

(1)

n = 10 のとき返り値 3

n = 50 のとき返り値 21

n = 100 のとき返り値 50

(2)

```
int pyth(int n) {  
    int count = 0;  
    for (int a = 1; a <= n; a++) {  
        for (int b = 1; b * b < a * a; b++) {  
            for (int c = b; b * b + 2 * c * c <= a * a; c++) {  
                if (a * a == b * b + 2 * c * c) {  
                    count++;  
                }  
            }  
        }  
    }  
    return count;  
}
```

「処理が何回繰り返されるか」 = 「計算時間がかかる量」と考えられるため、各 for 文が何回繰り返されるかを調べることで計算量が求められる。

・外側のループ： for (int a = 1; a <= n; a++)

回数：n 回

・中間のループ： for (int b = 1; b * b < a * a; b++)

条件 $b^2 < a^2$ より、おおよそ $b < a$ となる

回数は約 a 回（最悪で n 回）

・内側のループ： for (int c = b; $b^2 + 2c^2 \leq a^2$; c++)

条件を変形すると $c^2 \leq (a^2 - b^2) / 2$

よって漸近的に考えると最大 $c \approx a$ なので、回数は高々 a 回

このことから関数 pyth(n)の時間計算量のオーダーは次の式で表されることが考えられる。

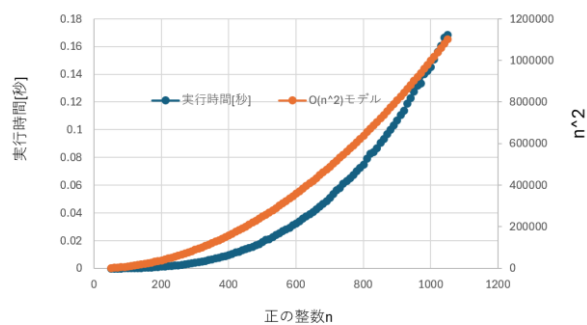
$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^a \sum_{c=b}^a 1$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{c=b}^a 1 &= \sum_{c=1}^a 1 - \sum_{c=1}^{b-1} 1 = a - b + 1 \\
 \sum_{b=1}^a (a - b + 1) &= a \sum_{b=1}^a 1 - \sum_{b=1}^a b + \sum_{b=1}^a 1 \\
 &= a^2 - \frac{a(1+a)}{2} + a \\
 &= \frac{2a^2 - a - a^2 + 2a}{2} = \frac{a^2 + a}{2} = \frac{a(a+1)}{2} \\
 \sum_{a=1}^n \frac{a(a+1)}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^n a^2 + \sum_{a=1}^n a \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \\
 \therefore \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^a \sum_{c=b}^a 1 &= O(n^3)
 \end{aligned}$$

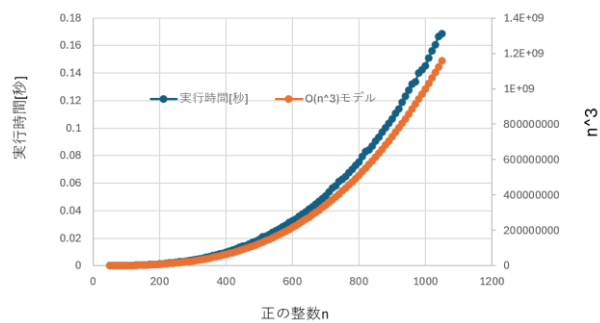
結論

pyth(n)の時間計算量は $O(n^3)$ である。

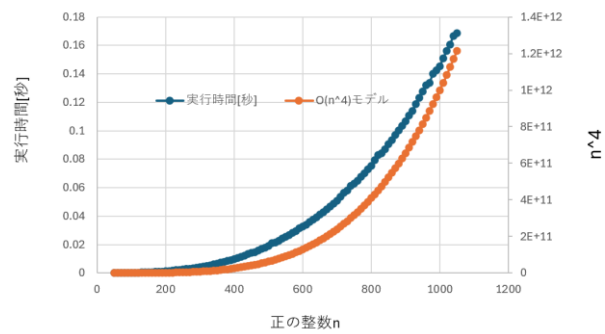
(3)



正の整数nと実行時間、 n^2 の関係



正の整数nと実行時間、 n^3 の関係



正の整数 n と実行時間、 n^4 の関係

100 回繰り返してその平均をとったものを実行時間としている。

n を 50 から 1050 まで 10 ずつ変化させてプロットした。

考察

$O(n^2)$ や $O(n^4)$ と比べても $O(n^3)$ は実行時間とおおむね一致しているため、 $O(3)$ と実際の処理時間は整合していると考えられる。

実行時間が理論的な計算量である $O(n^3)$ より少し上にある部分が見られるが、これは CPU への負荷で合ったりキャッシュの影響などの実行環境によるオーバーヘッドが原因と考える。