Необходимые сведения.

Простой граф G(V, E) есть совокупность двух множеств – непустого множества вершин {V} и множества ребер {E} - пар различных элементов (пары неупорядочены для неориентированных графов и упорядочены для ориентированных графов).

Примеры:

1) неориентированный граф с вершинами {a, b, c, d} и ребрами {(a,b), (a,c), (c,d)};
2) ориентированный граф (орграф) с вершинами {1, 2, 3, 4 ,5} и ребрами (у ориентированного графа ребра часто называют дугами) {(1,2), (2,1), (1,5), (5,3)}.

Если есть ребра с совпадающими началом и концом (петля), то граф будет с петлями. Если есть совпадающие, т.е. параллельные ребра, то граф называется мультиграф или псевдограф. Ни те, ни другие здесь не рассматриваются.

Матрица смежности A - один из способов хранения графа. Размер матрицы |V|x|V|, где |V| - количество вершин в графе, а значение записи A_{ij} равно 1 или 0, в зависимости от того, существует ли ребро от вершины i до вершины j.

Матрицы смежности для вышеприведенных примеров:

1) 0 1 1 0
   1 0 0 0
   1 0 0 1
   0 0 1 0 (3 ребра 6 единиц)
2) 0 1 0 0 1
   1 0 0 0 0
   0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0
   0 0 1 0 0 (4 ребра(дуги) 4 единицы)

Матрица смежности неориентированного графа всегда симметрична. На диагонали матрицы смежности простого графа стоят 0.

Матрица достижимости R(G) простого ориентированного графа G содержит информацию о существовании путей между вершинами орграфа. Например для ориентированного графа из второго примера матрица достижимости имеет вид:

1 1 1 0 1
1 1 1 0 1
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 1 0 1

на диагонали всегда 1, т.е. вершина всегда достижима из себя. Значение записи $R(G)_{ij}$ равно 1 или 0, в зависимости от того, существует ли путь от вершины i до вершины j.

Получить R(G) достаточно просто:

$$R(G) = E \vee A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^{|V|-1}$$

Если вместо логических использовать арифметические операции $R(G) = E + A + A^2 + \ldots + A^{|V|-1}$
то получим количество различных путей из i в j длиной не более |V|-1.

Таким образом необходимо уметь перемножать матрицы и складывать их.

Разреженные матрицы матрица с небольшим количеством ненулевых элементов. Например матрица размером 10^6 x 10^6 содержащая 10^7 ненулевых значений может считаться разреженной.

Сжатое хранение строкой (CRS - compressed row storage) - один из многих способов хранения разреженных матриц. Рассмотрим матрицу смежности A орграфа G из второго примера.

0 1 0 0 1 строка с индексом[0]

1 0 0 0 0 строка с индексом[1]

0 0 0 0 0 строка с индексом[2]

0 0 0 0 0 строка с индексом[3]

0 0 1 0 0 строка с индексом[4]

Ее запись в формате CRS выглядит так:

массив значений: 1 1 1 1

массив индексов столбцов: 1 4 0 2

(их длины всегда совпадают с количеством ненулевых элементов)

массив индексации строк (количество накопленных ненулевых элементов по строкам)

0 2 3 3 3 4 - всегда на 1 больше количества строк, последнее значение равно количеству ненулевых элементов, разница между k и k+1 значением равна количеству ненулевых элементов в k строке, индексы столбцов которых указаны в массиве индексов столбцов. Запишем еще R(G) второго примера в формате CRS.

1 1 1 0 1

1 1 1 0 1

0 0 1 0 0

0 0 0 1 0

0 0 1 0 1

=

1 1 1 1   1 1 1 1   1   1   1 1

0 1 2 4   0 1 2 4   2   3   2 4

0, 4, 8, 9, 10, 12

(увеличенные промежутки разделяют разные строки для наглядности)

Необходимо разработать программу, которая предоставляет удобный функционал для работы с разреженными орграфами. На языке C++ требуется написать следующие функции:

Ввода орграфа из файла и с клавиатуры;

Вывода матрицы смежности в формате CRS в файл и на экран;

Суммирования двух матриц в формате CRS;

Умножения двух матриц в формате CRS;

Вычисления матрицы достижимости в формате CRS;

Вывода матрицы достижимости в формате CRS в файл и на экран.

Варианты по N - номеру в группе.

Количество вершин графа: 10 * (10 + N), количество дуг:

5 * (10 + N)

Все массивы - динамические, STL не использовать.