

Дифференциальные уравнения

Лектор: проф. Давылов Алексей Александрович

3 сентября 2025 г.



Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа

Telegram: [@fourkenz](#)

GitHub: [yakovlevki](#)

Содержание

| | |
|---|----------|
| 1 | Лекция 1 |
|---|----------|

| |
|---|
| 3 |
|---|

1 Лекция 1

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме называется уравнение

$$\dot{x} = v(t, x)$$

где $x \in M$, $t \in \mathbb{R}_t$.

Определение. Область определения дифференциального уравнения - это область, где определено v .

Определение. x называется точкой фазового пространства, (t, x) называется точкой расширенного фазового пространства.

Пример. (Модель Мальтуса)

Гипотеза: масса популяции "растет" со скоростью, пропорциональной имеющейся массе. Пусть m - масса популяции, r - коэффициент пропорциональности. При первом приближении обычно полагают $r := b - d$, где b - коэффициент рождаемости, d - коэффициент смертности. Тогда модель популяции описывается уравнением

$$\dot{m} = rm$$

перейдем к дифференциалам

$$\dot{m}dt = rmdt$$

$$\frac{dmt}{mt} = rdt$$

проинтегрируем обе части

$$\int_{t_0}^t \frac{dm}{m} = \int_{t_0}^t rdt$$

$$\ln \left| \frac{m(t)}{m(t_0)} \right| = r(t - t_0)$$

отсюда

$$m(t) = m(t_0)e^{r(t-t_0)}$$

Пример. (Модель Ферхюльста)

Положим $r = r(m) = a - bm$

$$\dot{m} = (a - bm)m$$

$$\dot{m} = r\left(1 - \frac{m}{k}\right)m$$

Пример. (Модель Ланкастера)

Пусть x - одна популяция, y - другая популяция

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay, & a > 0, \\ \dot{y} = -bx, & b > 0. \end{cases}$$

домножим первое уравнение на $bxdx$, а второе на $aydy$ и вычтем второе из первого:

$$bx\dot{x}dt - ay\dot{y}dt = 0$$

$$bxdx - aydy = 0$$

проинтегрировав, получим

$$\boxed{x^2 - ay^2 = c}$$

Определение. Векторное поле v называется автономным, если оно не зависит от времени, неавтономным в противном случае.

Определение. Решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t, x)$$

с областью определения $D \subset \mathbb{R}_t \times M$ на промежутке I называется дифференцируемым отображением $t \rightarrow x(t)$, $t \in I$, такое, что

1. $(t, x(t)) \in D$, $t \in I$
2. $\dot{x} \equiv v(t, x(t))$, $t \in I$.

Определение. Отображение $(M_1, \rho_1) \rightarrow (M_2, \rho_2)$ удовлетворяет условию Липшица, если существует $L > 0$ такая, что

$$\rho_2(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot \rho_1(x_1, x_2)$$

Определение. Задачей Коши называется поиск решения, проходящего через заданную точку области определения.

Теорема. (Теорема существования и единственности решения задачи Коши)
Если в области D векторное поле v непрерывно по t и x и локально вблизи каждой точки удовлетворяет условию Липшица по x , то решение задачи Коши

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D$$

существует и единственно при временах достаточно близких к t_0 .

Упражнение. Убедиться, что при $r > 0$ в модели

$$\dot{m} = rm^2$$

популяция стремится к бесконечности за конечное время

Упражнение. Убедиться, что решение уравнения

$$y' = y^{\frac{2}{3}}$$

имеет вид кубической параболы.