

# Введение в теорию вероятностей

Лектор: проф. Булинский Александр Вадимович

18 ноября 2025 г.

# Содержание

<b>1 Лекция 1</b>	<b>3</b>
1.1 Алгебра и сигма-алгебра . . . . .	3
1.2 Вероятностная мера . . . . .	4
1.3 Дискретные вероятностные пространства . . . . .	4
1.4 Пи-системы и лямбда-системы . . . . .	5
<b>2 Лекция 2</b>	<b>6</b>
2.1 Простейшие свойства конечно-аддитивной вероятностной меры на алгебре . . . . .	6
2.2 Непрерывность сверху и снизу . . . . .	7
2.3 Условные вероятности . . . . .	9
<b>3 Лекция 3</b>	<b>10</b>
3.1 Независимые события . . . . .	10
<b>4 Лекция 4</b>	<b>16</b>
4.1 Функция распределения и плотность . . . . .	16
4.2 Случайные величины . . . . .	18
4.3 Распределение случайного элемента . . . . .	19
<b>5 Лекция 5</b>	<b>20</b>
5.1 Современная теорема Пуассона . . . . .	20
5.2 Расширенные случайные величины . . . . .	24
<b>6 Лекция 6</b>	<b>25</b>
6.1 Математическое ожидание . . . . .	25
6.2 Построение интеграла Лебега . . . . .	25
6.2.1 Первый этап . . . . .	25
6.2.2 Второй этап . . . . .	27
6.2.3 Третий этап . . . . .	29
<b>7 Лекция 7</b>	<b>30</b>
7.1 Дисперсия случайной величины . . . . .	32

# 1 Лекция 1

## 1.1 Алгебра и сигма-алгебра

**Определение.** Множество  $\Omega$  называется множеством элементарных исходов. Множество  $A \in 2^\Omega$  называется событием.

**Определение.** Множество  $\mathcal{A} \in 2^\Omega$  такое, что  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  называется алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

**Утверждение.** (Следствия из определения алгебры)

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ , так как для непустого  $A \in \mathcal{A}$ :  $\bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$
2.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , так как  $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$
3.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
4.  $A \cap B \in \mathcal{A}$ , если  $A, B \in \mathcal{A}$ , так как  $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$
5.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
6.  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ , так как  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

**Определение.** Множество  $\mathcal{F} \in 2^\Omega$  такое, что  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3.  $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Замечание.**  $\mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра  $\Rightarrow \mathcal{F}$  - алгебра.

**Замечание.** Наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $M$ , обозначается  $\sigma\{M\} = \bigcap_{\alpha} g_{\alpha}$ , где  $g_{\alpha}$  -  $\sigma$ -алгебра, содержащая все элементы  $M$ .

## 1.2 Вероятностная мера

**Определение.** Мерой на системе множеств  $U$  называется функция  $\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$  такая, что

1.  $\forall n : A_n \in U$

- 2.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

3.  $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

4. Выполнено свойство счетной аддитивности (такая мера называется счетно-аддитивной):

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

**Замечание.** Если  $U$  -  $\sigma$ -алгебра, то условие

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

можно упустить.

**Пример.** (Мера Дирака)

Пусть  $B \subset S$

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Упражнение: доказать, что  $\delta_x(\cdot)$  является мерой на  $2^S$

**Определение.** Мера  $P$  на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$  такая, что  $P(\Omega) = 1$  называется вероятностью.

## 1.3 Дискретные вероятностные пространства

**Определение.** Пусть  $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in J}$  не более чем счетно,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ , причем

$$P_n = P(\{\omega_n\}) \geq 0, \quad \sum_{n \in J} P_n = 1$$

Пусть  $A \subset \Omega$ , определим вероятность так:

$$P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A}^n P_k$$

такое вероятностное пространство называется дискретным.

**Упражнение.** Доказать, что определенное выше  $P$  является вероятностью.

**Определение.** (Классическое определение вероятности)

Пусть  $|\Omega| = N < \infty$  и положим  $P_k = P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$ . Тогда

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^n P_k = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

## 1.4 Пи-системы и лямбда-системы

**Определение.** Система  $M$  подмножеств множества  $S$  называется  $\pi$ -системой, если  $A, B \in M \Rightarrow A \cap B \in M$

**Определение.** Система  $M$  подмножеств множества  $S$  называется  $\lambda$ -системой, если

1.  $S \in M$
2.  $A, B \in M \Rightarrow B \setminus A \in M$
3.  $A_1, A_2, \dots \in M$  и  $A_n \nearrow A$ , то  $A \in M$ .

$$(A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

**Теорема.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $S$  является  $\sigma$ -алгеброй  $\Leftrightarrow \mathcal{F}$  одновременно  $\pi$ -система и  $\lambda$ -система.

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ): По следствию из определения алгебры:  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ , значит,  $\mathcal{F}$  является  $\pi$ -системой. Теперь проверим условия  $\lambda$ -системы:

1.  $S \in \mathcal{F}$  выполнено по определению алгебры.
2.  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $A \subset B$ , причем  $B \setminus A = B \cap \bar{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$ .
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ,  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$  по свойству  $\sigma$ -алгебры  $A \in \mathcal{F}$ .

( $\Leftarrow$ ): Проверим определению  $\sigma$ -алгебры:

1.  $S \in \mathcal{F}$  выполнено по первому свойству  $\lambda$ -системы.
2.  $S \in \mathcal{F}$ ,  $A \subset S \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{F}$  выполнено по второму свойству  $\lambda$ -системы.
3. Пусть  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ ,  $A_m := \bigcup_{n=1}^m B_n$  при этом

$$A_m = \bigcup_{n=1}^m B_n = \overline{\left( \bigcap_{n=1}^m \bar{B}_n \right)} \in \mathcal{F} \Rightarrow A_m \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

□

**Теорема.** Пусть  $M$  -  $\pi$ -система,  $D$  -  $\lambda$ -система и  $M \subset D$ . Тогда

$$\sigma\{M\} = \lambda\{M\} \subset D$$

## 2 Лекция 2

### 2.1 Простейшие свойства конечно-аддитивной вероятностной меры на алгебре

**Теорема.** Пусть  $P$  - конечно-аддитивная вероятностная мера на алгебре  $\mathcal{A}$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ . Пусть  $A, B \in \mathcal{A}$ , тогда

1.  $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3. Субаддитивность:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

4. Если  $P$  - вероятностная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ , то

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

*Доказательство.*

1.  $B = A \cup (B \setminus A)$  и  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
2.  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$  и  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$ ,  
 $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. По индукции. База  $n = 2$ :  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ , так как  $P(A \cup B) \geq 0$   
Пусть верно для  $n - 1$ , тогда

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cup A_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) + P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

4. будет позже

□

## 2.2 Непрерывность сверху и снизу

**Определение.** Конечная неотрицательная функция  $\mu$ , заданная на алгебре  $\mathcal{A}$ , называется непрерывной в  $\emptyset$ , если  $\forall A_n$ :

$$A_n \downarrow \emptyset \quad (A_{n+1} \subset A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset) \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow 0$$

**Определение.** Конечная неотрицательная функция  $\mu$  на алгебре  $\mathcal{A}$  называется

1. непрерывной сверху на  $A \in \mathcal{A}$ , если  $\forall A_n : A_n \downarrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ .

$$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_{n+1} \subset A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

2. непрерывной снизу на  $A \in \mathcal{A}$ , если  $\forall A_n : A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ .

$$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

**Лемма.** Пусть  $\mu$  - конечная неотрицательная конечно-аддитивная функция на алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mu$  непрерывно сверху и снизу на любом  $A \in \mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Докажем непрерывность сверху. Рассмотрим последовательность  $A_n \downarrow A \Rightarrow A_n \setminus A \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(A_n \setminus A) = \mu(A_n) - \mu(A) \rightarrow 0$ . Аналогично, рассмотрим  $A_n \uparrow A \Rightarrow A \setminus A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Теорема.** Пусть  $\mu$  - конечная неотрицательная функция на алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mu$  является счетно-аддитивной на  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда

1.  $\mu$  является конечно-аддитивной.
2.  $\mu$  непрерывна в  $\emptyset$ .

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ): Пусть  $\mu$  - счетно-аддитивная на  $\mathcal{A}$ . Рассмотрим  $A_n \downarrow \emptyset$ ,  $n \rightarrow \infty$  и введем  $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Эти слои не пересекаются и  $\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$ . Применим счетную аддитивность:

$$\mu(A_N) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$$

Этот ряд сходится, значит последовательность (остаточных рядов)

$$S_N = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \rightarrow 0$$

( $\Leftarrow$ ): (*тут пока что лажа*) Пусть  $A_i \neq A_j$ ,  $i \neq j$ . Введем  $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow C_n \downarrow \emptyset$ . При этом

$A_1 = C_1 \cup \dots \cup C_{n-1} \cup C_n$ , причем  $A_1 \in \mathcal{A}$  и  $C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathcal{A}$ . Таким образом,  $C_n \in \mathcal{A}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup C_n$$

Отсюда

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{n-1}) + \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k) + \mu(C_n)$$

при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu(C_n) \rightarrow 0$ , получим

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

□

**Теорема.** Пусть  $P, Q$  - меры на  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $P = Q$  на алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда  $P = Q$  на алгебре  $\sigma\{\mathcal{A}\}$ .

*Доказательство.* Воспользуемся [теоремой из прошлой лекции](#). Алгебра является  $\pi$ -системой, рассмотрим  $D = \{B \in \mathcal{F} : P(B) = Q(B)\}$ ,  $\mathcal{A} \subset D$ . Проверим, что  $D$  является  $\lambda$ -системой:

1.  $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1 \Rightarrow \Omega \in D$
2.  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,  $Q(B \setminus A) = Q(B) - Q(A)$ , причем  $P(A) = Q(A)$ ,  $P(B) = Q(B) \Rightarrow P(B \setminus A) = Q(B \setminus A) \Rightarrow B \setminus A \in D$ .  
 $A_n \in D$ ,  $A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . По свойству непрерывности  $P(A_n) \rightarrow P(A)$ ,  $Q(A_n) \rightarrow Q(A) \Rightarrow A \in D$ . Значит  $\sigma\{\mathcal{A}\} \subset D$ .

□

## 2.3 Условные вероятности

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство и  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(B) \neq 0$ . Тогда вероятностью события  $A$  при условии  $B$  называется

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Определение.** (Условная вероятность в классическом определении)

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  вероятностное пространство,  $|\Omega| = N < \infty$ ,  $P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$  и  $P(B) = \frac{|B|}{N}$ . Тогда

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{1}{N} \cdot |A \cap B|}{\frac{1}{N} \cdot |B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Пример.** Три раза бросается правильная монетка. Рассмотрим события:  
 $A$  - при первом броске выпал герб,  $B$  - при трех бросаниях выпало два герба.

$$\Omega = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

**Теорема.** (Формула полной вероятности)

Пусть  $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots$ ,  $B_k \in \mathcal{F}$ ,  $P(B_k) > 0$ . Тогда определены  $P(A|B_k)$ , причем для  $A \in \mathcal{F}$  верна формула

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

*Доказательство.*

$$P(A) = P\left(\bigcup_k (A \cap B_k)\right) = \sum_k P(A \cap B_k), \quad (A \cap B_k) \cap (A \cap B_m) = \emptyset, \quad k \neq m$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$$

отсюда

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

□

**Теорема.** (Формула Байеса)

Пусть  $P(A) \neq 0$ , тогда верна формула

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_k P(A|B_n)P(B_n)}$$

*Доказательство.* По определению условной вероятности и формуле полной вероятности, получим

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_k P(A|B_n)P(B_n)}$$

□

## 3 Лекция 3

### 3.1 Независимые события

**Определение.** Если  $P(A|B) = P(A)$ , то при  $P(B) \neq 0$  выполнено

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

В этом случае события  $A$  и  $B$  называются независимыми.

**Пример.** В колоде 36 карт. Выбираем одну карту из колоды. Рассмотрим события:  $A$  - вытянули карту масти треф,  $B$  - вытянули туз.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \\ P(A)P(B) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(A \cap B) \end{aligned}$$

значит события независимы.

**Определение.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - события. Они называются независимыми в совокупности, если  $\forall i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$ :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

**Определение.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - события. Они называются попарно независимыми, если  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

**Пример.** Рассмотрим  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  в рамках классического определения:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}, A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}, A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}, A_i \cap A_j = \{\omega_1\}$$

Тогда

$$P(A_i \cap A_j) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$$

но с другой стороны

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

**Определение.** Система  $\{A_t, t \in T\}$  состоит из независимых событий, если для любого конечного  $F \subset T$ ,  $F = \{t_1, \dots, t_n\}$ , события  $A_{t_1}, \dots, A_{t_n}$  независимы в совокупности.

**Лемма.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - независимые события. Рассмотрим  $B_1, \dots, B_n$  такие, что  $B_i = A_i$  или  $B_i = \overline{A_i}$ . Тогда  $B_1, \dots, B_n$  - независимые события.

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай  $B_j = \overline{B_j}$ ,  $B_i = A_i$ ,  $\forall i \neq j$ . Возьмем  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  и проверим, что

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_k}) \quad (*)$$

Рассмотрим случаи:

1.  $j \notin I$ . Тогда  $B_i = A_i$  и  $(*)$  выполнено.
2.  $j \in I \Rightarrow \exists m : j = i_m$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) &= P(A_{i_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i_m}} \cap \dots \cap A_{i_k}) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} P((A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_{m+i}} \cap A_{i_k}) \setminus (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_m} \cap A_{i_{m+1}} \cap \dots \cap A_{i_k})) \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_{m+i}} \cap A_{i_k}) - P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \\ &= (P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_{m-1}}) P(A_{i_{m+1}}) \dots P(A_{i_k})) - (P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})) \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_{m-1}}) P(A_{i_{m+1}}) \dots P(A_{i_k})(1 - P(A_{i_m})) = \\ &= P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_m}) \dots P(B_{i_k}) \end{aligned}$$

$$(1): A \cap \overline{C} = A \setminus (A \cap C)$$

$$(2): A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

(3): Выносим общий множитель за скобку.

□

**Теорема.** Пусть  $\varphi(n)$  - функция Эйлера,  $p_i$  -  $i$ -е простое число. Тогда

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

*Доказательство.* Введем  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ,  $P(\{i\}) = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Проведем следующий эксперимент: из чисел  $1, \dots, n$  наугад выбирается число. Рассмотрим событие  $A$  - выбрано число, взаимно простое с  $n$ . Тогда

$$P(A) = \frac{\varphi(n)}{n}$$

Рассмотрим события  $A_i$  - выбранное число делится на  $p_i$ . Отсюда

$$A_i = \{p_i, 2p_i, \dots, \frac{n}{p_i} \cdot p_i\} \Rightarrow P(A_i) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$$

Для любых  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ :

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{p_{i_1} \dots p_{i_k}, 2p_{i_1} \dots p_{i_k}, \dots, \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} \cdot p_{i_1} \dots p_{i_k}\}$$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{\frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}}{n} = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

Значит  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  независимы  $\Rightarrow$  по лемме  $\overline{A_{i_1}}, \dots, \overline{A_{i_k}}$  независимы. Тогда

$$P(A) = P(\overline{A_{p_1}} \cap \overline{A_{p_2}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_m}}) = P(\overline{A_{p_1}})P(\overline{A_{p_2}}) \dots P(\overline{A_{p_n}}) =$$

$$= (1 - P(A_{p_1}))(1 - P(A_{p_2})) \dots (1 - P(A_{p_m})) = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

значит

$$\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{\varphi(n)}{n} \Rightarrow \varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

□

**Определение.** Системы событий  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$  называются независимыми, если  $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  и  $\forall A_i \in \mathcal{G}_i : A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  независимы.

**Определение.** Пусть все  $\mathcal{G}_k$  содержат  $\Omega$  (например  $\mathcal{G}_k$  - алгебры), то это определение равносильно следующему:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n), \quad \forall A_i \in \mathcal{G}_i$$

**Утверждение.** Если все  $\mathcal{G}_k$  содержат  $\Omega$ , то эти определения эквивалентны.

*Доказательство.*

1. Первое определение влечет второе, поскольку в качестве  $i_1, \dots, i_k$  можно взять  $1, \dots, n$ .
2. Докажем, что второе определение влечет первое: Рассмотрим произвольный набор событий  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  и определим события  $B_1, \dots, B_n$ :

$$B_m = \begin{cases} A_m, & m \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ \Omega, & m \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

Тогда

$$B_1 \cap \dots \cap B_n = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap (\Omega \cap \dots \cap \Omega) = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$$

значит

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \\ &= P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \cdot (1 \dots 1) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \end{aligned}$$

□

**Теорема.** Пусть  $\pi$ -системы  $M_1, \dots, M_n$  (подмножества  $\Omega$  из  $\mathcal{F}$ ) независимы. Тогда независимы  $\sigma\{M_1\}, \dots, \sigma\{M_n\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим все события  $B_1$  такие, что выполнено:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n) \quad (*)$$

для произвольных  $B_2 \in M_2, \dots, B_n \in M_n$ . Назовем такие  $B_1$  системой  $D_1$ . Покажем, что  $D_1$  является  $\lambda$ -системой:

1.  $(\Omega \in D_1)$

$$\begin{aligned} P(\Omega \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) &= P(B_2 \cap B_n) = \\ &= P(B_2) \dots P(B_n) = P(\Omega)P(B_2) \dots P(B_n) \end{aligned}$$

Значит  $\Omega \in D_1$ .

2.  $(A_1, A_2 \in D_1, A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in D_1)$

Пусть  $B_i, B_j$  - события, для которых выполнено  $(*)$  и  $B_j \subset B_i$

$$\begin{aligned}
P((B_i \setminus B_j) \cap (B_2 \cap \dots \cap B_n)) &\stackrel{(1)}{=} \\
&\stackrel{(1)}{=} P((B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \setminus (B_j \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)) = \\
&= P(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) - P(B_j \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \\
&= P(B_i) \dots P(B_n) - P(B_j) \dots P(B_n) = \\
&= P(B_2) \dots P(B_n)(P(B_i) - P(B_j)) = \\
&= P(B_i \setminus B_j)P(B_2) \dots P(B_n)
\end{aligned}$$

$$(1): (B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$$

3.  $(A_1, A_2, \dots \in D, A_i \subset A_{i+1} \text{ и } A_i \uparrow A \Rightarrow A \in D_1)$

Пусть  $B_i \uparrow B$ . Тогда

$$(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \uparrow (B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$

Поскольку вероятностная мера непрерывна, то

$$P(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \rightarrow P(B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$

причем

$$P(B_i)P(B_2) \dots P(B_n) \rightarrow P(B)P(B_2) \dots P(B_n)$$

значит

$$P(B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B)P(B_2) \dots P(B_n)$$

а это означает, что  $B \in D_1$ .

Значит  $D_1$  - это  $\lambda$ -система. Тогда, поскольку  $M_1 \subset D_1$ , то  $\sigma\{M_1\} \subset D_1$ .

Аналогичными рассуждениями, получим, что  $\sigma\{M_2\} \subset D_2, \dots, \sigma\{M_n\} \subset D_n$ . Поскольку  $D_1, \dots, D_n$  независимы, то  $\sigma\{M_1\}, \dots, \sigma\{M_n\}$  независимы.  $\square$

**Лемма.** (Лемма Бореля-Кантелли)

1. Если события  $A_1, A_2, \dots$  таковы, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

то вероятность события "произошло бесконечное число  $A_n$ " равна 0.

2. Если  $A_1, A_2, \dots$  независимые события, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

то вероятность события "произошло бесконечное число  $A_n$ " равна 1.

*Доказательство.* Заметим, что событие "произошло бесконечное число  $A_n$ " можно представить в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

Тогда

1. При  $n \rightarrow \infty$

$$P \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \right) \leq P \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow 0$$

2. Это равносильно тому, что

$$P \left( \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} P \left( \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)} \right) &= P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \right) = \\ &= P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) \end{aligned}$$

Покажем, что  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$P \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right)$$

Поскольку вероятностная мера непрерывна, то

$$P \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P \left( \bigcup_{k=n}^N \overline{A_k} \right)$$

$A_1, \dots, A_n$  независимы  $\Rightarrow \overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$  независимы по лемме. Поэтому

$$\begin{aligned} P \left( \bigcup_{k=n}^N \overline{A_k} \right) &= \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = \exp \left( - \sum_{k=n}^N P(A_k) \right) \end{aligned}$$

(1): Используем неравенство:  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x}$  (Можно доказать, разложив экспоненту в степенной ряд).

При  $N \rightarrow \infty$  получим

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right) \rightarrow 0$$

□

**Лемма.** (Лемма о группировке)

Пусть имеется семейство  $\mathcal{A}_t, t \in T$  независимых  $\sigma$ -алгебр. Возьмем  $I_1, I_2, \dots \subset T : I_k \cap I_m = \emptyset, \forall k \neq m$  и для  $I \subset T$  введем  $\sigma\{I\} = \sigma\{\mathcal{A}_t, t \in I\}$ . Тогда  $\sigma\{I_1\}, \sigma\{I_2\}, \dots$  - независимые  $\sigma$ -алгебры.

## 4 Лекция 4

### 4.1 Функция распределения и плотность

**Определение.** Пусть  $(S, \tau)$  - топологическое пространство. Наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества называется Борелевской  $\sigma$ -алгеброй и обозначается  $\mathcal{B}(S)$

**Определение.** Пусть  $P$  - вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Функция

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

называется функцией распределения вероятностной меры.

**Теорема.** Функция распределения обладает следующими свойствами:

1.  $F$  не убывает
2.  $F$  непрерывна справа  $\forall x \in \mathbb{R}$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

*Доказательство.*

1.  $x \leq y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
2. Если  $x_n$  монотонно стремится в  $x$ , то  $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ , значит, по свойству непрерывности вероятностной меры,  $P((-\infty, x_n]) \rightarrow P((-\infty, x]) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$ .

3. и 4. напрямую следуют из непрерывности вероятностной меры.

□

**Теорема.** Если функция  $F$  обладается свойствами (1) – (4), то на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  существует единственная вероятностная мера, такая, что  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

Это задает взаимно-однозначное соответствие между вероятностными мерами и функциями распределения.

**Определение.** Пусть  $p(x)$  вещественная кусочно непрерывная функция. Если  $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0$  и интеграл Римана

$$\int_{\mathbb{R}} p(u) du = 1$$

то такая  $p(x)$  называется плотностью.

**Утверждение.**

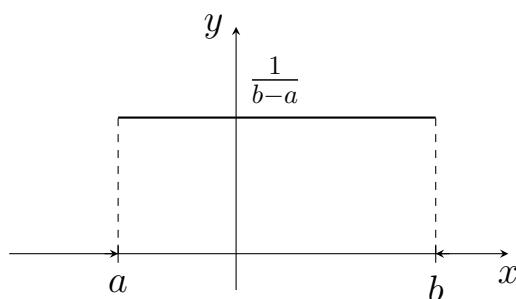
$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

является функцией распределения.

(для нее выполнены свойства (1) – (4))

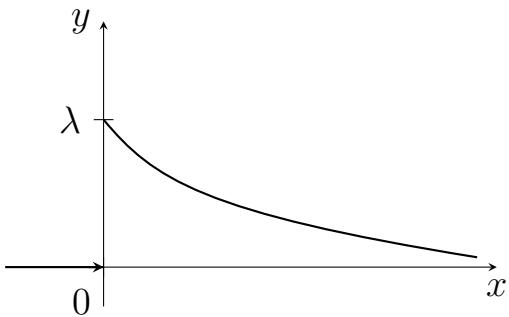
**Пример.** Равномерное распределение на  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$



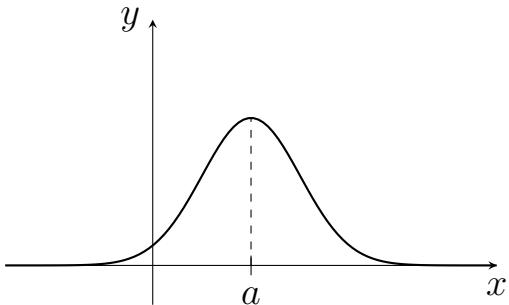
**Пример.** Экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



**Пример.** Гауссовское (нормальное) распределение

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



**Упражнение.** Доказать, что в каждом из этих случаев действительно выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) \, dx = 1$$

## 4.2 Случайные величины

**Определение.** Рассмотрим вероятностные пространства  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(S, \mathcal{B})$ . Отображение  $X : \Omega \rightarrow S$  называется  $\mathcal{F}|\mathcal{B}$  измеримым (или случайным элементом), если  $\forall B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . В этом случае, пишут  $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ .

**Определение.** Рассмотрим вероятностные пространства  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Если  $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , то  $X$  называется случайной величиной.

**Теорема.** Рассмотрим  $f : V \rightarrow S$  и систему  $M$  подмножеств  $S$ . Определим множество  $f^{-1}(M) = \{f^{-1}(B) : B \in M\}$  и рассмотрим  $\sigma\{f^{-1}(M)\}$ . Тогда

$$\sigma\{f^{-1}(M)\} = f^{-1}(\sigma\{M\})$$

*Доказательство.* Упражнение. □

**Следствие.** Пусть  $f : V \rightarrow S$  и  $\mathcal{B} = \sigma\{M\}$ . Пусть  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  ( $B \in \mathcal{B}$ ). Тогда  $f \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ .

**Следствие.** Пусть  $(V, \tau)$  и  $(S, \nu)$  - топологические пространства. Тогда  $f : V \rightarrow S$  непрерывна ( $f^{-1}(\nu) \subset \tau$ ). Тогда  $f \in \mathcal{B}(V)|\mathcal{B}(S)$

### 4.3 Распределение случайного элемента

**Определение.** Рассмотрим вероятностные пространства  $(\Omega, \mathcal{F})$  и  $(S, \mathcal{B})$ . Пусть  $X : \Omega \rightarrow S$ ,  $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ . Распределением случайного элемента  $X$  называется вероятностная мера  $P_X$  на  $(S, \mathcal{B})$  такая, что

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

для любого  $B \in \mathcal{B}$ .

**Упражнение.** Проверить, что  $P_X$  является вероятностной мерой.

**Определение.** Если случайный элемент  $X$  распределен по распределению  $Q$ , то пишут  $X \sim Q$

**Определение.** Случайные элементы  $X_k : \Omega \rightarrow S$ ,  $k = 1, \dots, n$  называются независимыми, если независимы  $\sigma\{X_1\}, \dots, \sigma\{X_n\}$ , где  $\sigma\{X_i\} = \{X_i^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ , что означает

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k)$$

**Определение.** (Биномиальное распределение)

$X \sim B_\varepsilon(n, p)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < P < 1$ , если

$$P(x = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

**Определение.** (Распределение Пуассона)

$X \sim Pois(\lambda)$ , если

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

**Теорема.** (Классическая теорема Пуассона)

Если  $n \cdot p(n) \rightarrow \lambda > 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то

$$C_n^k p^k (n)(1 - p(n))^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

*Доказательство.*

$$p^k(n) = \frac{(n \cdot p(n))^k}{n^k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{n^k}$$

Заметим, что

$$n \cdot p(n) \rightarrow \lambda \Rightarrow p(n) \rightarrow 0$$

Значит

$$(1 - p(n))^{n-k} = \frac{(1 - p(n))^n}{(1 - p(n))^k} \rightarrow (1 - p(n))^n$$

Таким образом

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k(n)(1-p(n))^{n-k} \rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} (1-p(n))^n$$

Нам нужно, чтобы

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} \cdot (1-p(n))^n \rightarrow e^{-\lambda}$$

$$(1-p(n))^n = (1-p(n))^{\frac{n \cdot p(n)}{p(n)}} = ((1-p(n))^{-\frac{1}{p(n)}})^{-n \cdot p(n)} \rightarrow e^{-\lambda}$$

Значит, остается доказать, что

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} \rightarrow 1$$

Действительно

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{(n-k+1)!}{n^k} \rightarrow 1$$

Объединив результаты, получим

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k(n)(1-p(n))^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

□

*тут пропущена теорема которую я не понял*

## 5 Лекция 5

### 5.1 Современная теорема Пуассона

**Теорема.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  - независимые случайные элементы,  $P(X_i = 1) = p_i$ ,  $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $Y \sim Pois(\lambda)$ , где  $\lambda = p_1 + \dots + p_n$ . Тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

Для доказательства этой теоремы потребуются две леммы

**Лемма.** Если  $Y_1, \dots, Y_n$  независимые случайные величины, причем  $Y_k \sim Pois(\lambda_k)$ .

Тогда

$$\sum_{k=1}^n Y_k \sim Pois\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$$

*Доказательство.* Сначала докажем, что  $Y_1 + Y_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$  при условии, что  $Y_1 \sim Pois(\lambda_1)$ ,  $Y_2 \sim Pois(\lambda_2)$ .

$$\begin{aligned} P(Y_1 + Y_2 = m) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i=0}^m P(Y_1 + Y_2 = m, Y_1 = i) = \\ &= \sum_{i=0}^m P(Y_1 = i, Y_2 = m - i) = \sum_{i=0}^m P(Y_1 = i)P(Y_2 = m - i) \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^m \left( \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{m-i} e^{-\lambda_2}}{(m-i)!} \right) = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{m!} \cdot \sum_{i=0}^m \left( \frac{m!}{i!(m-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} = \right) = \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{m!} (\lambda_1 + \lambda_2)^m \end{aligned}$$

(1): По формуле полной вероятности

(2): Домножили и поделили на  $m!$

Далее, индукция по  $n$ : база очевидна,  $Y_1 + \dots + Y_n = (Y_1 + \dots + Y_{n-1}) + Y_n$ .

По предположению индукции  $Y_1 + \dots + Y_{n-1} \sim Pois(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$ . Поэтому, если  $Y_1 + \dots + Y_{n-1}$  и  $Y_n$  независимы, то

$$\sum_{k=1}^n Y_k \sim Pois \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right)$$

Остается показать, что  $Y_1 + \dots + Y_{n-1}$  и  $Y_n$  независимы □

**Лемма.** Пусть  $X, Y$  случайные величины. Тогда  $\forall B \in \mathcal{B}$  выполнено:

$$|P(X \in B) - P(Y \in B)| \leq P(X \neq Y)$$

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение  $\Omega$  на две части:  $Y(\omega) \in B$  и  $Y(\omega) \notin B$ . Тогда по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(X \in B) - P(Y \in B) &= P(X \in B, Y \in B) + \\ &+ P(X \in B, Y \notin B) - P(Y \in B, X \in B) - P(Y \in B, X \notin B) \leq \\ &\leq P(X \in B, Y \notin B) \leq P(X \neq Y) \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что  $P(Y \in B) - P(X \in B) \leq P(X \neq Y)$ . Тогда

$$|P(X \in B) - P(Y \in B)| \leq P(X \neq Y)$$

□

Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Напомним ее условие

**Теорема.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  - независимые случайные элементы,  $P(X_i = 1) = p_i$ ,  $P(X_i = 0) = 1 - p_i$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $Y \sim Pois(\lambda)$ , где  $\lambda = p_1 + \dots + p_n$ . Тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |P(S_n \in B) - P(Y \in B)| &= |P(X_1 + \dots + X_n \in B) - P(Y \in B)| \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} P(X_1 + \dots + X_n \neq Y) \stackrel{(2)}{=} P(X_1 + \dots + X_n \neq Y_1 + \dots + Y_n) \stackrel{(3)}{\leq} \\ &\stackrel{(3)}{\leq} P\left(\bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\}\right) \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{k=1}^n P(X_k \neq Y_k) \end{aligned}$$

Пояснения:

(1): По лемме 2

(2): Так как

$$Y \sim Pois\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)$$

то по лемме 1  $P(Y \in B) = P(Y_1 + \dots + Y_n \in B)$ , где  $Y_1, \dots, Y_n$  независимы и  $Y_k \sim Pois(p_k)$

(3):  $X_1 + \dots + X_n \neq Y_1 + \dots + Y_n \subset \bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\}$  это можно показать, используя

тот факт, что  $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ .

(4): Субаддитивность.

Введем  $V_1, \dots, V_n$  независимые с  $Y_1, \dots, Y_n$  такие, что  $P(V_k = 0) = (1 - p_k)e^{p_k}$  и  $P(V_k = 1) = 1 - P(V_k = 0)$ , причем  $(1 - p_k)e^{p_k} \leq 1$ , так как  $e^{-p_k} \geq (1 - p_k)$ . Подберем  $U_1, \dots, U_n$  такие, что

$$U_k = \begin{cases} 1, & p_k \\ 0, & 1 - p_k \end{cases}$$

и  $\{U_k = 0\} = \{V_k = 0, Y_k = 0\}$ ,  $\{U_k = 1\} = \Omega \setminus \{U_k = 0\}$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} P(U_k = 0) &= P(V_k = 0, Y_k = 0) = P(V_k = 0)P(Y_k = 0) = \\ &= (1 - p_k)e^{p_k} \cdot \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1 - p_k \end{aligned}$$

а следовательно  $P(U_k = 1) = 1 - (1 - p_k) = p_k$ , значит, случайная величина  $X_k$  совпадает с  $U_k$  и нам достаточно оценить  $P(U_k \neq Y_k)$ .

$$P(U_k \neq Y_k) = P(U_k \neq Y_k, Y_k = 0) + P(U_k \neq Y_k, Y_k = 1) + P(U_k \neq Y_k, Y_k \geq 2)$$

Разберем каждое слагаемое:

1.

$$P(U_k \neq Y_k, Y_k = 0) = P(U_k = 1, Y_k = 0)$$

2. Вспомним, что  $\{U_k = 0\} = \{V_k = 0, Y_k = 0\}$ . Тогда

$$P(U_k \neq Y_k, Y_k = 1) = P(U_k = 0, Y_k = 1) = P(V_k = 0, Y_k = 0, Y_k = 1) = 0$$

3.

$$P(U_k \neq Y_k, Y_k \geq 2) = P(Y_k \geq 2)$$

Итого:

$$P(U_k \neq Y_k) = P(U_k = 1, Y_k = 0) + P(Y_k \geq 2)$$

Снова анализируем слагаемые:

1.

$$\begin{aligned} P(U_k = 1, Y_k = 0) &= P(Y_k = 0) - P(U_k = 0, Y_k = 0) = \\ &= P(Y_k = 0) - P(V_k = 0, Y_k = 0, Y_k = 0) = \\ &= P(Y_k = 0) - P(V_k = 0, Y_k = 0) = \\ &= e^{-p_k} - (1 - p_k)e^{p_k}e^{-p_k} = p_k + e^{-p_k} - 1 \end{aligned}$$

2.

$$P(Y_k \geq 2) = 1 - P(Y_k = 0) - P(Y_k = 1) = 1 - e^{-p_k} - p_k e^{-p_k}$$

Получили:

$$\begin{aligned} P(U_k \neq Y_k) &= p_k + e^{-p_k} - 1 + 1 - e^{-p_k} - p_k e^{-p_k} = \\ &= p_k - p_k e^{-p_k} = p_k(1 - e^{-p_k}) \leq p_k^2 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$|P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n P(U_k \neq Y_k) \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

□

В доказательстве мы воспользовались теоремой

**Теорема.** (Теорема Ломницкого-Улама)

Пусть  $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)$  - семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  можно построить семейство независимых случайных элементов  $X_t : \Omega \rightarrow S_t$ ,  $X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ , причем  $P_{X_t} = Q_t$ ,  $t \in T$ . Это означает, что всегда можно построить семейство независимых случайных элементов, имеющих заданное распределение.

## 5.2 Расширенные случайные величины

**Определение.** Рассмотрим  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Отображение  $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  назовем расширенной случайной величиной, если  $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ , где  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \{B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{+\infty, -\infty\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

**Утверждение.**  $X$  - случайная величина (расширенная)  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$

**Теорема.** Пусть  $X_1, X_2, \dots$  - случайные величины (расширенные). Тогда справедливы следующие утверждения

1.  $\sup_n X_n$ ,  $\inf_n X_n$  - случайные величины (расширенные)
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$  - случайные величины (расширенные).
3. Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , то он является случайной величиной (расширенной).

*Доказательство.* Будем доказывать пользуясь утверждением

1.  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\{\omega : \sup_n X_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$$\{\omega : \inf_n X_n \leq x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

2. Сведем к первому пункту

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \inf_n \sup_{k \leq n} X_k(\omega)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \sup_n \inf_{k \leq n} X_k(\omega)$$

3. Если существует предел, то он совпадает с верхним и нижним пределами, значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$$

а это, в свою очередь, является случайной величиной по пункту 2.

□

## 6 Лекция 6

### 6.1 Математическое ожидание

**Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathcal{F}|B(\mathbb{R})$ . Математическим ожиданием случайной величины  $X$  назовем интеграл Лебега от случайной величины по вероятностной мере

$$EX = \int_{\Omega} X d(P)$$

Таким образом, для определения понятия математического ожидания случайной величины, необходимо ввести понятие интеграла Лебега от случайной величины по вероятностной мере.

### 6.2 Построение интеграла Лебега

Построение интеграла Лебега происходит в три этапа:

1. Для простых случайных величин.
2. Для неотрицательных случайных величин.
3. Для произвольных случайных величин.

#### 6.2.1 Первый этап

**Определение.** Случайная величина  $X$  называется простой, если

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k}$$

где  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  образуют разбиение  $\Omega$ .

**Определение.** Если  $X$  - простая случайная величина, то

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k P(X = a_k)$$

**Утверждение.** Приведенное выше определение корректно.

*Доказательство.* Пусть  $B_1, \dots, B_m$  - другое разбиение  $\Omega$  и

$$X = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$$

необходимо показать, что

$$\sum_{k=1}^n a_k P(A_k) = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j)$$

Рассмотрим  $C_{kj} = A_k \cap B_j$  - новое разбиение  $\Omega$ . Тогда, по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) &= \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^m P(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k P(C_{kj}) = \\ &= \sum_{(k,j) \in J} a_k P(C_{kj}) = \sum_{(k,j) \in J} b_j P(C_{kj}) = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j) \end{aligned}$$

где  $J = \{(k, j) : C_{kj} \neq \emptyset\}$ . Если  $C_{kj} \neq \emptyset$ , то  $X(\omega) = a_k = b_j, \forall \omega \in C_{kj}$   $\square$

**Теорема.** Для простых случайных величин  $X$  и  $Y$  справедливы следующие утверждения:

1.  $E(X + Y) = EX + EY$ .
2.  $\forall c \in \mathbb{R} : E(cX) = c \cdot EX$ .
3. Если  $X \geq 0$ , то  $EX \geq 0$ .
4. Если  $X \leq Y$ , то  $EX \leq EY$ .

*Доказательство.* 1. Рассмотрим два случая

- (a) Для  $X$  и  $Y$  одно и то же разбиение  $A_1, \dots, A_n$  на  $\Omega$ . В этом случае,  $\forall \omega \in A_k : X + Y(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) = a_k + b_k$ . Отсюда

$$E(X+Y) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) P(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) + \sum_{k=1}^n b_k P(A_k) = EX + EY$$

- (b) Если разбиения  $A_1, \dots, A_n$  для  $X$  и  $B_1, \dots, B_m$  для  $Y$  оказались разными, то рассмотрим новое разбиение  $C_{kj} = A_k \cap B_j$ . Таким образом, свели к первому случаю.

2.  $\forall c \in \mathbb{R}$ :

$$E(cX) = \sum_{k=1}^n c \cdot a_k P(A_k) = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) = c \cdot EX$$

3. Если  $X \geq 0$ , то  $a_k \geq 0$ . Значит

$$EX = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) \geq 0$$

4. Пусть  $X \geq Y \Rightarrow X - Y \geq 0 \Rightarrow E(X - Y) \geq 0$ . Тогда из доказанных свойств:

$$E(X - Y) = E(X + (-1) \cdot Y) = EX + E((-1) \cdot Y) = EX - EY \geq 0$$

□

### 6.2.2 Второй этап

**Определение.** Пусть  $X \geq 0$  случайная величина. Тогда

$$EX = \sup\{EY : 0 \leq Y \leq X, Y \text{ -- простая}\}$$

**Лемма.** Пусть  $X \geq 0$  случайная величина. Тогда существует последовательность простых функций  $X_n \geq 0$  таких, что  $X_n \rightarrow X$  и  $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$

*Доказательство.* Возьмем последовательность

$$X_n = \min\{(2^{-n} [2^n X]), n\}$$

Заметим, что

$$X_n(\omega) = \begin{cases} k2^{-n}, & k2^{-n} \leq X(\omega) < (k+1)2^{-n}, k = 0, 1, \dots, n2^n - 1, \\ n, & X(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Тогда  $X_n$  не убывает и  $X_n \rightarrow X$ .

**Лемма.** Пусть  $X \geq 0$  случайная величина. Тогда для любой последовательности простых функций  $0 \leq X_n \leq X$ ,  $X_n \rightarrow X$  выполнено, что  $EX_n \rightarrow EX$ .

*Доказательство.*  $X_n$  - простые и  $X_n \leq X_{n+1} \Rightarrow EX_n \leq EX_{n+1}$ . При этом

$$EX = \sup\{EY : 0 \leq Y \leq X, Y \text{ -- простая}\}$$

значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = a \leq EX$$

Покажем, что выполнено и обратное неравенство. Для этого докажем, что для любой простой функции  $0 \leq Y \leq X$  выполнено, что  $EY \leq a$ . Если  $Y \equiv 0$ , то утверждение верно. Пусть

$$Y = \begin{cases} 0 = b_0 < b_1 < \dots < b_k \\ p_0, p_1, \dots, p_k \end{cases}$$

Тогда

$$EY = \sum_{j=1}^j b_j p_j$$

Введем  $Y_n = (1 - \varepsilon)Y \cdot I\{(1 - \varepsilon)Y \leq X\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Из определения  $Y_n \leq X_n \Rightarrow EY_n \leq EX_n \leq a$ . Пусть

$$B_j = \{\omega : Y(\omega) = b_j\}, C_{jn} = \{(1 - \varepsilon)Y \leq X_n\}$$

Тогда  $Y(\omega) = (1 - \varepsilon)b_j$ , если  $\omega \in B_j \cap C_{jn}$ . Получаем, что

$$EY_n = \sum_j (1 - \varepsilon)b_j P(C_{jn})$$

При этом, по свойству непрерывности вероятностной меры

$$P(C_{jn}) \rightarrow P(B_j)$$

следовательно

$$EY_n = \sum_j (1 - \varepsilon)b_j P(C_{jn}) \rightarrow (1 - \varepsilon) \sum_j b_j P(B_j) = (1 - \varepsilon)EY$$

Получили, что  $\forall \varepsilon \in (0, 1) :$

$$(1 - \varepsilon)EY \leq a$$

тогда, устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим для любой  $Y : EY \leq a \Rightarrow EX \leq a$ . Из полученных неравенств, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX$$

□

**Лемма.** Пусть  $X, Y \geq 0$  случайные величины. Тогда

1.  $E(X + Y) = EX + EY$ .
2.  $\forall c \geq 0 : E(cX) = c \cdot EX$

*Доказательство.*

1. Возьмем неубывающие последовательности простых функций  $X_n \rightarrow X$ ,  $Y_n \rightarrow Y$ . Тогда  $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$  и по лемме 2:

$$E(X_n + Y_n) = EX_n + EY_n \rightarrow E(X + Y)$$

2. Возьмем неубывающую последовательность простых функций  $X_n \rightarrow X$ . Тогда  $cX_n \rightarrow cX$  и  $E(cX_n) \rightarrow E(cX)$  и по лемме 2:

$$E(cX_n) = c \cdot E(X_n) \rightarrow c \cdot E(X)$$

□

### 6.2.3 Третий этап

**Замечание.** Заметим, что любую функцию  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  можно представить в виде  $X = X^+ - X^-$ , где

$$X^+ = \max\{X, 0\} = X \cdot I\{X \geq 0\}, \quad X^- = -\min\{X, 0\} = -X \cdot I\{X \leq 0\}$$

**Определение.** Пусть  $X$  - произвольная случайная величина. Тогда

$$EX = EX^+ - EX^-$$

по определению положим, что  $EX$  не существует, если  $EX^+ = +\infty$  и  $EX^- = +\infty$  одновременно. Также по определению для любой константы  $+\infty - c = +\infty$  и  $c - \infty = -\infty$

**Определение.** Если  $EX \in \mathbb{R}$ , то случайная величина  $X$  называется интегрируемой по Лебегу и обозначается  $X \in \mathcal{L}^1$

**Теорема.** Для произвольной случайной величины справедливы следующие утверждения:

1. Если  $Y \leq X$  и  $X \in \mathcal{L}^1$ , то  $Y \in \mathcal{L}^1$ .
2. Если  $X, Y \in \mathcal{L}^1$  и  $Y \leq X$ , то  $EY \leq EX$ .
3. Если  $X \in \mathcal{L}^1$ , то  $|EX| \leq E|X|$ .
4.  $\mathcal{L}^1$  - линейное пространство.
5.  $E$  - линейный функционал.

## 7 Лекция 7

**Теорема.** (Теорема о монотонной сходимости)

Пусть  $X_n \geq 0$  случайные величины и  $X_n \nearrow X$ . Тогда  $EX_n \rightarrow EX$ .

*Доказательство.* Пусть

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y_{n,1} \nearrow X_1 \\ 0 &\leq Y_{n,2} \nearrow X_2 \\ &\vdots \\ 0 &\leq Y_{n,k} \nearrow X_k \end{aligned}$$

где  $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_k \rightarrow X$ ,  $Y_{n,i}$  - простые. Рассмотрим

$$\begin{aligned} Y_{1,1} &\leq Y_{2,1} \leq \dots \leq Y_{k,1} \leq \dots \leq Y_{n,1} \nearrow X_1 \\ &\vdots \\ Y_{1,k} &\leq Y_{2,k} \leq \dots \leq Y_{k,k} \leq \dots \leq Y_{n,k} \nearrow X_k \end{aligned}$$

и определим

$$0 \leq Z_k := \max_{1 \leq i,j \leq k} Y_{i,j} \nearrow Z$$

Таким образом

$$0 \leq Y_{n,k} \leq Z_k \leq X_k \leq X \quad (1)$$

После предельного перехода при  $k \rightarrow \infty$ , получим

$$0 \leq X_n \leq Z \leq X$$

После предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$0 \leq Z_n \nearrow X \quad (2)$$

Так как  $X_n \leq X$ , то  $EX_n \leq EX$ , а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq EX$$

Также из (1) и (2) имеем:

$$EZ_n \leq EX_n$$

и как следствие

$$EX \leq \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n$$

□

**Утверждение.** Рассмотрим вероятностные пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $(S, \mathcal{B}, P_X)$ ,  $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$ , где  $\forall B \in \mathcal{B} : P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ , т.е  $P_X$  - мера на  $(S, \mathcal{B})$ , индуцированная  $X$ . Также рассмотрим вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  и  $h \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Теперь рассмотрим композицию отображений  $h(X(\omega)) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Тогда оба интеграла существуют или не существуют одновременно, и если существуют, то равны:

$$Eh(X) = \int_{\Omega} h(X(\omega))P(d\omega) = \int_S h(x)P_X(dx)$$

*Доказательство.* Сначала пусть  $h$  - индикатор:

$$h(x) = I_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

$$\int_S h(x)P_X(dx) = 1 \cdot P_X(B) = P(X \in B)$$

$$\int_{\Omega} h(X(\omega))P(d\omega) = 1 \cdot P(X^{-1}(B))$$

Тогда формула будет верна для линейной комбинации индикаторов, а значит для простых  $h \geq 0$ . По теореме о монотонной сходимости, формула будет верна для произвольной

$$h = h^+ - h^-$$

□

**Замечание.** Пусть

$$X = \begin{cases} x_1, & x_2, \dots \\ p_1, & p_2, \dots \end{cases}$$

$$Eh(x) = \sum_{h(x_n) \geq 0} h(x_n)P(X = x_n) + \sum_{h(x_n) < 0} h(x_n)P(X = x_n)$$

То есть конечное  $Eh(x)$  существует, если

$$\sum_n |h(x_n)| \cdot P(X = x_n) < \infty$$

**Теорема.** (Неравенство Маркова)

Пусть  $f : R_+ \rightarrow R_+$ ,  $f$  - не убывает. Тогда для любой случайной величины  $X$  и  $\forall t \geq 0$ :

$$Ef(|X|) \geq f(t) \cdot P(|X| \geq t)$$

*Доказательство.*

$$f(|X|) \geq f(|X|) \cdot I\{|X| \geq t\} \geq f(t) \cdot I\{|X| \geq t\}$$

Значит

$$Ef(|X|) \geq E(f(t) \cdot I\{|X| \geq t\}) = f(t) \cdot E(I\{|X| \geq t\}) = f(t) \cdot P(|X| \geq t)$$

□

## 7.1 Дисперсия случайной величины

**Определение.** Рассмотрим случайную величину  $X$ . Пусть  $X \in \mathcal{L}^1$ ,  $(X - EX)^2 \in \mathcal{L}^1$ . Тогда дисперсией случайной величины  $X$  называется выражение

$$\text{var } X = E(X - EX)^2$$

**Замечание.**  $(X - EX)^2 = X^2 - 2XEX + (EX)^2 \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow X \in \mathcal{L}^2$

**Замечание.** Если  $X$  - дискретная случайная величина, то

$$\text{var } X = \sum_n (X_n - EX)^2 P(X = x_n)$$

**Теорема.** Пусть  $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2$ . Тогда

$$\text{var} \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{var } X_k$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) &= E \left( \sum_{k=1}^n X_k - E \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) \right)^2 \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} E \left( \sum_{k=1}^n (X_k - EX_K) \right)^2 \stackrel{(2)}{=} E \left( \sum_{i,j=1}^n (X_i - EX_i)(X_j - EX_j) \right) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i,j=1}^n E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) \stackrel{(3)}{=} \end{aligned}$$

(1): По линейности математического ожидания:

$$E \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) = \sum_{k=1}^n EX_k$$

(2): Поскольку

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = (a_1 + \cdots + a_n)(a_1 + \cdots + a_n)$$

(3): Поскольку  $U, V \in \mathcal{L}^1$ , то из  $0 \leq |U \cdot V| \leq \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$  получаем  $U \cdot V \in \mathcal{L}^1$   $\square$