow\ e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \ \Rightarrow\ e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

отсюда

$$0 \leq \int\limits_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)\, dt$$

$$e^{\alpha} \geq 1+\alpha \;\Rightarrow\; e^{\frac{t}{n}} \geq 1+\frac{t}{n} \;\Rightarrow\; e^{t} \geq \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}$$

$$\int\limits_0^n t^{x-1}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right)\,dt = \int\limits_0^n t^{x-1}e^{-t}(1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n})\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^n t^{x-1}e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}\right)\,dt = \int\limits_0^n t^{x-1}e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right)\,dt \overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \int\limits_0^n t^{x-1}e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right)\,dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt \leq \frac{C}{n} \to 0$$

(1): По неравентсву Бернулли □

Утверждение.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Доказательство. Индукция по n. База $n=0$:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$$

Таким образом

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$$

Шаг: Пусть верно для n, то есть

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

По основному функциональному соотношению:

$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n\cdot(n-1)! = n!$$

□

Теорема. (Формула дополнения для гамма-функции Эйлера)
$\forall x \notin \mathbb{Z}$:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin{(\pi x)}}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma(1-x) = -x\cdot\Gamma(-x)$$

отсюда

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) =$$
$$= \frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\cdot(-x)\cdot\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x} =$$
$$= \frac{\pi}{\pi x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}\cdot 1 \overset{(1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

(1): по формуле разложения синуса в бесконечное произведение:

$$\sin(\pi x) = \pi x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

□

Пример. (Интеграл Эйлера-Пуассона)
Заметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Таким образом, можем посчитать интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5.2 Формула Стирлинга

Теорема. (Формула Стирлинга)
Для $|\alpha_n| \le 2$:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}\left(1+\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Доказательство.

$$n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$$

Исследуем подынтегральную функцию на максимум:

$$(t^n e^{-t})' = n\cdot t^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t} = 0 \;\Rightarrow\; t_{\max} = n \;\Rightarrow\; \max(t^n e^{-t}) = n^n e^{-n}$$

отсюда

$$n! = n^n e^{-n}\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t}\,dt$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{n\ln\frac{t}{n}+n-t}\, dt$$

Сделаем замену $-x^2 = n\ln\frac{t}{n} + n - t = n\ln\left(1+\frac{t-n}{n}\right) + n - t$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\ln(1+\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta\tau)^2},\ |\theta| < 1$$

$$n\ln\left(1+\frac{t-n}{n}\right) + n - t =$$
$$= n\left(\frac{t-n}{n} - \frac{(t-n)^2}{2n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\theta_n\cdot\frac{t-n}{n}\right)^2}\right) + n - t =$$
$$= -\frac{(t-n)^2}{2n}\cdot\frac{1}{\left(1+\theta_n\cdot\frac{t-n}{n}\right)^2}$$

отсюда, после раскрытия модуля

$$x = \frac{t-n}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{1}{1+\theta_n\cdot\frac{t-n}{n}} = \frac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n+\theta_n(t-n)}$$

$$nx + \theta_n(t-n)x = \sqrt{\frac{n}{2}}\cdot(t-n)$$

$$nx = (t-n)\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta_n x\right) \ \Rightarrow\ t-n = \frac{nx}{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x} \ \Rightarrow\ t = \frac{nx + n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x}$$

отсюда

$$dt = 2x\cdot\frac{nx+n(\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x)}{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x}\cdot\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x}{nx}\, dx =$$
$$= 2(x+\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta_n x)\, dx = (\sqrt{2n}+2(1-\theta_n)x)\, dx$$

после всех преобразований, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{n\ln\frac{t}{n}+n-t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cdot(\sqrt{2n}+2(1+\theta_n)x)\, dx =$$
$$= \sqrt{2\pi n} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-\theta_n)e^{-x^2}\, dx^2 = \sqrt{2\pi n} + \beta_n,\ |\beta| \le 4$$

итого

$$n! = n^n e^n(\sqrt{2\pi n}+\beta_n) = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}\left(1+\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right)$$

$\square$

5.3 Бета-функция Эйлера

Определение.

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,\ \alpha,\ \beta > 0$$

Утверждение. $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$

Доказательство.

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = |t = 1-x| = \int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = B(\beta, \alpha)$$

□

Утверждение.

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot B(\alpha, \beta)$$

Доказательство.

$$B(\alpha+1, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\frac{1}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha}\,d((1-x)^{\beta}) =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx = \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha+1, \beta)$$

□

Утверждение.

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = \left|t = \frac{1}{1+x}\right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\beta-1}(1+x)^{\alpha-1}(1+x)^2}\,dx$$

□

Теорема. (Связь между гамма и бета функциями)

$$B(\alpha,\ \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \alpha,\beta > 0$$

Доказательство. Сначала рассмотрим $\alpha,\ \beta > 1$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\cdot\Gamma(\alpha+\beta)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\cdot\left(\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\ dt\right)dx = |t = (1+x)y| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\cdot\left(\int\limits_0^{+\infty} (1+x)^{\alpha+\beta}\cdot y^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-y-yx}\ dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot y^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-y}\cdot e^{-yx}\ dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-y}\cdot\left(\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-yx}\ dx\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} y^{\beta-1}\cdot e^{-y}\cdot\left(\int\limits_0^{+\infty} (xy)^{\alpha-1}\cdot e^{-yx}\ d(yx)\right)dy =$$

$$= \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

Далее, используя рекуррентную формулу, распространяем на случай $\alpha,\beta > 0$. □

Замечание. Интегралы вида

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\theta x\cdot\cos^\kappa x\ dx$$

сводятся к бета-функции.

6 Ряды Фурье

Определение. Выражения вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называются тригонометрическими полиномами.

Определение. Система функций

$$\{1,\ \{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty},\ \{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}\}$$

называется тригонометрической системой.

Определение. Ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

называются тригонометрическими рядами.

Утверждение. (Свойства тригонометрической системы)

$$\int\limits_0^{\pi} 1\ dx = \pi$$

$$\forall n \geq 1\ \int\limits_0^{\pi} \sin^2(nx)\ dx = \int\limits_0^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall m, n \geq 1,\ m \neq n\ \int\limits_0^{\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx)\ dx = \int\limits_0^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\ dx = 0$$

$$\forall n \geq 0, m \geq 1\ \int\limits_0^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx)\ dx = 0$$

Доказательство. Очев. □

Следствие. Тригонометрическая система ортогональна относительно канонического скалярного произведения для функций (интеграл).

Теорема. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$$

Тогда
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx$$

Доказательство. $\forall k$
$$\frac{a_0}{2}\sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\sin(kx)\cos(nx) + b_n\cdot\sin kx\sin nx) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)\sin(kx)$$

По теореме о почленном интегрировании:
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx = \frac{1}{\pi}b_k\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)\ dx$$

Аналогично a_k. $\square$

Определение. Пусть существуют интегралы
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\ dx$$

Тогда числа
$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\ dx, \quad b_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\ dx$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$, а ряд
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(nx) + b_n\cdot\sin(nx))$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Теорема. Пусть существуют интегралы
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

а также
$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cdot\cos(nx) + b_n\cdot\sin(nx))$$

Тогда
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_N(x))^2\ dx = \min_T\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_N(x))^2\ dx$$

где T_N - тригонометрический полином степени не выше N.

Доказательство. Пусть

$$T_N = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx)\right)$$

— произвольный тригонометрический полином степени N с коэффициентами: A_0, A_n, B_n.

Хотим минимизировать:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2 \, dx$$

Раскрываем квадрат:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_N^2 \, dx$$

Вычислим:

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N \, dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N \, dx = \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f \, dx + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx + B_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx \right)$$

Используем определение коэффициентов Фурье:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \, dx = \pi \cdot a_0, \ \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \cos(nx) \, dx = \pi \cdot a_n, \ \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \sin(nx) \, dx = \pi \cdot b_n$$

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_N \, dx = \pi \left(\frac{A_0 \cdot a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (A_n a_n + B_n b_n) \right)$$

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} T_N^2 \, dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_N^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 \, dx + \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx)\right)^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{A_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(A_n^2 + B_n^2\right)$$

Возвращаемся к I:

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2 \ dx - 2\pi \left(\frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (A_n a_n + B_n b_n) \right) + \pi \cdot \frac{A_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(A_n^2 + B_n^2 \right)$$

Члены с A_0:

$$\pi \cdot \frac{A_0^2}{2} - 2\pi \cdot \frac{A_0 a_0}{2} = \pi \left(\frac{A_0^2}{2} - A_0 a_0 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} \left(A_0 - a_0 \right)^2 - \frac{1}{2} a_0^2 \right)$$

Члены с A_n, B_n:

$$\pi A_n^2 - 2\pi A_n a_n = \pi((A_n - a_n)^2 - a_n^2)$$

$$\pi B_n^2 - 2\pi B_n b_n = \pi((B_n - b_n)^2 - b_n^2)$$

Получаем:

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2 \ dx + \frac{\pi}{2} \left(A_0 - a_0 \right)^2 + \pi \sum_{n=1}^{N} \left((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2 \right) - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$$

Обозначим (не зависит от A_0, A_n, B_n)

$$C = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2 \ dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$$

Итог:

$$I = C + \frac{\pi}{2} \left(A_0 - a_0 \right)^2 + \pi \sum_{n=1}^{N} \left((A_n - a_n)^2 + (B_n - b_n)^2 \right)$$

Поскольку $\pi > 0$ ясно, что I минимально, когда все квадраты равны нулю $\implies$

$$A_0 = a_0, \ A_n = a_n, \ B_n = b_n, \ \forall n$$

$\implies T_N(x) = F_N(x)$ □

Следствие. (Неравенство Бесселя)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \ dx$$

Доказательство. Из доказательства теоремы, заметим, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \ dx - \pi \cdot \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) - \pi \cdot \frac{a_0^2}{2} \geq 0$$

это так, поскольку это часть слагаемых вычисленного интеграла от квадрата функции. Отсюда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

□

Следствие. При $n \to \infty$ выполнено, что $a_n \to 0,\ b_n \to 0$

Доказательство. При $n \to \infty$ ряд сходится, значит, по необходимому условию сходимости, выполнено $a_n \to 0, b_n \to 0$. □

6.1 Ядро Дирихле

Определение. N-м ядром Дирихле называется

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos{(nx)}$$

Теорема. (Свойства ядер Дирихле)

1. D_N непрерывная, четная и 2π-периодичная функция.
2. $D_N(0) = N + \frac{1}{2}$
3. $$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\ dx = 1$$
4. $\forall x \ne 2\pi k$.
$$D_N(x) = \frac{\sin{((N + \frac{1}{2})x)}}{2 \cdot \sin{(\frac{x}{2})}}$$

Доказательство.

1. Очев
2. $D_N(0) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N} \cos 0 = N + \frac{1}{2}$
3. $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos{(nx)}\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\ dx + \sum_{n=1}^{N} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos{(nx)}\ dx\right) = \pi$$

4. Умножим обе части на $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)D_N(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sum_{n=1}^{N}2\cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2\cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(nx-\frac{x}{2}\right)$$

Подставляем в сумму:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)D_N(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sum_{n=1}^{N}\left(\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)-\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)\right)$$

Все промежуточные слагаемые сокращаются, остаётся:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)D_N(x)=\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)$$

Отсюда, при $x\neq 2\pi k$:

$$D_N(x)=\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

□

Замечание.

$$F_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx))=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\cos(nx)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt+\sin(nx)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\cdot\sum_{n=1}^{N}(\cos(nx)\cos(nt)+\sin(nx)\sin(nt))\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\cdot\sum_{n=1}^{N}\cos(n(x-t))\right)dt=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot D_N(x-t)\,dt\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-\tau)D_N(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-\tau)D_N(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+\tau)D_N(\tau)\,d\tau$$

(1): Сделаем замену $t=x-\tau$. Отсюда

$$F_N(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+\tau)+f(x-\tau))D_N(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+\tau)+f(x-\tau))D_N(\tau)\,d\tau$$

Замечание. Из неравенства

$$|f(x)| \le \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

следует, что если существует интерал от квадрата, то существует и от модуля.

Теорема. (Принцип локализации Римана)
Пусть существуют интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

Тогда существование предела

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cdot \cos{(nx_0)} + b_n \cdot \sin{(nx_0)}) \right) = A$$

равносильно тому, что $\forall \delta > 0$ существует

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t)\ dt = A$$

Доказательство.

$$F_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) D_N(t))\ dt$$

значит, формулировка теоремы равносильна утверждению, что $\forall \delta > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\delta}^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) D_N(t)\ dt = 0$$

Выразим ядро Дирихле в явной форме:

$$D_N(t) = \frac{\sin{((N + \frac{1}{2})t)}}{2 \cdot \sin{(\frac{t}{2})}} = \frac{\sin{(Nt)}\cos{(\frac{t}{2})} + \cos{(Nt)}\sin{(\frac{t}{2})}}{2 \cdot \sin{(\frac{t}{2})}} = \\ = \frac{1}{2} \left(\cos{(Nt)} + \operatorname{ctg}{(\frac{t}{2})} \sin{(Nt)} \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{\delta}^{\pi} \cdot \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \cdot \cos{(Nt)}\ dt + \\ + \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \cdot \operatorname{ctg}{(\frac{t}{2})} \sin{(Nt)}\ dt = I_1 + I_2$$

Определим две вспомогательные функции на $[-\pi, \pi]$:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}, \ t \in [\delta, \pi] \\ 0, \ t \in [-\pi, \delta] \end{cases} \implies I_1 = a_N(h) \to 0, \ N \to \infty$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \ t \in [\delta, \pi] \\ 0, \ t \in [-\pi, \delta) \end{cases} \implies I_2 = b_N(g) \to 0, \ N \to \infty$$

По следствию коэффициенты Фурье интегрируемой функции стремятся к 0 $\square$

Теорема. (Признак сходимости Дини ряда Фурье)
Пусть $f(x)$ - 2π периодическая, существуют интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

для $x_0 \in [-\pi, \pi]$ существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f_-(x_0), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f_+(x_0)$$

Если $\forall \delta > 0$ таких, что существует интеграл

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t}\ dt$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 и равен $\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t))D_N(t)\ dt - \frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0))D_N(t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\delta} (f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\ dt +$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)) \cdot \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\ dt$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt < \varepsilon$$

$|I_2| < \varepsilon$ при большом N очевидно (как в принципе локализации Римана). $\square$

Определение. Гёльдерова функция - это функция, для которой выполнено:

$$|f(x)-f(y)| \leq C \cdot |x-y|^{\alpha}$$

Определение. Условие Гёльдера в точке x_0 для односторонних пределов:
$\exists C > 0, \alpha > 0, \delta > 0 \ : \ \forall t \in (0, \delta) :$

$$|f(x_0+t)-f_+(x_0)| \leq Ct^{\alpha},\ |f(x_0-t)-f_-(x_0)| \leq Ct^{\alpha}$$

Следствие. Если функция удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0 (хотя бы односторонне), то теорема о сходимости Дини выполнима, т.е. ряд Фурье в этой точке сходится к среднему арифметическому односторонних пределов.

Теорема. Пусть f - 2π периодическая, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, везде кроме конечного числа точек (на периоде) $\exists\ f'(x)$ и $f'(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \rightrightarrows f(x)$$

Доказательство. Из условий теоремы существует интерал

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\, dx,\ f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx))$$

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n},\ b_n = \frac{\alpha_n}{n}$$

и, поскольку (используя неравенство: $2|ab| \leq a^2 + b^2$)

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right),\ |b_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$\square$

Следствие. Если $f'(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и Гёльдерова во всех точках, то ряд Фурье $f(x)$ можно почленно дифференцировать.

Доказательство. очев. $\square$

Замечание. (Про почленное интегрирование)
Пусть
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$
$$\int\limits_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \cdot \sin(nx) - \frac{b_n}{n} \cdot \cos(nx)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$
$$\frac{|\alpha_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right), \ \frac{|\beta_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Примеры.

1. Возьмем $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на $(0, \pi)$ и продолжим ее периодически нечетным образом.
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \cdot \sin(nx)\ dx =$$
$$= \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{\pi - x}{2} \cdot \cos(nx)|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int\limits_0^{\pi} \cos(nx)\ dx =$$
$$= -\frac{2}{\pi n} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

2. Возьмем $f(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$ и периодически продолжим.
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\ dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos(nx)\ dx = -\frac{2}{\pi n} \int\limits_0^{\pi} \sin(nx)\ dx =$$
$$= \frac{2}{\pi n^2} \cdot \cos(nx)|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ -\frac{4}{\pi(2k+1)^2},\ n = 2k+1 \end{cases}$$
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

Отсюда, поскольку ряд сходится равномерно от непрерывной функции к непрерывной функции, то можно подставить 0 и получить

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

отсюда можно получить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6.2 Ядро Фейера

Определение. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos{(nx)} + b_n \cdot \sin{(nx)})$$

значит, существуют $D_N(x)$
Обозначим:

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cdot \cos{(nx)} + b_n \cdot \sin{(nx)})$$

Тогда:

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=0}^{N} F_N(x)$$

называются суммами Фейера.

$$\Psi_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{n=0}^{N} D_N(x)$$

называются ядрами Фейера.

Лемма. (Свойства ядер Фейера)

1. $\psi_N(x)$ - 2π периодическая, непрерывная, четная.

2. $$\Psi_N(x) = \frac{\sin^2{(\frac{N+1}{2} \cdot x)}}{2(N+1) \cdot \sin^2(\frac{x}{2})}$$

3. $$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x)\ dx = 1$$

4. $\forall \delta > 0:$

$$\int_{\delta}^{\pi} \Psi_N(x)\ dx \to 0$$

при $N \to \infty$.

5. $\Psi_N(x) \geq 0$

Доказательство.

2.
$$\sum_{n=0}^{N} D_N(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N} \sin\left(Nx + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4.
$$0 \leq \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2} \cdot x\right)}{2(N+1) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\ dx \leq \frac{1}{2(N+1)} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{C}{2(N+1)}$$

$\square$

Теорема. (Теорема Фейера)

Если $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и 2π периодическая, то $\Phi_N(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x)$

Доказательство.

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\ dt \cdot \cos(nx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\ dt \cdot \sin(nx) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(n(t-x)) dt \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \cdot D_N(t)\ dt$$

Получили:

$$F_N(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \cdot f(t+x)\ dt$$

отсюда

$$\Phi_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(t) f(t+x)\ dt$$

$$|\Phi_N(x) - f(x)| = \frac{1}{\pi} \cdot \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(x) \cdot (f(t+x) - f(x))\ dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)|\ dt + \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)|\ dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{\delta}^{\pi} \Psi_N(t) \cdot |f(t+x) - f(x)|\ dt \le \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot 2M \cdot 2$$

(будет пояснено) □

Теорема. (Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции на отрезке многочленами)
Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, а также $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon(x)$ такой, что

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b]$$

Доказательство. Линейной заменой получим, что достаточно доказать для отрезка $[0, \pi]$, затем непрерывно продолжаем ее до отрезка $[-\pi, \pi]$. Тогда по теореме Фейера существует тригонометрический многочлен, приближающий функцию. Затем раскладываем синусы и косинусы по формулам Тейлора и получаем утверждение теоремы.
(была доказана устно, тоже будет пояснено) □

Теорема. (Равенство Парсеваля)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2\ dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx +$$

$$+ 2\left(\frac{a_0}{2} - \frac{A_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N}((a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2) - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ T_N(x)$ такой, что

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_N(x))^2\ dx \ge \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)$$

отсюда

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

значит

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx$$

$\square$

Список литературы

[1] Лекции по математическому анализу, 1 семестр, Подольский В.Е., 2024

[2] Лекции по математическому анализу, 2 семестр, Подольский В.Е., 2025

[3] Лекции по математическому анализу, 3 семестр, Подольский В.Е., 2019