# 1

./chapter2/inverse を使って解ける。途中経過を見たい場合は適宜 Matrix.hpp の Matrix::inverse() に output() を挿入すればよい。

$$
\text{イ)}\quad \begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ロ)}\quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

# 2

行列の変形には./chapter2/ElementaryOperation を用いた。計算過程は./chapter2/2.txt 参照。
変数を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ として、$\tilde{x} =^t (x, -1)$ と書くこととする。また、方程式の拡大行列を $\tilde{A}$ と書くこととする。
イ)
与式 $\tilde{A}\tilde{x}$ を変形して、

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} = 0
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

# 3

3.cpp 参照

## 4

$x=0$ ならば階数は n。

$x \neq 0$ として、$y = 1/x$ と置く。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{各行 } 1/x \text{ 倍}} &\begin{pmatrix} y & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & y & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & y \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{(1,n) \text{ 成分を要に掃き出し}} &\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1-y & y-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-y & 0 & \cdots & y-1 & 0 \\ 1-y^2 & 1-y & \cdots & 1-y & y \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{2\sim n-1 \text{ 行目を } n \text{ 行目に、} 2\sim n-1 \text{ 列目を 1 列目に足す}} &\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & y-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-1 & 0 \\ 1-y^2+(n-2)(1-y) & 0 & \cdots & 0 & y \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{1 \text{ 行目を } n \text{ 行目から引き、1 行目と } n \text{ 行目を入れ替える}} &\begin{pmatrix} 1-y^2+(n-2)(1-y) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって $y=1$ ならば階数は 1。$y \neq 1$ とすると

$$
\xrightarrow{1\sim n-1 \text{ 行目を } y-1 \text{ で割る}} \begin{pmatrix} -n+1-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

より、$y=-(n-1)$ なら階数は $n-1$、$y \neq n-1$ ならば階数は $n$。まとめると、階数は $x=1$ で 1、$x=-\dfrac{1}{n-3}$ で $n-1$、それ以外で $n$。

## 5

## 6

イ) $A^{-1} = A^{k-1}$ とすればよい。
ロ) $A$ が正則と仮定すると、$A^2 = A$ の両辺に右から $A^-1$ をかけて $A = E$ を得る。これは $A \neq E$ に矛盾する。よって $A$ は正則でない。
ハ) $A$ が正則と仮定すると、$A^k = 0$ の両辺に右から $A^-k$ をかけて $E = 0$ を得る。これは明らかに矛盾であるから、$A$ は正則でない。
ニ) $(E+A)^-1 = \sum_{i=0}^{n-1}(-A)^i$、$(E-A)^-1 = \sum_{i=0}^{n-1} A^i$ とすればよい。

## 7

左辺のトレースを取ると、$tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0$。
右辺のトレースを取ると、$tr(E_n) = n$。
よって、条件を満たす行列 $X, Y$ は存在しない。

## 8

## 9

## 10

## 11

イ)
$(P-E)$ と $(P+E)$、及び $(P-E)$ と $(P+E)^{-1}$ が可換であることを確認しておく。
これは

$$(P-E)(P+E) = P^2 - E = (P+E)(P-E)$$

及び

$$\begin{aligned}(P-E)(P+E)^{-1} &= (P+E)^{-1}(P+E)(P-E)(P+E)^{-1} \\ &= (P+E)^{-1}(P-E)(P+E)(P+E)^{-1} \\ &= (P+E)^{-1}(P-E)\end{aligned}$$

によって証明される。
これにより、

$$\begin{aligned}{}^tA &= (P-E)(P+E)^{-1} \\ &= ({}^tP+{}^tE)^{-1}({}^tP-{}^tE) \\ &= (P^{-1}+E)^{-1}(P^{-1}-E) \\ &= (P^{-1}+E)^{-1}P^{-1}P(P^{-1}-E) \\ &= (E+P)^{-1}(E-P) \\ &= -(P-E)(P+E)^{-1} \\ &= -A\end{aligned}$$

が示された。
ロ)

$$\begin{aligned}E-A &= (P+E)(P+E)^{-1}-(P-E)(P+E)^{-1} \\ &= 2(P+E)^{-1}\end{aligned}$$

であるから、$(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{2}(P+E)$ とすればよい。
ハ)

$$\begin{aligned}A &= (P-E)(P+E)^{-1} \\ A(P+E) &= P-E \\ (A-E)P &= -(A+E) \\ P &= (A+E)(E-A)^{-1}\end{aligned}$$

## 12