構造解析特論

21P2033　山田竜輝

問題：

式 A で与えられる微分方程式の境界値問題について、授業で学んだ方法のいずれかを使って x = 0.4, 0.8 における y の近似解を求め、結果を表にまとめて解析解と比較せよ。どのような方法や設定で近似解を求めたか、必ず示すこと。PDF ファイルで提出すること。氏名と学生番号を記入すること。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = -x, 0 \leq x \leq 1 \left(式A\right)$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

解析解:

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{e^{\sqrt{2}}}{2\left(1 - e^{2\sqrt{2}}\right)}\left(e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}\right)$$

回答：

表の結果を下記表 1 に記す。使用した方法は Galerkin 法で、M=1 とした。また、図 1 に y 近似解の比較グラフを記した。MATLAB ソフトを用いて、グラフを作成した。

表 1　y の近似解の比較

解析解	$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{e^{\sqrt{2}}}{2\left(1 - e^{2\sqrt{2}}\right)}\left(e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}\right)$	$\tilde{y} = \frac{5}{24}x(1 - x)$
x = 0.4	0.0459	0.0500
x = 0.8	0.0412	0.0333

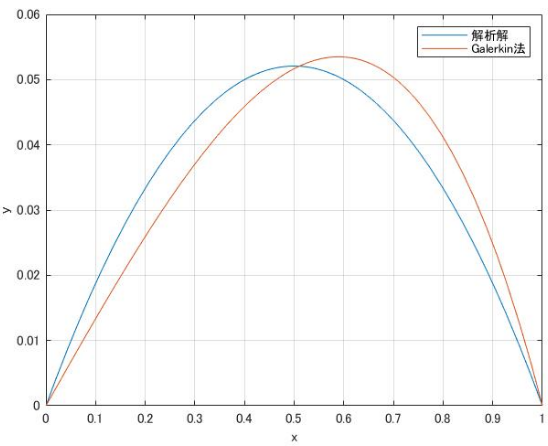

図 1　y 近似解の比較グラフ

回答を得るまでの過程として、

v_1, M：

$$v_1 = x(x-1), \mathrm{M} = 1$$

近似式：

$$\tilde{y} = \alpha_1 v_1, v_1 = x(1-x), \mathrm{M} = 1$$

残差式：

$$\mathrm{R(x)} = R(x) = \frac{d^2\tilde{y}}{dx^2} - 2\tilde{y} + x, 0 \leq x \leq 1$$

$$—> -2\alpha_1 - 2\alpha_1 x(1-x) + x$$

Galerkin 法による重み付き残差：

$$I_1 = \int_0^1 w_i\{-2\alpha_1 - 2\alpha_1 x(1-x) + x\}dx$$

$$w_1 = v_1 = x(1-x)$$

$$I_1 = \int_0^1 x(1-x)\{-2\alpha_1 - 2\alpha_1 x(1-x) + x\}dx = 0$$

$$\frac{1}{12} - \frac{2}{5}\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1 \times 5}{12 \times 2} = \frac{5}{24}$$

よって近似関数は、

$$\tilde{y} = \frac{5}{24}x(1-x)$$