
Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή ΗΜΜΥ
Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι
Παράδοση 1ης εργασίας
Ημερομηνία Παράδοσης: 31 Μαρτίου 2023
Μονάδες 130/1000

Ομάδα 68

	Φοιτητής 1	Φοιτητής 2
Επώνυμο	Καραλής	Γιαλούρης
Όνομα	Κωνσταντίνος	Γεώργιος
A.M.	2019030117	2019030063

Πλήθος ωρών που απαιτήθηκαν για την υλοποίηση της άσκησης: 15

Θ1. (10) Για κάθε $T > 0$, να υπολογίσετε (λεπτομερώς το ολοκλήρωμα) και να σχεδιάσετε (η απάντηση είναι αρκετά απλή, συνεπώς, μπορείτε να τη σχεδιάσετε εύκολα με χρήση του matlab) τη συνάρτηση αυτοομοιότητας της

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τι παρατηρείτε;

Απάντηση:

Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

είναι η $R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Για $\tau = 0$,

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = R_{\varphi\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + 0)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) = 1.$$

Για $\frac{T}{2} - \tau < -\frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > T$,

$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = 0$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.

Για $-\frac{T}{2} - \tau > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau < -T$,

$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = 0$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.

Για $-\frac{T}{2} \leq \frac{T}{2} - \tau < \frac{T}{2} \Leftrightarrow 0 < \tau \leq T$,

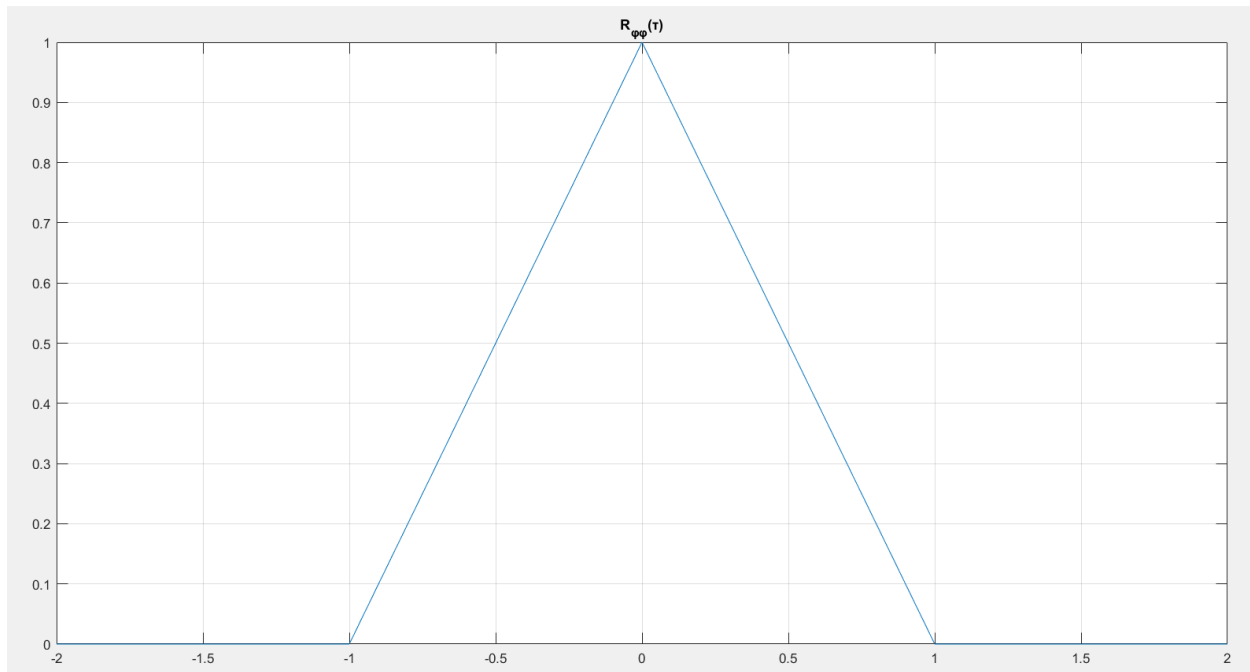
$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}\right) = 1 - \frac{\tau}{T}.$$

Για $-\frac{T}{2} < -\frac{T}{2} - \tau \leq \frac{T}{2} \Leftrightarrow -T \leq \tau < 0$,

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} + \tau\right) = 1 + \frac{\tau}{T}.$$

$$\text{Άρα, } R_{\varphi\varphi}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & \text{αν } |\tau| \leq T \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι η συνάρτηση αυτοομοιότητας είναι άρτια συνάρτηση.



Σχήμα 1: Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t)$ για $T = 1$

Κώδικας:

```
T = 1;
t = -2:0.01:2;
R = zeros(1,length(t));
for i = 1:length(t)
    if (abs(t(i)) <= T)
        R(i) = 1-abs(t(i))/T;
    else
        R(i) = 0;
    end
end
plot(t,R);
title("R_{\varphi\varphi}(\tau)");
```

Θ2. (10) Να επαναλάβετε για την $\varphi(t-2)$.

Απάντηση:

Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t-2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } |t-2| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

είναι η $R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-2+\tau)\varphi(t-2)dt, \tau \in \mathbb{R}$.

Για $\tau = 0$,

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi}(\tau) &= R_{\varphi\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-2+0)\varphi(t-2)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t-2)dt = \int_{2-\frac{T}{2}}^{2+\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \left(2 + \frac{T}{2} - 2 + \frac{T}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Για $2 + \frac{T}{2} - \tau < 2 - \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau > T$,

$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+\tau)\varphi(t)dt = 0$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.

Για $2 - \frac{T}{2} - \tau > 2 + \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau < -T$,

$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+\tau)\varphi(t)dt = 0$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.

Για $2 - \frac{T}{2} \leq 2 + \frac{T}{2} - \tau < 2 + \frac{T}{2} \Leftrightarrow 0 < \tau \leq T$,

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+\tau)\varphi(t)dt = \int_{2-\frac{T}{2}}^{2+\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{1}{T} \left(2 + \frac{T}{2} - \tau - 2 + \frac{T}{2}\right) = 1 - \frac{\tau}{T}.$$

Για $2 - \frac{T}{2} < 2 - \frac{T}{2} - \tau \leq 2 + \frac{T}{2} \Leftrightarrow -T \leq \tau < 0$,

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+\tau)\varphi(t)dt = \int_{2-\frac{T}{2}-\tau}^{2+\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{1}{T} \left(2 + \frac{T}{2} - 2 + \frac{T}{2} + \tau\right) = 1 + \frac{\tau}{T}.$$

$$\text{Άρα, } R_{\varphi\varphi}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & \text{αν } |\tau| \leq T \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t-2)$ είναι ίδια με τη συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t)$.

Θ3. (10) Να επαναλάβετε για την

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Απάντηση:

$$\text{Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της } \varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

είναι η $R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Για $\tau = 0$,

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi}(\tau) &= R_{\varphi\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + 0)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{T}{2} + \frac{1}{T} \left(T - \frac{T}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Για $T - \tau < 0 \Leftrightarrow \tau > T$,

$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = 0$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.

Για $-\tau > T \Leftrightarrow \tau < -T$,

$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = 0$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.

Για $0 \leq T - \tau < \frac{T}{2} \Leftrightarrow \frac{T}{2} < \tau \leq T$,

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = \int_0^{T-\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)dt = -\frac{1}{T} (T - \tau) = -1 + \frac{\tau}{T}.$$

Για $\frac{T}{2} \leq T - \tau < T \Leftrightarrow 0 < \tau \leq \frac{T}{2}$,

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T-\tau} \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \tau\right) - \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \tau\right) + \frac{1}{T} \left(T - \tau - \frac{T}{2}\right) = 1 - \frac{3\tau}{T}. \end{aligned}$$

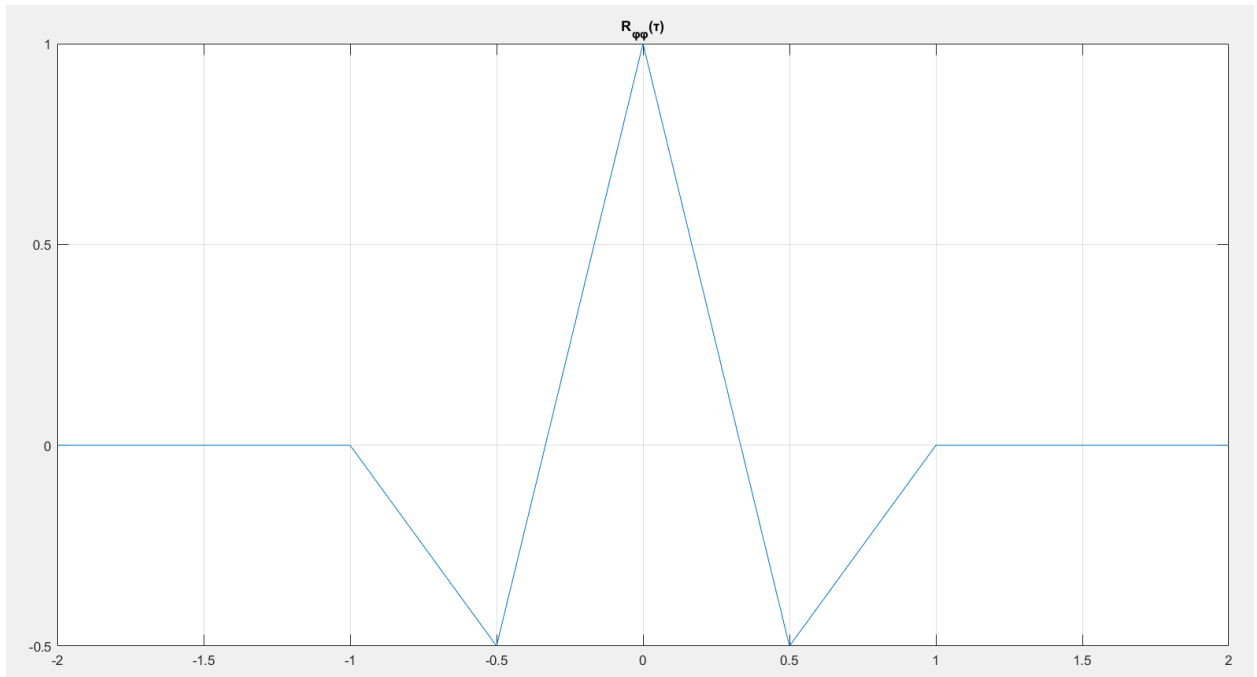
Για $\frac{T}{2} < -\tau \leq T \Leftrightarrow -T \leq \tau < -\frac{T}{2}$,

$$R_{\varphi\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + \tau)\varphi(t)dt = \int_{-\tau}^T \frac{1}{\sqrt{T}} \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)dt = -\frac{1}{T} (T + \tau) = -1 - \frac{\tau}{T}.$$

$$\text{Για } 0 < -\tau \leq \frac{T}{2} \Leftrightarrow -\frac{T}{2} \leq \tau < 0,$$

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+\tau)\varphi(t)dt = \int_{-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dt + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) dt + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^T \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \tau\right) - \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \tau - \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \left(T - \frac{T}{2} + \tau\right) = 1 + \frac{3\tau}{T}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } R_{\varphi\varphi}(\tau) = \begin{cases} -1 + \frac{\tau}{T}, & \text{αν } \frac{T}{2} < \tau \leq T \\ -1 - \frac{\tau}{T}, & \text{αν } -T \leq \tau < -\frac{T}{2} \\ 1 - \frac{3\tau}{T}, & \text{αν } 0 < \tau \leq \frac{T}{2} \\ 1 + \frac{3\tau}{T}, & \text{αν } -\frac{T}{2} \leq \tau \leq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η συνάρτηση αυτοομοιότητας της $\varphi(t)$ για $T = 1$

Κώδικας:

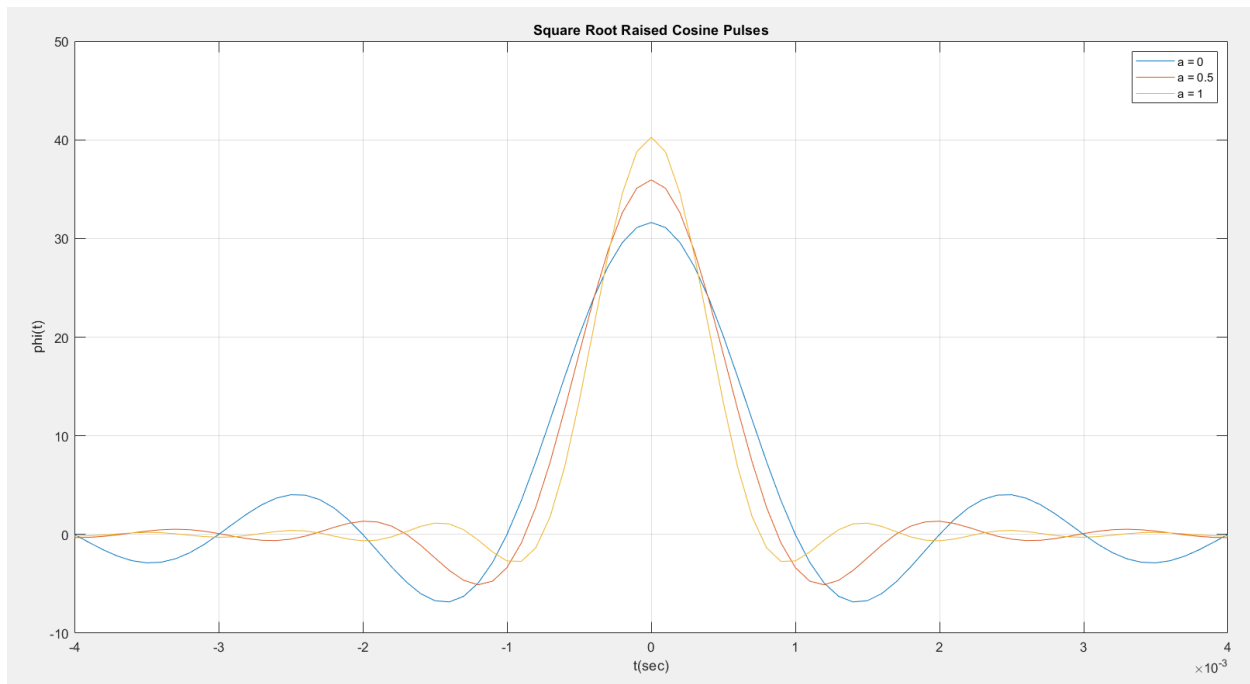
```
T = 1;
t = -2:0.01:2;
R = zeros(1,length(t));
for i = 1:length(t)
    if (t(i) > T/2) && (t(i) <= T)
        R(i) = -1+t(i)/T;
    elseif (t(i) >= -T) && (t(i) < -T/2)
        R(i) = -1-t(i)/T;
    elseif (t(i) > 0) && (t(i) <= T/2)
        R(i) = 1-3*t(i)/T;
    elseif (t(i) >= -T/2) && (t(i) <= 0)
        R(i) = 1+3*t(i)/T;
    else
        R(i) = 0;
    end
end
figure;
plot(t,R);
title("R_{φφ}(τ)");
```

A1. Να δημιουργήσετε παλμούς SRRC $\phi(t)$. Ενδεικτικές τιμές: $T = 10^{-3}\text{sec}$, $T_s = \frac{T}{\text{over}}$, $\text{over} = 10$, $A = 4$ και συντελεστή roll-off $a = 0, 0.5, 1$ (το A δηλώνει το μισό μήκος του αποκομμένου παλμού μετρημένο σε περιόδους συμβόλου).

(5) Να σχεδιάσετε σε κοινό plot τους παλμούς, στον κατάλληλο άξονα του χρόνου, για $T = 10^{-3}\text{sec}$, $\text{over} = 10$, $A = 4$ και $a = 0, 0.5, 1$.

(5) Τι παρατηρείτε σχετικά με το ρυθμό “μείωσης” του πλάτους των παλμών, όσο αυξάνεται η απόλυτη τιμή του χρόνου, $|t|$, σε σχέση με τις τιμές του a ; Ποιος παλμός φθίνει πιο γρήγορα;

Απάντηση:



Σχήμα 3: Παλμοί SRRC για $T = 10^{-3}\text{sec}$, $\text{over} = 10$, $A = 4$ και συντελεστή roll-off $a = 0, 0.5, 1$

Παρατηρείται ότι όσο μεγαλώνει ο συντελεστής roll-off a , τόσο αυξάνεται ο ρυθμός “μείωσης” του πλάτους των παλμών, καθώς αυξάνεται η απόλυτη τιμή του χρόνου. Έτσι, ο παλμός με συντελεστή roll-off $a = 1$ φθίνει πιο γρήγορα από τους άλλους δύο.

Κώδικας:

```
T = 10^-3;  
over = 10;  
A = 4;  
a1 = 0;  
a2 = 0.5;  
a3 = 1;  
[phi1,t] = srcc_pulse(T,over,A,a1);  
[phi2,t] = srcc_pulse(T,over,A,a2);  
[phi3,t] = srcc_pulse(T,over,A,a3);  
figure;  
plot(t,phi1);  
hold on;  
plot(t,phi2);  
plot(t,phi3);  
hold off;
```



```

legend('a = 0','a = 0.5','a = 1');
xlim([-4*T 4*T]);
title("Square Root Raised Cosine Pulses");
xlabel('t(sec)');
ylabel('phi(t)');
grid on;

```

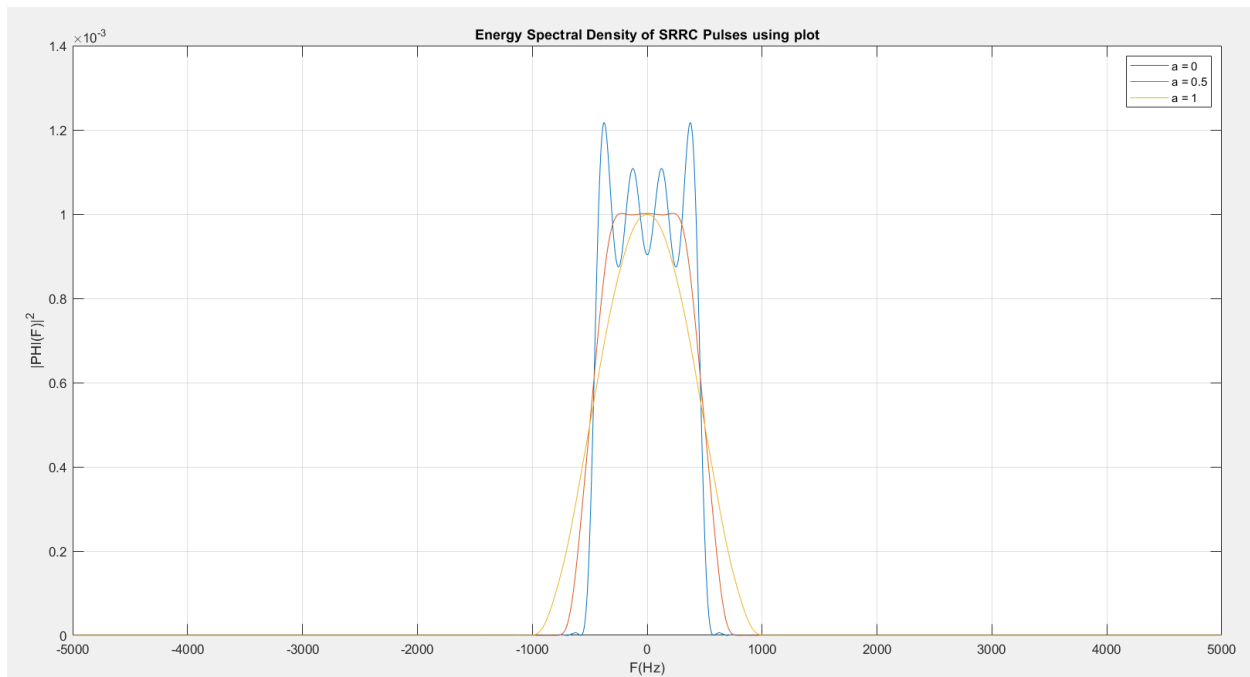
A2. Μέσω των συναρτήσεων `fft` και `fftshift`, να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Fourier $\Phi(F)$ των παλμών που σχεδιάσατε στο προηγούμενο βήμα, σε N_f ισαπέχοντα σημεία στον άξονα συχνοτήτων $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})$ (ενδεικτικά, $N_f = 1024, 2048$).

Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ αυτών των παλμών

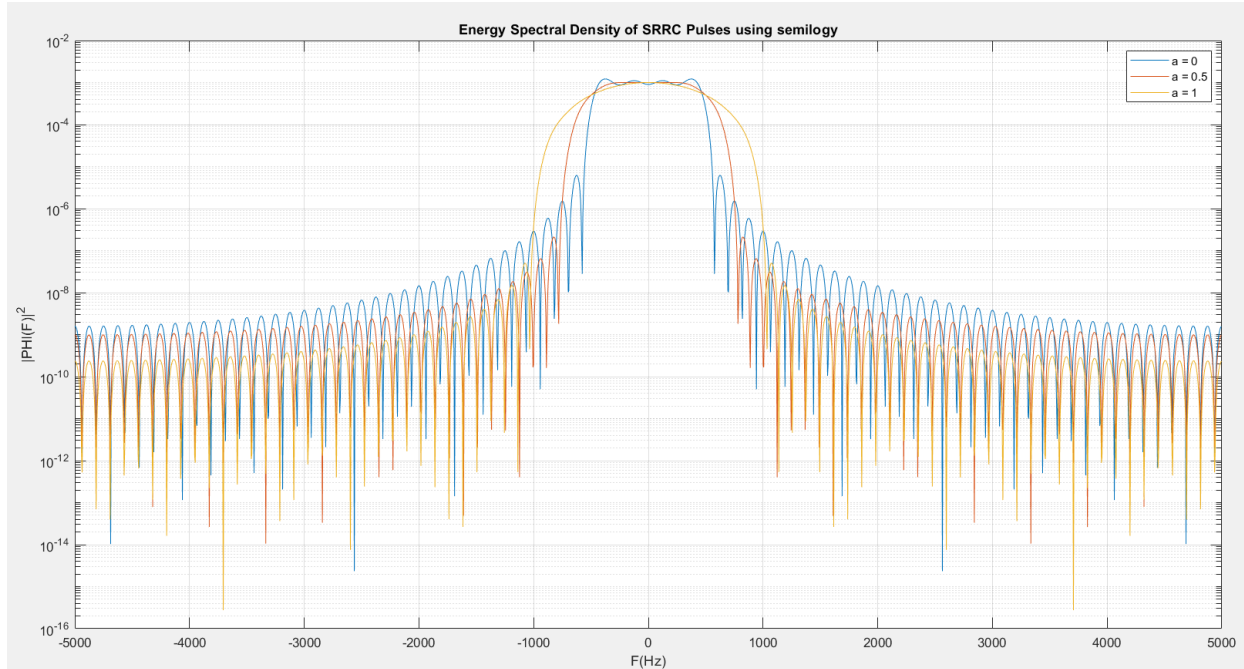
(5) (α) σε κοινό plot,

(5) (β) σε κοινό semilogy (παρατηρήστε ότι η semilogy σας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσετε τις τιμές των $|\Phi(F)|^2$ σε διαστήματα όπου αυτές είναι πολύ μικρές, κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει με την plot).

Απάντηση:



Σχήμα 4: Φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ των παλμών SRRC του ερωτήματος A1



Σχήμα 5: Φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ των παλμών SRRC του ερωτήματος A1 χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα

Κώδικας:

```
Ts = T/over;
Fs = 1/Ts;
N = 2048;
F = [-Fs/2:F/N:F/2-Fs/N];
PHI1_F = fftshift(fft(phi1,N)*Ts);
PHI2_F = fftshift(fft(phi2,N)*Ts);
PHI3_F = fftshift(fft(phi3,N)*Ts);
figure;
plot(F,abs(PHI1_F).^2);
hold on;
plot(F,abs(PHI2_F).^2);
plot(F,abs(PHI3_F).^2);
hold off;
legend('a = 0','a = 0.5','a = 1');
title("Energy Spectral Density of SRRC Pulses using plot");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('|PHI(F)|^2');
grid on;
```

```
figure;
semilogy(F,abs(PHI1_F).^2);
hold on;
semilogy(F,abs(PHI2_F).^2);
semilogy(F,abs(PHI3_F).^2);
hold off;
legend('a = 0','a = 0.5','a = 1');
title("Energy Spectral Density of SRRC Pulses using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
ylabel('|PHI(F)|^2');
grid on;
```

A3. Το θεωρητικό εύρος φάσματος των παλμών άπειρης διάρκειας είναι $BW = \frac{1+a}{2T}$.

(5) Να υπολογίσετε την τιμή του θεωρητικού εύρους φάσματος για καθέναν από τους τρεις παλμούς.

(5) Στην πράξη, αφού οι αποκομμένοι παλμοί έχουν θεωρητικά άπειρο εύρος φάσματος, χρειάζεται ένας πιο πρακτικός ορισμός για το εύρος φάσματος. Στο κοινό semilogy του ερωτήματος A2, να σχεδιάσετε μία οριζόντια γραμμή με τιμή c (ενδεικτικά $c = \frac{T}{10^3}$) και να θεωρήσετε ότι οι τιμές οι οποίες ευρίσκονται κάτω από αυτή τη γραμμή είναι “πρακτικά μηδέν”. Σε αυτή την περίπτωση, ποιο είναι προσεγγιστικά το εύρος φάσματος των τριών παραπάνω παλμών (η χρήση της δυνατότητας “Zoom in” θα σας φανεί χρήσιμη); Ποιος παλμός είναι πιο αποδοτικός ως προς το εύρος φάσματος;

(5) Πώς μεταβάλλεται το εύρος φάσματος των παλμών αν $c = \frac{T}{10^5}$; Στην περίπτωση αυτή, ποιος παλμός είναι πιο αποδοτικός;

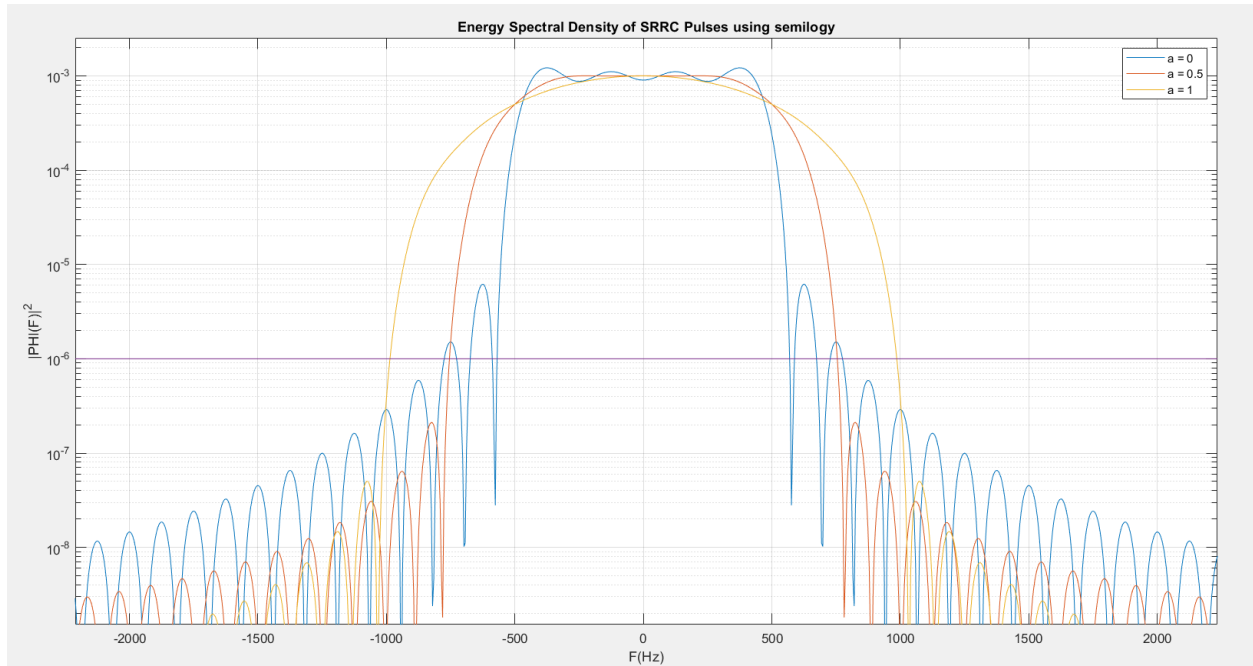
Απάντηση:

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 0$, το θεωρητικό εύρος φάσματος είναι $BW_1 = \frac{1+a}{2T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500\text{Hz}$.

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 0.5$, το θεωρητικό εύρος φάσματος είναι $BW_2 = \frac{1+a}{2T} = \frac{1.5}{2 \cdot 10^{-3}} = 750\text{Hz}$.

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 1$, το θεωρητικό εύρος φάσματος είναι $BW_3 = \frac{1+a}{2T} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} = 1000\text{Hz}$.

Θεωρούμε ότι οι τιμές της φασματικής πυκνότητας ενέργειας που είναι μικρότερες από $c = \frac{T}{10^3} = \frac{10^{-3}}{10^3} = 10^{-6}$ είναι “πρακτικά μηδέν”.



Σχήμα 6: Φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ των παλμών SRRC του ερωτήματος A1 χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα και μία οριζόντια γραμμή με τιμή 10^{-6}

Από το Σχήμα 6 προκύπτει κατά προσέγγιση ότι:

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 0$, το εύρος φάσματος είναι $BW_1 \approx 775\text{Hz}$.

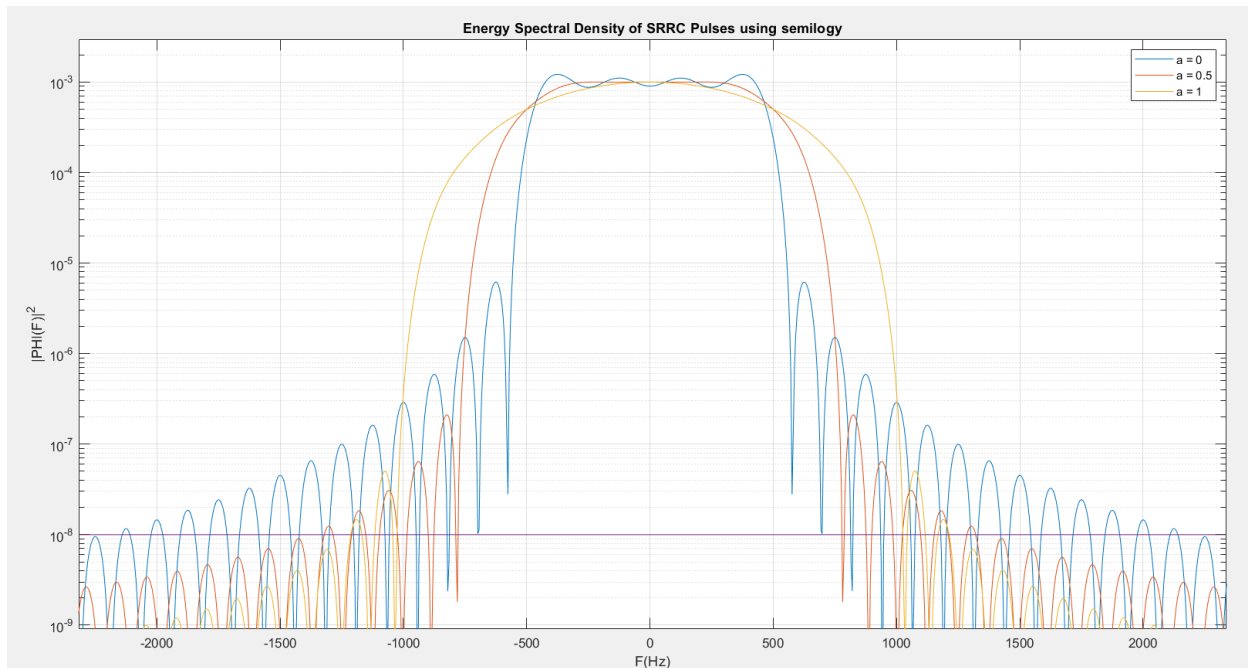
Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 0.5$, το εύρος φάσματος είναι $BW_2 \approx 755\text{Hz}$.

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 1$, το εύρος φάσματος είναι $BW_3 \approx 985\text{Hz}$.

Επομένως, ο πιο αποδοτικός παλμός ως προς το εύρος φάσματος είναι ο SRRC παλμός με $\alpha = 0.5$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι οι τιμές της φασματικής πυκνότητας ενέργειας που είναι μικρότερες

από $c = \frac{T}{10^3} = \frac{10^{-3}}{10^5} = 10^{-8}$ είναι “πρακτικά μηδέν”.



Σχήμα 7: Φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ των παλμών SRRC του ερωτήματος A1 χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα και μία οριζόντια γραμμή με τιμή 10^{-8}

Από το Σχήμα 7 προκύπτει κατά προσέγγιση ότι:

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 0$, το εύρος φάσματος είναι $BW_1 \approx 2140\text{Hz}$.

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 0.5$, το εύρος φάσματος είναι $BW_2 \approx 1320\text{Hz}$.

Για τον SRRC παλμό με $\alpha = 1$, το εύρος φάσματος είναι $BW_3 \approx 1215\text{Hz}$.

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, ο πιο αποδοτικός παλμός ως προς το εύρος φάσματος είναι ο SRRC παλμός με $\alpha = 1$.

Κώδικας:

```
% c = (T/10^3)*ones(1,N);
c = (T/10^5)*ones(1,N);
figure;
semilogy(F,abs(PHI1_F).^2);
hold on;
semilogy(F,abs(PHI2_F).^2);
semilogy(F,abs(PHI3_F).^2);
semilogy(F,c);
hold off;
legend('a = 0','a = 0.5','a = 1');
title("Energy Spectral Density of SRRC Pulses using semilogy");
xlabel('F(Hz)');
```

```
ylabel('|PHI(F)|^2');
grid on;
```

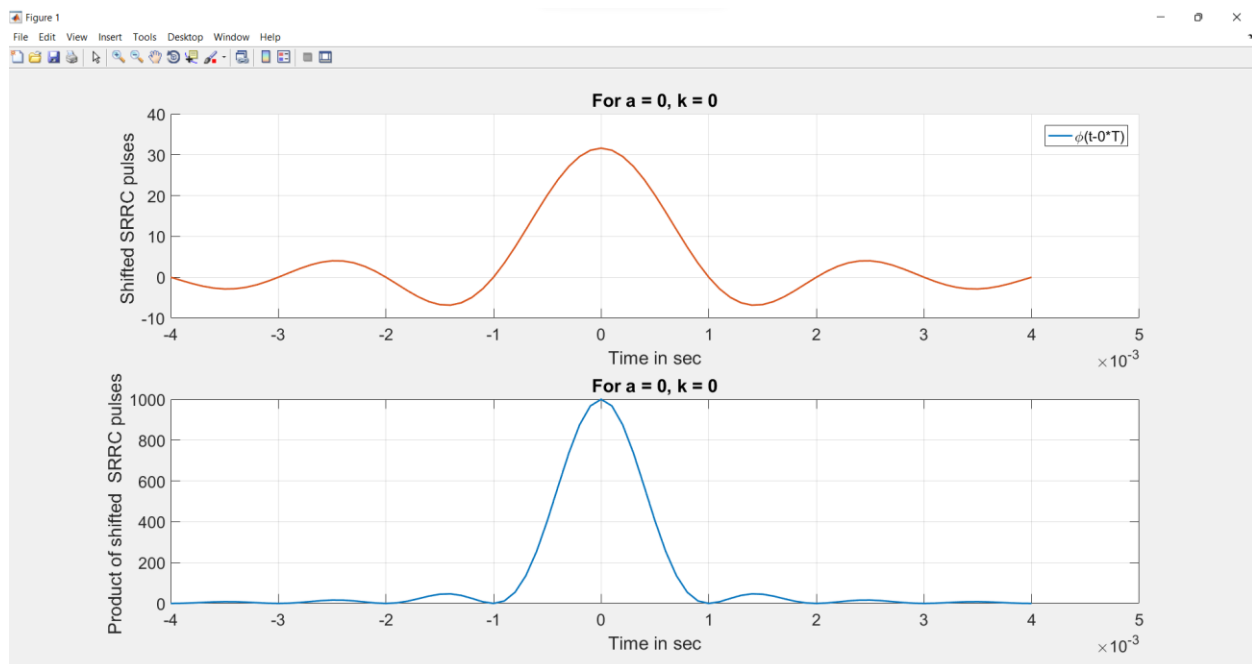
B1. Για $T = 10^{-3}$, $A = 4$, $a = 0, 0.5, 1$ και $k = 0, 1, \dots, 2A$ (αντίστοιχα αποτελέσματα θα πάρετε για αρνητικά k)

1. να δημιουργήσετε σε κοινό plot τους παλμούς $\phi(t)$ και $\phi(t - kT)$,
2. να δημιουργήσετε το γινόμενο $\phi(t) \phi(t - kT)$,
3. να προσεγγίσετε αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου $\phi(t) \phi(t - kT)$, με τη μέθοδο που αναφέρουμε στις σημειώσεις.

(10) Να σχεδιάσετε τα αποτελέσματα των βημάτων 1. και 2., για $a = 0, 0.5, 1$ και $k = 0, 1, 2$.

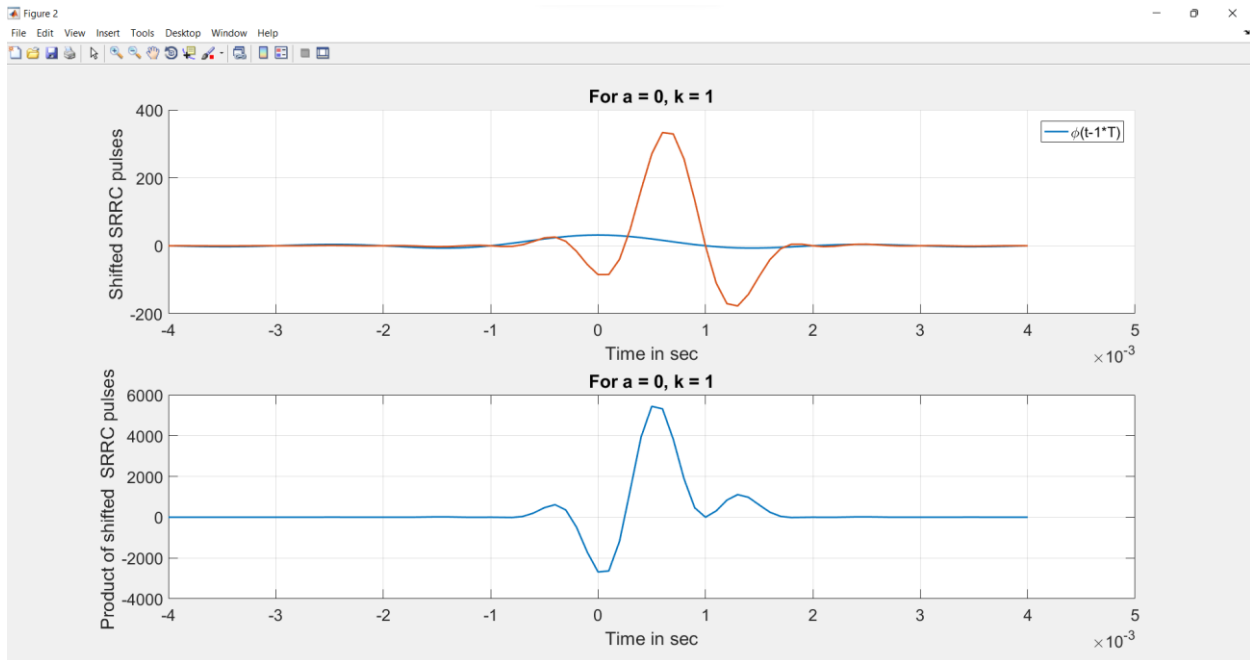
(10) Να αναφέρετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που υπολογίσατε στο βήμα 3., για $a = 0, 0.5, 1$ και $k = 0, 1, 2, 3$ και να προσπαθήσετε να τις εξηγήσετε.

Απάντηση:



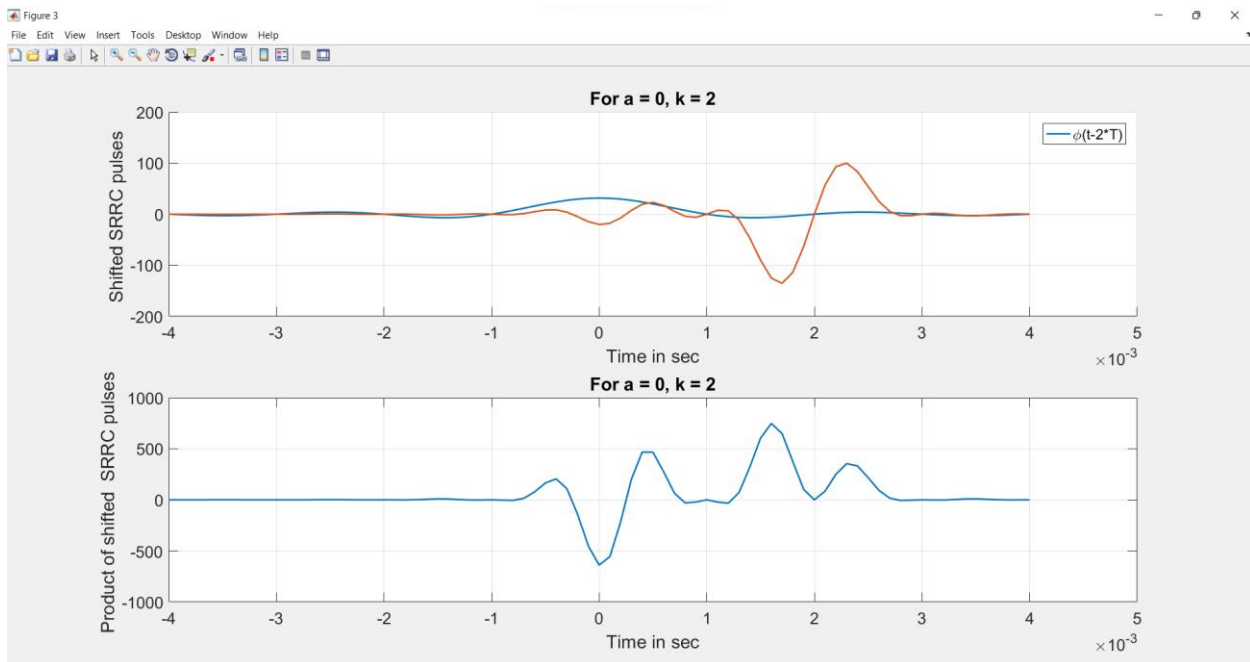
Σχήμα 8: Πάνω η $\phi(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi(t) \phi(t)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int0} = 0.9747$



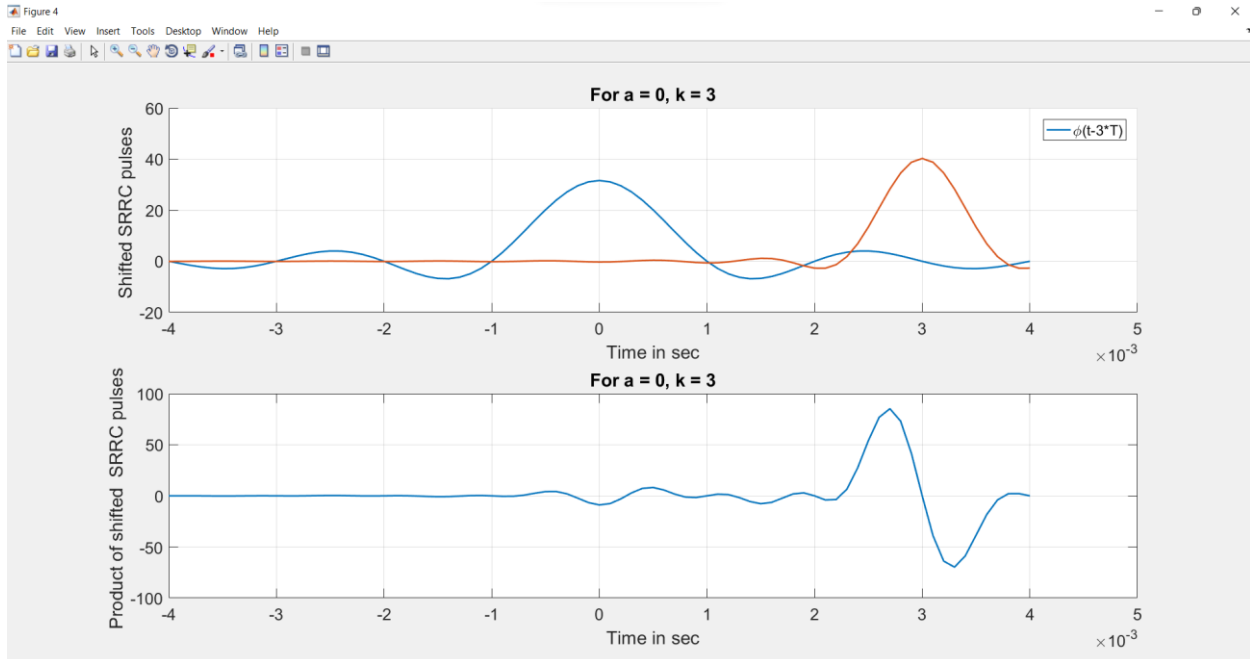
Σχήμα 9: Πάνω η $\phi_1(t)$ με την $\phi_1(t-T)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_1(t)*\phi_1(t-T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int1} = 1.936$



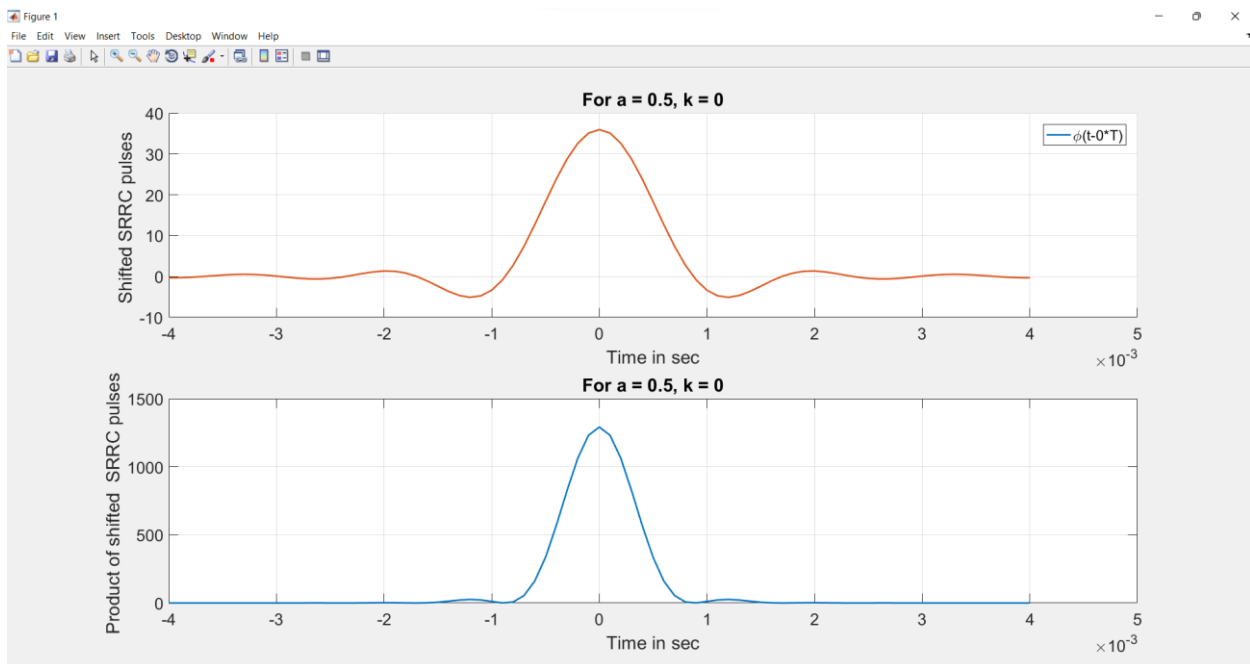
Σχήμα 10: Πάνω η $\phi_1(t)$ με την $\phi_1(t-2T)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_1(t)*\phi_1(t-2T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int2} = 0.4188$



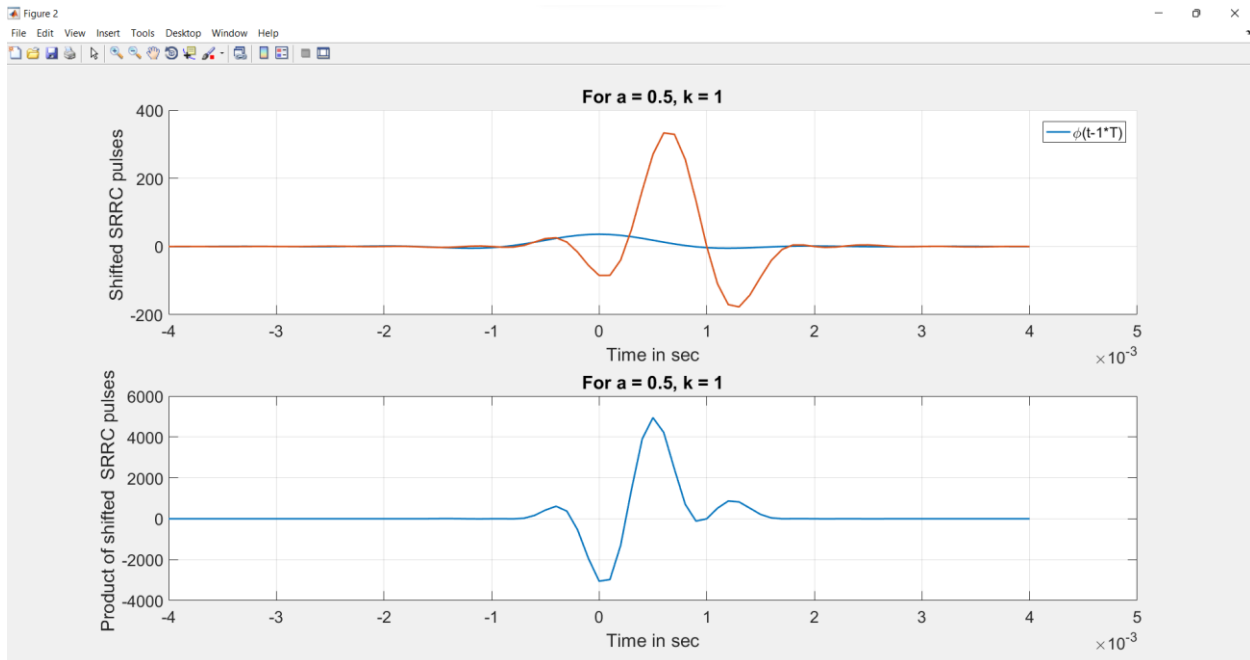
Σχήμα 11: Πάνω η $\phi_1(t)$ με την $\phi_1(t-3T)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_1(t) * \phi_1(t-3T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int3} = 0.0059$



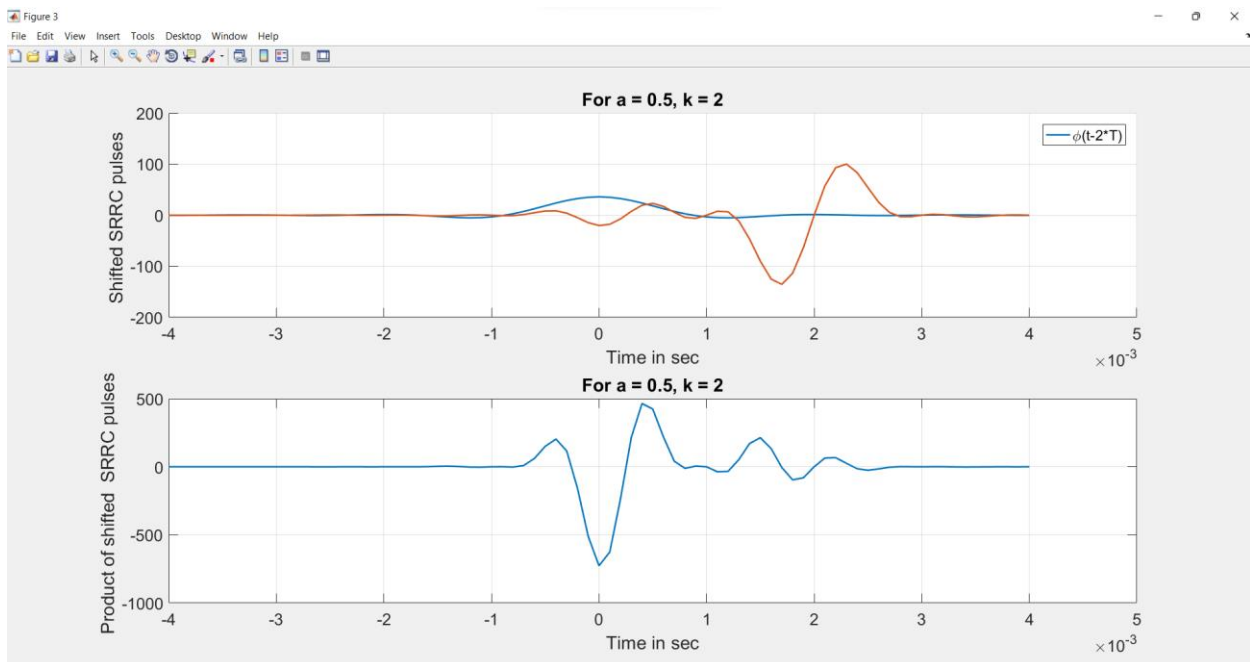
Σχήμα 12: Πάνω η $\phi_2(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_2(t) * \phi_2(t)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int0} = 0.9999$



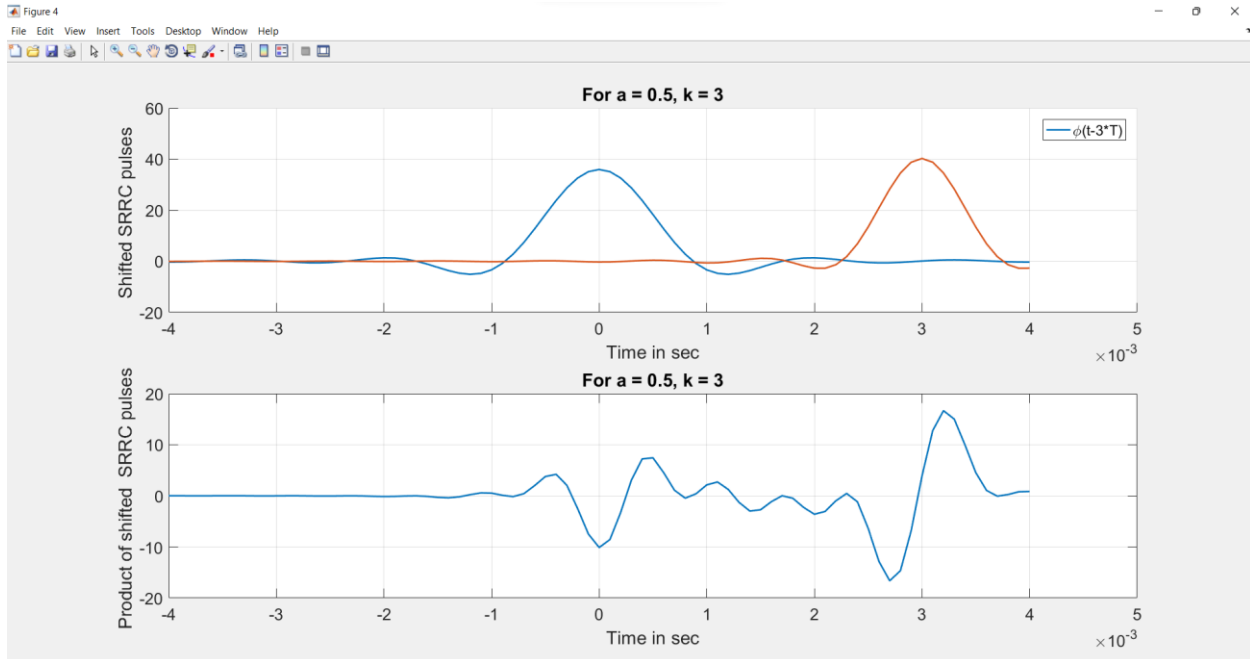
Σχήμα 13: Πάνω η $\phi_2(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_2(t) * \phi_2(t-T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int1} = 1.2288$



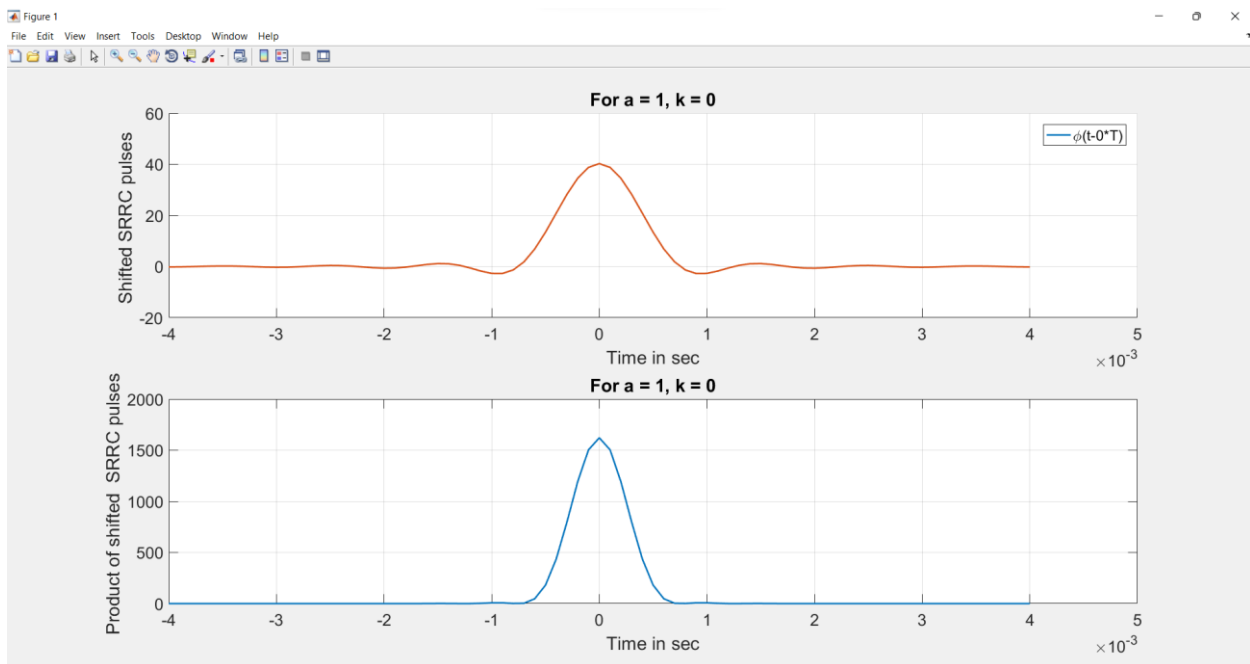
Σχήμα 14: Πάνω η $\phi_2(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_2(t) * \phi_2(t-2T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int2} = 0.0058$



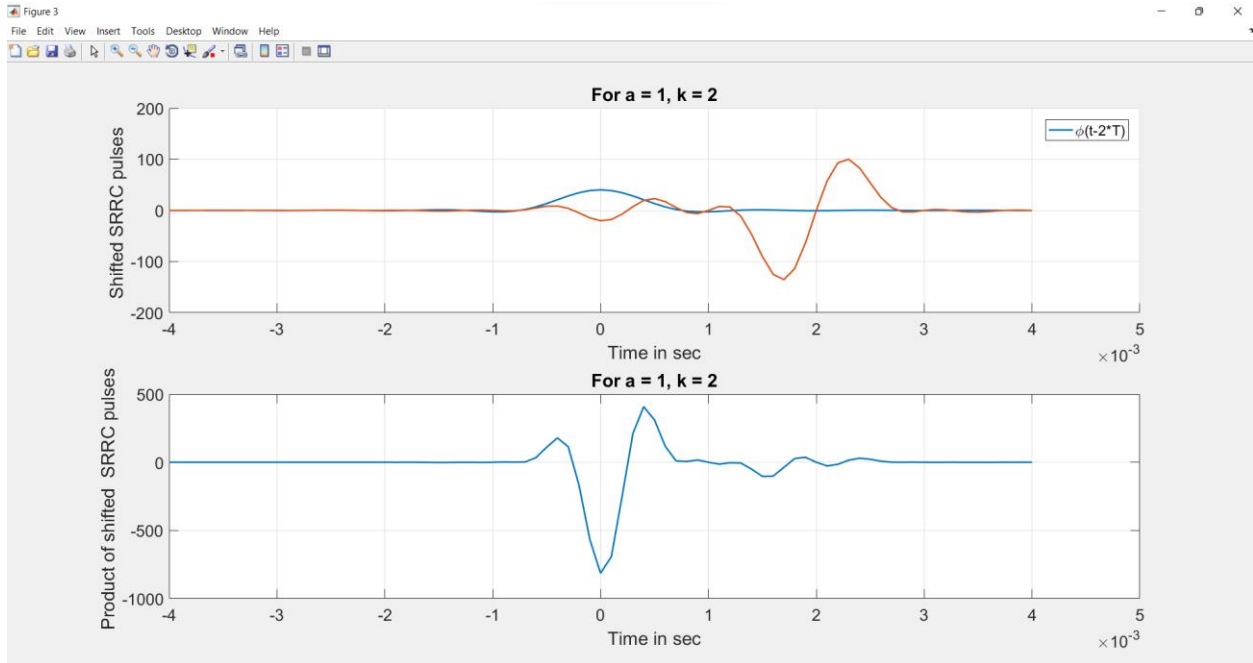
Σχήμα 15: Πάνω η $\phi_2(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_2(t) * \phi_2(t-3T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int3} = -1.2269\text{e-}4$



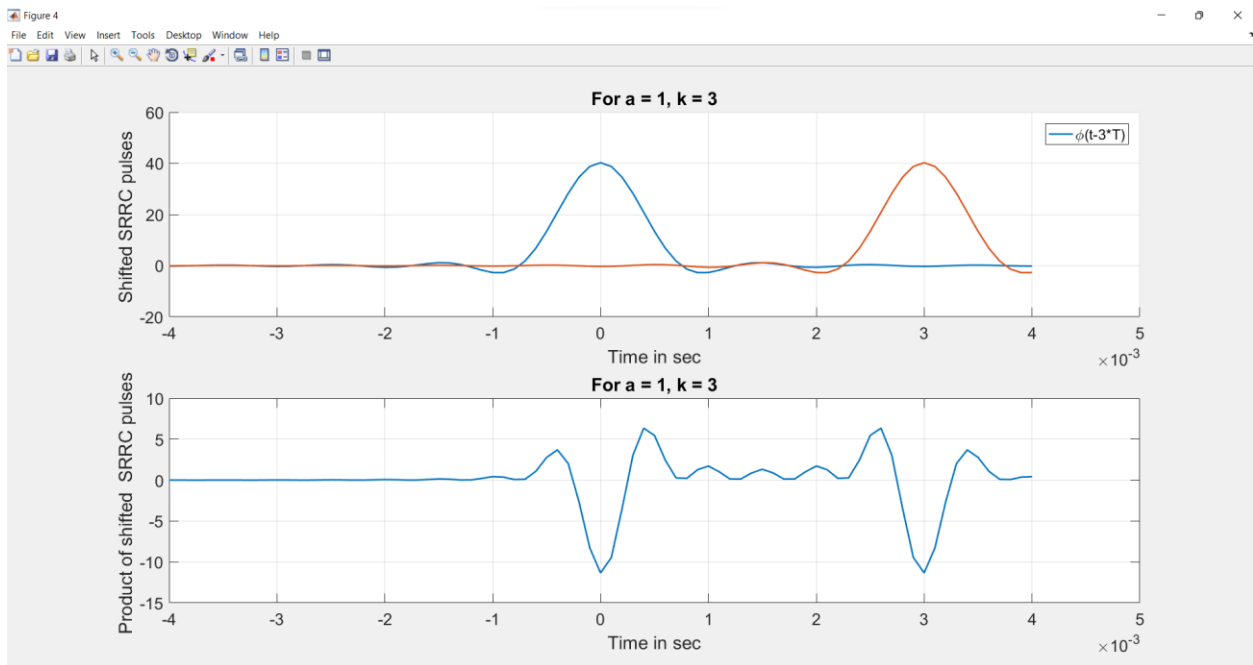
Σχήμα 16: Πάνω η $\phi_3(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_3(t) * \phi_3(t)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int0} = 1$



Σχήμα 17: Πάνω η $\phi_3(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_3(t) * \phi_3(t-2T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int2} = 0.1036$



Σχήμα 18: Πάνω η $\phi_3(t)$, και κάτω το γινόμενο $\phi_3(t) * \phi_3(t-3T)$

Αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου είναι: $\text{int3} = -1.2973\text{e-}4$

Το ολοκλήρωμα των γινομένων $\phi(t) \cdot \phi(t-kT)$ για $k = 0$ παίρνει τιμές κοντά στο 1 και για $k = 1, 2, 3$ παίρνει τιμές κοντά στο 0. Αυτό είναι κάτι που περιμέναμε καθώς οι μετατοπισμένοι SRRC παλμοί είναι προσεγγιστικά ορθοκανονικοί. Επίσης, όσο περισσότερο πλησιάζει ο συντελεστής roll-off a στην τιμή 1, τόσο εγγύτερα στις τιμές 0 και 1 είναι τα ολοκληρώματα για $k = 0$ και $k = 1, 2, 3$ αντίστοιχα.

Κώδικας:

```
T = 10^-3;
over = 10;
A = 4;
a1 = 0;
a2 = 0.5;
a3 = 1;

% Calculating SRRC pulses
[phi1, t] = srrc_pulse(T, over, A, a1);
[phi2, t] = srrc_pulse(T, over, A, a2);
[phi3, t] = srrc_pulse(T, over, A, a3);

k0 = 0;
k1 = 1;
k2 = 2;
k3 = 3;

% Time shift
tShift0 = t + (k0 * T); % phi(t)
tShift1 = t + (k1 * T); % phi(t-T)
tShift2 = t + (k2 * T); % phi(t-2T)
tShift3 = t + (k3 * T); % phi(t-3T)

% Compute p1T, p2T, p3T
p1T = 4*a3/(pi*sqrt(T)) * phi1 .* cos((1+a3)*pi*(t-T)/T) ./ (1-(4*a3*(t-T)/T).^2);
p2T = 4*a3/(pi*sqrt(T)) * phi1 .* cos((1+a3)*pi*(t-2*T)/T) ./ (1-(4*a3*(t-2*T)/T).^2);
num = cos((1+a3)*pi*(t-k3*T)/T) + sin((1-a3)*pi*(t-k3*T)/T) ./ (4*a3*(t-k3*T)/T);
denom = 1-(4*a3*(t-k3*T)/T).^2;
p3T = 4*a3/(pi*sqrt(T)) * num ./ denom;

% Plot for k=0
figure
subplot(2,1,1)
```

```

hold on
plot(t, phi3, 'linewidth', 1.5) %
plot(t, phi3, 'linewidth', 1.5) %
legend('\phi(t-0*T)'); %
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 0'); %
grid on
ylabel('Shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');
pro = phi3.*phi3; %
subplot(2,1,2)
plot(t, pro, 'linewidth', 1.5)
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 0');
grid on
ylabel('Product of shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

% Numerical integration of data using the trapezoidal method.
int0 = trapz(t,pro)

%%%%%%%%%For k = 1%%%%%%%%%

figure
subplot(2,1,1)
hold on
plot(t, phi3, 'linewidth', 1.5) %
plot(t, p1T, 'linewidth', 1.5) %
legend('\phi(t-1*T)');
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 1');
grid on
ylabel('Shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

pro = phi3.*p1T; %
subplot(2,1,2)
plot(t, pro, 'linewidth', 1.5)
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 1');

```

```

grid on
ylabel('Product of shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

int1 = trapz(t,pro)
%%%%%%%%%For k = 2%%%%%%%%%

figure
subplot(2,1,1)
hold on
plot(t, phi3, 'linewidth', 1.5) %
plot(t, p2T, 'linewidth', 1.5)
legend('\phi(t-2*T)');
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 2');
grid on
ylabel('Shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

pro = phi3.*p2T; %
subplot(2,1,2)
plot(t, pro, 'linewidth', 1.5)
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 2');
grid on
ylabel('Product of shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

int2 = trapz(t,pro)
%%%%%%%%%For k = 3%%%%%%%%%

figure
subplot(2,1,1)
hold on
plot(t, phi3, 'linewidth', 1.5) %
plot(t, p3T, 'linewidth', 1.5)
legend('\phi(t-3*T)');
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 3');
grid on

```

```

ylabel('Shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

pro = phi3.*p3T; %
subplot(2,1,2)
plot(t, pro, 'linewidth', 1.5)
set(gca, 'fontsize', 15)
title('For a = 1, k = 3');
grid on
ylabel('Product of shifted SRRC pulses ');
xlabel('Time in sec');

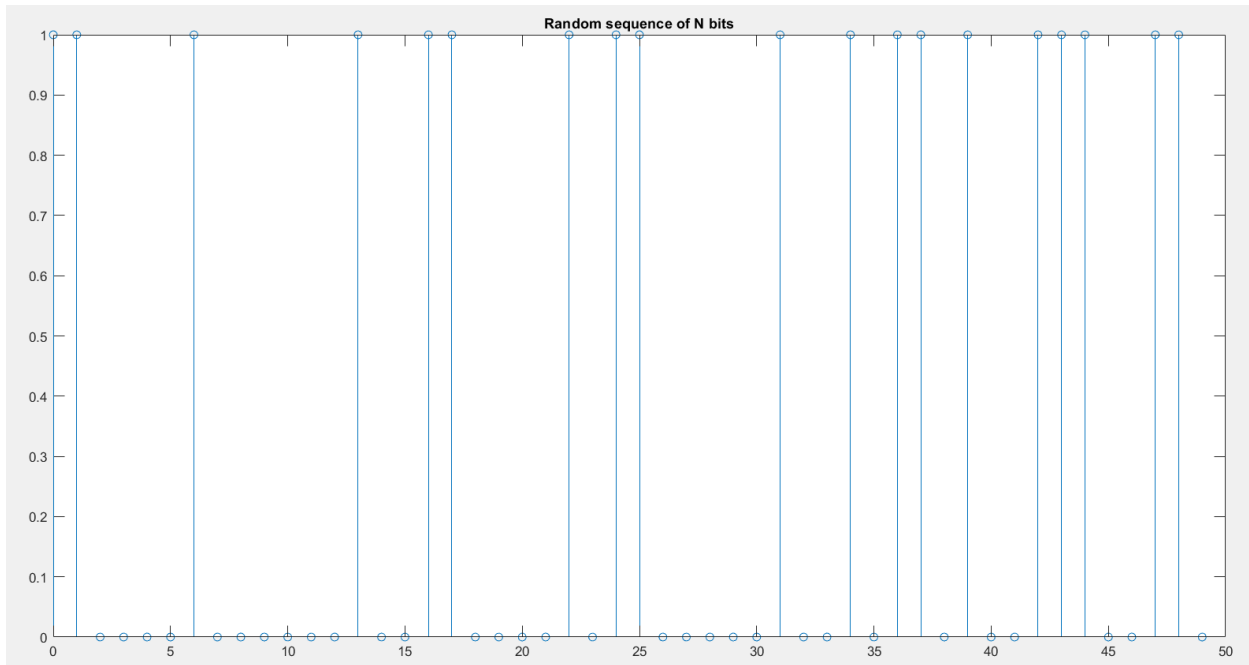
int3 = trapz(t,pro)

```

C1. (5) Να δημιουργήσετε N bits b_i , για $i = 0, \dots, N - 1$ (ενδεικτικά $N = 50, 100$), με την εντολή

$$b = (\text{sign}(\text{randn}(N, 1)) + 1) / 2;$$

Απάντηση:



Σχήμα 19: Τυχαία ακολουθία από 50 bits

Κώδικας:

```

T = 10^-3;
over = 10;
Ts = T/over;
A = 4;
a = 0.5;
N = 50;
b = (sign(randn(N,1))+1)/2;
n = 0:N-1;
figure;
stem(n,b);
title("Random sequence of N bits");

```

C2. Το σύστημα 2-PAM βασικής ζώνης υλοποιείται ως εξής.

(5) (α) Να γράψετε τη συνάρτηση

$$X = \text{bits_to_2PAM}(b);$$

η οποία παίρνει ως είσοδο την ακολουθία bits b και παράγει ως έξοδο την ακολουθία από 2-PAM σύμβολα X , χρησιμοποιώντας την εξής απεικόνιση:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow +1 \\ 1 &\rightarrow -1. \end{aligned}$$

(10) (β) Να προσομοιώσετε το σήμα

$$X_\delta(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \delta(t - kT),$$

μέσω της εντολής

$$X_delta = 1 / T_s * \text{upsample}(X, \text{over});$$

Να ορίσετε κατάλληλα τον άξονα του χρόνου και να σχεδιάσετε το σήμα $X_\delta(t)$.

(10) (γ) Να δειγματοληπτήσετε κατάλληλα τον αποκομμένο SRRC παλμό, $\phi(t)$, και να προσομοιώσετε τη συνέλιξη $X(t) = X_\delta(t) * \phi(t)$.

Να κατασκευάσετε κατάλληλα τον άξονα του χρόνου και να σχεδιάσετε το σήμα $X(t)$.

(15) (δ) Υποθέτοντας ιδανικό κανάλι, στην είσοδο του δέκτη λαμβάνουμε $X(t)$.

Να προσομοιώσετε τη συνέλιξη $Z(t) = X(t) * \phi(-t)$.

Να σχεδιάσετε το $Z(t)$ στον αντίστοιχο άξονα του χρόνου και να βρείτε τι τιμές παίρνει τις χρονικές στιγμές kT , για $k = 0, \dots, N-1$. Να συσχετίσετε τις τιμές αυτές με τις τιμές των X_k , για $k = 0, \dots, N-1$. Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Ένας γραφικός τρόπος για να συγκρίνετε τις τιμές $Z(kT)$ με τις τιμές X_k , για $k = 0, \dots, N-1$, είναι να επιλέξετε hold on στο plot του $Z(t)$ και να εκτελέσετε την εντολή

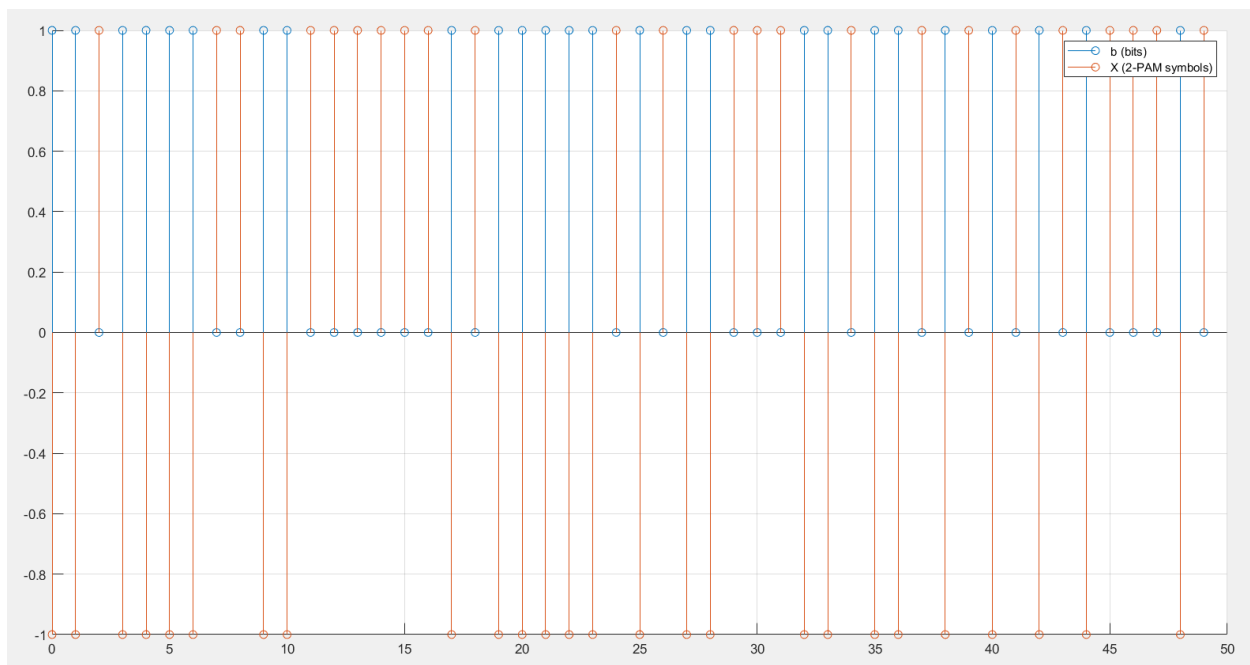
$$\text{stem}([0 : N-1] * T, X);$$

όπου X είναι το διάνυσμα με τα σύμβολα X_k , $k = 0, \dots, N-1$. Τι παρατηρείτε;

Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Απάντηση:

(α)



Σχήμα 20: Τυχαία ακολουθία από 50 bits και η αντίστοιχη ακολουθία από 2-PAM σύμβολα

Κώδικας:

```
function X = bits_to_2PAM(b)
```

```
X = zeros(1,length(b));
```

```
for i = 1:length(b)
```

```
    if (b(i) == 0)
```

```
        X(i) = 1;
```

```
    else
```

```
        X(i) = -1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
X = bits_to_2PAM(b);
```

```
figure;
```

```
hold on;
```

```
stem(n,b);
```

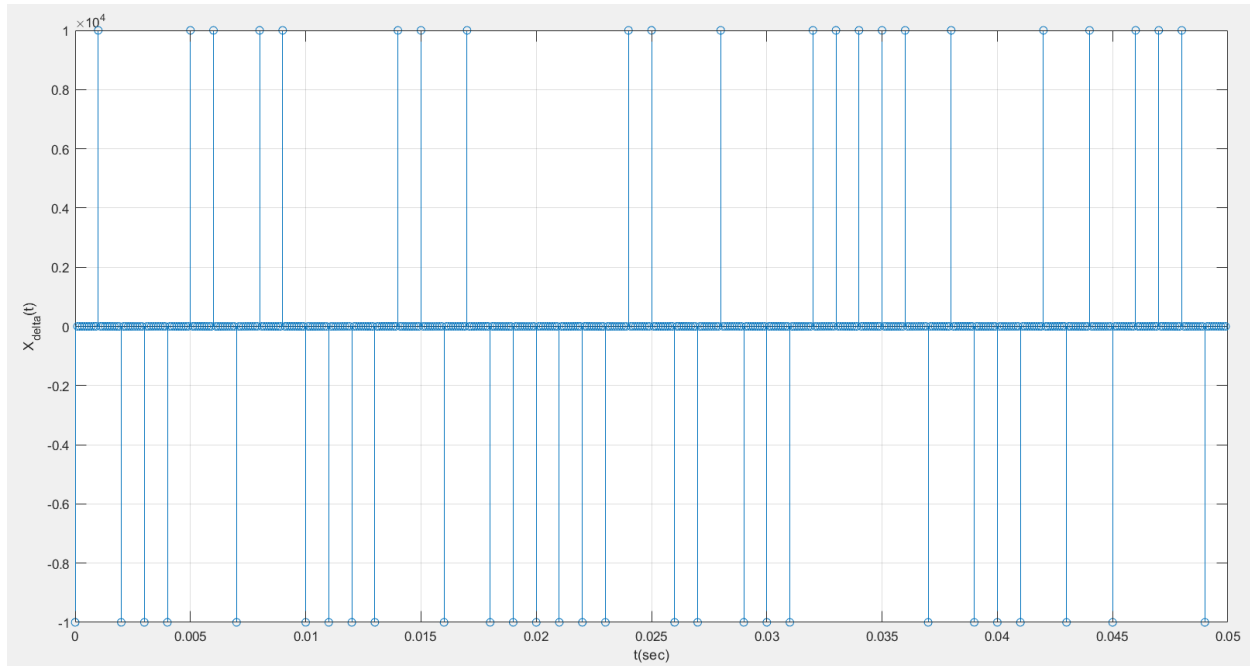
```
stem(n,X);
```

```
hold off;
```

```
legend('b (bits)', 'X (2-PAM symbols)');
```

(β)

Η προσομοίωση του σήματος $X_\delta(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \delta(t - kT)$ έγινε μέσω της εντολής $X_delta = 1 / T_s * \text{upsample}(X, \text{over})$, η οποία εισήγαγε $\text{over} - 1 = 10 - 1 = 9$ μηδενικά ανάμεσα από κάθε δύο διαδοχικά δείγματα του X .

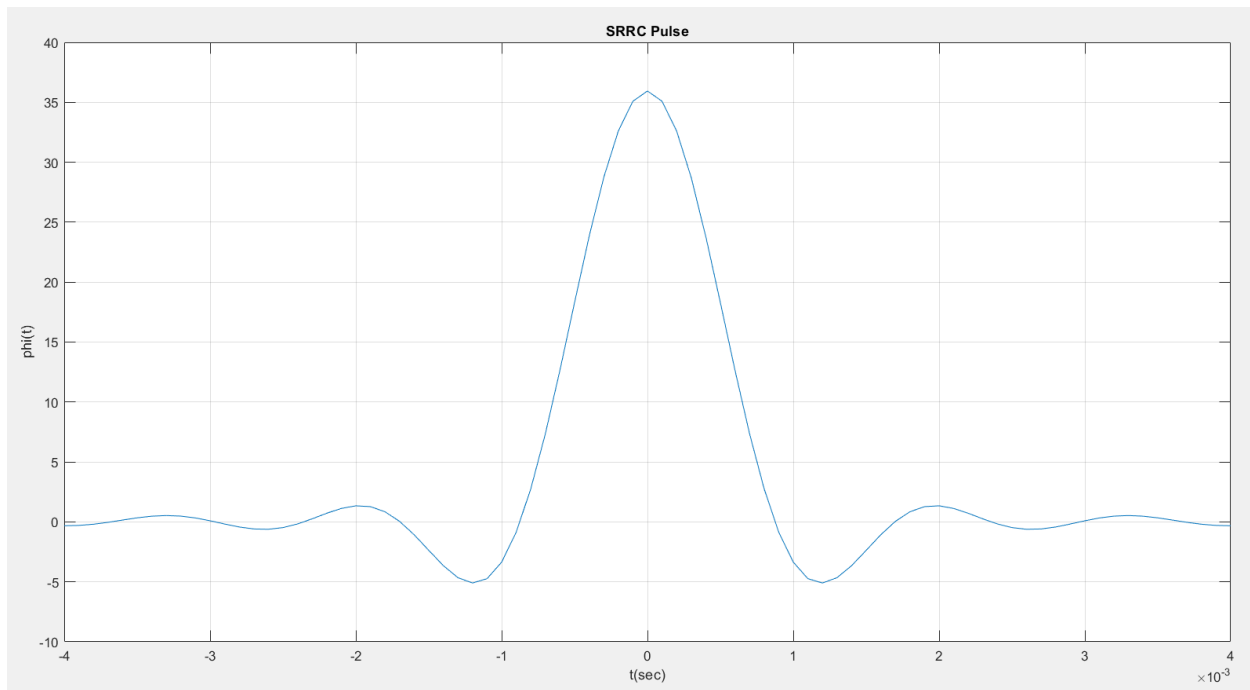


Σχήμα 21: Σήμα $X_\delta(t)$

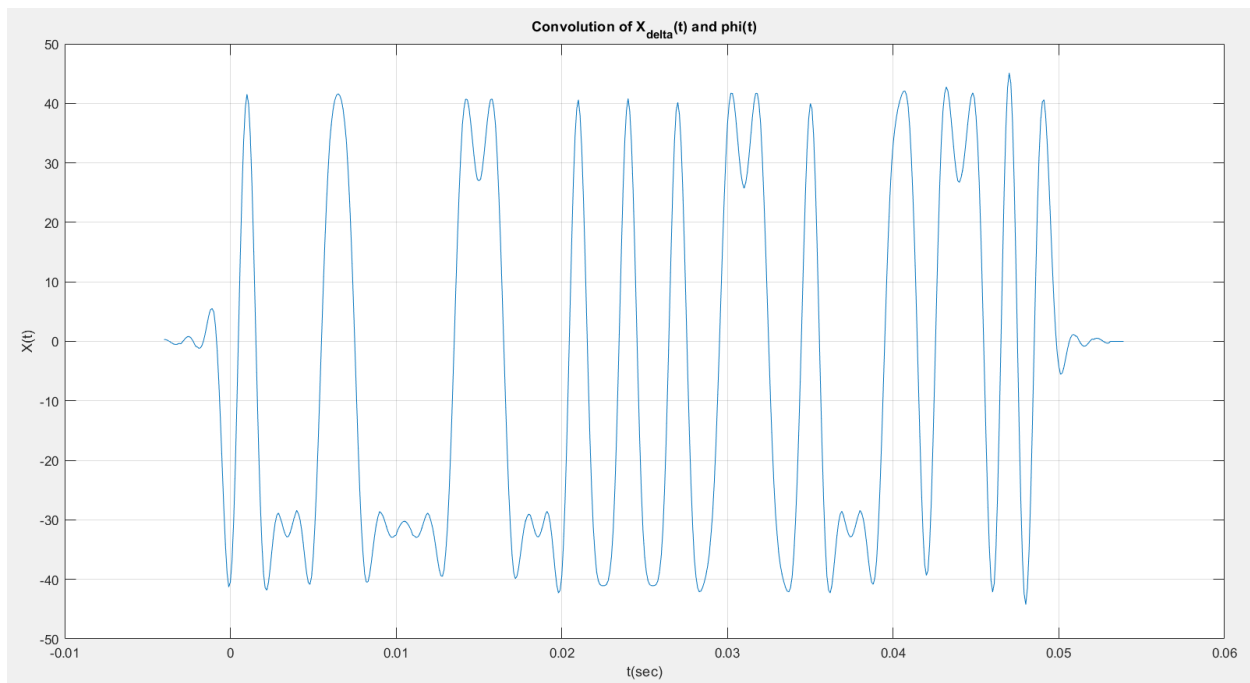
Κώδικας:

```
X_delta = 1/Ts*upsample(X,over);  
t_delta = 0:Ts:N*T-Ts;  
figure;  
stem(t_delta,X_delta);  
xlabel('t(sec)');  
ylabel('X_{delta}(t)');
```

(γ)



Σχήμα 22: Αποκομμένος SRRC παλμός με $T = 10^{-3}\text{sec}$, $\text{over} = 10$, $A = 4$ και συντελεστή roll-off $a = 0.5$



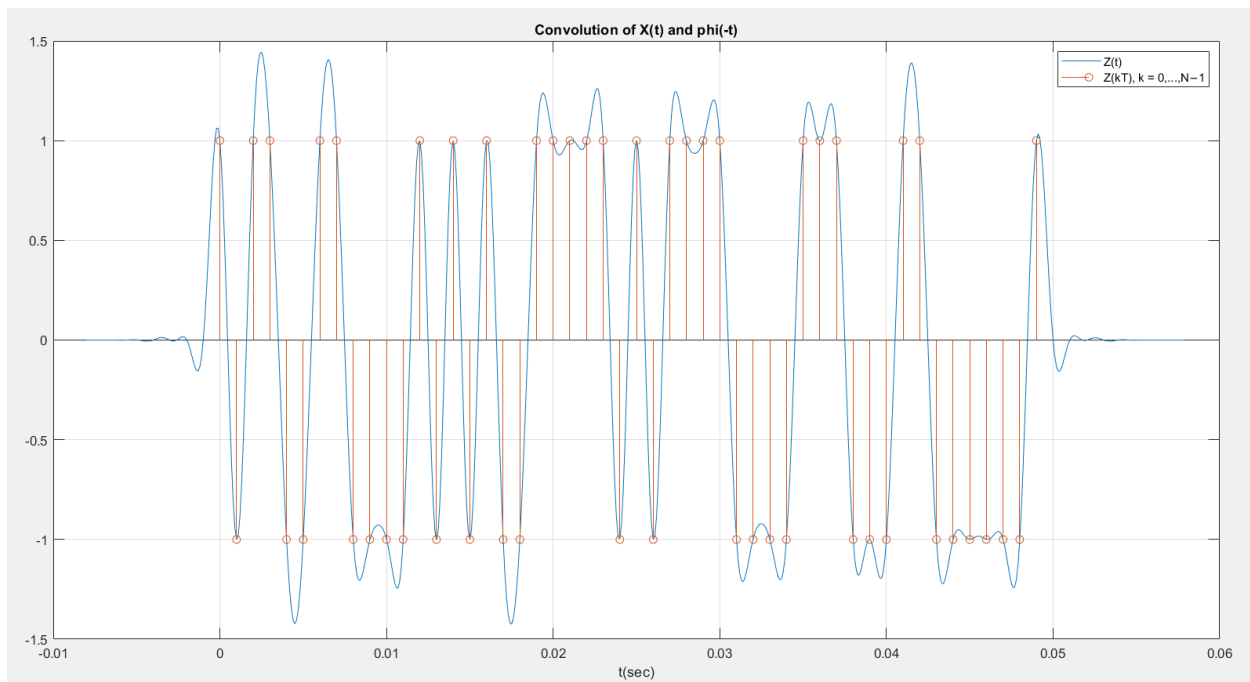
Σχήμα 23: Σήμα $X(t) = X_{\delta}(t) \star \phi(t)$

Κώδικας:

```
[phi,t] = srrc_pulse(T,over,A,a);  
figure;  
plot(t,phi);  
title("SRRC Pulse");  
xlim([-4*T 4*T]);  
xlabel('t(sec)');  
ylabel('phi(t)');  
grid on;  
  
X_t = conv(X_delta,phi)*Ts;  
t_conv = t_delta(1)+t(1):Ts:t_delta(end)+t(end);  
figure;  
plot(t_conv,X_t);  
title("Convolution of X_{delta}(t) and phi(t)");  
xlabel('t(sec)');  
ylabel('X(t)');  
grid on;
```

(δ)

Από το Σχήμα 22 προκύπτει ότι ο αποκομμένος SRRC παλμός είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Επομένως, $Z(t) = X(t) \star \varphi(-t) = X(t) \star \varphi(t)$.



Σχήμα 24: Σήμα $Z(t) = X(t) \star \varphi(-t)$

Παρατηρείται ότι τις χρονικές στιγμές $t = kT$, για $k = 0, \dots, N - 1$ ισχύει ότι $Z(t) = X_k$. Δηλαδή, από το σήμα $Z(t)$ που έλαβε ο δέκτης γίνεται να ανακτηθούν τα σύμβολα που έστειλε ο πομπός. Αυτό μπορεί να γίνει με δειγματοληψία του $Z(t)$ τις χρονικές στιγμές $t = kT$.

Κώδικας:

```
Z = conv(X_t,phi)*Ts;
t_z = t_conv(1)+t(1):Ts:t_conv(end)+t(end);
figure;
plot(t_z,Z);
hold on;
stem([0:N-1]*T,X);
hold off;
title("Convolution of X(t) and phi(-t)");
legend('Z(t)','Z(kT), k = 0,...,N-1');
xlabel('t(sec)');
grid on;
```