Элементы теории чисел

Лектор: проф. Королев Максим Александрович

18 января 2025 г.

Конспект: Кирилл Яковлев, 108 группа
Telegram: @fourkenz
GitHub: yakovlevki

Содержание

1 Делимость целых чисел 3

2 Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель (НОК и НОД) 4

3 Алгоритм Евклида 6

4 Решение в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными 6

5 Простые числа 7

6 Мультипликативные функции 11

7 Непрерывные дроби 19

8 Теория сравнений 28

9 Сравнения с одним неизвестным 35

10 Квадратичные вычеты 40

11 Первообразные корни 48

Введение

Следующие понятия считаются интуитивно ясными:

1. Понятие натурального ряда $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
2. У каждого натурального числа n существует единственное натуральное число $m = n + 1$ следующее за ним.
3. Понятие отрицательных чисел и нуля.
4. Понятие суммы, разности и произведения двух целых чисел.

Аксиома. Если $M \subset \mathbb{N}$ обладает следующими свойствами: $(1 \in M)$ и $(\forall n \in M$ выполнено $n + 1 \in M)$, то $M = \mathbb{N}$.

Следствие 1. Всякое непустое подмножество натурального ряда содержит минимальный элемент.

Следствие 2. Всякое непустое конечное подмножество натурального ряда содержит максимальный элемент.

Следствие 3. (Принцип математической индукции)
Если известно, что некоторое утверждение о натуральных числах выполнено для натурального числа a, а также из предположения о том, что утверждение верно при некотором n следует справедливость этого утверждения и для числа $n+1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел, больше или равных a.

1 Делимость целых чисел

Определение 1.1. Пусть $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$. Говорят что a делится на b, если существует $c \in \mathbb{Z}$, такое, что $a = bc$.

Замечание. a называется делимым, а b называется делителем числа a. Запись $b \mid a$ означает, что b делит a. Если b не делит a, то пишут $b \nmid a$.

Лемма 1.1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}$, тогда:

1. $1 \mid a$.
2. $a \neq 0 \Rightarrow a \mid a$.
3. $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$.

4. $a \mid b$ и $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

5. $a \mid b$ и $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$.

6. $a \mid b$ и $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Теорема 1.1. Если $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$, то существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leq r \leq b - 1$.

Доказательство. Докажем существование: Если a делится на b, то $a = bc$. В таком случае возьмем $q = c, r = 0$. Теперь пусть a не делится на b. Рассмотрим непустое множество M натуральных чисел, представимых в виде $a - kb, k \in \mathbb{Z}$, возьмем $k = -(|a| + 1)$, тогда $a - kb = b(|a| + 1) + a \geq b(|a| + 1) - |a| \geq 1 \cdot (|a| + 1) - |a| = 1 \Rightarrow a - kb$ - натуральное. Значит, у M есть минимальный элемент $a - kb$. Возьмем $q = k, r = a - kb = a - bq > 1$. Осталось показать, что $0 \leq r \leq b - 1$. Предположим, что $r \geq b$. Если $r = b$, то $a = bq + b = b(q + 1)$ получаем противоречие, так как a не делится на b. Значит, $r = b + m, m \geq 1$. Получаем $1 \leq m = r - b < r$, при этом $a = bq + r = bq + b + m = b(q + 1) + m \Rightarrow m = a - b(q + 1) \Rightarrow m \in M$ и $m < r$, получаем противоречие, так как a не делится на b. Доказано, что $r < b \Rightarrow$ представление $a = bq + r$ - искомое. Докажем единственность: предположим, что для некоторых a и b имеются пары чисел с указанным свойством: q, r и q_1, r_1, причем $0 \leq r \leq r_1 \leq b - 1$. Тогда $a = bq + r = bq_1 + r_1 \Rightarrow 0 \leq b(q - q_1) = r_1 - r$. Значит, b делит разность $r_1 - r$. Допустим, что $q \neq q_1$, тогда по пункту 6 леммы 1.1 получаем $b \leq r_1 - r$ и в то же время $r_1 - r \leq b - 1 < b$. Получаем противоречие, поэтому $q = q_1$, следовательно, и $r = r_1$. □

2 Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель (НОК и НОД)

Определение 2.0. $n \geq 2, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ пусть натуральное число k делится на каждое из этих чисел. Тогда k - общее кратное чисел $a_1, \ldots, a_n$.
Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - целые числа не все равные нулю. Натуральное число d называется общим делителем $a_1, \ldots, a_n$, если d делит каждое из этих чисел.

Замечание. Множество таких k непусто, в нем лежит, например, произведение всех этих чисел.
Множество таких d конечно: если $a_i \neq 0$, то d находится среди делителей числа a_i, (по пункту 6 леммы 1.1) $d \leq |a_i|$, значит числа d образуют конечное множество, оно непусто, так как содержит единицу.

Определение 2.1. Наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n$, называют их наименьшим общим кратным, его обозначают $[a_1, \ldots, a_n]$.

Теорема 2.1. Каждое общее кратное натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ делится на их НОК.

Доказательство. Пусть M - общее кратное $a_1, \ldots, a_n$, $K = [a_1, \ldots, a_n]$. Поделим M на K с остатком: $M = kq + r, 0 \leq r \leq k - 1 \leq k$. Допустим, что $K \neq 0$. По определению, всякое число a_i делит оба числа M и $K \Rightarrow a_i$ делит разность $k = M - qK$, значит k является общим кратным для $a_1, \ldots, a_n$, но $k < K$, получаем противоречие, так как какое-то кратное оказалось меньше минимального. Значит, $k = 0$ и $M = qK$. □

Определение 2.2. Наибольшее из натуральных чисел d, делящих каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n$, называют наибольшим общим делителем $a_1, \ldots, a_n$, его обозначают $(a_1, \ldots, a_n)$.

Определение 2.3. Числа a и b называются взаимно простыми, если $(a, b) = 1$. Числа $a_1, \ldots, a_n$ называются взаимно простыми в совокупности, если $(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты, если $(a_i, a_j) = 1$ $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n$.

Теорема 2.2. $[a, b] \cdot (a, b) = ab, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Доказательство. ab - общее кратное a и b. По теореме 2.1 ab делится на $[a, b]$, то есть $ab = c[a, b]$, где $c \geq 1$ - натуральное число. Покажем, что a и b делятся на c. Действительно, $a = \frac{ab}{[a,b]} \cdot \frac{[a,b]}{b} = c \cdot \frac{[a,b]}{b}$, $b = \frac{ab}{[a,b]} \cdot \frac{[a,b]}{a} = c \cdot \frac{[a,b]}{a}$, но оба числа $\frac{[a,b]}{a}$ и $\frac{[a,b]}{b}$ - натуральные, значит c - общий делитель a и b. Пусть теперь d - произвольный общий делитель a и b, тогда $\frac{ab}{d} = a \cdot \frac{b}{d}$, то есть число $\frac{ab}{d}$ делится нацело на каждое из чисел a и b. По теореме 2.1, оно делится на $[a, b]$, то есть $\frac{ab}{d} = [a, b]m$, где $m \geq 1$ - натуральное число, но тогда $\frac{ab}{[a,b]} = c = dm$, то есть d делит c. В силу пункта 6 леммы 1.1 $d \leq c$, значит $c = (a, b)$. □

Теорема 2.3. Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$, причем $a \mid bc$ и $(a, b) = 1$, тогда $a \mid c$.

Доказательство. $(a, b) = 1 \Rightarrow$ (по теореме 2.2) bc делится нацело на $[a, b] = ab$, то есть $bc = abm$, где $m \geq 1$ - натуральное число. Сократим обе части на b, получим $c = am$. □

Теорема 2.4. Пусть $\Delta = (a, b) \geq 1 \Rightarrow (\frac{a}{\Delta}, \frac{b}{\Delta}) = 1$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $m \mid \frac{a}{\Delta}, m \mid \frac{b}{\Delta}$ предположим, что $m > 1 \Rightarrow cm = \frac{a}{\Delta}, dm = \frac{b}{\Delta} \Rightarrow \Delta cm = a, \Delta dm = b \Rightarrow \Delta m \mid a$ и $\Delta m \mid b \Rightarrow \Delta m$ - общий делитель a и b. Но т.к. $m > 1$, то $\Delta m > \Delta \Rightarrow \Delta = (a, b) \leq \Delta m$ - противоречие, поскольку Δ - НОД $\Rightarrow m = 1 \Rightarrow (\frac{a}{\Delta}, \frac{b}{\Delta}) = 1$. □

3 Алгоритм Евклида

Лемма 3.1. Пусть $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ и $b \mid a$. Тогда $(a, b) = b$.

Доказательство. Пусть $(a, b) = c \Rightarrow c \mid b \Rightarrow$ (по лемме 1.1) $c \leq b$, но $b \mid a$, $b \mid b \Rightarrow b$ - общий делитель a и $b \Rightarrow b \leq c \Rightarrow b = c = (a, b)$. □

Лемма 3.2. Пусть $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, a = bq + r : r, q \in \mathbb{Z}, r \geq 0$. Тогда $(a, b) = (b, r)$.

Доказательство. Пусть $\Delta = (a, b), \delta = (b, r)$. Имеем $\delta \mid b \Rightarrow \delta \mid bq, \delta \mid r \Rightarrow$ (лемма 1.1) $\delta \mid bq + r = a \Rightarrow \delta \mid a, \delta \mid b \Rightarrow \delta$ - общий делитель a и $b \Rightarrow \delta \leq \Delta$. $\Delta \mid b, \Delta \mid bq, \Delta \mid a \Rightarrow$ (лемма 1.1) $\Delta \mid a - bq = r \Rightarrow \Delta$ - общий делитель b и $r \Rightarrow \Delta \leq \delta \Rightarrow \Delta = \delta$. □

Алгоритм. Получаем, что при поиске НОД a и b, (a, b) можно заменять любой парой $(b, r) = (b, a - bq), q \in \mathbb{Z}$. Положим $r_0 = a, r_1 = b$.
Выполняем деление с остатком:

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1 \Rightarrow (r_0, r_1) = (r_1, r_2)$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2 \Rightarrow (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$$
$$r_2 = r_3 q_3 + r_4,\ 0 < r_4 < r_3 \Rightarrow (r_2, r_3) = (r_3, r_4)$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1} \Rightarrow (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n)$$
$$r_{n-1} = r_n q_n$$
$$\Rightarrow \text{(лемма 3.1)}(r_{n-1}, r_n) = r_n \Rightarrow (a, b) = r_n$$

4 Решение в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными

Рассмотрим уравнение $(*)$ $ax + by = c$, такое, что $a, b, c \in \mathbb{Z}, a$ и b не равняются нулю одновременно. $x, y \in \mathbb{Z}$ - неизвестные.

Теорема 4.1. (1) Уравнение $(*)$ разрешимо $\Leftrightarrow \Delta = (a,b) \mid c$.
(2) В случае разрешимости, множество решений этого уравнения бесконечно, все решения имеют вид $x = x_0 + \frac{b}{\Delta}t, y = y_0 - \frac{a}{\Delta}t$, где x_0, y_0 - произвольное решение, а $t \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Докажем первый пункт:

$(\Rightarrow)$: Если x, y - решение, то $\Delta \mid ax, \Delta \mid by \Rightarrow$ (лемма 1.1) $\Delta \mid ax + by \Rightarrow \Delta \mid c$.

$(\Leftarrow)$: Не теряя общности, можем считать, что $a \geq b \geq 0$. Доказываем индукцией по сумме $a + b$.
База: $a + b = 1 \Rightarrow b = 0$ и $a = 1 \Rightarrow$ уравнение имеет вид $ax = c \Rightarrow x = c$. Можем предъявить решение $x = c, y = 0$. В этом случае $\Delta = (1,0) \mid 1$.
Шаг: $n \geq 1$, считаем, что утверждение доказано для всех уравнений с условием $a \geq b \geq 0$, $1 \leq a + b \leq n$. Пусть $ax + by = c$, где $a \geq b \geq 0$, $a + b = n + 1$ и $\Delta = (a,b) \mid c \Rightarrow$ докажем, что есть хотя бы одно решение. Пусть $b = 0, ax = c, \Delta = (a,0) = a, a \mid c \Rightarrow c = am \Rightarrow x = m, y = 0$ - решение. Пусть $b \geq 1$. Рассмотрим уравнение $(a-b)X + bY = c$, $a-b \geq 0, b \geq 1 > 0$. $(a-b)+b = (a+b)-b = n+1-b \leq n$. $(a-b,b) = (a,b) \mid c$ $\Rightarrow$ по предположению индукции есть целочисленное решение X_0, Y_0.
$(a-b)X_0 + bY_0 = c \Rightarrow aX_0 - b(Y_0 - X_0) = c \Rightarrow x = X_0, y = Y_0 - X_0$ - решение.

Докажем второй пункт (проверим, что x_0, y_0 - решение):
$a(x_0 + \frac{b}{\Delta}t) + b(y_0 - \frac{a}{\Delta}t) = ax_0 + \frac{ab}{\Delta}t + by_0 - \frac{ab}{\Delta}t = ax_0 + by_0$. Обратно: пусть x_0, y_0 и x, y - различные решения. $ax_0 + by_0 = c, ax + by = c$
$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) = b(y_0 - y)$. $\Delta = (a,b)$
$\Rightarrow a = \alpha\Delta, b = \beta\Delta \Rightarrow$ (теорема 2.4) $(\alpha, \beta) = 1$
$\Rightarrow \alpha\Delta(x - x_0) = \beta\Delta(y_0 - y) \Rightarrow \alpha(x - x_0) = \beta(y_0 - y)$
$\Rightarrow \alpha \mid \beta(y_0 - y) \Rightarrow \alpha \mid (y_0 - y) \Rightarrow y_0 - y = \alpha t \Rightarrow \alpha(x - x_0) = \beta\alpha t$
$\Rightarrow x - x_0 = \beta t$. □

5 Простые числа

Определение 5.1. Натуральное число $n > 1$ называется простым, если оно имеет ровно два делителя: 1 и n. В противном случае это число называется составным.

Замечание. Единица не причисляется ни к простым, ни к составным.

Лемма 5.1. Наименьший делитель натурального числа $n > 1$, отличный от единицы - простое число.

Доказательство. Пусть $d \mid n, 1 < d \leq n$, и d - наименьший делитель с этими свойствами. Пусть d - составное. Тогда $\exists\ k : k \mid d$ и $1 < k < d$. По лемме 1.1 $k \mid n$, но $1 < k < d$ - противоречие с тем, что d - минимальный. □

Теорема 5.1. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Пусть множество простых конечно: $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ - все простые числа. Рассмотрим число $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. По лемме 5.1 наименьший делитель $p > 1$ числа N - простое число. Но p отлично от $p_1 \dots p_k, p$ делит N нацело, а N при делении на каждое из $p_1 \dots p_n$ дает остаток 1 - противоречие. □

Определение 5.2. Пусть $x > 0$, через $\pi(x)$ обозначим количество простых чисел на отрезке $[0, x]$ ($\pi(x)$ - количество простых чисел не превосходящих x).

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

(Теорема 5.1) $\Leftrightarrow \pi(x)$ - не ограничена сверху $\Leftrightarrow \pi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Гипотеза Лежандра: $\pi(x) = \frac{x}{\ln x - C}$, где $C = 1,08366$. Позднее Гаусс выдвинет более сложное и более точное предположение. Из доказательства теоремы Чебышева: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_0 = x_0(\varepsilon)$, т.ч. $\forall x \geq x_0$ выполнено неравенство:

$$(A - \varepsilon)\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < (B + \varepsilon)\frac{x}{\ln x}$$

$$A = \ln\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\ 3^{\frac{1}{3}}\ 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\right), B = \frac{6}{5}A$$

Асимптотический закон распределения простых чисел:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}\right) = 1 \Leftrightarrow A = B = 1 \Leftrightarrow \pi(x) = (1 + \bar{\bar{o}}(1))\frac{x}{\ln x}$$

Лемма 5.2. Пусть N - составное число, p - наименьший простой делитель. Тогда $p \leq \sqrt{N}$.

Доказательство. N - составное $\Rightarrow \exists\ a, b : 1 < a < N,\ 1 < b < N$ и $ab = N$. Значит $a \mid N,\ b \mid N, p$ - наименьший $\Rightarrow p \leq a,\ p \leq b \Rightarrow p^2 \leq ab = N$
$\Rightarrow p \leq \sqrt{N}$. □

Решето Эратосфена. Выписываем все числа от 2 до N, первое число в таблице - простое, это 2. Вычеркиваем все числа кратные 2, кроме нее самой. Первое невычеркнутое число после 2 - это 3 - значит оно простое. Вычеркиваем все числа, кратные 3, кроме самой 3. Первое невычеркнутое число после 3 - простое и т.д. После того как найдено наибольшее простое p не превосходящее $\sqrt{N}$ и вычеркнуты все числа кратные p, в таблице останутся лишь простые числа, не превосходящие N и только они.

Теорема 5.2. (Основная теорема арифметики)
Каждое целое число, большее 1, раскладывается в произведение простых чисел, притом единственным способом (с точностью до порядка сомножителей).

Доказательство. Существование:
Индукция по $n > 1$. Числа $n = 2, n = 3$ - простые, для них это утверждение справедливо. Пусть $n > 3$, и допустим, что справедливость утверждения проверена для всех $m < n$. Если n - простое, то утверждение очевидно. Пусть n - составное. По лемме 5.1 его наименьший делитель - простое число $\Rightarrow n = p_1 k$, но $k = \frac{n}{p_1} \leq \frac{n}{2} < n$. По предположению индукции $k = p_2 \dots p_r$, где $p_2, \dots, p_r$ - простые. $\Rightarrow n = p_1 k = p_1 p_2 \dots p_r$ - искомое разложение.
Единственность:
Пусть $n = p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s$, где p_i, q_i - простые числа и $r \leq s$. Тогда
$p_1 \dots p_r = q_1 a_1$, где $a_1 = q_2 \dots q_s \Rightarrow p_1 \mid q_1 a_1$. Возможно два случая:
1) $(p, q) > 1 \Rightarrow p_1 = q_1$.
2) $(p, q) = 1 \Rightarrow$ (теорема 2.3) $p_1 \mid a_1 = q_2 \dots q_s, a_1 = q_2 a_2, a_2 = q_3 \dots q_s$,
$p_1 \mid q_2 a_2 \Rightarrow$ либо $p_1 = q_2$, либо $p_1 \mid a_2$ и т.д. Но $a_1 > a_2 > \dots \geq 1 \Rightarrow$ на одном из шагов обязательно будет иметь место равенство $p_1 = q_k, k \leq s$ (иначе оказалось бы, что $p_1 \mid 1$, а это невозможно). Итак, p_1 совпадает с одним из чисел $q_1, \dots, q_s$. Будем считать, что $p_1 = q_1 \Rightarrow p_2 \dots p_r = q_2 \dots q_s$ продолжаем рассуждение и получаем, что p_2 совпадает с одним из $q_2, \dots q_s$, пусть $p_2 = q_2$ и т.д. Если $r < s$ после r шагов получили бы противоречивое равенство: $1 = q_{r+1} \dots q_s$
$\Rightarrow r = s$ и множества $\{p_1, \dots, p_r\}$ и $\{q_1, \dots, q_s\}$ совпадают. □

Замечание. $n > 1, n = q_1 \dots q_s \Rightarrow n$ можно записать в виде $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ - каноническое разложение n на простые сомножители.

Определение 5.3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, p$ - простое. Тогда

$$\nu_p(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \nmid n, \\ \alpha, & \text{если } p = p_i. \end{cases}$$

Лемма 5.3. (Свойства $\nu_p(n)$)

1. Для любых целых чисел $a, b > 1$ и любого простого p, справедливо равенство: $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.
2. Пусть $m, n > 1$ - целые числа, тогда $m \mid n \Leftrightarrow \nu_p(m) \leq \nu_p(n)$ для любого простого p.

Доказательство.

1. При перемножении степеней с одинаковыми основаниями, их показатели складываются.
2. ($\Rightarrow$) Пусть $n = km \Rightarrow \nu_p(n) = \nu_p(k) + \nu_p(m) \geq \nu_p(m)$.

   ($\Leftarrow$) Все разности $\nu_p(n) - \nu_p(m)$ - целые неотрицательные. Рассмотрим число:

   $$k = \prod_p p^{\nu_p(n) - \nu_p(m)}$$

   Если $k = 1$, то $\nu_p(n) = \nu_p(m)$ для всех p и $m = n$. В силу основной теоремы арифметики, в этом случае $m \mid n$. Пусть $k > 1$, тогда в силу пункта 1:

   $$km = \prod_p p^{\nu_p(n) - \nu_p(m)} \cdot \prod_p p^{\nu_p(m)} = \prod_p p^{\nu_p(n)} = n$$

   то есть $m \mid n$.

□

Лемма 5.4. Для любых $a, b \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

$$[a, b] = \prod_p p^{\max(\nu_p(a), \nu_p(b))}$$

$$(a, b) = \prod_p p^{\min(\nu_p(a), \nu_p(b))}$$

Доказательство. Обозначим $K = [a, b]$, $N = \prod_p p^{\max(\nu_p(a), \nu_p(b))}$, поскольку $\nu_p(a) \leq \nu_p(N)$, $\nu_p(b) \leq \nu_p(N)$, то a и b делят N в силу леммы 5.3. Значит N - общее кратное чисел a и b. С другой стороны, поскольку a и b делят K, то по лемме 5.3 имеем $\nu_p(a) \leq \nu_p(K), \nu_p(b) \leq \nu_p(K)$, так что $\nu_p(K) \geq \max(\nu_p(a), \nu_p(b)) = \nu_p(N)$ для любого простого p. Значит, $N \mid K$, но $N \leq K \Rightarrow N = K$. Вторая часть утверждения следует из первой, если воспользоваться равенством

$$(a, b) = \frac{ab}{[a, b]}$$

и тем, что $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. □

6 Мультипликативные функции

Обозначения и пояснения:

1. $\sum\limits_{d|n} f(d)$ - сумма значений функции f по всем делиителям d числа n.
2. Двойная сумма вычисляется следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} g(mn) = \sum_{n=1}^{N} g(1,n) + \sum_{n=1}^{N} g(2,n) + \cdots + \sum_{n=1}^{N} g(M,n)$$

Определение 6.1. Функция f, определенная на множестве $\mathbb{N}$ называется мультипликативной, если для любых взаимно простых $a, b \in \mathbb{N}$ выполнено равенство:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Теорема 6.1. (Простейшие свойтсва мультипликативных функций)
Пусть f, g - мультипликативные функции. Тогда:

1. Если $f \not\equiv 0$, то $f(1) = 1$.
2. Если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ - каноническое разложение n, то $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_r^{\alpha_r})$.
3. Функция h, определенная для любого $n \in \mathbb{N}$ равенством $h(n) = f(n)g(n)$ - мультипликативна.

Доказательство.

1. Так как $f \not\equiv 0$, то $\exists\, a \in \mathbb{N} : f(a) \neq 0$. Тогда $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a)f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.
2. и 3. Напрямую следуют из определения.

□

Для исседования дальнейших свойств мультипликативных функций потребуется несколько вспомогательных лемм

Лемма 6.1. Пусть p - простое число, $r \geq 2$ и пусть целые числа $a_1, \dots, a_r$ попарно взаимно просты, причем $p \mid a_1 \dots a_r$. Тогда найдется номер $1 \leq s \leq r$ такой, что $p \mid a_s$.

Доказательство. Индукция по r. Если $r = 2$, то теоремы 2.3 следует, что утверждение верно. Пусть $m \geq 3$ и утверждение доказано для всех $r \leq m-1$. Пусть $a_1, \dots a_m$ попарно взаимно просты и $p \mid a_1 \cdot \dots \cdot a_m$. Полагая $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_{m-1}$ будем иметь: $p \mid aa_m$. Если $(p, a) = 1$, то $p \mid a_m$ по теореме 2.3. Пусть $(p, a) > 1$. Так как p - простое, то $(p, a) = p$ и p делит некоторый сомножитель a_s : $1 \leq s \leq m-1$. □

Лемма 6.2. Пусть $b \mid a$ и $c \mid a$, причем $(b, c) = 1$. Тогда $bc \mid a$.

Доказательство. Из условия следует, что a - общее кратное b и c. По теореме 2.1 a делится на $[b, c]$, по теореме 2.2 $[b, c] = bc$. □

Следствие. Пусть $r \geq 2$, и пусть целые числа $b_1 \dots b_r$ попарно взаимно просты, причем $b_1 \mid a, \dots, b_r \mid a$. Тогда $b_1 \dots b_r \mid a$.

Доказательство. Индукция по r. Если $r = 2$, получаем утверждение леммы. Пусть $m \geq 3$ и утверждение доказано для всех $r \leq m-1$. Пусть $b_1, \dots b_m$ попарно взаимно просты и каждое из них делит a. В силу предложения индукции, a делится на произведение $b = b_1 \dots b_{m-1}$. Заметим, что $(b, b_m) = 1$. Действительно, в противном случае найдется простое число p, делящееся как на b_m, так и на b. По лемме 6.1 p будет делить и некоторые $b_\xi : 1 \geq \xi \geq m-1$. Следовательно $(b_m, b_\xi) \geq p > 1$, что противоречит условию. Так как a делится на b и b_m, и $(b, b_m) = 1$, то в силу леммы 6.2 a делится на $bb_m = b_1 \dots b_m$. □

Лемма 6.3. Пусть числа a и b взаимно просты, и пусть d_1 и d_2 пробегают соответственно множества всех делителей a и b. Тогда величина $d = d_1 d_2$ пробегает без повторений всё множество делителей числа ab.

Доказательство.

1. Если $d_1 \mid a$, $d_2 \mid b$, то $a = kd_1$, $b = md_2$ при некоторых $k, m \in \mathbb{Z}$, так что $ab = kmd_1 d_2$, то есть $d_1 d_2$ - делитель ab.

2. Допустим, что $d_1 d_2 = \delta_1 \delta_2$ для некоторых чисел d_1, δ_1 делящих a, и некоторых чисел d_2, δ_2, делящих b. Очевидно, что $(d_1, \delta_2) = 1$, так как в противном случае нашлось бы простое p, делящееся и на a, и на b, что невозможно. Но $d_1 \mid \delta_1 \delta_2 \Rightarrow$ (по теореме 2.3) $d_1 \mid \delta_1$ и, следовательно $d_1 \leq \delta_1$. Аналогично доказывается, что $\delta_1 \mid d_1$ и $\delta_1 \leq d_1$. Значит $d_1 = \delta_1, d_2 = \delta_2$, то есть все произведения d_1 и d_2 различны.

3. Докажем, наконец, что всякий делитель d числа ab встретится среди произведений $d_1 d_2$. Если $d = 1$, то это очевидно. Пусть $d \geq 2$ и $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$

- каноническое разложение d. Число $q_1 = p_1^{\alpha_1} \mid ab$. Из теоремы 2.3 следует, что q_1 делит либо a, либо b (но не оба сразу). То же верно и для чисел $q_\xi = p_\xi^{\alpha_\xi}, \xi = 2, 3, \ldots, r$. Пусть, для определенности, $q_1, \ldots, q_t$ - все сомножители, делящие a, и $q_{t+1}, \ldots, q_r$ - все сомножители, делящие b. По следствию леммы 6.2 произведение $d_1 = q_1 \ldots q_t$ делит a, произведение $d_2 = q_{t+1}, \ldots, q_r$ делит b, но $d_1 d_2 = d$.

□

Теорема 6.2. Пусть функция f мультипликативна. Тогда функция F, определенная при любом $n \in \mathbb{N}$ равенством:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

мультипликативна.

Доказательство. Пусть $(a, b) = 1$. По лемме 6.3, все делители ab получим без повторений, рассмотрев все произведения $d = d_1 d_2$, где $d_1 \mid a$, $d_2 \mid b$. Значит

$$F(ab) = \sum_{d|ab} f(d) = \sum_{d_1|a} \sum_{d_2|b} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|a} \sum_{d_2|b} f(d_1) f(d_2) =$$
$$= (\sum_{d_1|a} f(d_1))(\sum_{d_2|b} f(d_2)) = F(a)F(b).$$

Взаимная простота d_1 и d_2 очевидна. □

Следствие. Если $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ - каноническое разложение n, а F - функция из условия теоремы, то

$$F(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + f(p_i) + f(p_i^2) + \cdots + f(p_i^{\alpha_i}))$$

(при условии что $f \not\equiv 0$).

Определение 6.2. Функция Мебиуса $\mu(n)$ определяется равенствами:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа}, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \ldots p_k - \text{различные простые числа}. \end{cases}$$

Примеры.

1. $\mu(2) = (-1)^1 = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = (-1)^2 = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(8) = \mu(9) = 0$, $\mu(10) = (-1)^2 = 1$.

2. $\mu(n)$ - мультипликативна: если $n = p_1 \dots p_k$, $m = q_1 \dots q_r$, $(m,n) = 1$ $\Rightarrow mn = p_1 \dots p_k q_1 \dots q_r \Rightarrow \mu(mn) = (-1)^{k+r} = (-1)^k(-1)^r = \mu(m)\mu(n)$.

3. p - простое $\Rightarrow \mu(p) = -1,\ \mu(p^2) = 0,\ \mu(p^3) = 0,\ \dots$

Теорема 6.3. (Основное свойство функции Мебиуса)

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1, \\ 0, \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $F(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) \Rightarrow$ (По теореме 6.2) F - мультипликативна. Пусть p - простое, $n = p^\alpha, \alpha \geq 1 \Rightarrow F(p^\alpha) = \sum\limits_{d|p^\alpha} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \dots + \mu(p^\alpha) = 1 - 1 = 0$. □

Определение 6.3. Функция Эйлера определена для натурального n, как количество чисел m с такими условиями: $1 \leq m \leq n$ и $(m,n) = 1$. Функция Эйлера обозначается $\varphi(n)$.

Примеры. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 1 + 1 + 0 = 2$, $\varphi(4) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$, $\varphi(5) = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4$, $\varphi(6) = 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2$.

Теорема 6.4. Функция Эйлера мультипликативна. Кроме того, если $p_1, \dots, p_k$ - все различные делители n, тогда:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$$

Доказательство. Надо подсчитать число тех m, для которых $(m,n) = 1$. По теореме 6.3

$$\sum_{d|(m,n)} \mu(d) = \begin{cases} 1, \text{ если } (m,n) = 1, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(n) = \sum_{1 \leq m \leq n} \sum_{d|(m,n)} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d \leq m \leq n, d|m} 1$$

$$1 \leq m = kd \leq n \Rightarrow 1 \leq k \leq \frac{n}{d}$$

$$\Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d \leq m \leq n, d|m} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Функции $\mu(d)$ и $\frac{1}{d}$ - мультипликативные $\Rightarrow$ $\frac{\mu(d)}{d}$ - мультипликативна $\Rightarrow$ по теореме 6.2 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$ - мультипликативна $\Rightarrow$ $\varphi(n)$ - мультипликативна.

$n = p^\alpha$, p - простое, $\alpha \geq 1$

$$\Rightarrow \varphi(p^\alpha) = p^\alpha \sum_{d|p^\alpha} \frac{\mu(d)}{d} = p^\alpha\left(\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(p)}{p} + \frac{\mu(p^2)}{p^2} + \cdots + \frac{\mu(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) =$$

$$= p^\alpha\left(1 + \frac{\mu(p)}{p}\right) = p^\alpha\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

.

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \dots \varphi(p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots p_k^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) =$$

$$= p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = n \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

□

Теорема 6.5. (Формула обращения Мебиуса)
Пусть $\forall n \geq 1$ функции f и g связаны соотношением

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{1}$$

Тогда $\forall n \geq 1$ выполнено равенство

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \tag{2}$$

Обратно, если $\forall n \geq 1$ f и g связаны соотношением (2), то $\forall n \geq 1$ верно (1).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть выполнено (1), преобразуем величину

$$\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{\delta|\frac{n}{d}} g(\delta) = \sum_{d|n} \sum_{\delta|\frac{n}{d}} \mu(d) g(\delta) = \sum_{\delta|n} \sum_{d|\frac{n}{\delta}} \mu(d) g(\delta) =$$

$$= \sum_{\delta|n} g(\delta) \sum_{d|\frac{n}{\delta}} \mu(d) = g(n) \text{ (по теореме 6.3).}$$

Пояснение:

$$\sum_{d|\frac{n}{\delta}} \mu(d) = \begin{cases} 1, \text{ если } \frac{n}{\delta} = 1, \\ 0, \text{ если } \frac{n}{\delta} > 1. \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ если } n = \delta, \\ 0, \text{ если } n > \delta. \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Пусть есть (2), преобразуем

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \sum_{\delta|d} \mu(\delta) f(\frac{d}{\delta}) =$$

$$(\delta \mid d \Rightarrow d = \Delta\delta \Rightarrow \frac{d}{\delta} = \Delta)$$

$$= \sum_{\Delta\delta|d} \mu(\delta) f(\Delta) = \sum_{\Delta|n} f(\Delta) \sum_{\delta|\frac{n}{\Delta}} \mu(\delta) = (\text{по теореме } 6.3)\ f(n)$$

□

Следствие.

$$\sum_{d|n} \varphi(n) = n$$

Доказательство. Выше доказали, что

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

это равенство (2), где $g(n) = \varphi(n), f(k) = k$. По формуле обращения Мебиуса, для этих функций выполнено (1):

$$f(n) = n = \sum_{d|n} g(n) = \sum_{d|n} \varphi(n)$$

□

Определение 6.4. Функция $\tau(n)$ определяется, как число делителей натурального $n \geq 1$.

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Замечание. $f(1) \equiv 1$ - мультипликативна $\Rightarrow$ (по теореме 6.2) $\tau(n)$ - мультипликативна.

Утверждение 6.1. $n = p^\alpha,\ p$ - простое.

$$\tau(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} 1 = \alpha + 1$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

.

Определение 6.5. $\sigma(n)$ - сумма делителей числа $n \geq 1$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

Примеры. $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$, p - простое $\Rightarrow \sigma(p) = p+1$.

Из теоремы 6.2 следует мультипликативность $\sigma(n)$.
$n = p^\alpha \Rightarrow \sigma = 1 + p + p^2 + \dots p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.
Если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k}) = \prod\limits_{s=1}^{r} \frac{p_1^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1} = \prod\limits_{p^\alpha || n} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$

Замечание. Функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ - частный случай функции $\sigma_\beta(n)$, β - любое вещественное число

$$\sigma_\beta(n) \sum_{d|n} 1 = \tau(n),\ \sigma_1(n) = \sigma(n)$$

Упражнение: Доказать, что $\sigma(n) + \varphi(n) = n\tau(n)$ имеет место $\Leftrightarrow n$ - простое.

Определение 6.6. Делитель d числа n называется собственным, если $d < n$.

Определение 6.7. Число n называется совершенным, если оно равно сумме своих собственных делителей: $n = \sigma(n) - n \Leftrightarrow \sigma(n) = 2n$

Примеры. $\sigma(6) = 12 = 6 \cdot 2,\ \sigma(28) = 56 = 2 \cdot 28$.

Теорема 6.6. (Эйлер)
Четное число является совершенным $\Leftrightarrow$ когда оно имеет вид $2^{p-1}(2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ - простые числа.

Простые числа вида $M_p = 2^p - 1$, где p - простое, называются простыми Мерсена. Сейчас известно 51 простое число Мерсена. Самое большое из них отвечает простому $p = 82589933$. В записи M_p - 24862048 цифр. (результат получен 21.12.2018). Неизвестно, конечно или нет множество простых Мерсена. Гипотеза: если $\pi_M(x)$ - число простых Мерсена не превосходящих x, то
$\pi_M(x) \approx \ln \ln x$.
Неизвестно, существуют или нет нечетные совершенные числа. Если N - нечетное совершенное число, то

(1) $N > 10^{1500}$ (2012г.)

(2) Наибольший простой делитель N превосходит 10^8 (2008г.)

(3) Второй по величине простой делитель N превосходит 10^4 (1999г.)

(4) Пусть $k \geq 1$. Тогда имеется не более чем 2^{4^k} несчетных совершенных чисел, имеющих ровно k различных простых делителей. (2003г.)

Определение 6.8. Числа a и b $(1 < a < b)$ называются дружественными, если (a) a есть сумма собственных делителей b, (b) число b - сумма собственных делителей a: $\begin{cases} \sigma(b) - b = a, \\ \sigma(a) - a = b. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \sigma(a) = \sigma(b) = a + b.$

Примеры. (ЕЩЕ НЕ ГОТОВО)

Неизвестно, конечно или нет множество дружественных пар чисел. Сейчас извество 1229319267 таких пар. Пусть $A(x)$ - число дружественных пар с $a \leq x$. $\frac{A(X)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$ (П. Эрдеш 1955г.)

7 Непрерывные дроби

Пример. Заметим, что $43 = 19 \cdot 2 + 5$, $19 = 5 \cdot 3 + 4$. Рассмотрим дробь:

$$\frac{a}{b} = \frac{19}{43} = \frac{1}{\frac{43}{19}} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 19 + 5}{19}} = \frac{1}{2 + \frac{5}{19}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{19}{5}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5 \cdot 3 + 4}{5}}} =$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

Определение 7.1. Непрерывной (цепной) дробью будем называть выражение вида:

$$[q_0; q_1, q_2, \dots q_n] = q_0 = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \quad (*)$$

Теорема 7.1. Пусть a - целое, b - натуральное и пусть $(a, b) = 1$. Пусть, кроме того, $q_0, q_1, \dots, q_n$ - все неполные частные, возникающие при отыскании (a, b) с помощью алгоритма Евклида. Тогда число $\alpha = \frac{a}{b}$ разлагается в непрерывную дробь вида $(*)$.

Доказательство. Доказательство следует из цепочки равенств:

$$a = bq_0 + r_1,$$

$$b = r_1 q_1 + r_2,$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3,$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n$$

Получаем:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \dots$$

Собирая полученые равенства вместе приходим к $(*)$. $\square$

Пример.

$a = 37,\ b = 8,$

$37 = 8 \cdot 4 + 5,$

$8 = 5 \cdot 1 + 3,$

$5 = 3 \cdot 1 + 2, \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{37}{8} = [4; 1, 1, 1, 2].$

$3 = 2 \cdot 1 + 1,$

$2 = 1 \cdot 2.$

Определение 7.2. Величины $q_0, q_1, \dots, q_n$ в разложении числа $\alpha = \frac{a}{b}$ из теоремы 7.1 называется неполным частным b в разложении α в непрерывную дробь.

Дроби

$$\delta_0 = q_0$$

$$\delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1}$$

$$\delta_2 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}$$

$$\vdots$$

называются подходящими дробями.

Пример.

$$q_0 = 4,\ q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ q_3 = 1, q_4 = 2.$$

Тогда

$$\delta_0 = 4$$

$$\delta_1 = 4 + \frac{1}{1} = 5$$

$$\delta_2 = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\delta_3 = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Разложение иррационального числа в цепную дробь

Пусть α - число, не являющееся рациональным (такие числа будем называть иррациональными). Тогда для α тоже можно построить разложение в непрерывную дробь. Это разложение будет бесконечным (в отличии от рационального $\alpha = \frac{a}{b}$), поэтому такое построение требует определенной аккуратности и проводится в несколько шагов. На первом шаге строятся подходящие дроби, отвечающие числу α, затем исследуются их свойства. В итоге доказывается сходимость последовательности подходящих дробей к числу α, что и завершает построение.

Этап первый:

Определим целое q_0 так, чтобы выполнялись неравенства:

$$q_0 < \alpha < q_0 + 1$$

и положим $\alpha_0 = \alpha$, так что

$$q_0 < \alpha_0 < q_0 + 1$$

но тогда $\alpha_0 = q_0 + \beta_0$, где $0 < \beta_0 < 1$ и, следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta_0} > 1$$

и

$$\alpha_0 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

Число α_1, очевидно, иррационально, определим по нему целое число q_1 так, чтобы выполнялись неравенства:

$$q_1 < \alpha_1 < q_1 + 1$$

но $\alpha_1 > 1$, так что $q_1 \geq 1$, т.е. q_1 - натуральное. Далее

$$\alpha_1 = q_1 + \beta_1$$

где $0 < \beta_1 < 1$ и следовательно

$$\alpha_2 = \frac{1}{\beta_1} > 1,\ \alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2},\ \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

Число α_2 также иррационально. Повторяя это процесс, получим бесконечные последовательности иррациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\xi, \ldots$ (причем $\alpha_\xi > 1$ для всех ξ) и натуральных чисел $q_1, \ldots, q_\xi$ таких, что

$$q_\xi = [\alpha_\xi] \text{ и } \alpha_\xi = q_\xi + \frac{1}{\alpha_\xi + 1}$$

Величины $q_0, q_1, q_2, \ldots$ станем называть неполными частными разложения α в непрерывную дробь. Несложно видеть, что при любом ξ справедливо равенство

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{\xi-1} + \cfrac{1}{\alpha_\xi}}}}}$$

Определим по этим числам последовательность подходящих дробей δ_ξ, $\xi = 0, 1, \ldots$ равенствами

$$\delta_0 = q_0, \quad \delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \delta_2 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \quad \ldots$$

$$\delta_\xi = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{\xi-1} + \cfrac{1}{\alpha_\xi}}}}}$$

Выпишем первые три такие дроби:

$$\delta_0 = q_0, \quad \delta_1 = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}, \quad \delta_2 = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1}$$

обозначим их еще так:

$$\delta_0 = \frac{P_0}{Q_0}, \text{ где } \quad P_0 = q_0, \quad Q_0 = 1$$

$$\delta_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \text{ где } \quad P_1 = q_0 q_1 + 1, \quad Q_1 = q_1$$

$$\delta_2 = \frac{P_2}{Q_2}, \text{ где } P_2 = q_0q_1q_2 + 1, \quad Q_2 = q_1q_2 + 1$$

посмотрим как эти величины связаны между собой:

$$P_1 = q_1P_0 + 1, \quad Q_1 = q_1Q_0 + 0$$

$$P_2 = q_2(q_0q_1 + 1) + q_0 = q_2P_1 + P_0, \quad Q_2 = q_2Q_1 + Q_0$$

Введем (формально) величины $P_{(-1)} = 1, Q_{(-1)} = 0$ (к подходящим дробям они не имеют отношения: выражение $\frac{P_{(-1)}}{Q_{(-1)}} = \frac{1}{0}$ не определено)
Тогда равенства для P_1, Q_1, P_2, Q_2 запишутся единообразно:

$$P_\xi = q_\xi P_{\xi-1} + P_{\xi-2}, \quad Q_\xi = q_\xi Q_{\xi-1} + Q_{\xi-2} \quad (\xi = 1, 2)$$

Оказывается, что эти соотношения верны для всех $\xi \geq 3$. Чтобы аккуратно доказать их, поступим следующим образом.
Этап второй:
Пусть даны переменные $x_0, x_1, x_2, \dots x_\xi, \dots$ произвольной природы (не обязательно целые числа). Рассмотрим величины P_ξ и Q_ξ, определенные рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} P_\xi = x_\xi P_{\xi-1} + P_{\xi-2} \\ Q_\xi = x_\xi Q_{\xi-1} + Q_{\xi-2} \end{cases} \tag{3}$$

ясно, что P_ξ и Q_ξ - некоторые многочлены от переменных $x_1, \dots x_\xi, \dots$, например: $P_3 - x_3P_2 + P_1 = x_3(x_0x_1x_2 + x_0 + x_2) + x_0x_1 + 1 = x_0x_1x_2x_3 + x_0x_1 + x_0x_3 + x_2x_3 + 1$, положим также $h_\xi = P_\xi Q_{\xi-1} - P_{\xi-1}Q_\xi$.

Лемма 7.1. При любом $\xi \geq 0$ справедливо равенство: $h_\xi = (-1)^{\xi-1}$

Доказательство. Индукция по ξ. В случае $\xi = 0$ имеем:

$$h_0 = P_0Q_{(-1)} - P_{(-1)}Q_0 = -P_{(-1)}Q_0 = -1 = (-1)^{0-1}$$

Пусть соотношение доказано для всех $\xi \leq m$. Тогда

$$h_{m+1} = P_{m+1}Q_m - P_mQ_{m+1} = (x_{m+1}P_m + P_{m-1})Q_m - P_m(x_{m+1}Q_m + Q_{m-1}) =$$
$$= x_{m+1}(P_mQ_m - P_mQ_m) + P_{m-1}Q_m - P_mQ_{m-1} = -h_m = -(-1)^{m-1} = (-1)^m$$

□

Лемма 7.2. Если $x_0 = q_0, \ x_1 = q_1, \ x_\xi = q_\xi$ - целые числа, а величины P_ξ и Q_ξ определены в (3) то справедливы равентсва

$$(P_\xi, Q_\xi) = (P_\xi, P_{\xi-1}) = (Q_\xi, Q_{\xi-1}) = 1$$

Доказательство. Сразу следует из леммы 7.1. □

Лемма 7.3. Пусть $x_1, \dots x_\xi, \dots$ - произвольные переменные, и пусть выражения $\Delta_0, \dots \Delta_\xi \dots$ зависящие от $x_1, \dots x_\xi, \dots$ определяются следующим образом: $\Delta_0 = x_0$, а при $\xi \geq 1$ выражение для Δ_ξ получим, заменив в выражении для $\Delta_{\xi-1}$ $x_{\xi-1}$ на $x_{\xi-1} + \frac{1}{x_\xi}$, так что, например,

$$\Delta_1 = x_0 + \frac{1}{x_1}, \quad \Delta_2 = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2}}, \quad \Delta_3 = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3}}}$$

тогда при любом $\xi \geq 0$ справедливо равенство $\Delta_\xi = \frac{P_\xi}{Q_\xi}$, где P и Q определены соотношениями (3)

Доказательство. Индукция по ξ. В случае $\xi = 0, 1$ эти соотношения фактически были проверены ранее. Пусть они верны для всех $\xi \leq m$. Тогда

$$\Delta_\xi = \frac{P_m}{Q_m} = \frac{x_m P_{m-1} + P_{m-2}}{x_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}$$

по определению, Δ_{m+1} получим из Δ_m заменой x_m на $x_m + \frac{1}{x_{m+1}}$ переменная x_m, очевидно, не входит в выражения для $P_{m-1}, p_{m-2}, Q_{m-1}, Q_{m-2}$. Следовательно

$$\Delta_{m+1} = \frac{(x_m + \dfrac{1}{x_{m+1}})P_{m-1} + P_{m-2}}{(x_m + \dfrac{1}{x_{m+1}})Q_{m-1} + Q_{m-2}} = \frac{(x_{m+1}x_m + 1)P_{m-1} + x_{m-1}P_{m-2}}{(x_{m+1}x_m + 1)Q_{m-1} + x_{m-1}Q_{m-2}} =$$

$$= \frac{x_{m+1}(x_m P_{m-1} + P_{m-2}) + P_{m-1}}{x_{m+1}(x_m Q_{m-1} + Q_{m-2}) + Q_{m-1}} = \frac{x_{m+1}P_m + P_{m-1}}{x_{m+1}Q_m + Q_{m-1}}$$

но числитель и знаменатель последней дроби совпадают в силу (3) с P_{m+1} и Q_{m+1} □

Теорема 7.2. Пусть α - произвольное вещественное число, и пусть $q_0, q_1, \dots$ - конечная или бесконечная последовательность неполных частных разложения α в непрерывную дробь. Тогда подходящие дроби δ_ξ, $\xi = 0, 1, \dots$, отвечающие такому разложению, вычисляются по формулам

$$\delta_\xi = \frac{P_\xi}{Q_\xi} \tag{4}$$

где величины P_ξ и Q_ξ определяются следующими рекуррентными соотношениями: $P_\xi = q_\xi P_{\xi-1} + P_{\xi-2}$, $Q_\xi = q_\xi Q_{\xi-1} + Q_{\xi-2}$ с начальными условиями $P_{(-1)} = 1$, $Q_{(-1)} = 0$, $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$. Все дроби (4) при этом несократимы.

Доказательство. Равенство (4) - есть прямое следствие леммы 7.1 □

Если $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow q_0, q_1, q_2, \dots, \delta_\xi = \frac{P_\xi}{Q_\xi}$. Осталось непонятным, какое отношение имеют дроби δ_ξ к числу α.
Этап третий:

Лемма 7.4. При любом $\xi \geq 1$ верны неравенства: $\delta_{2\xi} > \delta_{2\xi-2}$ ($\delta_{2\xi+1} < \delta_{2\xi-1}$), то есть подходящие дроби с четными (нечетными) номерами образуют монотонно возрастающую (убывающую последовательность).

Доказательство.

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k}{Q_k Q_{k-1}} = (\text{по лемме } 7.1)$$
$$= \frac{h_k}{Q_k Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k-1}}$$

тогда

$$\delta_{2\xi} - \delta_{2\xi-2} = (\delta_{2\xi} - \delta_{2\xi-1}) + (\delta_{2\xi-1} - \delta_{2\xi-2}) = \frac{(-1)^{2\xi-1}}{Q_{2\xi} Q_{2\xi-1}} + \frac{(-1)^{2\xi-2}}{Q_{2\xi-1} Q_{2\xi-2}} =$$
$$= \frac{1}{Q_{2\xi-1}}\left(\frac{1}{Q_{2\xi-2}} - \frac{1}{Q_{2\xi}}\right) = \frac{Q_{2\xi} - Q_{2\xi-2}}{Q_{2\xi} Q_{2\xi-1} Q_{2\xi-2}} = (Q_{2\xi} = q_{2\xi} Q_{2\xi-1} + Q_{2\xi-2})$$
$$= \frac{q_{2\xi} Q_{2\xi-1}}{Q_{2\xi} Q_{2\xi-1} Q_{2\xi-2}} = \frac{q_{2\xi}}{Q_{2\xi} Q_{2\xi-2}} > 0$$

Неравенство $\delta_{2\xi+1} - \delta_{2\xi-1}$ доказывается аналогично. □

Лемма 7.5. В условиях леммы 7.4 справедливы неравенства: $\delta_\xi < \alpha$, ξ - четное и $\delta_\xi > \alpha$, ξ - нечетное.

Доказательство. Рассмотрим выражения

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_\xi + \cfrac{1}{\alpha_{\xi+1}}}}}}$$

$$\delta_{\xi+1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_\xi + \cfrac{1}{q_{\xi+1}}}}}}, \quad \delta_\xi = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_\xi}}}}$$

выражения для α и $\delta_{\xi+1}$ получаются из выражения для δ_ξ формальной заменой q_ξ на $q_\xi + \frac{1}{\alpha_{\xi+1}}$ и на $q_\xi + \frac{1}{q_{\xi+1}}$ соответственно.

$$\delta_\xi = \frac{P_\xi}{Q_\xi} = \frac{q_\xi P_{\xi-1} + P_{\xi-2}}{q_\xi Q_{\xi-1} + Q_{\xi-2}} \Rightarrow \alpha = \frac{(q_\xi + \dfrac{1}{\alpha_{\xi+1}})P_{\xi-1} + P_{\xi-2}}{(q_\xi + \dfrac{1}{\alpha_{\xi+1}})Q_{\xi-1} + Q_{\xi-2}} = \frac{A_\xi}{B_\xi}$$

$$\delta_{\xi+1} = \frac{(q_\xi + \dfrac{1}{q_{\xi+1}})P_{\xi-1} + P_{\xi-2}}{(q_\xi + \dfrac{1}{q_{\xi+1}})Q_{\xi-1} + Q_{\xi-2}} = \frac{P_{\xi+1}}{Q_{\xi+1}}$$

вычислим:

$$\alpha - \delta_{\xi+1} = \frac{A_\xi}{B_\xi} - \frac{P_{\xi+1}}{Q_{\xi+1}} = \frac{A_\xi Q_{\xi+1} - B_\xi P_{\xi+1}}{B_\xi Q_{\xi+1}}$$

числитель:

$$* = (q_\xi + \frac{1}{q_{\xi+1}})(q_\xi + \frac{1}{\alpha_{\xi+1}})(P_{\xi-1}Q_{\xi-1} - P_{\xi-1}Q_{\xi-1}) + (P_{\xi-2}Q_{\xi-2} - P_{\xi-2}Q_{\xi-2}) +$$
$$+ (q_\xi + \frac{1}{q_{\xi+1}}) + (P_{\xi-2}Q_{\xi-1} - P_{\xi-1}Q_{\xi-2}) + (q_\xi + \frac{1}{\alpha_{\xi+1}}) + (P_{\xi-1}Q_{\xi-2} - P_{\xi-2}Q_{\xi-1})$$

итак, числитель разности $\alpha - \delta_{\xi+1}$ равен

$$(P_{\xi-1}Q_{\xi-2} - P_{\xi-2}Q_{\xi-1})(q_\xi + \frac{1}{\alpha_{\xi+1}} - q_\xi - \frac{1}{q_{\xi+1}}) = h_{\xi-1}(\frac{1}{\alpha_{\xi+1}} - \frac{1}{q_{\xi+1}}) =$$
$$= (-1)^{\xi-2}\frac{q_{\xi+1} - \alpha_{\xi+1}}{\alpha_{\xi+1}q_{\xi+1}} = \frac{(-1)^{\xi+1}\alpha_{\xi+1}}{\alpha_{\xi+1}q_{\xi+1}}$$

$\Rightarrow$ знак разности $\alpha - \delta_r$ совпадает с $(-1)^r$ $\square$

Теорема 7.3. Последовательность подходящих дробей, отвечающих разложению иррационального числа α в непрерывную дробь, сходится к числу α.

Доказательство. По лемме 7.4 последовательность $\delta_{2\xi},\ \xi = 0, 1, 2, \ldots$ монотонно возрастает. По лемме 7.5 она ограничена сверху числом α. Аналогично, последовательность $\delta_{2\xi+1}$ монотонно убывает и ограничена снизу числом α. По известной теореме из математического анализа, эти последовательности имеют пределы. По лемме 7.5 : $\delta_{2\xi} < \alpha < \delta_{2\xi+1}$ при любом $\xi \geq 0$. Значит,

$$0 < \alpha - \delta_{2\xi} < \delta_{2\xi+1} - \delta_{2\xi} = \frac{1}{Q_{2\xi}Q_{2\xi+1}},\quad 0 < \delta_{2\xi+1} - \alpha < \delta_{2\xi+1} - \delta_{w\xi} = \frac{1}{Q_{2\xi}Q_{2\xi+1}}$$

□

Пример. Пусть $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,6$. Докажем, что $Q_\xi \geq \tau^{\xi-1}$
Индукция по ξ. База: $Q_1 = 1 = \tau^{1-1}$. Пусть доказано для всех $\xi : q \leq \xi \leq m$.
$\tau^2 = \tau + 1 \Rightarrow \tau^{k+2} = \tau^{k+1} + \tau^k$ для всех $k \geq 0$. Тогда

$$Q_{m+1} = q_{m+1}Q_m + Q_{m-1} \geq Q_m + Q_{m-1} \geq \tau^{m-1} + \tau^{m-2} = \tau^m$$

$$Q_{2\xi}Q_{2\xi-1} \geq \tau^{2\xi-1}\tau^{2\xi-2} = \tau^{4\xi-3} = \frac{\tau^{4\xi}}{\tau^3},\ 0 < \alpha - \delta_{2\xi},\ \delta_{2\xi+1} - \alpha < \frac{\tau^3}{\tau^{4\xi}} =$$
$$= \frac{2+\sqrt{5}}{(\frac{7+3\sqrt{5}}{2})^\xi} < \frac{5}{6^\xi} \to 0 \quad (\xi \to +\infty)$$

Замечание. Последовательность неполных частных $q_0, q_1, q_2, \ldots$ (бесконечная) периодична (начиная с некоторого номера) $\Leftrightarrow \alpha$ - квадратичная иррациональность, то есть $\alpha = \frac{A+B\sqrt{D}}{C},\ A, B, C, D \in \mathbb{Z},\ D \geq 1$ - бесквадратное. Например:

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Замечание. Лишь для немногих $\alpha \notin \mathbb{Q}$, не являющихся квадратичной иррациональностью, известны разложения в цепную дробь.

Примеры. Число $e = 2,718281828459045\ldots$

$$\alpha = \frac{e-1}{e+1} = [0; 2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots]$$

$$\alpha = \frac{e^{\frac{2}{k}} - 1}{e^{\frac{2}{k}} + 1} = \operatorname{th}(e^{\frac{1}{k}}) = [0; 1k, 3k, 5k, 7k, \ldots] \quad \text{(Л. Эйлер, 1737г.)}$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] \quad \text{(Л. Эйлер, 1737г.)}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, \dots]$$

$$\alpha = \sqrt[3]{6} = [1; 1, 4, 2, 7, 3, 508, 1, 5, 5, \dots]$$

$$\pi = [3; 7, 5, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \dots]$$

Замечание. Рассмотрим $N \geq 3$ и дроби $\frac{a}{N}$, $1 \leq a \leq N-1$, $(a, N) = 1$ (таких дробей $\varphi(N)$ штук). Разложим каждую в непрерывную дробь:

$$\frac{a}{N} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

где $n = n(a)$ - длина разложения. Вопрос: Каково среднее значение $n(a)$ при изменении a?

$\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{a=1}^{N} n(a) \approx \frac{12}{\pi^2}(\ln 2) + A$, A - некоторая константа (Х. Хейльбрин, 1969г.)

8 Теория сравнений

Пусть $m \geq 2$ - целое.

Определение 8.1. Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $a - b$ делится на m. Или, что то же, когда a и b при делении на m дают одинаковые остатки. Число m при этом называется модулем сравнения. Пишут $a \equiv b \pmod{m}$.

Примеры. $8 \equiv 2 \pmod{3}$, $15 \equiv 1 \pmod{7}$, $24 \equiv 0 \pmod{6}$

Теорема 8.1. (Простейшие свойства сравнений)

1. $a \equiv a \pmod{m}$, $\forall a$
2. если $a \equiv b \pmod{m}$, то и $b \equiv a \pmod{m}$
3. если $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$
4. если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ и $ac \equiv bd \pmod{m}$

Доказательство. 1-3 очевидно. Докажем 4:
$a = b + km,\ c = d + lm \Rightarrow a + c = (b + d) + (k + l)m \equiv b + d \pmod{m}$
$ac = (b + km)(d + lm) = bd + blm + dkm + klm^2 = bd + m(bl + dk + lkm) \equiv$
$\equiv bd \pmod{m}$ □

Следствие. $a \equiv b \pmod{m},\ c, n$ - целые числа, $n \geq 1$, то $ca^n \equiv cb^n \pmod{m}$

Следствие. $a \equiv b \pmod{m},\ P(x)$ - многочлен с целыми коэффициэнтами
$\Rightarrow P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

Теорема 8.2. Пусть $m \geq 2$. Тогда

1. Если $ab \equiv ac \pmod{m}$ и $(a, m) = 1$, то $b \equiv c \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m},\ d \geq 1$ - целое, то $ad \equiv bd \pmod{md}$.
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $(a, m) = (b, m)$.
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $d \mid m,\ d \geq 2$, то $a \equiv b \pmod{d}$.

Доказательство.

1. $ab \equiv ac + km \Rightarrow a(b - c) = km$, если $b = c$, то утверждение очевидно. Пусть $b \neq c \Rightarrow b - c \neq 0$ и из равенства $a(b - c) = km$ следует, что $a \mid km$. Но $(a, m) = 1 \Rightarrow$ по теореме 2.3 $a \mid k$, то есть $k = an \Rightarrow a(b - c) = anm$
$\Rightarrow b - c = nm \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}$.
2. $a = b + km \Rightarrow ad = bd + kmd \Rightarrow ad \equiv bd \pmod{md}$.
3. По лемме 3.2 если $\alpha = bq + r$, то $(\alpha, \beta) = (\beta, r)$. Тогда $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow$ $a = b + km \Rightarrow (\alpha = a,\ \beta = m,\ r = b) \Rightarrow (\alpha, \beta) = (a, m) = (\beta, r) = (m, b)$.
4. $a = b + km,\ m = nd,\ d \geq 2 \Rightarrow a = b + knd \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.

□

Примеры.

1. $27 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 3 \equiv 1 \pmod{4}$.
2. $26 \equiv 4 \pmod{22} \Rightarrow 13 \equiv 2 \pmod{11}$.
3. $48 \equiv 28 \pmod{10}$, но $12 \not\equiv 7 \pmod{10}$.

Пример. Найти остаток от деления 11^6 на 9.
$11 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 11^6 \equiv 2^6 \pmod{9} \Rightarrow 11^6 \equiv (2^3)^2 \pmod{9}$
$\Rightarrow 11^6 \equiv (-1)^2 \pmod{9} \Rightarrow 11^6 \equiv 1 \pmod{9}$.

Пример. Натуральное число $n = 8k + 7$ не представимо суммой трех квадратов целых чисел.
x - четное $\Rightarrow x = 4y$ либо $x = 4y + 2,\ x^2 = (4y)^2 = 16y^2 \equiv 0 \pmod 8$.
$x^2 = (4y + 2)^2 = 16y^2 + 16y + 4 \equiv 4 \pmod 8$.
x - нечетное $\Rightarrow\ x = 4y \pm 1\ \Rightarrow\ 16y^2 \pm 8y + 1 \equiv 1 \pmod 8$. Следовательно, $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$, но число 7 нельзя представить суммой трех величин, принимающих значения 0, 1 и 4.

Теорема. (Теорема Лагранжа)
Если $n \neq 4^a(8k + 7)$, то n представимо суммой трех квадратов целых чисел.

Сколько может быть чисел $n : 1 \leq n \leq x,\ x \to +\infty,\ n = a^2 + b^2$?

Таких чисел примерно $\dfrac{Bx}{\sqrt{\ln x}}$, где $B = 0,7\ldots$ - постоянная Рамануджана-Ландау.

Теорема 8.3. (8.4???) Если числа a и b сравнимы по модулям $m_1, \ldots, m_k$, то они сравнимы по модулю $m =$НОК$(m_1, \ldots, m_k)$.

Доказательство. Если $a = b$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq b$, не теряя общности будем считать, что $a > b$. Так как $a \equiv b \pmod{m_i},\ i \in \overline{1,k} \Rightarrow$ натуральное число $a - b \equiv 0 \pmod m$, то есть число $a - b$ делится на каждое из чисел $m_1, \ldots, m_k \Rightarrow a - b$ - их общее кратное. По теореме 2.1 получаем, что $[m_1, \ldots, m_k] \mid (a - b)$ □

Пусть задан модуль $m \geq 2$. Все множество $\mathbb{Z}$ разобьем на непересекающиеся подмножества, относя к одному и тому же подмножеству те числа, что при делении на m дают дают одинаковые остатки. Именно, $a = q_1m + r_1$,
$b = q_2m + r_2,\ 0 \leq r_1,\ r_2 \leq m - 1$ относятся к одному и тому же подмножеству $\Leftrightarrow\ r_1 = r_2$. Так получим ровно m подмножеств, которые отвечают остаткам $r = 0, 1, \ldots, m - 1$ (все они непусты).

Определение 8.2. Построенные таким образом подмножества $\mathbb{N}$ называются классами вычетов по модулю m. Элементы каждого из этих подмножеств называются вычетами этого класса. Класс вычетов по модулю m, содержащий число a, иногда обозначают через $\bar{a}$ или $[a]$ или $[a]_m$.

Очевидно, что равенство классов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место $\Leftrightarrow a \equiv b \pmod m$. Множество всех классов вычетов по модулю m будем обозначать символом $\mathbb{Z}_m$

Пример. Пусть $m = 4 \Rightarrow$ остатки: $0, 1, 2, 3 \Rightarrow \mathbb{Z}_4$ состоит из классов:
1) $a = 4n$, 2) $a = 4n + 1$, 3) $a = 4n + 2$, 4) $a = 4n + 3$.

Определение 8.3. Пусть $m \geq 2$ и пусть $a_1, \ldots, a_m$ - произвольные представители различных классов вычетов по модулю m. Тогда совокупность $a_1, \ldots, a_m$ называется полной системой вычетов по модулю m.

Примеры.

1. $m = 4$, числа $a_1 = 13,\ a_2 = 7,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8$.
   $a_4 \equiv 0 \pmod 4,\ a_1 \equiv 1 \pmod 4,\ a_2 \equiv 2 \pmod 4,\ a_3 \equiv 3 \pmod 4$
   $\Rightarrow 13, 7, 6, 8$ - полная система вычетов по модулю 4.

2. $m = 5,\ a_1 = 2,\ a_2 = 6\ a_3 = 16,\ a_4 = 8,\ a_5 = 9$.
   $a_1 \equiv 2 \pmod 5,\ a_2 \equiv 1 \pmod 5,\ a_3 \equiv 1 \pmod 5,\ a_4 \equiv 3 \pmod 5$,
   $a_5 \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow$ числа $2, 6, 16, 8, 9$ не образуют полную систему вычетов по модулю 5.

Обычно в качестве полной системы вычетов по модулю m берут совокупность $0, 1, \ldots, m-1$, состоящую из наименьших неотрицательных представителей всех классов вычетов.
Иногда удобно работать с системой вычетов, составленой из наименьших по абсолютной величине представителей классов вычетов.

Пример. Пусть $m = 7$:
$..., -21,\ -14,\ -7,\ 0,\ 7,\ 14,\ 21, ... \equiv 0 \pmod 7$ - берем 0
$..., -20,\ -13,\ -6,\ 1,\ 8,\ 15,\ 22, ... \equiv 1 \pmod 7$ - берем 1
$..., -19,\ -12,\ -5,\ 2,\ 9,\ 16,\ 23, ... \equiv 2 \pmod 7$ - берем 2
$..., -18,\ -11,\ -4,\ 3,\ 10,\ 17,\ 24, ... \equiv 3 \pmod 7$ - берем 3
$..., -17,\ -10,\ -3,\ 4,\ 11,\ 18,\ 25, ... \equiv 4 \pmod 7$ - берем -3
$..., -16,\ -9,\ -2,\ 5,\ 12,\ 19,\ 26, ... \equiv 5 \pmod 7$ - берем -2
$..., -15,\ -8,\ -1,\ 6,\ 13,\ 20,\ 27, ... \equiv 6 \pmod 7$ - берем -1
Итак, полная наименьшая по абсолютной величине система вычетов
по модулю $7 : \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 0\}$

Пример. Общий случай:
Для нечетного n получаем $-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}$.
Для четного n получаем $-\frac{m}{2} + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}$.

Теорема 8.4. Пусть $m \geq 2,\ a, b \in \mathbb{Z}$, причем $(a, m) = 1$. Если величина x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то и величина $ax+b$ пробегает полную систему вычетов по модулю m.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x_1 \not\equiv x_2 \pmod m$, то сравнение $ax_1 \equiv ax_2 \pmod m$ невозможно. По теореме 8.2 п.1 на a можно сократить: получим $x_1 \equiv x_2 \pmod m$ - противоречие. □

Следствие. Пусть $m \geq 2,\ a \in \mathbb{Z},\ (a, m) = 1$. Тогда существует единственный класс вычетов $c \pmod m$ такой, что $ac \equiv 1 \pmod m$.

Доказательство. Для $ax - 1$ при некотором $x = c$ будет выполнено: $ac - 1 \equiv 0 \pmod m,\ ac \equiv 1 \pmod m$. Пусть $ac_1 \equiv 1 \pmod m$ и $ac_2 \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a(c_1 - c_2) \equiv 0 \pmod m \Rightarrow m \mid a(c_1 - c_2) \Rightarrow m \mid (c_1 - c_2)$, то есть это возможно лишь при $c_1 \equiv c_2 \pmod m$. □

Замечание. Такой вычет c (класс вычетов $\bar{c}$) называют обратным к a (соответственно обратным к классу $\bar{a}$). Обозначим его как a^* (соответственно $\bar{a}^*$).

Пример. $m = 5,\ a = 3,\ b = 4$

x	$3x + 4$	$3x + 4 \pmod 5$
0	4	4
1	7	2
2	10	0
3	13	3
4	16	1

Замечание. Условие $(a, m) = 1$ опустить нельзя.

Пример. (Почему условие выше опустить нельзя) $m = 6,\ a = 2,\ b = 1$

x	$2x + 1$	$2x + 1 \pmod b$
0	1	1
1	3	3
2	5	5
3	7	1
4	9	3
5	11	5

Пример. $m = 7$

$1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 1^* \equiv 1 \pmod 7$
$2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^* \equiv 4 \pmod 7$
$3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 3^* \equiv 5 \pmod 7$
$4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 4^* \equiv 2 \pmod 7$
$5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 5^* \equiv 3 \pmod 7$
$6 \cdot 6 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 6^* \equiv 7 \pmod 7$

Согласно теореме 8.2 (пункт 3), числа, принадлежащие одному классу вычетов по модулю m, имеют с модулем один и тот же НОД. ($a \equiv b \pmod m$ $\Rightarrow (a, m) = (a, b)$)
Поэтому особый интерес придставляют классы, для которых этот НОД равен 1. Взяв от каждого такого класса по одному вычету, получим приведенную систему вычетов по модулю m. Возьмем в качестве такой полной системы вычетов числа $0, 1, \ldots, m-1$. Так как среди этих чисел количество взаимно простых с модулем m равно $\varphi(m)$, то и любая приведенная система вычетов содержит $\varphi(m)$ элементов. Обозначение: $\mathbb{Z}_m^*$.

Пример. $m = 6$; $0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow 1, 5$ - приведенная система вычетов.
$m = 7$; $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6$ - приведенная система вычетов.
$m = 10$; $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \Rightarrow 1, 3, 7, 9$ - приведенная система вычетов.
m - простое $\Rightarrow \mathbb{Z}_m^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

Теорема 8.5. (8.6??) Пусть $m \geq 2$, a - целое число, $(a, m) = 1$, и пусть x пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Тогда и величина ax будет пробегать приведенную систему вычетов по модулю m.

Доказательство. Что нужно проверить.

1. $ax_1 \equiv ax_2$ невозможно, если $x_1 \not\equiv x_2 \pmod m$.
2. $(ax, m) = 1$ для всех $x \in \mathbb{Z}_m^*$.

1. был проверен при доказательстве теоремы 8.4.
2. пусть $(ax, m) = \delta > 1 \Rightarrow$ для некоторого $x : (x, m) = 1 \Rightarrow \delta \mid ax$, причем $a \neq 0$ и $x \neq 0$ (следует из взаимной простоты с m) $\Rightarrow$ (по теореме 2.3) $\delta \mid a$. Но $\delta \mid m$. Значит $\delta \mid (a, m) \Rightarrow (a, m) \geq \delta > 1$ противоречие. □

Теорема 8.6. (Теорема Эйлера)
Пусть $m \geq 2$, a - целое, $(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Доказательство. Пусть $1 = r_1 < r_2 < \cdots < r_c < \cdots < r_{m-1}$, $c = \varphi(m)$ - приведенная система вычетов. Пусть $ar_k \equiv \rho_k \pmod m$, где $0 < \rho < m$. Из теоремы 8.5 следует, что $\rho_1, \ldots \rho_k$ образуют перестановку чисел $r_1, \ldots r_k$. Перемножим сравнения почленно: $a^c r_1, \ldots, r_c \equiv \rho_1 \ldots \rho_c \pmod m$. Но $r_1, \ldots r_c = \rho_1 \ldots \rho_c = R$ и число R взаимно просто с m (следует из теоремы 2.3). По теореме 8.2 (пункт 1), обе части сравнения $a^c R \equiv R \pmod m \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$. □

Следствие. (Малая теорема Ферма)
Пусть p - простое число. Тогда при любом целом a выполняется сравнение: $a^p \equiv a \pmod p$.

Доказательство. Если $p \mid a$, то очевидно. Если $(a, p) = 1$, то $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$. $\square$

9 Сравнения с одним неизвестным

Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ - многочлен с целыми коэффициэнтами. Будем изучать сравнения вида (1) $f(x) \equiv 0 \pmod m$. Если $a_n \not\equiv 0 \pmod m$, то число m называется степенью сравнения. Решить сравнение (1) - значит найти все целые числа x, ему удовлетворяющие. По следствию 2 из 8.1, $a \equiv b \pmod m \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod m$. Значит, если (1) удовлетворяет некоторое число x, и $x \equiv a \pmod m$, то (1) удовлетворяют все числа сравнимые с a по модулю m. По этой причине весь класс вычетов $a \pmod m$ удобно считать за одно решение.

Сравнения первой степени

Всякое сравнение первой степени можно переписать в виде: $ax \equiv b \pmod m$. Рассмотрим сперва случай, когда $(a, m) = 1$. По теореме 8.4 получаем, что такое сравнение имеет единственное решение.

1. Способ 1. По теореме Эйлера получим $x_0 \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod m$.
   Тогда $ax_0 \equiv aba^{\varphi(m)-1} \equiv ba^{\varphi(m)} \pmod m \equiv b \cdot 1 \pmod m \equiv b \pmod m$.

2. Способ 2. (Разложение в непрерывную дробь) $\alpha = \frac{m}{a}$ подходящие дроби: $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{s-1} = \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}, \delta_s = \frac{P_s}{Q_s} = \frac{m}{a}$. Известно по лемме 7.1 $P_s Q_{s-1} - P_{s-1} Q_s = (-1)^{s-1} \Rightarrow mQ_{s-1} - aP_{s-1} = (-1)^{s-1}$. $aP_{s-1} = (-1)^s + mQ_{s-1} \Rightarrow a(-1)^s P_{s-1} = 1 + mQ_{s-1}(-1)^s \Rightarrow a(-1)^s P_{s-1} b = b + mbQ_{s-1}(-1)^s$. Переходя к сравнению по модулю m, получим: $a(-1)^s P_{s-1} b \equiv b \pmod m \Rightarrow (-1)^s P_{s-1} b \pmod m$ - решение.

Пример.

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{6}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}$$

Значит $x \equiv (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \pmod{13} \equiv 6 \pmod{13}$.

Пусть $(a, m) = d > 1$, $ax \equiv b \pmod m$. Необходимое условие разрешимости - делимость b на d. (т.к. если сравнение разрешимо, то $ax = b + km$ для некоторого целого k). Покажем что это условие достаточное. Пусть $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $m = m_1 d$, $(a_1, m_1) = 1$. Значит $a_1 dx \equiv b_1 d \pmod{m_1 d}$. По теореме 8.2, можно все сократить на $d : a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1}$. По доказаному выше, это сравнение имеет единственное решение по модулю m_1: $x \equiv x_1 \pmod{m_1}$. Все числа вида (2) $x_1, x_1 \pm m_1, x_1 \pm 2m_1, \ldots, x_1 \pm tm_1, \ldots$ - решения исходного сравнения. Так как

x_1 - решение, то $a_1x_1 = b_1+km_1, k$ - некоторое целое число $\Rightarrow a(x_1 \pm tm_1) = ax_1 \pm tam_1 = \alpha a_1x_1 \pm ta_1\alpha m_1 \equiv \alpha a_1m_1 \pmod m \equiv \alpha(b_1 + km_1) \pmod m \equiv b + km \pmod m \equiv b \pmod m \Rightarrow$ из ряда (2) нужно отобрать числа, различные по модулю m. $x_1, x_1+m_1, x_1+2m_1, \ldots, x_1+(\alpha-1)m_1$ все они различны по модулю m.

Теорема 9.1. Пусть $m \geq 2, a, b$ - целые числа, причем $(a, m) = d$. Сравнение $ax \equiv b \pmod m$ разрешимо $\Leftrightarrow d \mid b$. В случае разрешимости сравнение имеет d решений.

Пример. ПРИМЕР 9.2

Китайская теорема об остатках

Рассмотрим систему линейных сравнений, где $m_1, \ldots, m_k$ - попарно взаимно простые:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \qquad \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k}. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 9.2. Пусть $M = m_1 \ldots m_K$, а числа $M_s, N_s,\ s = 1, \ldots k$ определены соотношением: $M = m_sM_s,\ M_sN_s \equiv 1 \pmod{m_s}$. Пусть $x_0 = M_1N_1a_1 + \cdots + M_kN_ka_k$. Тогда решение системы (5) имеет вид: $x \equiv x_0 \pmod M$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $x \equiv x_0 \pmod M \equiv x_0 \pmod{m_1, \ldots, m_k} \Rightarrow$ по теореме 8.3 $x \equiv x_0 \pmod{m_1},\ M_2 = m_1m_3 \ldots m_k, M_3 = m_1m_2m_4, \ldots, m_k$ и так далее $\Rightarrow$ все числа $M_2, M_3, \ldots, M_k$ кратны $m_1 \Rightarrow x \equiv M_1N_1a_1 \pmod{m_1} \equiv \equiv 1 \cdot a_1 \pmod{m_1} \equiv a_1 \pmod{m_1}$. Аналогично проверяется, что $x \equiv a_s \pmod{m_s},\ s = 2, \ldots, k$.

($\Leftarrow$) Пусть x - решение (5), $y = x - x_0 \Rightarrow y \equiv a_1 - a_1 \pmod{m_1} \equiv 0 \pmod{m_1}$. Аналогично проверяется, что y кратно и $m_2, \ldots, m_k \Rightarrow y$ - общее кратное чисел $m_1, \ldots, m_k \Rightarrow$ по теореме 2.1 y делится на $\text{НОК}(m_1, \ldots, m_k) = = m_1 \ldots m_k = M \Rightarrow$ по теореме 2.2 $y \equiv x - x_0 \equiv 0 \pmod M$.

□

Пример. $x \equiv 1 \pmod 2,\ x \equiv 2 \pmod 3,\ x \equiv 4 \pmod 5$.
Тогда $m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ m_3 = 5 \Rightarrow M = 30,\ M_1 = 15,\ M_2 = 10,\ M_3 = 6$
$\Rightarrow 15N_1 \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow N_1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow N_1 = 1.$
$\Rightarrow 10N_2 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow N_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow N_2 = 1,$
$\Rightarrow 6N_3 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow N_3 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow N_3 = 1.$
Тогда $x_0 = 15 \cdot 1 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 4 \pmod{30} \equiv 15 + 20 + 24 \equiv 29 \pmod{30}$.

Теорема 9.3. Пусть $f(x)$ - произвольная целозначная функция, $m > 2$ - целое, причем $m = kn$, где $k, n > 1,\ (k, n) = 1$. Пусть далее

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod k, \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod k. \end{cases}$$

- все решения сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod k$

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod n, \\ \vdots \\ x \equiv b_s \pmod n. \end{cases}$$

- все решения сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod n$. Тогда все решения сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod m$ задаются следующими формулами:
$(*)\ x \equiv a_i n n^* + b_j k k^* \pmod m$, где $1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s$,
$nn^* \equiv 1 \pmod k,\ kk^* \equiv 1 \pmod n$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) $(*)$ - дает решения: фиксируем i и j
$\Rightarrow x \equiv a_i n n^* \pmod k \equiv a_i \cdot 1 \pmod k \equiv a_i \pmod k \Rightarrow f(x) \equiv 0 \pmod k$,
$x \equiv b_j k k^* \pmod n \equiv b_j \cdot 1 \pmod n \equiv b_j \pmod n \Rightarrow f(x) \equiv 0 \pmod n$
$\Rightarrow$ по теореме 2.2 $f(x) \equiv 0 \pmod{kn} \equiv 0 \pmod m$.

($\Leftarrow$) Обратное очевидно. Надо заметить: все $x \pmod m$ в $(*)$ различны. Если
$a_i n n^* + b_j k k^* \equiv a_i' n n^* + b_j' k k^* \pmod m \Rightarrow a_i n n^* \equiv a_i' \pmod k$
$\Rightarrow a_i \equiv a_i',\ b^i \equiv b_i' \pmod m$.

□

Следствие. В условиях теоремы 9.3. Решение сравнения
$f(x) \equiv 0 \pmod m$, $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ сводится к отысканию всех решений каждого из сравнений $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}, 1 \le i \le t$ $(\diamondsuit)$.
Если $\nu(p_i^{\alpha_i})$ - число решений $(\diamondsuit)$, то число $\nu(m)$ решений исходного сравнения равно произведению $\nu(p_1^{\alpha_1}) \dots \nu(p_t^{\alpha_t})$

Полиномиальные сравнения

Пусть $m \geq 2,\ n \geq 2$ - целые числа, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ - полином с целыми коэффициэнтами, причем $a_n \not\equiv 0 \pmod{m}$. Если $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha^t}$ - каноническое разложение, то по следствию теоремы 9.1 решение сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ сводится к решению каждого из сравнений $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, то есть достаточно рассмотреть случай, когда $m = p^\alpha,\ p$ - простое, $\alpha \geq 1$. Вначале рассмотрим случай $\alpha = 1$, то есть случай простого модуля: $m = p$.

Теорема 9.4. Сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ равносильно сравнению степени не выше $p - 1$.

Доказательство. Пусть $n \geq p$, поделим $f(x)$ с остатком на $x^p - x$ $\Rightarrow f(x) = (x^p - x)h(x) + g(x)$, где $g(x)$ - полином степени $\leq p - 1$ с целыми коэффициэнтами $\Rightarrow (x^p - x)h(x) + g(x) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow$ по малой теореме Ферма (следствие теоремы 8.6) $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ при любом $x \Rightarrow$ сравнение равносильно $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$. □

Теорема 9.5. (Теорема Лагранжа) Пусть $2 \leq n \leq p - 1,\ p$ - простое. Если сравнение $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$ имеет более чем n решений, то все коэффициэнты $f(x)$ делятся на p.

Доказательство. Пусть имеется $(n + 1)$ класс вычетов по модулю p, удовлетворяющий сравнению, пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ - произвольные представители этих классов: $f(x_i) = pN_i,\ N_i$ - целое. Тогда

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = pN_1, \\ a_0 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_2^n = pN_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + x_{n+1} x_{n+1} + \cdots + a_n x_{n+1}^n = pN_{n+1}. \end{cases}$$

Рассмотрим это как систему линейных уравнений с неизвестными $a_0, \dots, a_n$ $\Rightarrow$ по формулам Крамера $a_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x_i - x_j)$$

Ни одна из разностей $x_j - x_i$ не делится на $p \Rightarrow \Delta$ не делится на p. Δ_k получается из Δ заменой k-го столбца на столбец, которой состоит из $pN_1, pN_2, \dots, pN_{n+1}$ $\Rightarrow p \mid \Delta_k \Rightarrow p \mid a_k,\ \forall k$. □

Теорема 9.6. (Теорема Вильсона)
Для любого простого p выполнено: $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p}$

Доказательство. Если $p=2$, то очевидно. Пусть $p \geq 3$. Рассмотрим $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) - (x^{p-1}-1)$. Степень $f(x)$ не выше чем $(p-2)$. Но всякий вычет $x \equiv a \pmod{p}$, $a = 1, \dots, p-1$ является решением сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow$ по теореме Лагранжа (9.5) все коэффициэнты делятся на p. В частности, $(-1)^{p-1}(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p}$
$\Rightarrow (p-1)!-1 \equiv 0 \pmod{p}$. □

(Упражнение) Верно и обратное $(n-1)!+1 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow n$ - простое. Значит теорему Вильсона можно рассматривать как критерий простоты числа.

Определение 9.1. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Производной многочлена $f(x)$ назовем многочлен, который определяется формулой:
$f'(x) = n a_n x_{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$.

Лемма 9.1. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ - многочлен с целыми коэффициэнтами, и пусть Δ - целое число. Тогда при любом x справедливо равенство: $f(x+\Delta) - f(x) = \Delta \cdot a f'(x) + \Delta^2 g(x)$, где $g(x)$ - некоторый многочлен с целыми коэффициэнтами.

Доказательство.

$$f(x+\Delta) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k((x+\Delta)^k - x^k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k + kx^{k-1}\Delta + C_k^2 x^{k-2}\Delta^2 + \dots + C_k^k \Delta^k - x^k) =$$
$$= \Delta \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \Delta^2 g(x) = \Delta f'(x) + \Delta^2 g(x)$$

□

Процедура поднятия решений

Пусть $x \equiv x_1 \pmod{p}$ - решение сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$. При некоторых условиях, это решение порождает решение по $\bmod p^2$, $\bmod p^3, \dots$ ("поднимаются" до решений по соответствующим модулям). Условие, когда "поднятие" возможно: $f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$. Покажем, что $x_1 \pmod{p}$ породит решения $x_2 \pmod{p^2}$, т.ч. $f(x_2) \equiv 0 \pmod{p}$, $x_2 \equiv x_1 \pmod{p}$. Ищем x_2 в виде $x_1 + pt$. $f(x_2) \equiv 0 \pmod{p^2} \Leftrightarrow f(x_1+pt) \equiv 0 \pmod{p^2} \Leftrightarrow$ (по лемме 9.1)

$f(x_1)+ptf(x_1)+p^2t^2g(x_1) \pmod{p^2} \equiv f(x_1)+ptf'(x_1) \pmod{p^2}$ (1)
x_1 - решение по $\bmod p \Rightarrow f(x_1)=pn$. Тогда
(1) $\Leftrightarrow pn+ptf'(x_1) \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow p(n+tf'(x_1)) \equiv 0 \pmod{p^2}$, t надо брать так: $n+tf'(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$. Берем $t \equiv -n(f'(x_1))^* \pmod{p}$
$\Rightarrow x_2 \equiv x_1+pt_0 \pmod{p^2}$ - решение.

Пример. $f(x)=x^3+x$, $f(x \equiv x^3+x \equiv 0 \pmod 5)$, $x_1 \equiv 2 \pmod 5$ - одно из решений. $f'(x)=3x^2+1$,
$f'(x_1) \equiv 3 \cdot 2^2+1 \equiv 13 \pmod{25} \equiv 3 \pmod 5 \not\equiv 0 \pmod 5$.
$f(x_2) \equiv 0 \pmod{5^2}$, $x_2 \equiv x_1 \pmod 5$. Берем $x_2=2+5t$, $f(x_2)=f(2+5t) \equiv f(2)+5tf'(2) \pmod{5^2} = 10+5 \cdot t \cdot 13 \pmod{5^2} = 5(2+13t) \pmod{5^2} \equiv 0 \pmod{5^2}$, $2+13t \equiv 0 \pmod 5$ $2t+3 \equiv 0 \pmod 5$ $3t \equiv -2 \equiv 3 \pmod 5$, $t \equiv 1 \pmod 5$. Берем $t=1$, $x_2 \equiv 2+5 \cdot 1 \pmod{5^2} \equiv 7 \pmod 5$ - решение.
$f(x_2)=7^3+7=49 \cdot 7+7=(50-1)7+7=350=5^2 \cdot 14. f(x_3) \equiv 0 \pmod{5^3}$, $x_3 \equiv x_2 \pmod{5^2}$, $x_3=7+5^2t$, $f(x_3) \equiv f(7)+f'(7) \cdot 5^2t \pmod{5^3} =$
$= 5^2 \cdot 14+f'(7)5^2t \equiv 0 \pmod{5^3}$
$5^2(14+f'(7)t) \equiv 0 \pmod{5^3}$ $14+f'(7)t \equiv 0 \pmod 5$ $2 \equiv 7 \pmod 5$
$\Rightarrow f'(2) \equiv f'(7) \pmod 5$ $4+3t \equiv 0 \pmod 5$ $3t \equiv 1 \pmod 5$, $t \equiv 2 \pmod 5$,
$t=2$, $x_3 \equiv 7+2 \cdot 5^2 \equiv 57 \pmod{5^3}$.

Замечание. Если $f(x_1) \equiv 0 \pmod p$ и при этом $f'(x_1) \equiv 0 \pmod p$, то сравненмия $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, $\alpha \geq 2$, может как иметь несколько решений $\equiv x_1 \pmod p$, так и не иметь ни одного такого решения $f(x)=x^3+3x^2+x+3$, $p=5$, $f(x) \equiv 0 \pmod 5$ имеет решение $x \equiv 2 \pmod 5$, $f'(x)=3x^2+6x+1 \equiv 3x^2+x+1 \Rightarrow f'(2) \equiv 3 \cdot 4+2+1 \equiv 0 \pmod 5$. Можно проверить, что решениями сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{5^2}$ будут все $x \equiv 2+5t \pmod{5^2}$, $t=0,1,2,3,4$. $f(x)=x^3+2x^2+2x+1, p=3$, $f(x) \equiv 0 \pmod 3$ имеет решения $x \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 2 \pmod 3$, $f'(x) \equiv 0 \pmod 3$ для $x=1,2 \pmod 3$ сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod{3^2}$ не имеет решений $\equiv 1 \pmod{3^2}$, но имеет решения $\equiv 2 \pmod 3$, а именно $x \equiv 8 \pmod{3^2}$.

10 Квадратичные вычеты

Определение 10.1. Пусть $m \geq 2, n \geq 2$ - целые, $(a,m)=1$. Если сравнение $x^n \equiv a \pmod m$ имеет решение, то a называется вычетом степени n по модулю m. В противном случае a называется невычетом n-й степени по $\bmod m$.
При $n=2$, a называется квадратичным вычетом (соответственно квадратичным невычетом) по $\bmod m$.

При $n = 3$, a называется кубическим вычетом (соответственно кубическим невычетом) по $\mod m$.

Далее рассматриваем лишь случай $m = p$ - простое, $p \geq 3$, то есть изучать сравнения $x^2 \equiv a \pmod{p}$, p не делит a. Квадратичные вычеты - это представители классов вычетов в которые попадают остатки от деления на p квадратов целых чисел.

Пример.

x	x^2	$x^2 \pmod 5$
1	1	1
2	4	4
3	9	4
4	16	1

$\Rightarrow$ 1 и 4 - квадратичные вычеты по $\mod 5$
2 и 3 - квадратичные невычеты по $\mod 5$.

Теорема 10.1. Если a - квадратичный вычет по $\mod p$, то сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$ имеет ровно 2 решения.

Доказательство. Так как a - квадратичный вычет, то у сравнения есть хотя бы одно решение: $x \equiv x_1 \pmod{p}$. Возьмем $x_2 \equiv -x_1 \pmod{p}$, т.ч. $x_2^2 \equiv (-x_1)^2 \equiv x_1^2 \equiv 0 \pmod{p}$, то есть $x \equiv x_2 \pmod{p}$ - тоже решение. Эти решения различны, иначе мы бы имели: $x_1 \equiv -x_1 \pmod{p}$, то есть $2x_1 \equiv 0 \pmod{p}$, то есть $p \mid 2x_1$, но $p \geq 3$, то есть p не делит 2. По теореме 2.3, $p \mid x_1$, что невозможно, так как $(a, p) = 1$. По теореме Лагранжа (9.5) сравнение не может иметь более двух решений. □

Теорема 10.2. Приведенная система вычетов по простому модулю p, $(p \geq 3)$ состоит из $\frac{1}{2}(p-1)$ квадратичных вычетов, сравнимых с числами
$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ (\frac{p-1}{2})^2$ (1) и из $\frac{1}{2}(p-1)$ квадратичных невычетов

Доказательство. Квадратичные вычеты лежат в тех классах, в которые попадают отстатки от деления на p квадратов целых чисел n, не кратных p. Если $l \equiv n \pmod{p}$, то $l^2 \equiv n^2 \pmod{p}$, то есть достаточно рассмотреть числа $n = 1, 2, \ldots, p-1$. Более того, так как $(p-n)^2 = p^2 - 2pn + n^2 \equiv n^2 \pmod{p}$, так что достаточно рассмотреть числа $n = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Проверим, что квадраты этих чисел различны по $\mod p$. Предположим, что существует $1 \leq l < n \leq \frac{1}{2}(p-1)$ т.ч. $n^2 \equiv l^2 \pmod{p} \Rightarrow (n+l)(n-l) \equiv 0 \pmod{p}$. Это невозможно: $1 \leq n - l, n + l \leq \frac{1}{2}(p-1) + \frac{1}{2}(p-1) - 1 = p - 2 < p$, то есть $(n \pm l, p) = 1$. Квадратичных вычетов будет $\frac{1}{2}(p-1) \Rightarrow$ квадратичных невычетов будет $(p-1) - \frac{1}{2}(p-1) = \frac{1}{2}(p-1)$ □

Теорема 10.3. (Критерий Эйлера)
Пусть $p \geq 3$ - простое $(a, p) = 1$. Тогда a будет квадратичным вычетом по модулю p в том и только том случае, когда выполнено сравнение:
$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Доказательство.

1. ($\Rightarrow$) Пусть a - квадратичный вычет. Значит, $a \equiv b^2 \pmod{p}$ для некоторого b. Тогда $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \equiv b^{p-1} \pmod{p} \equiv 1 \pmod{p}$ (по малой теореме Ферма)

2. ($\Leftarrow$) По малой теореме Ферма, $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$. Значит, p всегда делит какое-то из чисел $k = a^{\frac{p-1}{2}} - 1$, $l = a^{\frac{p-1}{2}} + 1$. Оба числа k, l число p делить не может, иначе $p \mid l - k = 2$, что невозможно. Подоказанному выше, всякий квадратичный вычет является решением сравнения $x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. По теореме 10.2 имеется ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов. По теореме Лагранжа (9.5), квадратичные вычеты, и только они, будут решениями этого сравнения.

□

Символ Лежандра

Определение 10.2. Пусть $p \geq 3$ - простое, a - целое. Символ Лежандра $(\frac{a}{p})$ (a по p) определяется равенствами:

$$(\frac{a}{p}) = \begin{cases} 1, & \text{если a—квадратичный вычет по } \mod p, \\ -1, & \text{если a—квадратичный невычет по } \mod p, \\ 0, & \text{если } p \mid a. \end{cases}$$

Следствие. (Теоремы 10.3) При любом a выполнено сравнение:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{a}{p}) \pmod{p}$$

Теорема 10.4.

1. $a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow (\frac{a}{p} = (\frac{b}{p}))$.
2. $(\frac{1}{p}) = 1$.
3. $(\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.
4. $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p}) \cdot (\frac{b}{p})$ для любых a и b.

5. Если $(b,p)=1$, то $(\frac{ab^2}{p})=(\frac{a}{p})$.

6. $\sum\limits_{a=1}^{p}(\frac{a}{p})=0$.

Доказательство.

1. Если $a,b\equiv 0 \pmod p$ - очевидно. Если $(a,b)=1$, то сравнения $x^2\equiv a \pmod p$ и $x^2\equiv b \pmod p$ одновременно либо разрешимы, либо неразрешимы.

2. $x^2\equiv 1 \pmod p$ в силу разрешимости $x\equiv \pm 1 \pmod p$

3. Полагая $a=-1$ в следствии теоремы 10.3, получим:

$$(\frac{-1}{p})\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

модуль разности правой и левой части $\leq 2 \Rightarrow (\frac{-1}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

4. В силу следствия теоремы 10.3, имеем:

$$\frac{ab}{p}\equiv(ab)^{\frac{p-1}{2}}\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\cdot b^{\frac{p-1}{2}}\equiv(\frac{a}{p})\cdot(\frac{b}{p}) \pmod p \quad \Rightarrow (\frac{ab}{p})=(\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$$

5. Согласно предыдущему пункту:

$$\frac{ab^2}{p}=(\frac{a}{p})\cdot(\frac{b}{p})\cdot(\frac{b}{p})=(\frac{a}{p})\cdot(\frac{b}{p})^2=(\frac{a}{p})\cdot 1=(\frac{a}{p})$$

6. Из теоремы 10.2 следует, что

$$\sum_{a=1}^{p}(\frac{a}{p})=\sum_{a=1}^{p-1}(\frac{a}{p})=\sum_{\text{а-кв.выч.}}1-\sum_{\text{а-кв.выч.}}1=\frac{1}{2}(p-1)-\frac{1}{2}(p-1)=0$$

□

Замечание. Из пунктов (1) и (6) несложно заключить, что $\forall m\in\mathbb{Z}$:

$$\sum_{a=m+1}^{m+p}(\frac{a}{p})=0$$

Следствие. Пусть $p\geq 3$ - простое. Сравнение $x^2\equiv -1 \pmod p$ разрешимо $\Leftrightarrow$ p имеет вид $4n+1$.

Пример. $x^2\equiv -1 \pmod{13}$ разрешимо: $x\equiv 5,8 \pmod{13}$.
$x^2\equiv -1 \pmod{11}$ - неразрешимо.

Закон взаимности квадратичных вычетов

Пусть $p \neq q$ - нечетные простые. Как связаны друг с другом $(\frac{p}{q})$ и $(\frac{q}{p})$.

Теорема 10.5. Пусть $p \neq q$ - нечетные простые. Тогда справедливо равенство:

$$(\frac{p}{q}) \cdot (\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

Для доказательства понядобятся две вспомогательные леммы.

Пример. $p = 11,\ \frac{p-1}{2} = 5,\ a = 7,$
$7 \cdot 1 \equiv -4 \equiv 7 \pmod{11},$
$7 \cdot 2 \equiv 3 \equiv +3 \pmod{11},$
$7 \cdot 3 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11},$
$7 \cdot 4 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{11},$
$7 \cdot 5 \equiv 2 \equiv +2 \pmod{11}.$
$\Rightarrow 7^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \equiv (-4)(+3)(-1)(-5)(+2) \equiv -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \pmod{11}$
$\Rightarrow 7^5 \equiv -1 \pmod{11},\ 7^{\frac{11-1}{2}} \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow (\frac{7}{11}) = -1.$

Лемма 10.1. Пусть $p \geq 3$ - простое, $(a, p) = 1$. Тогда

$$(\frac{a}{p}) = (-1)^{\delta},\ \delta = \sum_{x=1}^{p_1} [\frac{2ax}{p}],\ p_1 = \frac{p-1}{2}$$

Доказательство. Станем умножать a на все положительные вычеты из наименьшей по модулю системы вычетов:

$$\begin{cases} a \cdot 1 \equiv \varepsilon_1 r_1 \pmod{p}, \\ a \cdot 2 \equiv \varepsilon_2 r_2 \pmod{p}, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a \cdot p_1 \equiv \varepsilon_{p_1} r_{p_1} \pmod{p}. \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \pm 1,\ 1 \leq r_x \leq \frac{p-1}{2}$$

Вычеты r_x различны: пусть существует $1 \leq x < y \leq p_1 : r_x = r_y = r$. Тогда
$ax \equiv \varepsilon_x r \pmod{p},\ ay \equiv \varepsilon_y r \pmod{p}$. Если $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, то $ax \equiv ay \pmod{p}$
$\Rightarrow x \equiv y \pmod{p}$. Если $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$, то $ax \equiv -ay \pmod{p}$
$\Rightarrow a(x+y) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x+y \equiv 0 \pmod{p}$, что невозможно в силу неравентсв $1 < x+y < 2p_1 = p-1 < p$. Значит, $r_1, r_2, \ldots, r_{p_1}$ - перестановка чисел $1, 2, \ldots p_1$. Значит, $r_1 r_2 \ldots r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot p_1 = R$. Очевидно, что $(R, p) = 1$, перемножим:

$a^{p_1}R \equiv \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p_1} R \pmod p \Rightarrow a^{p_1} \equiv \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p_1} \pmod p$. В силу критерия Эйлера (10.3)

$$(\frac{a}{p}) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p_1}$$

$\varepsilon_x = 1$, если вычет $ax \pmod p$ попадает в промежуток $[1, \frac{p-1}{2}]$,
$\varepsilon_x = -1$, если вычет $ax \pmod p$ попадает в промежуток $[\frac{p+1}{2}, p-1]$.
Теперь рассмотрим дроби $\frac{2ax}{p}$, где $x = 1, 2, \dots, p_1$

$$[\frac{2ax}{p}] = [2\frac{ax}{p}] = 2[\frac{ax}{p}] + [2\{\frac{ax}{p}\}]$$

Пусть $b \equiv c \pmod p$. Тогда

$$\{\frac{b}{p}\} = \{\frac{a}{p}\},\ ax \equiv \varepsilon_x r_x \pmod p \Rightarrow \{\frac{ax}{p}\} = \{\frac{\varepsilon_x r_x}{p}\}$$

Если $\varepsilon_x = \pm 1$, то

$$\{\frac{ax}{p}\} = \{\frac{r_x}{p}\} = \frac{r_x}{p} \le \frac{p-1}{2p} < 1 \Rightarrow [2\{\frac{ax}{p}\}] = 0 \Rightarrow [\frac{2ax}{p}]$$

- четное. $\varepsilon_x = 1 \Rightarrow [\frac{2ax}{p}]$ - четное, то есть $\varepsilon_x = (-1)^{[\frac{2ax}{p}]}$. Если $\varepsilon_x = -1$, то

$$\{\frac{ax}{p}\} = \{\frac{-r_x}{p}\} = \{1 - \frac{r_x}{p}\} = \{\frac{p-r_x}{p}\} = \frac{p-r_x}{p} \ge \frac{p-p_1}{p} = \frac{p-\frac{p-1}{2}}{p} = \frac{p+1}{2p} > \frac{1}{2}$$

Однако

$$\frac{1}{2} < \{\frac{ax}{p}\} < 1 \Rightarrow 1 < 2\{\frac{ax}{p}\} < 2 \Rightarrow [2\{\frac{ax}{p}\}] = 1 \Rightarrow [\frac{2ax}{p}] = 2[\frac{ax}{p}] + 1$$

- нечетное. □

Лемма 10.2. Пусть $p \ge 3$ - простое число, $(a, p) = 1$, a - нечетное. Тогда

$$(\frac{2}{p}) \cdot (\frac{a}{p}) = (-1)^{\delta_1},\ \delta_1 = \sum_{x=1}^{p_1} [\frac{ax}{p}] + \frac{p^2-1}{8},\ p_1 = \frac{p-1}{2}$$

Доказательство. $a + p$ - четное $\Rightarrow \frac{a+p}{2}$ - целое. По лемме 10.1

$$(\frac{2a}{p}) = (\frac{2a+2p}{2}) = (\frac{2(a+p)}{p}) = (\frac{4\frac{a+p}{2}}{p}) = (\frac{\frac{a+p}{2}}{p}) = (-1)^{\delta}$$

В силу леммы 10.1 последний символ лежандра равен $(-1)^{\delta}$, где

$$\delta = \sum_{x=1}^{p_1} [\frac{2(\frac{a+p}{2})x}{p}] = \sum_{x=1}^{p_1} [\frac{(a+p)x}{p}] = \sum_{x=1}^{p_1} [x + \frac{ax}{p}] = \sum_{x=1}^{p_1} (x + [\frac{ax}{2}]) =$$

$$= \frac{\frac{p-1}{2}(\frac{p-1}{2}+1)}{2} + \sum_{x=1}^{p_1} [\frac{ax}{p}] = \frac{p^2-1}{8} + \sum_{x=1}^{p_1} [\frac{ax}{p}] = \delta_1$$

□

Следствие.

$$(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

Иными словами, 2 - квадратичный вычет по модулю $p \Leftrightarrow p = 8n+1,\ 8n+7$. 2 - квадратичный невычет по модулю $p \Leftrightarrow p = 8n+3,\ 8n+5$.

Следствие.

$$(\frac{a}{p}) = (-1)^{\Delta},\ \Delta = \sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} [\frac{ax}{p}]$$

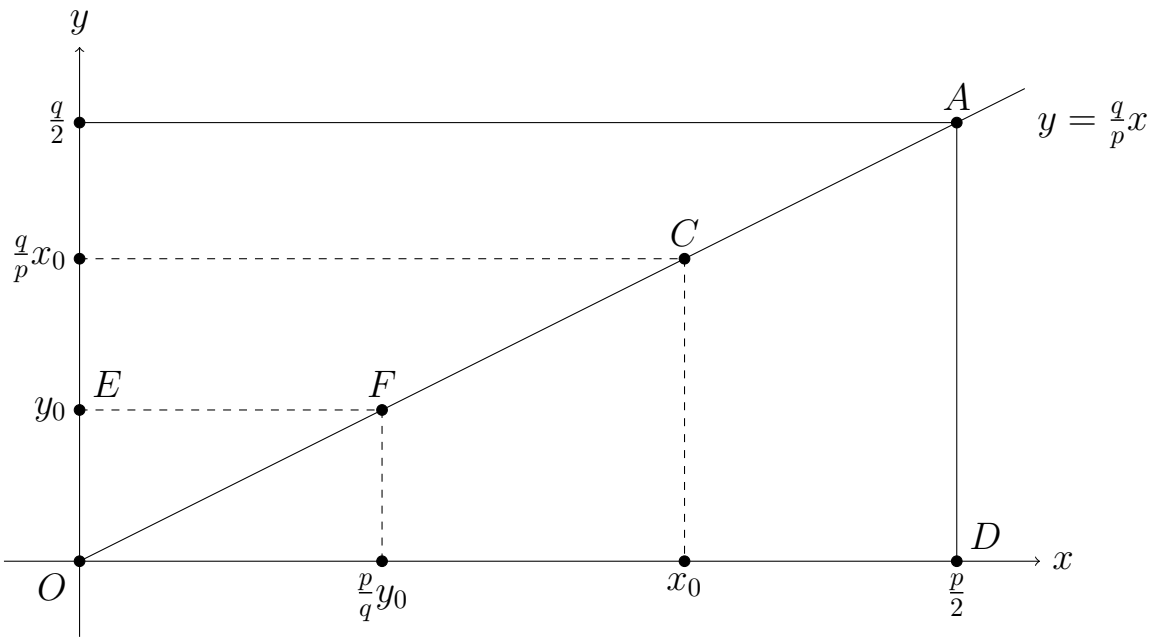
Доказательство. (Теоремы 10.5)

$$(\frac{p}{q}) = (-1)^{\Delta_1},\ \Delta_1 = \sum_{x=1}^{q_1} [\frac{px}{q}],\ q_1 = \frac{q-1}{2}$$

$$(\frac{q}{p}) = (-1)^{\Delta_1},\ \Delta_2 = \sum_{y=1}^{p_1} [\frac{qy}{p}],\ p_1 = \frac{p-1}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{p}{q}) \cdot (\frac{q}{p}) = (-1)^{\Delta_1+\Delta_2}$$

а хотим получить: $\Delta_1 + \Delta_2 = p_1 q_1$.



Точек с обеими положительными координатами:

$$[\frac{p}{2}] \cdot [\frac{q}{2}] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = p_1 q_1$$

На OA нет целых точек (кроме O): иначе имели бы $n = \frac{q}{p}m,\ np = mq,$ $p \mid mq,\ p \nmid q \Rightarrow p \mid m$, аналогично $q \mid n$. Но $1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}$ и это невозможно. $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ на BC имеется $[\frac{qx_0}{p}]$ целых точек $\Rightarrow$ в нижнем треугольнике

$$\sum_{x_0=1}^{\frac{p-1}{2}} [\frac{qx_0}{p}] = \Delta_2$$

$y_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ на DE имеются $[\frac{py_1}{q}]$ целых точек $\Rightarrow$ в верхнем треугольнике

$$\sum_{y_1}^{\frac{q-1}{2}} [\frac{py_1}{q}] = \Delta_1$$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = p_1 q_1$. $\square$

11 Первообразные корни

Пусть $m \geq 2$, $(a, m) = 1$. Из теоремы Эйлера (8.6) следует существование целого $k \geq 1$ такого, что $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Например можно взять $k = \varphi(m)$

Определение 11.1. Наименьшее из чисел $k \geq 1$ таких, что $a^k \equiv 1 \pmod{m}$, называется показателем, которому принадлежит число a по модулю m. Озозначение: $\delta_m(a)$ или $\delta(a)$.

пример

Лемма 11.1. Если число a принадлежит по модулю m показателю δ, то числа $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^2, \ldots,\ a^{\delta-1}$ попарно несравнимы по модулю m.

Доказательство. Допустим противное: $a^k \equiv a^l \pmod{m}$, но $0 \leq j < k \leq \delta - 1$. Сократив на a^l получим: $a^{k-l} \equiv 1 \pmod{m}$, но $1 \leq k - l \leq \delta - 1 < \delta$, что противоречит определению δ. □

Лемма 11.2. Пусть a принадлежит по модулю m показателю δ. Сравнение $a^\gamma \equiv a^{\gamma'} \pmod{m}$ возможно тогда и только тогда, когда $\gamma \equiv \gamma' \pmod{\delta}$. В частности, $a^\gamma \equiv 1 \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $\gamma \equiv 0 \pmod{\delta}$.

Доказательство. Пусть $\gamma = q\delta + r,\ \gamma' = q'\delta + r'$, где $0 \leq r, r' \leq q - 1$. Тогда $a^\gamma = a^{q\delta+r} = (a^\delta)^q a^r \equiv 1^q a^r \pmod{m} \equiv a^r \pmod{m}$. Аналогично,
$a^{\gamma'} \equiv a^{r'} \pmod{m} \Rightarrow$ сравнение $a^\gamma \equiv a^{\gamma'} \pmod{m}$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^r \equiv a^{r'}$. По лемме 11.1, это возможно тогда и только тогда, когда $r = r'$. □

Следствие. Показатели, которым принадлежат числа a, $(a, m) = 1$, по модулю m, являются делителями числа $\varphi(m)$. Теорема Эйлера гласит: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow \varphi(m) \equiv 1 \pmod{\delta}$, то есть $\delta \mid \varphi(m)$.

Определение 11.2. Числа, принадлежащие по модулю m показателю $\varphi(m)$, называются первообразными корнями по модулю m.

Из таблиц (таблицы еще не готовы :() следует, что по модулю $m = 2$ первообразный корнем будет $a = 1$, по модулю $m = 3$ - число $a = 2$, по модулю $m = 4$ - число $a = 3$, по модулю $m = 5$ - число $a = 2,\ a = 3$, по модулю $m = 8$ нет первообразных корней: $\varphi(8) = 4$, но $1^1 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
Далее понадобится тождество:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad \text{(следвствие теоремы 6.5)}$$

Теорема 11.1. Пусть $p \geq 2$ - простое число, δ - произвольный делитель числа $(p-1)$. Тогда в приведенной системе вычетов по модулю p имеется ровно $\varphi(\delta)$ чисел, принадлежащих показателю δ. В частности по модулю p существует $\varphi(p-1)$ первообразных корней.

пример

Доказательство. Пусть $\delta \mid (p-1)$, и пусть имеется хотя бы одно число a, принадлежащее этому показателю. Если $d \mid (p-1)$, то через $f(d)$ обозначим количество чисел из приведенной системы вычетов, принадлежащих показателю d. То есть берем δ так, что $f(\delta) > 0$. Покажем, что в этом случае $f(d) = \varphi(\delta)$. По лемме 11.1, числа ряда $a^0 = 1,\ a,\ a^2,\ \ldots, a^{\delta-1}$ различны по $\bmod p$. Пусть $0 \leq l \leq \delta - 1$. Тогда $(a^k)^\delta = (a^\delta)^k \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$ каждое из чисел этого ряда удовлетворяет сравнению $x^\delta - 1 \equiv 0 \pmod p$. По теореме Лагранжа (9.5), иных решений это сравнение не имеет. Но все числа, принадлежащие показателю δ, тоже удовлетворяют сравнению $x^\delta - 1 \equiv 0$. Значит, все такие числа находятся среди этих чисел $1,\ a,\ a^2, \ldots, a^{\delta-1}$. Осталось их распознать. Берем $a^k,\ 0 < k \leq \delta - 1$, и вычислим его показатель. Пусть a^k принадлежит показателю Δ, пусть $d = (\delta, k)$, такое что $k = k_1 d,\ \delta = \delta_1 d,\ (k_1, \delta_1) = 1$. Тогда $1 \equiv (a^k)^\Delta \pmod p \equiv a^{k\Delta} \pmod p \equiv a^{k_1 d\Delta} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$ по лемме 11.2, $k_1 d\Delta \equiv 0 \pmod \delta \equiv 0 \pmod{\delta_1 d}$. Сократим обе части на модулю на d: $k_1\Delta \pmod{\delta_1},\ \delta_1 \mid k_1\Delta \Rightarrow \delta_1 \mid \Delta \Rightarrow \Delta \geq \delta_1$. В то же время
$(a^k)^{\delta_1} \equiv a^{k\delta_1} \equiv a^{k_1 d\delta_1} \equiv a^{k_1\delta} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow \Delta \mid \delta_1 \Rightarrow \delta_1 \geq \Delta$.
Значит, можно заключить, что $\Delta = \delta_1 = \frac{\delta}{d} = \frac{\delta}{(k,\delta)} \Rightarrow a^k$. принадлежит показателю $\frac{\delta}{(\delta,k)}$ с условиями $1 \leq k \leq \delta - 1,\ (k, \delta) = 1$. Таких k будет $\varphi(\delta)$ штук. Значит ряд $a^0,\ a,\ a^2, \ldots, a^{\delta-1}$ содержит ровно $\varphi(\delta)$ чисел, принадлежащих показателю δ. Значит, если $f(\delta) > 0$, то $f(\delta) = \varphi(\delta)$. Осталось оказать, что $f(\delta) = \varphi(\delta)$ для всех $\delta \mid p-1$

$$\sum_{\delta \mid p-1} f(\delta) = p - 1 \Rightarrow \sum_{\delta \mid p-1} (\varphi(\delta) - f(\delta)) = 0$$

Значит, $\varphi(\delta) - f(\delta) = 0 \forall \delta$, то есть $f(\delta) = \varphi(\delta)$. □

Теорема 11.2. Пусть $p \geq 3$ - простое, g - первообразный корень по модулю p. Тогда существует целое t, такое, что $g_1 = g + pt$ будет первообразным корнем по любому модулю $p^\alpha, \alpha = 2, 3, \ldots$

Доказательство. По малой теореме Ферма (Следствие теоремы 8.6)

$$(g+pt)^{p-1} = g^{p-1} + C^1_{p-1} g^{p-2} pt + p^2 b = g^{p-1} + (p-1)ptg^{p-2} + p^2 b =$$
$$= g^{p-1} - g^{p-2}pt + p^2 c = 1 + pa - pg^{p-2}t + p^2 c = 1 + p(a - tg^{p-2}) + p^2 c$$

$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow g^{p-1} = 1 + p\alpha$, α - целое. Пусть t - любое целое. но $(g, p) = 1$. Если t пробегает полную систему вычетов по модулю p, то то же делает $a - tg^{p-2} \Rightarrow$ для некоторого $t = t_1$, число $v = a - tg^{p-2}$, будет взаимно просто с $p : (v, p) = 1$. Берем $g_1 = g + pt_1$ и докажем, что g_1 - первообразный корень по модулю p^α. $\alpha \geq 2$ - фиксированное, и пусть δ - показатель, которому принадлежит g_1. По лемме 11.2, $\delta \mid \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$. Но $g_1 \equiv g \pmod{p}$, $g_1^\delta \equiv g^\delta \equiv 1 \pmod{p}$. Но g принадлежит показателю $p-1 \Rightarrow$ по лемме 11.2 $\delta \equiv 0 \pmod{p-1}$, $\delta = k(p-1)$, $\delta = k(p-1) \mid p^{\alpha-1}(p-1) \Rightarrow k \mid p^{\alpha-1} \Rightarrow k$ обязательно имеет вид $p^{\beta-1}$, где $1 \leq \beta \leq \alpha$.
Остается доказать, что $\beta = \alpha$. Отсюда будет следовать, что
$\delta = p^{\alpha-1}(p-1) = \varphi(p^\alpha)$, то есть что g_1 принадлежит показателю $\varphi(p^\alpha)$ и, то есть является первообразным корнем. Для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что g_1 в степенях $p(p-1)$, $p^2(p-1), \ldots, p^{\alpha-2}(p-1)$ отлично от единицы по модулю p^α. Имеем:

$$g_1^{p(p-1)} = (g + pt_1)^{p(p-1)} = (1 + pu)^p = 1 + p^2u + C_p^2(pu)^2 + \cdots + C_p^k(pu)^k + (pu)^p$$

Но любой биномиальный коэффициэнт

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!},\ 1 \leq k \leq p-1$$

делится на p. Следовательно $g_1^{p(p-1)} = 1 + p^2u + p^3n$, где n - целое число. Значит $g_1^{p(p-1)} = 1 + pu_1$, где $u_1 = u + pn$ и $(u_1, p) = (u, p) = 1$. В частности,
$g_1^{p(p-1)} \equiv q + p^2u \pmod{p^3} \not\equiv 1 \pmod{p^3}$ и тем более $g_1^{p(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Оперделяя числа $u_2, u_3, \ldots, u_{\alpha-2}$ равенствами:

$$g_1^{p^2(p-1)} = (1 + p^2u_1)^p = 1 + p^3u_2$$

$$g_1^{p^3(p-1)} = (1 + p^3u_2)^p = 1 + p^4u_3$$

$$\vdots$$

$$g_1^{p^{\alpha-2}(p-1)} = (1 + p^{\alpha-2}u_{\alpha-3})^p = 1 + p^{\alpha-1}u_{\alpha-2}$$

Будем иметь: $(u_2, p) = (u_3, p) = \cdots = (u_{\alpha-2}, p) = 1$. В частности, при любом s, $s \leq \alpha - 2$, будем иметь $g_1^{p^s(p-1)} = 1 + p^{s+1}u_s \not\equiv 1 \pmod{p^{s+2}}$ и тем более $g_1^{p^s(p-1)} = 1 + p^{s+1}u_s \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, что нам и требовалось показать. □

Теорема 11.3. Пусть $p \geq 3$ - простое, $\alpha \geq 1$, и пусть g_1 - первообразный корень по модулю p^α. Тогда нечетное из чисел $g_1, g_1 + p^\alpha$ будет первообразным корнем по модулю $2p^\alpha$.

Доказательство. Сначала заметим, что $\varphi(p^\alpha) = \varphi(2p^\alpha)$. Далее, если x - нечетное число, то одно из сравнений $x^\gamma \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, $x^\gamma \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$ влечет второе. Пусть, наконец, g - нечетное из чисел $g_1, g_1 + p^\alpha$, и γ - его показатель по модулю $2p^\alpha$. Тогда, в силу сказанного выше, $g_1^\gamma \equiv 1 \pmod{p^\alpha} \equiv g^\gamma \pmod{p^\alpha}$ и $\gamma = \varphi(p^\alpha) = \varphi(2p^\alpha)$. □

Теорема 11.4. Пусть $m \geq 3$, $c = \varphi(m)$, и пусть $q_1, \ldots, q_k$ - различные простые делители числа c. Для того, чтобы число g с условием $(g, m) = 1$ было первообразным корнем по модулю m, необходимо и достаточно, чтобы g не удовлетворяло ни одному из сравнений.

$$g^{\frac{c}{q_1}} \equiv 1 \pmod{m}, \quad \ldots, \quad g^{\frac{c}{q_k}} \equiv 1 \pmod{m} \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как $g^k \not\equiv 1 \pmod{m}$ при любом k, 1 □