1　集合の対等と濃度

1.1

(1.6) $cardA = \mathfrak{m}$ である集合 A をとると, A 上の恒等写像は A からへの単射だから $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}$.
(1.8) $cardA = \mathfrak{m}$, $cardB = \mathfrak{n}$, $cardC = \mathfrak{p}$ である集合 A, B, C をとると, 単射 $f : A \to B$, $g : B \to C$ がとれる．$g \circ f$ は A から C への単射なので $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$.

1.2

$X \subset Y \subset Z$ より単射 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が, $X \sim Z$ より全単射 $h : Z \sim X$ がとれる．このとき $h \circ g$, $f \circ h$ はそれぞれ $X \to Y$, $Y \to Z$ の単射なので Bernstein の定理より $X \sim Y$, $Y \sim Z$.

1.3

S を $\mathbb{R}$ の開区間 O を含むような $\mathbb{R}$ の部分集合とする．O から S への標準単射, S から $\mathbb{R}$ への標準単射を考えると $cardO \leq cardS$ かつ $cardS \leq card\mathbb{R}$ であり, しかも $cardO = \mathbb{R}$ なので Bernstein の定理より $cardS = \mathbb{R}$.

1.4

$b \in B$ をとると単射 $f : A \to (A \times B)$ を各 $a \in A$ に対して $f(a) = (a, b)$ と定義できるので $card(A \times B) \geq A$.

1.5

選択公理により各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $f(\lambda) \in A_\lambda$ となるように写像 $f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ をとれる．$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $f(\lambda_1) \in A_{\lambda_1}$ かつ $f(\lambda_2) \in A_{\lambda_2}$ だが $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \phi$ なので $f(\lambda_1) \neq f(\lambda_2)$ であるから f は単射．よって $card\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \geq card\Lambda$.

1.6

選択公理により $a \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ がとれる．集合族 $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} - a_\lambda)$ を定義すると各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $B_\lambda \neq \phi$ なので, 選択公理により $a' \in \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ をとれる．このような b は各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $b_{\lambda_0} \neq a_{\lambda_0}$ であり, また $b \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とみなせる．このとき写像 $f : \Lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を各 $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して

$$f(\lambda_0)_\lambda = \begin{cases} a_\lambda & (\lambda \neq \lambda_0) \\ b_\lambda & (\lambda = \lambda_0) \end{cases}$$

となるように定めると, f は単射であるから $card(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \geq cardA$.

1.7

A から B への全射を f とする．この f に付随する同値関係を R とすると，A/R から B への全単射が存在する (一章 (6.4) とその直後の考察より)．よって A/R と B は対等.

1.8

$B_0 = -1, 1$ なので正整数 n に対して $A_n = B_n = \{\pm 2^{-n}\}$．ゆえに $A_* = \{2^{-n} | n \in \mathbb{N}\}$, $B_* = \{2^{-n} | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$．よって $F : A \to B$ は各 a に対して

$$F(a) = \begin{cases} a & (a \notin A_*) \\ 2a & (a \in A_*) \end{cases}$$

2　可算集合, 非可算集合

2.1

S を可算集合の無限部分集合とする．S は可算集合の部分集合より $cardS \leq \mathfrak{D}$．S は無限集合より $S \geq \mathfrak{a}$. よって Bernstein の定理より $cardS = \mathfrak{a}$.

2.2

$S = \mathbb{Q} - \{0\}$ は可算集合だから S から A への全単射 f が存在する．S の部分集合族 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_n = \{\frac{q}{p} | p$ と q は互いに素な整数.$p \geq 1\}$ と定義する．この $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は S の部分集合族として (i)(ii)(iii) を満たすことを示す．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{\frac{1}{n} + n_0\}_{n_0 \in \mathbb{N}} \in B_n \in S$ なので B_n は可算集合．0 でない任意の有理数 x に対してただ一つの B_n が存在して $x \in B_n$ なので $S = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ かつ $n \neq n' \Rightarrow A_n \cap A_{n'} = \phi$. よって $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = f(B_n)$ と定義するとこれに対しても A の部分集合族としてもちろん (i)(ii)(iii) が成り立つ.

2.3

有理数 a, b を端点とする開区間 (a, b) 全体の集合は明らかに集合 $A = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} | a < b\}$ と対等. $\mathbb{N} \sim \{(0, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} | n \in \mathbb{N}\} \subset A \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}$ なので A は可算集合.

2.4

$\mathfrak{I}$ の各元は有理数を含む．選択公理より写像 $f : \mathfrak{I} \to \mathbb{Q}$ が存在して各 $I \in \mathfrak{I}$ に対して $f(I) \in I$ が成り立つ. $\mathfrak{I}$ は互いに素なので f が単射だから $card\mathfrak{I} \leq card\mathbb{Q}$, すなわち $\mathfrak{I}$ はたかだか可算.

2.5

$\Lambda = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とすると Λ は可算集合. $\mathfrak{A}$ の部分集合族 $(A_n)_{n\in\Lambda}$ を各 $n \in \Lambda$ に対して $A_n = \{S \in \mathfrak{A} | cardS = n\}$ として定義する. 各 $n \in \Lambda$ に対して A_n が空でない有限集合なので $\mathfrak{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ は可算集合.

2.6

有理整数を係数とする多項式の全体を A とする. 写像 $h : A \to \mathbb{N}$ を $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in A(a_n \neq 0, n \geq 1)$ に対して $h(f) = n + \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ と定める. $h(f)$ の各項は非負なので $m \in \mathbb{N}$ に対して, $h^{-1}(m)$ は有限集合になる. $h^{-1}(m)$ の各元 f に対する方程式 $f(x) = 0$ の根は高々 n 個なので $h^{-1}(m)$ の元のから得られる方程式の根の全体の和集合 B_m は有限集合. よって代数的数全体の集合は $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$ なので可算集合.

2.7

S を無理数全体の集合とする. S が有限集合とすると $\mathbb{R} = S \cup \mathbb{Q}$ が可算集合となり矛盾するので $cardS$ は無限集合. S の可算部分集合 P をとる. P は可算なので $P \cup \mathbb{Q}$ も可算であり全単射 $f' : P \to P \cup \mathbb{Q}$ が存在する. よって写像 $f : S \to \mathbb{R}$ を各 $x \in S$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in P \\ x & x \notin P \end{cases}$$

と定義すると f は全単射であるから $cardS = \aleph$.

3 濃度の演算

3.1

濃度 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ に対して $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}', \mathfrak{n} \leq \mathfrak{n}'$ が成り立っているとする. $cardA = \mathfrak{m}$, $cardB = \mathfrak{n}$, $cardC = \mathfrak{p}$, $cardA' = \mathfrak{m}'$, $cardB' = \mathfrak{n}'$ となる集合 A, B, C, A', B' をとっておく.
(3.1) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = card(A \cup B) = card(B \cup A) = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$.
(3.2) $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p} = card(A \cup B \cup C) = \mathfrak{n} + (\mathfrak{m} + \mathfrak{p})$.
(3.3) $\mathfrak{m} + 0 = card(A \cup \phi) = cardA = \mathfrak{m}$.
(3.4) $A \cup B$ から $A' \cup B'$ への包含写像をとれるので $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = card(A \cup B) \leq card(A' \cup B') = \mathfrak{n}' + \mathfrak{m}'$.
(3.5) $A \times B \ni (a, b) \to (b, a) \in B \times A$ は全単射なので $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = card(A \times B) = card(B \times A) = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$.
(3.6) $(\mathfrak{m}\mathfrak{n})\mathfrak{p} = card(A \times B \times C) = \mathfrak{m}(\mathfrak{n}\mathfrak{p})$
(3.7) $\mathfrak{m} \cdot 0 = card(A \times \phi) = card\phi = 0$
一元集合 $\{a\}$ をとると $A \times \{a\} \ni (x, a) \to x \in A$ が全単射となるので $\mathfrak{m} \cdot 1 = card(A \times \{a\}) = cardA = \mathfrak{m}$.
(3.8) $A \times B$ から $A' \times B'$ への包含写像をとれるので $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'$.
(3.9) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ より $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p} + \mathfrak{n}\mathfrak{p}$.

3.2

全単射 $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ をとると全単射 $A \times B \ni (x, y) \to (f(x), g(y)) \in A' \times B'$ を構成できる.

3.3

集合 A, B, A', B' を $cardA = \mathfrak{m}, cardB = \mathfrak{n}, cardA' = \mathfrak{m}', cardB' = \mathfrak{n}', A \subset A', B \subset B'$ となるよう定義する．$n' \geq 1$ より $a \in B$ がとれる．写像 $F : B^A \to B'^{A'}$ を各 $f \in B^A$ に対して

$$F(f)(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A) \\ a & (x \notin A) \end{cases}$$

となるよう定めれば F は単射なので $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \leq \mathfrak{n}'^{\mathfrak{m}'}$.

3.4

$2^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$．一方 $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

3.5

$cardA = \mathfrak{m}, cardB = \aleph_0$ となるよう互いに素な集合 A, B をとる．B は $A \cup B$ の可算部分集合であり $A \cup B - B = A$ は無限集合なので定理 6 より $\mathfrak{m} + \aleph_0 = card(A \cup B) = card(A) = \mathfrak{m}$.

3.6

(a) $\aleph^{\mathfrak{n}} = \aleph_0^{\aleph_0 \mathfrak{n}} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.
(b) $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{f} + \mathfrak{n}$ は明らか.
$\mathfrak{n} + \mathfrak{f} \leq \mathfrak{f} + \mathfrak{f} = 2\mathfrak{f} = 2^1 \cdot 2^{\aleph} = 2^{1+\aleph} = 2^{\aleph} = \mathfrak{f}$.
(c) $\mathfrak{n}\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}$ は明らか.
$\mathfrak{n}\mathfrak{f} \leq \mathfrak{f}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^2 = (2^{\aleph})^2 = 2^{2\aleph} = 2^{\aleph} = \mathfrak{f}$.
(d) $\mathfrak{f}^{\mathfrak{n}} \geq \mathfrak{f}$ は明らか.
$\mathfrak{f}^{\mathfrak{n}} = 2^{\aleph\mathfrak{n}} = 2^{\aleph} = \mathfrak{f}$.
(e) $2^{\mathfrak{f}} \leq \mathfrak{n}^{\mathfrak{f}}$ は明らか.
$\aleph\mathfrak{f} = \aleph^1\aleph^{\aleph} = \aleph^{1+\aleph} = \aleph^{\aleph} = \mathfrak{f}$ なので $2^{\mathfrak{f}} = 2^{\aleph\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}^{\mathfrak{f}}$.

3.7

$A = \mathbb{R}$ の場合を示せば, 全単射による A_λ の像を考えることにより一般の A に対しても示される．$\Lambda = [0, 1)$ とし，$A_\lambda = \{n + \lambda | n \in \mathbb{Z}\}$ とすれば $\mathbb{R}$ は条件 (i)(ii)(iii) を満たす.

3.8

各非負整数 n に対して $A_n = S \subset \mathbb{R} | cardS = n$ とする．このとき $cardA_0 = 1$, $cardA_n = \aleph (n \geq 1)$ であることを示す．まず $A_0 = \{\{\}\}$, $cardA_1 = card\{\{x\} | x \in \mathbb{R}\} = \aleph$ である．$cardA_n = \aleph$ ならば $\aleph \leq cardA_n \leq cardA_{n+1} \leq card(A_n \times \mathbb{R}) = \aleph$ であり $cardA_{n+1} = \aleph$ なので数学的帰納法により示される．よって $\mathbb{R}$ の有限部分集合全体の集合の濃度は $card \bigcup_{n \geq 0} A_n = 1 + \aleph \times \aleph = \aleph$.

3.9

A の有限部分集合全体の集合を $\mathfrak{B}$ とする．$\mathfrak{B}$ は前問と同様にして $card\mathfrak{B}$ であることが分かる．また, $\mathfrak{A}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (n) を含むので無限集合である．A の部分集合全体の集合は $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ であるが, この濃度は $\aleph$ であるから, 定理 6 により $card\mathfrak{A} = \aleph$ である．