Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή ΗΜΜΥ
Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Παράδοση 2ης εργασίας

Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Μαΐου 2023

Μονάδες 100/1000

Ομάδα 68

	Φοιτητής 1	Φοιτητής 2
Επώνυμο	Καραλής	Γιαλούρης
Όνομα	Κωνσταντίνος	Γεώργιος
Α.Μ.	2019030117	2019030063

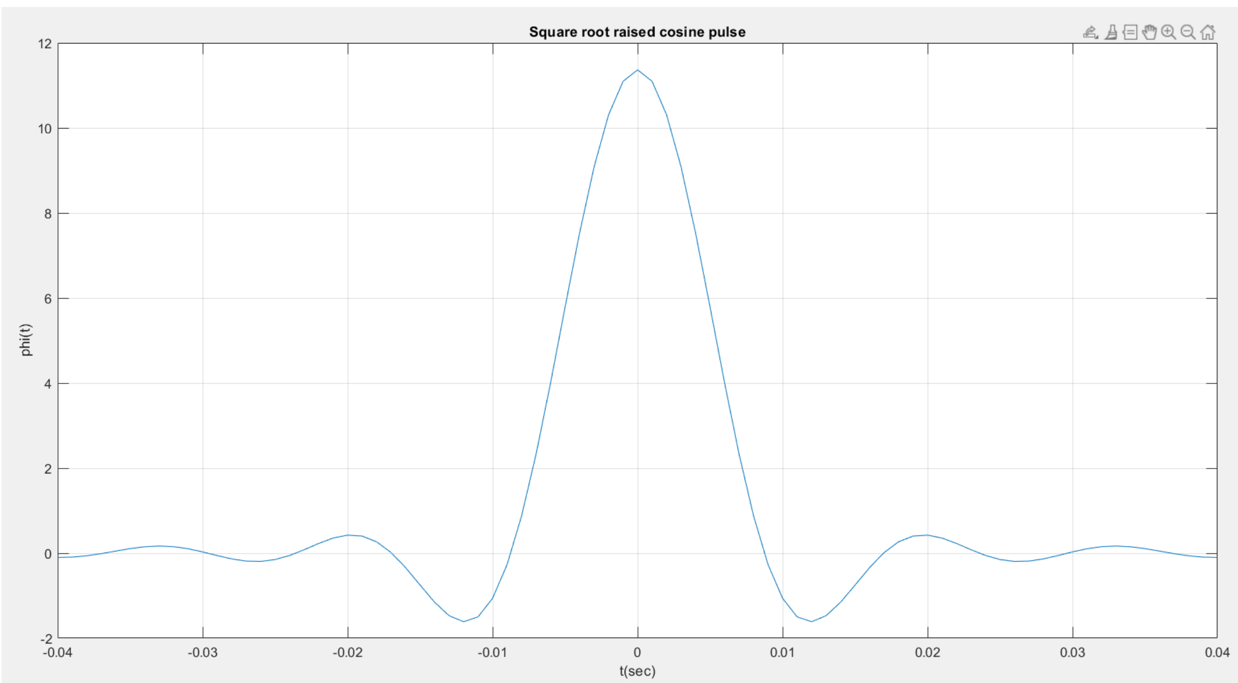
Πλήθος ωρών που απαιτήθηκαν για την υλοποίηση της άσκησης: 10

A. Στο πρώτο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, πειραματικό, θα μελετήσουμε το φασματικό περιεχόμενο PAM κυματομορφών βασικής ζώνης.

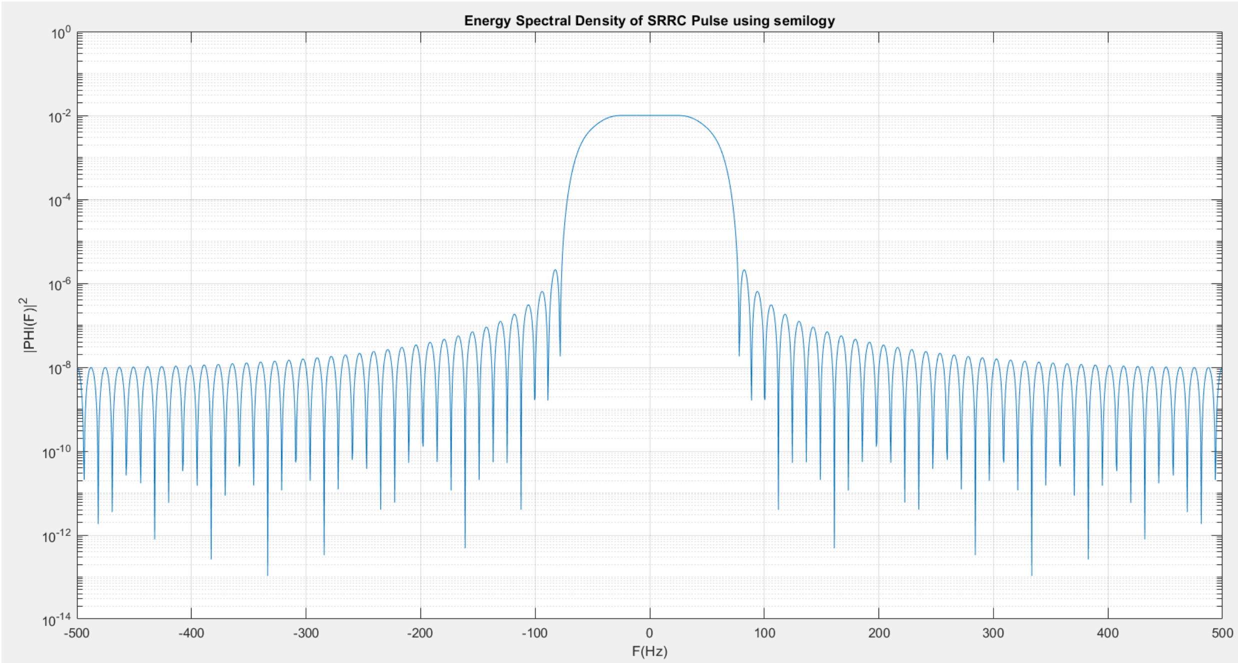
A.1 Να δημιουργήσετε παλμό SRRC $\phi(t)$ με τιμές $T = 10^{-2}\,\text{sec}$, over $= 10$, $T_s = \frac{T}{\text{over}}$, $A = 4$, και $a = 0.5$.

(10) Μέσω των συναρτήσεων fftshift και fft, να υπολογίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$, σε N_f ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right)$.[1] Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ στον κατάλληλο άξονα συχνοτήτων με χρήση της εντολής semilogy.

<u>Απάντηση:</u>



Σχήμα 1: Παλμός SRRC φ(t) με τιμές T = 10^{-2}sec, over = 10, A = 4 και συντελεστή roll-off a = 0.5



Σχήμα 2: Φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ του παλμού SRRC φ(t) χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

<u>Κώδικας:</u>

```
T = 10^-2;
over = 10;
A = 4;
a = 0.5;
[phi,t] = srrc_pulse(T,over,A,a);
figure;
plot(t,phi);
title("Square root raised cosine pulse");
xlim([-4*T 4*T]);
xlabel('t(sec)');
ylabel('phi(t)');
grid on;

Ts = T/over;
Fs = 1/Ts;
Nf = 2048;
F = -Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
PHI_f = fftshift(fft(phi,Nf));
PHI_F = PHI_f*Ts;
figure;
semilogy(F,abs(PHI_F).^2);
```

```
title("Energy Spectral Density of SRRC Pulse using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('|PHI(F)|^2');
grid on;
```

A.2 Να δημιουργήσετε ακολουθία $N = 100$ ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $\{b_0, \ldots, b_{N-1}\}$.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$0 \longrightarrow +1,$$

$$1 \longrightarrow -1,$$

να απεικονίσετε τα bits σε σύμβολα X_n, για $n = 0, \ldots, N-1$.

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

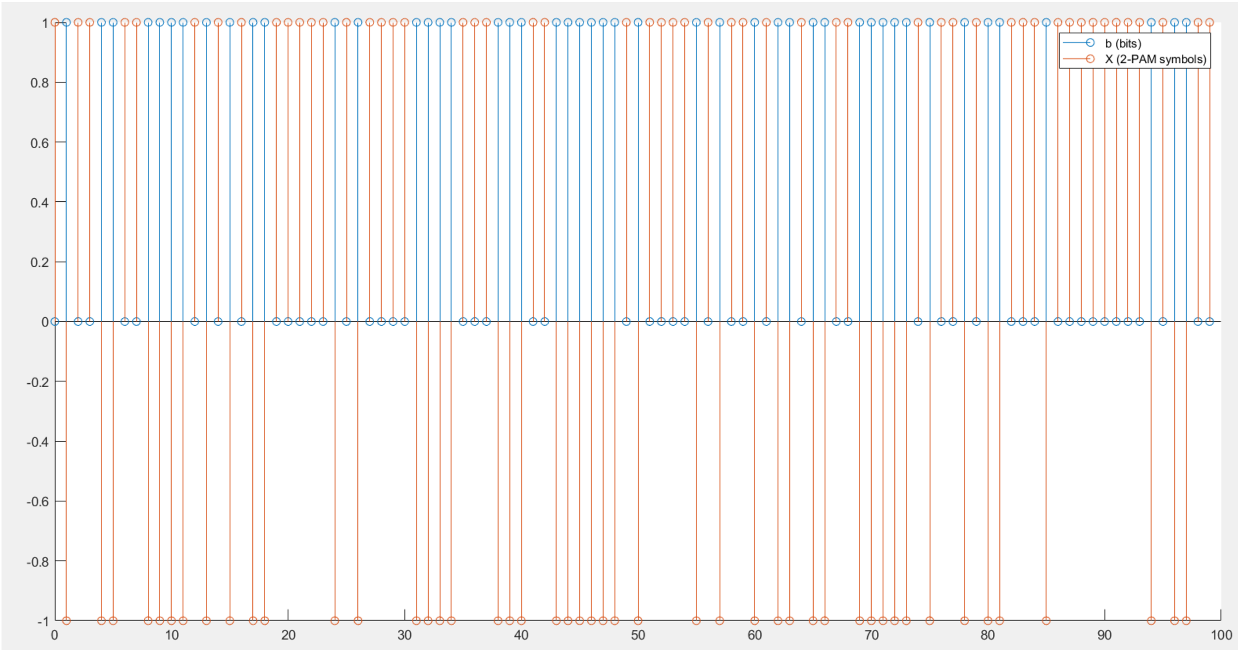
$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \phi(t - nT).$$

<u>Απάντηση:</u>

Αρχικά, δημιουργήθηκε μία ακολουθία N = 100 ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $\{b_0,\ldots,b_{N-1}\}$ με τη χρήση της εντολής b = (sign(randn(N,1))+1)/2.

Στη συνέχεια, γράφτηκε η συνάρτηση X = bits_to_2PAM(b), η οποία παίρνει ως είσοδο την ακολουθία bits b και παράγει ως έξοδο την ακολουθία από 2-PAM σύμβολα X, χρησιμοποιώντας την εξής απεικόνιση:

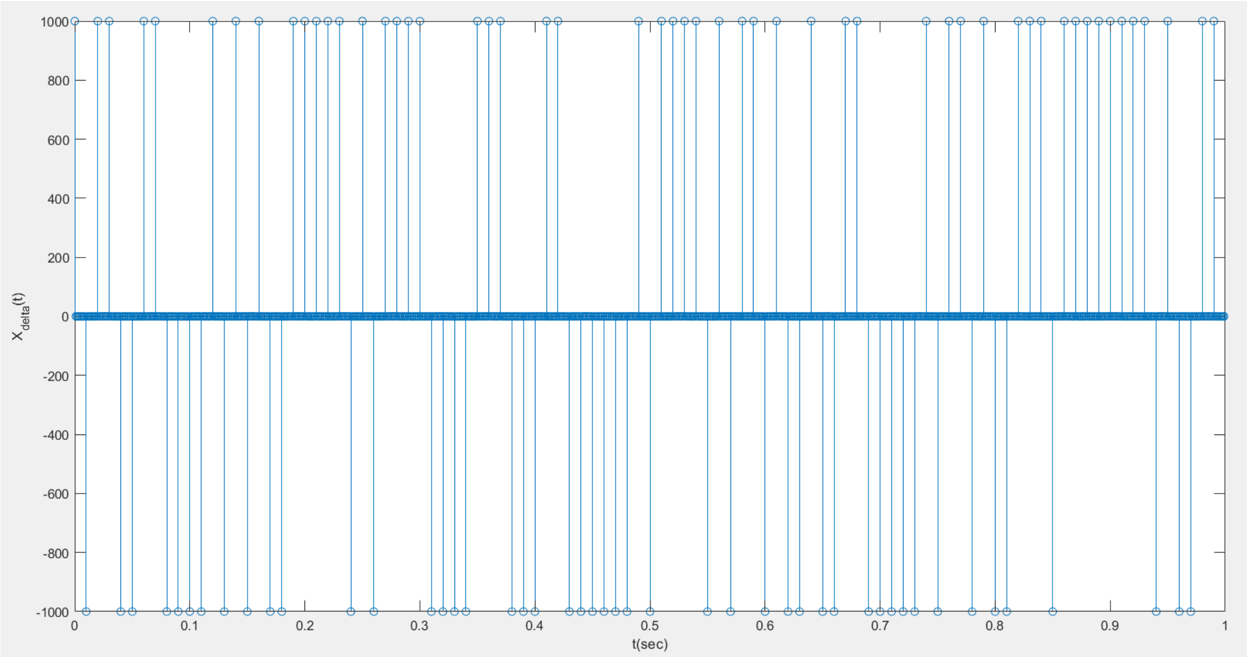
$$0 \rightarrow +1$$
$$1 \rightarrow -1.$$



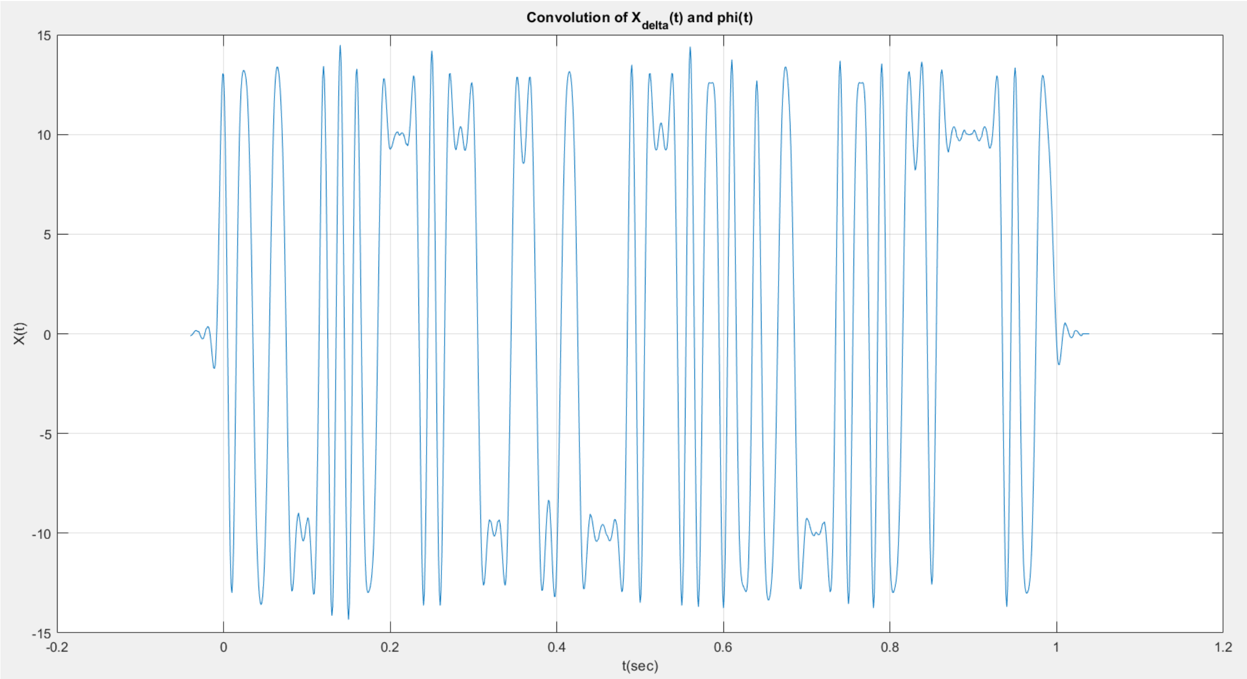
Σχήμα 3: Τυχαία ακολουθία από 100 bits και η αντίστοιχη ακολουθία από 2-PAM σύμβολα

Το σήμα X(t) = $\sum_{n=0}^{N-1} X_n \varphi(t-nT)$ είναι η έξοδος του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος με κρουστική απόκριση φ(t) και είσοδο το σήμα X_δ(t) = $\sum_{n=0}^{N-1} X_n \delta(t-nT)$, δηλαδή X(t) = X_δ(t) ⋆ φ(t).

Η προσομοίωση του σήματος X_δ(t) = $\sum_{n=0}^{N-1} X_n \delta(t-nT)$ έγινε μέσω της εντολής X_delta = 1/Ts*upsample(X,over), η οποία εισήγαγε over – 1 = 10 – 1 = 9 μηδενικά ανάμεσα από κάθε δύο διαδοχικά δείγματα του X.



Σχήμα 4: Σήμα $X_\delta(t)$



Σχήμα 5: Σήμα $X(t) = X_\delta(t) \star \varphi(t)$

Κώδικας:

```
N = 100;
b = (sign(randn(N,1))+1)/2; % Random sequence of N bits
n = 0:N-1;
X = bits_to_2PAM(b);
figure;
hold on;
stem(n,b);
stem(n,X);
hold off;
legend('b (bits)','X (2-PAM symbols)');

X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);
t_delta = 0:Ts:N*T-Ts;
figure;
stem(t_delta,X_delta);
xlabel('t(sec)');
ylabel('X_{delta}(t)');

X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
t_conv = t_delta(1)+t(1):Ts:t_delta(end)+t(end);
figure;
plot(t_conv,X_t);
title("Convolution of X_{delta}(t) and phi(t)");
xlabel('t(sec)');
ylabel('X(t)');
grid on;

function X = bits_to_2PAM(b)
X = zeros(1,length(b));
for i = 1:length(b)
   if (b(i) == 0)
      X(i) = 1;
   else
      X(i) = -1;
   end
end
```

Υποθέτοντας ότι το πλήθος των συμβόλων είναι άπειρο, αποδείξαμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ είναι

$$S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T} |\Phi(F)|^2 .$$

A.3 (10) Με χρήση των συναρτήσεων fft και fftshift να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης της $X(t)$

$$P_X(F) = \frac{|\mathcal{F}[X(t)]|^2}{T_{\text{total}}},$$

όπου T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας της $X(t)$ σε sec. Να σχεδιάσετε το $P_X(F)$ με χρήση plot και semilogy.

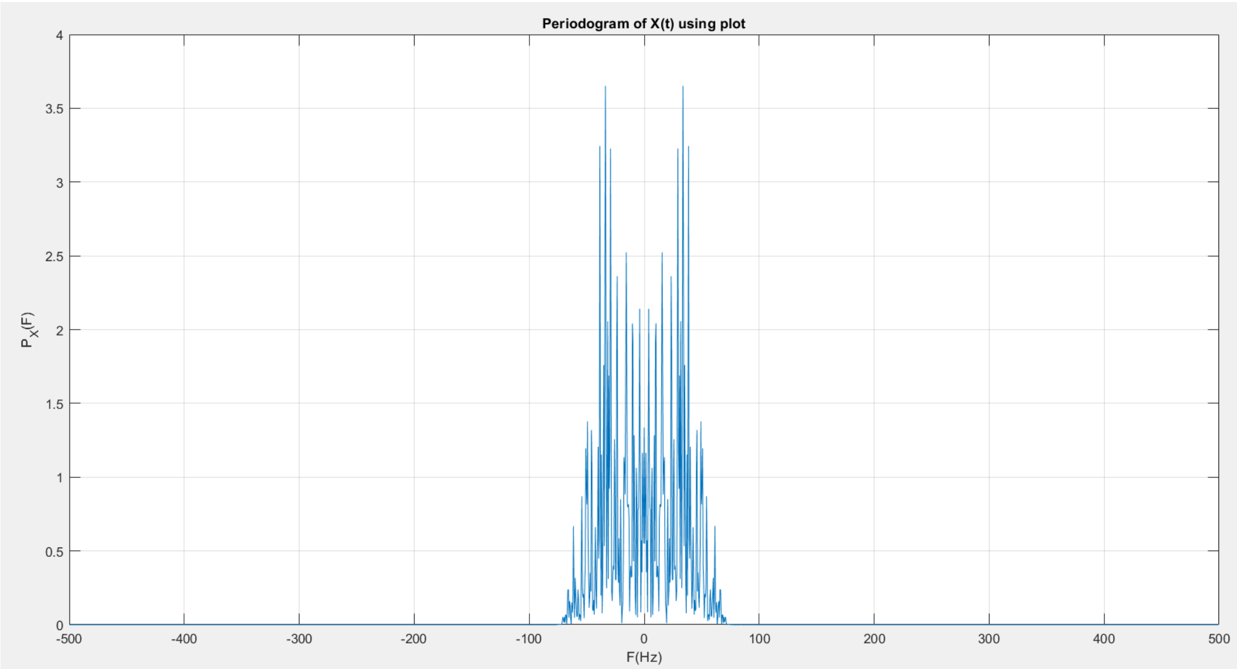
Να επαναλάβετε για διάφορες υλοποιήσεις της ακολουθίας bits $\{b_0, \ldots, b_{N-1}\}$, ώστε να αποκτήσετε μία καλή εικόνα σχετικά με το πώς μοιάζει το περιοδόγραμμα υλοποιήσεων της $X(t)$.

(10) Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές πάνω σε K (ενδεικτικά, $K = 500$) υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Να σχεδιάσετε σε κοινό semilogy την εκτίμηση και τη θεωρητική[2] φασματική πυκνότητα ισχύος.

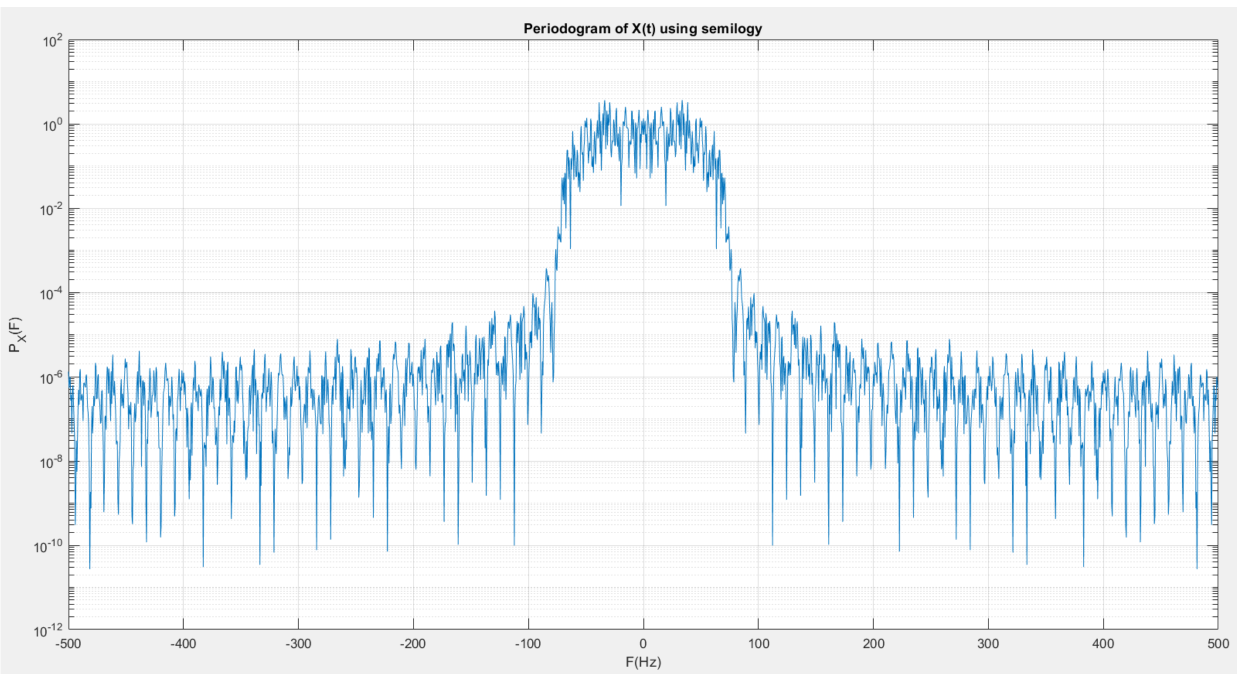
(10) Όσο αυξάνετε το K και το N, θα πρέπει η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη. Συμβαίνει αυτό στα πειράματά σας; Αν ναι, μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Απάντηση:

Αρχικά, σχεδιάστηκε το περιοδόγραμμα, δηλαδή μια εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος, μίας υλοποίησης του X(t) με χρήση plot και semilogy. Το περιοδόγραμμα δίνεται από τον τύπο $P_X(F) = \frac{|X(F)|^2}{T_{total}}$, όπου T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας του X(t).

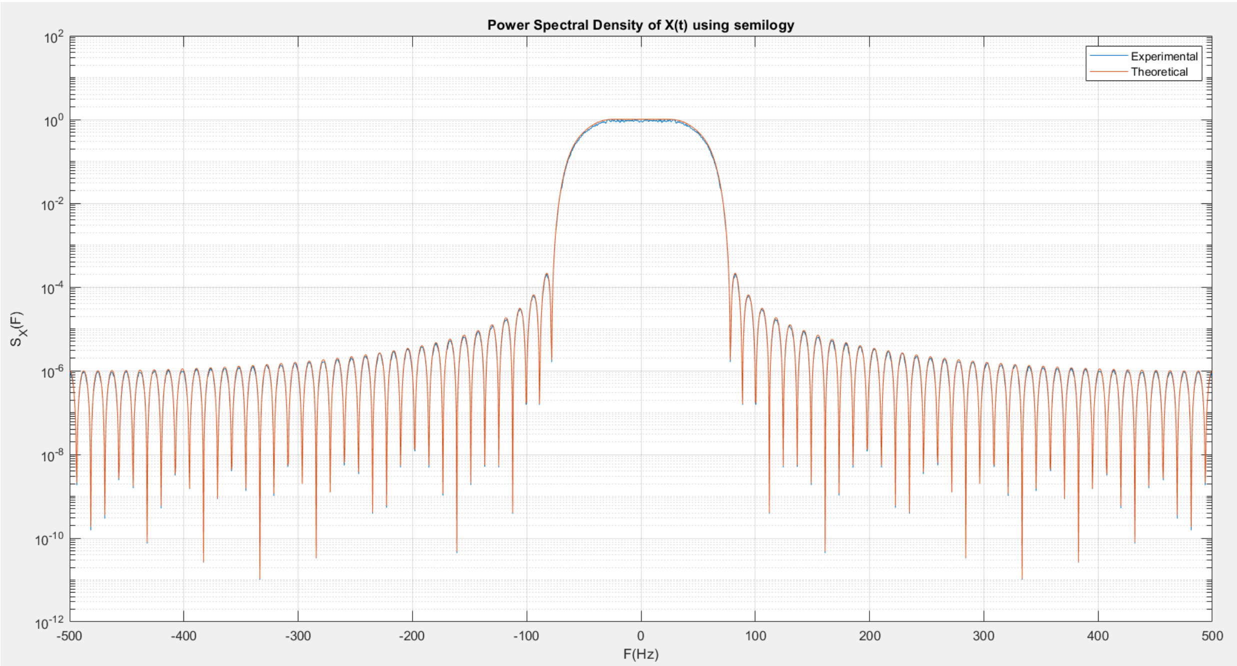


Σχήμα 6: Περιοδόγραμμα $P_X(F)$ μίας υλοποίησης του $X(t)$



Σχήμα 7: Περιοδόγραμμα $P_X(F)$ μίας υλοποίησης του $X(t)$ χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

Έπειτα, έγινε εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος του X(t) υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές (χρήση συνάρτησης mean) πάνω σε K = 500 υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Επιπλέον, υπολογίστηκε η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος, η οποία δίνεται από τον τύπο $S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T} |\Phi(F)|^2$ (χρήση συνάρτησης var). Τέλος, σχεδιάστηκαν σε κοινό semilogy η εκτίμηση και η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t).



Σχήμα 8: Πειραματική και θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t) χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

Παρατηρείται ότι η πειραματική και η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t) σχεδόν ταυτίζονται για τιμές K = 500 και N = 100. Επίσης, κατά την επίλυση της άσκησης παρατηρήθηκε ότι όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις K, τόσο καλύτερη γίνεται η προσέγγιση, αφού είναι πιο ακριβής ο υπολογισμός της μέσης τιμής με περισσότερα δείγματα. Το ίδιο παρατηρήθηκε και με την αύξηση των bits N, καθώς έτσι η ακολουθία μεταφέρει περισσότερη πληροφορία και αποφεύγεται η παραμόρφωση. Η μικρή απόκλιση της πειραματικής από τη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος είναι αναμενόμενη, αφού κατά τον υπολογισμό της δεύτερης θεωρείται ότι το πλήθος των bits είναι άπειρο.

<u>Κώδικας:</u>

```
X_f = fftshift(fft(X_t,Nf));
X_F = X_f*Ts;
Ttotal = length(t_conv)*Ts;
PxF = (abs(X_F).^2)/Ttotal;
```

```
figure;
plot(F,PxF);
title("Periodogram of X(t) using plot");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P_{X}(F)');
grid on;
figure;
semilogy(F,PxF);
title("Periodogram of X(t) using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P_{X}(F)');
grid on;

% N = 50;
% K = 250;
N = 100;
K = 500;
PxF_K = zeros(K,Nf);
for i = 1:K
    b = (sign(randn(N,1))+1)/2;
    X = bits_to_2PAM(b);
    X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);
    X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
    X_F = fftshift(fft(X_t,Nf))*Ts;
    PxF_K(i,:) = (abs(X_F).^2)/Ttotal;
end
SxF_exp = mean(PxF_K,1);
SxF_theor = (var(X)/T).*(abs(PHI_F).^2);
figure;
semilogy(F,SxF_exp);
hold on;
semilogy(F,SxF_theor);
hold off;
legend('Experimental','Theoretical');
title("Power Spectral Density of X(t) using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('S_{X}(F)');
grid on;
```

A.4 Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$00 \longrightarrow +3$$

$$01 \longrightarrow +1$$

$$11 \longrightarrow -1$$

$$10 \longrightarrow -3$$

να κατασκευάσετε την ακολουθία 4-PAM X_n, για $n = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$. Παρατηρήστε ότι, *αν τα bits είναι ισοπίθανα, τότε και τα σύμβολα X_n είναι ισοπίθανα!*

Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \, \phi(t - nT)$$

χρησιμοποιώντας την ίδια περίοδο T με το ερώτημα A.2.

(10) Να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα και να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος μέσω αριθμητικών μέσων τιμών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων της $X(t)$. Να σχεδιάσετε την πειραματική και την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος στο ίδιο semilogy. Τι παρατηρείτε·

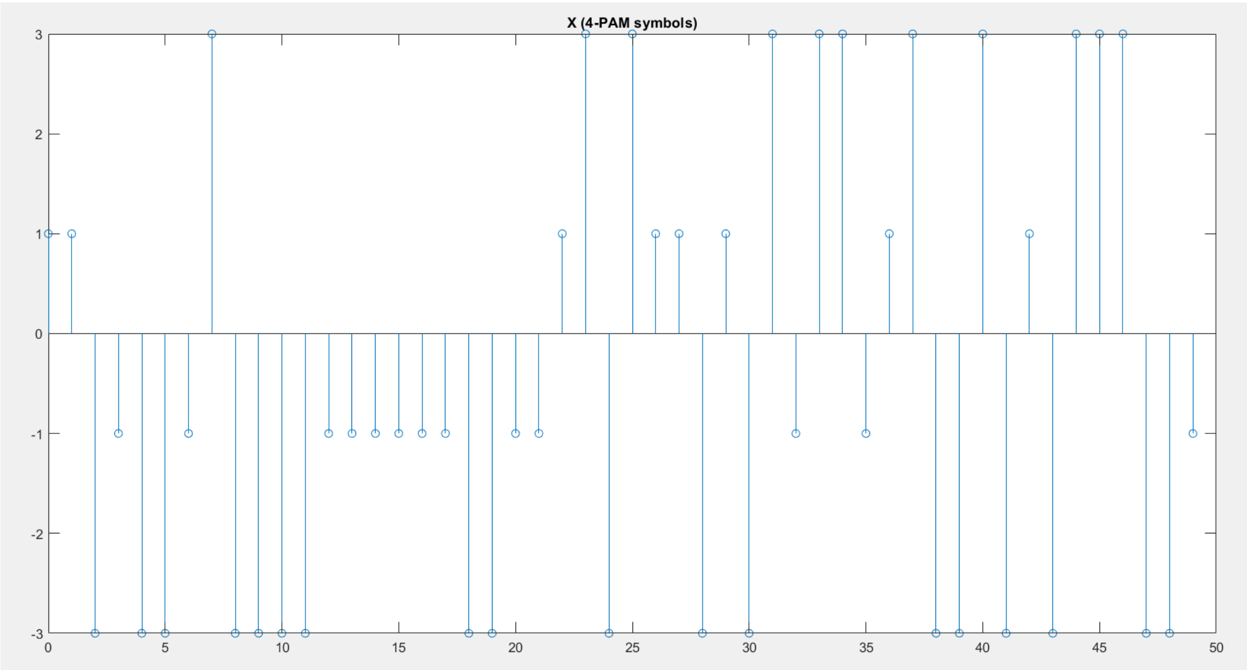
(10) Πώς συγκρίνεται, ως προς το εύρος φάσματος και ως προς το μέγιστο πλάτος τιμών, η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ σε σχέση με αυτή της $X(t)$ του βήματος A.2; Μπορείτε να εξηγήσετε τα αποτελέσματα της σύγκρισης;

<u>Απάντηση:</u>

Αρχικά, δημιουργήθηκε μία ακολουθία N/2 = 50 δυάδων ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits με τη χρήση της εντολής b = (sign(randn(N/2,2))+1)/2.

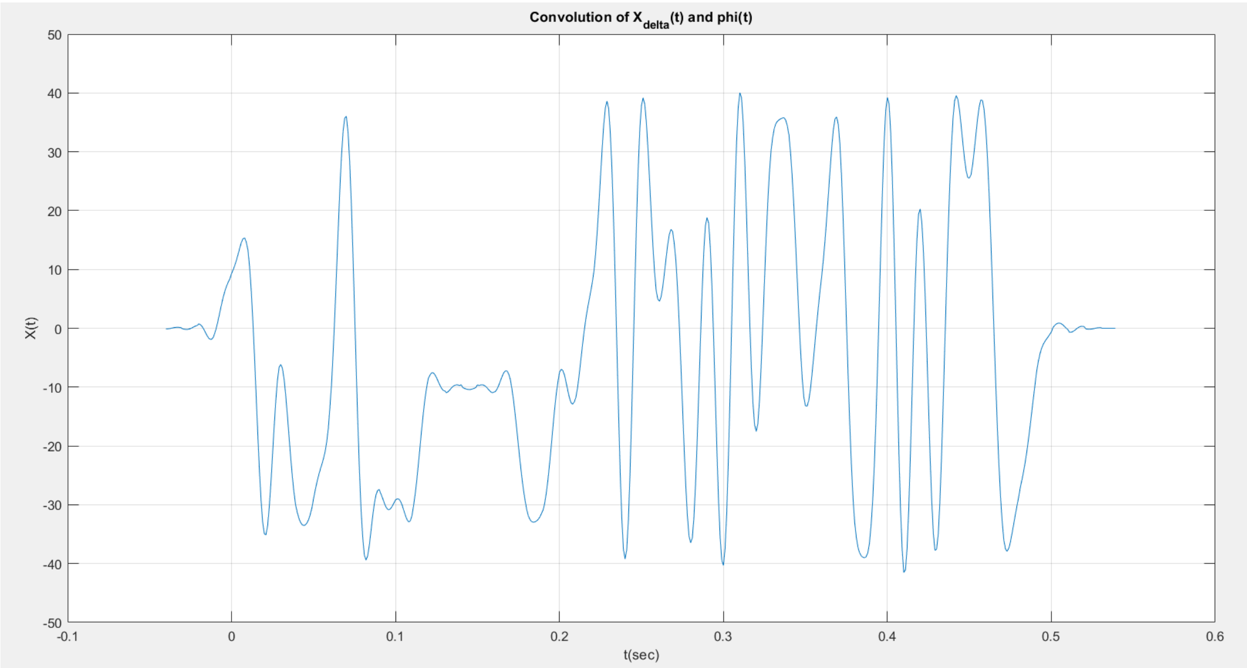
Στη συνέχεια, γράφτηκε η συνάρτηση X = bits_to_4PAM(b), η οποία παίρνει ως είσοδο την ακολουθία b και παράγει ως έξοδο την ακολουθία από 4-PAM σύμβολα X, χρησιμοποιώντας την εξής απεικόνιση:

00 → +3
01 → +1
11 → -1
10 → -3.



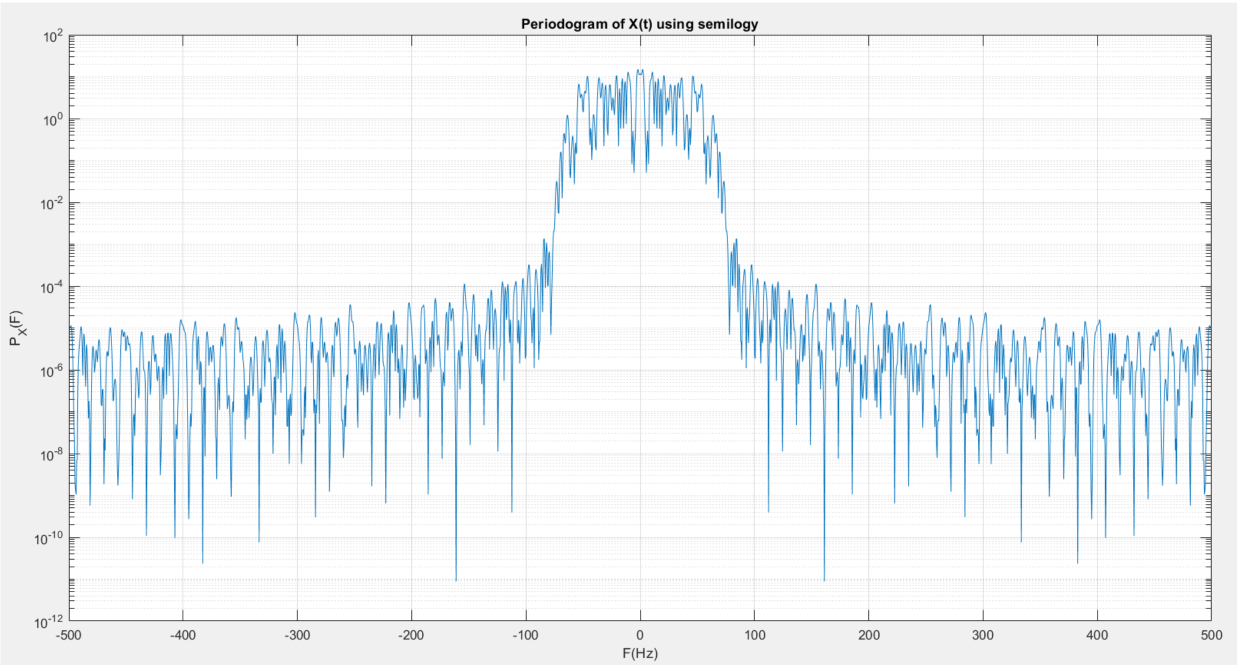
Σχήμα 9: Ακολουθία από 4-PAM σύμβολα που προκύπτει από τυχαία ακολουθία των 100 bits

Το σήμα X(t) = $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \varphi(t-nT)$ είναι η έξοδος του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος με κρουστική απόκριση φ(t) και είσοδο το σήμα X_δ(t) = $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \delta(t-nT)$, δηλαδή X(t) = X_δ(t) ⋆ φ(t).



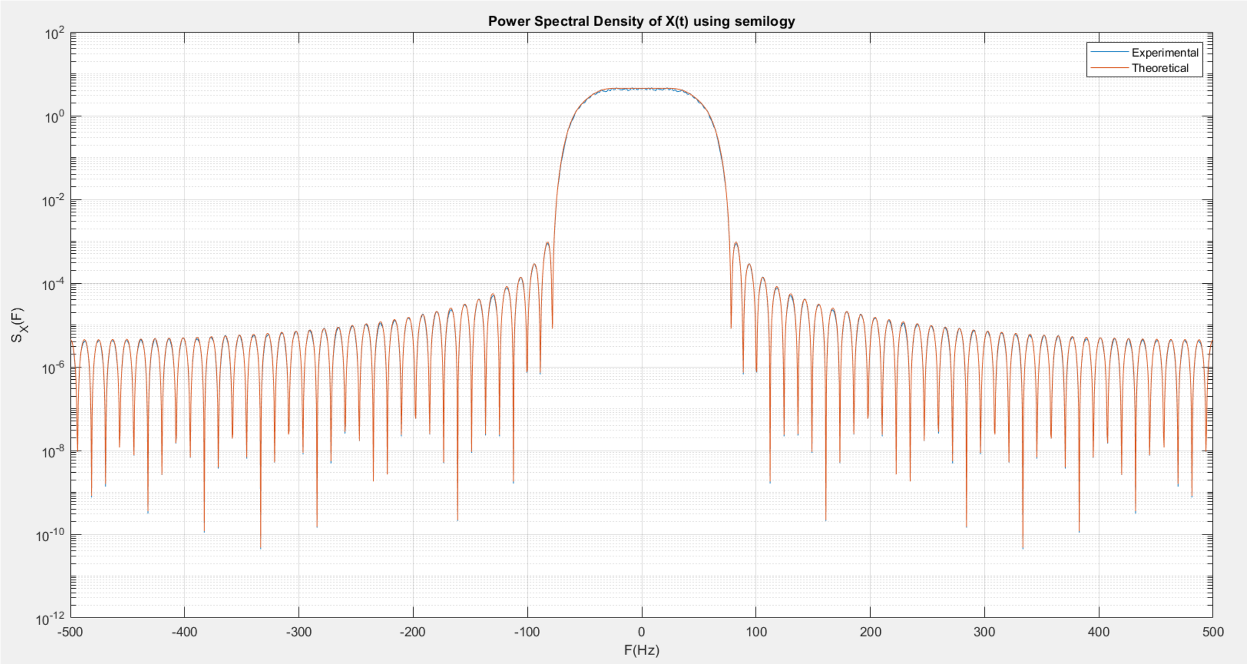
Σχήμα 10: Σήμα X(t) = X_δ(t) ⋆ φ(t)

Έπειτα, σχεδιάστηκε το περιοδόγραμμα, δηλαδή μια εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος, μίας υλοποίησης του X(t). Το περιοδόγραμμα δίνεται από τον τύπο $P_X(F) = \frac{|X(F)|^2}{T_{total}}$, όπου T_{total} είναι ο συνολικός χρόνος διάρκειας του X(t).



Σχήμα 11: Περιοδόγραμμα $P_X(F)$ μίας υλοποίησης του X(t) χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

Τέλος, έγινε εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος του X(t) υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές (χρήση συνάρτησης mean) πάνω σε K = 500 υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Επιπλέον, υπολογίστηκε η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος, η οποία δίνεται από τον τύπο $S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T}|\Phi(F)|^2$ (χρήση συνάρτησης var). Τέλος, σχεδιάστηκαν σε κοινό semilogy η εκτίμηση και η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t).



Σχήμα 12: Πειραματική και θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t) χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

Όπως και προηγουμένως, παρατηρείται ότι η πειραματική και η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t) σχεδόν ταυτίζονται. Επίσης, το εύρος φάσματος, όπως φαίνεται και από τις κυματομορφές, είναι ίδιο με αυτό του προηγούμενου ερωτήματος, αφού η περίοδος T και ο συντελεστής roll-off α δεν άλλαξαν. Ενώ, το μέγιστο πλάτος σε αυτή την περίπτωση είναι μεγαλύτερο από ότι στην 2-PAM περίπτωση, λόγω της αναλογίας της φασματικής πυκνότητας ισχύος με τη διασπορά. Ακόμη, η μικρή απόκλιση της πειραματικής από τη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος είναι αναμενόμενη, αφού κατά τον υπολογισμό της δεύτερης θεωρείται ότι το πλήθος των bits είναι άπειρο.

<u>Κώδικας:</u>

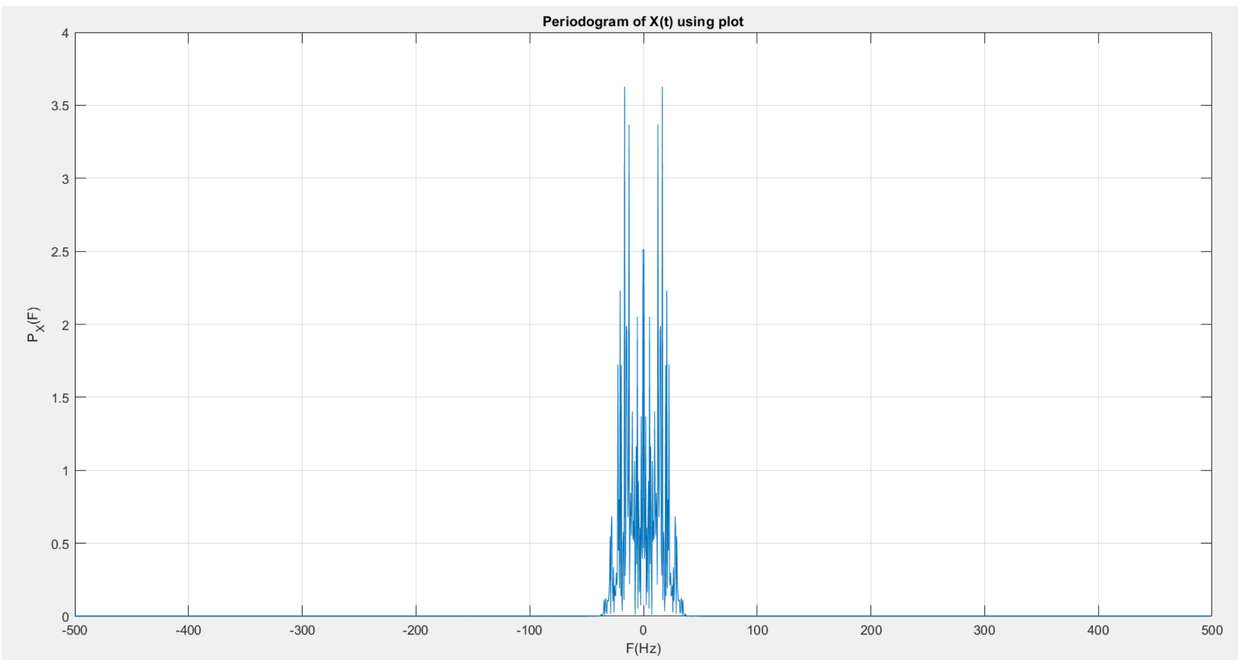
```
b = (sign(randn(N/2,2))+1)/2;
n = 0:N/2-1;
X = bits_to_4PAM(b);
figure;
stem(n,X);
title("X (4-PAM symbols)");

X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);
t_delta = 0:Ts:(N/2)*T-Ts;
X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
t_conv = t_delta(1)+t(1):Ts:t_delta(end)+t(end);
figure;
```

```
plot(t_conv,X_t);
title("Convolution of X_{delta}(t) and phi(t)");
xlabel('t(sec)');
ylabel('X(t)');
grid on;

X_f = fftshift(fft(X_t,Nf));
X_F = X_f*Ts;
Ttotal = length(t_conv)*Ts;
PxF = (abs(X_F).^2)/Ttotal;
figure;
semilogy(F,PxF);
title("Periodogram of X(t) using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P_{X}(F)');
grid on;

N = 100;
K = 500;
PxF_K = zeros(K,Nf);
for i = 1:K
   b = (sign(randn(N/2,2))+1)/2;
   X = bits_to_4PAM(b);
   X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);
   X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
   X_F = fftshift(fft(X_t,Nf))*Ts;
   PxF_K(i,:) = (abs(X_F).^2)/Ttotal;
end
SxF_exp = mean(PxF_K,1);
SxF_theor = (var(X)/T).*(abs(PHI_F).^2);
figure;
semilogy(F,SxF_exp);
hold on;
semilogy(F,SxF_theor);
hold off;
legend('Experimental','Theoretical');
title("Power Spectral Density of X(t) using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('S_{X}(F)');
grid on;
```

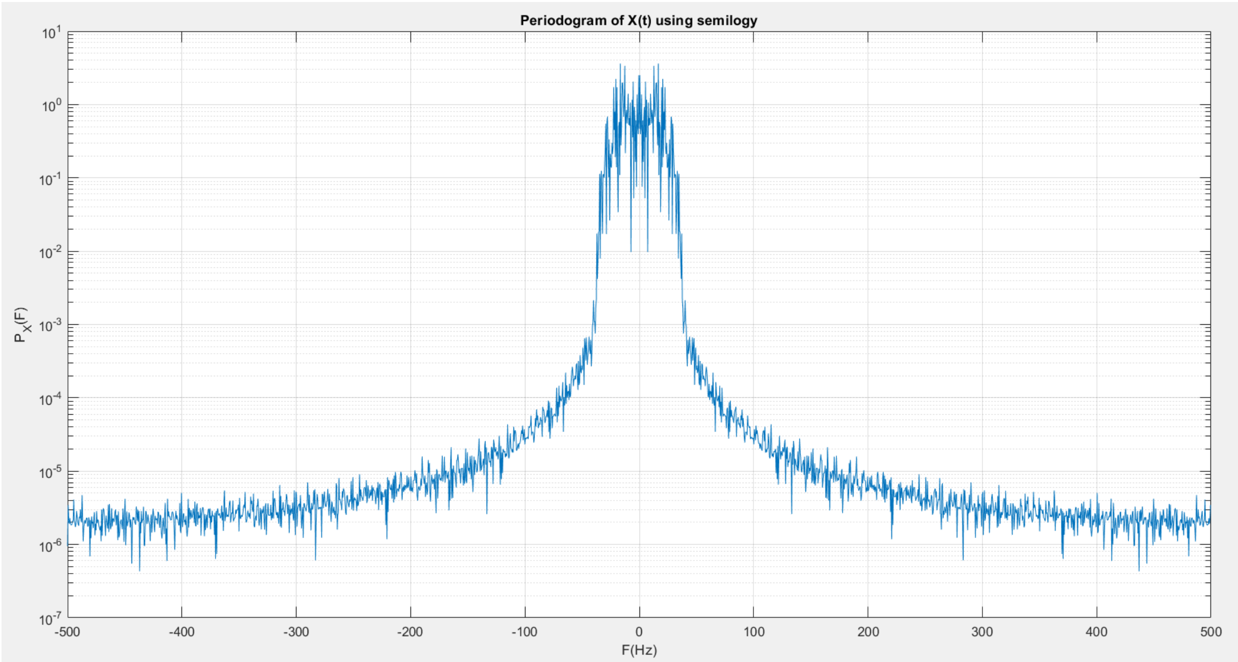
A.5 (10) Να επαναλάβετε το βήμα A.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ (να διατηρήσετε την περίοδο δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων, άρα, θα πρέπει να διπλασιάσετε την παράμετρο over).

(5) Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του βήματος A.3; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

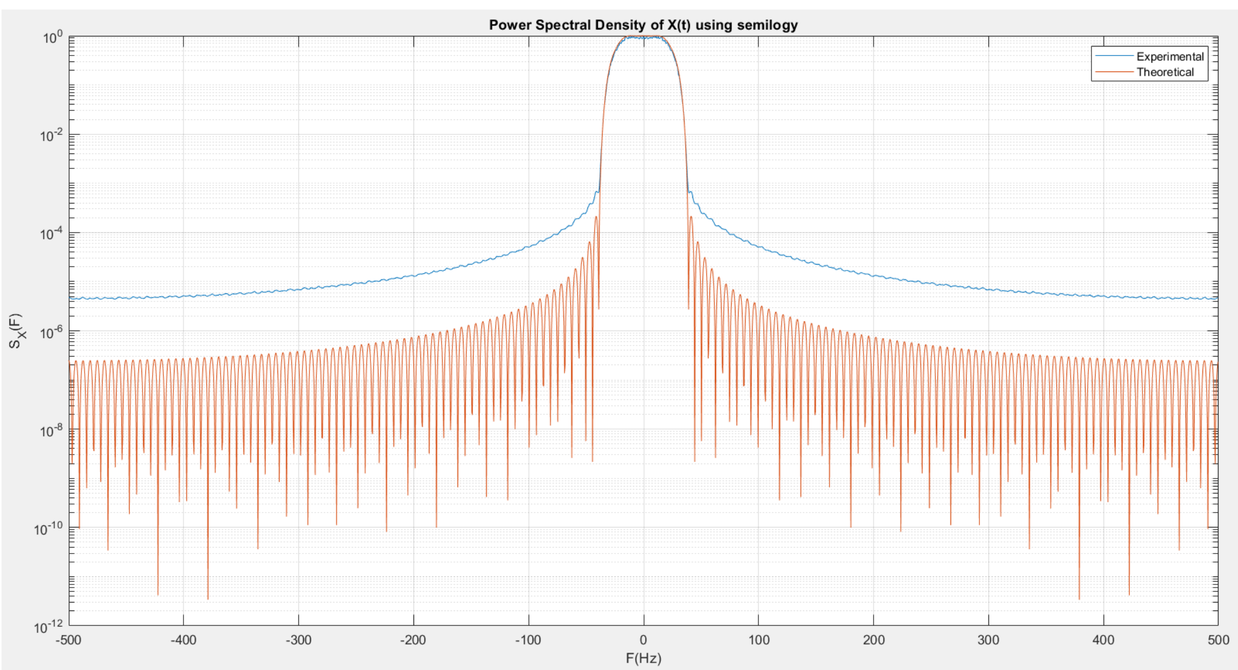
<u>Απάντηση:</u>



Σχήμα 13: Περιοδόγραμμα $P_X(F)$ μίας υλοποίησης του X(t)



Σχήμα 14: Περιοδόγραμμα $P_X(F)$ μίας υλοποίησης του X(t) χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα



Σχήμα 15: Πειραματική και θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος του X(t) χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

Παρατηρείται ότι το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση είναι αρκετά μικρότερο (σχεδόν υποδιπλασιάστηκε) σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του ερωτήματος Α.3. Αυτό οφείλεται στο ότι το εύρος φάσματος είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου T, η οποία διπλασιάστηκε.

<u>Κώδικας:</u>

```
T = 2*10^-2;
over = 20;
A = 4;
a = 0.5;
[phi,t] = srrc_pulse(T,over,A,a);
Ts = T/over;
Fs = 1/Ts;
Nf = 2048;
F = -Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
PHI_f = fftshift(fft(phi,Nf));
PHI_F = PHI_f*Ts;
N = 100;
b = (sign(randn(N,1))+1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);
t_delta = 0:Ts:N*T-Ts;
X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
t_conv = t_delta(1)+t(1):Ts:t_delta(end)+t(end);
X_f = fftshift(fft(X_t,Nf));
X_F = X_f*Ts;
Ttotal = length(t_conv)*Ts;
PxF = (abs(X_F).^2)/Ttotal;
figure;
plot(F,PxF);
title("Periodogram of X(t) using plot");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P_{X}(F)');
grid on;
figure;
semilogy(F,PxF);
title("Periodogram of X(t) using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P_{X}(F)');
grid on;
```

```
% N = 50;
% K = 250;
N = 100;
K = 500;
PxF_K = zeros(K,Nf);
for i = 1:K
   b = (sign(randn(N,1))+1)/2;
   X = bits_to_2PAM(b);
   X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);
   X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;
   X_F = fftshift(fft(X_t,Nf))*Ts;
   PxF_K(i,:) = (abs(X_F).^2)/Ttotal;
end
SxF_exp = mean(PxF_K,1);
SxF_theor = (var(X)/T).*(abs(PHI_F).^2);
figure;
semilogy(F,SxF_exp);
hold on;
semilogy(F,SxF_theor);
hold off;
legend('Experimental','Theoretical');
title("Power Spectral Density of X(t) using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('S_{X}(F)');
grid on;
```

A.6 (2.5) Αν θέλατε να στείλετε δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγατε 2-PAM ή 4-PAM, και γιατί;

(2.5) Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγατε περίοδο συμβόλου T ή $T' = 2T$, και γιατί;

Απάντηση:

Για να σταλούν δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, η καλύτερη επιλογή είναι το 4-PAM, αφού στον ίδιο χρόνο αντιστοιχεί 2 bits σε 1 σύμβολο, ενώ το 2-PAM αντιστοιχεί 1 bit σε 1 σύμβολο.

Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, η καλύτερη επιλογή είναι η περίοδος συμβόλου T’ = 2T, αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα Α.5, σε αυτή την περίπτωση το εύρος φάσματος είναι αρκετά μικρότερο (σχεδόν μισό).

Β. Στο δεύτερο μέρος της άσκησης, το οποίο είναι, κυρίως, θεωρητικό, θα μελετήσουμε απλές στοχαστικές διαδικασίες.

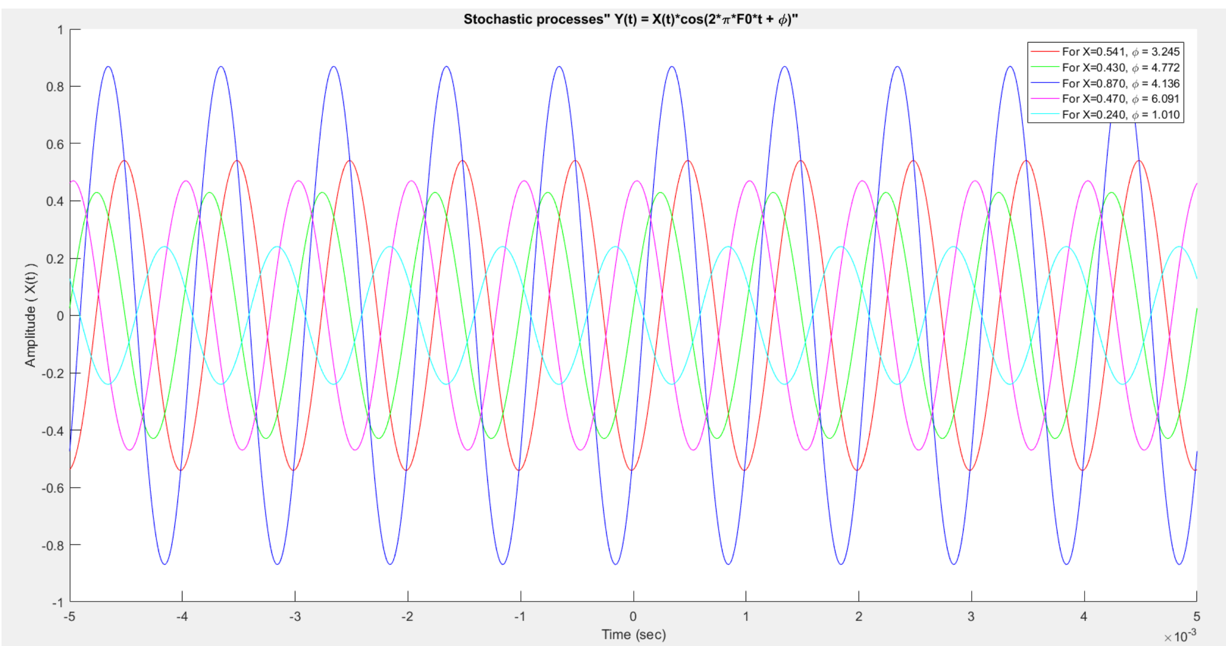
Έστω

$$Y(t) = X\cos(2\pi F_0 t + \Phi), \tag{1}$$

όπου $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\Phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$, και X, Φ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

1. (5) Να σχεδιάσετε σε κοινό plot 5 υλοποιήσεις της.
2. (10) Να υπολογίσετε τις ποσότητες $\mathcal{E}[Y(t)]$ και $R_{YY}(t+\tau, t) = \mathcal{E}[(Y(t+\tau)Y(t)]$. Τι διαπιστώνετε;
3. (5) Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, $S_Y(F)$.

<u>Απάντηση:</u>



2. $E[Y(t)] = E[X\cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = E[X] * \underbrace{E[\cos(2\pi f_0 t + \varphi)]}_{0}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} E[Y(t)] = 0 \quad (1)$$

$$^{*}E[\cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + 2\varphi)\,d\varphi \xrightarrow[\int_0^{2\pi}\cos x\,dx]{\text{της μορφής}} 0$$

Αφού η $\cos x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 = \lim_{x \to 0}(\cos x) = \lim_{x \to 2\pi}(\cos x)$ και ισχύει $\forall x \in [0, 2\pi]$ $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 0$

άρα αφού $\cos_{x \to 2\pi^{+}}(x)dx = 1$, οπότε ισχύει και για το $\varphi \in [0, 2\pi)$ της άσκησής μας.

$$R_{YY}(t+\tau, t) = E[Y(t+\tau) \cdot Y(t)] = E[X\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\varphi)X\cos(2\pi f_0 t + \varphi)]$$

$$= E[X(t+\tau)X(t)] * E[\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\varphi)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)]$$

$$= R_{XX}(t+\tau, t) \cdot \cos(2\pi f_0(t+\tau)+\varphi) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (2)$$

Απ' τα παραπάνω, παρατηρούμε τα εξής:

→ Η μέση τιμή της Y είναι περιοδική, καθώς για $T = T$ ισχύει ότι: $m_X(t) = m_X(t+T)$

→ Από την (1), όπου $E[Y(t)] = 0$, οπότε με βάση αυτή, ισχύει και: $E[Y(t+T)] = E[X(t+T)] * E[\cos(2\pi f_0(t+T) + \theta)]$
$$E[Y(t+T)] = 0 = E[Y(t)] \quad (3)$$

→ Για την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{XX}((t+\tau)+T, t+T) = A^2\sigma_X^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t+\tau+(1-n)T)\,g(t+(1-n)T) \xrightarrow[1-n=n]{n=-\infty \to +\infty}$$

$$R_{XX}((t+\tau)+T, t+T) = R_{XX}(t+\tau, t) \quad (4)$$

Άρα είναι περιοδική η $R_{XX}(t_1, t_2)$, με περίοδο $T = T$ (4)

Άρα η $Y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη υπό την ευρεία έννοια.

3 Για να υπολογίσουμε την $S_Y(F)$, αρκεί να υπολογιστεί η $\bar{R}_Y(\tau)$. Άρα:

$$\rightarrow \bar{R}_Y(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} R_{YY}(t+\tau,t)\,dt = \int_{T_0} R_{XX}(t+\tau,t)\cos(2\pi f_0\tau)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T_0}\cos(2\pi f_0\tau)\int_{T_0} R_{XX}(t+\tau,t) \xrightarrow{B.2} \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\bar{R}_X(\tau)$$

$$\rightarrow S_Y(F) = \mathcal{F}\{\bar{R}_Y(\tau)\} = \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\bar{R}_X(\tau)\}$$

$$S_Y(F) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(S_X(F-F_0)+S_X(F+F_0)\right) = \frac{1}{4}\left[S_X(F+F_0)+S_X(F-F_0)\right]$$

Κώδικας:

```
dt = 0.00001;
T = 0.001;
Fo = 1000;
t = -5*T:dt:5*T;
k = 5;
N = 0-dt:dt:1-dt;
U = 0:dt:2*pi-dt;
figure;
hold on;
colors = {'r', 'g', 'b', 'm', 'c'};
labels = cell(1, k);
for i = 1:k
    % Select random values for X and phi
    permuted_indices_N = randperm(length(N));
    random_indices_N = permuted_indices_N(1);
    X = N(random_indices_N);
    permuted_indices_U = randperm(length(U));
    random_indices_U = permuted_indices_U(1);
    phi = U(random_indices_U);
    Y = X*cos(2*pi*Fo*t + phi);
```

```
    plot(t, Y, 'color', colors{i});
    labels{i} = sprintf('For X=%.3f, {{\\phi}} = %.3f', X, phi);
end
hold off;
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude ( X(t) )');
title('Stochastic processes'' Y(t) = X(t)*cos(2*{\pi}*F0*t + {\phi})'' ');
legend(labels);
```