

Введение в теорию вероятностей

Лектор: проф. Булинский Александр Вадимович

18 ноября 2025 г.

Содержание

1	Лекция 1	3
1.1	Алгебра и сигма-алгебра	3
1.2	Вероятностная мера	4
1.3	Дискретные вероятностные пространства	4
1.4	Пи-системы и лямбда-системы	5
2	Лекция 2	6
2.1	Простейшие свойства конечно-аддитивной вероятностной меры на алгебре	6
2.2	Непрерывность сверху и снизу	7
2.3	Условные вероятности	9
3	Лекция 3	10
3.1	Независимые события	10
4	Лекция 4	16
4.1	Функция распределения и плотность	16
4.2	Случайные величины	18
4.3	Распределение случайного элемента	19
5	Лекция 5	20
5.1	Современная теорема Пуассона	20
5.2	Расширенные случайные величины	24
6	Лекция 6	25
6.1	Математическое ожидание	25
6.2	Построение интеграла Лебега	25
6.2.1	Первый этап	25
6.2.2	Второй этап	27
6.2.3	Третий этап	29
7	Лекция 7	30
7.1	Дисперсия случайной величины	32

1 Лекция 1

1.1 Алгебра и сигма-алгебра

Определение. Множество Ω называется множеством элементарных исходов. Множество $A \in 2^\Omega$ называется событием.

Определение. Множество $\mathcal{A} \in 2^\Omega$ такое, что $\mathcal{A} \neq \emptyset$ называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Утверждение. (Следствия из определения алгебры)

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, так как для непустого $A \in \mathcal{A} : \bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$
2. $\emptyset \in \mathcal{A}$, так как $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
4. $A \cap B \in \mathcal{A}$, если $A, B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
6. $A \setminus B \in \mathcal{A}$, так как $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Определение. Множество $\mathcal{F} \in 2^\Omega$ такое, что $\mathcal{F} \neq \emptyset$ называется σ -алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Замечание. \mathcal{F} - σ -алгебра $\Rightarrow \mathcal{F}$ - алгебра.

Замечание. Наименьшая по включению σ -алгебра, содержащая M , обозначается $\sigma\{M\} = \bigcap_{\alpha} g_{\alpha}$, где g_{α} - σ -алгебра, содержащая все элементы M .

1.2 Вероятностная мера

Определение. Мерой на системе множеств U называется функция $\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$ такая, что

1. $\forall n : A_n \in U$

2.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

3. $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

4. Выполнено свойство счетной аддитивности (такая мера называется счетно-аддитивной):

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Замечание. Если U - σ -алгебра, то условие

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

можно упустить.

Пример. (Мера Дирака)

Пусть $B \subset S$

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Упражнение: доказать, что $\delta_x(\cdot)$ является мерой на 2^S

Определение. Мера P на пространстве (Ω, \mathcal{F}) такая, что $P(\Omega) = 1$ называется вероятностью.

1.3 Дискретные вероятностные пространства

Определение. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in J}$ не более чем счетно, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, причем

$$P_n = P(\{\omega_n\}) \geq 0, \quad \sum_{n \in J} P_n = 1$$

Пусть $A \subset \Omega$, определим вероятность так:

$$P(A) = \sum_{k: \omega_k \in A}^n P_k$$

такое вероятностное пространство называется дискретным.

Упражнение. Доказать, что определенное выше P является вероятностью.

Определение. (Классическое определение вероятности)

Пусть $|\Omega| = N < \infty$ и положим $P_k = P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$. Тогда

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^n P_k = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.4 Пи-системы и лямбда-системы

Определение. Система M подмножеств множества S называется π -системой, если $A, B \in M \Rightarrow A \cap B \in M$

Определение. Система M подмножеств множества S называется λ -системой, если

1. $S \in M$
2. $A, B \in M \Rightarrow B \setminus A \in M$
3. $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A_n \nearrow A$, то $A \in M$.
 $(A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

Теорема. Система \mathcal{F} подмножеств S является σ -алгеброй $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ одновременно π -система и λ -система.

Доказательство.

(\Rightarrow): По следствию из определения алгебры: $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, значит, \mathcal{F} является π -системой. Теперь проверим условия λ -системы:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по определению алгебры.
2. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, причем $B \setminus A = B \cap \bar{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по свойству σ -алгебры $A \in \mathcal{F}$.

(\Leftarrow): Проверим определение σ -алгебры:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по первому свойству λ -системы.
2. $S \in \mathcal{F}$, $A \subset S \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{F}$ выполнено по второму свойству λ -системы.
3. Пусть $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$, $A_m := \bigcup_{n=1}^m B_n$ при этом

$$A_m = \bigcup_{n=1}^m B_n = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^m \bar{B}_n \right)} \in \mathcal{F} \Rightarrow A_m \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

□

Теорема. Пусть M - π -система, D - λ -система и $M \subset D$. Тогда

$$\sigma\{M\} = \lambda\{M\} \subset D$$

2 Лекция 2

2.1 Простейшие свойства конечно-аддитивной вероятностной меры на алгебре

Теорема. Пусть P - конечно-аддитивная вероятностная мера на алгебре \mathcal{A} , $P(\Omega) = 1$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A \cap B = \emptyset$. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, тогда

1. $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3. Субаддитивность:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

4. Если P - вероятностная мера на σ -алгебре \mathcal{F} , то

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Доказательство.

1. $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
2. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$,
 $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. По индукции. База $n = 2$:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$, так как $P(A \cap B) \geq 0$
 Пусть верно для $n - 1$, тогда

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cup A_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) + P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

4. *будет позже*

□

2.2 Непрерывность сверху и снизу

Определение. Конечная неотрицательная функция μ , заданная на алгебре \mathcal{A} , называется непрерывной в \emptyset , если $\forall A_n$:

$$A_n \downarrow \emptyset \ (A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset) \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow 0$$

Определение. Конечная неотрицательная функция μ на алгебре \mathcal{A} называется

1. непрерывной сверху на $A \in \mathcal{A}$, если $\forall A_n : A_n \downarrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

$$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

2. непрерывной снизу на $A \in \mathcal{A}$, если $\forall A_n : A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

$$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

Лемма. Пусть μ - конечная неотрицательная конечно-аддитивная функция на алгебре \mathcal{A} . Тогда μ непрерывно сверху и снизу на любом $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Докажем непрерывность сверху. Рассмотрим последовательность $A_n \downarrow A \Rightarrow A_n \setminus A \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(A_n \setminus A) = \mu(A_n) - \mu(A) \rightarrow 0$. Аналогично, рассмотрим $A_n \uparrow A \Rightarrow A \setminus A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \rightarrow 0$. \square

Теорема. Пусть μ - конечная неотрицательная функция на алгебре \mathcal{A} . Тогда μ является счетно-аддитивной на \mathcal{A} тогда и только тогда, когда

1. μ является конечно-аддитивной.
2. μ непрерывна в \emptyset .

Доказательство.

(\Rightarrow): Пусть μ - счетно-аддитивная на \mathcal{A} . Рассмотрим $A_n \downarrow \emptyset$, $n \rightarrow \infty$ и введем $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Эти слои не пересекаются и $\bigcup_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$.

Применим счетную аддитивность:

$$\mu(A_N) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$$

Этот ряд сходится, значит последовательность (остаточных рядов)

$$S_N = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \rightarrow 0$$

(\Leftarrow): (тут пока что лажа) Пусть $A_i \neq A_j$, $i \neq j$. Введем $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow C_n \downarrow$

\emptyset . При этом

$A_1 = C_1 \cup \dots \cup C_{n-1} \cup C_n$, причем $A_1 \in \mathcal{A}$ и $C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathcal{A}$. Таким образом, $C_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup C_n$$

Отсюда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{n-1}) + \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k) + \mu(C_n)$$

при $n \rightarrow \infty$, $\mu(C_n) \rightarrow 0$, получим

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

□

Теорема. Пусть P, Q - меры на (Ω, \mathcal{F}) и $P = Q$ на алгебре \mathcal{A} . Тогда $P = Q$ на алгебре $\sigma\{\mathcal{A}\}$.

Доказательство. Воспользуемся [теоремой из прошлой лекции](#). Алгебра является π -системой, рассмотрим $D = \{B \in \mathcal{F} : P(B) = Q(B)\}$, $\mathcal{A} \subset D$. Проверим, что D является λ -системой:

1. $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1 \Rightarrow \Omega \in D$
2. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, $Q(B \setminus A) = Q(B) - Q(A)$, причем $P(A) = Q(A)$, $P(B) = Q(B) \Rightarrow P(B \setminus A) = Q(B \setminus A) \Rightarrow B \setminus A \in D$.
 $A_n \in D$, $A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. По свойству непрерывности $P(A_n) \rightarrow P(A)$, $Q(A_n) \rightarrow Q(A) \Rightarrow A \in D$. Значит $\sigma\{\mathcal{A}\} \subset D$.

□

2.3 Условные вероятности

Определение. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) \neq 0$. Тогда вероятностью события A при условии B называется

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение. (Условная вероятность в классическом определении)

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) вероятностное пространство, $|\Omega| = N < \infty$, $P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$ и $P(B) = \frac{|B|}{N}$. Тогда

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{1}{N} \cdot |A \cap B|}{\frac{1}{N} \cdot |B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример. Три раза бросается правильная монетка. Рассмотрим события:

A - при первом броске выпал герб, B - при трех бросаниях выпало два герба.

$$\Omega = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

Теорема. (Формула полной вероятности)

Пусть $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots$, $B_k \in \mathcal{F}$, $P(B_k) > 0$. Тогда определены $P(A|B_k)$, причем для $A \in \mathcal{F}$ верна формула

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

Доказательство.

$$P(A) = P\left(\bigcup_k (A \cap B_k)\right) = \sum_k P(A \cap B_k), \quad (A \cap B_k) \cap (A \cap B_m) = \emptyset, \quad k \neq m$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$$

отсюда

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

□

Теорема. (Формула Байеса)

Пусть $P(A) \neq 0$, тогда верна формула

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_k P(A|B_n)P(B_n)}$$

Доказательство. По определению условной вероятности и формуле полной вероятности, получим

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_k P(A|B_n)P(B_n)}$$

□

3 Лекция 3

3.1 Независимые события

Определение. Если $P(A|B) = P(A)$, то при $P(B) \neq 0$ выполнено

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

В этом случае события A и B называются независимыми.

Пример. В колоде 36 карт. Выбираем одну карту из колоды. Рассмотрим события: A - вытянули карту масти треф, B - вытянули туза.

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$$

значит события независимы.

Определение. Пусть A_1, \dots, A_n - события. Они называются независимыми в совокупности, если $\forall i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Определение. Пусть A_1, \dots, A_n - события. Они называются попарно независимыми, если $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Пример. Рассмотрим (Ω, \mathcal{F}, P) в рамках классического определения:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}, A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}, A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}, A_i \cap A_j = \{\omega_1\}$$

Тогда

$$P(A_i \cap A_j) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$$

но с другой стороны

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Определение. Система $\{A_t, t \in T\}$ состоит из независимых событий, если для любого конечного $F \subset T$, $F = \{t_1, \dots, t_n\}$, события A_{t_1}, \dots, A_{t_n} независимы в совокупности.

Лемма. Пусть A_1, \dots, A_n - независимые события. Рассмотрим B_1, \dots, B_n такие, что $B_i = A_i$ или $B_i = \overline{A_i}$. Тогда B_1, \dots, B_n - независимые события.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $B_j = \overline{B_j}$, $B_i = A_i$, $\forall i \neq j$. Возьмем $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ и проверим, что

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_k}) \quad (*)$$

Рассмотрим случаи:

1. $j \notin I$. Тогда $B_i = A_i$ и $(*)$ выполнено.
2. $j \in I \Rightarrow \exists m : j = i_m$. Тогда

$$\begin{aligned} P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) &= P(A_{i_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i_m}} \cap \dots \cap A_{i_k}) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} P((A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_{m+1}} \cap \dots \cap A_{i_k}) \setminus (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_m} \cap A_{i_{m+1}} \cap \dots \cap A_{i_k})) \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{i_{m+1}} \cap \dots \cap A_{i_k}) - P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \\ &= (P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_{m-1}}) P(A_{i_{m+1}}) \dots P(A_{i_k})) - (P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})) \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_{m-1}}) P(A_{i_{m+1}}) \dots P(A_{i_k}) (1 - P(A_{i_m})) = \\ &= P(B_{i_1}) \dots P(B_{i_m}) \dots P(B_{i_k}) \end{aligned}$$

$$(1): A \cap \overline{C} = A \setminus (A \cap C)$$

$$(2): A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$(3): \text{Выносим общий множитель за скобку.}$$

□

Теорема. Пусть $\varphi(n)$ - функция Эйлера, p_i - i -е простое число. Тогда

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Доказательство. Введем $\Omega = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P(\{i\}) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$. Проведем следующий эксперимент: из чисел $1, \dots, n$ наугад выбирается число. Рассмотрим событие A - выбрано число, взаимно простое с n . Тогда

$$P(A) = \frac{\varphi(n)}{n}$$

Рассмотрим события A_i - выбранное число делится на p_i . Отсюда

$$A_i = \{p_i, 2p_i, \dots, \frac{n}{p_i} \cdot p_i\} \Rightarrow P(A_i) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$$

Для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{p_{i_1} \dots p_{i_k}, 2p_{i_1} \dots p_{i_k}, \dots, \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} \cdot p_{i_1} \dots p_{i_k}\}$$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{\frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}}{n} = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

Значит A_{i_1}, \dots, A_{i_k} независимы \Rightarrow по [лемме](#) $\overline{A_{i_1}}, \dots, \overline{A_{i_k}}$ независимы. Тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{A_{p_1}} \cap \overline{A_{p_2}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_m}}) = P(\overline{A_{p_1}})P(\overline{A_{p_2}}) \dots P(\overline{A_{p_m}}) = \\ &= (1 - P(A_{p_1}))(1 - P(A_{p_2})) \dots (1 - P(A_{p_m})) = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \end{aligned}$$

значит

$$\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{\varphi(n)}{n} \Rightarrow \varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

□

Определение. Системы событий $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ называются независимыми, если $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ и $\forall A_i \in \mathcal{G}_i : A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ независимы.

Определение. Пусть все \mathcal{G}_k содержат Ω (например \mathcal{G}_k - алгебры), то это определение равносильно следующему:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n), \quad \forall A_i \in \mathcal{G}_i$$

Утверждение. Если все \mathcal{G}_k содержат Ω , то эти определения эквивалентны.

Доказательство.

1. Первое определение влечет второе, поскольку в качестве i_1, \dots, i_k можно взять $1, \dots, n$.
2. Докажем, что второе определение влечет первое: Рассмотрим произвольный набор событий A_{i_1}, \dots, A_{i_k} и определим события B_1, \dots, B_n :

$$B_m = \begin{cases} A_m, & m \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ \Omega, & m \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

Тогда

$$B_1 \cap \dots \cap B_n = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap (\Omega \cap \dots \cap \Omega) = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$$

значит

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \\ &= P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \cdot (1 \dots 1) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть π -системы M_1, \dots, M_n (подмножества Ω из \mathcal{F}) независимы. Тогда независимы $\sigma\{M_1\}, \dots, \sigma\{M_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим все события B_1 такие, что выполнено:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n) \quad (*)$$

для произвольных $B_2 \in M_2, \dots, B_n \in M_n$. Назовем такие B_1 системой D_1 . Покажем, что D_1 является λ -системой:

1. $(\Omega \in D_1)$

$$\begin{aligned} P(\Omega \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) &= P(B_2 \cap B_n) = \\ &= P(B_2) \dots P(B_n) = P(\Omega)P(B_2) \dots P(B_n) \end{aligned}$$

Значит $\Omega \in D_1$.

2. $(A_1, A_2 \in D_1, A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in D_1)$

Пусть B_i, B_j - события, для которых выполнено $(*)$ и $B_j \subset B_i$

$$\begin{aligned}
& P((B_i \setminus B_j) \cap (B_2 \cap \dots \cap B_n)) \stackrel{(1)}{=} \\
& \stackrel{(1)}{=} P((B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \setminus (B_j \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)) = \\
& = P(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) - P(B_j \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \\
& = P(B_i) \dots P(B_n) - P(B_j) \dots P(B_n) = \\
& = P(B_2) \dots P(B_n)(P(B_i) - P(B_j)) = \\
& = P(B_i \setminus B_j)P(B_2) \dots P(B_n)
\end{aligned}$$

$$(1): (B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$$

3. $(A_1, A_2 \dots \in D, A_i \subset A_{i+1} \text{ и } A_i \uparrow A \Rightarrow A \in D_1)$

Пусть $B_i \uparrow B$. Тогда

$$(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \uparrow (B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$

Поскольку вероятностная мера непрерывна, то

$$P(B_i \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \rightarrow P(B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$$

причем

$$P(B_i)P(B_2) \dots P(B_n) \rightarrow P(B)P(B_2) \dots P(B_n)$$

значит

$$P(B \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B)P(B_2) \dots P(B_n)$$

а это означает, что $B \in D_1$.

Значит D_1 - это λ -система. Тогда, поскольку $M_1 \subset D_1$, то $\sigma\{M_1\} \subset D_1$.

Аналогичными рассуждениями, получим, что $\sigma\{M_2\} \subset D_2, \dots, \sigma\{M_n\} \subset D_n$.

Поскольку D_1, \dots, D_n независимы, то $\sigma\{M_1\}, \dots, \sigma\{M_n\}$ независимы. \square

Лемма. (Лемма Бореля-Кантелли)

1. Если события A_1, A_2, \dots таковы, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

то вероятность события "произошло бесконечное число A_n " равна 0.

2. Если A_1, A_2, \dots независимые события, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

то вероятность события "произошло бесконечное число A_n " равна 1.

Доказательство. Заметим, что событие "произошло бесконечное число A_n " можно представить в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

Тогда

1. При $n \rightarrow \infty$

$$P \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \right) \leq P \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow 0$$

2. Это равносильно тому, что

$$P \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} P \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)} \right) &= P \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \right) = \\ &= P \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) \end{aligned}$$

Покажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right)$$

Поскольку вероятностная мера непрерывна, то

$$P \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P \left(\bigcup_{k=n}^N \overline{A_k} \right)$$

A_1, \dots, A_n независимы $\Rightarrow \overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ независимы по лемме. Поэтому

$$\begin{aligned} P \left(\bigcup_{k=n}^N \overline{A_k} \right) &= \prod_{k=n}^N P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = \exp \left(- \sum_{k=n}^N P(A_k) \right) \end{aligned}$$

(1): Используем неравенство: $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x}$ (Можно доказать, разложив экспоненту в степенной ряд).

При $N \rightarrow \infty$ получим

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right) \rightarrow 0$$

□

Лемма. (Лемма о группировке)

Пусть имеется семейство $\mathcal{A}_t, t \in T$ независимых σ -алгебр. Возьмем $I_1, I_2, \dots \subset T : I_k \cap I_m = \emptyset, \forall k \neq m$ и для $I \subset T$ введем $\sigma\{I\} = \sigma\{\mathcal{A}_t, t \in I\}$. Тогда $\sigma\{I_1\}, \sigma\{I_2\}, \dots$ - независимые σ -алгебры.

4 Лекция 4

4.1 Функция распределения и плотность

Определение. Пусть (S, τ) - топологическое пространство. Наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые множества называется Борелевской σ -алгеброй и обозначается $\mathcal{B}(S)$

Определение. Пусть P - вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Функция

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

называется функцией распределения вероятностной меры.

Теорема. Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. F не убывает
2. F непрерывна справа $\forall x \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Доказательство.

1. $x \leq y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
2. Если x_n монотонно стремится к x , то $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$, значит, по свойству непрерывности вероятностной меры, $P((-\infty, x_n]) \rightarrow P((-\infty, x]) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$.

3. и 4. напрямую следуют из непрерывности вероятностной меры.

□

Теорема. Если функция F обладает свойствами (1) – (4), то на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ существует единственная вероятностная мера, такая, что $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

Это задает взаимно-однозначное соответствие между вероятностными мерами и функциями распределения.

Определение. Пусть $p(x)$ вещественная кусочно непрерывная функция. Если $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0$ и интеграл Римана

$$\int_{\mathbb{R}} p(u) du = 1$$

то такая $p(x)$ называется плотностью.

Утверждение.

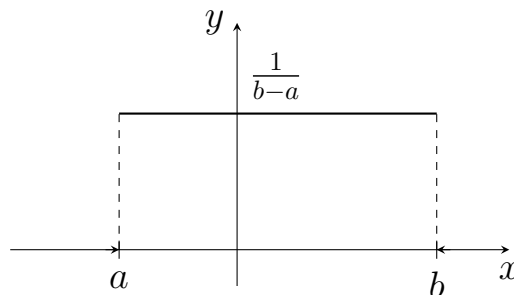
$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

является функция распределения.

(для нее выполнены свойства (1) – (4))

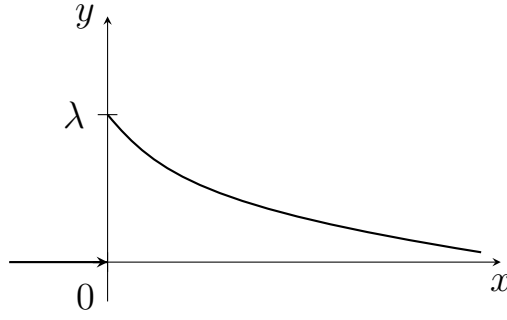
Пример. Равномерное распределение на $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$



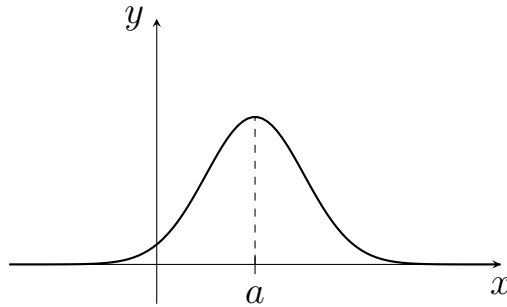
Пример. Экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



Пример. Гауссовское (нормальное) распределение

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



Упражнение. Доказать, что в каждом из этих случаев действительно выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$$

4.2 Случайные величины

Определение. Рассмотрим вероятностные пространства (Ω, \mathcal{F}) , (S, \mathcal{B}) . Отображение $X : \Omega \rightarrow S$ называется $\mathcal{F}|\mathcal{B}$ измеримым (или случайным элементом), если $\forall B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. В этом случае, пишут $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$.

Определение. Рассмотрим вероятностные пространства (Ω, \mathcal{F}) и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Если $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$, то X называется случайной величиной.

Теорема. Рассмотрим $f : V \rightarrow S$ и систему M подмножеств S . Определим множество $f^{-1}(M) = \{f^{-1}(B) : B \in M\}$ и рассмотрим $\sigma\{f^{-1}(M)\}$. Тогда

$$\sigma\{f^{-1}(M)\} = f^{-1}(\sigma\{M\})$$

Доказательство. Упражнение. □

Следствие. Пусть $f : V \rightarrow S$ и $\mathcal{B} = \sigma\{M\}$. Пусть $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ($B \in \mathcal{B}$). Тогда $f \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$.

Следствие. Пусть (V, τ) и (S, ν) - топологические пространства. Тогда $f : V \rightarrow S$ непрерывна ($f^{-1}(\nu) \subset \tau$). Тогда $f \in \mathcal{B}(V)|\mathcal{B}(S)$

4.3 Распределение случайного элемента

Определение. Рассмотрим вероятностные пространства (Ω, \mathcal{F}) и (S, \mathcal{B}) . Пусть $X : \Omega \rightarrow S$, $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$. Распределением случайного элемента X называется вероятностная мера P_X на (S, \mathcal{B}) такая, что

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

для любого $B \in \mathcal{B}$.

Упражнение. Проверить, что P_X является вероятностной мерой.

Определение. Если случайный элемент X распределен по распределению Q , то пишут $X \sim Q$

Определение. Случайные элементы $X_k : \Omega \rightarrow S$, $k = 1, \dots, n$ называются независимыми, если независимы σ -алгебры $\sigma\{X_1\}, \dots, \sigma\{X_n\}$, где $\sigma\{X_i\} = \{X_i^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$, что означает

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k)$$

Определение. (Биномиальное распределение)

$X \sim B_\varepsilon(n, p)$, где $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$, если

$$P(x = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Определение. (Распределение Пуассона)

$X \sim Pois(\lambda)$, если

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

Теорема. (Классическая теорема Пуассона)

Если $n \cdot p(n) \rightarrow \lambda > 0$, $n \rightarrow \infty$, то

$$C_n^k p^k(n) (1 - p(n))^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Доказательство.

$$p^k(n) = \frac{(n \cdot p(n))^k}{n^k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{n^k}$$

Заметим, что

$$n \cdot p(n) \rightarrow \lambda \Rightarrow p(n) \rightarrow 0$$

Значит

$$(1 - p(n))^{n-k} = \frac{(1 - p(n))^n}{(1 - p(n))^k} \rightarrow (1 - p(n))^n$$

Таким образом

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k(n)(1-p(n))^{n-k} \rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} (1-p(n))^n$$

Нам нужно, чтобы

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} \cdot (1-p(n))^n \rightarrow e^{-\lambda}$$

$$(1-p(n))^n = (1-p(n))^{\frac{n \cdot p(n)}{p(n)}} = ((1-p(n))^{-\frac{1}{p(n)}})^{-n \cdot p(n)} \rightarrow e^{-\lambda}$$

Значит, остается доказать, что

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} \rightarrow 1$$

Действительно

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{(n-k+1)!}{n^k} \rightarrow 1$$

Объединив результаты, получим

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k(n)(1-p(n))^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

□

тут пропущена теорема которую я не понял

5 Лекция 5

5.1 Современная теорема Пуассона

Теорема. Пусть X_1, \dots, X_n - независимые случайные элементы, $P(X_i = 1) = p_i$, $P(X_i = 0) = 1 - p_i$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $Y \sim Pois(\lambda)$, где $\lambda = p_1 + \dots + p_n$. Тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

Для доказательства этой теоремы потребуются две леммы

Лемма. Если Y_1, \dots, Y_n независимые случайные величины, причем $Y_k \sim Pois(\lambda_k)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n Y_k \sim Pois\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$$

Доказательство. Сначала докажем, что $Y_1 + Y_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$ при условии, что $Y_1 \sim Pois(\lambda_1)$, $Y_2 \sim Pois(\lambda_2)$.

$$\begin{aligned}
P(Y_1 + Y_2 = m) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i=0}^m P(Y_1 + Y_2 = m, Y_1 = i) = \\
&= \sum_{i=0}^m P(Y_1 = i, Y_2 = m - i) = \sum_{i=0}^m P(Y_1 = i)P(Y_2 = m - i) \stackrel{(2)}{=} \\
&\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^m \left(\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{m-i} e^{-\lambda_2}}{(m-i)!} \right) = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{m!} \cdot \sum_{i=0}^m \left(\frac{m!}{i!(m-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} \right) = \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{m!} (\lambda_1 + \lambda_2)^m
\end{aligned}$$

(1): По формуле полной вероятности

(2): Домножили и поделили на $m!$

Далее, индукция по n : база очевидна, $Y_1 + \dots + Y_n = (Y_1 + \dots + Y_{n-1}) + Y_n$.

По предположению индукции $Y_1 + \dots + Y_{n-1} \sim Pois(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$ Поэтому, если $Y_1 + \dots + Y_{n-1}$ и Y_n независимы, то

$$\sum_{k=1}^n Y_k \sim Pois \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)$$

Остается показать, что $Y_1 + \dots + Y_{n-1}$ и Y_n независимы □

Лемма. Пусть X, Y случайные величины. Тогда $\forall B \in \mathcal{B}$ выполнено:

$$|P(X \in B) - P(Y \in B)| \leq P(X \neq Y)$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение Ω на две части: $Y(\omega) \in B$ и $Y(\omega) \notin B$. Тогда по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}
P(X \in B) - P(Y \in B) &= P(X \in B, Y \in B) + \\
&+ P(X \in B, Y \notin B) - P(Y \in B, X \in B) - P(Y \in B, X \notin B) \leq \\
&\leq P(X \in B, Y \notin B) \leq P(X \neq Y)
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $P(Y \in B) - P(X \in B) \leq P(X \neq Y)$. Тогда

$$|P(X \in B) - P(Y \in B)| \leq P(X \neq Y)$$

□

Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Напомним ее условие

Теорема. Пусть X_1, \dots, X_n - независимые случайные элементы, $P(X_i = 1) = p_i$, $P(X_i = 0) = 1 - p_i$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $Y \sim Pois(\lambda)$, где $\lambda = p_1 + \dots + p_n$. Тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |P(S_n \in B) - P(Y \in B)| &= |P(X_1 + \dots + X_n \in B) - P(Y \in B)| \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} P(X_1 + \dots + X_n \neq Y) \stackrel{(2)}{=} P(X_1 + \dots + X_n \neq Y_1 + \dots + Y_n) \stackrel{(3)}{\leq} \\ &\stackrel{(3)}{\leq} P\left(\bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\}\right) \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{k=1}^n P(X_k \neq Y_k) \end{aligned}$$

Пояснения:

(1): По лемме 2

(2): Так как

$$Y \sim Pois\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)$$

то по лемме 1 $P(Y \in B) = P(Y_1 + \dots + Y_n \in B)$, где Y_1, \dots, Y_n независимы и $Y_k \sim Pois(p_k)$

(3): $X_1 + \dots + X_n \neq Y_1 + \dots + Y_n \subset \bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\}$ это можно показать, используя

тот факт, что $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

(4): Суббаддитивность.

Введем V_1, \dots, V_n независимые с Y_1, \dots, Y_n такие, что $P(V_k = 0) = (1 - p_k)e^{p_k}$ и $P(V_k = 1) = 1 - P(V_k = 0)$, причем $(1 - p_k)e^{p_k} \leq 1$, так как $e^{-p_k} \geq (1 - p_k)$. Подберем U_1, \dots, U_n такие, что

$$U_k = \begin{cases} 1, & p_k \\ 0, & 1 - p_k \end{cases}$$

и $\{U_k = 0\} = \{V_k = 0, Y_k = 0\}$, $\{U_k = 1\} = \Omega \setminus \{U_k = 0\}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} P(U_k = 0) &= P(V_k = 0, Y_k = 0) = P(V_k = 0)P(Y_k = 0) = \\ &= (1 - p_k)e^{p_k} \cdot \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1 - p_k \end{aligned}$$

а следовательно $P(U_k = 1) = 1 - (1 - p_k) = p_k$, значит, случайная величина X_k совпадает с U_k и нам достаточно оценить $P(U_k \neq Y_k)$.

$$P(U_k \neq Y_k) = P(U_k \neq Y_k, Y_k = 0) + P(U_k \neq Y_k, Y_k = 1) + P(U_k \neq Y_k, Y_k \geq 2)$$

Разберем каждое слагаемое:

1.

$$P(U_k \neq Y_k, Y_k = 0) = P(U_k = 1, Y_k = 0)$$

2. Вспомним, что $\{U_k = 0\} = \{V_k = 0, Y_k = 0\}$. Тогда

$$P(U_k \neq Y_k, Y_k = 1) = P(U_k = 0, Y_k = 1) = P(V_k = 0, Y_k = 0, Y_k = 1) = 0$$

3.

$$P(U_k \neq Y_k, Y_k \geq 2) = P(Y_k \geq 2)$$

Итого:

$$P(U_k \neq Y_k) = P(U_k = 1, Y_k = 0) + P(Y_k \geq 2)$$

Снова анализируем слагаемые:

1.

$$\begin{aligned} P(U_k = 1, Y_k = 0) &= P(Y_k = 0) - P(U_k = 0, Y_k = 0) = \\ &= P(Y_k = 0) - P(V_k = 0, Y_k = 0, Y_k = 0) = \\ &= P(Y_k = 0) - P(V_k = 0, Y_k = 0) = \\ &= e^{-p_k} - (1 - p_k)e^{p_k}e^{-p_k} = p_k + e^{-p_k} - 1 \end{aligned}$$

2.

$$P(Y_k \geq 2) = 1 - P(Y_k = 0) - P(Y_k = 1) = 1 - e^{-p_k} - p_k e^{-p_k}$$

Получили:

$$\begin{aligned} P(U_k \neq Y_k) &= p_k + e^{-p_k} - 1 + 1 - e^{-p_k} - p_k e^{-p_k} = \\ &= p_k - p_k e^{-p_k} = p_k(1 - e^{-p_k}) \leq p_k^2 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$|P(S_n \in B) - P(Y \in B)| \leq \sum_{k=1}^n P(U_k \neq Y_k) \leq \sum_{k=1}^n p_k^2$$

□

В доказательстве мы воспользовались теоремой

Теорема. (Теорема Ломницкого-Улама)

Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t, Q_t)$ - семейство вероятностных пространств. Тогда на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) можно построить семейство независимых случайных элементов $X_t : \Omega \rightarrow S_t$, $X_t \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$, причем $P_{X_t} = Q_t$, $t \in T$. Это означает, что всегда можно построить семейство независимых случайных элементов, имеющих заданное распределение.

5.2 Расширенные случайные величины

Определение. Рассмотрим $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Отображение $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ назовем расширенной случайной величиной, если $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, где $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{+\infty, -\infty\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Утверждение. X - случайная величина (расширенная) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$

Теорема. Пусть X_1, X_2, \dots - случайные величины (расширенные). Тогда справедливы следующие утверждения

1. $\sup_n X_n, \inf_n X_n$ - случайные величины (расширенные)
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n X_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n X_n$ - случайные величины (расширенные).
3. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, то он является случайной величиной (расширенной).

Доказательство. Будем доказывать пользуясь утверждением

1. $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\{\omega : \sup_n X_n \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$$\{\omega : \inf_n X_n \leq x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

2. Сведем к первому пункту

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n X_n(\omega) = \inf_n \sup_{k \leq n} X_k(\omega)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n X_n(\omega) = \sup_n \inf_{k \leq n} X_k(\omega)$$

3. Если существует предел, то он совпадает с верхним и нижним пределами, значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n X_n$$

а это, в свою очередь, является случайной величиной по пункту 2.

□

6 Лекция 6

6.1 Математическое ожидание

Определение. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Математическим ожиданием случайной величины X назовем интеграл Лебега от случайной величины по вероятностной мере

$$EX = \int_{\Omega} X d(P)$$

Таким образом, для определения понятия математического ожидания случайной величины, необходимо ввести понятие интеграла Лебега от случайной величины по вероятностной мере.

6.2 Построение интеграла Лебега

Построение интеграла Лебега происходит в три этапа:

1. Для простых случайных величин.
2. Для неотрицательных случайных величин.
3. Для произвольных случайных величин.

6.2.1 Первый этап

Определение. Случайная величина X называется простой, если

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k}$$

где $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ образуют разбиение Ω .

Определение. Если X - простая случайная величина, то

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k P(X = a_k)$$

Утверждение. Приведенное выше определение корректно.

Доказательство. Пусть B_1, \dots, B_m - другое разбиение Ω и

$$X = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$$

необходимо показать, что

$$\sum_{k=1}^n a_k P(A_k) = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j)$$

Рассмотрим $C_{kj} = A_k \cap B_j$ - новое разбиение Ω . Тогда, по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) &= \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^m P(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k P(C_{kj}) = \\ &= \sum_{(k,j) \in J} a_k P(C_{kj}) = \sum_{(k,j) \in J} b_j P(C_{kj}) = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j) \end{aligned}$$

где $J = \{(k, j) : C_{kj} \neq \emptyset\}$. Если $C_{kj} \neq \emptyset$, то $X(\omega) = a_k = b_j$, $\forall \omega \in C_{kj}$ □

Теорема. Для простых случайных величин X и Y справедливы следующие утверждения:

1. $E(X + Y) = EX + EY$.
2. $\forall c \in \mathbb{R} : E(cX) = c \cdot EX$.
3. Если $X \geq 0$, то $EX \geq 0$.
4. Если $X \leq Y$, то $EX \leq EY$.

Доказательство. 1. Рассмотрим два случая

- (а) Для X и Y одно и то же разбиение A_1, \dots, A_n на Ω . В этом случае, $\forall \omega \in A_k : X + Y(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) = a_k + b_k$. Отсюда

$$E(X + Y) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) P(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) + \sum_{k=1}^n b_k P(A_k) = EX + EY$$

- (б) Если разбиения A_1, \dots, A_n для X и B_1, \dots, B_m для Y оказались разными, то рассмотрим новое разбиение $C_{kj} = A_k \cap B_j$. Таким образом, свели к первому случаю.

2. $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$E(cX) = \sum_{k=1}^n c \cdot a_k P(A_k) = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) = c \cdot EX$$

3. Если $X \geq 0$, то $a_k \geq 0$. Значит

$$EX = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k) \geq 0$$

4. Пусть $X \geq Y \Rightarrow X - Y \geq 0 \Rightarrow E(X - Y) \geq 0$. Тогда из доказанных свойств:

$$E(X - Y) = E(X + (-1) \cdot Y) = EX + E((-1) \cdot Y) = EX - EY \geq 0$$

□

6.2.2 Второй этап

Определение. Пусть $X \geq 0$ случайная величина. Тогда

$$EX = \sup\{EY : 0 \leq Y \leq X, Y - \text{простая}\}$$

Лемма. Пусть $X \geq 0$ случайная величина. Тогда существует последовательность простых функций $X_n \geq 0$ таких, что $X_n \rightarrow X$ и $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$

Доказательство. Возьмем последовательность

$$X_n = \min\{(2^{-n} \lceil 2^n X \rceil), n\}$$

Заметим, что

$$X_n(\omega) = \begin{cases} k2^{-n}, & k2^{-n} \leq X(\omega) < (k+1)2^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, n2^n - 1, \\ n, & X(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Тогда X_n не убывает и $X_n \rightarrow X$. □

Лемма. Пусть $X \geq 0$ случайная величина. Тогда для любой последовательности простых функций $0 \leq X_n \leq X$, $X_n \rightarrow X$ выполнено, что $EX_n \rightarrow EX$.

Доказательство. X_n - простые и $X_n \leq X_{n+1} \Rightarrow EX_n \leq EX_{n+1}$. При этом

$$EX = \sup\{EY : 0 \leq Y \leq X, Y - \text{простая}\}$$

значит существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = a \leq EX$$

Покажем, что выполнено и обратное неравенство. Для этого докажем, что для любой простой функции $0 \leq Y \leq X$ выполнено, что $EY \leq a$. Если $Y \equiv 0$, то утверждение верно. Пусть

$$Y = \begin{cases} 0 = b_0 < b_1 < \dots < b_k \\ p_0, p_1, \dots, p_k \end{cases}$$

Тогда

$$EY = \sum_{j=1}^k b_j p_j$$

Введем $Y_n = (1 - \varepsilon)Y \cdot I\{(1 - \varepsilon)Y \leq X\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Из определения $Y_n \leq X_n \Rightarrow EY_n \leq EX_n \leq a$. Пусть

$$B_j = \{\omega : Y(\omega) = b_j\}, C_{jn} = \{(1 - \varepsilon)Y \leq X_n\}$$

Тогда $Y(\omega) = (1 - \varepsilon)b_j$, если $\omega \in B_j \cap C_{jn}$. Получаем, что

$$EY_n = \sum_j (1 - \varepsilon)b_j P(C_{jn})$$

При этом, по свойству непрерывности вероятностной меры

$$P(C_{jn}) \rightarrow P(B_j)$$

следовательно

$$EY_n = \sum_j (1 - \varepsilon)b_j P(C_{jn}) \rightarrow (1 - \varepsilon) \sum_j b_j P(B_j) = (1 - \varepsilon)EY$$

Получили, что $\forall \varepsilon \in (0, 1)$:

$$(1 - \varepsilon)EY \leq a$$

тогда, устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим для любой Y : $EY \leq a \Rightarrow EX \leq a$. Из полученных неравенств, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX$$

□

Лемма. Пусть $X, Y \geq 0$ случайные величины. Тогда

$$1. E(X + Y) = EX + EY.$$

$$2. \forall c \geq 0 : E(cX) = c \cdot EX$$

Доказательство.

1. Возьмем неубывающие последовательности простых функций $X_n \rightarrow X$, $Y_n \rightarrow Y$. Тогда $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$ и по лемме 2:

$$E(X_n + Y_n) = EX_n + EY_n \rightarrow E(X + Y)$$

2. Возьмем неубывающую последовательность простых функций $X_n \rightarrow X$. Тогда $cX_n \rightarrow cX$ и $E(cX_n) \rightarrow E(cX)$ и по лемме 2:

$$E(cX_n) = c \cdot E(X_n) \rightarrow c \cdot E(X)$$

□

6.2.3 Третий этап

Замечание. Заметим, что любую функцию $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде $X = X^+ - X^-$, где

$$X^+ = \max\{X, 0\} = X \cdot I\{X \geq 0\}, \quad X^- = -\min\{X, 0\} = -X \cdot I\{X \leq 0\}$$

Определение. Пусть X - произвольная случайная величина. Тогда

$$EX = EX^+ - EX^-$$

по определению положим, что EX не существует, если $EX^+ = +\infty$ и $EX^- = +\infty$ одновременно. Также по определению для любой константы $+\infty - c = +\infty$ и $c - \infty = -\infty$

Определение. Если $EX \in \mathbb{R}$, то случайная величина X называется интегрируемой по Лебегу и обозначается $X \in \mathcal{L}^1$

Теорема. Для произвольной случайной величины справедливы следующие утверждения:

1. Если $Y \leq X$ и $X \in \mathcal{L}^1$, то $Y \in \mathcal{L}^1$.
2. Если $X, Y \in \mathcal{L}^1$ и $Y \leq X$, то $EY \leq EX$.
3. Если $X \in \mathcal{L}^1$, то $|EX| \leq E|X|$.
4. \mathcal{L}^1 - линейное пространство.
5. E - линейный функционал.

7 Лекция 7

Теорема. (Теорема о монотонной сходимости)

Пусть $X_n \geq 0$ случайные величины и $X_n \nearrow X$. Тогда $EX_n \rightarrow EX$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y_{n,1} \nearrow X_1 \\ 0 &\leq Y_{n,2} \nearrow X_2 \\ &\vdots \\ 0 &\leq Y_{n,k} \nearrow X_k \end{aligned}$$

где $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_k \rightarrow X$, $Y_{n,i}$ - простые. Рассмотрим

$$\begin{aligned} Y_{1,1} &\leq Y_{2,1} \leq \dots \leq Y_{k,1} \leq \dots \leq Y_{n,1} \nearrow X_1 \\ &\vdots \\ Y_{1,k} &\leq Y_{2,k} \leq \dots \leq Y_{k,k} \leq \dots \leq Y_{n,k} \nearrow X_k \end{aligned}$$

и определим

$$0 \leq Z_k := \max_{1 \leq i, j \leq k} Y_{i,j} \nearrow Z$$

Таким образом

$$0 \leq Y_{n,k} \leq Z_k \leq X_k \leq X \quad (1)$$

После предельного перехода при $k \rightarrow \infty$, получим

$$0 \leq X_n \leq Z \leq X$$

После предельного перехода при $n \rightarrow \infty$, получим

$$0 \leq Z_n \nearrow X \quad (2)$$

Так как $X_n \leq X$, то $EX_n \leq EX$, а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq EX$$

Также из (1) и (2) имеем:

$$EZ_n \leq EX_n$$

и как следствие

$$EX \leq \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n$$

□

Утверждение. Рассмотрим вероятностные пространства (Ω, \mathcal{F}, P) , (S, \mathcal{B}, P_X) , $X \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, где $\forall B \in \mathcal{B} : P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, т.е P_X - мера на (S, \mathcal{B}) , индуцированная X . Также рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и $h \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Теперь рассмотрим композицию отображений $h(X(\omega)) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда оба интеграла существуют или не существуют одновременно, и если существуют, то равны:

$$Eh(X) = \int_{\Omega} h(X(\omega))P(d\omega) = \int_S h(x)P_X(dx)$$

Доказательство. Сначала пусть h - индикатор:

$$h(x) = I_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

$$\int_S h(x)P_X(dx) = 1 \cdot P_X(B) = P(X \in B)$$

$$\int_{\Omega} h(X(\omega))P(d\omega) = 1 \cdot P(X^{-1}(B))$$

Тогда формула будет верна для линейной комбинации индикаторов, а значит для простых $h \geq 0$. По теореме о монотонной сходимости, формула будет верна для произвольной

$$h = h^+ - h^-$$

□

Замечание. Пусть

$$X = \begin{cases} x_1, & x_2, \dots \\ p_1, & p_2, \dots \end{cases}$$

$$Eh(x) = \sum_{h(x_n) \geq 0} h(x_n)P(X = x_n) + \sum_{h(x_n) < 0} h(x_n)P(X = x_n)$$

То есть конечное $Eh(x)$ существует, если

$$\sum_n |h(x_n)| \cdot P(X = x_n) < \infty$$

Теорема. (Неравенство Маркова)

Пусть $f : R_+ \rightarrow R_+$, f - не убывает. Тогда для любой случайной величины X и $\forall t \geq 0$:

$$Ef(|X|) \geq f(t) \cdot P(|X| \geq t)$$

Доказательство.

$$f(|X|) \geq f(|X|) \cdot I\{|X| \geq t\} \geq f(t) \cdot I\{|X| \geq t\}$$

Значит

$$Ef(|X|) \geq E(f(t) \cdot I\{|X| \geq t\}) = f(t) \cdot E(I\{|X| \geq t\}) = f(t) \cdot P(|X| \geq t)$$

□

7.1 Дисперсия случайной величины

Определение. Рассмотрим случайную величину X . Пусть $X \in \mathcal{L}^1$, $(X - EX)^2 \in \mathcal{L}^1$. Тогда дисперсией случайной величины X называется выражение

$$\text{var } X = E(X - EX)^2$$

Замечание. $(X - EX)^2 = X^2 - 2XEX + (EX)^2 \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow X \in \mathcal{L}^2$

Замечание. Если X - дискретная случайная величина, то

$$\text{var } X = \sum_n (X_n - EX)^2 P(X = x_n)$$

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2$. Тогда

$$\text{var} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{var } X_k$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) &= E \left(\sum_{k=1}^n X_k - E \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) \right)^2 \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} E \left(\sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) \right)^2 \stackrel{(2)}{=} E \left(\sum_{i,j=1}^n (X_i - EX_i)(X_j - EX_j) \right) \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i,j=1}^n E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) \stackrel{(3)}{=} \end{aligned}$$

(1): По линейности математического ожидания:

$$E \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = \sum_{k=1}^n EX_k$$

(2): Поскольку

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = (a_1 + \cdots + a_n)(a_1 + \cdots + a_n)$$

(3): Поскольку $U, V \in \mathcal{L}^1$, то из $0 \leq |U \cdot V| \leq \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$ получаем $U \cdot V \in \mathcal{L}^1$ \square