Введение в теорию вероятностей

Лектор: проф. Булинский Александр Вадимович

1 октября 2025 г.

Содержание

1 Лекция 2

Определение. Множество Ω называется множеством элементарных исходов. Множество $A \in 2^{\Omega}$ назывется событием.

Определение. Множество $\mathcal{A} \in 2^{\Omega}$ такое, что $\mathcal{A} \neq \varnothing$ называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Утверждение. (Следствия из определения алгебры)

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, так как для непустого $A \in \mathcal{A} : \bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$
2. $\varnothing \in \mathcal{A}$, так как $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{A}$
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
4. $A \cap B \in \mathcal{A}$, если $A, B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
6. $A \setminus B \in \mathcal{A}$, так как $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Определение. Множество $\mathcal{F} \in 2^{\Omega}$ такое, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$ называется σ-алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Замечание. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ - алгебра.

Замечание. Наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая M, обозначается $\sigma\{M\} = \bigcap\limits_{\alpha} g_{\alpha}$, где g_{α} - σ-алгебра, содержащая все элементы M.

Определение. Мерой на системе множеств U называется функция
$\mu : U \to [0, +\infty]$ такая, что

1. $\forall n : A_n \in U$

2.
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

3. $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$

4. Выполнено свойство счетной аддитивности (такая мера называется счетно-аддитивной):
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Замечание. Если U - σ-алгебра, то условие
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$
можно упустить.

Пример. (Мера Дирака)
Пусть $B \subset S$
$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, \ x \in B, \\ 0, \ x \notin B \end{cases}$$
Упражнение: доказать, что $\delta_x(.)$ является мерой на 2^S

Определение. Мера P на пространтсве $(\Omega, \mathcal{F})$ такая, что $P(\Omega) = 1$ называется вероятностью.

1.1 Дискретные вероятностные пространства

Определение. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in J}$ не более чем счетно, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, причем
$$P_n = P(\{\omega_n\}) \geq 0, \ \sum_{n \in J} P_n = 1$$
Пусть $A \subset \Omega$, определим вероятность так:
$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^{n} P_k$$
такое вероятностное пространство называется дискретным.

Упражнение. Доказать, что определенное выше P является вероятностью.

Определение. (Классическое определение вероятности)
Пусть $|\Omega| = N < \infty$ и положим $P_k = P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$. Тогда

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^{n} P_k = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Определение. Система M подмножеств множества S называется π-системой, если $A, B \in M \Rightarrow A \cap B \in M$

Определение. Сисмтема M подмножеств множества S называется λ-системой, если

1. $S \in M$
2. $A, B \in M \Rightarrow B \setminus A \in M$
3. $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A_n \nearrow A$, то $A \in M$.
   $(A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$

Теорема. Система $\mathcal{F}$ подмножеств S является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ одновременно π-система и λ-система.

Доказательство.

($\Rightarrow$): По следствию из определения алгебры: $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, значит, $\mathcal{F}$ является π-системой. Теперь проверим условия λ-системы:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по проеделению алгебры.
2. $A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B$, причем $B \setminus A = B \cap \bar{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F},\ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по свойству σ-алгебры $A \in \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$): Проверим определению σ-алгебры:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по первому свойству λ-системы.
2. $S \in \mathcal{F},\ A \subset S \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{F}$ выполнено по второму свойству λ-системы.
3. Пусть $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F},\ A_m := \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$ при этом

$$A_m = \bigcup_{n=1}^{m} B_n = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{m} \overline{B}_n\right)} \in \mathcal{F} \Rightarrow A_m \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

□

Теорема. Пусть M - π-система, D - λ-система и $M \subset D$. Тогда

$$\sigma\{M\} = \lambda\{M\} \subset D$$