Дифференциальные уравнения

Лектор: проф. Давылов Алексей Александрович

3 сентября 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 208 группа
Telegram: @fourkenz
GitHub: yakovlevki

Содержание

1 Лекция 1

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме называется уравнение

$$\dot{x} = v(t, x)$$

где $x \in M,\ t \in \mathbb{R}_t$.

Определение. Область определия дифференциального уравнения - это область, где определено v.

Определение. x называется точкой фазового пространства, (t, x) называется точкой расширенного фазового пространства.

Пример. (Модель Мальтуса)
Гипотеза: масса популяции "растет"со скоростью, пропроциональной имеющейся массе. Пусть m - масса популяции, r - коэффициэнт пропорциональности. При первом приближении обычно полагают $r := b - d$, где b - коэффициэнт рождаемости, d - коэффициэнт смертности. Тогда модель популяции описывается уравнением

$$\dot{m} = rm$$

перейдем к дифференциалам

$$\dot{m}dt = rmdt$$

$$\frac{dmt}{mt} = rdt$$

проинтегрируем обе части

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dm}{m} = \int_{t_0}^{t} rdt$$

$$\ln\left|\frac{m(t)}{m(t_0)}\right| = r(t - t_0)$$

отсюда

$$\boxed{m(t) = m(t_0)e^{r(t-t_0)}}$$

Пример. (Модель Ферхюльста)
Положим $r = r(m) = a - bm$

$$\dot{m} = (a - bm)m$$

$$\dot{m} = r(1 - \frac{m}{k})m$$

Пример. (Модель Ланкастера)
Пусть x - одна популяция, y - другая популяция

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay, \ a > 0, \\ \dot{y} = -bx, \ b > 0. \end{cases}$$

домножим первое уравнение на $bxdt$, а второе на $aydt$ и вычтем второе из первого:

$$bx\dot{x}dt - ay\dot{y}dt = 0$$

$$bxdx - aydy = 0$$

проинтегрировав, получим

$$\boxed{x^2 - ay^2 = c}$$

Определение. Векторное поле v называется автономным, если оно не зависит от времени, неавтономным в противном случае.

Определение. Решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t, x)$$

с областью определения $D \subset \mathbb{R}_t \times M$ на промежутке I называется дифференцируемое отображение $t \to x(t), \ t \in I$, такое, что

1. $(t, x(t)) \in D, \ t \in I$
2. $\dot{x} \equiv v(t, x(t)), \ t \in I$.

Определение. Отображение метрических пространств $(M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ удовлетворяет условию Липшица, если существует константа $L > 0$ такая, что

$$\rho_2(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot \rho_1(x_1, x_2)$$

Определение. Задачей Коши называется поиск решения, проходящего через заданную точку области опредения.

Теорема. (Теорема существования и единственности решения задачи Коши)
Если в области D векторное поле v непрерывно по t и x и локально вблизи каждой точки удовлетворяет условию Липшица по x, то решение задачи Коши

$$\dot{x} = v(t, x), \ x(t_0) = x_0, \ (t_0, x_0) \in D$$

существует и единственно при временах достаточно близких к t_0.

Упражнение. Убедиться, что при $r > 0$ в моделе

$$\dot{m} = rm^2$$

популяция стремится к бесконечности за конечное время.

Упражнение. Убедиться, что решение уравнения

$$y' = y^{\frac{2}{3}}$$

имеет вид кубической параболы.