Введение в теорию вероятностей

Лектор: проф. Булинский Александр Вадимович

27 сентября 2025 г.

Содержание

1 Лекция 1

Определение. Множество Ω называется множеством элементарных исходов. Множество $A \in 2^\Omega$ називется событием.

Определение. Множество $\mathcal{A} \in 2^\Omega$ такое, что $\mathcal{A} \neq \varnothing$ называется алгеброй, если

1. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Утверждение. (Следствия из определения алгебры)

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, так как для непустого $A \in \mathcal{A} : \bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$
2. $\varnothing \in \mathcal{A}$, так как $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{A}$
3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
4. $A \cap B \in \mathcal{A}$, если $A, B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
5. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
6. $A \setminus B \in \mathcal{A}$, так как $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Определение. Множество $\mathcal{F} \in 2^\Omega$ такое, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$ называется σ-алгеброй, если

1. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
2. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Замечание. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра $\Rightarrow \mathcal{F}$ - алгебра.

Замечание. Наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая M, обозначается $\sigma\{M\} = \bigcap\limits_{\alpha} g_\alpha$, где g_α - σ-алгебра, содержащая все элементы M.

Определение. Мерой на системе множеств U называется функция
$\mu : U \to [0, +\infty]$ такая, что

1. $\forall n : A_n \in U$
2. $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$

3. $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$

4. Выполнено свойство счетной аддитивности (такая мера называется счетно-аддитивной):
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Замечание. Если U - σ-алгебра, то условие
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$
можно упустить.

Пример. (Мера Дирака)
Пусть $B \subset S$
$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, \ x \in B, \\ 0, \ x \notin B \end{cases}$$
Упражнение: доказать, что $\delta_x(.)$ является мерой на 2^S

Определение. Мера P на пространтсве $(\Omega, \mathcal{F})$ такая, что $P(\Omega) = 1$ называется вероятностью.

Определение. Вероятность называется дисктерной, если Ω не более чем счетно. В этом случае $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.