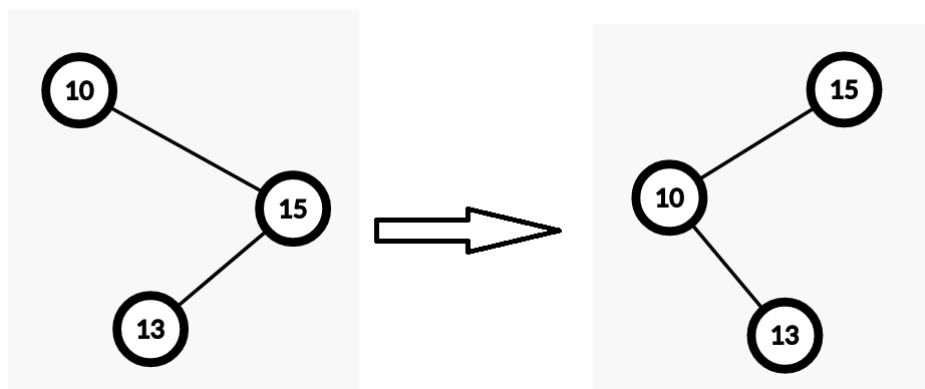
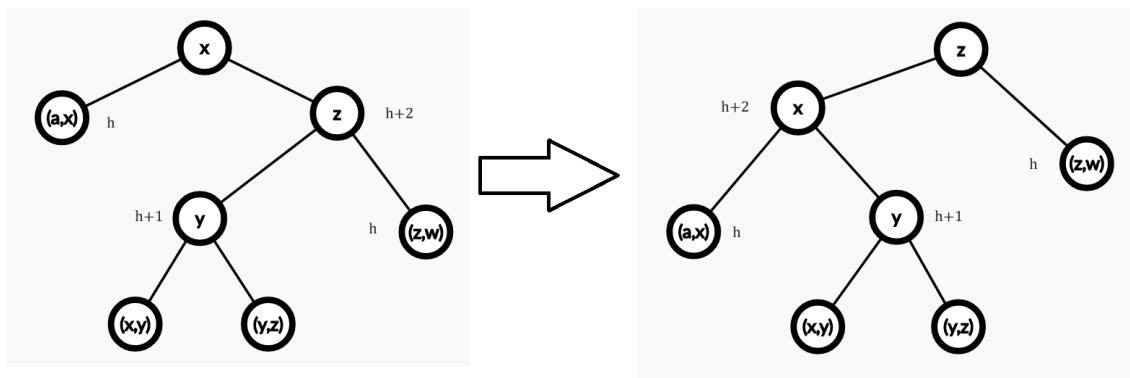


练习 1

- **Q:** 证明在第 5 节的第二种情况下，一次左旋不一定会恢复高度不变性。
- **A:** 例如，向 AVL 树中依次插入 10 15 13，单独一次左旋会把树变成“对称”的样子，不会恢复不变性。



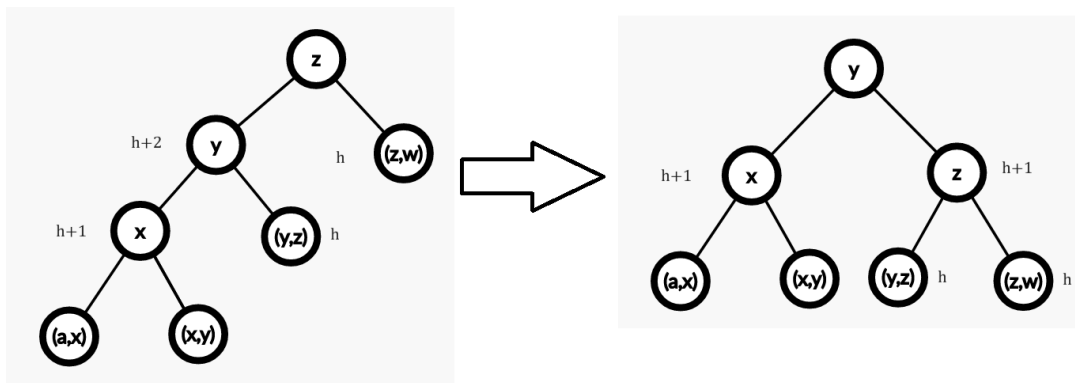
更一般地，假定 AVL 树中 $x < y < z$ ，其中 z 是 x 的右儿子， y 是 z 的左儿子，向 y 所在子树中插入节点使得 x 处不满足左右子树高度要求。假定原来 x 的左子树高度为 h ， x 的右子树（即以 z 为根的子树）高度为 $h + 1$ ，原来 z 的左子树（即以 y 为根的子树）高度为 h ， z 的右子树高度为 h 。假定插入节点之后， z 的左子树（即以 y 为根的子树）高度为 $h + 1$ ， z 的右子树高度为 h ， x 的左子树高度为 h ， x 的右子树（即以 z 为根的子树）高度为 $h + 2$ 。这个情况下， z 满足左右子树高度限制， x 不满足。



在进行一次左旋之后， x 的右子树变为了 z 的左子树（即以 y 为根的子树）， z 的左子树变为了以 x 为根的子树。此时， x 的左子树高度为 h ， x 的右子树（即以 y 为根的子树）高度为 $h + 1$ ， z 的左子树（即以 x 为根的子树）高度为 $h + 2$ ， z 的右子树高度为 h ，在 z 处不满足左右子树高度限制。在这种情况下，没有恢复高度不变性。

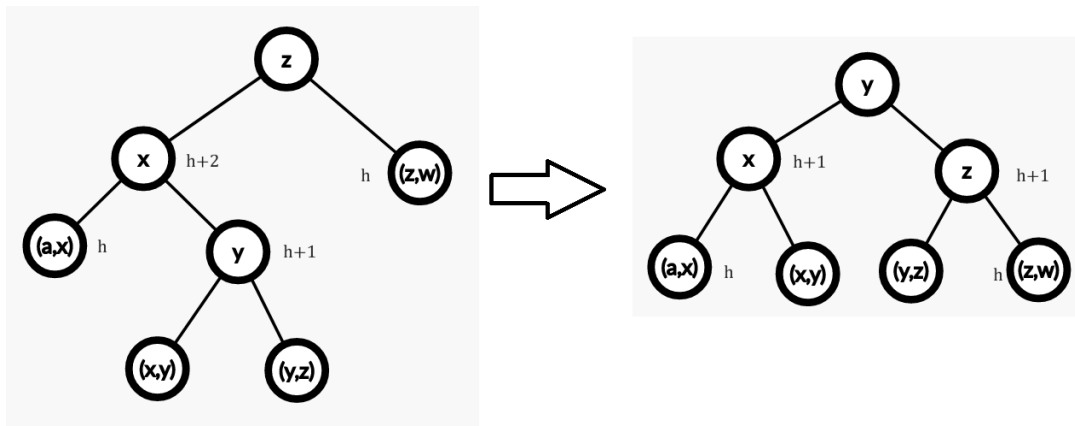
练习 4

- **Q:** 展示插入左子树时出现的两种可能违反高度不变性的情况，并展示如何通过右旋或双旋转来修复它们。在这种情况下，双旋转由哪两个单旋转组成？
- **A:** 假定 $x < y < z$
 - 假定 AVL 树中 y 是 z 的左儿子， x 是 y 的左儿子，向 x 所在子树中插入节点使得 z 处不满足左右子树高度要求。假定原来以 x 为根的子树深度为 h ，插入后高度发生变化（否则不可能不满足不变性），为 $h + 1$ ，以 y 为根的子树在插入前后均满足不变性，那么 y 的右子树高度为 h 或 $h + 1$ ，插入后 y 的高度为 $h + 2$ ，以 z 为根的子树在插入前满足，插入后不满足，那么插入前以 y 为根的子树为 $h + 1$ ，所以 y 的右子树高度为 h ， z 的右子树高度为 h 。



经过右旋后， y 的左右子树高度为 $h + 1$ ， z 的左右子树高度均为 h 。

- 假定 AVL 树中 x 是 z 的左儿子， y 是 x 的右儿子，向 y 所在子树中插入节点使得 z 处不满足左右子树高度要求。假定原来以 y 为根的子树深度为 h ，插入后高度发生变化（否则不可能不满足不变性），为 $h + 1$ ，以 x 为根的子树在插入前后均满足不变性，那么 x 的左子树高度为 h 或 $h + 1$ ，插入后 x 的高度为 $h + 2$ ，以 z 为根的子树在插入前满足，插入后不满足，那么插入前以 x 为根的子树为 $h + 1$ ，所以 x 的左子树高度为 h ， z 的右子树高度为 h 。



先经过左旋， x 的左子树高度为 h ，右子树高度为 $h - 1$ 或 h ， y 的左子树高度为 $h + 1$ ，右子树高度为 h 或 $h - 1$ ， z 的左子树高度为 $h + 2$ ，右子树高度为 h 。 x 满足不变性。

再经过右旋， z 的左子树高度为 h 或 $h - 1$ ，右子树高度为 h ， y 的左子树高度为 $h + 1$ ，右子树高度为 $h + 1$ 。 y 和 z 满足高度不变性。