

# Математический анализ-1

Лектор: Подольский Владимир Евгеньевич

25 октября 2024 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа

tg: @fourkenz

# Содержание

<b>1</b>	<b>Элементы теории множеств</b>	<b>3</b>
1.1	Условности и обозначения . . . . .	3
1.2	Операции над множествами . . . . .	4
1.3	Декартово произведение множеств . . . . .	4
1.4	Отображения . . . . .	4
1.5	Операции над множествами (продолжение) . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Действительные числа</b>	<b>6</b>
2.1	Натуральные числа. Аксиоматика Пеано . . . . .	6
2.2	Отношение порядка и принцип наименьшего элемента . . . . .	6
2.3	Арифметические операции . . . . .	7
2.4	Целые числа . . . . .	8
2.5	Рациональные числа . . . . .	8
2.6	Упорядоченные и архимедовы поля . . . . .	9
2.7	Действительные числа. Аксиома полноты . . . . .	10
2.8	Модели действительных чисел . . . . .	10
2.8.1	Модель бесконечных десятичных дробей . . . . .	10
2.8.2	Сечения $\mathbb{Q}$ . . . . .	11
2.8.3	Геометрическая модель числовой прямой . . . . .	11
2.9	Принципы полноты . . . . .	12
2.9.1	Верхние и нижние грани множества . . . . .	12
2.9.2	Принцип полноты Вейерштрасса . . . . .	13
2.9.3	Принцип вложенных отрезков (принцип полноты Кантора) . . . . .	14
2.10	Неравенство Бернулли и Бином Ньютона . . . . .	15
2.11	Отношение эквивалентности. Равномощные множества . . . . .	16
2.12	Теорема Кантора и аксиома выбора . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Топология <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Числовые последовательности</b>	<b>22</b>
4.1	О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности . . . . .	23
4.2	Монотонные последовательности . . . . .	26
4.3	Число $e$ . . . . .	26

# 1 Элементы теории множеств

## 1.1 Условности и обозначения

**Определение.** Кванторами будем называть символы, заменяющие слова в выражениях.

**Замечание.** Пока что кванторы не подразумевают логические операции, мы будем использовать их только для более удобной и формальной записи.

- $\forall$  - квантор всеобщности
- $\exists$  - квантор существования
- $!$  - квантор единственности
- Запись  $A \Rightarrow B$  обозначает, что из высказывания  $A$ , следует высказывание  $B$ .
- Запись  $A \Leftrightarrow B$  обозначает, что высказывание  $A$  равносильно высказыванию  $B$ .
- Запись  $a \in A$  означает, что  $a$  является элементом множества  $A$ , отрицанием такой записи будет  $a \notin A$
- Если  $x$  - объект, а  $P$  - свойство, то запись  $\{x : P(x)\}$  означает класс всех объектов обладающих свойством  $P$ .

**Определение.** Множество не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается  $\emptyset$ .

**Определение.** Множество  $A'$  является подмножеством множества  $A$ , если  $\forall a : a \in A' \Rightarrow a \in A$ . Запись  $A' \subset A$  обозначает, что  $A'$  является подмножеством  $A$ .

**Определение.** Для любого множества  $A$  выполнено:

1.  $\emptyset \subset A$ .
2.  $A \subset A$ .

**Определение.** Если  $A \subset B$  и  $A \neq B$ , то  $A$  называется собственным подмножеством множества  $B$ .

## 1.2 Операции над множествами

**Определение.** Множество  $C = A \cup B$  называется объединением множеств  $A$  и  $B$ , если  $\forall a : (a \in A \Rightarrow a \in C)$  и  $\forall b : (b \in B \Rightarrow b \in C)$ , а также  $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A \text{ или } c \in B)$ .

**Определение.** Множество  $C = A \cap B$  называется пересечением множеств  $A$  и  $B$ , если  $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A \text{ и } c \in B)$ , а также  $\forall c : (c \in A \text{ и } c \in B) \Rightarrow c \in C$ .

**Определение.** Множество  $C = A \setminus B$  называется разностью множеств  $A$  и  $B$ , если  $\forall c : (c \in A \text{ и } c \notin B) \Rightarrow c \in C$ , а также  $\forall c : c \in C \Rightarrow (c \in A \text{ и } c \notin B)$ .

**Утверждение.**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

*Доказательство.*  $a \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow a \in A \text{ или } a \in (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A \text{ или } (a \in B \text{ и } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ или } a \in B) \text{ и } (a \in A \text{ или } a \in C)$ .  $\square$

**Утверждение.**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

*Доказательство.*  $a \in (A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } a \in (B \cup C) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \in B \text{ или } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \in B) \text{ или } (a \in A \text{ и } a \in C)$ .  $\square$

## 1.3 Декартово произведение множеств

**Определение.** Множество  $A$  называется одноэлементным, если  $\exists a \in A$  такое, что  $A \setminus \{a\} = \emptyset$ .

**Определение.** Множество  $A$  называется двухэлементным, если  $\exists a \in A$  такое, что  $A \setminus \{a\}$  - одноэлементное.

**Определение.** Пусть  $x \in X, y \in Y$ . Упорядоченной парой называется двухэлементное множество  $\{x, \{x, y\}\}$ , упорядоченную пару обозначают  $(x, y)$ .

**Определение.** Множество всех упорядоченных пар  $(x, y)$  называется декартовым произведением множеств  $X$  и  $Y$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Декартово произведение обозначают  $X \times Y$ .

## 1.4 Отображения

**Определение.** Пусть  $X, Y$  - множества. Подмножество  $f \subset X \times Y$  такое, что  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$  называется отображением из  $X$  в  $Y$ , и обозначается  $f : X \rightarrow Y$ .

**Замечание.** Запись  $(x, y) \in f$  часто заменяют на  $y = f(x)$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Множество  $\{x : \exists (x, y) \in f\} = D_f$  называется областью определения функции  $f$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Множество  $\{y : \exists (x, y) \in f\} = R_f$  называется областью значений функции  $f$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  - инъекция  $\Leftrightarrow \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  - сюръекция  $\Leftrightarrow Y = R_f$

**Замечание.** Обычно используют определение  $f$  - сюръекция  $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$ .

**Определение.**  $f$  - биекция  $\Leftrightarrow f$  - инъекция и  $f$  - сюръекция.

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X_1 \subset X$ . Множество  $\{(x, y) \in f : x \in X_1\} = f|_{X_1}$  называется ограничением  $f$  на  $X_1$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X_1 \subset X$ . Множество  $f(X_1) = \{y \in Y : \exists x \in X_1 : (x, y) \in f\}$  называют образом множества  $X_1$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $Y_1 \subset Y$ . Множество  $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X : \exists y \in Y_1 : (x, y) \in f\}$  называют полным прообразом множества  $Y_1$ .

**Определение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Если  $\forall y \in R_f : f^{-1}(y)$  - одноэлементное множество, то подмножество  $f^{-1} \subset Y \times X = \{(y, x)\}$  является отображением и называется обратным отображением к  $f$ . Если у отображения  $f$  существует обратное отображение  $f^{-1}$ , то оно называется обратимым.

**Утверждение.**  $f$  - обратимое  $\Leftrightarrow f$  - биекция.

**Замечание.** Иногда  $f : X \rightarrow Y$  записывают в виде  $y_x$  и называют индексацией  $y$  элементами  $x$ .

## 1.5 Операции над множествами (продолжение)

**Утверждение.**  $\bigcup_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) = A \setminus (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$ .

*Доказательство.*  $a \in \bigcup_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_1}) \text{ или } \dots \text{ или } (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \notin A_{\alpha_1} \text{ и } \dots \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})$ .  $\square$

**Утверждение.**  $\bigcap_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) = A \setminus (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})$ .

*Доказательство.*  $a \in \bigcap_{\alpha} (A \setminus A_{\alpha}) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_1}) \text{ и } \dots \text{ и } (a \in A \text{ и } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } (a \notin A_{\alpha_1} \text{ или } \dots \text{ или } a \notin A_{\alpha_n}) \Leftrightarrow a \in A \setminus (\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})$ .  $\square$

## 2 Действительные числа

### 2.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано

**Определение.** (Аксиоматика Пеано)

1. В множестве  $\mathbb{N}$   $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!$  элемент называемый следующим и обозначаемый как  $S(n)$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \exists$  не более одного элемента  $\mathbb{N}$ , для которого  $n$  - следующий.
3.  $\exists!$  элемент  $\mathbb{N}$  не являющийся следующим ни для какого элемента. Этот элемент обозначается 1 и называется единицей.
4. (Аксиома индукции) Пусть  $M \subset \mathbb{N}$ , такое, что  $1 \in M$  и  $\forall m \in M : S(m) \in M$ . Тогда  $M = \mathbb{N}$ .

Множество удовлетворяющее этим аксиомам называется множеством натуральных чисел и обозначается  $\mathbb{N}$ .

**Определение.** Рассмотрим множество  $X$ . Если для некоторого  $n \in \mathbb{N} \exists$  биекция  $\varphi : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , то  $X$  называется  $n$ -элементным, или говорят, что количество элементов в  $X$  равно  $n$ . Тот факт что множество  $X$  -  $n$ -элементное обозначается как  $|X| = n$  или  $card X = n$ .

**Замечание.** По определению считаем, что  $card(\emptyset) = 0$ .

**Определение.** Все множества, количество элементов которых равно какому-то натуральному числу или нулю, называются конечными. Все остальные множества называются бесконечными.

### 2.2 Отношение порядка и принцип наименьшего элемента

**Определение.**  $R \subset X \times Y$  называется отношением между элементами  $X$  и  $Y$ . Обозначают  $xRy$ , если  $(x, y) \in R$ .

**Определение.** Отношение  $R$  называется отношением порядка, если  $\forall x \in X, \forall y \in Y$  выполнено:

1.  $xRy$  или  $yRx$ .
2.  $(xRy \text{ и } yRx) \Rightarrow x = y$ .

3.  $(xRy \text{ и } yRz) \Rightarrow xRz$ .

Такое отношение обозначают  $\leq$ .

**Теорема.**  $\exists!$  отношение порядка на  $\mathbb{N}$ , такое, что  $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq S(n)$ . (Можно использовать на экзамене без доказательства)

**Теорема.** (Принцип наименьшего элемента)

$M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$  имеет наименьший элемент, т.е.  $\exists n_{\min} \in M, \forall n \in M : n_{\min} \leq n$ .

*Доказательство.* Предположим, что в  $M$  нет минимального элемента.

База: если  $1 \in M$ , то  $n_{\min} = 1 \Rightarrow 1 \notin M \Rightarrow 1 \in \mathbb{N} \setminus M$ .

Шаг:  $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus M \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N} \setminus M$ , тогда по аксиоме индукции  $\mathbb{N} \setminus M = \mathbb{N} \Rightarrow M = \emptyset$  - противоречие.  $\square$

## 2.3 Арифметические операции

**Определение.** Рассмотрим  $A, B, \text{card}(A) = n, \text{card}(B) = k, n, k \in \mathbb{N}$ . Пусть  $A \cap B = \emptyset$ . Тогда число  $\text{card}(A \cup B)$  называется суммой  $n$  и  $k$  и обозначается  $\text{card}(A \cup B) = n + k$ .

**Замечание.** Естественно выполняется  $n + k = k + n$  (коммутативность) и  $(n + k) + m = n + (k + m)$  (ассоциативность).

**Замечание.**  $n + 0 = 0 + n = n$ , т.к.  $\text{card} A = \text{card}(A \cup \emptyset)$ .

**Замечание.**  $A \leftrightarrow \{1, \dots, n\}, B \leftrightarrow \{1, \dots, k\}$ . Возьмем  $\text{card}(A \cup B) = \{1, \dots, n\} \cup \underbrace{\{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots))\}}_k$ ,  
(где  $\{1, \dots, k\} \leftrightarrow \underbrace{\{S(n), S(S(n)), \dots, S(S(\dots(S(n))\dots))\}}_k$ )

Из тех же соображений получаем, что  $S(n) = n + 1$ .

**Определение.**  $n, k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\sum_{i=1}^k n = nk$  называется произведением  $n$  на  $k$ .

**Замечание.**  $nk = \underbrace{(n + n + \dots + n)}_k$ .

**Замечание.** Выполнены:

- $nk = kn$  (коммутативность)
- $n(km) = (nk)m$  (ассоциативность)
- $k(n + m) = kn + km$  (дистрибутивность)

- Если  $k \leq n$ , то  $k + m \leq n + m$  и если  $k \leq m$ , то  $kn \leq mn$

**Определение.** Если  $n + k = m$ , то  $n = m - k$  называется разностью  $m$  и  $k$ ,  $k = m - n$  называется разностью  $m$  и  $n$ .

**Замечание.**  $m - 0 = m$ ,  $m + 0 = m$ ,  $m - m = 0$ .

**Определение.**  $nk = m$ ,  $\frac{m}{n} = k$ ,  $\frac{m}{k} = n$ .

## 2.4 Целые числа

**Определение.** Введем набор символов  $-\mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$ . Множество символов  $-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$  называются целыми числами и обозначаются  $\mathbb{Z}$ .

**Замечание.** Принимаем выполненными следующие свойства:

1.  $k + (-n) = \begin{cases} k - n, \text{ если } k \geq n, \\ -(n - k), \text{ если } k < n. \end{cases}$   
 $(-k) + (-n) = -(k + n)$
2.  $k \cdot 0 = (-k) \cdot 0 = 0$ ,  
 $(-k) \cdot n = (-kn)$ ,  
 $(-k)(-n) = kn$ .
3.  $(\pm k)((\pm n) + (\pm m)) = (\pm k)(\pm n) + (\pm k)(\pm m)$ .
4.  $\forall k : (-k) \leq 0$ ,  
 $(-k) \leq (-n)$ , если  $n \leq k$ .
5.  $\forall (\pm k), (\pm n), (\pm m) \in \mathbb{Z}$ , если  $(\pm k) \leq (\pm n)$ , то  $(\pm k) + (\pm m) \leq (\pm n) + (\pm m)$ .
6.  $\forall (\pm n), (\pm k) \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ , если  $(\pm n) \leq (\pm k)$ , то  $(\pm n)m \leq (\pm k)m$ .

Далее пишем  $-k$  вместо  $(-k)$ .

$\forall k, n \in \mathbb{Z} \exists (k - n) = k + (-n)$ .

## 2.5 Рациональные числа

**Определение.** Множество  $\mathbb{Q} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$  называется множеством рациональных чисел, если введены следующие операции:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$



а также введено отношение порядка:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$$

Свойства операций ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ):

$$(1) \ a + b = b + a$$

$$(2) \ a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(3) \ \exists! 0 \in \mathbb{Q} : a + 0 = 0 + a = a$$

$$(4) \ \forall a \in \mathbb{Q} \ \exists! (-a) \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$$

$$(5) \ ab = ba$$

$$(6) \ a(bc) = (ab)c$$

$$(7) \ \exists! 1 \in \mathbb{Q} \ \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$(8) \ \forall a \neq 0 \ \exists! a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

$$(9) \ a(b + c) = ab + ac$$

$$(10) \ \forall a, b \in \mathbb{Q} \ a \leq b \text{ или } b \leq a$$

$$(11) \ a \leq b \text{ и } b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$(12) \ a \leq b \text{ и } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$(13) \ \forall c \in \mathbb{Q} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$(14) \ \forall c > 0 : a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$$

## 2.6 Упорядоченные и архимедовы поля

**Определение.** Множество  $X$  с операциями  $(\cdot, +)$  и отношением порядка  $\leq$  называется упорядоченным полем.

**Замечание.**  $\mathbb{Q}$  - упорядоченное поле.

**Определение.** Упорядоченное поле  $X$  называется архимедовым, если

$$(15) \ \forall a \in X : \exists n \in \mathbb{N} : a \leq n.$$

**Замечание.**  $\mathbb{Q}$  - архимедово поле.

**Замечание.**  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$ .

**Замечание.**  $\forall m \in \mathbb{Z}$  число  $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$  можно отождествить с  $m$ .

## 2.7 Действительные числа. Аксиома полноты

**Определение.** Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством действительных чисел, если  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  удовлетворяет (1)-(15) и дополнительно выполняется (16).

**Определение.** (Аксиома полноты)

(16)  $\forall A, B \subset \mathbb{R}$  таких, что  $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ .

**Пример.** Аксиома полноты не выполняется в  $\mathbb{Q}$ .

$A = \{a \leq 0 \text{ или } a > 0 : a^2 < 2\}, B = \{b > a : b^2 > 2\},$

но  $\nexists \frac{m}{n}, \frac{m^2}{n^2} = 2$

## 2.8 Модели действительных чисел

### 2.8.1 Модель бесконечных десятичных дробей

**Определение.** Отображение  $\{a_n\} : \mathbb{N} \rightarrow X$  называется последовательностью элементов  $X$ .

**Определение.** Выражение вида  $\pm a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  называется бесконечной десятичной дробью, если  $a_0 \in \mathbb{N}$  или  $a_0 = 0$  и  $\forall i \in \mathbb{N} a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ .

**Определение.** Введем отношение порядка  $\leq$  на множестве всех бесконечных дробей следующим образом:

1. Если  $a_0 \leq 0, b_0 > 0$ , то  $a \leq b$ .

2. Если  $a_0, b_0 \geq 0$ , то  $a \leq b$

- если  $a_0 < b_0$  или  $a_0 = b_0, a_1 < b_1$  или  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 < b_2$ ,  
или ... или  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n \dots$

- если  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n \neq 9, b_n = a_n + 1, a_{n+k} = 9, b_{n+k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ ,  
т.е  $a = \overline{a_0 a_1 \dots a_n (9)}$ , а  $b = \overline{b_0 b_1 \dots b_n (0)}$ .

(в числе  $a$  начиная с  $a_{n+1}$  все  $a_i$  равны 9, а в числе  $b$  начиная с  $b_{n+1}$  все  $b_i$  равны 0), то  $a = b$ .

3. Если  $a_0, b_0 < 0$ , то  $a < b$ , если  $-b < -a$  (случай 3 сведен к случаю 2)

**Теорема.** Множество бесконечных десятичных дробей с введенным отношением порядка ( $\leq$ ) удовлетворяет аксиоме полноты.

*Доказательство.* Пусть  $A, B \subset \{\text{множество бесконечных десятичных дробей}\}$  и  $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ .

1.  $a < 0, b \geq 0$ , тогда  $c = 0$ .

2.  $a > 0, b > 0$

Пусть

$$\overline{b_0} = \min\{b_0 : b_0 b_1 b_2 \cdots \in B\},$$

$$\overline{b_1} = \min\{b_1 : \overline{b_0} b_1 b_2 \cdots \in B\},$$

$$\overline{b_2} = \min\{b_2 : \overline{b_0} \overline{b_1} b_2 \cdots \in B\},$$

$\vdots$

Возьмем  $\overline{b} = \overline{b_0 b_1 b_2 \dots b_n \dots} \in B$ , тогда

$$\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq \overline{b} \leq b.$$

3.  $a < 0, b < 0$  строим число по аналогии с пунктом 2.

□

## 2.8.2 Сечения $\mathbb{Q}$

**Определение.** (Дедекиндовы сечения)

Пусть  $A, B \subset \mathbb{Q} : A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{Q}, \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$  и в  $B$  не существует минимального элемента, тогда  $(A, B)$  - пара сечений  $\mathbb{Q}$ .

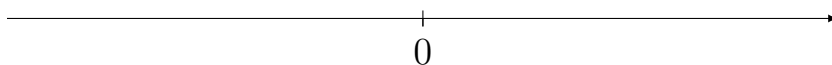
**Теорема.** На множестве всех пар сечений  $\{(A, B)\}$  можно ввести операции  $(+), (\cdot)$  и отношение  $(\leq)$ , так что будут выполняться (1) – (16).

*Доказательство.* Без доказательства.

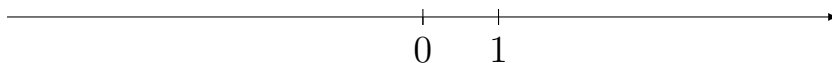
□

## 2.8.3 Геометрическая модель числовой прямой

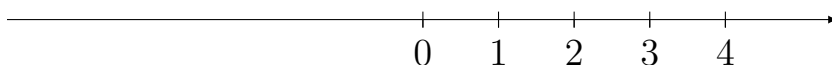
Выбираем точку, называем ее 0



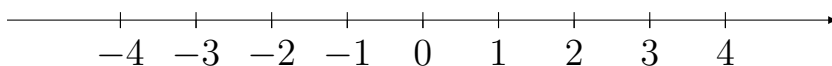
затем выбираем точку справа от него, называем ее 1



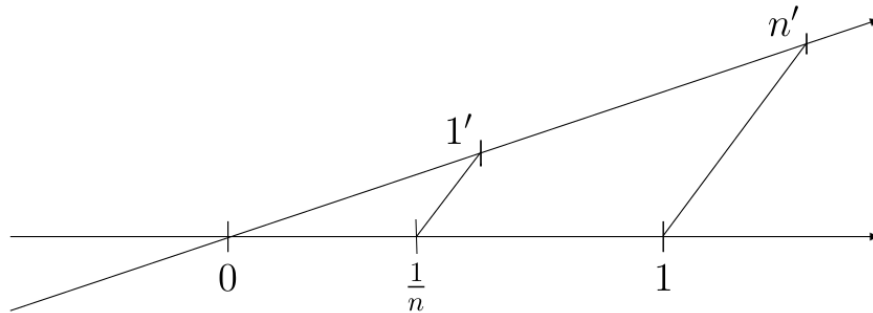
затем вводим сложение и получаем 2, 3, 4, и т.д. (натуральный ряд)



затем делаем также в другую сторону, получаем целые числа



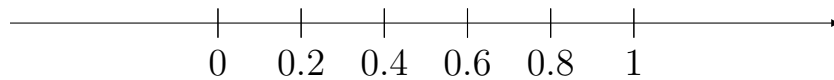
Проведем через 0 под непрямым углом вспомогательную прямую на ней выберем точку, назовем ее  $1'$  и аналогично первой прямой получаем на ней целые числа. Проведем прямую через  $n'$  и 1 тогда параллельная ей прямая проходящая через  $1'$  проходит через  $\frac{1}{n}$  (по теореме Фаллеса)



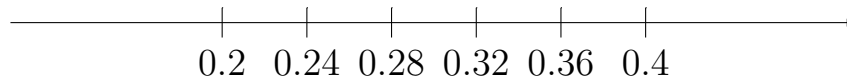
таким образом складывая  $m$  раз  $\frac{1}{n}$ , получим любое рациональное число  $\frac{m}{n}$ .

Построим бесконечную десятичную дробь, например  $0,37152\dots$

Разобьем отрезок:



$0,37152\dots$  находится между 0.2 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок:



$0,37152\dots$  находится между 0.36 и 0.4, теперь разобьем этот отрезок и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, у которых длина стремится к нулю, значит у них есть единственная общая точка - наше число.

Таким образом, прямая - множество бесконечных десятичных дробей, а значит на ней выполняются (1)-(16).

## 2.9 Принципы полноты

### 2.9.1 Верхние и нижние грани множества

**Определение.**

- Элемент  $a \in \mathbb{R}$  называется максимальным элементом множества  $A$  ( $\max A \subset \mathbb{R}$ ),  $A \neq \emptyset$ , если  $\forall a' \in A : a \geq a'$  и  $a \in A$ .
- Элемент  $a \in \mathbb{R}$  называется минимальным элементом множества  $A$  ( $\min A \subset \mathbb{R}$ ),  $A \neq \emptyset$ , если  $\forall a' \in A : a \leq a'$  и  $a \in A$ .

### Определение.

- Элемент  $m \in \mathbb{R}$  называется верхней гранью  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , если  $\forall a \in A : a \leq m$ .
- Элемент  $m \in \mathbb{R}$  называется нижней гранью  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , если  $\forall a \in A : a \geq m$ .

### Определение.

- Множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  называется ограниченным сверху, если у  $A$  существует верхняя грань.
- Множество  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  называется ограниченным снизу, если у  $A$  существует нижняя грань.
- Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется ограниченным, если  $A$  ограничено и сверху и снизу.

### Определение.

- Пусть множество  $A \subset \mathbb{R}$  ограничено сверху,  $B$  - множество верхних граней  $A$ . Элемент  $c = \min B$  называется точной верхней гранью  $A$  и обозначается  $\sup A$ .
- Пусть множество  $A \subset \mathbb{R}$  ограничено снизу,  $B$  - множество нижних граней  $A$ . Элемент  $c = \max B$  называется точной нижней гранью  $A$  и обозначается  $\inf A$ .

## 2.9.2 Принцип полноты Вейерштрасса

### Теорема. (Принцип полноты Вейерштрасса)

Для каждого ограниченного сверху или снизу множества  $A$  существует  $\sup A$  или  $\inf A$  соответственно.

*Доказательство.* Докажем для верхней грани (аналогично для нижней)  
 $A$  - ограничено сверху,  $B$  - множество верхних граней. Значит  $\forall a \in A$  и  $\forall b \in B : a \leq b \Rightarrow$  по аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \Rightarrow c = \sup A$ .  $\square$

**Определение.**  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$  рассмотрим следующие множества:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  - отрезок
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  - интервал
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  - полуинтервал
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  - полуинтервал

Такие множества называют промежутками.

**Определение.**  $\forall a \in \mathbb{R}$  функция

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

называется модулем.

**Определение.** Для любого промежутка с концами  $a, b \in \mathbb{R}$  длиной называется число  $|b - a|$ .

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Говорят, что  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$  выполнено  $|b_n - a_n| < \varepsilon$ .

### 2.9.3 Принцип вложенных отрезков (принцип полноты Кантора)

**Теорема.** (Принцип вложенных отрезков)

Пусть последовательность  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  такова, что  $\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n$ . Если  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$  то  $c$  - единственная.

*Доказательство.*  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ , т.к

- если  $n < m$ , то  $a_n \leq a_m \leq b_m$ .
- если  $n > m$ , то  $a_n \leq b_n \leq b_m$ .

Значит для  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  : Рассмотрим множества  $A = \{a_n\}$  и  $B = \{b_n\}$ . По аксиоме полноты  $\exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \forall n, m \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n, \forall n$ .

Пусть  $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ , предположим, что  $\exists c_1$  и  $c_2 : c_1 \neq c_2$  - различные общие точки, значит  $|c_2 - c_1| > 0$ . Получаем, что  $0 < |c_2 - c_1| < |b_n - a_n|, \forall n$ , значит  $|c_2 - c_1| \rightarrow 0$  получаем противоречие.  $\square$

## 2.10 Неравенство Бернулли и Бином Ньютона

**Теорема.** (Неравенство Бернулли)

Пусть  $\{x_k\}_{k=1}^n, x_k \in \mathbb{R} \forall k : x_k > 0$  или  $x_k \in (-1, 0)$ . Тогда

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База:  $n = 1 : 1 + x_1 \geq 1 + x_1$ . Пусть при  $n$  утверждение верно.

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \geq (1 + x_{n+1}) \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot x_{n+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

□

**Определение.** Число  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  называется биномиальным коэффициентом и обозначается  $C_n^k$ .

**Замечание.** По определению считается, что  $0! = 1$ .

**Теорема.** (Бином Ньютона)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База: для  $n = 1$  верно. Пусть верно для  $n$ . Распишем выражение для  $n + 1$ :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1}$$

Сдвинем нумерацию в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1}$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} &= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n-m+1} + \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m+1} = \\ &= C_n^n a^{n+1} b^0 + \sum_{m=1}^n (C_n^{m-1} + C_n^m) a^m b^{n-m+1} + C_n^0 a^0 b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^m b^{n-m+1} \end{aligned}$$

□

## 2.11 Отношение эквивалентности. Равномощные множества

**Определение.** Отношение  $\sim$  называется отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет:

1.  $x \sim x$  (Рефлексивность)
2.  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$  (Симметричность)
3.  $x \sim y$  и  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$  (Транзитивность)

**Определение.** Множества называются равномощными, если между ними существует биекция.

**Теорема.** Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

*Доказательство.* Пусть  $A, B, C$  - множества,  $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$  - биекции.

1. Рефлексивность очевидна, поскольку у любого множества существует биекция в себя.
2. Для любой биекции  $\varphi : A \rightarrow B$  существует  $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ .
3.  $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ , то  $\varphi \circ \psi : A \rightarrow C$ .

□

**Теорема.** Конечные множества равномощны  $\Leftrightarrow$  они содержат одинаковое количество элементов.

*Доказательство.* ( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\varphi : A \rightarrow \{1, \dots, n\}, \psi : B \rightarrow \{1, \dots, n\}$   
 $\Rightarrow \exists \psi^{-1} : \{1, \dots, n\} \rightarrow B$ . Тогда  $\varphi \circ \psi^{-1} : A \rightarrow B$  - искомая биекция.

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\varphi : A \rightarrow B$  - биекция. Если  $A = \emptyset$ , то  $B = \emptyset$ . Докажем индукцией по количеству элементов. Пусть  $A = \{a\}$ , тогда  $\exists b \in B : \varphi(a) = b$ . Пусть утверждение верно для случая когда  $A$  -  $n$ -элементное множество. Теперь если  $A$  -  $n + 1$ -элементное, то  $\exists \varphi : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 1\}$  - биекция. Значит  $\exists a \in A$ , что  $\varphi(a) = n + 1$ . Тогда  $A \setminus \{a\}$  -  $n$ -элементное. Также  $\exists b \in B : b = \varphi(a) \Rightarrow B \setminus \{b\}$  -  $n$ -элементное  $\Rightarrow B$  -  $n + 1$ -элементное.

□

**Определение.** Множества равномощные  $\mathbb{N}$  называются счетными.

**Теорема.** Объединение не более чем счетного числа счетных множеств счетно.



*Доказательство.* Предъявим проход по элементам, который задает биекцию:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\
 \vdots & & & & & \vdots
 \end{array}$$

□

**Определение.** Множество называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.

**Теорема.** Объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств не более чем счетно.

### Примеры.

1. Множество целых чисел  $\mathbb{Z}$
2. Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$
3. Множество многочленов с рациональными коэффициентами.
4. Множество алгебраических чисел (чисел которые являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами).

## 2.12 Теорема Кантора и аксиома выбора

**Теорема.** (Теорема Кантора)

Множество бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчетно.

*Доказательство.* Предположим, что оно счетно. Тогда все последовательности нулей и единиц можно перенумеровать. Составим бесконечную вниз таблицу, строками которой будут наши последовательности:

$$\begin{array}{l}
 a_1 = \underline{a_{11}} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ \dots \\
 a_2 = a_{21} \ \underline{a_{22}} \ a_{23} \ a_{24} \ \dots \\
 a_3 = a_{31} \ a_{32} \ \underline{a_{33}} \ a_{34} \ \dots \\
 a_4 = a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ \underline{a_{44}} \ \dots \\
 \vdots
 \end{array}$$

$a_{ij}$  -  $j$ -й член  $i$ -й последовательности. Рассмотрим последовательность  $b$  у которой  $b_i = 1 - a_{ii}$ . Такая последовательность отличается от каждой  $i$ -й последовательности на  $i$ -й позиции, значит она не была посчитана, получаем противоречие.  $\square$

### Утверждение.

1. Алгебраических чисел счетно.
2. Действительных чисел несчетно.

**Определение.** Действительные числа не являющиеся алгебраическими называются трансцендентными.

**Определение.** Множества равномощные множеству последовательностей нулей и единиц называются множествами мощности континуума.

**Теорема.** У любого множества мощность множества всех подмножеств строго больше чем мощность самого множества.

**Определение.** Для множеств  $A$  и  $B$  обозначим  $|A| \leq |B|$ , если  $\exists B' \subset B$  для которого  $\exists \varphi : A \rightarrow B'$  - биекция.

**Теорема.** Сравнение мощностей множеств  $|A| \leq |B|$  является отношением порядка.

1.  $\forall A, B : |A| \leq |B|$  или  $|B| \leq |A|$
2.  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
3.  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Аксиома.** (Аксиома выбора)

Если существует множество неких множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу и составить из них другое множество.

**Утверждение.** Множество всех подмножеств  $\mathbb{N}$  равномощно множеству бесконечных последовательностей нулей и единиц.

*Доказательство.* Каждому  $A \subset \mathbb{N}$  ставим в соответствие характеристическую последовательность, которая принимает значения: единицу, если элемент лежит в подмножестве и ноль иначе.  $\square$

**Теорема.** У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.

*Доказательство.* Выбираем элемент и сразу присваиваем ему номер, продолжая это действие, построим счетное множество.  $\square$

**Теорема.** Пусть  $A$  - бесконечное,  $B$  - не более чем счетное  $\Rightarrow A \sim A \cup B$

*Доказательство.* Пусть  $A' \subset A$ . Тогда  $A \sim (A \setminus A') \cup A' \sim (A \setminus A') \cup (A' \cup B) \sim (A \cup B)$ .  $\square$

### 3 Топология $\mathbb{R}$

**Определение.**  $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$  отрезок  $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$ .

**Определение.**  $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0$  отрезок  $\mathring{B}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$  называется проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$ .

**Определение.** Точка  $x \in A \subset \mathbb{R}$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если  $\exists B_\varepsilon(x) \subset A$ . Множество всех внутренних точек  $x \in A$  называется внутренностью множества  $A$ .

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R} \setminus A$  называется внешней точкой для множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $x$  - внутренняя точка для  $\mathbb{R} \setminus A$ . Множество всех внешних точек  $x \in \mathbb{R} \setminus A$  называется внешностью множества  $A$ .

**Определение.** Точка называется граничной для множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если она не является ни внешней ни внутренней для  $A$ . Множество всех граничных точек называется границей и обозначается  $\partial A$ .

**Определение.** (Множество Кантора)

Разбиваем отрезок  $[0, 1]$  на три части и выбрасываем середину, затем каждый из получившихся отрезков разбиваем на три части и выбрасываем середину, и т.д.

- Суммарная длина всех выброшенных интервалов равна 1.
- Концов отрезков счетное множество.
- Общее количество точек имеет мощность континуума.

**Определение.** Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

**Замечание.** Любой интервал - открытое множество

**Определение.** Множество называется  $A \subset \mathbb{R}$  замкнутым, если все его дополнение  $\mathbb{R} \setminus A$  открыто.

**Замечание.** Отрезок - и не открытое и не замкнутое множество.

**Замечание.** По определению считаем, что  $\emptyset$  и  $\mathbb{R}$  и открыты и замкнуты одновременно.

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если в любой проколотовой окрестности точки  $x$  бесконечно много точек  $A$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ . Множество всех предельных точек  $A$  обозначается  $A'$

**Определение.** Точка  $x \in A$  называется изолированной точкой  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : A \cap \mathring{B}_\varepsilon(x) = \emptyset$ .

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется точкой прикосновения  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ .

**Утверждение.** Точки прикосновения множества  $A$  являются либо внутренними, либо граничными.

*Доказательство.* Точка прикосновения не может являться внешней точкой  $\Rightarrow$  она либо внутренняя либо граничная.  $\square$

**Утверждение.** Точки прикосновения являются либо предельными, либо изолированными.

*Доказательство.* э Следует из определения.  $\square$

**Теорема.** (Критерий замкнутости множества)

Следующие условия эквивалентны:

- (0)  $A \subset \mathbb{R}$  - замкнуто.
- (1)  $\partial A \subset A$ ,
- (2) Все точки прикосновения содержатся в  $A$ ,
- (3)  $A' \subset A$ .

*Доказательство.* Докажем по цепочке  $(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (0)$ .

1.  $(0) \Rightarrow (1) : A - \text{замкнуто} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A - \text{открыто} \Rightarrow \partial A \not\subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \partial A \subset A$ .

2. (1)  $\Rightarrow$  (2) : Все точки прикосновения являются граничными или внутренними. Поскольку  $\partial A \subset A$  то все точки прикосновения содержатся в  $A$ .
3. (2)  $\Rightarrow$  (3) : Если  $x$  - предельная, то  $x \in A$  или  $x$  - точка прикосновения. Поскольку все точки прикосновения содержатся в  $A$ , то и все предельные точки содержатся в  $A$ .
4. (3)  $\Rightarrow$  (0) :  $A' \subset A \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A : x \notin A' \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus A \exists \dot{B}_\varepsilon : \dot{B}_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow x$  - внешняя точка  $A$ ,  $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A$  - открыто  $\Rightarrow A$  - замкнуто.

□

**Теорема.** Пусть  $A$  - множество индексов. Пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - открытые,  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - замкнутые. Тогда:

1.  $\bigcup_{\alpha} U_\alpha$  - открыто.
2.  $\bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  - открыто.
3.  $\bigcup_{i=1}^n X_{\alpha_i}$  - замкнуто.
4.  $\bigcup_{\alpha} X_\alpha$  - замкнуто.

*Доказательство.*

1. Пусть  $u \in \bigcup_{\alpha} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 : u \in U_{\alpha_0} \Rightarrow \exists B(u) \in U_{\alpha_0} \Rightarrow B(u) \in \bigcup_{\alpha} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha} U_\alpha$  - открыто.
2. Пусть  $u \in \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \exists \varepsilon_i : B_{\varepsilon_i} \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists \varepsilon_i = \min\{\varepsilon_{i_0}\} \Rightarrow B_{\varepsilon_{i_0}} \subset U_{\alpha_i} \forall i \Rightarrow B_{\varepsilon_{i_0}} \subset \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$  - открыто.
3. (3) и (4) следуют из (1), (2) и законов Моргана.

□

**Примеры.**

1.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1]$ .
2.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$ .

**Теорема.** Если  $A$  - ограничено сверху или снизу и замкнуто, то существует  $\max A$  или  $\min A$  соответственно.

*Доказательство.* По принципу полоты Вейерштрасса  $\exists \alpha = \sup A$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in (\alpha - \varepsilon, \alpha] \Rightarrow \alpha$  - точка прикосновения  $\Rightarrow \alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$ .  $\square$

**Теорема.** (Больцано-Вейерштрасса)

Если  $A$  - ограниченное и бесконечное множество, то в нем есть хотя бы одна предельная точка ( $A' \neq \emptyset$ ).

*Доказательство.* т.к  $A$  - ограничено, что  $\exists \sup A = b, \inf A = a$

$\Rightarrow A \subset [a_1, b_1] = [a, b]$ . Поделим отрезок  $[a_1, b_1]$  пополам и возьмем половину  $[a_2, b_2]$  в которой бесконечно много элементов  $A$  и т.д. Получаем систему вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ , у которых длина стремится к нулю (упражнение)  $\Rightarrow \exists! c \in [a_n, b_n] \forall n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : [a_n, b_n] \subset B_\varepsilon(c) \Rightarrow$  существует бесконечно много элементов в  $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(c) \Rightarrow c \in A'$ .  $\square$

**Определение.** Говорят, что семейство  $\{A_\alpha\}_\alpha$  является покрытием множества  $B$ , если  $B \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$

**Определение.** Рассмотрим  $X \subset \mathbb{R}$ . Если  $\forall$  покрытия  $X$  открытыми множествами  $\{A_\alpha\}_\alpha \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n$  - конечное подпокрытие, что  $X \subset \bigcup_{\alpha}^n A_\alpha$ , то  $X$  называется компактным множеством или компактом.

**Теорема.** Любой отрезок является компактом.

*Доказательство.* Пусть  $[a, b] \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$ ,  $A_\alpha$  - открытые и нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда  $[a, b] = [a_1, b_1]$  делим отрезок пополам и выбираем половину  $[a_2, b_2]$ , у которой нельзя выделить конечное подпокрытие и т.д. Получаем систему вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ , у которых длина стремится к нулю  $\Rightarrow \exists! c \in [a_n, b_n] \forall n \Rightarrow \exists \alpha_0 : c \in A_{\alpha_0} \Rightarrow \exists n_{\alpha_0} : [a_{n_{\alpha_0}}, b_{n_{\alpha_0}}] \subset A_{\alpha_0}$  получаем противоречие.  $\square$

**Теорема.** (Лемма Гейне-Бореля)

$A$  - компакт  $\Leftrightarrow A$  - замкнуто и ограничено.

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

## 4 Числовые последовательности

**Определение.** Отображение  $\{a_n\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  называется последовательностью.

**Определение.**  $\{a_n\}$  ограничена сверху (снизу), если ее образ ограничен сверху (снизу).

**Определение.** Пусть  $\{n_k\}$  образ  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и  $\forall k : n_{k+1} > n_k$ . Тогда для любой  $\{a_n\}$  последовательность  $\{a_{n_k}\}$  называется подпоследовательностью  $\{a_n\}$ .

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}$ . Если  $\exists a \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$ , то говорят что последовательность  $\{a_n\}$  сходится, а число  $a$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}$  и обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Теорема.** Если  $\{a_n\}$  сходится, то ее предел единственный.

*Доказательство.* Пусть  $\exists a, b : a \neq b$  - два предела последовательности  $\{a_n\}$ . Тогда  $\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - a| < \frac{|a-b|}{3}$ , а также  $\exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - b| < \frac{|a-b|}{3}$ . Тогда взяв  $N = \max(N_1, N_2)$  получим противоречие.  $\square$

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , тогда  $\forall a_{n_k} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall k > N_\varepsilon : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$   $\square$

**Определение.**  $\forall k \in \mathbb{Z}$  отображение  $\mathbb{Z} \setminus \{\dots, k-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  тоже будем называть последовательностью.

**Замечание.** 1. Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $b_n$  отличается от  $a_n$  конечным числом членов, то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**Теорема.** (Отделимость)

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Пусть  $b \neq a$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^\infty = \emptyset$ .

*Доказательство.* Пусть  $\forall \varepsilon > 0 \forall N_\varepsilon : B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=N_\varepsilon}^\infty \neq \emptyset$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ , сразу получаем противоречие.  $\square$

**Замечание.**  $\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty = \emptyset$ . Если  $b \notin \{a_n\}_{n=1}^\infty$ , то  $B_\varepsilon(b) \cap \{a_n\}_{n=1}^\infty = \emptyset$ .

## 4.1 О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

**Определение.** Рассмотрим пару последовательностей  $a_n$  и  $b_n$ . Если

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ , то говорят, что последовательность  $a_n$  это о-малое от  $b_n$  и обозначают  $a_n = \bar{o}(b_n)$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.** Если  $\exists M > 0 : \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M \forall n$ , то говорят, что последовательность  $a_n$  это О-большое от  $b_n$  и обозначают  $a_n = O(b_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Пример.**  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sin n = \bar{o}(n)$ ,  $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \cos n = \bar{o}(n)$ ,  
 $\frac{\sqrt{n}+1}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sqrt{n}+1 = \bar{o}(n)$

**Замечание.**  $O(1)$  - обозначение класса ограниченных последовательностей.

**Определение.** Последовательность  $a_n$  называется бесконечно малой, если  $a_n = \bar{o}(1)$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Определение.** Последовательность  $a_n$  называется бесконечно большой, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon$ , такие последовательности обозначаются  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  (это всего лишь обозначение, конечно у последовательности  $a_n$  не существует предела)

Если в определении  $a_n > \varepsilon$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Если в определении  $a_n < -\varepsilon$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Теорема.** (Исчисление бесконечно малых)

Пусть  $a_n = \bar{o}(1), n \rightarrow \infty$ ,  $b_n = \bar{o}(1), n \rightarrow \infty$  и  $c_n = O(1)$ . Тогда  $\forall c \in \mathbb{R}$ :

1.  $ca_n = \bar{o}(1)$
2.  $a_n + b_n = \bar{o}(1)$
3.  $a_n b_n = \bar{o}(1)$
4.  $a_n c_n = \bar{o}(1)$

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n| < \varepsilon$ ,  $\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n| < \varepsilon$ , далее возьмем  $n > \max\{N_1, N_2\}$ ,  $|c_n| < M$

1.  $|ca_n| \leq |c|\varepsilon$
2.  $|a_n + b_n| < 2\varepsilon$
3.  $|a_n b_n| < \varepsilon^2$
4.  $|c_n a_n| < M\varepsilon$

□

**Теорема.** Пусть  $a_n$  - бесконечно большая и  $a_n \neq 0$ , тогда  $\frac{1}{a_n}$  - бесконечно малая.

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon : |a_n| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\varepsilon}$

□



**Лемма.** Если  $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow (a_n - a) = \bar{o}(1)$

*Доказательство.*  $|a_n - a| < \varepsilon$  □

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , тогда

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$

3.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$

4.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

*Доказательство.* 1.  $a_n + b_n = a + \bar{o}(1) + b + \bar{o}(1) = a + b + \bar{o}(1)$

2.  $ca_n = c(a + \bar{o}(1)) = ca + \bar{o}(1)$

3.  $a_n b_n = (a + \bar{o}(1))(b + \bar{o}(1)) = ab + \bar{o}(1)$

4.  $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - ab_n}{bb_n} = \frac{(a + \bar{o}(1))b - a(b + \bar{o}(1))}{b(b + \bar{o}(1))} = \bar{o}(1)O(1) = \bar{o}(1)$  □

**Замечание.** т.к  $b \neq 0$ ,  $b_n \neq 0 \forall \varepsilon$ , то 0 отделен от  $b_n$ , т.е  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \cap b_n = \emptyset \Rightarrow |b_n| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Теорема.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\forall n, a_n \geq 0$ , тогда  $a \geq 0$

*Доказательство.* Пусть  $a < 0$ , тогда  $\exists N \forall n > N : |a - a_n| < \frac{|a|}{3}$  □

**Замечание.** Если  $a_n > 0, a \geq 0$ , то  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

**Следствие.** Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  и пусть  $\forall n : a_n \geq b_n$ , тогда  $a \geq b$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $a_n - b_n \geq 0$ .

$a_n - b_n \rightarrow a - b \geq 0$ . □

**Теорема.** (Лемма о двух милиционерах)

Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a : a_n \leq b_n$  и пусть  $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n$ , тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon : a_n \in B_\varepsilon(a), b_n \in B_\varepsilon(a) \Rightarrow c_n \in B_\varepsilon(a)$ . □

## 4.2 Монотонные последовательности

**Определение.**

1. Если  $\forall n : a_{n+1} > a_n$ , то  $a_n$  (строго) возрастает.
2. Если  $\forall n : a_{n+1} \geq a_n$ , то  $a_n$  неубывает.
3. Если  $\forall n : a_{n+1} < a_n$ , то  $a_n$  (строго) убывает.
4. Если  $\forall n : a_{n+1} \leq a_n$ , то  $a_n$  невозрастающая.

Такие последовательности называют монотонными.

**Теорема.** Если последовательность неубывает (невозрастает) и ограничена сверху (снизу), то у нее есть предел.

*Доказательство.*  $a_n$  - ограничена сверху и неубывает  $\Rightarrow \exists \sup a_n = a$ .

$\forall \varepsilon > 0 \exists a_N > a - \varepsilon, \forall n > N : a_n > a - \varepsilon.$

□

## 4.3 Число e

**Утверждение.**

1.  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  возрастает.
2.  $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  убывает.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{(n^2+2)^n(n+2)}{(n^2+2n+1)^n(n+1)} = \\ &= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n (\frac{n+2}{n+1}) > (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \\ &= \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}((n+2)^{n+2})} = \frac{(n^2 + 2n + 1)^{n+1}(n+1)}{(n^2 + 2n)^{n+1}(n+2)} = \\
&= (1 + \frac{1}{n^2 + 2n})^{n+1} \frac{(n+1)}{n+2} > (1 + \frac{1}{n^2 + 2n}) (\frac{n+1}{n+2}) = \\
&= \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1
\end{aligned}$$

□

**Теорема.**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

*Доказательство.*  $\forall n, a_n < b_n$ , т.к.  $b_n = a_n(1 + \frac{1}{n}) \forall n, m : a_n < b_m \Rightarrow a_n$  - ограничена  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  □

**Определение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$