Введение в теорию вероятностей

Лектор: проф. Булинский Александр Вадимович

12 октября 2025 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Алгебра и сигма-алгебра

Определение. Множество Ω называется множеством элементарных исходов. Множество $A \in 2^{\Omega}$назывется событием.

Определение. Множество $\mathcal{A} \in 2^{\Omega}$ такое, что $\mathcal{A} \neq \varnothing$ называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Утверждение. (Следствия из определения алгебры)

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, так как для непустого $A \in \mathcal{A} : \bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$
2. $\varnothing \in \mathcal{A}$, так как $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{A}$
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
4. $A \cap B \in \mathcal{A}$, если $A, B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
6. $A \setminus B \in \mathcal{A}$, так как $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Определение. Множество $\mathcal{F} \in 2^{\Omega}$ такое, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$ называется σ-алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Замечание. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра $\Rightarrow \mathcal{F}$ - алгебра.

Замечание. Наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая M, обозначается $\sigma\{M\} = \bigcap\limits_{\alpha} g_{\alpha}$, где g_{α} - σ-алгебра, содержащая все элементы M.

1.2 Вероятностная мера

Определение. Мерой на системе множеств U называется функция
$\mu : U \to [0, +\infty]$ такая, что

1. $\forall n : A_n \in U$
2. $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$
3. $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$
4. Выполнено свойство счетной аддитивности (такая мера называется счетно-аддитивной):
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Замечание. Если U - σ-алгебра, то условие
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$
можно упустить.

Пример. (Мера Дирака)
Пусть $B \subset S$
$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, \ x \in B, \\ 0, \ x \notin B \end{cases}$$
Упражнение: доказать, что $\delta_x(.)$ является мерой на 2^S

Определение. Мера P на пространтсве $(\Omega, \mathcal{F})$ такая, что $P(\Omega) = 1$ называется вероятностью.

1.3 Дискретные вероятностные пространства

Определение. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in J}$ не более чем счетно, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, причем
$$P_n = P(\{\omega_n\}) \geq 0, \ \sum_{n \in J} P_n = 1$$
Пусть $A \subset \Omega$, определим вероятность так:
$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^{n} P_k$$
такое вероятностное пространство называется дискретным.

Упражнение. Доказать, что определенное выше P является вероятностью.

Определение. (Классическое определение вероятности)
Пусть $|\Omega| = N < \infty$ и положим $P_k = P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$. Тогда

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^{n} P_k = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.4 Пи-системы и лямбда-системы

Определение. Система M подмножеств множества S называется π-системой, если $A, B \in M \Rightarrow A \cap B \in M$

Определение. Сисмтема M подмножеств множества S называется λ-системой, если

1. $S \in M$
2. $A, B \in M \Rightarrow B \setminus A \in M$
3. $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A_n \nearrow A$, то $A \in M$.
   ($A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$)

Теорема. Система $\mathcal{F}$ подмножеств S является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ одновременно π-система и λ-система.

Доказательство.

($\Rightarrow$): По следствию из определения алгебры: $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, значит, $\mathcal{F}$ является π-системой. Теперь проверим условия λ-системы:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по проеделению алгебры.
2. $A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B$, причем $B \setminus A = B \cap \bar{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F},\ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по свойству σ-алгебры $A \in \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$): Проверим определению σ-алгебры:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по первому свойству λ-системы.
2. $S \in \mathcal{F},\ A \subset S \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{F}$ выполнено по второму свойству λ-системы.
3. Пусть $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F},\ A_m := \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$ при этом

$$A_m = \bigcup_{n=1}^{m} B_n = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{m} \overline{B}_n\right)} \in \mathcal{F} \Rightarrow A_m \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

$\square$

Теорема. Пусть M - π-система, D - λ-система и $M \subset D$. Тогда

$$\sigma\{M\} = \lambda\{M\} \subset D$$

2 Лекция 2

2.1 Простейшие свойства конечно-аддитивной вероятностной меры на алгебре

Теорема. Пусть P - конечно-аддитивная вероятностная мера на алгебре $\mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ A \cap B = \varnothing$. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, тогда

1. $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. Субаддитивность:
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
4. Если P - вероятностная мера на σ-алгебре $\mathcal{F}$, то
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Доказательство.

1. $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
2. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$,
$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. По индукции. База $n = 2$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$, так как $P(A \cup B) \ge 0$
Пусть верно для $n - 1$, тогда
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cup A_n\right) \le \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
4. *будет позже*

$\square$

2.2 Непрерывность сверху и снизу

Определение. Конечная неотрицательная функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$, называется непрерывной в $\varnothing$, если $\forall A_n$:

$$A_n \downarrow \varnothing \ (A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing) \Rightarrow \mu(A_n) \to 0$$

Определение. Конечная неотрицательная функция μ на алгебре $\mathcal{A}$ называется

1. непрерывной сверху на $A \in \mathcal{A}$, если $\forall A_n : A_n \downarrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$.

$$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

2. непрерывной снизу на $A \in \mathcal{A}$, если $\forall A_n : A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$.

$$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

Лемма. Пусть μ - конечная неотрицательная конечно-аддитивная функция на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ непрерывно сверху и снизу на любом $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Докажем непрерывность сверху. Рассмотрим последовательность $A_n \downarrow A \Rightarrow A_n \setminus A \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(A_n \setminus A) = \mu(A_n) - \mu(A) \to 0$. Аналогично, рассмотрим $A_n \uparrow A \Rightarrow A \setminus A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \to 0$. □

Теорема. Пусть μ - конечная неотрицательная функция на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ является счетно-аддитивной на $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

1. μ является конечно-аддитивной.

2. μ непрерывна в $\varnothing$.

Доказательство.

($\Rightarrow$): Пусть μ - счетно-аддитивная на $\mathcal{A}$. Рассмотрим $A_n \downarrow \varnothing, \ n \to \infty$ и введем $B_n = A_n \setminus A_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}$. Эти слои не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$. Применим счетную аддитивность:

$$\mu(A_N) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$$

Этот ряд сходится, значит последовательность (остаточных рядов)

$$S_N = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \to 0$$

($\Leftarrow$): *(тут пока что лажа)* Пусть $A_i \neq A_j,\ i \neq j$. Введем $C_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow C_n \downarrow \varnothing$. При этом
$A_1 = C_1 \cup \dots \cup C_{n-1} \cup C_n$, причем $A_1 \in \mathcal{A}$ и $C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathcal{A}$. Таким образом, $C_n \in \mathcal{A},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup C_n$$

Отсюда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{n-1}) + \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k) + \mu(C_n)$$

при $n \to \infty,\ \mu(C_n) \to 0$, получим

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\square$

Теорема. Пусть P, Q - меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $P = Q$ на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда $P = Q$ на алгебре $\sigma\{\mathcal{A}\}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой из прошлой лекции. Алгебра является π-системой, рассмотрим $D = \{B \in \mathcal{F} : P(B) = Q(B)\},\ \mathcal{A} \subset D$. Проверим, что D является λ-системой:

1. $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1 \Rightarrow \Omega \in D$

2. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A),\ Q(B \setminus A) = Q(B) - Q(A)$, причем
$P(A) = Q(A),\ P(B) = Q(B) \Rightarrow P(B \setminus A) = Q(B \setminus A) \Rightarrow B \setminus A \in D$.
$A_n \in D,\ A_n \uparrow A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. По свойству непрерывности $P(A_n) \to P(A)$,
$Q(A_n) \to Q(A) \Rightarrow A \in D$. Значит $\sigma\{\mathcal{A}\} \subset D$.

$\square$

2.3 Условные вероятности

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) \neq 0$. Тогда вероятностью события A при условии B называется

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение. (Условная вероятность в классическом определении)
Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностьное пространство, $|\Omega| = N < \infty,\ P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$ и $P(B) = \frac{|B|}{N}$. Тогда

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{1}{N} \cdot |A \cap B|}{\frac{1}{N} \cdot |B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример. Три раза бросается правильная монетка. Рассмотрим события:
A - при первом броске выпал герб, B - при трех бросаниях выпало два герба.

$$\Omega = \{(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$

$$A = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,1)\}$$

$$B = \{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$$

$$A \cap B = \{(1,1,0),\ (1,0,1)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

Теорема. (Формула полной вероятности)
Пусть $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ ,\ B_k \in \mathcal{F},\ P(B_k) > 0$. Тогда определены $P(A|B_k)$, причем для $A \in \mathcal{F}$ верна формула

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

Доказательство.

$$P(A) = P\left(\bigcup_k (A \cap B_k)\right) = \sum_k P(A \cap B_k),\ (A \cap B_k) \cap (A \cap B_m) = \varnothing,\ k \neq m$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$$

отсюда

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

$\square$

Теорема. (Формула Байеса)
Пусть $P(A) \neq 0$, тогда верна формула

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{k} P(A|B_n)P(B_n)}$$

Доказательство. По определению условной вероятности и формуле полной вероятности, получим

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{k} P(A|B_n)P(B_n)}$$

□

3 Лекция 3

3.1 Независимые события

Определение. Если $P(A|B) = P(A)$, то при $P(B) \neq 0$ выполнено

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

В этом случае события A и B называются независимыми.

Пример. В колоде 36 карт. Выбираем одну карту из колоды. Рассмотрим события: A - вытянули карту масти треф, B - вытянули туз.

$$P(A) = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$$

значит события независимы.

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - события. Они называются независимыми в совокупности, если $\forall i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - события. Они называются попарно независимыми, если $\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j$:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Пример. Рассмотрим $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в рамках классического определения:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\ A_1 = \{\omega_1, \omega_2\},\ A_2 = \{\omega_1, \omega_3\},\ A_3 = \{\omega_1, \omega_4\},\ A_i \cap A_j = \{\omega_1\}$

Тогда

$$P(A_i \cap A_j) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$$

но с другой стороны

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Определение. Система $\{A_t,\ t \in T\}$ состоит из независимых событий, если для любого конечного $F \subset T,\ F = \{t_1, \dots, t_n\}$, события $A_{t_1}, \dots, A_{t_n}$ независимы в совокупности.

Лемма. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - независимые события. Рассмотрим $B_1, \dots, B_n$ такие, что $B_i = A_i$ или $B_i = \overline{A_i}$. Тогда $B_1, \dots, B_n$ - независимые события.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $B_j = \overline{B_j},\ B_i = A_i$, $\forall i \neq j$. Возьмем $I = \{i_1, \dots, i_k\},\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ и проверим, что

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_k}) \qquad (*)$$

Рассмотрим случаи:

1. $j \notin I$. Тогда $B_i = A_i$ и $(*)$ выполнено.
2. $j \in I \Rightarrow \exists\ m : j = i_m$. Тогда

$$\begin{aligned}
&P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(A_{i_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i_m}} \cap \dots \cap A_{i_k}) \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} P((A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_{m+i}} \cap A_{i_k}) \setminus (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_m} \cap A_{i_{m+1}} \cap \dots \cap A_{i_k})) \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_{m+i}} \cap A_{i_k}) - P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \\
&= (P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_{m-1}}) P(A_{i_{m+1}}) \dots P(A_{i_k})) - (P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})) \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_{m-1}}) P(A_{i_{m+1}}) \dots P(A_{i_k})(1 - P(A_{i_m})) = \\
&= P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_m}) \dots P(B_{i_k})
\end{aligned}$$

(1): $A \cap \overline{C} = A \setminus (A \cap C)$
(2): $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
(3): Выносим общий множитель за скобку.

$\square$

Теорема. Пусть $\varphi(n)$ - функция Эйлера, p_i - i-е простое число. Тогда

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Доказательство. Введем $\Omega = \{1, \dots n\},\ \mathcal{F} = 2^\Omega,\ P(\{i\}) = \frac{1}{n},\ i = 1, \dots, n$. Проведем следующий эксперимент: из чисел $1, \dots, n$ наугад выбирается число. Рассмотрим событие A - выбрано число, взаимно простое с n. Тогда

$$P(A) = \frac{\varphi(n)}{n}$$

Рассмотрим события A_i - выбраное число делится на p_i. Отсюда

$$A_i = \{p_i,\ 2p_i,\ \dots,\ \frac{n}{p_i} \cdot p_i\} \Rightarrow P(A_i) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$$

Для любых $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{p_{i_1} \dots p_{i_k},\ 2p_{i_1} \dots p_{i_k},\ \dots,\ \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} \cdot p_{i_1} \dots p_{i_k}\}$$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{\frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}}{n} = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

Значит $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ независимы $\Rightarrow$ по лемме $\overline{A_{i_1}}, \dots, \overline{A_{i_k}}$ независимы. Тогда

$$P(A) = P(\overline{A_{P_1}} \cap \overline{A_{p_2}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_m}}) = P(\overline{A_{p_1}})P(\overline{A_{p_2}}) \dots P(\overline{A_{p_n}}) =$$
$$= (1 - P(A_{p_1}))(1 - P(A_{p_2})) \dots (1 - P(A_{p_m})) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

значит

$$\prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{\varphi(n)}{n} \ \Rightarrow\ \varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

□

Определение. Системы событий $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ называются независимыми, если $\forall 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ и $\forall A_i \in \mathcal{G}_i : A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ независимы.

Определение. Пусть все $\mathcal{G}_k$ содержат Ω (например $\mathcal{G}_k$ - алгебры), то это определение равносильно следующему:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n),\ \forall A_i \in \mathcal{G}_i$$

Утверждение. Если все $\mathcal{G}_k$ содержат Ω, то эти определения эквивалентны.

Доказательство.

1. Первое определние влечет второе, поскольку в качестве $i_1, \dots, i_k$ можно взять $1, \dots, n$.

2. Докажем, что второе определение влечет первое: Рассмотрим произвольный набор событий $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и определим события $B_1, \dots, B_n$:

$$B_m = \begin{cases} A_m, \ m \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ \Omega, \ m \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

   Тогда

$$B_1 \cap \dots \cap B_n = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap (\Omega \cap \dots \cap \Omega) = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$$

   значит

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \\ = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \cdot (1 \dots 1) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

□

Теорема. Пусть π-системы $M_1, \dots, M_n$ (подмножества Ω из $\mathcal{F}$) независимы. Тогда независимы $\sigma\{M_1\}, \dots, \sigma\{M_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим все события B_1 такие, что выполнено:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n) \tag{$*$}$$

для проиизвольных $B_2 \in M_2, \ \dots, \ B_n \in M_n$. Назовем такие B_1 системой D_1. Покажем, что D_1 является λ-системой:

1. $(\Omega \in D_1)$

$$P(\Omega \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_2 \cap B_n) = \\ = P(B_2) \dots P(B_n) = P(\Omega)P(B_2) \dots P(B_n)$$

   Значит $\Omega \in D_1$.

2. $(A_1, A_2 \in D_1, \ A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in D_1)$
   Пусть B_i, B_j - события, для которых выполнено $(*)$ и $B_j \subset B_i$

$$
\begin{aligned}
&P((B_i \setminus B_j) \cap (B_2 \cap \dots \cap B_n)) \overset{(1)}{=} \\
&\overset{(1)}{=} P((B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \setminus (B_j \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)) = \\
&\qquad = P(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) - P(B_j \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \\
&\qquad\qquad = P(B_i) \dots P(B_n) - P(B_j) \dots P(B_n) = \\
&\qquad\qquad\qquad = P(B_2) \dots P(B_n)(P(B_i) - P(B_j)) = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = P(B_i \setminus B_j) P(B_2) \dots P(B_n)
\end{aligned}
$$

(1): $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$

3. $(A_1, A_2 \dots \in D,\ A_i \subset A_{i+1}$ и $A_i \uparrow A \Rightarrow A \in D_1)$
   Пусть $B_i \uparrow B$. Тогда
   $$(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \uparrow (B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$
   Поскольку вероятностная мера непрерывна, то
   $$P(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \to P(B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$
   причем
   $$P(B_i)P(B_2) \dots P(B_n) \to P(B)P(B_2) \dots P(B_n)$$
   значит
   $$P(B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B)P(B_2) \dots P(B_n)$$
   а это означает, что $B \in D_1$.

Значит D_1 - это λ-система. Тогда, поскольку $M_1 \subset D_1$, то $\sigma\{M_1\} \subset D_1$. Аналогичными рассуждениями, получим, что $\sigma\{M_2\} \subset D_2, \dots, \sigma\{M_n\} \subset D_n$. Поскольку $D_1, \dots, D_n$ независимы, то $\sigma\{M_1\}, \dots, \sigma\{M_n\}$ независимымы. $\square$

Лемма. (Лемма Бореля-Кантелли)

1. Если события $A_1, A_2, \dots$ таковы, что
   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$
   то вероятность события "произошло бесконечное число A_n" равна 0.

2. Если $A_1, A_2, \dots$ независимые события, такие, что
   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$
   то вероятность события "произошло бесконечное число A_n" равна 1.

Доказательство. Заметим, что событие "произошло бесконечное число A_n" можно представить в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

Тогда

1. При $n \to \infty$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \right) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$$

2. Это равносильно тому, что

$$P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)} \right) = 0$$

$$P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)} \right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right)$$

Покажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right)$$

Поскольку вероятностная мера непрерывна, то

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) = \lim_{N \to \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} \overline{A_k} \right)$$

$A_1, \ldots, A_n$ независимы $\Rightarrow \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ независимы по лемме. Поэтому

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} \overline{A_k} \right) = \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)) \overset{(1)}{\leq}$$

$$\overset{(1)}{\leq} \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k) \right)$$

(1): Используем неравенство: $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \leq e^{-x}$ (Можно доказать, разложив экспоненту в степенной ряд).

При $N \to \infty$ получим

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right) \to 0$$

$\square$

Лемма. (Лемма о групировке)

Пусть имеется семейтво $\mathcal{A}_t,\ t \in I$ независимых σ-алгебр. Возьмем $I_1, I_2, \dots \subset T : I_k \cap I_m = \varnothing,\ \forall k \neq m$ и для $I \subset T$ введем $\sigma\{I\} = \sigma\{\mathcal{A}_t,\ t \in I\}$. Тогда $\sigma\{I_1\}, \sigma\{I_2\}, \dots$ - независимые σ-алгербы.