Математический анализ-3

Лектор: проф. Подольский Владимир Евгеньевич

11 октября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Контакты: Telegram, GitHub

Содержание

1 Ряды

1.1 Определение ряда и простейшие свойства

Определение. Пара последовательностей

$$a_n,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n называется общим членом ряда, S_n называется частичной суммой ряда.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется сходящимся, а S - суммой ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

тогда ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

называется остаточным рядом.

Теорема. (Критерий Коши сходимости ряда)
Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall k, m > N_\varepsilon : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию коши для последовательности S_n:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n \right| = |S_m - S_k| < \varepsilon$$

□

Теорема. Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и они сходятся, тогда $\forall c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряды

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

также сходятся.

Доказательство. Очев. □

Теорема. (Необходимое условие сходимости ряда)
Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $a_n \to 0$.

Доказательство. Ряд сходится, значит существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

1.2 Знакопостоянные ряды

В этом разделе считаем, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ или $a_n \leq 0$.

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0 \tag{$*$}$$

Если последовательность S_n ограничена, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n > 0$, то последовательность S_n возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса у S_n существует предел, значит ряд $(*)$ сходится. $\square$

Теорема. (Признак сравнения)
Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \geq 0) \tag{2}$$

и $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится.

2. если ряд (1) расходится, то ряд (2) расходится.

Доказательство. Следует из неравенства на частичные суммы

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$$

$\square$

Теорема. (Признак сравнения в предельной форме)
Пусть даны ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n > 0)$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такой, что

$$0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$$

$$(c - \varepsilon) \cdot b_n < a_n < (c + \varepsilon) \cdot b_n$$

по признаку сравнения получаем утверждение теоремы. $\square$

Примеры.

1. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
расходится по Критерию Коши.

2. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
при $\alpha < 1$ расходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

3. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$
сходится.

4. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$
сходится по признаку сравнения с рядом из предыдущего примера.

Упражнение. Доказать, что при $\alpha > 1$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$
сходится.

Теорема. (Признак Коши)
Пусть дан ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$
такой, что $\forall n : a_n \geq 0$.

1. Если $\forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд $(*)$ сходится.

2. Если $\exists \, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n \Rightarrow$ ряд $(*)$ сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии.

2. $\sqrt[n]{a_{n_k}} \geq 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Следствие. (Признак Коши в предельной форме)

1. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$
то ряд $(*)$ сходится

2. Если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$$
то ряд $(*)$ расходится

Доказательство.

1. $q < 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} < Q < 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ сходится.

2. $q > 1$, значит, начиная с некоторого номера, выполнено: $\sqrt[n]{a_n} > 1$ следовательно, по утверждению теоремы ряд $(*)$ расходится.

$\square$

Пример. При $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1.
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$
и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
расходится.

2.
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$$
и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
сходится.

Теорема. (Интегральный признак)
Пусть $f(x)$ определена на $[1,+\infty)$, монотонно убывает и неотрицательна (монотонно возрастает и неположительна). Тогда ряд и интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n), \ \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\ dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $f(x)$ монотонно убывает, значит $\forall k \in \mathbb{N}$ и $x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрируем неравенство на этом отрезке:

$$f(k) \geq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\ dx \geq f(k+1)$$

теперь просуммируем

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) \geq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\ dx \geq \sum_{k=2}^{N+1} f(k)$$

отсюда получаем утверждение теоремы. □

Пример. (Степенно-логарифмическая шкала)

1. $$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

2. $$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\beta} x} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

   значит

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n} \text{ при } \begin{cases} \beta > 1 - \text{сходится} \\ \beta \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

3. $$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\gamma}(\ln x)} \text{ при } \begin{cases} \gamma > 1 - \text{сходится} \\ \gamma \leq 1 - \text{расходится} \end{cases}$$

шкалу можно продолжать дальше.

Теорема. (Схема Куммера) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0 \tag{$*$}$$

1. Если $\forall n \geq N$ существует последовательность $\{c_n\}_{n=N}^{\infty}, \ c_n > 0$ и существует $\alpha > 0$ такие, что
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \alpha$$
то ряд $(*)$ сходится.

2. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$
расходится и
$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$
то ряд $(*)$ расходится.

Доказательство.

1. Рассмотрим неравенства для $n = N, \ N+1, \ \ldots, \ N+k-1$:
$$\begin{cases} c_N \cdot a_N - c_N \cdot a_{N+1} \geq \alpha \cdot a_{N+1}, \\ \qquad \vdots \\ c_{N+k-1} \cdot a_{N+k-1} - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot a_{N+k}. \end{cases}$$
сложив все неравенства, получим
$$c_N \cdot a_N - c_{N+k} \cdot a_{N+k} \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$
поскольку $c_{N+k} \cdot a_{N+k} > 0$, то
$$c_N \cdot a_N \geq \alpha \cdot \sum_{m=1}^{k} a_{N+m}$$
значит
$$\sum_{m=1}^{k} a_{N+m} \leq \frac{c_N \cdot a_N}{\alpha}$$
и ряд сходится.

2.

$$c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Рассмотрим неравенства для $n = N,\ N+1,\ \ldots,\ N+k-1$:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{N+1}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ \vdots \\ \frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_{N+k-1}}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \end{cases}$$

перемножив все неравенства, получим

$$\frac{\frac{1}{c_{N+k}}}{\frac{1}{c_N}} \leq \frac{a_{N+k}}{a_N}$$

$$\frac{1}{c_{N+k}} \leq \frac{1}{a_N \cdot c_N} \cdot a_{N+k}$$

отсюда, по признаку сравнения, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

расходится, значит расходится и ряд $(*)$.

$\square$

Примеры. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

1. (Признак Д'Аламбера)
   Возьмем $c_n = 1$:

   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \alpha$$

   значит если

   $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \alpha$$

   то ряд $(*)$ сходится. Если

   $$1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$$

значит если
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$$
то ряд (∗) расходится. Запишем в предельной форме:
Если
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q > 1$$
то ряд (∗) сходится. Если
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q < 1$$
то ряд (∗) расходится.

2. (Признак Раабе)
   Возьмем $c_n = n$:
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \geq \alpha$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq 1 + \alpha$$
   то ряд (∗) сходится. Теперь
   $$n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \leq 0$$
   Значит если
   $$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$$
   то ряд (∗) расходится. Запишем в предельной форме:
   Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q > 1$$
   то ряд (∗) сходится. Если
   $$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = q < 1$$
   то ряд (∗) расходится.

3. (Признак Бертрана, без доказательства, знать формулировку)
   Возьмем $c_n = n \cdot \ln(n)$ Если
   $$\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1) \geq 1 + \alpha$$

то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1) \leq 1$$

то ряд $(*)$ расходится. Запишем в предельной форме:
Если

$$\exists \lim_{n\to\infty}(\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1)) = q > 1$$

то ряд $(*)$ сходится. Если

$$\exists \lim_{n\to\infty}(\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}}) - 1)) = q < 1$$

то ряд $(*)$ расходится.

4. (Признак Гаусса, без доказательства, знать формулировку)
Выводится из признака Бертрана.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

где θ_n - ограниченная последовательность, $\varepsilon > 0$ - произвольное. Тогда при

   (a) $\lambda > 1 \Rightarrow (*)$ сходится, $\lambda < 1 \Rightarrow (*)$ - расходится.
   (b) $\lambda = 1 : \mu > 1 \Rightarrow (*)$ сходится, $\mu < 1 \Rightarrow (*)$ расходится.
   (c) $\lambda = 1,\ \mu = 1 \Rightarrow (*)$ расходится.

1.3 Знакопеременные ряды

Определение. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Утверждение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. По критерию Коши:

$$\left| \sum_{n=k}^{N} a_n \right| \le \sum_{n=k}^{N} |a_n| < \varepsilon$$

$\square$

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой натурального ряда.

Теорема. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

абсолютно сходится, то для любой перестановки σ натурального ряда, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tag{2}$$

абсолютно сходится и их суммы равны.

Доказательство. Пусть $a_n \ge 0$. Рассмотрим

$$S_k^\sigma = \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)}$$

Пусть $N = \max\limits_{1 \le n \le k} \sigma(n),\ S_n \to S$. Тогда

$$S_k^\sigma \le S_N \Rightarrow S_k^\sigma \le S \Rightarrow \exists\ S^\sigma = \lim_{k \to \infty} S_k^\sigma$$

Используя, что (2) абсолютно сходится, аналогично, поменяв ряды местами, получим:

$$S \le S^\sigma \Rightarrow S = S^\sigma$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$$

заметим, что

$$a + |a| = \begin{cases} 2a,\ a \ge 0, \\ 0,\ a < 0. \end{cases}$$

значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|)$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

□

Определение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

а также всевозможные попарные произведения

$$\{a_n \cdot b_k\}_{n=1, k=1}^{\infty, \ \infty}$$

Будем записывать ряд по схеме:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

То есть, запишем в порядке:

$$a_1b_1, \ a_1b_2, \ a_2b_2, \ a_2b_1, \ a_1b_3, \ a_2b_3, \ a_3b_3, \ a_3b_2, \ a_3b_1, \ \ldots$$

Тогда ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_nb_k)_m$$

называется произведением рядов по прямоугольной схеме (∗).

Утверждение. Пусть два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

сходятся абсолютно. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_nb_k)_m \tag{$*$}$$

сходится абсолютно и равен AB.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм ряда $(*)$, которые имеют вид S_{N^2}:

$$S_{N^2} = S_N^a \cdot S_N^b \Rightarrow S_{N^2} \to AB,\ N \to \infty$$

Теперь перейдем к общему виду $S_{N^2+M},\ (1 \leq M \leq 2N)$ и покажем, что вклад членов, добавляемых к квадратной частичной сумме, бесконечно мал

$$S_{N^2+M} = S_{N^2} + \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

обозначим

$$S_{N,M} = S_{N^2+M} - S_{N^2} = \sum_{m=N^2+1}^{N^2+M} (a_n \cdot b_k)_m$$

$$|S_{N,M}| \leq |b_{N+1}| \cdot (|a_1| + \cdots + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \cdot (|b_1| + \cdots + |b_N|) \to 0$$

поскольку частичные суммы каждого ряда ограничены и члены, по необходимому признаку, стремятся к нулю. Значит $S_{N^2+M} \to AB$. □

Определение. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{$*$}$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится, то ряд $(*)$ называется условно сходящимся.

Утверждение. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

условно сходится. Обозначим

$$a_n^+ \begin{cases} a_n,\ a_n > 0, \\ 0,\ a_n \leq 0. \end{cases},\ a_n^- = \begin{cases} 0,\ a_n \geq 0, \\ a_n,\ a_n < 0. \end{cases}$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \tag{2}$$

расходятся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

Доказательство. Если оба ряда сходятся, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$
сходится, противоречие. Если ряд (1) сходится, а (2) расходится, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$
сходится, противоречие. Аналогичное противоречие в случае, когда (2) сходится, а (1) расходится. Значит оба ряда расходятся. □

Теорема. (Теорема Римана)
Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
сходится условно, то $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ \sigma_a$ такая, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_a(n)} = a$$
$\exists\ \sigma_{\pm\infty}$ такая, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_{\pm\infty}} = \pm\infty$$
$\exists\ \sigma$ такая, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$
расходится, но частичные суммы ограничены.

Доказательство. доказали картинками)))))
доказательство появится немного позже □

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

($\mathcal{A}$): Если
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
сходится, а b_n монотонна и ограничена, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$
сходится.

$(\mathcal{D})$: Если существует M такая, что $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < M$$

и b_n монотонно сходится к 0, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

сходится.

Доказательство. Оценим

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n \right|$$

Введем

$$A_p = \sum_{n=k}^{p} a_n, \ A_{k-1} = 0 \ \Rightarrow \ a_n = A_n - A_{n-1}$$

отсюда

$$\sum_{n=k}^{m} a_n \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1} \cdot b_n =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} A_n \cdot b_n - \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m$$

$(\mathcal{A})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \le \varepsilon \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < \varepsilon \cdot 3B$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left| \sum_{n=k}^{m-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_m \cdot b_m \right| \le 2M \cdot (|b_k - b_m| + |b_m|) < 6M \cdot \varepsilon$$

□

Следствие. (Признак Лейбница)
Если a_n монотонно убывает и $a_n \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \qquad (*)$$

сходится

Доказательство.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \le 1, \ \forall N \in \mathbb{N}$$

Значит, по признаку Дирихле, ряд $(*)$ сходится. □

1.4 Функциональные последовательности и ряды

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in A$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

то говорят, что $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на A поточечно.

Примеры.

1. $\forall x \in [0,1]$:
$$x^n \to \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1). \end{cases}$$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\sin\frac{x}{n} \to 0$$

Определение. Пусть $\forall n : f_n(x)$ определены на $A \subset \mathbb{R}$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon,\; \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

то говорят, что $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на A, и пишут $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Примеры.

1. На $[0,1]$
$$x^n \not\rightrightarrows \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1]. \end{cases}$$
поскольку $\exists\; \varepsilon_0 > 0,\; \forall N_\varepsilon \;\exists\; n > N_\varepsilon,\; \exists\; x_{\varepsilon_0} \in [0,1)$ такой, что $x_{\varepsilon_0}^n > \varepsilon_0$.
2. на $[0, \frac{1}{2}] : x^n \rightrightarrows 0$.
3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0,1] : f_n \rightrightarrows 0$.
$$f_n' = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) = n \cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}},\; f_n(x_n) = \frac{1}{4}$$
4. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \not\rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$, но $\forall a, b,\; \forall x \in [a,b] : \sin\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$.

Теорема. (Первый критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \;\Leftrightarrow\; \sup_A |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $\forall x \in A$:

$$\sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

значит $x \in A$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Второй критерий равномерной сходимости последовательности)

$$f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x) \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon : \forall k, m > N_\varepsilon, \ \forall x \in A : |f_k(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:

$$|f_k(x) - f_m(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq$$
$$\leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$$

$(\Leftarrow)$: Для каждого $x \in A$ применим критерий Коши для последовательностей. Значит, есть поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$. Тогда после предельного перехода получим, что $\forall x \in A$:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\square$

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимотси последовательности) Пусть $\forall x \in A : f_n(x) \to f(x)$. Если

$$\exists \ \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \ c_n \geq 0, \ c_n \to 0 : |f_n(x) - f(x)| \leq c_n \Rightarrow f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x)$$

Доказательство. Перейдем к супремуму:

$$0 \leq \sup_A |f_n(x) - f(x)| \leq c_n < \varepsilon$$

$\square$

Теорема. Пусть $f_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in A$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall n > N,\ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмем $n > N_\varepsilon$ и запишем определение непрерывности:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

□

Теорема. Пусть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f_n \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^x f_n(t)\ dt\ \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_a^x f_n(t)\ dt - \int\limits_a^x f(t)\ dt \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \cdot |b-a| < \varepsilon \cdot |b-a|$$

□

Теорема. (Теорема о почленном дифференцировании функциональных последовательностей)
Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ такая, что $f_n(x) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ \exists\ x_0 \in [a,b]$:

$f_n(x_0) \to \alpha$. Пусть $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$. Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),\ f(x) \in \mathcal{C}^1[a,b]$ и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. По предыдущей теореме и формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\ dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt\ \Rightarrow\ f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt$$

отсюда

$$f_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x g(t)\ dt + \alpha = f(x)$$

□

Определение. Рассмотрим $\{a_n(x)\}$, определенные на $A \subset \mathbb{R}$. Пара последовательностей

$$\{\{a_n(x)\},\ \{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\}\}$$

называется функциональным рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

1. Если $\forall x \in A$ ряд (1) сходится к $S(x)$, то говорят, что ряд сходится поточечно.
2. Если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, то говорят, что ряд (1) сходится равномерно.
3. Если сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \tag{2}$$
то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то ряд (1) сходится условно.

Теорема. (Критерий Коши для функциональных рядов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m, k > N_\varepsilon,\ \forall x \in A : \left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. По критерию Коши для функциональных последовательностей

$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| = |S_m(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

□

Теорема. (Необходимое условие равномерной сходимости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

тогда и только тогда, когда $|a_n(x)| \overset{A}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство.

$$|a_n(x)| = |S_n - S_{n-1}| \rightrightarrows S(x) - S(x) = 0$$

$\square$

Теорема. Пусть $\forall n : a_n(x)$ определены на A и непрерывны в точке $x_0 \in A$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $S_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$ и $\forall n : a_n(x)$ непрерывна в точке x_0. Значит, $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0 и по теореме для функциональных последовательностей, $S(x)$ непрерывна в точке x_0. $\square$

Теорема. Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right) \rightrightarrows \int_a^x S(t)\ dt$$

Доказательство.

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt = \lim_{k \to \infty} \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{k} a_n(t) \right) dt =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_n(t)\ dt \right)$$

$\square$

Теорема. (Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов) Пусть $a_n(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \alpha$$

$x_0 \in [a, b]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$$

Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ S'(x) = g(x)$$

Доказательство. Очевидно по аналогичной теореме для функциональной последовательности $S_n(x)$. □

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Пусть $\forall n : |a_n(x)| < \alpha_n,\ \forall x \in A$. Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$
сходится, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Доказательство. По критерию Коши:
$$\left| \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n < \varepsilon$$
□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле)
Рассмотрим пару последовательностей $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty},\ \{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на A.

($\mathcal{A}$:) Пусть
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$
и $\exists\ M > 0,\ \forall x \in A,\ \forall n : |b_n(x)| < M$ и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$.

($\mathcal{D}$:) Пусть $\forall x \in A,\ \exists\ M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}:$
$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right| \leq M$$
и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in A$, причем $b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{A}{\rightrightarrows} S(x)$$

Доказательство. Аналогично как для числовых рядов. Введем:

$$A_p(x) = \sum_{n=k}^{p} a_n(x),\ \ A_{k-1}(x) = 0 \ \Rightarrow\ a_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

отсюда

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m} a_n(x)b_n(x) &= \sum_{n=k}^{m}(A_n(x) - A_{n-1}(x))\ b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^{m} A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k+1}^{m} A_{n-1}(x)b_n(x) = \\ &= \sum_{n=k}^{m} A_n(x)b_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)b_{n+1}(x) = \\ &= \sum_{n=k}^{m-1} A_n(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_m(x)b_m(x)\end{aligned}$$

$(\mathcal{A})$: $|*| \le \varepsilon \cdot |b_k(x) - b_m(x)| + |b_m(x)| < \varepsilon \cdot 3M$

$(\mathcal{D})$: $|*| \le 2M \cdot 3\varepsilon$

$\square$

1.5 Степенные ряды

Определение. Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называются степенными рядами. a_n - коэффициэнты степенного ряда, x_0 - центр разложения.

Замечание. В центре разложения ряд сходится.

Замечание. Сдвиг $x - x_0 \mapsto x$ не ограничивает общность ряда, поэтому будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема. (Первая теорема Абеля)
Рассмотрим стеепнной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

Если существует $x' \in \mathbb{R}$, что $(*)$ сходится в точке x', то для любых x, таких, что $|x| < |x'|$ ряд $(*)$ сходится. Если существует $x'' \in \mathbb{R}$, что ряд $(*)$ расходится в точке x'', то для любых x, таких что $|x| > |x''|$ ряд $(*)$ расходится.

Доказательство. Пусть $x : |x| < |x'|$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n (x')^n| \cdot \left| \frac{x}{x'} \right|^n \right) \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x'} \right|^n$$

Ряд сходится по признаку сравнения с рядом геометрической прогрессии. Теперь пусть $x : |x| > |x''|$. От противного: пусть есть точка $y : |y| > |x''|$ в которой ряд сходится. Тогда, по первой части теоремы, ряд сходится во всех точках $x : |x| < |y|$, а значит и в x'' - противоречие. □

Замечание. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{$*$}$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - все точки, в которых ряд $(*)$ сходится, $A \neq \varnothing$, так как $\{0\} \in A$.
Пусть $B \subset \mathbb{R}$ - все точки в которых ряд $(*)$ расходится и пусть $B \neq \varnothing$.
Тогда из первой теоремы Абеля следует, что $A = \{0\}$ или $\exists\ a > 0 : (-a, a) \subset A$, а также $\exists\ b > 0 : (-\infty, -b) \cap (b, +\infty) \subset B$.

Утверждение. $a = b$

Доказательство. Предположим что это не так, тогда $a < b$ $(b < a)$. По аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$. Значит c не лежит ни в A ни в B, а такого быть не может, противоречие. □

Определение. $a = b$ называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R. Если $R = 0$, то $A = \{0\}$, если $B = \varnothing$, то $R := +\infty$.

Теорема. (Формула Коши-Адамара)
Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Если предел равен нулю, то $R = +\infty$. Если предел равен бесконечности, то $R = 0$.

Доказательство. Применим признак Коши к ряду

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \frac{1}{R} = \begin{cases} l < 1 \ - \ \text{сходится, и } |x| < R, \\ l > 1 \ - \ \text{расходится, и } |x| > R \end{cases}$$

□

Теорема. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \tag{$*$}$$

и пусть $R > 0$.

1. $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ряд равномерно сходится.
2. $S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t)\ dt$$
4. $S(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(-R, R)$.

Доказательство.

1. $|a_n x^n| = |a_n| \cdot (R-\varepsilon)^n$ по признаку Вейерштрасса.
2. из пункта 1: $\forall \varepsilon > 0 : S(x) \in \mathcal{C}[-R+\varepsilon, R-\varepsilon] \Rightarrow S(x) \in \mathcal{C}(-R, R)$.
3. Поскольку ряд $(*)$ равномерно сходится на любом отрезке внутри $[-R, R]$, то
$$\int_0^x S(t)\ dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n\ dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
4. Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
значит $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\alpha} x^n$$
имеет, по формуле Коши-Адамара, тот же радиус сходимости R. Тогда, По теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов, получим утверждение пункта.

$\square$

Теорема. (Вторая теорема Абеля)
Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ \ R > 0$$

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится. Тогда $S(x) \in \mathcal{C}[0, R]$ то есть

$$\exists \lim_{x \to R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = S(R)$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R} \right)^n$$

а этот ряд, по признаку Абеля, равномерно сходится на $[0, R]$. $\square$

1.6 Ряды Тейлора

Определение. Пусть $f(x) \in C^{\infty}(B(x_0))$. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром ряда x_0.

Замечание. Далее везде центр разложения в 0.

Теорема. Если в некоторой окрестности нуля выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Доказательство. Подставим $x = 0$, тогда $a_0 = f(0)$. Продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_1 = f'(0)$. Снова продифференцируем и подставим $x = 0$, тогда $a_2 = \frac{f''(x)}{2}$. Продолжая выполнять эту операцию, для каждого n получим $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$. $\square$

Теорема. Пусть $f(x) \in C^\infty(-a, a)$ и $|f^{(n)}(x)| \le A^n,\ A > 0$.
Тогда
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x) \text{ на } (-a, a)$$
Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\forall x \in (-a, a)$:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1}$$
Тогда
$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1} \right| \le \frac{A^{N+1} \cdot a^{N+1}}{(N+1)!} \to 0$$
□

Пример. Рассмотрим функцию
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$
Несложно проверить, что $f(x) \in C^\infty(B(0)),\ f^{(n)}(0) = 0$.
Значит,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \equiv 0 \neq f(x)$$
Пример. (Контрпример к обратному утверждению второй теоремы Абеля)
Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$
Этот ряд сходится на $(-1, 1)$, причём
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x \to 1-0]{} \frac{1}{2}$$
но ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$
не сходится.

Лемма. Если $a_n \to A$ при $n \to \infty$, то
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \to A$$

Доказательство.

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n - A\right| = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N}a_n - AN\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N_1}a_n - AN_1\right| + \frac{1}{N}\sum_{n=N_1+1}^{N}|a_n - A| < \varepsilon\cdot\frac{N-N_1}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

□

Теорема. (Теорема Таубера)
Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

сходится на $(-1,1)$, существует

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = A$$

и пусть $a_n = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{n}),\ n\to\infty$.
Тогда существует

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n = A$$

Доказательство. Обозначим $\forall x\in(0,1)$

$$N_x = \left[\frac{1}{1-x}\right]$$

и введём функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x}a_n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Если $\varphi(x)\to 0$ при $x\to 1-0$, то теорема доказана.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N_x}a_n(1-x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty}a_n x^n$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N_x}a_n(1-x^n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N_x}a_n(1-x)(1+x+...x+x^{n-1})\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\frac{1}{1-x}}\sum_{n=0}^{N_x}|a_n|n \leq \frac{1}{N_x}\sum_{n=0}^{N_x}|a_n n| \to 0,\ x\to 1-0$$

$$\left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{a_n n}{n} x^n\right| < \frac{1}{N_x+1}\sum_{n=N_x+1}^{\infty} \varepsilon x^n <$$

$$< \frac{\varepsilon}{N_x+1}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{N_x+1}\cdot\frac{1}{1-x} < \varepsilon$$

Отсюда $|\varphi(x)| < 2\varepsilon \ \forall n > N_x$. □

1.7 Бесконечные произведения

Определение. Рассмотрим $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k\}_{n=1}^{\infty}$.

Пара последовательностей $\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется бесконечным произведением чисел $\{u_n\}$, обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

u_n - общий член, Π_n - частичное произведение.

Определение. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = a \neq 0$.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся, если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = 0$. Если $\exists n : u_n = 0$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется расходящимся к 0.

Теорема. (Необходимое условие сходимости) Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $u_n \to 1$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1$$

□

Следствие. Если произведение сходится, то общий член имеет вид

$$u_n = 1 + a_n,\ a_n \to 0$$

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

сходится.

Доказательство.

($\Rightarrow$):

$$\Pi_N \text{ - сходится} \Rightarrow \ln(\Pi_N) \text{ - сходится, } \ln(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} ln(1+a_n) \text{ - сходится}$$

($\Leftarrow$):

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1+a_n) \text{ - сходится} \Rightarrow e^{\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \ln(1+a_n)\right)} \text{ - сходится} \Rightarrow \Pi_N \text{ - сходится}$$

$\square$

Определение. Произведение называется абсолютно сходящимся или условно сходящимся, если таковым является соответсвующий ряд из логарифмов.

Теорема. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$$

из этого следует утверждение в обе стороны. $\square$

Следствие. Если a_n знакопостоянны, то произведение и соответсвующий ряд из логарифмов сходятся или расходится одновременно.

Теорема. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Доказательство.

$$\ln(1+a_n) - a_n = -\frac{a_n^2}{2} + \bar{\bar{o}}(a_n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n) - a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

□

Замечание. Можно рассматривать функциональные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n(x))$$

анализируя соответсвующий функциональный ряд из логарифмов.

Пример. (Пример Эйлера)
Пусть p_k обозначает k-е простое число. Тогда при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ls}}\right) = \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} < \sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Тогда

$$\sum \frac{1}{(p_{k_1}^{l_1}\cdot p_{k_2}^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_{k_m}^{l_m})^s} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s),\ N\to\infty$$

Теорема. $\forall x \neq \pi k$:

$$\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Доказательство. $\forall n : \sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin x \cdot P_n(\sin^2 x)$
это утверждение можно показать по индукции, с базой $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin\left((2n+1)x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2n+1},\ k\in\mathbb{Z}$$

при этом

$$P_n(\sin^2 x) = 0,\ x = \frac{\pi k}{2n+1},\ k = 1,\ldots,n$$

$$P_n(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \sin^2\frac{\pi k}{2n+1},\ k = 1,\ldots,n$$

Заметим, что

$$P_n(\sin^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x} \to 1,\ x \to 0$$

Тогда

$$P_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{\omega^2}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}})$$

$$P(\sin^2 x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\sin x}$$

сделаем замену: $(2n+1)x = t$

$$\frac{\sin t}{(2n+1)\cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Лемма. $\forall \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}:$

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \le \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1$$

Доказательство. Очев по индукции. □

Возьмем $\forall t \in \mathbb{R},\ |t| < n, m < n$

$$\frac{\sin t}{(2n+1)\cdot \sin \frac{t}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)\cdot R_{n,m}(t) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} R_{n,m}(t) = R_n(t)$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)\cdot R_m(t)$$

Вернемся к $R_{m,n}$:

$$\left|\prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right)\right| \le \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{\sin^2 \frac{t}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \le$$

$$\le \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{(\frac{2}{\pi}\cdot \pi k)^2}\right) - 1 = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 <$$

$$< \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{t^2}{4k^2}\right) - 1 \to 0$$

при $m \to \infty \Rightarrow R_m(t) \to 1,\ m \to \infty$. Значит

$$\sin t = t \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

□

Следствие. (Формула Валлиса)
При $t = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right)$$

2 Собственные интегралы с параметром

Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}[a, b],\ \varphi(y) \le \psi(y)$. Рассмотрим $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x, y) : y \in [a, b],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

Определение. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{R}[\varphi(y), \psi(y)]$. Интеграл

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\ dx$$

называется собственным интегралом с параметром.

Теорема. Пусть $\varphi(x),\ \psi(x) \in \mathcal{C}[a, b],\ f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\ dx \in \mathcal{C}[a, b]$$

Доказательство.

$$F(y + \Delta y) - F(y)| = \Bigg| \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\ dx -$$

$$- \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y)\ dx + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y)\ dx\ - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\ dx\ \Bigg| \le$$

$$\le \Bigg| \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\ dx\ \Bigg| + \Bigg| \int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y)} f(x, y + \Delta y)\ dx\ \Bigg| +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|\ dx \le M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \max_{y} |\psi(y) - \varphi(y)|$$

$\square$

Теорема. Пусть $\varphi(y),\ \psi(y) \in \mathcal{C}^1[a,b],\ f(x,y) \in \mathcal{C}(G),\ \exists\ f'_y(x,y) \in \mathcal{C}(G)$. Тогда $F(y) \in \mathcal{C}^1(G)$ и

$$F'(y) = \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \right)' = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\ dx + f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\Delta y}(F(y+\Delta y) - F(y)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}\Bigg(\int\limits_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y+\Delta y)\ dx - \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx \Bigg) = \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx -$$

$$- \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)\ dx + \frac{1}{\Delta y}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))\ dx =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}(\psi(y+\Delta y) - \psi(y)) \cdot f(\psi(y+\theta_1\Delta y), y+\Delta y) -$$

$$- \frac{1}{\Delta y}(\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)) f(\varphi(y+\theta_2\Delta y), y+\Delta y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y+\theta_3\Delta y)\ dx$$

Значит существует предел

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \psi'(y) f(\psi(y),y) - \varphi'(y) f(\varphi(y),y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\ dx$$

□

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,b]\times[c,d])$. Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t) = \int\limits_c^t \left(\int\limits_a^b f(x,y)\ dx \right) dy,\ G(t) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^t f(x,y)\ dy \right) dx$$

Заметим, что $F(C) = G(C) = 0$.

$$F'(t) = \int\limits_a^b f(x,y)\, dx,\ G'(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\, dx$$

Значит $F(t) = G(t)$, в частности для $t = d$. $\square$

3 Несобственные интегралы с параметром

Определение. Рассмотрим Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\, dx$$

Пусть на $Y \subset \mathbb{R}$:

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\, dx = F(y)$$

Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A \in [a, \omega) : \forall a' > A,\ \forall y \in Y :$

$$\left| \int\limits_a^{a'} f(x,y)\, dx - F(y) \right| < \varepsilon$$

то

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\, dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(y)$$

Далее, без ограничения общности будем писать $\omega = +\infty$.

Теорема. (Критерий Коши)

$$\int\limits_a^{a'} f(x,y)\, dx \overset{Y}{\rightrightarrows} F(t)$$

тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A > a,\ \forall a_1, a_2 > A$:

$$\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\, dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$:
$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx\right| = \left|\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x,y)\ dx - \int\limits_{a_2}^{+\infty} f(x,y)\ dx\right| < 2\varepsilon$$

$(\Leftarrow)$:
$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx\right| < \varepsilon$$

Тогда при $a_2 \to +\infty$:
$$\left|\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x,y)\ dx\right| \leq \varepsilon$$

□

Теорема. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
Рассмотрим
$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\ dx,\ y \in Y$$
Если $\exists\ g(x)$ такая, что $|f(x,y)| < g(x)$ и сходится интеграл
$$\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\ dx$$
то интеграл
$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\ dx$$
сходится равномерно на Y.

Доказательство. По критерию Коши:
$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)\ dx\right| \leq \int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)\ dx < \varepsilon$$

□

Теорема. (Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости)
Рассмотрим интеграл
$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)\ dx,\ y \in Y$$
Пусть $|f(x,y)|,\ |g(x,y)| < M$

$(\mathcal{A})$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

$g(x,y)$ монотонна $\forall y$. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

$(\mathcal{D})$:

$$\left|\int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx\right| < M$$

$g(x,y)$ монотонна и $g(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} 0$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| = \left|g(a_1,y)\cdot\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx + g(a_2,y)\cdot\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx\right| \leq$$

$$\leq |g(a_1,y)|\cdot\left|\int\limits_{a_1}^{c} f(x,y)\,dx\right| + |g(a_2,y)|\cdot\left|\int\limits_{c}^{a_2} f(x,y)\,dx\right| = (*)$$

$(\mathcal{A}):\ (*) \leq \varepsilon\cdot M + \varepsilon\cdot M$

$(\mathcal{D}):\ (*) \leq \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M$ □

Теорема. Пусть $f(x,y)\in\mathcal{C}([a,+\infty)\times[c,d])$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} F(y)$$

Тогда $F(y)\in\mathcal{C}[c,d]$.

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \leq \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y+\Delta y)\,dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_a^{A} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < 3\varepsilon$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty] \times [c,d])$, $\exists\ f'_y(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty] \times [c,d])$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx = F(y),\ \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\ dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} G(y)$$

Тогда $\exists\ F'(y) = G(y)$.

Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to +\infty$ и

$$F_n(y) = \int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx$$

По теореме о дифференциравании функциональных последовательностей и теореме о дифференцировании собственных интегралов:

$$F'_n(y) \rightrightarrows G(y) \Rightarrow F'(y) = G(y)$$

$\square$

Теорема. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{C}([a,+\infty] \times [c,d])$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx \rightrightarrows F(y)$$

Тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx\right) dy = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right) dx$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to +\infty$

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{x_n} f(x,y)\ dx\right) dy = \int\limits_a^{x_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right) dx$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_c^d F_n(y)\ dy\right) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx\right) dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{x_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right) dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right) dx$$

$\square$

Теорема. (Признак Дини равномерной сходимости последовательности)
Пусть $\forall n : f_n(x) \in \mathcal{C}[a,b],\ \forall x \in [a,b] : f_n(x)$ монотонны по n и

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$$

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство.

$$\forall x \in [a,b],\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_{\varepsilon,x_0},\ \forall n \geq N_{\varepsilon,x_0} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) : |f_{N_{\varepsilon,x_0}}(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

Из монотонности следует, что для номеров, больших этого, неравенство верно
Рассмотрим накрытие:

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} B_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow \exists\ \{x_i\}_{i=1}^k,\ [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta_\varepsilon}(x_i)$$

Возьмем $N_\varepsilon = \max\limits_{i=1,\ldots,k}(N_{\varepsilon,x_i})$. Тогда

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n > N_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

$\square$