演習 2.2.6.

> $s \in S$を任意に取る．
> $(s,s) \in \{(s,s) \mid s \in S\} \subset R'$より$sR's$．

よってR'は反射的関係である．

> $R \subset R''$を満たすS上の二項関係R''を任意に取る．
>
> > $(s,t) \in R'$を任意に取る．
> >
> > > $(s,t) \in R$のとき，$R \subset R''$より$(s,t) \in R''$．
> >
> > > $(s,t) \in \{(s,s) \mid s \in S\}$のとき，$s = t$なので，$R''$の反射性より$(s,t) = (s,t) \in R''$．
> >
> > ゆえに$(s,t) \in R''$．
>
> よって$R' \subset R''$．

よってR'は反射的閉包である．

演習 2.2.7.

> $(s,t),(t,u) \in R^+$を任意に取る．
> $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$が存在して，$(s,t) \in R_{i_1}$，$(t,u) \in R_{i_2}$が成り立つ．
> $i = \max(i_1, i_2)$とすると，$(s,t),(t,u) \in R_i$．
> ゆえに$(s,u) \in R_{i+1} \subset R^+$．

よってR^+は推移的である．

> $R \subset R'$となるような推移的関係R'を任意に取る．
> 任意の$i \in \mathbb{N}$に対して$R_i \subset R'$が成り立つことを示す．
>
> > > 明らかに$R_0 = R \subset R'$が成り立つ．
> >
> > > $R_i \subset R'$を満たす$i \in \mathbb{N}$を任意に取る．
> > >
> > > > $(s,u) \in R_{i+1}$を任意に取る．
> > > >
> > > > > $(s,u) \in R_i$のとき，仮定より$(s,u) \in R'$．
> > > >
> > > > > $(s,u) \notin R_i$のとき，$(s,t),(t,u) \in R_i$となるtが存在する．
> > > > > 仮定より$(s,t),(t,u) \in R'$なので，R'の推移性より$(s,u) \in R'$．
> > >
> > > よって$R_{i+1} \subset R'$が成り立つ．
> >
> > よって任意の$i \in \mathbb{N}$に対して$R_i \subset R'$が成り立つことが帰納的に示される．
>
> よって$R^+ = \bigcup_i R_i \subset R'$が成り立つ．

よってR^+はRの推移的閉包である．

演習 2.2.8.

$R'_i (i \in \mathbb{N})$を以下のように帰納的に定義する．

$$
\begin{aligned}
R'_0 &= R \cup \{(s,s) \mid s \in S\} \\
R'_{i+1} &= R'_i \cup \{(s,t) \mid \text{ある } t \in S \text{ に対して } (s,t) \in R'_i \text{かつ } (t,u) \in R'_i\}
\end{aligned}
$$

このとき，演習 2.2.7.と同様に$R^* = \bigcup_i R'_i$が示される．

任意の$i \in \mathbb{N}$について，R'_iがPを保存することを示す．

> > 定義より明らかに$R'_0 = R$はPを保存する．
>
> > R'_iがPを保存するような$i \in \mathbb{N}$を任意に取る．
> >
> > > $P(s)$が真となるような$(s,u) \in R'_{i+1}$を任意に取る．
> > >
> > > > $(s,u) \in R'_i$のとき，仮定より$P(u)$は真．
> > >
> > > > $(s,u) \notin R'_i$のとき，$(s,t),(t,u) \in R'_i$となるような$t \in S$が存在する．
> > > > このとき，$P(s)$が真なので，$P(t)$が真となり，$P(u)$は真となる．
> > >
> > > よって$P(u)$は真である．
> >
> > よってR'_{i+1}もPを保存する．
>
> よって，任意の$i \in \mathbb{N}$についてR'_iがPを保存することが帰納的に示される．

> $P(s)$が真となるような$(s,t) \in R^*$を任意に取る．
> このとき，$i \in \mathbb{N}$が存在して$(s,t) \in R'_i$が成り立つ．
> すると，R'_iがPを保存することから$P(t)$は真となる．

よってR^*はPを保存する．