Введение в теорию вероятностей

Лектор: проф. Булинский Александр Вадимович

4 октября 2025 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Алгебра и сигма-алгебра

Определение. Множество Ω называется множеством элементарных исходов. Множество $A \in 2^{\Omega}$ назывется событием.

Определение. Множество $\mathcal{A} \in 2^{\Omega}$ такое, что $\mathcal{A} \neq \varnothing$ называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Утверждение. (Следствия из определения алгебры)

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, так как для непустого $A \in \mathcal{A} : \bar{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{A}$
2. $\varnothing \in \mathcal{A}$, так как $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{A}$
3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
4. $A \cap B \in \mathcal{A}$, если $A, B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
5. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
6. $A \setminus B \in \mathcal{A}$, так как $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Определение. Множество $\mathcal{F} \in 2^{\Omega}$ такое, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$ называется σ-алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Замечание. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра $\Rightarrow \mathcal{F}$ - алгебра.

Замечание. Наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая M, обозначается $\sigma\{M\} = \bigcap\limits_{\alpha} g_{\alpha}$, где g_{α} - σ-алгебра, содержащая все элементы M.

1.2 Вероятностная мера

Определение. Мерой на системе множеств U называется функция
$\mu : U \to [0, +\infty]$ такая, что

1. $\forall n : A_n \in U$
2. $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$
3. $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$
4. Выполнено свойство счетной аддитивности (такая мера называется счетно-аддитивной):
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Замечание. Если U - σ-алгебра, то условие
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$$
можно упустить.

Пример. (Мера Дирака)
Пусть $B \subset S$
$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$
Упражнение: доказать, что $\delta_x(.)$ является мерой на 2^S

Определение. Мера P на пространтсве $(\Omega, \mathcal{F})$ такая, что $P(\Omega) = 1$ называется вероятностью.

1.3 Дискретные вероятностные пространства

Определение. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in J}$ не более чем счетно, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, причем
$$P_n = P(\{\omega_n\}) \geq 0, \ \sum_{n \in J} P_n = 1$$
Пусть $A \subset \Omega$, определим вероятность так:
$$P(A) = \sum_{k : \omega_k \in A}^{n} P_k$$
такое вероятностное пространство называется дискретным.

Упражнение. Доказать, что определенное выше P является вероятностью.

Определение. (Классическое определение вероятности)
Пусть $|\Omega| = N < \infty$ и положим $P_k = P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$. Тогда

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A}^{n} P_k = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.4 Пи-системы и лямбда-системы

Определение. Система M подмножеств множества S называется π-системой, если $A, B \in M \Rightarrow A \cap B \in M$

Определение. Сисмтема M подмножеств множества S называется λ-системой, если

1. $S \in M$
2. $A, B \in M \Rightarrow B \setminus A \in M$
3. $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A_n \nearrow A$, то $A \in M$.
   $(A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$

Теорема. Система $\mathcal{F}$ подмножеств S является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ одновременно π-система и λ-система.

Доказательство.

($\Rightarrow$): По следствию из определения алгебры: $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, значит, $\mathcal{F}$ является π-системой. Теперь проверим условия λ-системы:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по проеделению алгебры.
2. $A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B$, причем $B \setminus A = B \cap \bar{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F},\ A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по свойству σ-алгебры $A \in \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$): Проверим определению σ-алгебры:

1. $S \in \mathcal{F}$ выполнено по первому свойству λ-системы.
2. $S \in \mathcal{F},\ A \subset S \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{F}$ выполнено по второму свойству λ-системы.
3. Пусть $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F},\ A_m := \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$ при этом

$$A_m = \bigcup_{n=1}^{m} B_n = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{m} \overline{B}_n\right)} \in \mathcal{F} \Rightarrow A_m \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

□

Теорема. Пусть М - π-система, D - λ-система и $M \subset D$. Тогда

$$\sigma\{M\} = \lambda\{M\} \subset D$$

2 Лекция 2

2.1 Простейшие свойства конечно-аддитивной вероятностной меры на алгебре

Теорема. Пусть P - конечно-аддитивная вероятностная мера на алгебре $\mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ A \cap B = \varnothing$. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, тогда

1. $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. Субаддитивность:
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
4. Если P - вероятностная мера на σ-алгебре $\mathcal{F}$, то
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Доказательство.

1. $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
2. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. По индукции. База $n = 2$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, так как $P(A \cup B) \geq 0$
Пусть верно для $n - 1$, тогда
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cup A_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
4. *будет позже*

$\square$

2.2 Непрерывность сверху и снизу

Определение. Конечная неотрицательная функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$, называется непрерывной в $\varnothing$, если $\forall A_n$:

$$A_n \downarrow \varnothing \ (A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing) \Rightarrow \mu(A_n) \to 0$$

Определение. Конечная нетрицательная функция μ на алгебре $\mathcal{A}$ называется

1. непрерывной сверху на $A \in \mathcal{A}$, если $\forall A_n : A_n \downarrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$.

$$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

2. непрерывной снизу на $A \in \mathcal{A}$, если $\forall A_n : A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$.

$$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

Лемма. Пусть μ - конечная нетрицательная конечно-аддитивная функция на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ непрерывно сверху и снизу на любом $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Докажем непрерывность сверху. Рассмотрим последовательность $A_n \downarrow A \Rightarrow A_n \setminus A \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(A_n \setminus A) = \mu(A_n) - \mu(A) \to 0$. Аналогично, рассмотрим $A_n \uparrow A \Rightarrow A \setminus A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \to 0$. □

Теорема. Пусть μ - конечная нетрицательная функция но алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ является счетно-аддитивной на $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

1. μ является конечно-аддитивной.

2. μ непрерывна в $\varnothing$.

Доказательство.

($\Rightarrow$): Пусть μ - счетно-аддитивная на $\mathcal{A}$. Рассмотрим $A_n \downarrow \varnothing, \ n \to \infty$ и введем $B_n = A_n \setminus A_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}$. Эти слои не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_n = A_N$. Применим счетную аддитивность:

$$\mu(A_N) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$$

Этот ряд сходится, значит последовательность (остаточных рядов)

$$S_N = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(B_n) \to 0$$

($\Leftarrow$): Пусть $A_i \neq A_j, \ i \neq j$. Введем $C_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow C_n \downarrow \varnothing$. При этом $A_1 = C_1 \cup \dots \cup C_{n-1} \cup C_n$, причем $A_1 \in \mathcal{A}$ и $C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathcal{A}$. Таким образом, $C_n \in \mathcal{A}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup C_n$$

Отсюда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{n-1}) + \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_k) + \mu(C_n)$$

при $n \to \infty, \ \mu(C_n) \to 0$, получим

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\square$

Теорема. Пусть P, Q - меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $P = Q$ на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда $P = Q$ на алгебре $\sigma\{\mathcal{A}\}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой из прошлой лекции. Алгебра является π-системой, рассмотрим $D = \{B \in \mathcal{F} : P(B) = Q(B)\}, \ \mathcal{A} \subset D$. Проверим, что D является λ-системой:

1. $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1 \Rightarrow \Omega \in D$
2. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A), \ Q(B \setminus A) = Q(B) - Q(A)$, причем $P(A) = Q(A), \ P(B) = Q(B) \Rightarrow P(B \setminus A) = Q(B \setminus A) \Rightarrow B \setminus A \in D$. $A_n \in D, \ A_n \uparrow A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. По свойству непрерывности $P(A_n) \to P(A)$, $Q(A_n) \to Q(A) \Rightarrow A \in D$. Значит $\sigma\{\mathcal{A}\} \subset D$.

$\square$

2.3 Условные вероятности

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство и $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) \neq 0$. Тогда вероятностью события A при условии B называется

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Определение. (Условная вероятность в классическом определении)
Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностьное пространство, $|\Omega| = N < \infty,\ P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{N}$ и $P(B) = \frac{|B|}{N}$. Тогда

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{1}{N} \cdot |A \cap B|}{\frac{1}{N} \cdot |B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример. *пример про монетку*

Теорема. (Формула полной вероятности)
Пусть $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ ,\ B_k \in \mathcal{F},\ P(B_k) > 0$. Тогда определены $P(A|B_k)$, причем для $A \in \mathcal{F}$ верна формула

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

Доказательство.

$$P(A) = P\left(\bigcup_k (A \cap B_k)\right) = \sum_k P(A \cap B_k),\ (A \cap B_k) \cap (A \cap B_m) = \varnothing,\ k \neq m$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$$

отсюда

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k)$$

□

Теорема. (Формула Байеса)
Пусть $P(A) \neq 0$, тогда верна формула

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_k P(A|B_n)P(B_n)}$$

Доказательство. По определению условной вероятности и формуле полной вероятности, получим

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_k P(A|B_n)P(B_n)}$$

□

Определение. Если $P(A|B) = P(A)$, то при $P(B) \neq 0$ выполнено

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

В этом случае события A и B называются независимыми.

Пример. *пример с колодой карт*

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - события. Они называются независимыми в совокупности, если $\forall i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Определение. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - события. Они называются попарно независимыми, если $\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j:$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Пример. *пример того, что из определения 2 не следует определение 1*

Определение. Система $\{A_t,\ t \in T\}$ состоит из независимых событий, если для люього конечного $F \subset T,\ F = \{t_1, \dots, t_n\}$, события $A_{t_1}, \dots, A_{t_n}$ независимы в совокупности.