Реферат по теме ”Парадоксы теории вероятностей: парадокс трех узников”

Якшина Кристина

Октябрь, 2019

1 Теоретические сведения

1.1 Формулировка задачи трех узников

Задача трех узников – парадокс теории вероятностей, который впервые был опубликован Мартином Гарднером в 1959. Сформулирован он был следующим образом:

Трое заключенных (A, B и C) приговорены к смертной казни и помещены в одиночные камеры. Губернатор случайным образом выбирает одного из них и дает ему помилование. Надзиратель знает, кто из троих помилован, но ему велено держать это в тайне. Узник A просит стражника сказать ему имя второго заключенного (кроме него самого), который точно будет казнен: «если B помилован, скажи мне, что казнен будет C. Если помилован C, скажи мне, что казнен будет B. Если они оба будут казнены, а помилован я, подбрось монету, и скажи любое из этих двух имен». Надзиратель говорит, что будет казнен узник B. Стоит ли радоваться узнику A?

Парадокс данной задачи заключается в том, что при решении наиболее логичным на первый взгляд кажется предположение, что вероятность казни заключенного “A” уменьшится с $\frac{2}{3}$ до $\frac{1}{2}$. Однако, это утверждение может быть верно, только в случае, если вопрос будет сформулирован иначе (например, “Будет ли заключенный B казнен?”) и стражник ответит положительно.

Рассматриваемый парадокс можно сравнить с парадоксом Монти Холла. Однако, если там вопрос ведущего может повлиять на выбор участника, и тем самым изменит вероятность,то в парадоксе трех узников вопрос заключенного не влияет на результат. Это происходит из-за ограничения, присутствующего в оригинальной задаче трех узников, которое делает вопрос, заданный заключенным “A”, бессмысленным, так как вероятность того, что казнят двоих равна 1, а значит, даже если он помилован, ему назовут одно из двух имен, как и в случае если его приговорят к казни. Таким образом, заключенный “A” задав свой вопрос, узнает лишь имя одного из двух заключенных (”B”или ”C”), что и так очевидно из условия задачи.

1.2 Решение задачи трех узников

Сформулируем правильный ответ на поставленную задачу о трех узниках, полученный индуктивно. Как было описано ранее, узник “A” не получил новой для него информации, задав свой вопрос, как и до этого шанс того, что его помилуют, остался равным $\frac{1}{3}$. Поэтому в первую очередь интерпретируем сказанное надзирателем: когда он говорит – «B будет казнен», понятно, что будет помилован заключенный “C” с вероятностью - $\frac{1}{3}$ или заключенный “A”, причем с такой же вероятностью, если бросая монету, стражник выбрал узника “B”. То есть, узнав, что “B” точно казнят, узник “A” может оценить свои шансы на помилования, которые все также равны $\frac{1}{3}$, и шансы того, что помилован узник “C”, которые в свою очередь теперь составляют $\frac{2}{3}$.

Полученный ответ также можно обосновать математически. Для этого обозначим помилование узников “A”, “B” и “C” как события A, B и C соответственно, а случай, когда надзиратель назовёт имя заключенного “B”, как событие b.

Воспользовавшись теоремой Байеса, получим:

$$P(A|b) = \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Анализируя полученные решения, однозначно можно определить, что вероятность выполнения события (то есть того что узника “A” помилуют) составляет $\frac{1}{3}$.

2 Реализация на Python

Реализуем решение задачи трех заключенных при помощи языка программирования Python. Ниже представлен листинг получившейся программы.

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

num = 10000
q = 0
o = 0
x = []
y = []
m = 0

for i in range(num):

    m += 1

    all_prisoners = set([1,2,3])
    possible_prisoners1 = all_prisoners.copy()
    possible_prisoners2 = all_prisoners.copy()

    free = random.randint(1,3)

    a = random.randint(1,3)

    possible_prisoners1.remove(free)
    if free != a:
        possible_prisoners1.remove(a)

    b = possible_prisoners1.pop()

    possible_prisoners2.remove(a)
    possible_prisoners2.remove(b)

    c = possible_prisoners2.pop()

    if a == free:
        q +=1
        x.append(q/m)

    if c == free:
        o +=1
        y.append(o/m)

print(q/num)
print(o/num)
```

```
plt.xlim(xmax = 3000)
plt.ylim(ymax = 1)
plt.plot(x)
```

Поэтапно проанализируем листинг написанной программы.

В начале каждой выборки случайно выбираем заключенного “A”, который по условию задачи задает вопрос надзирателю (переменной a присваивается рандомное значение от 1 до 3). После выбирается заключенный “B”, которого называет надзиратель, то есть “b” присваивается значение 1, 2 или 3, хранящееся в массиве ”possible_prisoners1” (метод $pop()$), при условии, что перед этим из него были удалены значения, присвоенные другим заключенным, а именно значения переменных “a” и “free” (метод $remove()$). В конце также выбирается заключенный “C”, в этом случае переменной “c” присваивается значение массива ”possible_prisoners2”, из которого аналогично предварительно удаляются значения присвоенные ранее переменным “a” и “b”. Описанные действия выполняются в следующем фрагменте кода:

```
a = random.randint(1,3)

possible_prisoners1.remove(free)
if free != a:
    possible_prisoners1.remove(a)

b = possible_prisoners1.pop()

possible_prisoners2.remove(a)
possible_prisoners2.remove(b)

c = possible_prisoners2.pop()
```

После каждой выборки выполняется проверка двух условий, и если помиловали заключенного “A” (если a = free), переменная “q” увеличится на 1, иначе на 1 увеличится - “o”:

```
if a == free:
    q +=1
    x.append(q/num)

if c == free:
    o +=1
    y.append(o/num)
```

При этом, значения переменных “q” и “o” фиксируются в ранее созданных массивах “x” и “y” (метод $append()$). Получившиеся массивы будут использоваться в дальнейшем для построения графиков.

После выполнения программы получим ответ:

```
0.3424
0.6576
```

Первое число соответствует вероятности того, что помиловали заключенного, задававшего вопрос (0.3424), второе число - вероятность того, что помиловали не названного охранником заключенного (0.6576).

Отобразив все полученные в ходе итераций значения “q” содержащиеся теперь во множестве “x” на графике, становится очевидно, что вероятность стремится к $\frac{1}{3}$ (рис. 1).

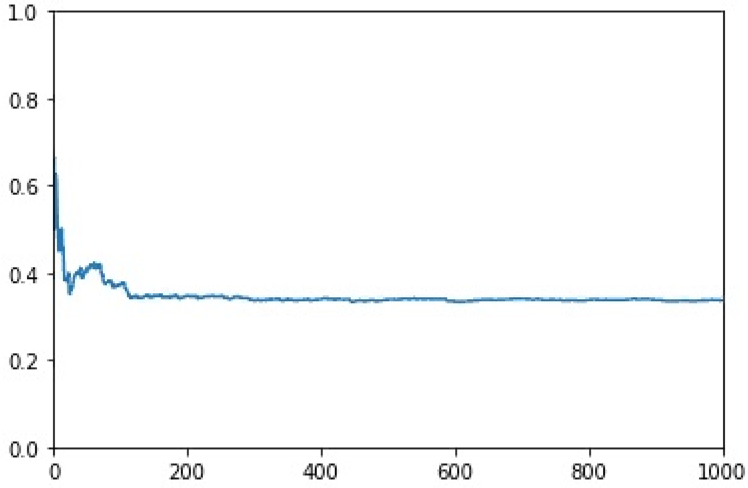

Рис. 1: Построение графика

Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученное решение совпадает с ответами полученными ранее.