

**К.Е. Самуйлов, П.О. Абаев, Ю.В. Гайдамака,
И.А. Гудкова, А.В. Королькова,
Д.С. Кулябов, О.Н. Щукина**

МУЛЬТИСЕРВИСНЫЕ СЕТИ СВЯЗИ

Учебно-методический комплекс

**Москва
Российский университет дружбы народов
2013**

УДК

ББК

Б

Утверждено
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

*Издание подготовлено в рамках реализации
Программы стратегического развития РУДН на 2012-2016 гг.*

**Самуилов К.Е., Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А.,
Королькова А.В., Кулябов Д.С., Щукина О.Н.**
Мультисервисные сети связи: Учебно-методический комплекс. –
М.: РУДН, 2013. – 363 с.: ил.

Учебно-методический комплекс обеспечивает реализацию магистерской программы «Управление инфокоммуникациями и интеллектуальные системы» и предназначен для студентов, обучающихся по направлению 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Учебно-методический комплекс включает в себя учебное пособие «Теория телетрафика мультисервисных сетей».

ISBN 978-5-209-

© Самуилов К.Е., Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А.,
Королькова А.В., Кулябов Д.С., Щукина О.Н., 2013
© Российский университет дружбы народов, Издательство, 2013

**ОПИСАНИЕ КУРСА И
ПРОГРАММА
«МУЛЬТИСЕРВИСНЫЕ СЕТИ
СВЯЗИ»**

1. ОПИСАНИЕ КУРСА «МУЛЬТИСЕРВИСНЫЕ СЕТИ СВЯЗИ»

1. Название курса

«Мультисервисные сети связи»

2. Цели и задачи курса

Область знаний

Курс относится к области знаний «Информационно-телекоммуникационные системы», соответствующей одноименному приоритетному направлению развития науки и технологий, входящему в перечень, утвержденный Президентом Российской Федерации.

Уровень обучения и направления подготовки по действующему перечню

Курс является частью магистерской программы «Управление инфокоммуникациями и интеллектуальные системы» направления 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Согласно учебному плану курс является дисциплиной по выбору вариативной части общенаучного цикла.

Цели и задачи курса

Целями курса являются

- знакомство с принципами функционирования мультисервисных сетей связи (МСС);
- изучение методов разработки и анализа моделей функционирования МСС, их фрагментов и отдельных элементов;
- знакомство с типами трафика в современных мультисервисных сетях;
- освоение методов построения вероятностных моделей для

анализа качества обслуживания в МСС в терминах теории массового обслуживания и теории марковских процессов;

- применение методов анализа и расчета показателей качества обслуживания к моделям МСС.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

- изучение принципов построения МСС;
- анализ основных протоколов передачи информации в МСС;
- исследование методов построения моделей сетей с одноадресными, многоадресными соединениями, с эластичным трафиком, а также моделей с различными комбинациями указанных типов трафика;
- исследование методов построения моделей сессии GPRS/GSM с пульсирующим трафиком, модели процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока;
- исследование методов построения жидкостных моделей для анализа файлообменных одноранговых сетей связи (P2P-сетей), а также моделей в дискретном времени для анализа потоковых P2P-сетей;
- исследование точных и приближенных методов анализа моделей мультисервисных сетей.

1. Инновационность курса

По содержанию.

Современные методы проектирования сетей и систем инфокоммуникаций в частности базируются на новейших достижениях целого ряда научных областей, обеспечивающих развитие приоритетного направления развития науки и технологий – информационно-телекоммуникационные технологии, – входящего в перечень, утвержденного Президентом Российской Федерации. К этим областям в первую очередь относятся информационная интеграция, информационно-телекоммуникационные системы и искусственный интеллект. Последние достижения в этой области сконцентрированы в целом ряде концепций, архитектурных моделей и методологий, принятых на международном уровне в виде стандартов и рекомендаций,

разработанных ведущими производителями и исследовательскими центрами. Эти концепции в свою очередь опираются на другие новейшие достижения в области инфокоммуникационных технологий.

Новые виды обслуживания, регулярно появляющиеся в современных информационно-телекоммуникационных сетях, породили новые типы трафика, передаваемого в этих сетях. Это привело необходимости обобщения имеющихся подходов к построению моделей мультисервисных сетей связи для анализа качества обслуживания в этих сетях с новых позиций. Содержание курса обеспечивает слушателей необходимым объемом знаний для проведения исследований в этой новой области телекоммуникаций.

По методике преподавания и организации учебного процесса.

Методика преподавания основана на применении современных информационных технологий. Учебно-методический комплекс с одноименным названием помимо традиционных методических материалов включает электронный учебник, интегрированный в инфокоммуникационную среду типа eLearning. Эти средства позволяют организацию и проведение лабораторных занятий в виде виртуального класса, где студенты работают под руководством преподавателя в асинхронном режиме. Такой режим позволяет осуществлять эффективный контроль уровня знаний за счет постоянного наблюдения за степенью освоения курса учащимися и за ходом выполнения промежуточных видов контроля знаний.

По литературе.

В настоящее время существует недостаток учебной литературы по вопросам исследования мультисервисных сетей связи. Отдельные модели мультисервисной сети в целом, фрагментов мультисервисных сетей, а также отдельных элементов сетей имеются в разрозненной учебной и научной литературе, как на русском, так и на английском языках. Учебно-методический

комплекс «Мультисервисные сети связи» позволяет с единых позиций изучить подходы к построению и исследованию моделей мультисервисных сетей связи с учетом типов трафика, передаваемого в современных сетях.

По организации учебного процесса.

Учебный процесс интегрирован с компьютерными комплексами поддержки обучения. Также в учебном процессе используются интерактивные формы обучения.

2. Сведения об авторах

Самуйлов Константин Евгеньевич

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой систем телекоммуникаций РУДН.

Родился 17 августа 1955 года. Окончил в 1978 г. Университет дружбы народов им. П. Лумумбы, по специальности математик, в дипломной работе исследовал методы расчета характеристик сетей массового обслуживания. В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию «Системы массового обслуживания ограниченной емкости и их приложение к анализу информационно-вычислительных систем» на факультете Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика». В 2005 году защитил докторскую диссертацию «Методы анализа и расчета сетей сигнализации и мультисервисных сетей с одноадресными и многоадресными соединениями» в Московском техническом университете связи и информатики по специальности 05.12.13 «Системы, сети и устройства телекоммуникаций».

Член рабочей группы «Интеллектуальные сети» Международной федерации по обработке информации (IFIP), постоянный член программных комитетов 3-х международных

конференций, в 1997 - 1999 гг. член Российской делегации 11-ой Исследовательской комиссии Международного союза электросвязи, член-корреспондент Международной академии информатизации, в 1998-2000 гг. визитный профессор в Технологическом университете г. Хельсинки, в 2001-2002 гг. - в Технологическом университете г. Лаппеэнранта, Финляндия. Руководитель ряда проектов реализованных для ОАО «Ростелеком», ОАО «Центртелеинформ», ОАО «Уралсвязьинформ», ОАО «МТС», ОАО «МТТ», ОАО «МГТС», ОАО «Гипросвязь», ЗАО «Коминфо Консалтинг», Telecom Finland и Sonera, Nokia, Ericsson и др.

Ведет активные научные исследования и разработки в области проектирования сетей связи следующего поколения (NGN), систем поддержки операционной и бизнес-деятельности компаний связи (NGOSS/BSS), математической теории телетрафика мультисервисных сетей. Автор более 100 научных работ и 2-х монографий в области теории телетрафика, математических методов анализа и расчета цифровых сетей связи, методов анализа и расчета показателей качества мультисервисных сетей.

Основные публикации:

1. Martikainen O., Naoumov V., Samouylov K. Call Processing Model for Multimedia Services // Intelligent Networks and New Technologies (Villy B. Iversen and Jorgen Norgaard eds), Chapman & Hall, London, 1996, pp. 241-251.
2. Martikainen O., Naoumov V., Samouylov K., Zhidovinov M. A Framework of Service Components Modeling for Multimedia Distribution over Broadband Network // Intelligent Networks and Intelligence in Networks (Dominique Gaiti ed.). - Chapman & Hall, London, 1997, pp. 115 - 127.
3. Martikainen O., Naoumov V., Samouylov K. Telecommunication Signalling. // Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering. V. 21 (John .G. Webster, Editor). - John Wiley & Sons, 1999, pp. 426 - 432.
4. Samouylov K. Inconsistency between Q.706 and E.733 and queuing delay calculations in Q.706. // COM11-D1479 ITU-T SG11. - Geneva, November-December, 1999, 9 p.
5. Chukarin A., Samouylov K. Tool for the Routing Planning in a

Large-scale Signaling Network // Proc. of the 7th Int. Conf. on Telecommunications, ConTEL 2003, Zagreb. - June 2001, pp. 579 - 586.

6. Самуилов К.Е., Полищук В.П., Чукарин А.В. Схема сети ОКС-7 Московской области // Вестник связи. - 2002. - №10, С. 80 - 86.
7. Самуилов К.Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС 7. Монография // М. Изд-во РУДН, 2002. - 291 с.
8. Аджемов А.С., Самуилов К.Е.и др. Принципы построения сети ОКС 7 на ЕСЭ Российской Федерации. Монография. // М. Изд. ФГУП ЦНИИС, 2004. - 246 с.
9. Савчук А.С., Самуилов К.Е., Чукарин А.В. О стандартизации бизнес процессов для компаний отрасли связи // Электросвязь, № 6, 2006. - С. 19 - 26.
10. Наумов В.А., Самуилов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Монография. // М.: Изд-во РУДН, 2007. - 191 с.
11. Башарин Г.П. , Гайдамака Ю.В., Самуилов К.Е., Яркина Н.В. Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15144 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802917
12. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуилов К.Е., Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15157 от 10.02.2009, номер гос. регистрации 0320802930
13. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Введение в управление инфокоммуникациями. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15189 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802962
14. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Единая информационная модель управления инфокоммуникационной компанией. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное

свидетельство № 15142 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802915

15. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Основы управления инфокоммуникационными компаниями. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15159 от 10.02.2009, номер гос. регистрации 0320802932
16. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Основы формальных методов описания бизнес-процессов. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15156 от 10.02.2009, номер гос. регистрации 0320802929
17. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Расширенная карта процессов деятельности телекоммуникационной компании. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15141 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802914
18. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Системы следующего поколения для поддержки операционной деятельности инфокоммуникационной компании. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15143 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802916
19. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Современные концепции управления инфокоммуникациями. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15139 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802912
20. Самуилов К.Е., Серебренникова Н.В., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Формальные языки моделирования процессов деятельности инфокоммуникационных компаний. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15140 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802913

21. Ромашкова О.Н., Самуйлов К.Е., Чащин А.А. О стандартизации архитектурных решений для предоставления услуг IPTV // Документальная электросвязь. - М., Ноябрь 2008, С. 19-24
22. Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. Учебно-метод. пособие. Москва, РУДН, 2008. – 72 с. (эл. Вид)
23. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А. Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и телемеханика, № 12. - Академиздатцентр «Наука» РАН, С. 16 — 28
24. Самуйлов К.Е., Чукарин А.В., Яркина Н.В. Бизнес-процессы и информационные технологии в управлении телекоммуникационными компаниями. - М.: Альпина Паблишерз. - 2009. - 442 с. (монография)
25. Лузгачев М.В., Самуйлов К.Е. Задача маршрутизации трафика на графе сети MPLS с одноадресными соединениями // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 1, 2009. - С. 23 -33
26. Першаков Н. В., Самуйлов К. Е. Системы M |G|1 с групповым обслуживанием и их применение к анализу модели протокола управления потоковой передачей. Часть I // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 1, 2009. - С. 34 -44. Часть II // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». № 2, 2009. - С. 43 -53
27. Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А., Самуйлов К.Е. Приближенный анализ марковской модели звена сети Triple Play // International Workshop "Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2010)", Proceedings, Moscow, Russia, October 26-28, 2010 M.: R&D Company "Information and Networking Technologies". - 2010. С. 6-10
28. Лузгачев М. В., Самуйлов К. Е. Метод решения задачи разделения ресурсов мультисервисной сети между виртуальными частными сетями с одноадресными и многоадресными соединениями // Вестник Российского

- университета дружбы народов, серия «Математика. Информатика. Физика». - №2, вып. 1. - 2010. - С. 42-53
29. Нсангу Мушили, Самуйлов К.Е., Сопин Э.С. Модель функционирования сервера присутствия в сети NGN // Т-Comm Телекоммуникации и транспорт №7. - 2010. - С.116-118
30. Нсангу Мушили, Самуйлов К.Е., Чукарин А.В Построение и анализ Марковской модели установления соединения по протоколу SIP с учетом повторных передач // Т-Comm Телекоммуникации и транспорт №7, 2010. - С.139-141
31. Самуйлов К.Е., Сопин Э.С., Чукарин А.В. Оценка характеристик сигнального трафика в сети связи на базе подсистемы IMS // “T-Comm — Telecommunications and Transport” magazine, 2010, №7. - С. 8-13
32. Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Гистерезисное управление сигнальной нагрузкой в сети SIP-серверов // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика», № 4. М.: РУДН. - 2011. -С. 55-73.
33. Самуйлов К.Е., Сопин Э.С К анализу методов балансировки нагрузки несущей в системах LTE_ADVANCED // Т-Comm – Телекоммуникации и Транспорт. - № 7. М.: ИД «Медиа Паблишер». - 2011. - С. 136 — 139
34. Самуйлов К.Е., Чукарин А.В., Быков С.Ю. Основы формальных методов описания бизнес-процессов : Учебное пособие. М.: Изд-во РУДН, 2011. - 123 с.

Абаев Павел Ованесович

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры систем телекоммуникаций РУДН.

В 2006 году окончил бакалавриат РУДН, а в 2008 году – магистратуру РУДН на кафедре систем телекоммуникаций под руководством д.т.н., проф. Самуйлова К.Е. Магистерская диссертация была посвящена разработке методов расчета характеристик функционирования беспроводных сетей связи третьего поколения. С 2008 года обучается в аспирантуре на

кафедре систем телекоммуникаций по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики».

С 2005 по 2007 гг. работал инженером в отделе ИЕТФ УИ РУДН, с 2007 года по настоящее время работает на кафедре систем телекоммуникаций. Ведет научные исследования и разработки в области проектирования сетей связи следующего поколения, математических методов анализа и расчета цифровых сетей связи и математической теории телетрафика. Участвовал в проектах, реализованных для ОАО «МГТС» и ЗАО «НТИ АССНАЗ».

Основные публикации:

- 1 Наумов В.А., Абаев П.О. Приближенный анализ вероятностно-временных характеристик многофазных систем массового обслуживания. // Вестник Российского университета дружбы народов. «Прикладная и компьютерная математика», № 3-4, 2007.
- 2 Абаев П.О. Метод анализа блокировок GPRS-сессий с учетом пульсирующего характера трафика. // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С.Попова, выпуск LXIV, Москва, 2009.
- 3 Абаев П.О., Абаев А.О. Анализ показателей функционирования UMTS/WCDMA системы. // Тезисы докладов XLVI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии, РУДН, 2010.
- 4 Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Рудикова Е.В. Численный анализ модели обслуживания сессий в сети GSM/GPRS. // T Comm Телекоммуникации и транспорт, № 7, 2010.
- 5 Абаев П.О., Хатунцев А.Б. Построение и анализ модели установления соединения по протоколу SIP в сети связи следующего поколения. // T Comm Телекоммуникации и транспорт, № 7, 2010.
- 6 Абаев П.О., Хатунцев А.Б. Модель расчета вероятностно-временных характеристик установления соединений в гибридных сетях связи. // Электросвязь, № 10, 2010.
- 7 On SIP Session Setup Delay Modeling in Next Generation Networks // Сборник трудов конференции International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control

System (ICUMT 2010) and Workshops Proceedings Москва, 2010.

Гайдамака Юлия Васильевна

Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры систем телекоммуникаций РУДН

В 1995 году окончила магистратуру Российского университета дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук по специальности «Прикладная математика и информатика», в 2001 году окончила очную аспирантуру и защитила диссертацию «Анализ вероятностно-временных характеристик звена сети передачи данных» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики». С октября 2002 г. - доцент кафедры систем телекоммуникаций физико-математического факультета РУДН.

Основные публикации:

- 1 Жарков М.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. К расчету задержек в звене сигнализации ОКС 7 при базовом методе защиты от ошибок // Электросвязь. -2000.- №3.- С.30-34.
- 2 Samouylov K., Gaidamaka Y. Analytical Model of Multicast Networks and Single Link Performance Analysis // Proc. of the 6-th Int. Conf. on Telecommunications ConTEL-2001, June 13-15, 2001.- Zagreb, Croatia.- 2001.- P.169-177.
- 3 Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Севастьянов Л.А., Спесивов С.С Лекции по дискретной математике: Учебн. пособие. Ч.2. Логика. – М.: Изд-во РУДН, 2000. – 40 с.
- 4 Ромашкова О.Н., Гайдамака Ю.В., Соболькова Е.А. Комбинаторные алгоритмы. Ч.1: Учеб.пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 34 с.; Ч.2: Учеб.пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2004. – 39 с.
- 5 Гайдамака Ю.В., Першаков Н.В., Чукарин А.В. Модель протокола SCTP и ее применение к анализу характеристик сигнального трафика при передаче по IP-сетям // Электросвязь. - 2007. - №9. - С.4-8.

- 6 Андрианов Г.А., Самуйлов К.Е., Гайдамака Ю.В. Анализ модели трафика ОКС 7 по результатам обработки статистики измерений // Вестник связи. - 2007. - №11. - С.17-23.
- 7 Летников А.И., Пшеничников А.П., Гайдамака Ю.В., Чукарин А.В. Системы сигнализации сетей с коммутацией каналов и коммутацией пакетов: Учебное пособие // М.: Изд-во МТУСИ, 2008. - 195 с.
- 8 Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи: Учебно-метод. пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 72 с.: ил.
- 9 Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 137 с.: ил.
- 10 Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Яркина Н.В. Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 157 с.: ил.
- 11 Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. Лекции по дискретной математике. Часть II Комбинаторика. Теория конечных графов: Учебно-метод. пособие. - М.: Изд-во РУДН, 2008. – 60 с.: ил.
- 12 Buzyukova Irina L., Gaidamaka Yulia V. Russian National Intelligent Network: Signalling Load Calculation for Different Configurations // Proc. of Int. IEEE Conf. Eurocon 2009, May 18-23, 2009. – Saint-Petersburg, Russia. – 2009. - P. 1737-1742. (6/3 с.)
- 13 Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Рудикова Е.В. Численный анализ модели обслуживания сессий в сети GSM/ // Т-Comm - Телекоммуникации и Транспорт. - 2010. - №7. - С. 130-134.
- 14 Adamu A., Gaidamaka Yu., Samuylov A. Analytical Modeling of P2PTV Network // Proc. of the 2-d International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems

- (IEEE ICUMT 2010), Oct. 18-20, 2010. - Moscow, Russia. – 2010. Рр. 1115-1120.
- 15 Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А., Самуйлов К.Е. Приближенный анализ марковской модели звена сети Triple Play // Distributed Computer and Communication Networks. Theory and Applications (DCCN-2010), Moscow: Research and Development Company "Information and Networking Technologies", 2010. – Рр. 6-10.
- 16 Самуйлов К.Е., Гайдамака Ю.В., Щукина О.Н. О применении формулы Эрланга к расчету показателей качества мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями // Т-Comm - Телекоммуникации и Транспорт. - 2011. - №7. – С.45-48.
- 17 Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Гистерезисное управление нагрузкой в сетях сигнализации // «Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика».» – М.: Изд-во РУДН. – 2011. – №4. - С. 55-73.
- 18 Гелий П. Башарин, Юлия В. Гайдамака, Константин Е. Самуйлов Актуальные задачи математической теории телетрафика // Международная конференция “Теория вероятностей и ее приложения”, посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 26-30 июня 2012 г.): Тезисы докладов / Под ред. А.Н.Ширяева, А.В.Лебедева. – М.:ЛЕНАНД, 2012. – С. 176-177.
- 19 Pavel O. Abaev, Yuliya V. Gaidamaka, Alexander V. Pechinkin, Rostislav V. Razumchik, Sergey Ya. Shorgin Simulation of overload control in SIP server networks (текст доклада, междунар. конф.) // Proc. of the 26th European Conference on Modelling and Simulation ECMS 2012 (May 29 - June 1, 2012, Koblenz, Germany). – Germany, Koblenz. – 2012. – Рр. 533-539.
- 20 Бутурлин И.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К. О задачах максимизации функции полезности для двух алгоритмов межуровневой оптимизации в сети OFDM // Т-Comm - Телекоммуникации и Транспорт. - 2012. - №7. – С.30-32.
- 21 Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Сопин Э.С. Модель одной системы массового обслуживания типа M/G/1 с

- гистерезисным управлением входящим потоком // Т-Comm - Телекоммуникации и Транспорт. - 2012. - №7. – С.60-62.
- 22 Гайдамака Ю.В., Ефимушкина Т.В., Самуйлов А.К., Самуйлов К.Е. Задачи оптимального планирования межуровневого интерфейса в беспроводных сетях потоком // Информатика и ее применения. – 2012. – Т. 6. – Вып. 3. – С.75-81.
- 23 Pavel Abaev, Yuliya Gaidamaka, and Konstantin Samouylov Queuing Model for Loss-Based Overload Control in a SIP Server Using a Hysteretic Technique // Proceedings 12th International Conference, NEW2AN 2012, and 5th Conference, ruSMART 2012, St. Petersburg, Russia, August 27-29, 2012. – Lecture Notes in Computer Science. - Germany, Heidelberg, Springer-Verlag. – 2012. – Vol. 7469. – P. 371-378.

Гудкова Ирина Андреевна

Старший преподаватель кафедры систем телекоммуникаций РУДН

В 2007 г. окончила бакалавриат Российского университета дружбы народов по специальности «Прикладная математика и информатика», в выпускной работе проводила анализ вероятностной модели протокола управления потоковой передачей. В 2009 г. в РУДН получила степень магистра прикладной математики и информатики по специализации «Программное обеспечение вычислительных сетей», в магистерской работе занималась разработкой и приближенным анализом модели звена мультисервисной сети с потоковым и эластичным трафиком. На данный момент обучается в аспирантуре на кафедре систем телекоммуникаций по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики» под научным руководством д.т.н., профессора Самуйлова Константина Евгеньевича.

С 2008 г. работает на кафедре систем телекоммуникаций. Ведет научные исследования и разработки в области математической

теории телетрафика мультисервисных сетей, а также сигнализации в сетях связи следующего поколения.

Основные публикации:

1. Gudkova I.A. and Samouylov K.E. Approximating performance measures of a triple play loss network model // Lecture Notes in Computer Science, NEW2AN/ruSMART-2011, S. Balandin et al. (eds.). – Germany, Heidelberg, Springer-Verlag. – 2011. – Vol. 6869. – P. 360–369.
2. Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А., Самуйлов К.Е. Приближенный анализ марковской модели звена сети Triple Play // Distributed Computer and Communication networks. Theory and Applications DCCN-2010. – Moscow, R&D Company «Information and Networking Technologies». – 2010. – С. 6–10.
3. Samouylov K.E. and Gudkova I.A. Recursive computation for a multi-rate model with elastic traffic and minimum rate guarantees // Proc. of the International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT-2010 (18–20 October 2010). – P. 1065–1072.
4. Gudkova I.A. and Plaksina O.N. Performance measures computation for a single link loss net-work with unicast and multicast traffics // Lecture Notes in Computer Science, NEW2AN/ruSMART-2010, S. Balandin, R. Dunaytsev, Y. Koucheryavy, (eds.). – Germany, Heidelberg, Springer-Verlag. – 2010. – Vol. 6294. – P. 256–265.
5. Гудкова И.А., Лузгачев М.В. Модели разделения ресурсов звена мультисервисной сети с эластичным трафиком // Т-Comm – Телекоммуникации и Транспорт. – М.: Издательский дом Медиа Паблишер. – 2010. – № 7. – С. 22–24.
6. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А. Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и телемеханика. – М.: Академиздатцентр «Наука» РАН. – 2009. – № 12. – С. 16–28.
7. Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А. Математическая модель управления доступом в сетях Triple Play // IV международная конференция по проблемам управления

- МКПУ-IV (26–30 января 2009 г.): Сборник трудов. – М.: РАН ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. – 2009. – С. 1722–1730.
8. Самуилов К.Е., Першаков Н.В., Гудкова И.А. Построение и анализ моделей системы с групповым обслуживанием заявок // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – М.: РУДН. – 2007. – № 3–4. – С. 45–52.

Королькова Анна Владиславовна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем телекоммуникаций РУДН.

Родилась 22 мая 1981 года. В 2003 году окончила бакалавриат РУДН, а в 2005 году - магистратуру РУДН по направлению «Прикладная математика и информатика», магистерская диссертация была посвящена вопросу построения защищённой системы на базе SELinux.

С 2005 по 2009 года обучалась в аспирантуре на кафедре систем телекоммуникаций по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». В 2010 г. защитила диссертацию «Математическая модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

С 2007 года по настоящее время работает на кафедре систем телекоммуникаций РУДН, с июля 2011 г. - в должности доцента. С 2002 года по настоящее время также работает в секторе системного администрирования отдела ИЕТФ УИТО РУДН.

Автор более 20 научных работ в области сетевых технологий, информационной безопасности, математического и имитационного моделирования.

Основные публикации:

1. Королькова А.В., Кулябов Д.С. Инфраструктура открытых ключей // Вестник РУДН, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.2, №2. — 2003. — С. 123–151.

2. Королькова А.В., Кулябов Д.С. Необходимость обеспечения безопасности операционных систем на системном уровне // Вестник РУДН, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.3, №1. — 2004.— С. 144–161.
3. Королькова А.В., Кулябов Д.С. Адаптация системы работы с файлами устройств для SELinux // Вестник РУДН, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.4, №1. — 2005. — С. 153-163.
4. Королькова А.В. Метод расчета вероятности сброса пакетов в алгоритме RED // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — Т.1, №12. — 2007.
5. Кулябов Д.С., Королькова А.В., Хохлов А.А. Подсистема маршрутизации Click // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — Т.1, №12. — 2007.
6. Королькова А.В., Кулябов Д.С. Инструментальные средства моделирования DiffServ // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем.— Вып. 11 /Под редакцией Л.А. Уваровой. М.: Издательство «Янус-К», 2008, С. 161-167
7. Королькова А.В., Кулябов Д.С., Геворкян М.Н. Разработка модулей Click, реализующих алгоритмы активного управления очередью DSRED и SDRED // Моделирование нелинейных процессов и систем.- М.: МГУП, 2008, с. 181-182.
8. Королькова А.В., Кулябов Д.С., Черноиванов А.И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», № 3, 2009. - с. 34-46
9. Кулябов Д. С., Королькова А. В. Архитектура и принципы построения современных сетей и систем телекоммуникаций. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15192 от 12.02.2009, номер гос. регистрации 0320802965

10. Кулябов Д. С., Королькова А. В. Введение в формальные методы описания бизнес-процессов. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15188 от 11.02.2009, номер гос. регистрации 0320802961
11. Королькова А. В. Определение области возникновения автоколебаний в системах типа RED // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», № 1, 2010. - с. 110-112
12. Королькова А. В., Кулябов Д. С. Математическая модель динамики поведения параметров систем типа RED // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», № 2(1), 2010. - с. 54-64
13. Королькова А. В. Математическая модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока / Дис. ... канд. физ.-математ. наук: 05.13.18 Москва, 2010. - 115 с.
14. Королькова А. В., Черноиванов А.И. Использование СДУ для моделирования поведения TCP-трафика при взаимодействии с узлом, работающим по алгоритму RED. Определение области возникновения автоколебаний на примере алгоритмов RED, ARED, RARED, POWARED // "Математика. Компьютер. Образование". Сб. научных трудов/ Под редакцией Г.Ю. Ризниченко. - Т. 1 М.-Ижевск: НИЦ"Регулярная и хаотическая динамика", 2010. - С. 270-282
15. Korolkova A.V., Zaryadov I.S. The Mathematical Model of the Traffic Transfer Process with a Rate Adjustable by RED "2010 International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems. (ICUMT 2010)" and Workshops Proceedings 18-20 Oct. 2010 Moscow, Russia IEEE P. 1046-1050.
http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5676505
16. Королькова А., Черноиванов А. Модификация модели процесса передачи с регулированием алгоритмом типа RED интенсивности потока для случая TCP-NewReno

- трафика // International Workshop "DISTRIBUTED COMPUTER AND COMMUNICATION NETWORKS (DCCN-2010)", Proceedings, Moscow, Russia, October 26-28, 2010. - M.: R&D Company "Information and Networking Technologies". - 2010. - C. 262-267
17. Зарядов И. С., Королькова А. В. Модель расчета показателей RED-подобных алгоритмов с помощью систем с групповым входящим потоком // International Workshop ""Distributed computer and communication networks (DCCN-2011)" M.: R&D Company "Information and Networking Technologies". - 2011. - C. 65-72

Кулябов Дмитрий Сергеевич

Доцент кафедры систем телекоммуникаций РУДН, кандидат физико-математических наук, доцент. Начальник сектора системного администрирования отдела ИЕТФ УИ РУДН.

Родился 22 апреля 1970 года. Окончил в 1994 году бакалавриат Университета дружбы народов им. П. Лумумбы, по специальности физика, в выпускной работе исследовал солитонные решения уравнения Деви-Стюарта. В 1996 году окончил магистратуру Университета дружбы народов им. П. Лумумбы, по специальности физика, в магистерской диссертации исследовал устойчивость самогравитирующих солитонов. В 2000 году защитил кандидатскую диссертацию «Приложение лоренцевых 2-спиноров к некоторым проблемам теории поля» на факультете ФМИЕН РУДН по специальности 01.04.02 «Теоретическая физика». С 1996 по 2000 годы работал в НИИГазпром. Ведёт активные научные исследования и разработки в области проектирования IP-сетей, операционных систем, информационной безопасности. Автор более 30 научных работ в области сетевых технологий, информационной безопасности, операционных систем.

Основные публикации:

1. Самуйлов К. Е., Кулябов Д. С. Учебно-методическое пособие по курсу «Сети и системы телекоммуникаций». — М.: Изд-во РУДН, 2002. — 55 с.

2. Королькова А. В., Кулябов Д. С. Инфраструктура открытых ключей // Вестник РУДН, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.2, №2. — 2003. — С. 123–151.
3. Королькова А. В., Кулябов Д. С. Необходимость обеспечения безопасности операционных систем на системном уровне // Вестник РУДН, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.3, №1. — 2004.— С. 144–161.
4. Королькова А. В., Кулябов Д. С. Адаптация системы работы с файлами устройств для SELinux// Вестник Российского университета дружбы народов, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.4, №1. — 2005.— С. 153-163.
5. Кулябов Д.С., Ланеев Д.Е. Моделирование динамики взаимодействия WEB-сервера и пула клиентов в компьютерной сети в условиях атаки «Отказ в обслуживании» // Вестник Российского университета дружбы народов, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т.4, №1. — 2005.— С. 164-178.
6. Кулябов Д. С., Королькова А.В. Аналитическая модель для расчета вероятности сброса пакетов в алгоритме RED // Труды РНТОРЭС им. Попова. Серия: Научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск: LXII.— 2007.— С. 233-234.
7. Кулябов Д. С., Королькова А.В., Хохлов А.А. Подсистема маршрутизации Click // Вестник Российского университета дружбы народов, серия «Математика. Информатика». — Т.1, №12. — 2007.
8. Королькова А.В., Кулябов Д.С., Черноиванов А.И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика», № 3, 2009. - с. 34-46
9. Кулябов Д. С., Королькова А. В. Архитектура и принципы построения современных сетей и систем телекоммуникаций. Уч. пособие, электронное издание на

CD / Регистрационное свидетельство № 15192 от 12.02.2009, номер гос. регистрации 0320802965

10. Кулябов Д. С., Королькова А. В. Введение в формальные методы описания бизнес-процессов. Уч. пособие, электронное издание на CD / Регистрационное свидетельство № 15188 от 11.02.2009, номер гос. Регистрации 0320802961
11. Кулябов Д.С., Ловецкий К.П., Самуйлов К.Е., Севастьянов Л.А., Хохлов А.А. Инновационная магистерская программа «Математическое моделирование оптических наноструктур»/ IV Международная научно - практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ - образование», - тезисы докладов. - Москва, ВМК МГУ, с 163 — 171
12. Королькова А. В., Кулябов Д. С. Математическая модель динамики поведения параметров систем типа RED // Вестник Российского университета дружбы народов, серия «Математика. Информатика. Физика». - №2, вып.1. - 2010. - С. 54-64

Щукина Ольга Николаевна

Старший преподаватель кафедры систем телекоммуникаций РУДН.

В 2006 году окончила бакалавриат РУДН, а в 2008 году – магистратуру РУДН на кафедре систем телекоммуникаций под руководством Самуйлова К.Е. Магистерская диссертация была посвящена разработке приближенных методов для расчета характеристик мультисервисных сетей. С 2008 года обучалась в аспирантуре на кафедре систем телекоммуникаций по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики». В мае 2010 успешно защитила кандидатскую диссертацию по теме «Методы анализа вероятностей блокировок в мультисервисных сетях с многоадресными соединениями» и получила степень кандидата физико-математических наук.

С 2005 по 2007 гг. работала математиком в отделе ИЕТФ УИ РУДН, с 2007 года по настоящее время работает на кафедре систем

телекоммуникаций. Ведет научные исследования в области мультисервисных сетей связи.

Основные публикации:

1. Самуилов К.Е., Лузгачев М.В., Плаксина О.Н. Разработка вероятностной модели для анализа показателей качества протокола инициирования сеансов связи // Вестник Российского университета дружбы народов. «Прикладная и компьютерная математика», № 3-4, 2007, с. 53-63.
2. Konstantin E. Samouylov, Olga N. Plaksina. Approximating blocking probabilities for multiservice network link with unicast and multicast connections / International IEEE Conference EUROCON 2009 Russia, Saint Petersburg, May 18-23, 2009, pp. 1814-1817.
3. Плаксина О.Н. О двух системах массового обслуживания с «прозрачными» заявками и их применении к анализу сетей мультивещания // Труды 52-й научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть I. Радиотехника и кибернетика. Москва-Долгопрудный, 2009, Т.1, с. 122-125.
4. Плаксина О.Н. О двух системах массового обслуживания с «прозрачными» заявками и их применении к анализу услуг мультивещания. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Математика, информатика, физика», № 2, 2010, с. 37-41.
5. Irina Gudkova and Olga Plaksina. Performance Measures Computation for a Single Link Loss Network with Unicast and Multicast Traffics. The 10th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Advanced Networking. Saint-Petersburg, 23-25 August 2010
6. Бутурлин И.А., Плаксина О.Н. К анализу вероятностей блокировок трафика услуг IPTV. // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, №7, 2010, С. 25-26 .
7. Плаксина О. Н., Самуилов К. Е. Рекуррентный алгоритм расчета вероятностей блокировок на звене мультисервисной сети с многоадресными соединениями. Вестник Российской университета дружбы народов. Серия

- «Математика, информатика, физика», №3(1), 2010, С. 54-60.
8. Самуилов К.Е., Гайдамака Ю.В., Щукина О.Н. О применении модели Эрланга к расчету вероятностей блокировок в мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями. // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, №7, 2011, С. 45-48.
 9. Щукина О.Н. К моделированию трафика услуг IP TV с учетом массовой миграции пользователей в периоды рекламных пауз. // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, №7, 2011, С. 168-171.

3. Структура курса

Трудоемкость курса: 4 кредита (144 часа).

Аудиторные занятия:

лекции – 1 час в неделю (18 часов);

лабораторные занятия – 1 час в неделю (18 часов);

Самостоятельная работа студента: 6 часов в неделю (108 часов).

Содержание курса, объём знаний, общие требования к промежуточному и итоговому контролю знаний определяются программой курса, график обучения определяется календарным планом, а оценка освоения программы курса студентом – методикой оценки уровня знаний.

Программа курса

Темы лекций

1. Модель мультисервисной сети с одноадресными соединениями.
2. Модель мультисервисной сети с многоадресными соединениями.
3. Мультисервисная модель звена сети с эластичным трафиком.
4. Модель мультисервисной сети с «тройной услугой».
 - 4.1. Построение модели звена сети с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком
 - 4.2. Мультисервисная модель звена сети с одноадресными и многоадресными соединениями.
5. Развитие классических моделей теории телетрафика.
 - 5.1. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.
 - 5.2. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.
6. Модели одноранговых сетей связи (P2P-сетей).
 - 6.1. Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети.
 - 6.2. Модель процесса обмена данными в потоковой P2P-сети.

Темы лабораторных занятий

Лабораторная работа № 1.

Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов на установление соединений в мультисервисной сети с одноадресными соединениями. Алгоритм Кауфмана-Робертса. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Лабораторная работа № 2.

Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов на предоставление услуг в мультисервисной сети с многоадресными соединениями. Модифицированный

алгоритм Кауфмана-Робертса. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Лабораторная работа № 3.

Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов пользователей в мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями. Модифицированный алгоритм Кауфмана-Робертса с учетом просеивания нагрузки на звеньях сети. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Лабораторная работа № 4.

Разработка имитационной модели процесса обслуживания сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Лабораторная работа № 5.

Разработка имитационной модели процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Лабораторная работа № 6.

Разработка имитационной модели процесса обмена данными в файлообменной одноранговой сети (P2P-сети). Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Лабораторная работа № 7.

Разработка имитационной модели процесса заполнения буфера пользователей одноранговой сети (P2P-сети) при предоставлении услуги потокового видео. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Требования к контролю знаний

В процессе чтения курса предусмотрены два промежуточных контроля знаний и итоговый контроль знаний. Оценка знаний студента по каждому виду контроля уровня знаний осуществляется в соответствии с методикой оценки знаний.

Промежуточный контроль знаний №1 осуществляется в виде письменной контрольной работы № 1, включающей 1 вопрос и 1 задачу по темам № 1 и № 2 содержания курса.

Промежуточный контроль знаний №2 осуществляется в виде письменной контрольной работы № 2, включающей 1 вопрос и 1 задачу по темам № 3 и № 4 содержания курса.

Итоговый контроль уровня знаний осуществляется в виде письменной контрольной работы № 3, включающей 2 вопроса по темам № 5 - № 6 содержания курса.

Промежуточный контроль знаний № 1.

Теоретическая часть

Тема 1. Сеть с одноадресными соединениями.

1. Математическая модель сети с одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, пространство состояний, стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, показатели качества.
2. Метод расчёта отдельного звена сети с одноадресными соединениями. Модель стохастического ранца, алгоритм Кауфмана-Роберта. Формулы расчёта показателей качества.
3. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, одноканальные соединения ($d_k = 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном

звене: мультисервисная модель Эрланга.

4. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: мультисервисная модель Эрланга.
5. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Росса, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: модель стохастического ранца.

Тема 2. Сеть с многоадресными соединениями.

1. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, деревья мультивещания, состояние x_{mps} логического пути, построение пространства состояний \mathcal{X} .
2. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_1$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_1 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$, связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.
3. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_2$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_2 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$, связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.

4. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение составного СП $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ вывод стационарного РВ $\{\pi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ состояний сети на примере дисциплины Π_1 , множества \mathcal{B}_{mps} , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} , вероятностные характеристики B_{mps} , F_{mps} и H_{mps} для логического пути.
5. Математическая модель отдельного звена сети с многоадресными соединениями: состояние \mathbf{y} звена, пространство состояний \mathcal{Y} , построение составного СП $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$, стационарное РВ $\{\pi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}$ состояний звена, множества \mathcal{B}_m , \mathcal{F}_m и \mathcal{H}_m , вероятности B_m , F_m и H_m для m -услуги.
6. Метод расчета вероятностных характеристик m -услуги на отдельном звене сети с многоадресными соединениями: множества $\mathcal{Y}(m,n)$, функции $g(m,n)$, формулы для расчёта $G(\mathcal{Y})$ и вероятностей B_m , F_m и H_m .

Практическая часть

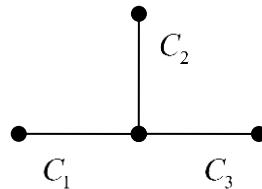
1. Для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений выписать пространство состояний математической модели фрагмента сети и множество блокировок запросов на установление соединения каждого класса.
2. С помощью метода «просеянной нагрузки» для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений вычислить приближенные значения вероятностей

- блокировок указанных классов соединений.
3. С помощью метода «просеянной нагрузки» для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений вычислить приближенные значения вероятностей блокировок указанных классов соединений. Составить по методу просеянной нагрузки уравнения и систему уравнений, необходимые для расчета вероятностей блокировок.

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3\}, C_1 = 4, C_2 = 6, C_3 = 4;$$

$$\mathcal{K} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{R}_1 = \{1, 2\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{2, 3\}, \quad \mathcal{R}_3 = \{1, 3\};$$

$$d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 2.$$



4. Для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений выписать пространство состояний математической модели фрагмента сети и множество блокировок запросов на установление соединения каждого класса. Составить по методу просеянной нагрузки уравнения и систему уравнений, необходимые для расчета вероятностей блокировок.

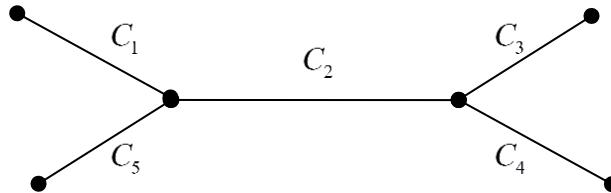
$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C_1 = 2, \quad C_2 = 6, \quad C_3 = 3, \quad C_4 = 2,$$

$$C_5 = 3;$$

$$\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{R}_1 = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{3, 4\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{5, 2, 4\}, \quad \mathcal{R}_4 = \{1, 5\};$$

$$d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 2.$$



Промежуточный контроль знаний № 2.

Теоретическая часть

Тема 3. Сеть с одноадресными и многоадресными соединениями.

1. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение пространства состояний \mathcal{X} .
2. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: стационарные вероятности состояний марковского процесса,

описывающего функционирование сети, множества \mathcal{B}_{mps}^I ,
 \mathcal{B}_k^H , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} .

3. Математическая модель отдельного звена сети с двумя типами соединений: пространство состояний \mathbb{X} , стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование звена, множества \mathcal{B}_m^I , \mathcal{B}_k^H , \mathcal{F}_m , \mathcal{H}_m и соответствующие вероятности.
4. Метод свёртки расчета отдельного звена сети с двумя типами соединений: множества $\mathbb{X}(n)$, $\mathbb{X}_m(n)$, $\mathcal{Y}(i)$, $\mathcal{Y}_m(i)$, $\mathcal{C}(j)$, функции $f_m(i, n)$, формулы для расчёта нормировочной константы $G(\mathbb{X})$, вероятностей B_m^I , B_k^H , F_m и H_m .

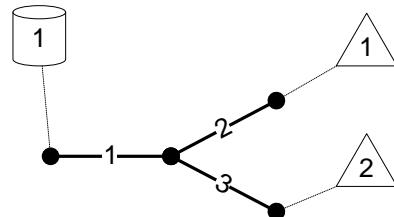
Практическая часть

1. Оценить сверху мощность пространства состояний сети с многоадресными соединениями.
2. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями
$$F_{mps} = \rho_{mps} H_{mps}, m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}_s.$$
3. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями
$$F_{mps} = \frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} (1 - B_{mps}), m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}_s.$$
4. Оценить вычислительную сложность алгоритма расчёта нормировочной константы $G(\mathcal{Y})$ для отдельного звена сети с многоадресными соединениями.

5. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями
- $$F_m = \rho_m H_m \quad \forall m = \overline{1, M}.$$
6. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями
- $$F_m = \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} (1 - B_m) \quad \forall m = \overline{1, M}.$$
7. Показать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями среднее число занятых приборов вычисляется по формуле
- $$c^{(1)} = \sum_{y \in \mathcal{Y}} c(y)\pi(y)$$
- формуле
- $$c^{(1)} = \sum_{m=1}^M b_m F_m.$$
8. Для сети с многоадресными соединениями выписать множества \mathcal{P}_s , \mathcal{L}_{ps} , \mathcal{S}^l , \mathcal{P}_s^l , деревья мультивещания, пространство состояний сети и множества блокировок каждого логического пути.

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3\}, \quad C_1 = 4, \quad C_2 = 3, \quad C_3 = 1;$$

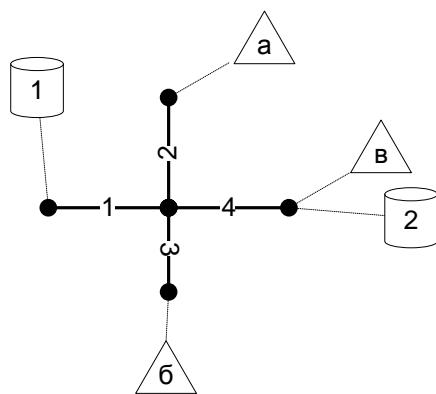
$$b_{11} = 1, \quad b_{21} = 2, \quad b_{31} = 3$$



9. Для сети с многоадресными соединениями выписать множества \mathcal{P}_s , \mathcal{L}_{ps} , \mathcal{S}^l , \mathcal{P}_s^l , деревья мультивещания, пространство состояний сети и множества блокировок каждого логического пути.

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4\}, C_1 = C_2 = 1, C_3 = C_4 = 2;$$

$$b_{11} = 1, b_{12} = 2$$



Кроме того, контроль уровня знаний включает в себя результаты защиты рефератов по тематике содержания курсов. Написание рефератов осуществляется во время самостоятельных занятий. Лучшие рефераты представляются студентами в виде презентаций и обсуждаются на занятиях.

Примерные темы рефератов для самостоятельных занятий.

1. Протокол IGMP (Internet Group Management Protocol)
2. Междоменный протокол BGMP (Boarder Gateway Multicast Protocol)
3. Лавинный алгоритм (Flooding)
4. Алгоритмы RPB (Reverse Path Broadcasting) и TRPB (Truncated Reverse Path Broadcasting), алгоритм RPM (Reverse Path Multicasting)
5. Алгоритм и протокол CBT (Core-Based Tree)
6. Протокол DVMRP (Distance-Vector Multicast Routing Protocol)
7. Протокол MOSPF (Multicast Open Shortest Path First)
8. Протокол PIM-DM (Protocol Independent Multicast - Dense Mode)
9. Протокол PIM-SM (Protocol Independent Multicast – Sparse Mode)
10. Мультивещание в сетях подвижной связи: протоколы MoM (Mobile Multicast) и MMA (Multicast by Multicast Agent)
11. Технология peer-to-peer (P2P): принципы, примеры использования. Сети P2P.

Итоговый контроль знаний.

Контроль уровня знаний осуществляется в виде письменной контрольной работы.

Примерный перечень вопросов.

1. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.
2. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.
3. Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети.
4. Модель процесса обмена данными в потоковой P2P-сети.
5. Протоколы IGMP (Internet Group Management Protocol) и BGMP (Boarder Gateway Multicast Protocol).
6. Алгоритмы многоадресной доставки информации: RPB (Reverse Path Broadcasting), TRPB (Truncated Reverse Path

Broadcasting), RPM (Reverse Path Multicasting), CBT (Core-Based Tree).

7. Протоколы многоадресной доставки информации: CBT (Core-Based Tree), DVMRP (Distance-Vector Multicast Routing Protocol), MOSPF (Multicast Open Shortest Path First), PIM-DM и PIM-SM (Protocol Independent Multicast - Dense Mode и Sparse Mode).

Литература

Обязательная

1. Самуйлов К.Е., Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А., Королькова А.В., Кулябов Д.С., Щукина О.Н. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2012. – 270 с.: ил.
2. Башарин Г.П. Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: РУДН. - 2009. – 342 с.
3. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 137 с.
4. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина .В. Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 157 с.
5. Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи: Учебно-метод.пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 72 с.
6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 4 изд. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
7. Летников А.И., Пшеничников А.П., Гайдамака Ю.В., Чукарин А.В. Системы сигнализации в сетях с коммутацией каналов и пакетов: Уч. пособие для вузов. – М.: МГУСИ. - 2008. – 195 с.
8. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория

телефрафика мультисервисных сетей: Монография. — М.: РУДН. - 2007. – 191 с.

9. Самуилов К. Е., Кулябов Д. С., Королькова А. В., Гайдамака Ю.В., Гудкова И. А., Абаев П. О. Архитектура и принципы построения сетей связи следующих поколений: Учебное пособие. — М.: РУДН. - 2012. — 212 с.: ил.

Дополнительная литература и источники Интернет

10. Гольдштейн А.Б., Гольдштейн Б.С. Технология и протоколы MPLS // СПб: БХВ-Петербург 2005. - 304 стр.
11. Королькова А.В., Кулябов Д.С., Черноиванов А.И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — № 3. — С. 34–46.
12. Наумов В.А. Численные методы анализа марковских систем. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 1985. – 36 с.
13. Рыков В.В., Самуилов К.Е. К анализу вероятностей блокировок ресурсов сети с динамическими многоадресными соединениями // Электросвязь. – 2000. – № 10. – С. 27-30.
14. Boussetta K., Beylot A.-L. Multirate Resource Sharing for Unicast and Multicast Connections // Proc. of 5th FIP Broadband Communications (BC'99, Hong Kong, November 1999). – 1999. – P. 561-570.
15. Cisco, Integrated Video Admission Control for the Delivery of Quality Video Experience. White paper. – 2006.
16. Clevonot F. and Nain P. A Simple fluid model for the analysis of the squirrel peer-to-peer caching system // Proc. of the IEEE INFOCOM'2004. – 2004. - P. 1-10.
17. S.-P. Chung, K.W. Ross, Reduced load approximations for multirate loss networks // IEEE Transaction on communications. – 1993. – Vol. 41.
18. Floyd S., Jacobson V. Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Aug. — No. 1(4). — P. 397–413.
19. Kaufman J.S. Blocking in a shared resource environment. IEEE Transactions on Communications. 29 (10), 1474–1481 (1981).

20. F.P. Kelly, Blocking probabilities in large circuit-switched networks // Advances in Applied Probability. – 1986. – Vol. 18.
21. F.P. Kelly, Mathematical models of multiservice networks // Complex Stochastic Systems and Engineering. – Oxford: Oxford University Press. - 1995.
22. F.P. Kelly, Reversibility and stochastic network. – Chichester: Wiley. - 1979.
23. Kleinrock L., Tewari S. Analytical model for bittorrent-based live video streaming // Proc. of the IEEE CCNC. - 2007. – P. 976-980.
24. Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30. — P. 151–160.
25. Roberts J.W. A service system with heterogeneous user requirements. In: G. Pujolle (Ed.), Performance of Data Communications Systems and Their Applications, North-Holland, Amsterdam. - 1981. - P. 423–431.
26. K.W. Ross, Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. – London : Springer-Verlag, 1995.
27. Ross K.W., Kumar R., Liu Y. Stochastic fluid theory for P2P streaming systems // Proc. of the IEEE INFOCOM'2007. – 2007. - P. 919-927.
28. W. Whitt, Blocking when service is required from several facilities simultaneously // AT&T Tech. J. – 1985. – Vol. 64.
29. Гольдштейн Б.С., Гольдштейн А.С. SoftSwitch. СПб.: БХВ – Санкт-Петербург. - 2006. - 368 с.: ил.
30. Деарт В.Ю. Мультисервисные сети связи. Ч.1: Транспортные сети и сети доступа // М.: Инсвязьиздат, 2007. –166 с.
31. Деарт В.Ю. Мультисервисные сети связи. Ч.2: Протоколы и системы управления сеансами (Softswitch/IMS) // М.: Брис-М, 2011. –198 с.
32. Крылов В.В., Самохвалова С.С. Теория телетрафика и ее приложения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.

33. Кучеряый А.Е., Цуприков А.Л. Сети связи следующего поколения. – М.: ФГУП ЦНИИС, 2006. – 280 с.
34. Самуйлов К.Е, Кулябов Д.С. «Сети и системы телекоммуникаций». Учебно-методическое пособие. // М.: Изд-во РУДН, 2002.
35. Степанов С.Н. Основы телетрафика мультисервисных сетей // М.: Изд-во «Эко-Трендз», 2010. – 392 с.

36. Описание системы контроля знаний

Работа в семестре

Максимальное число баллов, набранных в семестре – 100

Вид задания	Число заданий	Кол-во баллов	Сумма баллов
1. Посещение лекций	—	—	—
2. Лабораторные работы	7	2	14
3. Практические занятия	—	—	—
4. Домашние задания	—	—	—
5. Контрольные работы	2	20	40
6. Рубежная аттестация	—	—	—
7. Работа на семинаре	—	—	—
8. Реферат (в т.ч. презентация)	1	15, 9	26

9. Коллоквиум	—	—	—
10. Итоговая аттестация (экзамен)	1	20	20
ИТОГО			100

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 - 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 - 85	4	69 - 85	4	C
51 - 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 - 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

- График проведения письменных контрольных работ формируется в соответствии с календарным планом курса.
- Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
- Разрешается однократно переписать контрольную работу, если по ней получено менее половины планируемых баллов, при этом аннулируются ранее полученные по этой

контрольной работе баллы. Срок переписывания устанавливает преподаватель. Итоговая контрольная работа не переписывается.

- Использование источников (в том числе конспектов лекций и лабораторных занятий) во время выполнения письменной контрольной работы возможно только с разрешения преподавателя.
- Время, которое отводится студенту на выполнение письменной работы (контрольной тестовой работы), устанавливается преподавателем. По завершении отведенного времени студент должен сдать работу преподавателю, вне зависимости от того, завершена она или нет.
- Отсрочка в переписывании контрольных работ и сдачи домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки. В этом случае выполнение контрольных работ осуществляется в сроки, указанные преподавателем.
- Студент допускается к итоговой контрольной работе с любым количеством баллов, набранном в семестре, но при условии, что у студента имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
- Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т. е. FX, то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов. Добор баллов осуществляется путем повторного одноразового выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, при этом аннулируются соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.
- Контрольные работы проводятся либо письменно, либо в виде компьютерного теста по усмотрению преподавателя.
- Итоговая контрольная работа проводится в виде

тестирования. Оценивается работа из 20 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

Академическая этика, соблюдение авторских прав.

Во всех компонентах УМК ссылки на литературные источники и источники Интернет являются актуальными, тщательно выверенными и снабжёнными «адресами». В тексты не включены выдержки из работ других авторов без ссылки на соответствующий источник, не пересказаны работы других авторов близко к их тексту и без ссылки на соответствующий источник. В УМК не использованы чужие идеи без указания первоисточников. Это распространяется на литературные источники (монографии, учебники, статьи и пр.) и источники Интернет, для которых в необходимых случаях указан полный адрес соответствующего сайта.

2. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. Цели и задачи дисциплины

Целями дисциплины являются

- знакомство с принципами функционирования мультисервисных сетей связи (МСС);
- изучение методов разработки и анализа моделей функционирования МСС, их фрагментов и отдельных элементов;
- знакомство с типами трафика в современных мультисервисных сетях;
- освоение методов построения вероятностных моделей для анализа качества обслуживания в МСС в терминах теории массового обслуживания и теории марковских процессов;
- применение методов анализа и расчета показателей качества обслуживания к моделям МСС.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

- изучение принципов построения МСС;
- анализ основных протоколов передачи информации в МСС;
- исследование методов построения моделей сетей с одноадресными, многоадресными соединениями, с эластичным трафиком, а также моделей с различными комбинациями указанных типов трафика;
- исследование методов построения моделей сессии GPRS/GSM с пульсирующим трафиком, модели процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока;
- исследование методов построения жидкостных моделей для анализа файлообменных одноранговых сетей связи (P2P-сетей), а также моделей в дискретном времени для анализа потоковых P2P-сетей;
- исследование точных и приближенных методов анализа моделей мультисервисных сетей.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

(указывается цикл, к которому относится дисциплина; формулируются требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента, необходимым для ее изучения; определяются дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)

Цикл, к которому относится дисциплина: вариативная часть общенаучного цикла М.1. Дисциплины по выбору студента

Требования к входным знаниям и умениям: профессиональные компетенции по направлениям 010400 "Прикладная математика и информатика" (бакалавриат), 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» (бакалавриат), 010200 «Математика и компьютерные науки» (бакалавриат), 080500 Бизнес-информатика.

Дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей: Математическая теория телетрафика, Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения, научно-исследовательская работа.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины «Мультисервисные сети связи» направлен на формирование следующих компетенций:

OK: 3, 7; ПК: 4-8, 14, 15, 20, 21, 24

(указываются в соответствии с ФГОС ВПО)

- способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности (OK- 3);
- способность самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности (OK- 7);
- способность демонстрировать знания фундаментальных и

смежных прикладных разделов специальных дисциплин магистерской программы, знания общеметодологического характера, знания истории развития информатики и информационных технологий (ПК-4);

- способность использовать углубленные теоретические и практические знания в области информационных технологий и прикладной математике, фундаментальные концепции и системные методологии, международные и профессиональные стандарты в области информационных технологий, а также знания, которые находятся на передовом рубеже данной науки (ПК-5);
- способность самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности, расширять и углублять своё научное мировоззрение (ПК-6);
- способность углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-7);
- способность разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач проектной и производственно-технологической деятельности (ПК-8);
- способность разрабатывать корпоративную техническую политику развития корпоративной инфраструктуры информационных технологий на принципах открытых систем (ПК-14);
- способность разрабатывать корпоративные стандарты и профили функциональной стандартизации приложений, систем, информационной инфраструктуры (ПК-15);
- способность разрабатывать аналитические обзоры состояния области информационных технологий по направлениям профильной подготовки (ПК-20);
- способность выполнять работу экспертов в ведомственных, отраслевых или государственных экспертных группах по экспертизе проектов, тематика которых соответствует

- профилю подготовки магистра информационных технологий (ПК-21);
- способность участвовать в деятельности профессиональных сетевых сообществ по конкретным направлениям (ПК-24).

В результате изучения дисциплины «Мультисервисные сети связи» студент должен:

знать принципы функционирования мультисервисных сетей связи (МСС); методы разработки и анализа моделей функционирования МСС;

уметь строить вероятностные модели для анализа качества обслуживания в МСС в терминах теории массового обслуживания и теории марковских процессов, анализировать основные протоколы МСС, применять методы анализа и расчета показателей качества обслуживания к моделям МСС;

владеть точными и приближенными методами исследования и анализа моделей мультисервисных сетей.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		1	
Аудиторные занятия (всего)	36	36	-
В том числе:			-

Лекции	18	18	-
Практические занятия (ПЗ)	-	-	-
Семинары (С)	-	-	-
Лабораторные работы (ЛР)	18	18	-
Самостоятельная работа (всего)	108	108	-
В том числе:	-	-	-
Курсовой проект (работа)	-	-	-
Расчетно-графические работы	-	-	-
Реферат	36	36	-
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	-	-	-
Самостоятельная проработка дополнительного материала	72	72	-
Вид промежуточной аттестации (зачет)	зачет	зачет	-
Общая трудоемкость час	108	108	-
зач. ед.	4	4	-

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/ п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Модель мультисервисной сети с одноадресными соединениями.	<p>Понятие мультисервисной сети. Услуги, предоставляемые мультисервисной сетью.</p> <p>Математическая модель сети с одноадресными соединениями.</p> <p>Стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети.</p> <p>Анализ вероятностей блокировок соединений различных классов.</p> <p>Приближенный метод «просеянной нагрузки» для расчета вероятностей блокировок.</p>
2.	Модель мультисервисной сети с многоадресными соединениями.	<p>Понятие многоадресной передачи (мультивещания).</p> <p>Математическая модель сети с многоадресными соединениями. Стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети.</p> <p>Анализ вероятностей блокировок соединений</p>

		<p>различных классов.</p> <p>Приближенный метод «просеянной нагрузки» для расчета вероятностей блокировок. Понятие логического пути.</p> <p>Стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети.</p> <p>Анализ вероятностей блокировок соединений.</p> <p>Построение модели логического пути в виде системы массового обслуживания без регенерации и с регенерацией периода занятости. Стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование пути.</p> <p>Вероятностно-временные характеристики: среднее число заявок, среднее время пребывания заявки в системе.</p>
3.	Мультисервисная модель звена сети с эластичным трафиком.	<p>Построение математической модели звена сети с эластичным трафиком.</p> <p>Разбиение пространства состояний модели. Свойства</p>

		<p>подмножеств пространства состояний. Свойства ненормированных вероятностей состояний. Рекуррентный алгоритм для расчета ненормированных макропероятностей . Метод расчета вероятностно-временных характеристик.</p>
4.	Модель мультисервисной сети с «тройной услугой».	<p>Упрощенная модель с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком. Упрощенная модель звена сети с одноадресными и многоадресными соединениями. Модель трафика мультивещания как система с прозрачными заявками. Подходы к расчету вероятностей блокировок. Рекуррентный алгоритм расчета нормирующей константы. Анализ вероятностных характеристик модели с одноадресным и многоадресным трафиком.</p>
5.	Развитие классических моделей теории телетрафика.	<p>Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком Стационарные вероятности состояний марковского</p>

		<p>процесса. Анализ вероятностных характеристик модели. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока. Модель модуля RED. Математическое описание динамических переменных модели.</p>
6.	Модели одноранговых сетей связи (P2P- сетей).	<p>Принципы построения файлообменных и потоковых сетей. Жидкостная модель файлообменной сети. Принципы вещательного телевидения в одноранговой сети. Модель потоковой сети в виде однородной сети массового обслуживания. Анализ модели сети с двумя типами пользователей с высокой и с низкой скоростью раздачи видеопотока. Аппроксимация нормальным законом вероятности всеобщей передачи.</p>

(Содержание указывается в дидактических единицах. По усмотрению разработчиков материал может излагаться не в форме таблицы)

**5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с
обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами**

п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечивающих (последующих) дисциплин					
1.	«Математическая теория телетрафика»						
2.	«Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения»						

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/ п	Наименование раздела дисциплины	Ле кц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Сем ин.	CPC	Все- го час.
1.	Модель мультисервис ной сети с одноадресным	2	0	2	0	12	16

	и соединениями.						
2.	Модель мультисервисной сети с многоадресными соединениями.	4	0	4	0	24	32
3.	Мультисервисная модель звена сети с эластичным трафиком.	2	0	0	0	12	14
4.	Модель мультисервисной сети с «тройной услугой».	4	0	4	0	24	32
5.	Развитие классических моделей теории телетрафика.	2	0	4	0	12	18
6.	Модели одноранговых сетей связи (P2P-сетей).	4	0	4	0	24	32

	Итого	18	0	18	0	108	144
--	-------	----	---	----	---	-----	-----

6. Лабораторный практикум

№ п/ п	№ разд ела дисц ипл ины	Наименование лабораторных работ	Трудо- емкость (час)
1.	1	Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов на установление соединений в мультисервисной сети с одноадресными соединениями. Алгоритм Кауфмана-Робертса.	2
2.	2	Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов на предоставление услуг в мультисервисной сети с многоадресными соединениями. Модифицированный алгоритм Кауфмана-Робертса.	4
3.	4	Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов пользователей в мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями. Модифицированный алгоритм Кауфмана-Робертса с учетом просеивания нагрузки на звеньях сети.	4

4.	5	Разработка имитационной модели процесса обслуживания сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.	2
5.	5	Разработка имитационной модели процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.	2
6.	6	Разработка имитационной модели процесса обмена данными в файлообменной одноранговой сети (P2P-сети).	2
7.	6	Разработка имитационной модели процесса заполнения буфера пользователей одноранговой сети (P2P-сети) при предоставлении услуги потокового видео.	2

7. Практические занятия (семинары) не предусмотрены

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ) не предусмотрены

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература

а) основная литература

1. Самуйлов К.Е., Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А.,

- Королькова А.В., Кулябов Д.С., Щукина О.Н. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2012. – 270 с.: ил.
2. Башарин Г.П. Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: РУДН. - 2009. – 342 с.
 3. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 137 с.
 4. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина .В. Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 157 с.
 5. Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи: Учебно-метод.пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 72 с.
 6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 4 изд. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
 7. Летников А.И., Пшеничников А.П., Гайдамака Ю.В., Чукарин А.В. Системы сигнализации в сетях с коммутацией каналов и пакетов: Уч. пособие для вузов. – М.: МГУСИ. - 2008. – 195 с.
 8. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Монография. – М.: РУДН. - 2007. – 191 с.
 9. Самуйлов К. Е., Кулябов Д. С., Королькова А. В., Гайдамака Ю.В., Гудкова И. А., Абаев П. О. Архитектура и принципы построения сетей связи следующих поколений: Учебное пособие. — М.: РУДН. - 2012. — 212 с.: ил.

б) дополнительная литература и источники Интернет

10. Гольдштейн А.Б., Гольдштейн Б.С. Технология и протоколы MPLS // СПб: БХВ-Петербург 2005. - 304 стр.
11. Королькова А.В., Кулябов Д.С., Черноиванов А.И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». —

2009. — № 3. — С. 34–46.
12. Наумов В.А. Численные методы анализа марковских систем. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 1985. – 36 с.
 13. Рыков В.В., Самуйлов К.Е. К анализу вероятностей блокировок ресурсов сети с динамическими многоадресными соединениями // Электросвязь. – 2000. – № 10. – С. 27-30.
 14. Boussetta K., Beylot A.-L. Multirate Resource Sharing for Unicast and Multicast Connections // Proc. of 5th FIP Broadband Communications (BC'99, Hong Kong, November 1999). – 1999. – P. 561-570.
 15. Cisco, Integrated Video Admission Control for the Delivery of Quality Video Experience. White paper. – 2006.
 16. Clevénnot F. and Nain P. A Simple fluid model for the analysis of the squirrel peer-to-peer caching system // Proc. of the IEEE INFOCOM'2004. – 2004. - P. 1-10.
 17. S.-P. Chung, K.W. Ross, Reduced load approximations for multirate loss networks // IEEE Transaction on communications. – 1993. – Vol. 41.
 18. Floyd S., Jacobson V. Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Aug. — No. 1(4). — P. 397–413.
 19. Kaufman J.S. Blocking in a shared resource environment. IEEE Transactions on Communications. 29 (10), 1474–1481 (1981).
 20. F.P. Kelly, Blocking probabilities in large circuit-switched networks // Advances in Applied Probability. – 1986. – Vol. 18.
 21. F.P. Kelly, Mathematical models of multiservice networks // Complex Stochastic Systems and Engineering. – Oxford: Oxford University Press. - 1995.
 22. F.P. Kelly, Reversibility and stochastic network. – Chichester: Wiley. - 1979.
 23. Kleinrock L., Tewari S. Analytical model for bittorrent-based live video streaming // Proc. of the IEEE CCNC. - 2007. – P. 976-980.
 24. Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an

- Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30. — P. 151–160.
25. Roberts J.W. A service system with heterogeneous user requirements. In: G. Pujolle (Ed.), Performance of Data Communications Systems and Their Applications, North-Holland, Amsterdam. - 1981. - P. 423–431.
 26. K.W. Ross, Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. – London : Springer-Verlag, 1995.
 27. Ross K.W., Kumar R., Liu Y. Stochastic fluid theory for P2P streaming systems // Proc. of the IEEE INFOCOM'2007. – 2007. - P. 919-927.
 28. W. Whitt, Blocking when service is required from several facilities simultaneously // AT&T Tech. J. – 1985. – Vol. 64.
 29. Гольдштейн Б.С., Гольдштейн А.С. SoftSwitch. СПб.: БХВ – Санкт-Петербург. - 2006. - 368 с.: ил.
 30. Деарт В.Ю. Мультисервисные сети связи. Ч.1: Транспортные сети и сети доступа // М.: Инсвязьиздат, 2007. –166 с.
 31. Деарт В.Ю. Мультисервисные сети связи. Ч.2: Протоколы и системы управления сеансами (Softswitch/IMS) // М.: Брис-М, 2011. –198 с.
 32. Крылов В.В., Самохвалова С.С. Теория телетрафика и ее приложения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.
 33. Кучерявый А.Е., Цуприков А.Л. Сети связи следующего поколения. – М.: ФГУП ЦНИИС, 2006. – 280 с.
 34. Самуилов К.Е, Кулябов Д.С. «Сети и системы телекоммуникаций». Учебно-методическое пособие. // М.: Изд-во РУДН, 2002.
 35. Степанов С.Н. Основы телетрафика мультисервисных сетей // М.: Изд-во «Эко-Трендз», 2010. – 392 с.

в) программное обеспечение ОС MS Windows

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы
не предусмотрено

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Занятия проводятся на базе лаборатории «Управление инфокоммуникациями» кафедры систем телекоммуникаций РУДН, созданной для выполнения Инновационной образовательной программы в рамках в рамках национального проекта «Образование» правительства Российской Федерации. Лаборатория состоит из трех подразделений - учебного (ауд. 110), учебно-научного (ауд.116) и научного (ауд. 123), и оснащена современным сетевым оборудованием и компьютерной техникой. Лабораторная база позволяет осуществлять проекты по разработке прикладных средств инфокоммуникационной среды, проводить лекционные и лабораторные занятия с мультимедийными средствами обучения.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

На освоение дисциплины отводится один семестр. В качестве итогового контроля знаний предусмотрен зачёт. Для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов рекомендуется использовать вопросы и задания подобные перечисленным ниже:

Примерный перечень вопросов контрольной работы
Теоретическая часть

1. Математическая модель сети с одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, пространство состояний, стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, показатели качества.
2. Метод расчёта отдельного звена сети с одноадресными соединениями. Модель стохастического ранца, алгоритм Кауфмана-Робертса. Формулы расчёта показателей качества.
3. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, одноканальные соединения ($d_k = 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене:

- мультисервисная модель Эрланга.
4. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: мультисервисная модель Эрланга.
 5. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Росса, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: модель стохастического ранца.
 7. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, деревья мультивещания, состояние x_{mps} логического пути, построение пространства состояний \mathcal{X} .
 8. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_1$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_1 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$, связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.
 9. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_2$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_2 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$, связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.
 10. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение составного СП $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ вывод

стационарного РВ $\{\pi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ состояний сети на примере дисциплины Π_1 , множества \mathcal{B}_{mps} , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} , вероятностные характеристики B_{mps} , F_{mps} и H_{mps} для логического пути.

11. Математическая модель отдельного звена сети с многоадресными соединениями: состояние \mathbf{y} звена, пространство состояний \mathcal{Y} , построение составного СП $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$, стационарное РВ $\{\pi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}$ состояний звена, множества \mathcal{B}_m , \mathcal{F}_m и \mathcal{H}_m , вероятности B_m , F_m и H_m для m -услуги.
12. Метод расчета вероятностных характеристик m -услуги на отдельном звене сети с многоадресными соединениями: множества $\mathcal{Y}(m,n)$, функции $g(m,n)$, формулы для расчёта $G(\mathcal{Y})$ и вероятностей B_m , F_m и H_m .
13. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение пространства состояний \mathcal{X} .
14. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, множества \mathcal{B}_{mps}^I , \mathcal{B}_k^II , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} .
15. Математическая модель отдельного звена сети с двумя типами соединений: пространство состояний \mathcal{X} , стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование звена, множества \mathcal{B}_m^I , \mathcal{B}_k^II , \mathcal{F}_m , \mathcal{H}_m и соответствующие вероятности.
16. Метод свёртки расчета отдельного звена сети с двумя типами соединений: множества $\mathcal{X}(n)$, $\mathcal{X}_m(n)$, $\mathcal{Y}(i)$, $\mathcal{Y}_m(i)$, $\mathcal{C}(j)$, функции $f_m(i,n)$, формулы для расчёта

нормировочной константы $G(\chi)$, вероятностей B_m^I , B_k^{II} ,

F_m и H_m .

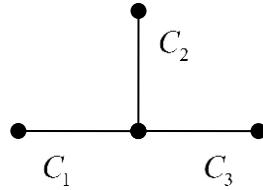
17. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.
18. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.
19. Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети.
20. Модель процесса обмена данными в потоковой P2P-сети.
21. Протоколы IGMP (Internet Group Management Protocol) и BGMP (Boarder Gateway Multicast Protocol).
22. Алгоритмы многоадресной доставки информации: RPB (Reverse Path Broadcasting), TRPB (Truncated Reverse Path Broadcasting), RPM (Reverse Path Multicasting), CBT (Core-Based Tree).
23. Протоколы многоадресной доставки информации: CBT (Core-Based Tree), DVMRP (Distance-Vector Multicast Routing Protocol), MOSPF (Multicast Open Shortest Path First), PIM-DM и PIM-SM (Protocol Independent Multicast - Dense Mode и Sparse Mode).

Практическая часть

1. Для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений выписать пространство состояний математической модели фрагмента сети и множество блокировок запросов на установление соединения каждого класса.
2. С помощью метода «просеянной нагрузки» для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений вычислить приближенные значения вероятностей блокировок указанных классов соединений.
3. С помощью метода «просеянной нагрузки» для фрагмента

сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений вычислить приближенные значения вероятностей блокировок указанных классов соединений. Составить по методу просеянной нагрузки уравнения и систему уравнений, необходимые для расчета вероятностей блокировок.

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3\}, C_1 = 4, C_2 = 6, C_3 = 4;$$



$$\mathcal{K} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{R}_1 = \{1, 2\}, \mathcal{R}_2 = \{2, 3\}, \mathcal{R}_3 = \{1, 3\};$$

$$d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 2.$$

4. Для фрагмента сети с одноадресными соединениями при заданных числе и емкости звеньев, маршрутах и требованиях к емкости звеньев классов соединений выписать пространство состояний математической модели фрагмента сети и множество блокировок запросов на установление соединения каждого класса. Составить по методу просеянной нагрузки уравнения и систему уравнений, необходимые для расчета вероятностей блокировок.

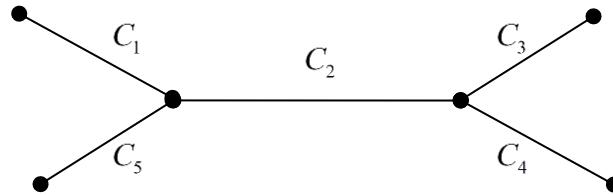
$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, C_1 = 2, C_2 = 6, C_3 = 3, C_4 = 2,$$

$$C_5 = 3;$$

$$\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathcal{R}_1 = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{3, 4\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{5, 2, 4\}, \quad \mathcal{R}_4 = \{1, 5\};$$

$$d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 2.$$



10. Оценить сверху мощность пространства состояний сети с многоадресными соединениями.
11. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями $F_{mps} = \rho_{mps} H_{mps}$, $m \in \mathcal{M}_s$,

 - $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}_s$.

12. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями $F_{mps} = \frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} (1 - B_{mps})$,

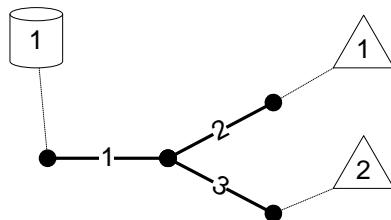
 - $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}_s$.

13. Оценить вычислительную сложность алгоритма расчёта нормировочной константы $G(\mathcal{Y})$ для отдельного звена сети с многоадресными соединениями.
14. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями $F_m = \rho_m H_m \quad \forall m = \overline{1, M}$.

15. Доказать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями
- $$F_m = \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} (1 - B_m)$$
- $$\forall m = \overline{1, M}.$$
16. Показать, что для отдельного звена сети с многоадресными и одноадресными соединениями среднее число занятых приборов вычисляется по формуле
- $$c^{(1)} = \sum_{y \in \mathcal{Y}} c(y) \pi(y)$$
- $$c^{(1)} = \sum_{m=1}^M b_m F_m.$$
17. Для сети с многоадресными соединениями выписать множества \mathcal{P}_s , \mathcal{L}_{ps} , \mathcal{S}^l , \mathcal{P}_s^l , деревья мультивещания, пространство состояний сети и множества блокировок каждого логического пути.

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3\}, C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 1;$$

$$b_{11} = 1, b_{21} = 2, b_{31} = 3$$



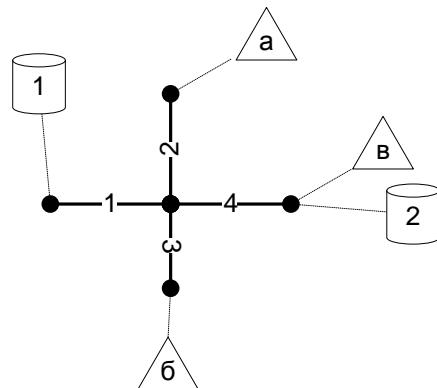
18. Для сети с многоадресными соединениями выписать

множества \mathcal{P}_s , \mathcal{L}_{ps} , \mathcal{S}^l , \mathcal{P}_s^l , деревья мультивещания,

пространство состояний сети и множества блокировок каждого логического пути.

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 3, 4\}, C_1 = C_2 = 1, C_3 = C_4 = 2;$$

$$b_{11} = 1, b_{12} = 2$$



Конспект лекций для дисциплины

Лекция 1. Модель мультисервисной сети с одноадресными соединениями.

Лекция 2. Модель мультисервисной сети с многоадресными соединениями.

Лекция 3. Мультисервисная модель звена сети с эластичным трафиком.

Лекция 4. Модель мультисервисной сети с «тройной услугой».

Лекция 5. Построение модели звена сети с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком.

Лекция 6. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.

Лекция 7. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.

Лекция 8. Жидкостная модель процесса загрузки файла в файлообменной P2P-сети.

Лекция 9. Модель процесса обмена данными в потоковой P2P-сети в дискретном времени.

Лекции читаются по следующим учебным пособиям:

основное –

Самуилов К.Е., Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Гудкова И.А., Королькова А.В., Кулябов Д.С., Щукина О.Н. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Учебное пособие. — М.: РУДН. - 2013. – 263 с.: ил.;

дополнительное-

Самуилов К. Е., Кулябов Д. С., Королькова А. В., Гайдамака Ю.В., Гудкова И. А., Абаев П. О. Архитектура и принципы построения сетей связи следующих поколений: Учебное пособие. — М.: РУДН. - 2013. — 212 с.: ил.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

См. п. 11 программы.

СПИСОК ВОПРОСОВ

1. Математическая модель сети с одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, пространство состояний, стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, показатели качества.
2. Метод расчёта отдельного звена сети с одноадресными соединениями. Модель стохастического ранца, алгоритм

- Кауфмана-Робертса. Формулы расчёта показателей качества.
3. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, одноканальные соединения ($d_k = 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: мультисервисная модель Эрланга.
 4. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: мультисервисная модель Эрланга.
 5. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Росса, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: модель стохастического ранца.
 6. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, деревья мультивещания, состояние x_{mps} логического пути, построение пространства состояний \mathcal{X} .
 7. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_1$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_1 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$, связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.
 8. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_2$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_2 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$,

связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.

9. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение составного СП $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ вывод стационарного РВ $\{\pi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ состояний сети на примере дисциплины Π_1 , множества \mathcal{B}_{mps} , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} , вероятностные характеристики B_{mps} , F_{mps} и H_{mps} для логического пути.
10. Математическая модель отдельного звена сети с многоадресными соединениями: состояние \mathbf{y} звена, пространство состояний \mathcal{Y} , построение составного СП $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$, стационарное РВ $\{\pi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}$ состояний звена, множества \mathcal{B}_m , \mathcal{F}_m и \mathcal{H}_m , вероятности B_m , F_m и H_m для m -услуги.
11. Метод расчета вероятностных характеристик m -услуги на отдельном звене сети с многоадресными соединениями: множества $\mathcal{Y}(m,n)$, функции $g(m,n)$, формулы для расчёта $G(\mathcal{Y})$ и вероятностей B_m , F_m и H_m .
12. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение пространства состояний \mathcal{X} .
13. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, множества \mathcal{B}_{mps}^I , \mathcal{B}_k^{II} , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} .
14. Математическая модель отдельного звена сети с двумя типами соединений: пространство состояний \mathcal{X} , стационарные вероятности состояний марковского процесса,

описывающего функционирование звена, множества \mathcal{B}_m^I ,
 \mathcal{B}_k^{II} , \mathcal{F}_m , \mathcal{H}_m и соответствующие вероятности.

15. Метод свёртки расчета отдельного звена сети с двумя типами соединений: множества $\mathcal{X}(n)$, $\mathcal{X}_m(n)$, $\mathcal{Y}(i)$, $\mathcal{Y}_m(i)$, $\mathcal{C}(j)$, функции $f_m(i, n)$, формулы для расчёта нормировочной константы $G(\mathcal{X})$, вероятностей B_m^I , B_k^{II} , F_m и H_m .
16. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.
17. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.
18. Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети.
19. Модель процесса обмена данными в потоковой P2P-сети.
20. Протоколы IGMP (Internet Group Management Protocol) и BGMP (Boarder Gateway Multicast Protocol).
21. Алгоритмы многоадресной доставки информации: RPB (Reverse Path Broadcasting), TRPB (Truncated Reverse Path Broadcasting), RPM (Reverse Path Multicasting), CBT (Core-Based Tree).
22. Протоколы многоадресной доставки информации: CBT (Core-Based Tree), DVMRP (Distance-Vector Multicast Routing Protocol), MOSPF (Multicast Open Shortest Path First), PIM-DM и PIM-SM (Protocol Independent Multicast - Dense Mode и Sparse Mode).

ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Словарь (глоссарий) основных терминов и понятий

Мультисервисная сеть связи – способ реализации концепции сети связи следующего поколения (NGN).

Сеть связи следующего поколения (NGN – Next Generation Network) – концепция развития сетей связи в направлении создания универсальной сетевой инфраструктуры, которая позволяла бы переносить любые виды информации и предоставлять пользователям любые услуги, независимо от времени и места расположения. Сеть связи следующего поколения NGN - сеть связи на базе технологии коммутации пакетов, способная обеспечивать предоставление услуг связи и пригодная для использования различных транспортных высокоскоростных технологий, обеспечивающих качество обслуживания, в которой функции, связанные с предоставлением услуг, не зависят от технологии транспортной сети [ETSI]. Сеть связи следующего поколения NGN обеспечивает неограниченный доступ пользователей к сетям связи и конкурирующим между собой поставщикам услуг и/или услугам связи, выбираемым самими пользователями. Сеть поддерживает универсальную мобильность, которая обеспечивает постоянное и повсеместное предоставление услуг связи пользователям [ITU-T].

Пользователь (User). Потребитель продукта или услуг связи, предлагаемых телекоммуникационной компанией (поставщиком услуг), с которым заключен договор об оказании таких услуг с выделением для этих целей абонентского номера или уникального кода идентификации.

Услуга (Service). Набор функций и возможностей по приему, обработке, хранению, передаче, доставке информации пользователя, предлагаемых пользователю поставщиком услуги.

Поставщик услуг (Service Provider). Компания, обеспечивающая возможность получения абонентом услуг связи.

Абонент (Subscriber). Физическое или юридическое лицо, заключающее с поставщиком услуг контракт на получение и оплату услуг связи.

Терминал пользователя (UE - User Equipment). Оконечная аппаратура связи, находящаяся в распоряжении абонента и подключенная к сети связи для передачи или приема заданной пользователем информации (телефон, факс, персональный компьютер (ПК), карманный ПК (КПК), телевизор и др.).

Обобщенная мобильность (Generalized Mobility). Возможность пользователя или других мобильных объектов организовывать связь и получать доступ к услугам независимо от местоположения или технического окружения. Степень доступности услуги может зависеть от различных факторов, включая возможности сети доступа, соглашение об уровне обслуживания между «домашней» сетью пользователя и «гостевой» сетью (если оно применяется) и т. п. Мобильность реализуется как с непрерывностью обслуживания, так и без нее. Она включает и «персональную мобильность», и «мобильность терминала».

Персональная мобильность (Personal mobility). Вид мобильности, при котором пользователь может менять терминальное устройство для доступа к услуге. Возможность организации пользователю доступа к услуге на любом терминале основана на использовании персональных идентификаторов и профилей.

Мобильность терминала (Terminal mobility). Вид мобильности, при котором один и тот же терминал может работать в различных местоположениях. При поддержке мобильности терминала обеспечивается возможность получать доступ к услугам в разных местоположениях и во время движения, а также возможность сети идентифицировать и определять местоположение терминала.

Качество обслуживания в NGN – набор требований, предъявляемых к ресурсам сети при транспортировке потока данных, соответствующих содержанию услуги. Рассматривается на трех уровнях: на уровне пользователя - качество восприятия (QoE – Quality of Experience), на уровне услуг - качество обслуживания (QoS – Quality of Service), на транспортном уровне производительность сети (NP – Network Performance).

Качество восприятия (QoE) - общая приемлемость приложения или услуги для пользователя, которая оценивается субъективно пользователем и зависит от ожиданий пользователя и контекста применения.

Качество обслуживания (QoS) - общий эффект производительности услуги, определяющий степень удовлетворенности пользователя услуги [Рекомендация E.800 МСЭ-T].

Производительность сети (NP) измеряется посредством параметров, которые рассматриваются оператором связи и используются при разработке, конфигурации, эксплуатации и техническом обслуживании сети [Рекомендация I.350 МСЭ-T]. Показатели NP определяются независимо от производительности терминальных устройств и действий пользователей.

Методические указания для преподавателя, студента, слушателя

На освоение дисциплины отводится 1 семестр. В качестве итогового контроля знаний предусмотрен зачет. Упражнения, лекции, методику, тестирования и задания для самостоятельной работы студентов можно увидеть в разделе «Фонды оценочных средств» данного учебно-методического комплекса.

Лабораторный практикум по дисциплине

- 3. Лабораторная работа № 1.**
4. Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов на установление соединений в мультисервисной сети с одноадресными соединениями. Алгоритм Кауфмана-Робертса. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.
- 5. Лабораторная работа № 2.**
6. Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов на предоставление услуг в мультисервисной сети с многоадресными соединениями. Модифицированный алгоритм Кауфмана-Робертса. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.
- 7. Лабораторная работа № 3.**
8. Разработка программного средства для расчёта вероятностей блокировки запросов пользователей в мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями. Модифицированный алгоритм Кауфмана-Робертса с учетом просеивания нагрузки на звеньях сети. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.
- 9. Лабораторная работа № 4.**
10. Разработка имитационной модели процесса обслуживания сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.
- 11. Лабораторная работа № 5.**
12. Разработка имитационной модели процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической

интенсивностью потока. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

13. Лабораторная работа № 6.

14. Разработка имитационной модели процесса обмена данными в файлообменной одноранговой сети (P2P-сети). Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

15. Лабораторная работа № 7.

16. Разработка имитационной модели процесса заполнения буфера пользователей одноранговой сети (P2P-сети) при предоставлении услуги потокового видео. Проведение численного эксперимента, анализ его результатов.

Описание балльно-рейтинговой системы

Работа в семестре

Максимальное число баллов, набранных в семестре – 100

Вид задания	Число заданий	Кол-во баллов	Сумма баллов
1. Посещение лекций	—	—	—
2. Лабораторные работы	7	2	14
3. Практические занятия	—	—	—
4. Домашние задания	—	—	—
5. Контрольные работы	2	20	40
6. Рубежная аттестация	—	—	—
7. Работа на семинаре	—	—	—
8. Реферат (в т.ч. презентация)	1	15, 9	26

9. Коллоквиум	—	—	—
10. Итоговая аттестация (экзамен)	1	20	20
ИТОГО			100

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 - 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 - 85	4	69 - 85	4	C
51 - 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 - 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

- График проведения письменных контрольных работ формируется в соответствии с календарным планом курса.
- Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
- Разрешается однократно переписать контрольную работу, если по ней получено менее половины планируемых баллов, при этом аннулируются ранее полученные по этой контрольной работе баллы. Срок переписывания устанавливает преподаватель. Итоговая контрольная работа не переписывается.
- Использование источников (в том числе конспектов

лекций и лабораторных занятий) во время выполнения письменной контрольной работы возможно только с разрешения преподавателя.

5. Время, которое отводится студенту на выполнение письменной работы (контрольной тестовой работы), устанавливается преподавателем. По завершении отведенного времени студент должен сдать работу преподавателю, вне зависимости от того, завершена она или нет.
6. Отсрочка в переписывании контрольных работ и сдачи домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки. В этом случае выполнение контрольных работ осуществляется в сроки, указанные преподавателем.
7. Студент допускается к итоговой контрольной работе с любым количеством баллов, набранном в семестре, но при условии, что у студента имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
8. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т. е. FX, то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов. Добор баллов осуществляется путем повторного одноразового выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, при этом аннулируются соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.
9. Контрольные работы проводятся либо письменно, либо в виде компьютерного теста по усмотрению преподавателя.
10. Итоговая контрольная работа проводится в виде тестирования. Оценивается работа из 20 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

Вопросы для самопроверки и обсуждений по темам

См. п. 11 программы.

Перечень рефератов и/или курсовых работ по темам

1. Протокол IGMP (Internet Group Management Protocol)
2. Междоменный протокол BGMP (Boarder Gateway Multicast Protocol)
3. Лавинный алгоритм (Flooding)
4. Алгоритмы RPB (Reverse Path Broadcasting) и TRPB (Truncated Reverse Path Broadcasting), алгоритм RPM (Reverse Path Multicasting)
5. Алгоритм и протокол CBT (Core-Based Tree)
6. Протокол DVMRP (Distance-Vector Multicast Routing Protocol)
7. Протокол MOSPF (Multicast Open Shortest Path First)
8. Протокол PIM-DM (Protocol Independent Multicast - Dense Mode)
9. Протокол PIM-SM (Protocol Independent Multicast – Sparse Mode)
10. Мультивещание в сетях подвижной связи: протоколы MoM (Mobile Multicast) и MMA (Multicast by Multicast Agent)
11. Технология peer-to-peer (P2P): принципы, примеры использования. Сети P2P.

Тренировые задания

В качестве тренировочных заданий рекомендуется использовать все упражнения лабораторного практикума.

Перечень вопросов итоговой аттестации по курсу

1. Математическая модель сети с одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, пространство состояний, стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, показатели качества.
2. Метод расчёта отдельного звена сети с одноадресными

- соединениями. Модель стохастического ранца, алгоритм Кауфмана-Робертса. Формулы расчёта показателей качества.
3. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, одноканальные соединения ($d_k = 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: мультисервисная модель Эрланга.
 4. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Келли, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: мультисервисная модель Эрланга.
 5. Метод просеянной нагрузки для оценки вероятности блокировок запросов в сети с одноадресными соединениями. Модель Росса, многоканальные соединения ($d_k \geq 1$). Расчет вероятности блокировки на отдельном звене: модель стохастического ранца.
 6. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, деревья мультивещания, состояние x_{mps} логического пути, построение пространства состояний \mathcal{X} .
 7. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_1$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_1 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$, связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.
 8. Математическая модель логического пути $((m, p, s)$ -пути) сети мультивещания. Система массового обслуживания $M | M | 1 | 0 | \Pi_2$ с «прозрачными» заявками и дисциплиной Π_2 : предположения, вывод стационарного РВ $\{p_n, n \geq 0\}$,

связь с стационарным РВ $\{\tilde{\pi}_{mps}(x_{mps}), x_{mps} \in \{0,1\}\}$ состояний логического пути.

9. Математическая модель сети с многоадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение составного СП $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ вывод стационарного РВ $\{\pi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ состояний сети на примере дисциплины Π_1 , множества \mathcal{B}_{mps} , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} , вероятностные характеристики B_{mps} , F_{mps} и H_{mps} для логического пути.
10. Математическая модель отдельного звена сети с многоадресными соединениями: состояние \mathbf{y} звена, пространство состояний \mathcal{Y} , построение составного СП $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$, стационарное РВ $\{\pi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}$ состояний звена, множества \mathcal{B}_m , \mathcal{F}_m и \mathcal{H}_m , вероятности B_m , F_m и H_m для m -услуги.
11. Метод расчета вероятностных характеристик m -услуги на отдельном звене сети с многоадресными соединениями: множества $\mathcal{Y}(m,n)$, функции $g(m,n)$, формулы для расчёта $G(\mathcal{Y})$ и вероятностей B_m , F_m и H_m .
12. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: структурные и нагрузочные параметры, построение пространства состояний \mathcal{X} .
13. Математическая модель сети с многоадресными и одноадресными соединениями: стационарные вероятности состояний марковского процесса, описывающего функционирование сети, множества \mathcal{B}_{mps}^I , \mathcal{B}_k^{II} , \mathcal{F}_{mps} и \mathcal{H}_{mps} .
14. Математическая модель отдельного звена сети с двумя типами соединений: пространство состояний \mathcal{X} , стационарные вероятности состояний марковского процесса,

- описывающего функционирование звена, множества \mathcal{B}_m^I ,
 \mathcal{B}_k^{II} , \mathcal{F}_m , \mathcal{H}_m и соответствующие вероятности.
15. Метод свёртки расчета отдельного звена сети с двумя типами соединений: множества $\mathcal{X}(n)$, $\mathcal{X}_m(n)$, $\mathcal{Y}(i)$, $\mathcal{Y}_m(i)$, $\mathcal{C}(j)$, функции $f_m(i, n)$, формулы для расчёта нормировочной константы $G(\mathcal{X})$, вероятностей B_m^I , B_k^{II} , F_m и H_m .
 16. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком.
 17. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока.
 18. Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети.
 19. Модель процесса обмена данными в потоковой P2P-сети.
 20. Протоколы IGMP (Internet Group Management Protocol) и BGMP (Boarder Gateway Multicast Protocol).
 21. Алгоритмы многоадресной доставки информации: RPB (Reverse Path Broadcasting), TRPB (Truncated Reverse Path Broadcasting), RPM (Reverse Path Multicasting), CBT (Core-Based Tree).
 22. Протоколы многоадресной доставки информации: CBT (Core-Based Tree), DVMRP (Distance-Vector Multicast Routing Protocol), MOSPF (Multicast Open Shortest Path First), PIM-DM и PIM-SM (Protocol Independent Multicast - Dense Mode и Sparse Mode).

Разработчики:

<u>профессор</u>	<u>каф. систем телекоммуникаций</u>	<u>Самуйлов К.Е.</u>
------------------	-------------------------------------	----------------------

Должность,	название кафедры,	инициалы, фамилия
------------	-------------------	-------------------

<u>ст.преп.</u>	<u>каф. систем телекоммуникаций</u>	<u>Абаев П.О.</u>
-----------------	-------------------------------------	-------------------

Должность,	название кафедры,	инициалы, фамилия
------------	-------------------	-------------------

<u>доцент</u>	<u>каф. систем телекоммуникаций</u>	<u>Гайдамака Ю.В.</u>
---------------	-------------------------------------	-----------------------

Должность, название кафедры, инициалы, фамилия

ст.преп. каф. систем телекоммуникаций Гудкова И.А.

Должность, название кафедры, инициалы, фамилия

доцент каф. систем телекоммуникаций Королькова А. В.

Должность, название кафедры, инициалы, фамилия

доцент каф. систем телекоммуникаций Кулябов Д. С.

Должность, название кафедры, инициалы, фамилия

ст.преп. каф. систем телекоммуникаций Щукина О.Н.

Должность, название кафедры, инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой систем телекоммуникаций Самуйлов К. Е.

название кафедры, инициалы, фамилия

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**«ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА
МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЕЙ»**

1. ОДНОАДРЕСНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

В этой главе кратко излагается подход к анализу показателей качества обслуживания потокового трафика в МСС с одноадресными соединениями посредством модели мультисервисной сети с потерями (англ. loss network), известной по работам Фрэнка Келли [1 – 3 и др.] и Кейта Росса [4, 5 и др.]. В первом разделе главы построена модель сети в целом: в явном виде получены пространство состояний и стационарное распределение вероятностей состояний, выражения для вероятностей блокировки установления соединения. В разделе 1.2 изложены методы анализа отдельного звена такой сети с полнодоступной схемой разделения ресурсов. Функционирование звена описывается мультисервисной моделью Эрланга с явными потерями, кратко представленной в разделе 1.1. Подробнее об этой модели и ряде других моделей звена МСС см. [1, 6]. В разделе 1.2 изложен ряд подходов к приближенному вычислению вероятностных характеристик звена. В заключительном разделе предложен метод анализа неполнодоступного звена – звена сети с резервированием передаточных ресурсов.

1.1. Модель сети с одноадресными соединениями

1.1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать сеть связи произвольной топологии, состоящую из некоторого числа узлов, соединенных звеньями. Пусть L – общее число звеньев сети, а $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, L\}$ – множество всех звеньев, занумерованных произвольным образом. Обозначим C_l емкость l -звена. Емкость соответствует пропускной способности звена, выраженной в условных единицах измерения (единицах емкости). Величина единицы емкости выбирается в зависимости от конкретной задачи и требований соединений к ШПП. Часто бывает удобно выбрать в качестве единицы емкости наименьшее из таких требований. Если, например, принять за

единицу емкости 8 кбит/с, то емкость канала с пропускной способностью 622 Мбит/с составит 77750 единиц.

Для передачи информационных потоков между узлами сети могут быть установлены двухточечные соединения различных классов. Каждый класс соединений характеризуется двумя параметрами: маршрутом, то есть множеством звеньев сети, через которые устанавливается соединение, и требованием к емкости звеньев маршрута. Обозначим $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ множество всех классов соединений сети, и пусть $\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}$ – маршрут, а d_k – требование к емкости всех звеньев маршрута соединения k -класса.

Заметим, что рассматриваемая модель является наиболее естественным с точки зрения приложений частным случаем базовой модели мультисервисной сети с фиксированной маршрутизацией, которую использовал в своих работах Ф. Келли [1–3] и была предложена в [2, 3]. Базовая модель мультисервисной сети в этих работах отличается от рассматриваемой здесь модели лишь тем, что требования соединений к емкости звеньев задаются матрицей $(d_{kl})_{k \in \mathcal{K}, l \in \mathcal{L}}$, и, следовательно, число занятых одним соединением единиц емкости может различаться на разных звеньях маршрута.

На рис. 1.1 представлен пример сети рассматриваемого типа. Здесь сеть состоит из трех звеньев – 1-го, 2-го и 3-го, – имеющих емкость 30, 35 и 40 единиц соответственно, то есть $\mathcal{L} = \{1, 2, 3\}$, $C_1 = 30$, $C_2 = 35$ и $C_3 = 40$. Между любыми двумя соответствующими висячим вершинам изображающего сеть графа узлами могут быть установлены соединения, требующие 1 или 5 передаточных единиц. Таким образом, мы получаем 6 классов соединений, то есть $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, 6\}$, параметры которых указаны на рисунке. Например, соединения класса 1 устанавливаются через звенья 1 и 2 и занимают 1 единицу емкости звена, то есть $\mathcal{L}_1 = \{1, 2\}$ и $d_1 = 1$.

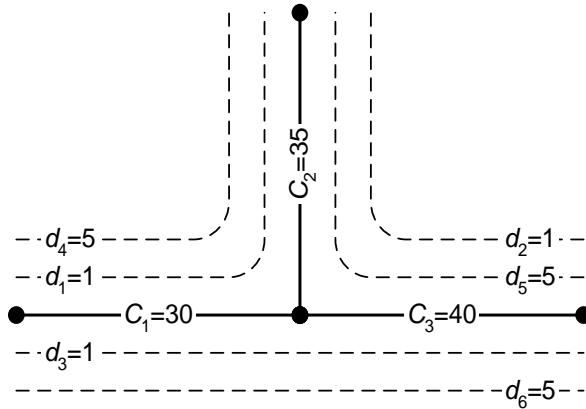


Рис. 1.1. Пример сети с одноадресными соединениями

Введем теперь нагрузочные параметры модели. Пусть в систему поступают запросы пользователей на установление соединения того или иного класса. Будем считать, что запросы на установление соединения k -класса образуют пуассоновский поток интенсивности ν_k , а продолжительности таких соединений независимы в совокупности, не зависят от моментов установления соединения и одинаково распределены по произвольному закону со средним $1/\kappa_k$. Обозначим через $a_k = \nu_k / \kappa_k$ интенсивность предложенной нагрузки, чтобы упростить дальнейшие выкладки.

По запросу пользователя будет установлено соединение требуемого класса, если на момент прихода запроса на всех звеньях соответствующего маршрута окажется необходимое число свободных единиц емкости звена. В этом случае требуемое число единиц ресурса предоставляется данному соединению до его разъединения. Если же хотя бы на одном из звеньев маршрута требуемого числа свободных единиц ресурса не окажется, то происходит блокировка запроса и запрос теряется. Обратимся вновь к рис. 1.1: если, например, в момент поступления запроса на установление соединения класса 4 ($d_4 = 5$, $\mathcal{L}_4 = \{1, 2\}$) в нашей сети имеется пять активных соединений класса 6 ($d_6 = 5$, $\mathcal{L}_6 = \{1, 3\}$) и одно соединение класса 1 ($d_1 = 1$, $\mathcal{L}_1 = \{1, 2\}$), запрос будет заблокирован, так как на звене 1 ($C_1 = 30$) окажется

свободно лишь 4 единицы емкости ($30 - 5 \times 5 - 1 \times 1 = 4$), что меньше требуемых пяти.

1.1.2. Стационарное распределение вероятностей состояний

Пусть емкости всех звеньев сети неограничены: $C_l = \infty$, $l \in \mathcal{L}$. В этом случае запрос пользователя на установление соединения любого класса принимается на обслуживание и потеря не происходит. Обозначим через $\tilde{N}_k(t)$ число установленных в момент времени t соединений k -класса. Тогда состояние системы можно описать с помощью многомерного случайного процесса

$$\{\tilde{N}(t) = (\tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t), \dots, \tilde{N}_K(t)), t \geq 0\},$$

каждая компонента которого соответствует одному классу соединений. Поскольку емкости звеньев сети неограничены, множество состояний случайного процесса $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ имеет вид $\tilde{\mathcal{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}^K$.

Легко видеть, что случайный процесс $\{\tilde{N}_k(t), t \geq 0\}$ является процессом размножения и гибели (ПРГ) со стационарным распределением вероятностей состояний

$$p_k(n_k) = P\{\tilde{N}_k(t) = n_k\} = \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} e^{-a_k}, \quad n_k \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

и обратим. Поскольку, в силу неограниченной емкости звеньев, компоненты составного случайного процесса $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ независимы, он также является ОМП и имеет стационарное распределение вероятностей состояний мультиплексивного вида:

$$\tilde{\pi}(\mathbf{n}) = P\{\tilde{N}(t) = \mathbf{n}\} = \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} e^{-a_k}, \quad \mathbf{n} \in \tilde{\mathcal{N}}.$$

Пусть емкости звеньев снова ограничены: $C_l < \infty$, $l \in \mathcal{L}$. Введем множество $\mathcal{K}^l = \{k \in \mathcal{K} : l \in \mathcal{L}_k\}$ классов соединений, маршруты которых проходят через l -звено, и функцию,

соответствующую числу единиц емкости, занятых на l -звене, когда система находится в состоянии $\mathbf{n} \in \tilde{\mathcal{N}}$:

$$d_l(\mathbf{n}) = \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k n_k . \quad (1.1)$$

Теперь пространство состояний системы (с ограниченными звенями) можно представить в виде

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{n} \in \tilde{\mathcal{N}} : d_l(\mathbf{n}) \leq C_l, l \in \mathcal{L}\} . \quad (1.2)$$

Обозначим $\{N(t), t \geq 0\}$ сужение ОМП $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ на множество состояний $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Случайный процесс $\{N(t), t \geq 0\}$ является ОМП, и его стационарное распределение вероятностей имеет мультипликативный вид:

$$\pi(\mathbf{n}) = \frac{1}{G(\mathcal{N})} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{N}, \quad (1.3)$$

где $G(\mathcal{N})$ – нормировочная константа:

$$G(\mathcal{N}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}. \quad (1.4)$$

Опираясь на формулы (1.3) и (1.4), можно выписать выражения для многих важных характеристик сети. К ним относится важнейший показатель качества обслуживания – вероятность блокировки установления соединения.

1.1.3. Вероятности блокировок установления соединений

Если при поступлении запроса пользователя на звеньях сети недостаточно ресурсов для установления соединения, происходит блокировка. Пусть B_k – стационарная вероятность блокировки запроса на установление соединения k -класса. Вычислить эту величину можно с помощью распределения (1.3) по формуле

$$B_k = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{B}_k} \pi(\mathbf{n}), \quad k \in \mathcal{K}. \quad (1.5)$$

Здесь \mathcal{B}_k – множество таких состояний сети, когда происходит блокировка запросов на установление соединения k -класса, то есть множество таких состояний сети, что хотя бы на одном из звеньев

маршрута соединения k -класса недостаточно свободных ресурсов для его установления:

$$\mathcal{B}_k = \{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : \exists l \in \mathcal{L}_k : d_l(\mathbf{n}) > C_l - d_k\}, \quad k \in \mathcal{K}. \quad (1.6)$$

Дополнением подпространства блокировки \mathcal{B}_k установления соединения k -класса до пространства состояний \mathcal{N} является подпространство приема

$$\bar{\mathcal{B}}_k = \{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : d_l(\mathbf{n}) + d_k \leq C_l, l \in \mathcal{L}_k\},$$

объединяющее такие состояния сети, в которых запрос на установление соединений k -класса будет принят. Очевидно, что вероятность приема $\bar{B}_k = P\{\mathbf{n} \in \bar{\mathcal{B}}_k\} = 1 - B_k$.

Вернемся к сети на рис. 1.1 и рассмотрим, например, состояние $\mathbf{n} = (4, 3, 1, 2, 3, 3)$. В этом состоянии $d_1(\mathbf{n}) = 30$, $d_2(\mathbf{n}) = 32$ и $d_3(\mathbf{n}) = 34$. Следовательно, оно является состоянием блокировки для соединений всех классов, кроме 2-го, так как на звене 1 свободных ресурсов нет, а на звене 2 свободно только 3 единицы емкости. Для класса 2 состояние \mathbf{n} является состоянием приема. Далее, анализируя, например, множество \mathcal{B}_1 блокировок класса 1, заметим, что оно включает все состояния из \mathcal{N} , в которых на звене 1 занято 30 единиц емкости или на звене 2 занято 35 единиц емкости. Таким образом, помимо состояния \mathbf{n} , в \mathcal{B}_1 войдут состояния $(2, 8, 1, 2, 3, 3)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 6)$ и другие.

1.2. Методы расчета отдельного звена

Частным случаем рассмотренной в предыдущем разделе системы является отдельное звено сети. В данном разделе мы покажем, как применить предложенную модель к анализу отдельного звена МСС с одноадресными соединениями, приведем известный алгоритм Кауфмана – Робертса для вычисления вероятностных характеристик модели, а также рассмотрим два подхода к их приближенному расчету.

1.2.1. Постановка задачи

Пусть все звенья сети, кроме звена l^* , имеют неограниченную емкость. Тогда задача анализа блокировок сводится к рассмотрению системы, состоящей из одного звена l^* емкости $C = C_{l^*}$ и множества классов соединений \mathcal{K}^{l^*} , маршруты которых ограничены одним звеном: $\mathcal{L}_k = \{l^*\}$, далее для краткости индекс l^* будем опускать. Напомним, что каждый класс соединений характеризуется требованием к емкости звена d_k , а также интенсивностью предложенной нагрузки $a_k = v_k / \kappa_k$. Функционирование такой системы описывает построенный в разделе 1.1.2 случайный процесс $\{N(t), t \geq 0\}$ с пространством состояний

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{n} \in \tilde{\mathcal{N}} : d(\mathbf{n}) \leq C\}. \quad (1.7)$$

Для этого случайного процесса верна теорема 1.1 и, следовательно, стационарное распределение вероятностей состояний системы выражается формулами (1.3) и (1.4).

Опираясь на формулы (1.3) и (1.4), выпишем выражения для основных вероятностных характеристик звена. Стационарную вероятность блокировки запроса на установление соединения k -класса можно получить по формуле (1.5), при этом соответствующее пространство блокировок имеет вид

$$\mathcal{B}_k = \{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : d(\mathbf{n}) > C - d_k\}, k \in \mathcal{K}. \quad (1.8)$$

Важным показателем производительности системы является коэффициент использования звена. Для его вычисления нам потребуется среднее число занятых единиц емкости, которое можно получить по формуле

$$\bar{d} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{V}} d(\mathbf{n}) \pi(\mathbf{n}). \quad (1.9)$$

Теперь выражение для коэффициента использования звена имеет вид

$$U = \frac{\bar{d}}{C}. \quad (1.10)$$

Таким образом, мы показали, как более общая модель мультисервисной сети применима к анализу отдельного звена сети. Полученная система представляет собой известную в теории телетрафика модель простого стохастического ранца, или мультисервисную модель Эрланга с явными потерями. Подробно построение данной модели см. в [1, 6], мы же перейдем к методам расчета ее вероятностных характеристик.

1.2.2. Алгоритм Кауфмана – Робертса

Для эффективного вычисления точных значений вероятностей блокировок и коэффициента использования звена в модели звена сети с одноадресными соединениями применим метод Кауфмана – Робертса. Данный метод основан на разбиении пространства состояний модели по числу занятых единиц емкости:

$$\mathcal{C}(n) = \{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : d(\mathbf{n}) = n\}, \quad n = 0, \dots, C, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^C \mathcal{C}(n); \quad \mathcal{C}(i) \cap \mathcal{C}(j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Оказывается, что соответствующие вероятности (распределение вероятностей числа занятых единиц емкости)

$$P(n) = P\{\mathcal{C}(n)\} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}(n)} \pi(\mathbf{n}) \quad (1.12)$$

связаны между собой рекуррентным соотношением

$$nP(n) = \sum_{k=1}^K d_k a_k P(n - d_k), \quad n = 0, \dots, C. \quad (1.13)$$

Данные соотношения позволяют построить простой и эффективный алгоритм расчета искомых характеристик. Введем функцию

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n = 0; \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K d_k a_k h(n - d_k), & n = 1, \dots, C. \end{cases} \quad (1.14)$$

Предложение 1.1. Значение нормирующей константы (1.4) стационарного распределения вероятностей состояний отдельного звена сети можно получить по формуле

$$G(\mathcal{N}) = \sum_{n=0}^C h(n). \quad (1.15)$$

Предложение 1.2. Вероятность блокировки установления соединения k -класса вычисляется по формуле

$$B_k = \frac{\sum_{n=C-d_k+1}^C h(n)}{G(\mathcal{N})}, \quad k \in \mathcal{K}. \quad (1.16)$$

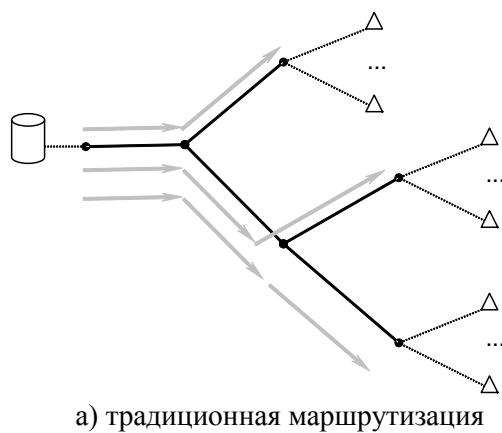
Предложение 1.3. Среднее число занятых единиц емкости звена вычисляется по формуле

$$\bar{d} = \frac{\sum_{n=1}^C n \cdot h(n)}{G(\mathcal{N})}. \quad (1.17)$$

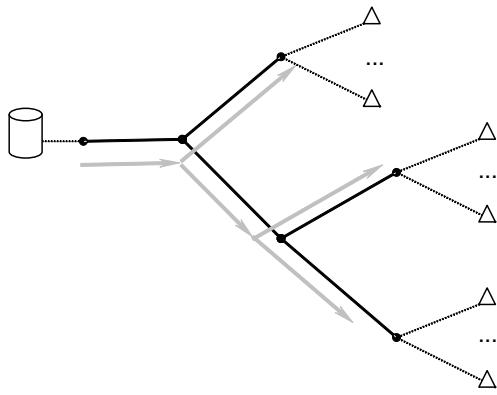
Добавим, что временная сложность вычисления нормирующей константы данным методом при рекурсивном расчете функции (1.14) имеет порядок $O(CK^C)$. Если не использовать рекурсию и последовательно вычислять промежуточные значения функции (1.14), записывая их в память, то порядок временной сложности алгоритма составит $O(CK)$ и, следовательно, время вычисления характеристик будет увеличиваться линейно с ростом емкости звена.

2. МНОГОАДРЕСНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

В этой главе предложен подход к анализу сети с многоадресной передачей данных – мультивещанием. Применение принципа «точка - много точек» при установлении соединений позволяет более эффективно использовать ресурсы сети. Действительно, при традиционных способах передачи информации для каждого пользователя устанавливается соединение «точка-точка» (англ. unicast). Это приводит к тому, что по общим для нескольких соединений звеньям сети передается несколько копий одной и той же информации. При мультивещании пользователи совместно используют пропускную способность некоторых звеньев сети, поскольку дублирования информации на этих звеньях не происходит. Этот основной принцип мультивещания проиллюстрирован на рис. 2.1.



a) традиционная маршрутизация



б) многоадресная маршрутизация

Рис. 2.1. Основной принцип мультивещания

Различают статическое и динамическое мультивещание. При статическом мультивещании на первом этапе источник формирует группу пользователей, запросивших предоставление какой-либо услуги (так называемую группу мультивещания). На втором этапе источник посыпает информацию, соответствующую содержанию услуги, всем пользователям из этой группы. Примером может служить рассылка обновлений программного обеспечения группе пользователей, подписавшихся на постоянное получение новых версий. Рассылка инициируется источником (*push*-технология) при появлении в источнике очередной обновленной версии программы. С момента начала рассылки информации происходит формирование очередной группы мультивещания. Все пользователи, приславшие запрос на предоставление данной услуги после начала рассылки источником текущей версии документа, войдут в группу мультивещания для рассылки следующей версии.

При динамическом мультивещании источник начинает передачу информации, соответствующей содержанию услуги, по запросу пользователя. Момент окончания предоставления услуги также определяется пользователем. Примером динамического мультивещания служит телевидение и радиовещание в мультисервисной сети.

2.1. Модель сети мультивещания

2.1.1. Основные понятия

Будем рассматривать сеть многоадресной передачи с несколькими источниками информации (отправителями данных), которые, как и пользователи (получатели данных), могут быть подключены к любому узлу сети [3, 4]. Каждый источник предоставляет конечное число услуг и по запросам пользователей передает информацию, соответствующую содержанию услуги. При этом если одна и та же услуга предоставляется одновременно нескольким пользователям, то информация передается без дублирования. Из-за этого в сети мультивещания соединения имеют структуру дерева, корнем которого является узел подключения источника, а листовыми вершинами – узлы подключения пользователей. Такое дерево мы будем называть деревом мультивещания (англ. multicasting tree). Поскольку каждый пользователь сети может обращаться к источнику независимо от других пользователей, структура многоадресных соединений динамична: сделавший запрос на предоставление услуги пользователь будет подключен к активному дереву мультивещания, если эта услуга уже предоставляется другим пользователям, или инициализирует новое дерево мультивещания (имеющее пока лишь одну ветвь), если эта услуга никому не предоставлялась.

Первая из моделей функционирования такой сети, которые мы рассмотрим, была предложена К.Е. Самуйловым и Ю.В. Гайдамака. На этой модели мы остановимся достаточно подробно, поскольку именно такой подход к моделированию многоадресной передачи будет использован при описании сети с двумя типами соединений.

Последовательность звеньев сети от узла подключения пользователя до источника будем называть физическим путем. Обозначим

$\mathcal{L} = \{1, \dots, L\}$ – множество звеньев сети;

$\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$ – множество источников информации;

$\mathcal{P}_s = \{1, \dots, P_s\}$ – множество всех физических путей к источнику $s \in \mathcal{S}$;

$\mathcal{M}_s = \{1, \dots, M_s\}$ – множество услуг, предоставляемых источником $s \in \mathcal{S}$;

$\mathcal{L}_{ps} \subseteq \mathcal{L}$ – множество всех звеньев физического пути $p \in \mathcal{P}_s$ к источнику $s \in \mathcal{S}$;

$\mathcal{S}^l = \{s \in \mathcal{S} : \mathcal{P}_s^l \neq \emptyset\}$ – множество источников информации, предоставляющих услуги через звено $l \in \mathcal{L}$;

$\mathcal{P}_s^l = \{p \in \mathcal{P}_s : l \in \mathcal{L}_{ps}\}$ – множество физических путей к источнику $s \in \mathcal{S}^l$, проходящих через звено $l \in \mathcal{L}$;

b_{ms} – число единиц емкости звена, требуемое для предоставления услуги $m \in \mathcal{M}_s$;

C_l – емкость звена $l \in \mathcal{L}$.

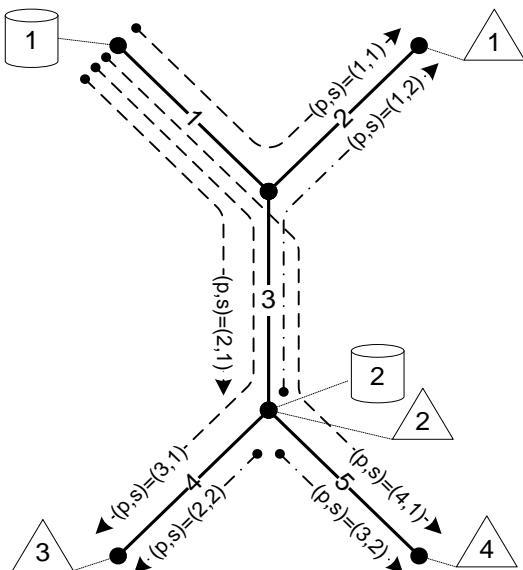


Рис. 2.2. Пример сети мультивещания

Чтобы разобраться в предложенных обозначениях, рассмотрим пример сети многоадресной передачи, схема которой изображена на рис. 2.2. Сеть состоит из пяти звеньев, следовательно $\mathcal{L} = \{1, \dots, 5\}$. В ней имеются два источника информации, изображенные на рисунке цилиндрами, $\mathcal{S} = \{1, 2\}$. К первому ведут физические пути от каждого из четырех пользователей (пользователи показаны треугольниками), то есть $\mathcal{P} = \{1, \dots, 4\}$, при этом $\mathcal{L}_{11} = \{2, 1\}$, $\mathcal{L}_{21} = \{3, 1\}$, $\mathcal{L}_{31} = \{4, 3, 1\}$ и $\mathcal{L}_{41} = \{5, 3, 1\}$ (рис. 2.3.а). Ко второму источнику имеются три физических пути, так как можно считать, что пользователь 2 подсоединен ко второму источнику напрямую, а не через звенья рассматриваемой сети, то есть $\mathcal{P}_2 = \{1, 2, 3\}$ и $\mathcal{L}_{12} = \{2, 3\}$, $\mathcal{L}_{22} = \{4\}$, $\mathcal{L}_{32} = \{5\}$ (рис. 2.3.б). Наконец, если рассматривать, например, третье звено, то через него проходят два физических пути к первому источнику от третьего и четвертого пользователей: $\mathcal{P}_1^3 = \{3, 4\}$, и один физический путь ко второму источнику: $\mathcal{P}_2^3 = \{1\}$.

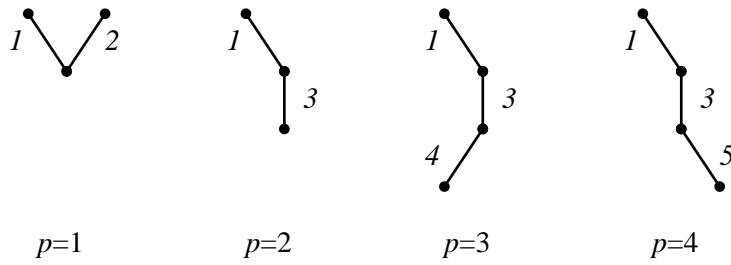


Рис. 2.3а. Физические пути к 1-источнику в сети на рис. 2.2

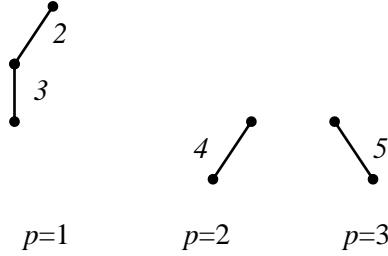


Рис. 2.46. Физические пути к 2-источнику в сети на рис. 2.2

Деревья мультивещания от каждого из источников ко всем пользователям показаны на рис. 2.5.

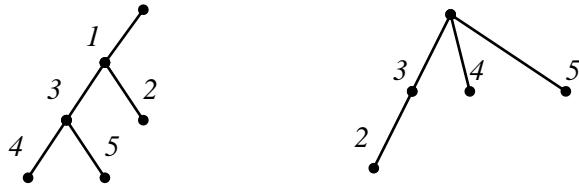


Рис. 2.5. Примеры деревьев мультивещания

Пару (m, s) , $m \in \mathcal{M}_s$, $s \in \mathcal{S}$, будем называть (m, s) -услугой. Пусть для предоставления (m, s) -услуги на всех звеньях физического пути $p \in \mathcal{P}_s$ требуется b_{ms} единиц емкости звена. Тройку (m, p, s) , $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}$, будем называть логическим путем или (m, p, s) -путем. Состояние логического пути обозначим x_{mps} , при этом пусть $x_{mps} = 1$, когда (m, s) -услуга предоставляется пользователю, которого связывает с источником s физический путь p ; в противном случае $x_{mps} = 0$. Теперь детальное состояние всех логических путей сети можно описать набором матриц $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_s, \dots, X_S)$, где матрица

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} x_{11s} & \dots & x_{1P_ss} \\ \dots & & \dots \\ x_{M_s 1s} & \dots & x_{M_s P_ss} \end{pmatrix}$$

определяет детальное состояние всех логических путей к источнику $s \in \mathcal{S}$. При этом единицы в m -строке матрицы \mathbf{X}_s указывают, по каким физическим путям предоставляется (m, s) -услуга, а единицы в p -столбце матрицы \mathbf{X}_s соответствуют услугам, которые предоставляются от s -источника по физическому пути p , $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}$. Множество всех возможных матриц такого вида обозначим $\tilde{\mathcal{X}} = \{0,1\}^{\sum M_s P_s}$.

2.1.2. Пространство состояний и равновесное распределение вероятностей

Определим для каждого звена $l \in \mathcal{L}$, источников $s \in \mathcal{S}^l$ и состояний логических путей сети $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ функцию

$$y_{ms}^l(\mathbf{x}) = u\left(\sum_{p \in \mathcal{P}_s^l} x_{mps}\right), \text{ соответствующую состоянию } (m, s)\text{-услуги}$$

на l -звене. Здесь $u(a) = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ 0, & a \leq 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Обозначим $\mathbf{y}^l(\mathbf{x}) = (y_{ms}^l(\mathbf{x}))_{m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l}$ состояние услуг мультивещания на l -звене, когда логические пути сети находятся в состоянии $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$. Для $l \in \mathcal{L}$ введем величину

$$c_l(\mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathcal{S}^l} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} y_{ms}^l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad (2.1)$$

задающую количество занятых единиц емкости l -звена, если сеть находится в состоянии \mathbf{x} . Тогда пространство состояний логических путей сети можно выразить следующим образом:

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : c_l(\mathbf{x}) \leq C_l, l \in \mathcal{L}\}. \quad (2.2)$$

Функционирование путей в сети мультивещания описывается случным процессом ввиду случайного характера потока запросов пользователей на предоставление услуг. Кроме того, случным является и время занятия пути, поскольку завершение предоставления услуги может произойти не только по причине

истечения времени передачи соответствующей информации, но и по причине преждевременного завершения сеанса связи со стороны пользователей. Построение математической модели сети будем проводить в предположении о независимости функционирования физических путей, т.е. не будем учитывать некоторые особенности протоколов мультивещания в части функций установления, поддержания и разъединения соединений (сигнализации).

Пусть все логические пути функционируют независимо друг от друга. Построение модели начнем с описания поведения логического пути при описанных ниже предположениях о способе предоставления услуги пользователю сети.

На рис. 2.6 изображена схема функционирования (m, p, s) -пути, на которой показаны его «жизненные циклы», состоящие из двух периодов: (m, p, s) -путь включен ($x_{mps} = 1$) и (m, p, s) -путь выключен ($x_{mps} = 0$).

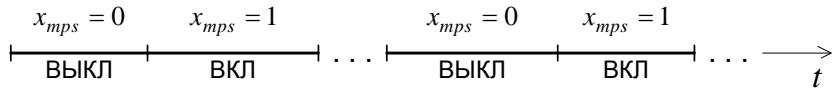


Рис. 2.6. Схема функционирования логического пути

Функционирование логического пути может быть описано с помощью системы массового обслуживания (СМО) с «прозрачными» [11] заявками $M|M|1|0|\Pi$, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda_{mps} > 0$.

Заявка (запрос пользователя), поступившая на периоде простоя прибора (период, когда логический путь выключен), занимает прибор и обслуживается в течение некоторого случайного интервала времени (период, когда логический путь включен). Все последующие заявки, поступившие в систему в период занятости, не теряются и не становятся в очередь на обслуживание, а получают его вместе с заявкой, которая инициировала период занятости прибора. Иными словами, все последующие заявки присоединяются к ранее поступившим заявкам и обслуживаются «прозрачно», т.е. одновременно на одном приборе.

Будем исследовать две дисциплины «прозрачного» обслуживания. В первом случае (дисциплина Π_1) период занятости прибора определяет первая из поступивших заявок, а в момент окончания ее обслуживания систему одновременно покидают все заявки, поступившие за время ее обслуживания, незамедлительно освобождая занятые ресурсы. Длительность обслуживания заявки-инициатора периода занятости имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_{mps} > 0$. Такая дисциплина описывает сценарий подключения пользователей к сетевой игре или видеоконференции. При дисциплине Π_2 заявки, обслуживаясь одновременно на одном приборе, покидают систему независимо друг от друга. Длительность обслуживания каждой заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_{mps} > 0$. Эта дисциплина описывает сценарий подключения пользователей к просмотру канала вещательного телевидения.

Более детально «жизненный цикл» логического пути для обеих дисциплин «прозрачного» обслуживания показан на рис. 2.7.

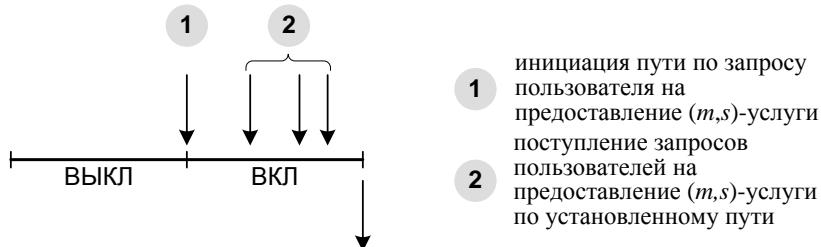


Рис. 2.7а. «Жизненный цикл» логического пути
для дисциплины Π_1

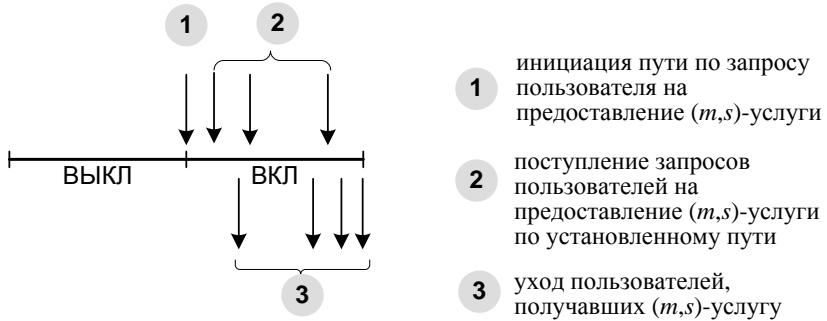


Рис. 2.8б. «Жизненный цикл» логического пути
для дисциплины Π_2

Для каждой из СМО с «прозрачными» заявками $M | M | 1 | 0 | \Pi_u$, $u \in \{1, 2\}$ введем случайные процессы (СП) $\xi_{mps}^{(1)}(t)$ и $\xi_{mps}^{(2)}(t)$, описывающие число заявок в системе в момент времени $t \geq 0$ для дисциплин Π_1 и Π_2 соответственно.

Процессы $\xi_{mps}^{(u)}(t)$, $u \in \{1, 2\}$, являются марковскими случайными процессами, у которых при любых значениях $\lambda_{mps} > 0$ и $\mu_{mps} > 0$ существует стационарное распределение вероятностей

$$p_n^{(u)} = P\{\xi_{mps}^{(u)}(t) = n\}, \quad n \geq 0, \quad u \in \{1, 2\},$$

вида

$$p_n^{(u)} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \rho_{mps}} \left(\frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} \right)^n, & u = 1, \\ \frac{\rho_{mps}^n}{n!} \cdot e^{-\rho_{mps}}, & u = 2, \end{cases} \quad n \geq 0, \quad (2.3)$$

где $\rho_{mps} = \lambda_{mps} / \mu_{mps}$.

Введем случайные процессы $\{X_{mps}^{(u)}(t), t \geq 0\}$, описывающие поведение (m, p, s) -пути для дисциплин $u \in \{1, 2\}$, и их стационарные распределения

$$\pi_{mps}^{(u)}(x_{mps}) = P\{X_{mps}^{(u)}(t) = x_{mps}\}, \quad x_{mps} \in \{0, 1\}.$$

Процессы $\{X_{mps}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ являются марковскими, а их стационарные распределения связаны с распределениями МП $\xi_{mps}^{(u)}(t)$, $u \in \{1, 2\}$, для соответствующих дисциплин «прозрачного» обслуживания следующим образом:

$$\begin{aligned}\pi_{mps}^{(u)}(0) &= p_0^{(u)}; \\ \pi_{mps}^{(u)}(1) &= \sum_{n \geq 1} p_n^{(u)}.\end{aligned}$$

Итак, стационарное распределение СП $\{X_{mps}^{(u)}(t), t \geq 0\}$, $u \in \{1, 2\}$, имеет вид

$$\pi_{mps}^{(u)}(x_{mps}) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \rho_{mps}} \cdot \rho_{mps}^{x_{mps}}, & u = 1; \\ e^{-\rho_{mps}} \cdot (e^{\rho_{mps}} - 1)^{x_{mps}}, & u = 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Заметим, что СП $\{X_{mps}^{(u)}(t), t \geq 0\}$, $u \in \{1, 2\}$, являются обратимыми марковскими процессами (ОМП). Так, для МП $\{X_{mps}^{(1)}(t), t \geq 0\}$ это очевидно следует из того, что стационарное распределение МП $\{X_{mps}^{(1)}(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет уравнениям детального баланса

$$\pi_{mps}^{(1)}(0)\lambda_{mps} = \pi_{mps}^{(1)}(1)\mu_{mps}, \quad m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}.$$

Отметим, что построенная модель логического пути не учитывает возможных потерь запросов из-за блокировок и, следовательно,

$\pi_{mps}^{(u)}(1)$ можно рассматривать также как предложенную нагрузку на (m, p, s) -путь.

Для описания функционирования всех логических путей сети введем составной процесс $\tilde{X}^{(u)}(t) = \left(X_{mps}^{(u)}(t)\right)_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}}$, который по построению является обратимым марковским процессом на множестве $\tilde{\mathcal{X}}$ со стационарным распределением

$$\tilde{\pi}^{(u)}(\mathbf{x}) = \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \pi_{mps}^{(u)}(x_{mps}), \quad \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}},$$

причем

$$\tilde{\pi}^{(u)}(\vec{0}) = \begin{cases} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \frac{1}{1 + \rho_{mps}}, & u = 1; \\ \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} e^{-\rho_{mps}}, & u = 2. \end{cases}$$

Поведение системы с учетом ограниченной емкости звеньев может быть описано сужением этого процесса на множество \mathcal{X} .

Пусть случайный процесс $X^{(u)}(t)$ является сужением ОМП $\tilde{X}^{(u)}(t)$ на множество $\mathcal{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$.

Теорема 2.1. Равновесное распределение $\pi^{(u)}(\mathbf{x}) = P\{X^{(u)}(t) = \mathbf{x}\}$ случайного процесса $\{X^{(u)}(t), t \geq 0\}$ имеет мультипликативный вид

$$\begin{aligned} \pi^{(u)}(\mathbf{x}) &= \pi^{(u)}(\vec{0}) \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \alpha_{mps}^{x_{mps}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\ \pi^{(u)}(\vec{0}) &= \left[\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \alpha_{mps}^{x_{mps}} \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\alpha_{mps} = \begin{cases} \rho_{mps}, & u = 1; \\ e^{\rho_{mps}} - 1, & u = 2. \end{cases} \tag{2.6}$$

Доказательство. Из основного свойства сужения ОМП следует, что для любого $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}$

$$\pi^{(u)}(\mathbf{x}') = \frac{\tilde{\pi}^{(u)}(\mathbf{x}')}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \tilde{\pi}^{(u)}(\mathbf{x})} = \frac{\prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \pi_{mps}^{(u)}(x'_{mps})}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \pi_{mps}^{(u)}(x_{mps})}.$$

Для дисциплины $\Pi_1 \quad \forall \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \pi^{(1)}(\mathbf{x}') &= \frac{\prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \frac{\rho_{mps}^{x'_{mps}}}{1 + \rho_{mps}}}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \frac{\rho_{mps}^{x_{mps}}}{1 + \rho_{mps}}} = \frac{\prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \rho_{mps}^{x'_{mps}}}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}}} = \\ &= \pi(\vec{0}) \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \rho_{mps}^{x'_{mps}}. \end{aligned}$$

Аналогично, для дисциплины $\Pi_2 \quad \forall \mathbf{x}' \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \pi^{(2)}(\mathbf{x}') &= \frac{\prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} e^{-\rho_{mps}} \cdot (e^{\rho_{mps}} - 1)^{x'_{mps}}}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} e^{-\rho_{mps}} \cdot (e^{\rho_{mps}} - 1)^{x_{mps}}} = \\ &= \frac{\prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} (e^{\rho_{mps}} - 1)^{x'_{mps}}}{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} (e^{\rho_{mps}} - 1)^{x_{mps}}} = \pi(\vec{0}) \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} (e^{\rho_{mps}} - 1)^{x'_{mps}}. \end{aligned}$$

■

2.1.3. Вероятностные характеристики модели

Зная стационарное распределение вероятностей состояний системы, можно получить выражения для основных ее вероятностных характеристик. Для удобства записи для любого множества $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ определим функцию $G(\Omega)$ соотношением

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \alpha_{mps}^{x_{mps}}, \quad (2.7)$$

где α_{mps} определяется формулой (2.6).

Теперь нормирующую константу распределения (2.5) можно представить в виде

$$\pi^{-1}(\vec{0}) = G(\mathcal{X}).$$

Выражения для многих важных характеристик сети, которые задаются вероятностью некоторого события, то есть подмножества Ω пространства состояний системы \mathcal{X} , могут быть получены посредством функции $G(\Omega)$ следующим образом:

$$P\{\mathbf{x} \in \Omega\} = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \pi(\mathbf{x}) = \frac{G(\Omega)}{G(\mathcal{X})}. \quad (2.8)$$

К таким характеристикам относятся вероятности блокировки установления соединений и ряд других характеристик, к рассмотрению которых мы переходим.

Пусть \mathcal{B}_{mps} – множество состояний блокировок (m, p, s) -пути, то есть подмножество состояний логических путей сети, в которых запрос пользователя на предоставление (m, s) -услуги по физическому пути $p \in \mathcal{P}_s$ блокируется по причине нехватки свободных ресурсов звеньев. Для того чтобы установление многоадресного соединения оказалось заблокированным, помимо недостаточного числа свободных единиц емкости на каком-либо звене соответствующего физического пути, необходимо, чтобы запрашиваемая услуга не предоставлялась через это звено другим пользователям. Поэтому множество блокировок (m, p, s) -пути имеет вид

$$\mathcal{B}_{mps} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \exists l \in \mathcal{L}_{ps} : y_{ms}^l(\mathbf{x}) = 0, c_l(\mathbf{x}) + b_{ms} > C_l \right\}. \quad (2.9)$$

Значение вероятности $B_{mps} = P\{\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{mps}\}$ события, заданного соотношением (2.9), можно получить по формуле (2.8). Заметим, что речь идет о блокировках соединений «по времени» (в отличие от блокировок «по вызовам»).

Для анализа функционирования многоадресных соединений помимо вероятности потерь интерес представляют вероятность того, что услуга предоставляется пользователю, и вероятность того, что услуга не предоставляется, но ресурсов достаточно,

чтобы по запросу пользователя инициировать ее предоставление. Введем для любой тройки (m, p, s) , $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}$, события

$$\mathcal{F}_{mps} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : x_{mps} = 1 \right\} \quad (2.10)$$

и

$$\mathcal{H}_{mps} = \left\{ \mathbf{x} : x_{mps} = 0, \forall l \in \mathcal{L}_{ps}, c_l(\mathbf{x}) + b_{ms} \leq C_l \vee y_{ms}^l(\mathbf{x}) = 1 \right\}. \quad (2.11)$$

Вычислить соответствующие вероятности $F_{mps} = P\{\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{mps}\}$ и $H_{mps} = P\{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{mps}\}$ можно по той же формуле (2.8). Первая из этих величин представляет собой вероятность того, что (m, p, s) -путь включен, вторая – вероятность того, что (m, p, s) -путь выключен, но в сети достаточно ресурсов для его включения.

Легко видеть, что для любого (m, p, s) -пути система множеств \mathcal{B}_{mps} , \mathcal{F}_{mps} , \mathcal{H}_{mps} является разбиением пространства состояний \mathcal{X} , поэтому вероятности этих событий связаны соотношением

$$B_{mps} + F_{mps} + H_{mps} = 1. \quad (2.12)$$

Лемма 2.1. Для любой тройки (m, p, s) , $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}$, выполняется соотношение

$$F_{mps} = \begin{cases} \rho_{mps} H_{mps}, & u = 1; \\ (1 - e^{-\rho_{mps}}) H_{mps}, & u = 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую тройку $(\hat{m}, \hat{p}, \hat{s})$, $\hat{m} \in \mathcal{M}_s$, $\hat{p} \in \mathcal{P}_s$, $\hat{s} \in \mathcal{S}$. По определению множества $\mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ соответствующая $(\hat{m}, \hat{p}, \hat{s})$ -пути компонента для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ равна нулю, то есть $x_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = 0$, и для каждого $l \in \mathcal{L}_{\hat{p}\hat{s}}$ выполняется соотношение

$$\tilde{c} = \sum_{s \in \mathcal{S}^l \setminus \{\hat{s}\}} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} y_{ms}^l(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathcal{M}_s \setminus \{\hat{m}\}} b_{m\hat{s}} y_{m\hat{s}}^l(\mathbf{x}) \leq C_l - b_{\hat{m}\hat{s}}.$$

Здесь $c_l(\mathbf{x}) = \tilde{c}$, если $y_{\hat{m}\hat{s}}^l(\mathbf{x}) = 0$, и $c_l(\mathbf{x}) = \tilde{c} + b_{\hat{m}\hat{s}}$ в противном случае.

Для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ состояние сети $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} + \mathbf{I}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}})$ принадлежит множеству $\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ (здесь $\mathbf{I}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ – вектор, $(\hat{m}, \hat{p}, \hat{s})$ -я

компонента которого равна 1, а остальные равны 0).
Действительно: $x'_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = 1$, для $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{\hat{p}\hat{s}}$ выполняется равенство

$$c_l(\mathbf{x}') = c_l(\mathbf{x}), \text{ и для всех } l \in \mathcal{L}_{\hat{p}\hat{s}}$$

$$\begin{aligned} c_l(\mathbf{x}') &= \sum_{s \in \mathcal{S}^l \setminus \{\hat{s}\}} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} y_{ms}^l(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathcal{M}_{\hat{s}} \setminus \{\hat{m}\}} b_{m\hat{s}} y_{m\hat{s}}^l(\mathbf{x}) + b_{\hat{m}\hat{s}} = \\ &= \tilde{c} + b_{\hat{m}\hat{s}} \leq C_l. \end{aligned}$$

С другой стороны, для любого $\mathbf{x}' \in \mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ найдется такое состояние $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$, что $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} + \mathbf{I}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}})$. Таким образом, отображение $\mathbf{x}' = \varphi_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} + \mathbf{I}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}})$ является биекцией из $\mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ в $\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$.

Переходя к вероятностям, получаем для любого $\mathbf{x}' \in \mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$ в случае дисциплины Π_1

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}') &= G^{-1}(\mathcal{X}) \prod_{s \in \mathcal{S} \setminus \{\hat{s}\}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \rho_{mps}^{x_{mps}} \prod_{p \in \mathcal{P}_{\hat{s}} \setminus \{\hat{p}\}} \prod_{m \in \mathcal{M}_{\hat{s}}} \rho_{mp\hat{s}}^{x_{mp\hat{s}}} \times \\ &\quad \times \prod_{m \in \mathcal{M}_{\hat{s}} \setminus \{\hat{m}\}} \rho_{m\hat{p}\hat{s}}^{x_{m\hat{p}\hat{s}}} \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} \pi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \mathbf{I}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}) \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$, и окончательно

$$\begin{aligned} F_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} &= \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{F}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}} \pi(\mathbf{x}') = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}} \pi(\mathbf{x} + \mathbf{I}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}) = \\ &= \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}} \pi(\mathbf{x}) = \rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} H_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}. \end{aligned}$$

Для дисциплины Π_2 равенство

$$F_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}} = \left(1 - e^{-\rho_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}}\right) H_{\hat{m}\hat{p}\hat{s}}$$

доказывается аналогично.

■

Следствие. Для любого (m, p, s) -пути, $m \in \mathcal{M}_s$, $p \in \mathcal{P}_s$, $s \in \mathcal{S}$, верно соотношение

$$F_{mps} = \begin{cases} \frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} (1 - B_{mps}), & u = 1; \\ \left(e^{\rho_{mps}} - 1 \right) (1 - B_{mps}), & u = 2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться утверждением леммы 2.1 и соотношением (2.12). ■

Аналогично модели сети с одноадресными соединениями, полученной формулой можно воспользоваться для вычисления вероятностных характеристик небольших сетей, однако тот факт, что мощность пространства состояний может доходить до $\sum_{s \in \mathcal{S}} P_s M_s$, затрудняет ее применение при больших значениях соответствующих параметров. В связи с этим исследования ведутся в двух направлениях: разработка эффективных точных алгоритмов вычисления нормирующей константы $G(\mathcal{X})$ для некоторых важных для практики разновидностей сетевых топологий и поиск методов приближенной оценки вероятностных характеристик сети произвольной конфигурации.

Далее в разделе 2 для простоты будем рассматривать только случай дисциплины P_1 , а к рассмотрению обеих дисциплин «прозрачного» обслуживания вернемся в разделе 4.

2.1.4. Рекуррентный алгоритм для сети с одним источником

В случае когда в сети мультивещания имеется только один источник рассылки, задача анализа сети сводится к исследованию одного многоадресного соединения, имеющего древовидную структуру. Подобная сетевая топология делает возможным построение рекуррентных методов вычисления.

Рассмотрим модель представимого в виде корневого дерева многоадресного соединения. В корне дерева располагается единственный источник многоадресной рассылки ($S=1$), а в остальных концевых вершинах – получатели данных (группы пользователей). Перенумеруем звенья сети: пусть и 0-звено инцидентно узлу подключений источника. Множество детей l -

звена обозначим \mathcal{A}^l , $|\mathcal{A}^l| = A^l$, а множество звеньев поддерева, исходящего из l -звена (включая само l -звено) – \mathcal{D}^l (см. рис. 2.9). Введем также множество $\mathcal{M}^l \subseteq \mathcal{M}$ услуг, предоставляемых по l -звену. В остальных обозначениях для краткости будем опускать индекс s .

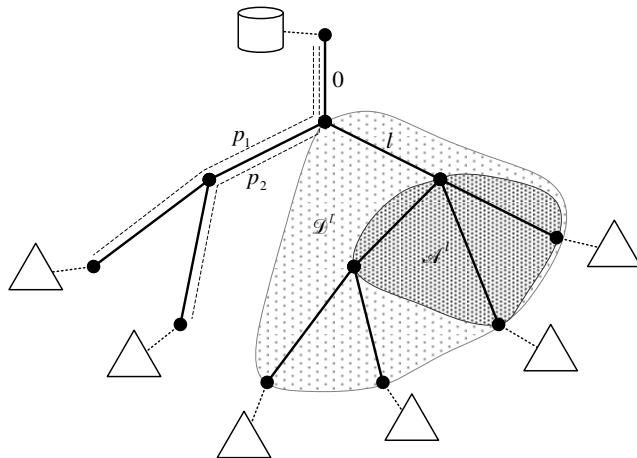


Рис. 2.9. Сеть мультивещания с одним источником

Состояние дерева мультивещания определяется совокупностью состояний всех логических путей, проходящих через корневое звено дерева (звено с индексом 0), и обозначается $\mathbf{x} = (x_{mp})_{m \in \mathcal{M}^0, p \in \mathcal{P}^0}$. Множество всех возможных состояний логических путей поддерева \mathcal{D}^l без учета ограничений емкости звеньев сети имеет вид

$$\tilde{\mathcal{X}}^l = \left\{ \mathbf{x} = (x_{mp})_{m \in \mathcal{M}^l, p \in \mathcal{P}^l} : x_{mp} \in \{0,1\}, m \in \mathcal{M}^l, p \in \mathcal{P}^l \right\}, l \in \mathcal{L},$$

при этом множество состояний всей сети без учета ограничений емкости звеньев есть

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}^0.$$

Заметим, что состояние услуг на звене $y^l(\mathbf{x})$ в случае рассматриваемой топологии зависит от состояний логических

путей соответствующего поддерева $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}^l$, а не сети в целом, как в случае произвольной топологии. То есть $\mathbf{y}^l(\mathbf{x}) = \left(y_m^l(\mathbf{x}) \right)_{m \in \mathcal{M}^l}$ представляет собой состояние l -звена, когда подсеть $\mathcal{D}^j \supseteq \mathcal{D}^l$ находится в состоянии $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}^j$. Множество всех возможных состояний l -звена без учета ограничений на других звеньях сети можно записать в виде

$$\mathcal{Y}^l = \left\{ \mathbf{y} \in \{0,1\}^{M^l} : c_l(\mathbf{y}) \leq C_l \right\}, \quad l \in \mathcal{L},$$

где $c_l(\mathbf{y}) = \sum_{m \in \mathcal{M}^l} b_m y_m$ – число единиц емкости звена, занятых на l -звене, когда это звено находится в состоянии \mathbf{y} . С учетом введенных обозначений множество возможных состояний подсети \mathcal{D}^l представимо в виде

$$\mathcal{X}^l = \left\{ \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}^l : \mathbf{y}^j(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y}^j, j \in \mathcal{D}^l \right\}, \quad l \in \mathcal{L},$$

при этом пространство состояний всей сети можно записать как

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 = \left\{ \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}} : \mathbf{y}^l(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y}^l, l \in \mathcal{L} \right\}. \quad (2.15)$$

Аналогично формуле (2.7), определим для любого звена $l \in \mathcal{L}$ и подмножества состояний поддерева $\Omega \subseteq \mathcal{X}^l$ функцию

$$G^l(\Omega) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \prod_{p \in \mathcal{P}^l} \prod_{m \in \mathcal{M}^l} \pi_{mp}(x_{mp}). \quad (2.16)$$

Задача состоит в построении эффективного алгоритма вычисления нормирующей константы $G^0(\mathcal{X})$ распределения вероятностей (2.5).

Введем для каждого звена $l \in \mathcal{L}$ множество таких состояний подсети \mathcal{D}^l , что l -звено находится в состоянии $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^l$:

$$\mathcal{X}^l(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{X}^l : \mathbf{y}^l(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \right\}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^l. \quad (2.17)$$

Введем также множество таких состояний звеньев – детей l -звена, что l -звено находится в состоянии $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^l$:

$$A^l(y) = \left\{ (\alpha_j)_{j \in \mathcal{A}^l} : \alpha_j \in \mathcal{Y}^j, \bigoplus_{j \in \mathcal{A}^l} \alpha_j = y \right\}, \quad y \in \mathcal{Y}^l, \quad (2.18)$$

где символ \oplus обозначает операцию логического «или». Заметим, что с учетом введенных обозначений пространство состояний сети представимо в виде

$$\mathcal{X} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}^0} \bigcup_{\alpha \in A^0(y)} \times_{j \in \mathcal{A}^0} \mathcal{X}^j(\alpha_j).$$

Введем функцию

$$g^l(y) = G^l(\mathcal{X}^l(y)), \quad y \in \mathcal{Y}^l, \quad l \in \mathcal{L}, \quad (2.19)$$

и определим операцию \otimes , которая имеет смысл свертки по логическому «или»:

$$\left[\otimes_{j \in \mathcal{A}^l} g^j \right](y) = \sum_{\alpha \in A^l(y)} \prod_{j \in \mathcal{A}^l} g^j(\alpha_j). \quad (2.20)$$

Теорема 2.2. Нормирующая константа распределения вероятностей состояний модели представима в виде

$$G^0(\mathcal{X}) = \sum_{y \in \mathcal{Y}^0} g^0(y), \quad (2.21)$$

где функция $g^l(y)$ вычисляется по формуле

$$g^l(y) = \begin{cases} \prod_{p \in \mathcal{P}^l} \prod_{m \in \mathcal{U}^l} \pi_{mp}(y_m), & \mathcal{A}^l = \emptyset, y \in \mathcal{Y}^l; \\ \left[\otimes_{j \in \mathcal{A}^l} g^j \right](y), & \mathcal{A}^l \neq \emptyset, y \in \mathcal{Y}^l; \\ 0, & y \notin \mathcal{Y}^l. \end{cases} \quad (2.22)$$

Доказательство. Для доказательства применим метод математической индукции по числу K ярусов дерева сети. Пусть $K=1$. В этом случае сеть состоит из одного звена и $\mathcal{P}=\{1\}$. Тогда множество состояний логических путей в сети совпадает с состоянием услуг на звене 0, и пространство состояний сети имеет вид

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}} : c_0(\mathbf{y}^0(\mathbf{x})) = \sum_{m \in \mathcal{M}} b_m x_{m1} \leq C_0 \right\}.$$

Вычисляя нормирующую константу по формулам (2.21) и (2.22), получим

$$G^0(\mathcal{X}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^0} g^0(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^0} \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{m \in \mathcal{M}} \pi_{m1}(y_m) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{m \in \mathcal{M}} \pi_{m1}(y_{m1}).$$

Таким образом, утверждение теоремы верно для случая $K=1$.

Предположим, что утверждение теоремы верно для $K=N$, и докажем, что оно верно для $K=N+1$. По предположению индукции и определению нормирующей константы для всех $l \in \mathcal{A}^0$

$$\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^l} g^l(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^l} \prod_{p \in \mathcal{P}^l} \prod_{m \in \mathcal{M}^l} \pi_{mp}(x_{mp}),$$

так как соответствующие поддеревья имеют высоту N . Отсюда для любого $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^l$, $l \in \mathcal{A}^0$,

$$g^l(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^l(\mathbf{y})} \prod_{p \in \mathcal{P}^l} \prod_{m \in \mathcal{M}^l} \pi_{mp}(x_{mp}),$$

и для любого $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^0$

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^0(\mathbf{y})} \prod_{l \in \mathcal{A}^0} g^l(\boldsymbol{\alpha}_l) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^0(\mathbf{y})} \prod_{l \in \mathcal{A}^0} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^l(\boldsymbol{\alpha}_l)} \prod_{p \in \mathcal{P}^l} \prod_{m \in \mathcal{M}^l} \pi_{mp}(x_{mp}).$$

Состояние $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ сети с $N+1$ ярусами определяется состоянием всех ее подсетей \mathcal{D}^l , $l \in \mathcal{A}^0$:

$$\mathbf{x} = \left((x_{mp})_{m \in \mathcal{M}^1, p \in \mathcal{P}^1}, \dots, (x_{mp})_{m \in \mathcal{M}^{A^0}, p \in \mathcal{P}^{A^0}} \right)$$

и

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{x} \in \prod_{l \in \mathcal{A}^0} \mathcal{X}^l : c_0(\mathbf{y}^0(\mathbf{x})) \leq C_0 \right\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^0(\mathbf{y})} \prod_{l \in \mathcal{A}^0} g^l(\boldsymbol{\alpha}_l) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^0(\mathbf{y})} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \prod_{l \in \mathcal{A}^0} \mathcal{X}^l(\boldsymbol{\alpha}_l) \\ l \in \mathcal{A}^0}} \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{m \in \mathcal{M}} \pi_{mp}(x_{mp}) =$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}^0(y)} \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{m \in \mathcal{M}} \pi_{mp}(x_{mp}).$$

Просуммировав последнее соотношение по всем значениям $y \in \mathcal{Y}^0$, получим

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}^0} \sum_{\alpha \in A^0(y)} \prod_{l \in \mathcal{A}^0} g^l(\alpha_l) = \sum_{y \in \mathcal{Y}^0} \sum_{x \in \mathcal{X}^0(y)} \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{m \in \mathcal{M}} \pi_{mp}(x_{mp}) = G^0(\mathcal{X}),$$

что доказывает утверждение теоремы. ■

Таким образом, задача расчета нормирующей константы $G^0(\mathcal{X})$ сведена к вычислению значений функции $g^0(y)$ для всех $y \in \mathcal{Y}^0$. Рекурсивный алгоритм расчета функции $g^l(y)$ для $y \in \mathcal{Y}^l$ имеет следующий вид.

Алгоритм 2.1

-
- ```

1: $g \leftarrow 0$
2: если $\mathcal{A}^l = \emptyset$
3: то $g \leftarrow \prod_{p \in \mathcal{P}^l} \prod_{m \in \mathcal{M}^l} \pi_{mp}(y_m)$
4: иначе для всех $\alpha \in A^l(y)$ выполнять
5: $t \leftarrow 1$
6: для всех $j \in \mathcal{A}^l$ выполнять
7: $t \leftarrow t * g^j(\alpha_j)$
8: $g \leftarrow g + t$
9: возвратить g

```
- 

## 2.2. Модель отдельного звена

### 2.2.1. Построение модели

Рассмотрим сеть мультивещания, в которой для некоторого звена  $l^* \in \mathcal{L}$  выполняются соотношения

$$\sum_{s \in \mathcal{S}^{l^*}} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} > C_{l^*};$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}^l} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} \leq C_l, \quad l \in \mathcal{L} \setminus \{l^*\}.$$

Таким образом, все звенья, кроме звена  $l^*$ , имеют неограниченные ресурсы для обслуживания запросов пользователей. Такую сеть иногда называют сетью с выделенным звеном. Очевидно, что задача анализа блокировок в сети с выделенным звеном сводится к анализу сети, состоящей из одного звена  $\mathcal{L} = \{l^*\}$  и имеющей один источник рассылки, который предоставляет услуги из множества  $\mathcal{M} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}^{l^*}} \mathcal{M}_s$ . Для краткости

записи индексы  $l^*$  и  $s$  далее в этом разделе не используются.

Функционирование сети с выделенным звеном будем описывать с помощью многопотоковой мультисервисной системы массового обслуживания. На полнодоступную систему, состоящую из  $C = C_{l^*}$  приборов (единиц емкости звена сети) и не имеющую накопителя, поступают  $M = |\mathcal{M}|$  потоков заявок. Будем считать, что все поступающие потоки являются пуассоновскими и независимы в совокупности. Если на момент поступления заявки  $m$ -потока ( $m$ -заявки) в системе нет ни одной заявки этого потока, то поступившая заявка принимается при условии наличия  $b_m$  свободных приборов и занимает их на случайное время, распределенное экспоненциально с параметром  $\mu_m$  и не зависящее ни от длительности обслуживания заявок других потоков, ни от процессов поступления. Все поступившие в течение этого интервала времени  $m$ -заявки принимаются на обслуживания без выделения дополнительных приборов, а по истечении указанного интервала одновременно покидают систему и  $b_m$  приборов освобождаются. Потеря заявки происходит в том случае, если при ее поступлении в системе нет заявок того же потока, а также нет достаточного количества свободных приборов.

Для простоты будем рассматривать модель отдельного звена для случая дисциплины «прозрачного» обслуживания  $\Pi_1$ .

Обозначим  $\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m}$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  – интенсивности входящих

потоков. Параметры  $\rho_1, \dots, \rho_M$  связаны с интенсивностями потоков запросов пользователей на включение соответствующих логических путей в сети соотношением

$$\rho_m = \prod_{p \in \mathcal{P}^I}^* (1 + \rho_{mp}) - 1, \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.23)$$

Положим  $C = \infty$ , в этом случае все поступившие в систему заявки принимаются на обслуживание и потери отсутствуют. Пусть случайный процесс  $\{Y_m(t), t \geq 0\}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , находится в состоянии 1, если в момент времени  $t \geq 0$  в системе обслуживается хотя бы одна  $m$ -заявка, и в состоянии 0 в противном случае. Заметим, что процесс  $\{Y_m(t), t \geq 0\}$  является ОМП и имеет стационарное распределение

$$\pi_m(y_m) = P\{Y_m(t) = y_m\} = \frac{\rho_m^{y_m}}{1 + \rho_m}, \quad y_m \in \{0, 1\}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим составной случайный процесс

$$\{\tilde{Y}(t) = (Y_m(t))_{m \in \mathcal{M}}, t \geq 0\},$$

заданный на множестве  $\tilde{\mathcal{Y}} = \{0, 1\}^M$ . По построению этот процесс является ОМП на данном множестве и, как следует из формулы (2.24), имеет стационарное распределение

$$\tilde{\pi}(\mathbf{y}) = G^{-1}(\tilde{\mathcal{Y}}) \prod_{m=1}^M \rho_m^{y_m}, \quad \mathbf{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}, \quad (2.25)$$

где функция  $G(\Omega)$  для любого множества  $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{Y}}$  определяется соотношением

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{y} \in \Omega} \prod_{m=1}^M \rho_m^{y_m}. \quad (2.26)$$

Из (2.26) следует, что нормирующая константа  $G(\tilde{\mathcal{Y}})$  распределения вероятностей процесса  $\{\tilde{Y}(t), t \geq 0\}$  равна

$$G(\tilde{\mathcal{Y}}) = \prod_{m=1}^M (1 + \rho_m). \quad (2.27)$$

Процесс  $\{\tilde{Y}(t), t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\tilde{\mathcal{Y}}$  и распределением вероятностей (2.25) описывает состояние рассматриваемой системы при  $C = \infty$ . Пусть теперь  $C < \infty$  и, следовательно, возможны потери заявок. Будем считать, что потерянные заявки не оказывают влияние на интенсивность породившего их потока, то есть система функционирует с явными потерями. В этом случае функционирование системы описывает случайный процесс  $\{Y(t), t \geq 0\}$ , являющийся сужением процесса  $\{\tilde{Y}(t), t \geq 0\}$  на множество

$$\mathcal{Y} = \{y \in \tilde{\mathcal{Y}} : c(y) \leq C\}, \quad (2.28)$$

где  $c(y) = \sum_{m=1}^M b_m y_m$  – число занятых приборов системы в состоянии  $y \in \mathcal{Y}$ . Как сужение обратимого процесса  $Y(t)$  также обратим, и, следовательно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{Y(t), t \geq 0\}$  имеет мультипликативный вид

$$\pi(y) = G^{-1}(\mathcal{Y}) \prod_{m=1}^M \rho_m^{y_m}, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad (2.29)$$

где  $G(\mathcal{Y})$  – нормирующая константа:

$$G(\mathcal{Y}) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \prod_{m=1}^M \rho_m^{y_m}. \quad (2.30)$$

Пространство состояний (2.28) отдельного звена сети мультивещания в простейшем случае можно изобразить графически. Оно представляет собой подмножество множества вершин  $M$ -мерного куба с ребрами единичной длины, одна из вершин которого расположена в начале координат, а смежные с ней ребра направлены вдоль положительных полуосей. Пространство  $\mathcal{Y}$  для случая  $M = 3$ ;  $b_m \leq C$ ,  $m \in \mathcal{M}$ ;  $b_1 + b_2 \leq C$ ;  $b_i + b_j > C$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 3$  показано на рис. 2.10.

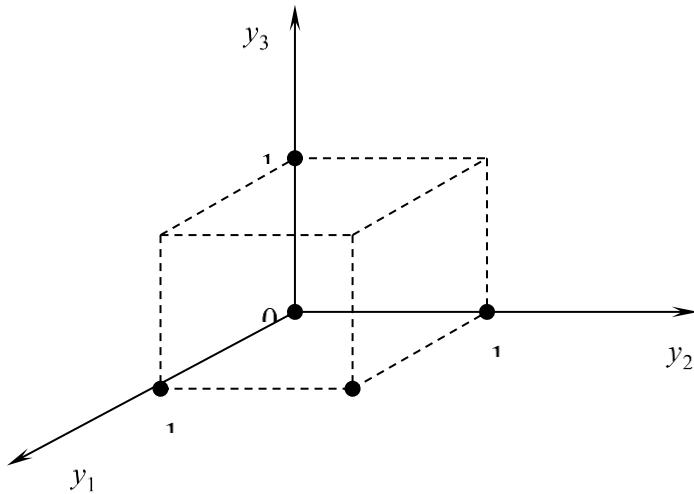


Рис. 2.10. Вид пространства  $\mathcal{Y}$  для случая  $M = 3$ .

### 2.2.2. Вероятностные характеристики

Как и для сети в целом, ряд макрохарактеристик отдельного звена могут быть выражены с использованием функции  $G(\Omega)$  от соответствующего подмножества пространства состояний посредством соотношения (2.8). К таким характеристикам относятся вероятность потери заявок, вероятность того, что  $m$ -заявка находится в системе и вероятность того, что  $m$ -заявок в системе нет, но если такая заявка поступит, то будет принята на обслуживание. Напомним, что условием потери заявки помимо недостаточного числа свободных приборов является отсутствие в системе заявок данного потока. Следовательно, множество потерь  $m$ -заявок имеет вид

$$\mathcal{B}_m = \{y \in \mathcal{Y} : c(y) + b_m > C, y_m = 0\} \quad (2.31)$$

Множество таких состояний, что  $m$ -заявка находится в системе, имеет вид

$$\mathcal{F}_m = \{y \in \mathcal{Y} : y_m = 1\}, \quad (2.32)$$

тогда как множество таких состояний, что  $m$ -заявок в системе нет, но если заявка поступит, то будет принята на обслуживание, принимает вид

$$\mathcal{H}_m = \{y \in \mathcal{Y} : c(y) + b_m \leq C, y_m = 0\}. \quad (2.33)$$

Физический смысл первого события состоит в том, что соответствующие  $m$ -услуге данные передаются через рассматриваемое звено. Во втором случае  $m$ -услуга через звено не предоставляется, но ресурсов достаточно, чтобы по запросу пользователя инициировать ее предоставление.

Легко видеть, что и здесь для любого  $m=1,\dots,M$  система множеств  $\mathcal{B}_m$ ,  $\mathcal{F}_m$ ,  $\mathcal{H}_m$  является разбиением пространства состояний  $\mathcal{Y}$ . Следовательно, вероятности данных событий связаны соотношением

$$B_m + F_m + H_m = 1.$$

Устанавливающие дополнительную связь между этими вероятностями лемма 2.2 и следствие из нее доказываются аналогично доказательствам соответствующих утверждений из раздела 2.1.3.

Лемма 2.2. Для любого  $m=1,\dots,M$  выполняется соотношение

$$F_m = \rho_m H_m. \quad (2.34)$$

Следствие. Для любого  $m=1,\dots,M$  верно соотношение

$$F_m = \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} (1 - B_m). \quad (2.35)$$

При анализе отдельного звена сети мультивещания интерес представляет характеристика СВ  $\gamma$ , принимающей значение  $c(y)$ . Заметим, что  $\gamma$  является случайной величиной занятых приборов в рассматриваемой системе и соответствует случайному числу занятых единиц емкости звена сети. Если за единицу емкости принять величину одной передаточной единицы, то  $\gamma$  представляет собой СВ ширины полосы пропускания, занятой на звене сети при обслуживании установленных через него соединений. Среднее значение занятой ШПП, то есть среднее число занятых приборов в рассматриваемой модели, можно найти как математическое ожидание  $c^{(1)}$  СВ  $\gamma$ , а именно

$$c^{(1)} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} c(\mathbf{y}) \pi(\mathbf{y}). \quad (2.36)$$

При этом величина  $\frac{c^{(1)}}{C}$  представляет собой коэффициент использования звена.

Лемма 2.3. Для нахождения среднего числа занятых приборов применима формула

$$c^{(1)} = \sum_{m=1}^M b_m F_m. \quad (2.37)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M b_m F_m &= \sum_{m=1}^M b_m \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}_m} \pi(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^M b_m \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}_m} y_m \pi(\mathbf{y}) = \\ &= \sum_{m=1}^M b_m \left( \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}_m} y_m \pi(\mathbf{y}) + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{F}_m} y_m \pi(\mathbf{y}) \right) = \\ &= \sum_{m=1}^M b_m \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} y_m \pi(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \pi(\mathbf{y}) \sum_{m=1}^M b_m y_m = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} c(\mathbf{y}) \pi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

■

Утверждение следующей леммы вытекает из соотношений (2.14) и (2.37).

Лемма 2.4. Среднее число занятых приборов в системе выражается формулой

$$c^{(1)} = \sum_{m=1}^M b_m \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} (1 - B_m). \quad (2.38)$$

Необходимо заметить, что вычисление введенных вероятностных характеристик непосредственно по представленным формулам представляет собой непростую задачу, поскольку подразумевает перебор всего пространства состояний  $\mathcal{Y}$ , имеющего комбинаторный характер и, при решении практических задач, большую размерность. В следующем пункте мы рассмотрим более эффективный метод численного анализа исследуемой системы, называемый алгоритмом Гайдамака-Самуйлова.

### 2.2.3. Алгоритм свертки

Для вывода алгоритма расчета вероятностных характеристик отдельного звена сети мультивещания прежде всего необходимо исследовать свойства множества  $\mathcal{Y}$  и получить алгоритм для расчета нормирующей константы  $G(\mathcal{Y})$ .

Введем для  $m \in \mathcal{M}$  и  $n = 0, \dots, C$  множества

$$\mathcal{Y}(m, n) = \left\{ \mathbf{y}(m) = (y_1, \dots, y_m) : c(\mathbf{y}(m)) = n \right\}.$$

Доопределим данную систему множеств для значений  $m = 0$  и  $n < 0$  следующим образом:

$$\mathcal{Y}(m, n) = \begin{cases} \mathcal{Y}(m, n), m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, C; \\ \{0\}, m = 0, \dots, M, n = 0; \\ \emptyset, m = 0, n = 1, \dots, C; \\ \emptyset, m = 0, \dots, M, n < 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

По построению множества  $\mathcal{Y}(m, n)$  удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{Y}(m, n) \cap \mathcal{Y}(m, \tilde{n}) = \emptyset, n \neq \tilde{n},$$

для любого  $m = 0, \dots, M$  и

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{n=0}^C \mathcal{Y}(M, n).$$

Для всех  $m = 1, \dots, M$  и  $n = 1, \dots, C$  множество  $\mathcal{Y}(m, n)$  представимо в виде

$$\mathcal{Y}(m, n) = \mathcal{Y}(m-1, n) \times \{0\} \cup \mathcal{Y}(m-1, n - b_m) \times \{1\}. \quad (2.40)$$

Введем функцию

$$g(m, n) = \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(m, n)} \prod_{i=1}^m \rho_i^{y_i}$$

и заметим, что

$$G(\mathcal{Y}) = \sum_{n=0}^C g(M, n). \quad (2.41)$$

Лемма 2.5. Функцию  $g(m, n)$  можно вычислить по формуле

$$g(m,n) = \begin{cases} 0, & m=0, n=1, \dots, C; \\ 0, & m=0, \dots, M, n < 0; \\ 1, & m=0, \dots, M, n=0; \\ g(m-1,n) + \rho_m g(m-1,n-b_m), & m=1, \dots, M, \\ & n=1, \dots, C. \end{cases} \quad (2.42)$$

Доказательство. Первые три строки формулы очевидным образом следуют из (2.39). Докажем утверждение четвертой строки. В силу (2.40) имеем:

$$\begin{aligned} g(m,n) &= \sum_{y(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} \prod_{i=1}^m \rho_i^{y_i} = \\ &= \sum_{y(m) \in \mathcal{Y}(m-1,n) \times \{0\}} \prod_{i=1}^m \rho_i^{y_i} + \sum_{y(m) \in \mathcal{Y}(m-1,n-b_k) \times \{1\}} \prod_{i=1}^m \rho_i^{y_i} = \\ &= \sum_{y(m-1) \in \mathcal{Y}(m-1,n)} \prod_{i=1}^m \rho_i^{y_i} + \left( \sum_{y(m-1) \in \mathcal{Y}(m-1,n-b_m)} \prod_{i=1}^m \rho_i^{y_i} \right) \rho_m = \\ &= g(m-1,n) + \rho_m g(m-1,n-b_k). \end{aligned}$$

■

Лемма 2.5 и формула (2.41) определяют алгоритм для расчета нормирующей константы  $G(\mathcal{Y})$ . Вывод формул для расчета вероятностных характеристик проведем для услуги с номером  $M$ . Это не ограничивает общности, поскольку всегда можно перенумеровать услуги и после перенумерации провести необходимые вычисления.

Теорема 2.4. Вероятностные характеристики  $B_M$ ,  $F_M$ ,  $H_M$  и  $c^{(1)}$  звена сети мультивещания вычисляются по формулам

$$B_M = \left( \sum_{n=0}^C g(M,n) \right)^{-1} \sum_{n=C-b_M+1}^C g(M-1,n). \quad (2.43)$$

$$F_M = \left( \sum_{n=0}^C g(M,n) \right)^{-1} \rho_M \sum_{n=0}^{C-b_M} g(M-1,n), \quad (2.44)$$

$$H_M = \left( \sum_{n=0}^C g(M,n) \right)^{-1} \sum_{n=0}^{C-b_M} g(M-1,n), \quad (2.45)$$

$$c^{(1)} = \left( \sum_{n=0}^C g(M, n) \right)^{-1} \sum_{n=1}^C n g(M, n). \quad (2.46)$$

Доказательство. Ограничимся доказательством формулы (2.43), остальные формулы теоремы доказываются аналогично. Множество блокировок представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_M &= \left\{ \mathbf{y} \in \tilde{\mathcal{Y}} : C - b_M + 1 \leq c(\mathbf{y}) \leq C, y_M = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{y}(M-1) : C - b_M + 1 \leq c(\mathbf{y}(M-1)) \leq C \right\} \times \{0\} \stackrel{\text{not}}{=} \hat{\mathcal{Y}}(M-1) \times \{0\}, \end{aligned}$$

отсюда, с использованием введенного обозначения,

$$G(\mathcal{B}_M) = \sum_{\mathbf{y}(M-1) \in \hat{\mathcal{Y}}(M-1)} \prod_{i=1}^{M-1} \rho_i^{y_i} \cdot 1 = \sum_{n=C-b_M+1}^C g(M-1, n).$$

Из формул (2.8) и (2.41) следует (2.43). ■

Формулы (2.41)–(2.46) определяют эффективный алгоритм расчета вероятностных характеристик отдельного звена сети мультивещания.

## 3. ЭЛАСТИЧНЫЙ ТРАФИК

### 3.1. Мультисервисная модель с эластичным трафиком

#### 3.1.1. Построение модели

Основной целью данного раздела является построение мультисервисной модели звена сети с эластичным трафиком и различными гарантированными порогами. В рассматриваемой ниже модели блоки данных разных типов характеризуются не только различными интенсивностями поступления и средними длинами, но и отличными гарантированными порогами – минимальными требованиями к числу ЕКР звена сети.

Рассматривается звено сети с  $C$  ЕКР (единиц канального ресурса), по которому передаются блоки эластичных данных  $\mathcal{K}_e = \{1, \dots, K_e\}$  типов. Нагрузочными параметрами системы являются  $\lambda_e = (\lambda_1^e, \dots, \lambda_{K_e}^e)$ ,  $\mu_e = (\mu_1^e, \dots, \mu_{K_e}^e)$ ,  $b_e := (b_1^e, \dots, b_{K_e}^e)$ . Без ограничения общности можно считать, что  $b_1^e < \dots < b_{K_e}^e$ , поскольку всегда можно отсортировать типы блоков данных по неубыванию соответствующих гарантированных порогов, а затем, как отмечено ниже, объединить входящие потоки с одинаковыми  $b_k^e$ ,  $k \in \mathcal{K}_e$ . Блоки эластичных данных разделяют все ресурсы звена с дисциплиной PS (Processor Sharing).

Остановимся подробнее на механизме управления доступом блока эластичных данных к ресурсам звена. Принятие на обслуживание запроса на передачу блока  $k$ -типа зависит не только от гарантированного порога  $b_k^e$ , но и от текущего состояния звена, а именно от максимального из гарантированных порогов блоков, которые передаются по звену на момент поступления запроса. Возможны три ситуации.

Запрос будет принят и максимальный порог не будет изменен. Ситуация возможна, когда по звену уже передаются блоки данных с индексом большим или равным  $k$ , а на звене достаточно ресурсов, чтобы обеспечить принимаемому блоку  $k$ -типа число

ЕКР, которых больше или равно текущему максимальному порогу, большему  $b_k^e$ .

Запрос будет принят и максимальный порог будет изменен. Ситуация возможна, когда по звену передаются блоки данных с индексом меньшим  $k$ , а на звене достаточно ресурсов, чтобы обеспечить всем уже передаваемым блокам данных и принимающему блоку  $k$ -типа число ЕКР, которых больше или равно  $b_k^e$  – новому значению максимального порога,  $k \in \mathcal{K}_e$ .

Запрос будет заблокирован в остальных случаях, не оказывая дополнительного влияния на интенсивность породившего его пуассоновского потока.

Функционирование рассматриваемой системы описывает составной марковский СП

$$\left\{ N_e(t) := (N_1^e(t), \dots, N_{K_e}^e(t)), t \geq 0 \right\} \quad (3.1)$$

над пространством состояний

$$\mathcal{X}_e := \left\{ \mathbf{n}_e := (n_1^e, \dots, n_{K_e}^e) \in \prod_{k \in \mathcal{K}_e} \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor \right\} : c_e(\mathbf{n}_e) \leq C \right\}, \quad (3.2)$$

где  $c_e(\mathbf{n}_e) := b(\mathbf{n}_e) \cdot n_\bullet^e$  – минимальное число ЕКР, занятых эластичным трафиком в состоянии  $\mathbf{n}_e$ , а  $b(\mathbf{n}_e) := \max_{k \in \mathcal{K}_e: n_k^e > 0} \{b_k^e\}$  – максимальный из гарантированных порогов блоков данных, которые передаются по звену в состоянии  $\mathbf{n}_e$ .

Исследуемую систему в обозначениях Башарина-Кендалла кодируем как

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{M} & \mathbf{M} & C & 0 & \text{PS} & f_e, \\ \lambda_e, b_e & \mu_e & & & & \end{array}$$

где

$$f_k^e(\mathbf{n}_e) := \begin{cases} 1, & c_e(\mathbf{n}_e + e_k(K_e)) \leq C, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e, k \in \mathcal{K}_e.$$

Основными ВВХ модели с эластичным трафиком и гарантированными порогами являются:

- вероятность  $B_k^e := P\{\mathbf{n}_e \in \mathcal{B}_k^e\}$  блокировки запроса на передачу блока эластичных данных  $k$ -типа, где  $\mathcal{B}_k^e := \{\mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : c_e(\mathbf{n}_e + \mathbf{e}_k(K_e)) > C\}$ ,  $k \in \mathcal{K}_e$ ;
- среднее время  $T_k^e$  передачи блока эластичных данных  $k$ -типа,  $k \in \mathcal{K}_e$ .

Пример 3.1. Поясним основные принципы функционирования системы на примере (см. рис. 3.1а и рис. 3.1б). Пусть  $C = 6$ ,  $K_e = 2$ ,  $b_1^e = 1$ ,  $b_2^e = 2$ . Предположим, что система находится в состоянии  $(n_1^e, n_2^e) = (2, 1)$ . Поскольку по звену передается блок 2-типа с порогом  $b_2^e = 2$ , этот порог и определяет минимальное число ЕКР, отводимое каждому блоку данных в отдельности – как блоку 2-типа, так и блоку 1-типа. В момент  $t_1$  поступает запрос 1-типа, который блокируется из-за нехватки 2 ЕКР для его обслуживания. Через некоторое время в момент  $t_2$  завершается передача блока 2-типа, происходит перераспределение ресурсов звена, и каждый из оставшихся блоков 1-типа получает по 3 ЕКР. Затем поступивший в момент  $t_3$  запрос 1-типа принимается на обслуживание, и система переходит в состояние  $(3, 0)$ . Наконец, в момент  $t_4$  поступает запрос 2-типа, но поскольку для передачи трех блоков 1-типа и одного блока 2-типа необходимо как минимум 8 ЕКР, запрос будет заблокирован. Для рассмотренных исходных данных на рис. 3.2 изображены пространство  $\mathcal{X}_e$  состояний и множества  $\mathcal{B}_k^e$ ,  $k = 1, 2$  блокировок.

Пример 3.2. Для трех типов блоков эластичных данных  $K_e = 3$  пространство состояний имеет структуру, показанную на рис. 3.3. Составив диаграмму интенсивностей переходов, как это сделано на рис. 3.4, можно получить СУР в виде

$$\begin{aligned}
& p_e(\mathbf{n}_e) \cdot \left( \sum_{k \in \mathcal{K}_e} \lambda_k^e \cdot 1\{\mathbf{n}_e \notin \mathcal{B}_k^e\} + \frac{C}{n_\bullet^e} \sum_{k \in \mathcal{K}_e} n_k^e \mu_k^e \right) = \\
&= \sum_{k \in \mathcal{K}_e} p_e(\mathbf{n}_e - \mathbf{e}_k(K_e)) \cdot \lambda_k^e \cdot 1\{n_k^e > 0\} + \\
&+ \frac{C}{n_\bullet^e + 1} \sum_{k \in \mathcal{K}_e} p_e(\mathbf{n}_e + \mathbf{e}_k(K_e)) \cdot (n_k^e + 1) \mu_k^e \cdot 1\{\mathbf{n}_e \notin \mathcal{B}_k^e\}, \quad \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Можно показать, что СП (3.1) является обратимым марковским СП со стационарным распределением вероятностей состояний

$$p_e(\mathbf{n}_e) = G_e^{-1} \cdot n_\bullet^e! \prod_{k \in \mathcal{K}_e} \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!}, \quad \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e, \tag{3.5}$$

где  $G_e := p_e^{-1}(\theta)$  – нормирующая константа.

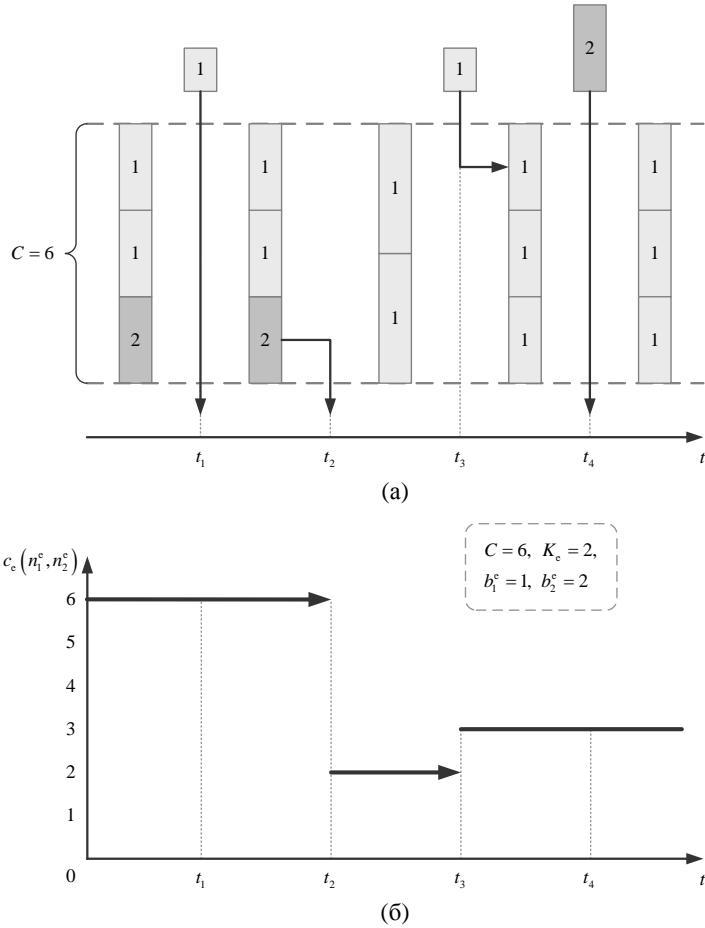


Рис. 3.1. Разделение ресурсов звена блоками эластичных данных  
(а) и минимальное число ЕКР, занятых эластичным трафиком (б)

Зная распределение  $p_e(\mathbf{n}_e)$ ,  $\mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e$  можно вычислить по формуле Литтла среднее время  $T_k^e$

$$T_k^e = \frac{\sum_{n_e \in \mathcal{X}_e} n_k^e \cdot p_e(\mathbf{n}_e)}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)}, \quad k \in \mathcal{K}_e. \quad (3.6)$$

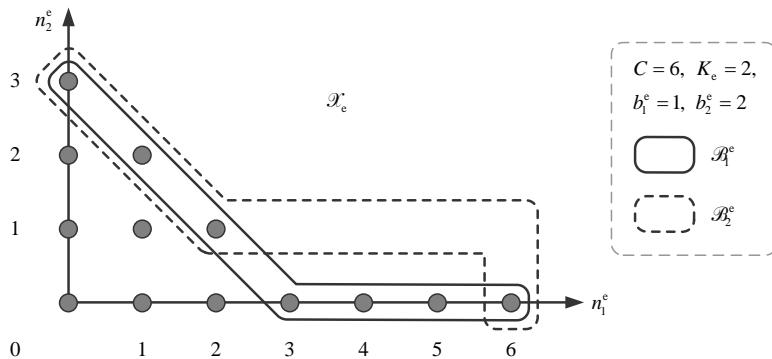


Рис. 3.2. Пространство состояний модели и множества блокировок блоков эластичных данных при  $K_e = 2$

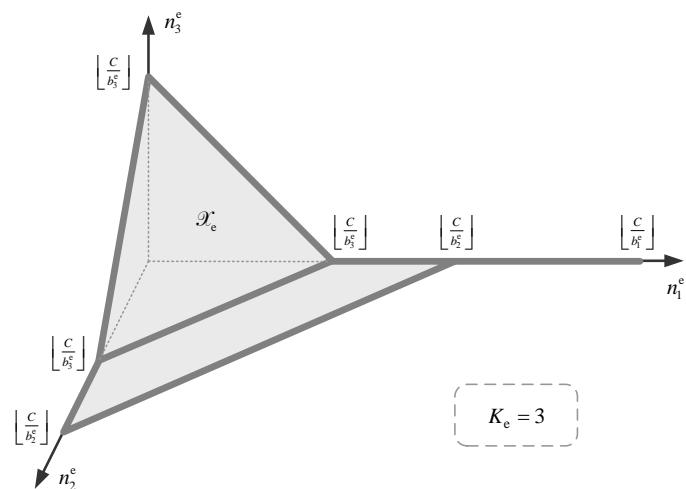


Рис. 3.3. Пространство состояний модели при  $K_e = 3$

Таким образом, в данном разделе построена мультисервисная модель звена сети с эластичным трафиком и различными гарантированными порогами. Формулы для расчета ее BBX известны, но вычисления по ним трудоемки, поэтому необходима разработка эффективного, снижающего сложность вычисления, алгоритма расчета нормирующей константы, вероятностей

блокировок и средних времен передачи блоков данных, что сделано в следующем разделе учебного пособия.

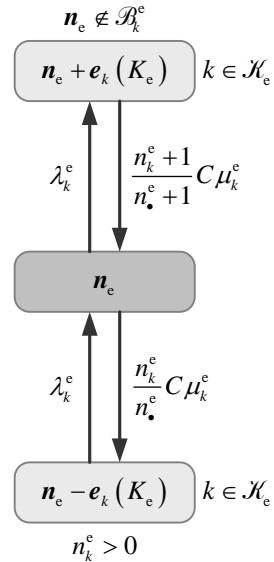


Рис. 3.4. Диаграмма интенсивностей переходов СП  $N_e(t)$

Значительно сократить сложность вычисления вероятностных характеристик моделей с мультиплексивным решением, в том числе нормирующей константы, позволяет известный подход, основанный на получении рекуррентных зависимостей между ненормированными вероятностями укрупненных состояний – макросостояний – системы. В классической математической теории телетрафика это метод Кауфмана – Робертса для мультисервисной модели Эрланга с явными потерями, или, в терминологии учебного пособия, для модели с одноадресным трафиком. Здесь в качестве макросостояния выступает число ЕКР звена сети, занятых одноадресными соединениями.

### 3.1.2. Разбиение пространства состояний модели

Для рассматриваемой в данной главе мультисервисной модели с эластичным трафиком и гарантированными порогами

традиционное разбиение пространства состояний по числу занятых ЕКР звена сети явно не подходит. Также оказывается не достаточно детальным макросостояние как суммарное число  $n_\bullet^e = n$  передаваемых блоков данных, ввиду невозможности расчета вероятностей блокировок, поэтому оно было дополнено значением  $b(\mathbf{n}_e) = b_m^e$  максимального гарантированного порога. Следовательно, разобьем пространство состояний (3.2) модели следующим образом

$$\mathcal{X}_e = \left\{ \mathbf{0}^{K_e} \right\} \bigcup_{m \in \mathcal{K}_e} \bigcup_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \mathcal{X}_e(m, n), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_e(m, n) &:= \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : b(\mathbf{n}_e) = b_m^e, n_\bullet^e = n \right\}, \\ n &= 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, m \in \mathcal{K}_e. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Утверждение 3.1. Пусть пространство состояний модели с эластичным трафиком и гарантированными порогами разбито на подмножества согласно формулам (3.7) и (3.8), тогда множества блокировок блоков эластичных данных имеют вид

$$\mathcal{B}_k^e = \bigcup_{m=1}^{k-1} \bigcup_{n=\lfloor C/b_k^e \rfloor}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \mathcal{X}_e(m, n) \bigcup_{m=k}^{K_e} \mathcal{X}_e\left(m, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor\right), \quad k \in \mathcal{K}_e. \quad (3.9)$$

Доказательство. Определение (3.3) для множества  $\mathcal{B}_k^e$  блокировок блоков данных перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k^e &= \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : \max \left\{ b(\mathbf{n}_e), b_k^e \right\} \cdot (n_\bullet^e + 1) > C \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : b_k^e \cdot (n_\bullet^e + 1) > C, b(\mathbf{n}_e) < b_k^e \right\} \cup \\ &\quad \bigcup \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : b(\mathbf{n}_e) \cdot (n_\bullet^e + 1) > C, b(\mathbf{n}_e) \geq b_k^e \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_\bullet^e > \left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor - 1, b(\mathbf{n}_e) < b_k^e \right\} \cup \\ &\quad \bigcup \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_\bullet^e > \left\lfloor \frac{C}{b(\mathbf{n}_e)} \right\rfloor - 1, b(\mathbf{n}_e) \geq b_k^e \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{m=1}^{k-1} \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_\bullet^e \geq \left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor, b(\mathbf{n}_e) = b_m^e \right\} \bigcup \\
& \bigcup_{m=k}^{K_e} \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_\bullet^e \geq \left\lfloor \frac{C}{b(\mathbf{n}_e)} \right\rfloor, b(\mathbf{n}_e) = b_m^e \right\} = \\
& = \bigcup_{m=1}^{k-1} \bigcup_{n=\left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor} \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_\bullet^e = n, b(\mathbf{n}_e) = b_m^e \right\} \bigcup \\
& \bigcup_{m=k}^{K_e} \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_\bullet^e = \left\lfloor \frac{C}{b(\mathbf{n}_e)} \right\rfloor, b(\mathbf{n}_e) = b_m^e \right\}, k \in \mathcal{K}_e.
\end{aligned}$$

Из определения (3.8) для подмножества  $\mathcal{X}_e(m, n)$  получаем формулу (3.9). Утверждение доказано. ■

Замечание 3.1. Графически разбиение (3.7)–(3.8) пространства  $\mathcal{X}_e$  состояний и соответствующее множество  $\mathcal{B}_k^e$  блокировок можно проиллюстрировать при помощи схемы, изображенной на рис. 3.5.

Введем дополнительные обозначения. Пусть  $\mathbf{n}_e(m) := (n_1^e, \dots, n_m^e)$  состояние блоков данных первых  $m$  типов,  $n_\bullet^e(m) := \sum_{k=1}^m n_k^e$  суммарное число передаваемых блоков данных в состоянии  $\mathbf{n}_e(m)$ ,  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) : \mathbf{a}_1 \in \mathcal{A}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{A}_2\}$  декартово произведение множеств  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A} + \mathbf{a}_0 := \{\mathbf{a} + \mathbf{a}_0 : \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$  операция сдвига множества  $\mathcal{A}$  на вектор  $\mathbf{a}_0$ .

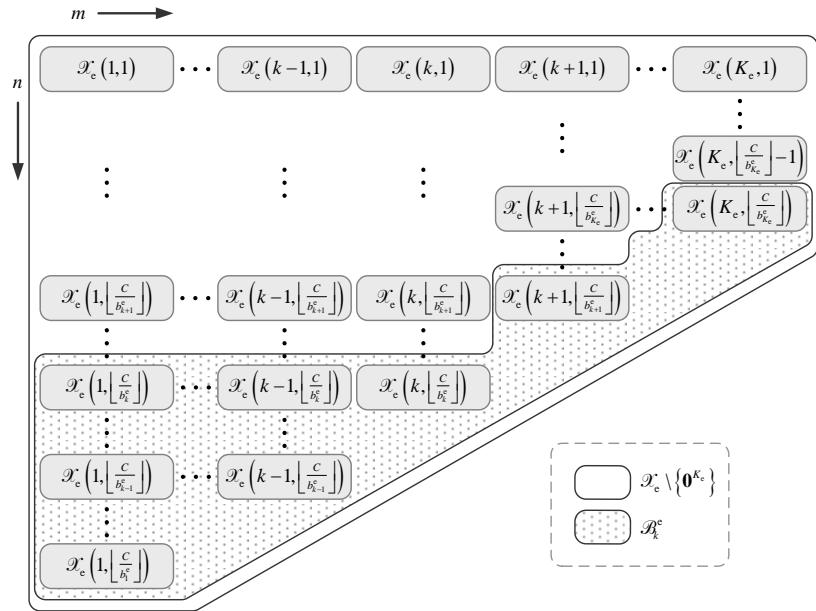


Рис. 3.5. Компоненты множества блокировок блоков эластичных данных

Из определения (3.8) подмножества  $\mathcal{X}_e(m, n)$  следует, что

$$\mathcal{X}_e(m, n) = \left\{ \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e : n_m^e > 0, n_{m+1}^e = \dots = n_{K_e}^e = 0, n_\bullet^e = n \right\},$$

$$n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e,$$

поэтому  $\mathcal{X}_e(m, n)$  запишем в виде

$$\mathcal{X}_e(m, n) = \mathcal{Y}(m, n) \times \left\{ \mathbf{0}^{K_e - m} \right\}, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(m, n) &= \left\{ \mathbf{n}_e(m) : \mathbf{n}_e \in \mathcal{X}_e(m, n) \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{n}_e(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e > 0, n_\bullet^e(m) = n \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e.$$

Заметим также, что

$$\mathcal{X}_e(K_e, n) \equiv \mathcal{Y}(K_e, n), \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_{K_e}^e} \right\rfloor. \quad (3.12)$$

### 3.1.3. Свойства подмножеств пространства состояний

Определяемые формулой (3.11) «усеченные» подмножества  $\mathcal{Y}(m, n)$  обладают рядом полезных свойств, сформулированных в лемме 3.1, и которые ниже будут использованы для вывода рекуррентного алгоритма для расчета ВВХ модели с эластичным трафиком и гарантированными порогами.

Лемма 3.1. Подмножества  $\mathcal{Y}(m, n)$ ,  $n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor$ ,  $m \in \mathcal{K}_e$ , обладают следующими свойствами:

$$1) \quad \mathcal{Y}(m, 1) = \left\{ (\mathbf{0}^{m-1}, 1) \right\}, \quad m \in \mathcal{K}_e; \quad (3.13)$$

$$2) \quad \mathcal{Y}(1, n) = \{n\}, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor; \quad (3.14)$$

$$3) \quad \mathcal{Y}(m, n) = \mathcal{Y}_-(m, n) \cup [\mathcal{Y}(m, n-1) + \mathbf{e}_j(m)], \quad (3.15)$$

$$j = 1, \dots, m-1, \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e \setminus \{1\},$$

$$\text{где } \mathcal{Y}_-(m, n) := \{ \mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m, n) : n_j = 0 \};$$

$$4) \quad \mathcal{Y}(m, n) = \bigcup_{j=1}^m [\mathcal{Y}(j, n-1) \times \{\mathbf{0}^{m-j}\} + \mathbf{e}_m(m)], \quad (3.16)$$

$$n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e.$$

Доказательство. Доказательство леммы следует из определения (3.11) для подмножеств  $\mathcal{Y}(m, n)$ .

1)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(m, 1) &= \{ \mathbf{n}_e(m) : n_k^e = 0, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad n_m^e = 1, \quad n_\bullet^e(m) = 1 \} = \\ &= \left\{ (\mathbf{0}^{m-1}, 1) \right\}, \quad m \in \mathcal{K}_e. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}(1, n) &= \left\{ \mathbf{n}_e(1) : n_1^e > 0, n_\bullet^e(1) = n \right\} = \{n\}, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor. \\
3) \quad \mathcal{Y}(m, n) &= \left\{ \mathbf{n}_e(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e > 0, n_\bullet^e(m) = n, n_j^e = 0 \right\} \cup \\
&\cup \left\{ \mathbf{n}_e(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e > 0, n_\bullet^e(m) = n, n_j^e > 0 \right\} = \\
&= \mathcal{Y}_j(m, n) \cup \\
&\cup \left\{ \mathbf{n}_e(m) + \mathbf{e}_j(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e > 0, n_\bullet^e(m) = n-1 \right\} = \\
&= \mathcal{Y}_j(m, n) \cup [\mathcal{Y}(m, n-1) + \mathbf{e}_j(m)], \quad j = 1, \dots, m-1, n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \\
&m \in \mathcal{K}_e \setminus \{1\}. \\
4) \quad \mathcal{Y}(m, n) &= \left\{ \mathbf{n}_e(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e = 1, n_\bullet^e(m) = n \right\} \cup \\
&\cup \left\{ \mathbf{n}_e(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e > 1, n_\bullet^e(m) = n \right\} = \\
&= \left\{ \mathbf{n}_e(m) + \mathbf{e}_m(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e = 0, n_\bullet^e(m) = n-1 \right\} \cup \\
&\cup \left\{ \mathbf{n}_e(m) + \mathbf{e}_m(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, m-1, n_m^e > 0, n_\bullet^e(m) = n-1 \right\} = \\
&= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ \mathbf{n}_e(m) + \mathbf{e}_m(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, j-1, n_j^e > 0, n_k^e = 0, \right. \\
&\quad \left. n_\bullet^e(m) = n-1 \right\} \cup [\mathcal{Y}(m, n-1) + \mathbf{e}_m(m)] = \\
&= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ (\mathbf{n}_e(j), \mathbf{0}^{m-j}) + \mathbf{e}_m(m) : n_k^e \geq 0, k = 1, \dots, j-1, n_j^e > 0, \right. \\
&\quad \left. n_\bullet^e(j) = n-1 \right\} \cup [\mathcal{Y}(m, n-1) + \mathbf{e}_m(m)] = \\
&= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left( \mathcal{Y}(j, n-1) \times \{(\mathbf{0}^{m-j-1}, 1)\} \right) \cup [\mathcal{Y}(m, n-1) + \mathbf{e}_m(m)] = \\
&= \bigcup_{j=1}^m \left[ (\mathcal{Y}(j, n-1) \times \{(\mathbf{0}^{m-j})\}) + \mathbf{e}_m(m) \right], \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Пример 3.3. На примере проиллюстрируем свойства 3) и 4) леммы 3.1. Пусть  $C = 6$ ,  $K_e = 2$ ,  $b_1^e = 1$ ,  $b_2^e = 2$ , тогда подмножество  $\mathcal{Y}(2,3)$  можно получить двумя способами – при помощи сдвига соответствующих множеств направо – см. рис. 3.6 (а) – и сдвига вверх – см. рис. 3.6 (б), т. е.

$$\mathcal{Y}(2,3) = \mathcal{Y}_-(2,3) \cup [\mathcal{Y}(2,2) + (1,0)],$$

$$\mathcal{Y}(2,3) = [\mathcal{Y}(1,2) \times \{0\} + (0,1)] \cup [\mathcal{Y}(2,2) + (0,1)].$$

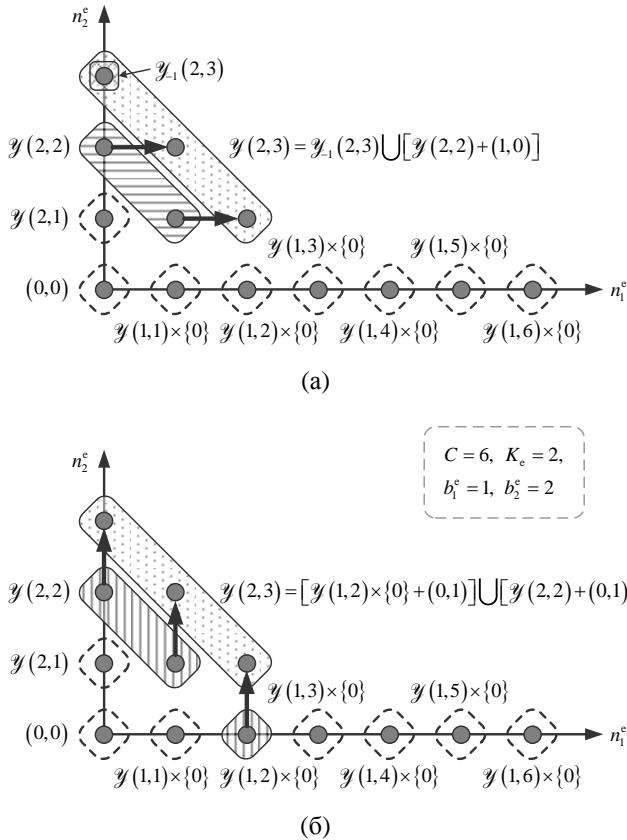


Рис. 3.6. Свойства 3) (а) и свойства 4) (б) подмножеств  $\mathcal{Y}(m,n)$

### 3.1.4. Свойства ненормированных вероятностей состояний

В доказательстве рекуррентного алгоритма для расчета BBX исследуемой модели также используются ненормированные вероятности ее состояний, а именно вероятности  $h(\mathbf{n}_e(m))$  того, что блоки эластичных данных первых  $m$  типов находятся в состоянии  $\mathbf{n}_e(m)$ :

$$h(\mathbf{n}_e(m)) = \begin{cases} n_e^e(m)! \prod_{k=1}^m \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!}, & n_k \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad m \in \mathcal{K}_e, \\ 0, & \exists k = 1, \dots, m: n_k < 0, \quad m \in \mathcal{K}_e. \end{cases} \quad (3.17)$$

Очевидно, что стационарные вероятности (3.5) состояний модели связаны с ненормированными вероятностями (3.17) соотношением

$$p_e(\mathbf{n}_e) = G_e^{-1} \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)), \quad \mathbf{n}_e \equiv \mathbf{n}_e(K_e) \in \mathcal{X}_e. \quad (3.18)$$

В лемме 3.2 сформулированы свойства ненормированных вероятностей  $h(\mathbf{n}_e(m))$ .

Лемма 3.2. Ненормированные вероятности  $h(\mathbf{n}_e(m))$ ,  $m \in \mathcal{K}_e$  обладают следующими свойствами:

$$1) \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,1)} h(\mathbf{n}_e(m)) = a_m, \quad m \in \mathcal{K}_e; \quad (3.19)$$

$$2) \sum_{\mathbf{n}_e(1) \in \mathcal{Y}(1,n)} h(\mathbf{n}_e(1)) = a_1^n, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor; \quad (3.20)$$

$$3) \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n_1) \cup \mathcal{Y}(m,n_2)} h(\mathbf{n}_e(m)) = \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n_1)} h(\mathbf{n}_e(m)) + \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n_2)} h(\mathbf{n}_e(m)), \quad n_1 \neq n_2 = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e;$$

$$4) \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n) + e_j(m)} h(\mathbf{n}_e(m) - e_j(m)) = \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m)), \quad (3.22)$$

$$j = 1, \dots, m, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e;$$

$$5) \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(j,n) \times \{\mathbf{0}^{m-j}\}} h(\mathbf{n}_e(m)) = \sum_{\mathbf{n}_e(j) \in \mathcal{Y}(j,n)} h(\mathbf{n}_e(j)), \quad (3.23)$$

$$j = 1, \dots, m, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e.$$

Доказательство. Доказательство леммы следует из определения (3.17) для ненормированных вероятностей  $h(\mathbf{n}_e(m))$  и из свойств 1), 2) леммы 3.1.

1) По свойству 1) леммы 3.1 для множеств  $\mathcal{Y}(m,n)$  – формула (3.13):

$$\sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,1)} h(\mathbf{n}_e(m)) = \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \{\mathbf{0}^{m-1}, 1\}} h(\mathbf{n}_e(m)) = a_m, \quad m \in \mathcal{K}_e.$$

2) По свойству 2) леммы 3.1 для множеств  $\mathcal{Y}(m,n)$  – формула (3.14):

$$\sum_{\mathbf{n}_e(1) \in \mathcal{Y}(1,n)} h(\mathbf{n}_e(1)) = h(n) = a_1^n, \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor.$$

3), 5) Свойства следуют из определения (3.17) для ненормированных вероятностей  $h(\mathbf{n}_e(m))$ .

4) Свойство следует из определения операции сдвига множества.

Лемма доказана. ■

### 3.1.5. Рекуррентный алгоритм для расчета ненормированных макровероятностей

Перейдем к рекуррентному алгоритму для расчета ненормированных макровероятностей, соответствующих подмножествам (3.8). Обозначим  $g(m,n)$  ненормированную вероятность того, что по звену передаются  $n$  блоков эластичных данных, гарантированный порог которых не превышает  $b_m^e$ , т. е.

$$g(m,n) := \sum_{\mathbf{n}_e(K_e) \in \mathcal{D}_e(m,n)} h(\mathbf{n}_e(K_e)), \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e. \quad (3.24)$$

Учитывая (3.10), получаем

$$g(m,n) = \sum_{\mathbf{n}_e(K_e) \in \mathcal{Y}(m,n) \times \{\mathbf{0}^{K_e-m}\}} h(\mathbf{n}_e(K_e)), \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e,$$

т. е.

$$g(m,n) = \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m)), \quad n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m \in \mathcal{K}_e. \quad (3.25)$$

Для расчета ненормированных макровероятностей  $g(m, n)$  справедлива лемма 3.3.

Лемма 3.3. Ненормированные вероятности  $g(m, n)$ ,  $n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor$ ,

$m \in \mathcal{K}_e$  удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$1) \quad g(m, 1) = a_m, \quad m = 1, \dots, K_e; \quad (3.26)$$

$$2) \quad g(1, n) = a_1 g(1, n-1), \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor; \quad (3.27)$$

$$3) \quad g(m, n) = g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + a_m \sum_{j=1}^{m-1} g(j, n-1), \quad (3.28)$$

$$n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e.$$

Доказательство. В основе доказательства леммы лежат представление (3.25) для  $g(m, n)$  и свойства лемм 3.1 и 3.2.

1) Соотношение следует из свойства 1) леммы 3.2 для вероятностей  $h(\mathbf{n}_e(m))$  – формула (3.19).

2) По свойству 2) леммы 3.2 для вероятностей  $h(\mathbf{n}_e(m))$  – формула (3.20):

$$g(1, n) = a_1^n = a_1 \cdot a_1^{n-1} = a_1 g(1, n-1), \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_1^e} \right\rfloor.$$

3) Доказательство этого соотношения проведем подробно. Из определения (3.17) для  $h(\mathbf{n}_e(m))$  имеем

$$\begin{aligned} g(m, n) &= \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m, n)} n_\bullet^e(m)! \prod_{k=1}^m \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!} = \\ &= \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m, n)} n_\bullet^e(m) (n_\bullet^e(m)-1)! \prod_{k=1}^m \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!} = \\ &= \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m, n)} \left( \sum_{j=1}^m n_j^e \right) (n_\bullet^e(m)-1)! \prod_{k=1}^m \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} n_j^e (n_\bullet^e(m)-1)! \prod_{k=1}^m \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!} = \\
&= \sum_{j=1}^m a_j \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} (n_\bullet^e(m)-1)! \frac{a_j^{n_j^e-1}}{(n_j^e-1)!} \prod_{k=1, \dots, j-1, j+1, \dots, m} \frac{a_k^{n_k^e}}{n_k^e!}, \\
n &= 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e.
\end{aligned}$$

Под знаком внутренней суммы –  $h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_j(m))$  – см. формулу (3.17) –

$$\begin{aligned}
g(m,n) &= \sum_{j=1}^m a_j \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_j(m)) = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} a_j \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_j(m)) + a_m \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_m(m)), \\
n &= 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e.
\end{aligned}$$

С учетом свойства 3) леммы 3.1 – формула (3.15) – и свойства 3) леммы 3.2 – формула (3.21) – получаем

$$\begin{aligned}
g(m,n) &= \sum_{j=1}^{m-1} a_j \left( \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}_{-j}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_j(m)) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n-1) + \mathbf{e}_j(m)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_j(m)) \right) + \\
&\quad + a_m \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_m(m)), \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e.
\end{aligned}$$

Применение свойства 4) леммы 3.1 – формула (3.16) – и свойств 3), 4) леммы 3.2 – формулы (3.21) и (3.22) соответственно – приводит к

$$g(m,n) = \sum_{j=1}^{m-1} a_j \left( 0 + \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n-1)} h(\mathbf{n}_e(m)) \right) +$$

$$+a_m \sum_{j=1}^m \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(j,n-1) \times \{\mathbf{0}^{m-j}\} + \mathbf{e}_m(m)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_m(m)),$$

$$n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e.$$

Наконец, используем свойство 4) леммы 3.2 – формула (3.22) –

$$g(m,n) = g(m,n-1) \sum_{j=1}^{m-1} a_j + a_m \sum_{j=1}^m \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(j,n-1) \times \{\mathbf{0}^{m-j}\}} h(\mathbf{n}_e(m)),$$

$$n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e$$

и свойство 5) леммы 3.2 – формула (3.23) –

$$g(m,n) = g(m,n-1) \sum_{j=1}^{m-1} a_j + a_m \sum_{j=1}^m \sum_{\mathbf{n}_e(j) \in \mathcal{Y}(j,n-1)} h(\mathbf{n}_e(j)) =$$

$$= g(m,n-1) \sum_{j=1}^{m-1} a_j + a_m \sum_{j=1}^m g(j,n-1), \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 2, \dots, K_e.$$

Лемма доказана. ■

Замечание 3.2. Поясним вероятностный смысл рекуррентного соотношения 3) леммы 3.3 – формула (3.28), – схема расчета по которому показана на рис. 3.7. Ввиду упорядоченности типов блоков эластичных данных по возрастанию их гарантированных порогов, попасть в укрупненное состояние  $(m,n)$  возможно только из состояний  $(j,n-1)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Если система находится в состоянии  $(m,n-1)$ , т. е. по звену уже передаются блоки  $m$ -типа, то поступление запроса  $j$ -типа не повлияет на максимальный порог,  $j = 1, \dots, m$ . Если же система находится в отличном от  $(m,n-1)$  состоянии, то переход в  $(m,n)$  возможен только при поступлении запроса  $m$ -типа,  $m = 2, \dots, K_e$ .

| $n \setminus m$                              | 1                                  | 2                                                             | $\dots$  | $m-1$         | $m$                                 | $m+1$         | $\dots$  | $K_e$                                                               |
|----------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------|---------------|-------------------------------------|---------------|----------|---------------------------------------------------------------------|
| 1                                            | $a_1$                              | $a_2$                                                         | $\dots$  | $a_{m-1}$     | $a_m$                               | $a_{m+1}$     | $\dots$  | $a_{K_e}$                                                           |
| 2                                            | $a_1^2$                            | $a_2^2 + 2a_1a_2$                                             | $\dots$  | $\dots$       | $a_m^2 + 2a_m \sum_{j=1}^{m-1} a_j$ | $\dots$       | $\dots$  | $a_{K_e}^2 + 2a_{K_e} \sum_{j=1}^{K_e-1} a_j$                       |
| $\vdots$                                     | $\vdots$                           | $\vdots$                                                      | $\ddots$ | $\vdots$      | $\vdots$                            | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$                                                            |
| $n-1$                                        | $a_1^{n-1}$                        | $g(2, n-1)$                                                   | $\dots$  | $g(m-1, n-1)$ | $g(m, n-1)$                         | $g(m+1, n-1)$ | $\dots$  | $g(K_e, n-1)$                                                       |
|                                              | $\times$                           | $\times$                                                      | $\dots$  | $\times$      | $\times$                            | $\times$      | $\dots$  |                                                                     |
|                                              | $a_m$                              | $a_m$                                                         | $\dots$  | $a_m$         | $\sum_{j=1}^m a_j$                  |               |          |                                                                     |
| $n$                                          | $\vdots$                           | $\vdots$                                                      | $\vdots$ | $\vdots$      | $\rightarrow g(m, n)$               | $\vdots$      | $\vdots$ | $\vdots$                                                            |
| $\vdots$                                     | $\vdots$                           | $\vdots$                                                      | $\ddots$ | $\vdots$      | $\vdots$                            | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$                                                            |
| $\left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor$ | $\rho_1^{\lfloor C/b_1^e \rfloor}$ | $q\left(2, \left\lfloor \frac{C}{b_2^e} \right\rfloor\right)$ | $\dots$  | $\dots$       | $\dots$                             | $\dots$       | $\dots$  | $g\left(K_e, \left\lfloor \frac{C}{b_{K_e}^e} \right\rfloor\right)$ |

Рис. 3.7. Схема расчета ненормированных вероятностей  $g(m, n)$

Очевидно – см. далее следствие 2.1, – что нормирующая константа вычисляется по формуле  $G_e = 1 + \sum_{m \in \mathcal{K}_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} g(m, n)$ .

Замечание 3.3. Сложность вычисления нормирующей константы  $G_e$  по алгоритму леммы 3.3 составляет  $O\left(\sum_{m \in \mathcal{K}_e} m \cdot \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor\right)$ .

Снизить вычислительную сложность алгоритма леммы 3.3 позволяет ряд преобразований соотношения 3) – формула (3.28), – что сформулировано в утверждении 3.2.

Утверждение 3.2. Ненормированные вероятности  $g(m, n)$ ,  $n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor$ ,  $m \in \mathcal{K}_e$  удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

1), 2) совпадают с формулами (3.26) и (3.27) соответственно;

$$3) \quad g(2, n) = (a_1 + a_2)g(2, n-1) + a_2 g(1, n-1), \quad n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_2^e} \right\rfloor; \quad (3.29)$$

$$4) \quad g(m, n) = g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + \quad (3.30)$$

$$+ \frac{a_m}{a_{m-1}} \left( g(m-1, n) - g(m-1, n-1) \sum_{j=1}^{m-2} a_j \right),$$

$$n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 3, \dots, K_e.$$

Доказательство. Доказательство соотношений 3) и 4) проводится путем преобразования рекуррентного соотношения 3) леммы 3.3 – формула (3.28).

3) Если  $m = 2$ , то соотношение получается напрямую из формулы (3.28).

4) Если  $m > 2$ , тогда преобразуем второе слагаемое в формуле (3.28) следующим образом:

$$\begin{aligned} g(m, n) &= g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + a_m \sum_{j=1}^{m-1} g(j, n-1) = g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + \\ &+ a_m \left( \sum_{j=1}^{m-2} g(j, n-1) + g(m-1, n-1) \right) = g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + \\ &+ \frac{a_m}{a_{m-1}} \left( a_{m-1} \sum_{j=1}^{m-2} g(j, n-1) + a_{m-1} g(m-1, n-1) \right) = g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + \\ &+ \frac{a_m}{a_{m-1}} \left( a_{m-1} \sum_{j=1}^{m-2} g(j, n-1) + \left( a_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-2} a_i - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \right) g(m-1, n-1) \right) = \\ &= g(m, n-1) \sum_{j=1}^m a_j + \frac{a_m}{a_{m-1}} \cdot \\ &\cdot \left( \left( g(m-1, n-1) \sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_{m-1} \sum_{j=1}^{m-2} g(j, n-1) \right) - g(m-1, n-1) \sum_{i=1}^{m-2} a_i \right), \\ &n = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, \quad m = 3, \dots, K_e. \end{aligned}$$

Очевидно, что первое слагаемое в скобках представляет собой  $g(m-1, n)$  (см. формулу (3.28)), что и требовалось доказать.

■

Замечание 3.4. Сложность вычисления нормирующей константы  $G_e$  по алгоритму утверждения 3.2 ниже сложности вычисления по алгоритму леммы 3.3 и составляет  $O\left(\sum_{m \in \mathcal{K}_e} \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor\right)$ .

### 3.1.6. Метод расчета вероятностно-временных характеристик

Разработанный алгоритм утверждения 3.2 рекомендуется применять для расчета ненормированных макровероятностей  $g(m, n), n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor, m \in \mathcal{K}_e$ , которые, в свою очередь, являются компонентами формул для вычисления BBX модели с эластичным трафиком и гарантированными порогами. Справедливо следствие 3.1 для их вычисления.

Следствие 3.1. Нормирующая константа  $G_e$  и BBX  $B_k^e, T_k^e, k \in \mathcal{K}_e$  для мультисервисной модели звена сети с эластичным трафиком и гарантированными порогами вычисляются по формулам

$$G_e = 1 + \sum_{m \in \mathcal{K}_e} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor} g(m, n), \quad (3.31)$$

$$B_k^e = G_e^{-1} \cdot \left( \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=\left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor} g(m, n) + \sum_{m=k}^{K_e} g\left(m, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor\right) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e, \quad (3.32)$$

$$T_k^e = \frac{G_e^{-1}}{C \mu_k^e (1 - B_k^e)} \times \\ \times \left( 1 + \sum_{m=1}^k \sum_{n=2}^{\left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor} n \cdot g(m, n-1) + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor} n \cdot g(m, n-1) \right), \quad (3.33)$$

$$k \in \mathcal{K}_e.$$

Доказательство. I. Вид (3.31) нормирующей константы  $G_e$  следует из построенного разбиения (3.7)–(3.8) пространства  $\mathcal{X}_e$  состояний на подмножества.

II. Выражение (3.32) для расчета вероятностей  $B_k^e$ ,  $k \in \mathcal{K}_e$  блокировок блоков данных получается из утверждения 3.1, а именно, из формулы (3.9).

III. Доказательство формулы для расчета средних времен  $T_k^e$ ,  $k \in \mathcal{K}_e$  передачи блоков данных проводим по свойствам лемм 3.1 и 3.2. По формуле (3.18) и свойству 3) леммы 3.2 – формула (3.21) получаем

$$\begin{aligned} T_k^e &= \frac{1}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \sum_{n_e(K_e) \in \mathcal{X}_e} n_k^e \cdot G_e^{-1} \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)) = \\ &= \frac{G_e^{-1}}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \left( \sum_{n_e(K_e) \in \mathcal{X}_e: n_k^e = 0} n_k^e \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n_e(K_e) \in \mathcal{X}_e: n_k^e > 0} n_k^e \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)) \right), \\ k &\in \mathcal{K}_e. \end{aligned}$$

Учитывая разбиение (3.7)–(3.8) пространства  $\mathcal{X}_e$  состояний,

$$\begin{aligned} T_k^e &= \frac{G_e^{-1}}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \left( 0 + \sum_{m \in \mathcal{K}_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \sum_{n_e(K_e) \in \mathcal{X}_e(m,n): n_k^e > 0} n_k^e \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)) \right) = \\ &= \frac{G_e^{-1}}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \left( \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \sum_{n_e(K_e) \in \mathcal{X}_e(m,n): n_k^e > 0} n_k^e \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=k}^{K_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \sum_{n_e(K_e) \in \mathcal{X}_e(m,n): n_k^e > 0} n_k^e \cdot h(\mathbf{n}_e(K_e)) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e. \end{aligned}$$

По определению подмножеств  $\mathcal{Y}(m,n)$  – формулы (3.10) и (3.11):

$$T_k^e = \frac{G_e^{-1}}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \left( 0 + \sum_{m=k}^{K_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \sum_{n_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n): n_k^e > 0} n_k^e \cdot h(\mathbf{n}_e(m)) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{G_e^{-1}}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \sum_{m=k}^{K_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n): n_k^e > 0} n_k^e \cdot n_\bullet^e! \prod_{j=1}^m \frac{a_j^{n_j^e}}{n_j^e!} = \\
&= \frac{G_e^{-1} a_k}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{m=k}^{K_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n): n_k^e > 0} n_\bullet^e (n_\bullet^e - 1)! \frac{a_k^{n_k^e - 1}}{(n_k^e - 1)!} \prod_{j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, K_e} \frac{a_j^{n_j^e}}{n_j^e!} = \\
&= \frac{G_e^{-1}}{C \mu_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \sum_{m=k}^{K_e} \sum_{n=1}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n): n_k^e > 0} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_k(m)) = \\
&= \frac{G_e^{-1}}{C \mu_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \sum_{m=k}^{K_e} \left( \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,1): n_k^e > 0} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_k(m)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n): n_k^e > 0} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_k(m)) \right) = \\
&= \frac{G_e^{-1}}{C \mu_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \left( \sum_{\mathbf{n}_e(k) \in \mathcal{Y}(k,1)} h(\mathbf{n}_e(k) - \mathbf{e}_k(k)) + \right. \\
&\quad + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,1): n_k^e > 0} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_k(m)) + \\
&\quad \left. + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_k^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(k) \in \mathcal{Y}(k,n)} h(\mathbf{n}_e(k) - \mathbf{e}_k(k)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n): n_k^e > 0} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_k(m)) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e.
\end{aligned}$$

По свойству 1) леммы 3.1 – формула (3.13):

$$T_k^e = \frac{G_e^{-1}}{C\mu_k^e(1-B_k^e)} \cdot \left( h(\mathbf{0}^k) + 0 + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_k^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(k) \in \mathcal{Y}(k,n)} h(\mathbf{n}_e(k) - \mathbf{e}_k(k)) + \right. \\ \left. + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n-1) + \mathbf{e}_k(m)} h(\mathbf{n}_e(m) - \mathbf{e}_k(m)) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e.$$

По свойству 4) леммы 3.1 – формула (3.16) – и свойствам 3) и 4) леммы 3.2 – формулы (3.21) и (3.22) соответственно:

$$T_k^e = \frac{G_e^{-1}}{C\mu_k^e(1-B_k^e)} \cdot \left( 1 + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_k^e \rfloor} n \cdot \sum_{m=1}^k \sum_{\mathbf{n}_e(k) \in \mathcal{Y}(m,n-1) \times \{\mathbf{0}^{k-m}\} + \mathbf{e}_k(k)} h(\mathbf{n}_e(k) - \mathbf{e}_k(k)) + \right. \\ \left. + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n-1)} h(\mathbf{n}_e(m)) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e.$$

По свойству 4) леммы 3.2 – формула (3.22):

$$T_k^e = \frac{G_e^{-1}}{C\mu_k^e(1-B_k^e)} \cdot \left( 1 + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_k^e \rfloor} n \cdot \sum_{m=1}^k \sum_{\mathbf{n}_e(k) \in \mathcal{Y}(m,n-1) \times \{\mathbf{0}^{k-m}\}} h(\mathbf{n}_e(k)) + \right. \\ \left. + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot g(m,n-1) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e.$$

По свойству 5) леммы 3.2 – формула (3.23):

$$T_k^e = \frac{G_e^{-1}}{C\mu_k^e(1-B_k^e)} \cdot \left( 1 + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_k^e \rfloor} n \cdot \sum_{m=1}^k \sum_{\mathbf{n}_e(m) \in \mathcal{Y}(m,n-1)} h(\mathbf{n}_e(m)) + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot g(m,n-1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot g(m, n-1) \Bigg) = \frac{G_e^{-1}}{C \mu_k^e (1 - B_k^e)} \cdot \\
& \cdot \left( 1 + \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_k^e \rfloor} n \cdot \sum_{m=1}^k g(m, n-1) + \sum_{m=k+1}^{K_e} \sum_{n=2}^{\lfloor C/b_m^e \rfloor} n \cdot g(m, n-1) \right), \quad k \in \mathcal{K}_e.
\end{aligned}$$

Следствие доказано. ■

Разработанный метод расчета BBX модели с эластичным трафиком и гарантированными порогами запишем в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 3.1. Расчет BBX мультисервисной модели звена сети с эластичным трафиком и гарантированными порогами.

Шаг 1. Расчет ненормированных вероятностей  $g(m, n)$ ,  $n = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_m^e} \right\rfloor$ ,  $m \in \mathcal{K}_e$  по формулам (3.26), (3.27), (3.29), (3.30) (см. утверждение 3.2).

Шаг 2. Расчет нормирующей константы  $G_e$  по формуле (3.31) следствия 3.1.

Шаг 3. Расчет вероятностей  $B_k^e$ ,  $k \in \mathcal{K}_e$  блокировок блоков эластичных данных по формуле (3.32) следствия 3.1.

Шаг 4. Расчет средних времен  $T_k^e$ ,  $k \in \mathcal{K}_e$  передачи блоков эластичных данных по формуле (3.33) следствия 3.1.

Замечание 3.5. Исследованная модель была построена в предположении  $b_1^e < \dots < b_{K_e}^e$ , которое, тем не менее, не ограничивает общности полученных результатов, т. к. аналогичные рассуждения могут быть проведены и для случая  $b_1^e \leq \dots \leq b_{K_e}^e$  с точностью до замены интенсивностей  $a_m$  на  $\sum_{i \in \mathcal{K}_e: b_i^e = b_m^e} a_i$ ,  $m \in \mathcal{K}_e$ .

Таким образом, для мультисервисной модели звена сети с эластичным трафиком и различными гарантированными порогами

в данном разделе изложен рекуррентный алгоритм для расчета вероятностей блокировок и средних времен передачи блоков данных.

### ***3.2. Модель разделения ресурсов отдельного звена сети между виртуальными частными сетями с эластичным трафиком***

Применение технологии *виртуальных частных сетей* (*Virtual Private Network – VPN*) обусловлено необходимостью снижения расходов на содержание корпоративных сетей за счет более дешевого подключения удаленных офисов и удаленных пользователей через сеть Internet. Однако необходимо отметить, что при объединении сетей через Internet, сразу же возникает вопрос о безопасности передачи данных, поэтому возникла необходимость создания механизмов позволяющих обеспечить конфиденциальность и целостность передаваемой информации. Сети, построенные на базе таких механизмов, и получили название VPN.

#### **3.2.1. Модели реализации VPN**

##### *Канальная модель VPN*

Распределение ресурсов сети общего пользования по различным виртуальным частным сетям может быть реализовано посредством классического подхода эмуляции частных линий от одной конечной точки VPN ко всем другим конечным точкам. Такой подход использует так называемую канальную модель (в англоязычной литературе - pipe model). Канальная модель VPN подобна услуге арендованной (частной) линии. Это требует от пользователя арендовать набор частных виртуальных каналов и запросить соответствующую полосу пропускания в каждом канале на протяжении всего пути между парой конечных точек «источник – получатель» в VPN. Рис. 3.8 иллюстрирует пример канальной модели VPN. Сетевой провайдер должен обеспечивать адекватную полосу пропускания вдоль всего пути для каждого канала,

гарантируя выполнение соглашения о заданном уровне обслуживания SLA.



Рис. 3.8. Канальная модель VPN

Главный недостаток такого подхода в том, что пользователь должен предварительно знать всю матрицу трафика между конечными точками VPN. Кроме того, сетевые ресурсы, задействованные для одного пользовательского канала, не могут быть применены для передачи другого трафика. Это очень важно для сетевого провайдера, так как он не может получить выгода за счет статистического мультиплексирования в одном канале пользовательской информации от различных источников.

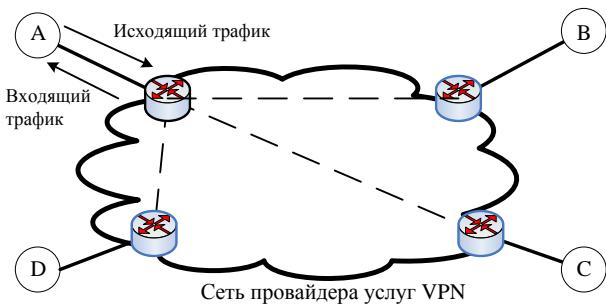


Рис. 3.9. Потоковая модель VPN

Основной проблемой построения VPN на базе канальной модели является оптимальное распределение сетевых ресурсов по различным каналам. В случае неограниченной полосы пропускания на каждом участке сети эта задача сводится к решению изолированных задач выбора оптимальной топологии каждой VPN с учетом соответствующего критерия оптимизации: суммарной стоимости используемой полосы пропускания, суммарной протяженности каналов или др. При этом решение такой задачи для одной VPN не влияет на решение задачи оптимизации для другой VPN. Однако на практике отдельные участки сети всегда имеют ограниченную пропускную способность, и в этом случае полоса пропускания, занятая под одну VPN, влияет на решение задачи распределения сетевых ресурсов для другой VPN. Учет этого фактора существенно усложняет математические методы исследования канальной модели VPN.

#### *Потоковая модель VPN*

В 1999 году группа исследователей (Duffield N.G., Goyal P., Greenberg A., Mishra P., Ramakrishnan K.K., van der Merwe J. E.) опубликовала работу, которая в корне изменила существующие представления о возможностях реализации VPN на базе ресурсов сетей общего пользования. Авторы предложили использовать так называемую потоковую модель (hose model). В противоположность канальной модели в ней не требуется знание матрицы трафика виртуальной сети, необходимо только указать суммарный трафик на входе и выходе каждой конечной точки VPN. На рис. 3.9 показан пример реализации VPN на базе потоковой модели. Предположим, в VPN имеются четыре конечные точки: А, В, С и D. Пользователи арендуют четыре потока для каждой конечной точки и определяют для них агрегированный исходящий и входящий трафик.

Преимущества использования потоковой модели VPN, с точки зрения пользователей, следующие:

- Простота описания VPN. Для каждой конечной точки должны быть определены только суммарные исходящая и входящая полосы пропускания (возможно, асимметричные)

в противоположность определения полос пропускания для каждого пользовательского канала между парами конечных точек в канальной модели VPN.

- Гибкость распределения трафика. Трафик от/к данной конечной точке VPN в потоке может быть распределен произвольно по другим конечным точкам, обеспечивая в целом агрегированное согласование с резервируемой полосой пропускания потока.
- Выгода от мультиплексирования нагрузки в потоке. Благодаря статистическому мультиплексированию трафика полоса пропускания потока может быть меньше, чем суммарная полоса пропускания, требуемая для всего набора каналов пользователей.
- Простота определения параметров потока. Характеристики потока легко определить, так как статистические изменения в индивидуальном трафике для каждой пары «источник – получатель» сглаживаются путем агрегирования трафика в потоке.

С точки зрения провайдеров, потоковая модель VPN также является более привлекательной благодаря возможности поддержки SLA с менее жестким описанием матрицы трафика. Для управления ресурсами сети общего пользования при большой неопределенности матрицы трафика могут быть использованы два основных механизма:

- Статическое мультиплексирование. Благодаря уменьшению требований на агрегированную полосу пропускания провайдер может использовать мультиплексирование различных потоков трафика, которые имеют одинаковые характеристики QoS. При этом возможны три различных уровня агрегации. Первый - мультиплексируется весь трафик одного потока, имеющий одинаковые параметры QoS. Второй - мультиплексируются отдельные потоки, имеющие одинаковые параметры QoS. Третий - мультиплексируется трафик разных VPN, имеющий одинаковые параметры QoS. Эти три способа могут быть применены как к каналам доступа, так и к внутренним каналам в сети общего пользования.

- Изменение границ резервируемой полосы пропускания. Для обеспечения соответствующих гарантий параметров QoS провайдер может использовать механизм резервирования агрегированных сетевых ресурсов, который распределяет полосу пропускания на используемых участках сети общего пользования для данного потока или VPN. Провайдер может делать распределение полосы пропускания статически, на основе расчетов наихудшего случая нагрузки. Кроме того, провайдер может выполнить некоторое начальное распределение полосы пропускания и затем изменять эту полосу динамически на основе данных периодических (онлайновых) измерений.

Следует отметить, что эти два механизма управления ресурсами сети могут использоваться раздельно или совместно.

Предметом исследования является задача поиска оптимального разделения ресурсов сети между VPN. В предположении, что ядро сети обеспечено достаточно большой пропускной способностью, управление ее ресурсами сводится к распределению ширины полосы пропускания между VPN в двух «узких местах» – на входе и выходе из открытой внешней среды передачи информации. Поэтому целесообразно изучать не всю сеть, а ее отдельное звено. Рассматривается звено сети в условиях эластичного трафика с ограниченной пропускной способностью  $C$ , по которому передаются данные пользователей  $N$  различных VPN, каждой из которых выделена пропускная способность  $C_n$  (рис. 3.10).

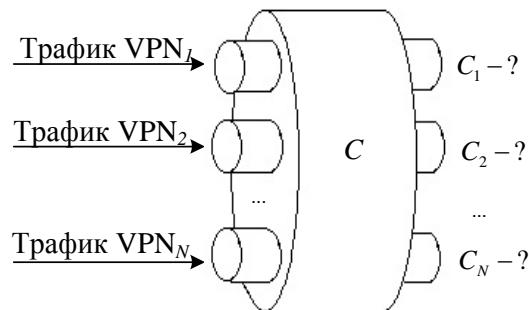


Рис. 3.10. Схема модели отдельного звена сети

В ходе выполнения работы минимизировалось время передачи блоков данных по звену сети, так как оно является основной характеристикой эластичного трафика. Были исследованы две стратегии разделения ресурсов звена сети. В первом случае задача планирования заключалась в поиске такого разделения пропускной способности, при котором значение суммарного среднего времени передачи блоков данных минимально. Во втором минимизировалось наибольшее из времен передачи блоков данных.

Рассмотрим модель отдельного звена сети в условиях эластичного трафика. Требования к минимальному значению ширины полосы пропускания для передачи блоков данных отсутствуют. Модель строится в виде системы массового обслуживания с обслуживанием блоков по дисциплине разделения процессора. На звено емкости  $C$  поступают запросы на обслуживание блоков данных  $K$  типов с интенсивностями  $\lambda_k$  и средними длинами  $\theta_k$ . Обозначим  $a_k = \lambda_k \theta_k$  интенсивность предложенной нагрузки.

Обозначим  $\tau_k$  среднее время передачи блока  $k$ -типа и сформулируем без доказательства следующее утверждение, необходимое для того, чтобы сформулировать ниже задачи оптимального разделения ресурсов отдельного звена сети и исследовать метод их решения.

Утверждение 3.3. Среднее время передачи блока данных  $k$ -типа равно

$$\tau_k(C) = \frac{\theta_k}{C - \sum_{k=1}^K \lambda_k \theta_k}. \quad (3.34)$$

### 3.2.2. Метод решения задачи разделения пропускной способности звена мультисервисной сети

Предположим теперь, что по отдельному звену сети предаются данные пользователей  $N$  различных VPN. Задача заключается в оптимальном разделении пропускной способности звена сети

между VPN. Обозначим через  $C_n$  пропускную способность  $\text{VPN}_n$  из множества  $\mathcal{N}$ . На звено поступают пуассоновские потоки запросов на передачу блоков данных,  $\theta_k$  средняя длина блока  $k$ -типа,  $\lambda_{nk}$  – интенсивность поступления запросов от пользователей  $\text{VPN}_n$  на получение блока данных  $k$ -типа. Тогда интенсивность предложенной нагрузки  $\text{VPN}_n$  равна  $a_{nk} = \lambda_{nk}\theta_k$ . Учитывая, что обслуживание блоков происходит по дисциплине разделения процессора, номинальная длительность обслуживания блока (время передачи, когда для передачи блока используется вся емкость звена) –  $(\mu_{nk})^{-1} = \frac{\lambda_{nk}\theta_k}{C_n}$ . Обозначим  $\tau_{nk}(C_n)$  среднее время передачи блока эластичных данных  $k$ -типа в  $\text{VPN}_n$ .

Исследуем две стратегии разделения пропускной способности звена сети. В первом случае задача планирования заключается в поиске таких  $C_n$ , при которых значение суммарного среднего времени передачи блоков данных минимально.

$$\begin{aligned} & \min_C \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n) \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}} C_n = C, C_n \in Z_+ \end{aligned} \quad (3.35)$$

Вторая стратегия заключается в поиске таких  $C_n$ , при которых наибольшее из времен передачи  $\tau_{nk}$  минимально:

$$\begin{aligned} & \min_C \max_{n \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n), \\ & \sum_{n \in \mathcal{N}} C_n = C, C_n \in Z_+. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Обе задачи относятся к классу задач по поиску экстремумов гладких нелинейных функций с переменными  $C_n \in Z_+$ .

Проведем анализ оптимального распределения пропускной способности звена сети. Полагая, что в (3.36) переменные  $C_n \in Z_+^N$ , будем решать непрерывную задачу. Учитывая, что  $C_N = C - \sum_{i=1}^{N-1} C_i$ , введем функцию

$$\begin{aligned} \tau(C_1, C_2, \dots, C_{N-1}) = & \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^K \frac{\theta_k}{C_n - \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{n\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}} + \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\theta_k}{C - \sum_{i=1}^{N-1} C_i - \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{N\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

которую будем минимизировать.

Утверждение 3.4. Стационарные точки функции (3.37) находятся по формуле:

$$C_n^I = \frac{C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{n\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N}, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (3.38)$$

$$\text{Найдем } C_N^I = C - \sum_{i=1}^{N-1} C_i^I.$$

$$\begin{aligned} C_N^I = & C - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{i\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N} = \\ = & \frac{NC - \sum_{i=1}^{N-1} \left( C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{i\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} \right)}{N} = \\ = & \frac{NC - (N-1)C - N \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{i\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} + (N-1) \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N} = \\ = & \frac{C - N \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{i\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} + N \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N} = \\ = & \frac{C - N \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{i\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} + N \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N} = \\ = & \frac{C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{N\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим, что

$$C_n^I = \frac{C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{n\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}{N}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.39)$$

Учитывая, что  $a_{nk} = \lambda_{nk} \theta_k$ , (3.39) примет вид:

$$\begin{aligned} C_n^I &= \frac{C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K a_{nk} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K a_{\tilde{n}\tilde{k}}}{N} = \frac{C}{N} + \sum_{\tilde{k}=1}^K a_{nk} - \frac{\sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K a_{\tilde{n}\tilde{k}}}{N} = \\ &= \frac{C}{N} + a_{n\bullet} - \frac{a_{\bullet\bullet}}{N}. \end{aligned}$$

Тогда если  $a_{1k} = a_{2k} = \dots = a_{Nk} = a_k, \forall k \in \mathcal{K}$ , то

$$C_n^I = \frac{C}{N} + \sum_{\tilde{k}=1}^K a_k - \frac{N \sum_{\tilde{k}=1}^K a_{\tilde{k}}}{N} = \frac{C}{N}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Т.е., если интенсивности предложенной нагрузки в различных VPN совпадают, то пропускная способность звена сети должна быть распределена между ними равномерно.

Утверждение 3.5. Решения задачи оптимизации (3.35) определяются формулой (3.39). Т.е.

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n) \rightarrow \min, \text{ при. } C_n = C_n^I, n \in \mathcal{N}.$$

Утверждение 3.6. При оптимальном распределении ресурсов сети времена передачи блоков данных в различных VPN совпадают:

$$\tau_{1k}(C_1^I) = \tau_{2k}(C_2^I) = \dots = \tau_{nk}(C_n^I).$$

Доказательство. Подставим оптимальное значение  $C_n^I$  в формулу (3.34) нахождения среднего времени обслуживания

$$\begin{aligned} \tau_{nk}(C_n^I) &= \frac{\theta_k}{c_n^I - \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{n\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}} = \frac{N\theta_k}{C + N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{n\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}} - N \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{n\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}} = \\ &= \frac{N\theta_k}{C + \sum_{\tilde{n} \in \mathcal{N}} \sum_{\tilde{k}=1}^K \lambda_{\tilde{n}\tilde{k}} \theta_{\tilde{k}}}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что  $\tau_{nk}(C_n^I)$  не зависит от  $n$ , поэтому  
 $\tau_{1k}(C_1^I) = \tau_{2k}(C_2^I) = \dots = \tau_{nk}(C_n^I)$ . ■

Утверждение 3.7. Решения задач оптимизации (3.35) и (3.36) совпадают. Т.е., если

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n^I) \rightarrow \min \text{ и } \max_{n \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n^{II}) \rightarrow \min,$$

то  $C_n^{II} = C_n^I, n \in \mathcal{N}$ .

Доказательство. Пусть  $C^I$  решение задачи оптимизации (3.35), а  $C^{II}$  решение задачи оптимизации (3.36). Предположим, что утверждение 3.7 неверно и  $C^{II} \neq C^I$ , тогда

$$\max_{n \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n^{II}) < \max_{n \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}} \tau_{nk}(C_n^I).$$

Обозначим  $k_{\max}$  тип блока наибольшей длины.

$$\max_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk_{\max}}(C_n^{II}) < \max_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk_{\max}}(C_n^I).$$

Упорядочим времена передачи блока наибольшей длины в различных VPN при  $C = C^{II}$ , в порядке увеличения времени его передачи:

$$\tau_{n_1 k_{\max}}(C_{n_1}^{II}) \leq \tau_{n_2 k_{\max}}(C_{n_2}^{II}) \leq \dots \leq \tau_{n_N k_{\max}}(C_{n_N}^{II}) < \max_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk_{\max}}(C_n^I).$$

Учитывая утверждение 3.6, обозначим  $\tau_k(C^I)$  время передачи блока данных  $k$ -типа в любой из VPN при оптимальном распределении ресурсов по первой стратегии. Тогда, получим

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk_{\max}}(C_n^{II}) < N \tau_{k_{\max}}(C^I).$$

Из (3.34) заметим, что  $\tau_{nk_{\max}} = \frac{\theta_{k_{\max}}}{\theta_k} \tau_{nk}, \forall k \in \mathcal{K}, n \in \mathcal{N}$ , тогда

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk}(C_n^{II}) < N \tau_k(C^I), \forall k \in \mathcal{K}.$$

А значит,

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk} (C_n^H) < N \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_k (C^I).$$

Заметим, что  $N \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_k (C^I) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{n \in \mathcal{N}} \tau_{nk} (C_n^I)$  благодаря выполнению утверждения 3.6. Тогда

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_{nk} (C_n^H) < \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \tau_{nk} (C_n^I), \quad \text{а это противоречит}$$

предположению о том, что  $C^I$  является решением (3.34). Таким образом, получим, что  $C^H = C^I$ .

Таким образом, в данном разделе были получены формулы для нахождения времени передачи блоков данных по звену виртуальной частной сети с эластичным трафиком. Используя две стратегии разделения пропускной способности звена сети, сформулированы задачи оптимизации времени передачи блоков данных, найдены решения одной из задач и показано, что они также являются решениями второй задачи оптимизации.

### 3.2.3. Численный пример

Проведем теперь численный анализ задач оптимизации. Рассчитаем исходные данные для проведения численного эксперимента. Для анализа выберем отдельное звено Gigabit Ethernet. Несмотря на то, что номинальная скорость передачи данных в сети на базе Gigabit Ethernet составляет 1 Гбит/с, фактическая пропускная способность звеньев в среднем составляет 60 %, иначе происходит резкое увеличение задержки передачи данных. Таким образом, в предложенном примере пропускная способность звена сети составляет 600 Мбит/с.

В качестве условной единицы канального ресурса выбрана величина 8 Мбит/с, для измерения длин блоков используем соответствующую условную единицу длины блока (ЕДБ) – 8 Мбит (1 Мбайт). Пропускная способность звена и средние длины блоков указаны в табл. 3.1. Табл. 3.2 содержит данные по интенсивностям запросов и интенсивностям нагрузок. Предполагается, что на звене организуются две VPN.

Табл. 3.1. Пропускная способность звена и средние длины блоков  
данных в вычислительном эксперименте

|                                            | Исходные единицы измерения | Условные единицы измерения |
|--------------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Пропускная способность, $C$                | 600 Мбит/с                 | 75 ЕКР                     |
| Средняя длина блоков типа 1, $\theta_1$    | 1 Мбайт                    | 1 ЕДБ                      |
| Средняя длина блоков типа 2,<br>$\theta_2$ | 7 Мбайт                    | 7 ЕДБ                      |

Табл. 3.2. Нагрузочные параметры для вычислительного эксперимента

|                                                     | Тип блоков | VPN1        |              | VPN2             |              |
|-----------------------------------------------------|------------|-------------|--------------|------------------|--------------|
| Интенсивность запросов                              | 1          | 1,05 1/с    |              | 35,16 1/с        |              |
|                                                     | 2          | 0,12 1/с    |              | 3,91 1/с         |              |
| Интенсивность предложенной нагрузки                 | 1          | 8,44 Мбит/с | 1,05<br>ЕКР  | 281,25<br>Мбит/с | 35,16<br>ЕКР |
|                                                     | 2          | 6,56 Мбит/с | 0,82<br>ЕКР  | 218,77<br>Мбит/с | 27,34<br>ЕКР |
|                                                     | $\Sigma$   | 15 Мбит/с   | 1,875<br>ЕКР | 500 Мбит/с       | 62,5<br>ЕКР  |
| Суммарная нагрузка на звено 515 Мбит/с (64,375 ЕКР) |            |             |              |                  |              |

В табл. 3.3 приведены результаты – оптимальное разделение пропускной способности звена и соответствующие временные характеристики – средние времена передачи блоков каждого типа в каждой VPN, сумма средних времен, среднее время, максимальное время. Итак,

$$C_n = \frac{C + N \sum_{i=1}^K \lambda_{ni} \theta_i - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K \lambda_{ji} \theta_i}{N}$$

где  $n=1, \dots, N$ .

Рассчитаем полосу пропускания для первой VPN:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{C + 2 \sum_{i=1}^2 \lambda_{1i} \theta_i - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \lambda_{ji} \theta_i}{2} \\
&= \frac{C + 2(\lambda_{11} \theta_1 + \lambda_{12} \theta_2) - \sum_{j=1}^2 (\lambda_{j1} \theta_1 + \lambda_{j2} \theta_2)}{2} \\
&= \frac{C + 2(\lambda_{11} \theta_1 + \lambda_{12} \theta_2) - (\lambda_{11} \theta_1 + \lambda_{12} \theta_2 + \lambda_{21} \theta_1 + \lambda_{22} \theta_2)}{2} \\
&= \frac{75 + 2(1.05 * 1 + 0.12 * 7) - (1.05 * 1 + 0.12 * 7 + 35.16 * 1 + 3.91 * 7)}{2} \\
&= 7.18 \text{ УЕКР} \sim 7 \text{ УЕКР} = 56 \text{ Мбит/с}
\end{aligned}$$

Для второй VPN:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{C + 2 \sum_{i=1}^2 \lambda_{2i} \theta_i - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \lambda_{ji} \theta_i}{2} \\
&= \frac{C + 2(\lambda_{21} \theta_1 + \lambda_{22} \theta_2) - \sum_{j=1}^2 (\lambda_{j1} \theta_1 + \lambda_{j2} \theta_2)}{2} \\
&= \frac{C + 2(\lambda_{21} \theta_1 + \lambda_{22} \theta_2) - (\lambda_{11} \theta_1 + \lambda_{12} \theta_2 + \lambda_{21} \theta_1 + \lambda_{22} \theta_2)}{2} \\
&= \frac{75 + 2(35.16 * 1 + 3.91 * 7) - (1.05 * 1 + 0.12 * 7 + 35.16 * 1 + 3.91 * 7)}{2} \\
&= 67.82 \text{ УЕКР} \sim 68 \text{ УЕКР} = 544 \text{ Мбит/с}
\end{aligned}$$

Среднее время передачи блоков типа  $k$  по  $n$ -той сети:

$$\tau_{nk}(C_n) = \frac{\theta_k}{C_n - \sum_{i=1}^K \lambda_{ni} \theta_i}$$

Среднее время передачи блоков типа 1 по первой сети:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}(C_1) &= \frac{\theta_1}{C_1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_{1i} \theta_i} = \frac{\theta_1}{C_1 - \lambda_{11} \theta_1 + \lambda_{12} \theta_2} \\
&= \frac{1}{7 - (1.05 * 1 + 0.12 * 7)} = 0.20 \text{ с}
\end{aligned}$$

Среднее время передачи блоков типа 2 по первой сети:

$$\begin{aligned}
\tau_{12}(C_1) &= \frac{\theta_2}{C_1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_{1i} \theta_i} = \frac{\theta_2}{C_1 - \lambda_{11} \theta_1 + \lambda_{12} \theta_2} \\
&= \frac{7}{7 - (1.05 * 1 + 0.12 * 7)} = 1.37 \text{ с}
\end{aligned}$$

Среднее время передачи блоков типа 1 по второй сети:

$$\begin{aligned}\tau_{21}(C_2) &= \frac{\theta_1}{C_2 - \sum_{i=1}^2 \lambda_{2i} \theta_i} = \frac{\theta_1}{C_2 - \lambda_{21} \theta_1 + \lambda_{22} \theta_2} \\ &= \frac{1}{68 - (35.16 * 1 + 3.91 * 7)} = 0.18 \text{ с}\end{aligned}$$

Среднее время передачи блоков типа 2 по второй сети:

$$\begin{aligned}\tau_{22}(C_2) &= \frac{\theta_2}{C_2 - \sum_{i=1}^2 \lambda_{2i} \theta_i} = \frac{\theta_2}{C_2 - \lambda_{21} \theta_1 + \lambda_{22} \theta_2} \\ &= \frac{7}{68 - (35.16 * 1 + 3.91 * 7)} = 1.28 \text{ с}\end{aligned}$$

Табл. 3.3. Параметры оптимального разделения пропускной способности

|                                                                                                     | VPN <sub>1</sub> | VPN <sub>2</sub> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|
| Пропускные способности VPN                                                                          | 7 УЕКР           | 68 УЕКР          |
|                                                                                                     | 56 Мбит/с        | 544 Мбит/с       |
| Среднее время передачи блоков типа 1                                                                | 0,20 с           | 0,18 с           |
| Среднее время передачи блоков типа 1                                                                | 1,37 с           | 1,28 с           |
| Суммарное среднее время<br>$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \tau_{nk} (C_n^{I,II})$                       | 3,03 с           |                  |
| Среднее время передачи блока<br>$\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \tau_{nk} (C_n^{I,II})}{N + K}$    | 0,76 с           |                  |
| Максимальное среднее время<br>$\max_{\substack{n=1,\dots,N \\ k=1,\dots,K}} \tau_{nk} (C_n^{I,II})$ | 1,37 с           |                  |

Обратим внимание на то, что в модели не учитываются задержки передачи данных по каналу, а только время постановки в канал (серIALIZАЦИЯ), зависящее от пропускной способности. Поэтому реальная задержка может быть больше, а отличие будет зависеть от протяженности линии связи и типа используемого оборудования.

На рис. 3.11 изображена зависимость целевых функций – суммы средних времен и максимального среднего времени – от пропускной способности VPN<sub>1</sub>, при этом  $C_2 = C - C_1$ .

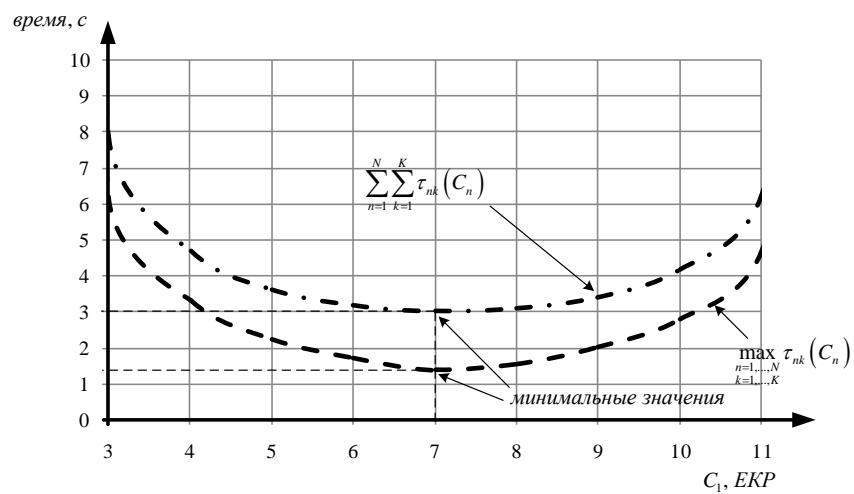


Рис. 3.11. Зависимость суммарного среднего времени и максимального среднего времени от пропускной способности VPN<sub>1</sub>

## 4. МОДЕЛЬ МУЛЬТИСЕРВИСНОЙ СЕТИ С «ТРОЙНОЙ УСЛУГОЙ»

### 4.1. Построение модели

Целью данного раздела является построение мультисервисной модели звена сети с «тройной услугой» – модели с одноадресным, многоадресным и эластичным типами трафика.

#### 4.1.1. Мультисервисная модель с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком

Рассматривается звено сети с  $C$  ЕКР, поддерживающее  $\mathcal{K}_u = \{1, \dots, K_u\}$  классов одноадресных и  $\mathcal{K}_m = \{1, \dots, K_m\}$  классов многоадресных соединений, и по которому передаются блоки эластичных данных  $\mathcal{K}_e = \{1, \dots, K_e\}$  типов. Схема модели изображена на рис. 4.1. Нагрузочными параметрами системы являются  $\lambda_s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_{K_s}^s)$ ,  $\mu_s = (\mu_1^s, \dots, \mu_{K_s}^s)$ ,  $b_s = (b_1^s, \dots, b_{K_s}^s)$ ,  $s \in \{u, m, e\}$ . Запросы на установление одноадресных соединений обрабатываются по дисциплине FCFS, запросы на установление многоадресных соединений обслуживаются по дисциплине Tr, а блоки эластичных данных разделяют все свободные ресурсы звена с дисциплиной Egalitarian PS (далее - PS).

Функционирование рассматриваемой системы описывает составной марковский СП

$$\begin{aligned} & \left\{ (N_u(t), N_m(t), N_e(t)) := \left( (N_1^u(t), \dots, N_{K_u}^u(t)), \right. \right. \\ & \left. \left. \left( N_1^m(t), \dots, N_{K_m}^m(t) \right), \left( N_1^e(t), \dots, N_{K_e}^e(t) \right) \right), t \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

над пространством состояний

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 := & \left\{ (\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) := \right. \\ & \left. := \left( (n_1^u, \dots, n_{K_u}^u), (n_1^m, \dots, n_{K_m}^m), (n_1^e, \dots, n_{K_e}^e) \right) \in \right. \\ & \left. \in \prod_{k \in \mathcal{K}_u} \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_k^u} \right\rfloor \right\} \times \{0, 1\}^{K_m} \times \right. \\ & \left. \left. \prod_{k \in \mathcal{K}_e} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\times_{k \in \mathcal{K}_e} \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_k^e} \right\rfloor \right\}: c(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \leq C \right\},$$

где  $c(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) := \sum_{s \in \{u, m, e\}} c_s(\mathbf{n}_s)$  – минимальное число ЕКР,

занятых тремя типами трафика в состоянии  $(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e)$ .

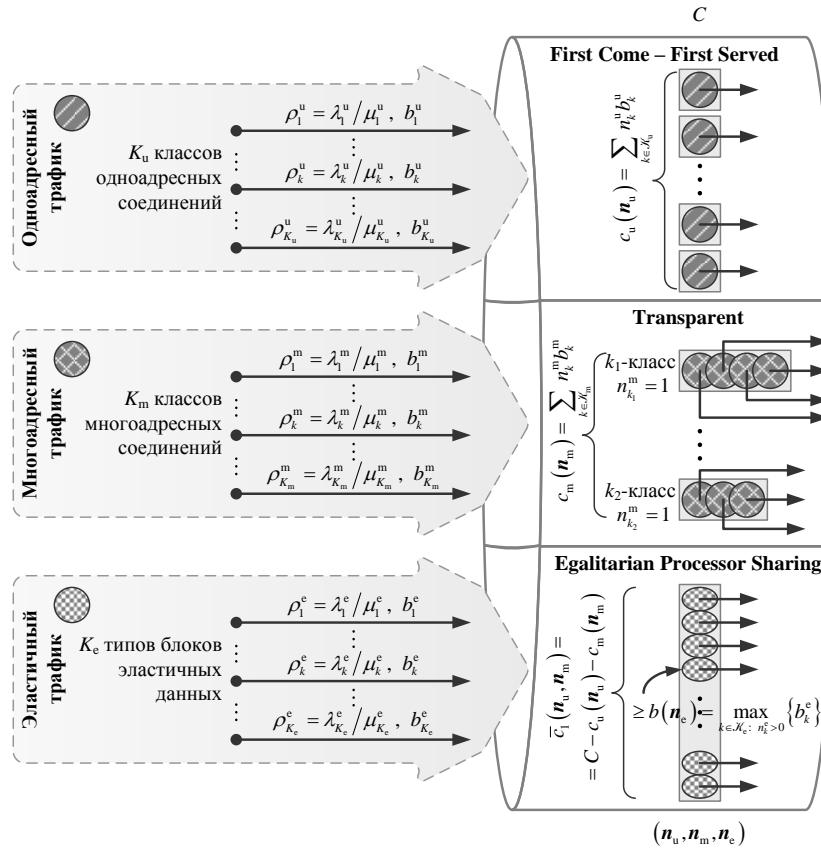


Рис. 4.1. Схема мультисервисной модели звена сети с «тройной услугой»

Исследуемую систему в обозначениях Башарина-Кендалла [1] может быть кодирована следующим образом:

$$\left( \begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \lambda_u, b_u \\ \lambda_m, b_m \\ \lambda_e, b_e \end{array} \right) \left| \left( \begin{array}{c} \mathbf{M}, \mathbf{M}, \mathbf{M} \\ \mu_u \\ \mu_m \\ \mu_e \end{array} \right) \right| C \left| 0 \right| (\text{FCFS, Tr, PS}) \left| (f_u, f_m, f_e), \right.$$

где

$$f_k^u(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) := \begin{cases} 1, & c(\mathbf{n}_u + \mathbf{e}_k(K_u), \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \leq C, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1, \quad k \in \mathcal{K}_u,$$

$$f_k^m(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) := \begin{cases} 1, & [n_k^m = 1] \vee [n_k^m = 0, c(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m + \mathbf{e}_k(K_m), \mathbf{n}_e) \leq C], \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1, \quad k \in \mathcal{K}_m,$$

$$f_k^e(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) := \begin{cases} 1, & c(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e + \mathbf{e}_k(K_e)) \leq C, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1, \quad k \in \mathcal{K}_e.$$

Составим диаграмму интенсивностей переходов, как это сделано на рис. 4.1, и получим СУР в виде

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \cdot & \left[ \sum_{s \in \{u, e\}} \sum_{k \in \mathcal{K}_s} \lambda_k^s \cdot 1\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \notin \mathcal{B}_k^s\} + \right. \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}_m} \lambda_k^m \cdot 1\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \notin \mathcal{B}_k^m, n_k^m = 0\} + \sum_{k \in \mathcal{K}_u} n_k^u \mu_k^u + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}_m} \lambda_k^m \left( e^{\rho_k^m} - 1 \right)^{-1} \cdot 1\{n_k^m = 1\} + \frac{\bar{c}_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m)}{n_\bullet^e} \sum_{k \in \mathcal{K}_e} n_k^e \mu_k^e \Big] = \\ & = \sum_{k \in \mathcal{K}_u} p_1(\mathbf{n}_u - \mathbf{e}_k(K_u), \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \cdot \lambda_k^u \cdot 1\{n_k^u > 0\} + \tag{4.3} \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}_m} p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m - \mathbf{e}_k(K_m), \mathbf{n}_e) \cdot \lambda_k^m \cdot 1\{n_k^m = 1\} + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{K}_e} p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e - \mathbf{e}_k(K_e)) \cdot \lambda_k^e \cdot 1\{n_k^e > 0\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \in \mathcal{K}_u} p_1(\mathbf{n}_u + \mathbf{e}_k(K_u), \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \cdot (n_k^u + 1) \mu_k^u \cdot \\
& \cdot 1\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \notin \mathcal{B}_k^u\} + \\
& + \sum_{k \in \mathcal{K}_m} p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m + \mathbf{e}_k(K_m), \mathbf{n}_e) \cdot \lambda_k^m \left( e^{\rho_k^m} - 1 \right)^{-1} \cdot \\
& \cdot 1\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \notin \mathcal{B}_k^m, n_k^m = 0\} + \\
& + \frac{\bar{c}_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m)}{n_\bullet^e + 1} \sum_{k \in \mathcal{K}_e} p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e + \mathbf{e}_k(K_e)) \cdot (n_k^e + 1) \mu_k^e \cdot \\
& \cdot 1\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \notin \mathcal{B}_k^e\}, (\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1.
\end{aligned}$$

Здесь величина  $\bar{c}_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m) := C - \sum_{s \in \{u, m\}} c_s(\mathbf{n}_s)$  является числом

ЕКР, не занятых потоковым трафиком, и  $\mathcal{B}_k^s$ ,  $k \in \mathcal{K}_s$ ,  $s \in \{u, m, e\}$   
множества блокировок, определяемые формулами

$$\mathcal{B}_k^u := \{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1 : c(\mathbf{n}_u + \mathbf{e}_k(K_u), \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) > C\}, \quad (4.4)$$

$k \in \mathcal{K}_u$ ,

$$\mathcal{B}_k^m := \{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1 : c(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m + \mathbf{e}_k(K_m), \mathbf{n}_e) > C, n_k^m = 0\}, \quad (4.5)$$

$k \in \mathcal{K}_m$ ,

$$\mathcal{B}_k^e := \{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1 : c(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e + \mathbf{e}_k(K_e)) > C\}, \quad (4.6)$$

$k \in \mathcal{K}_e$ .

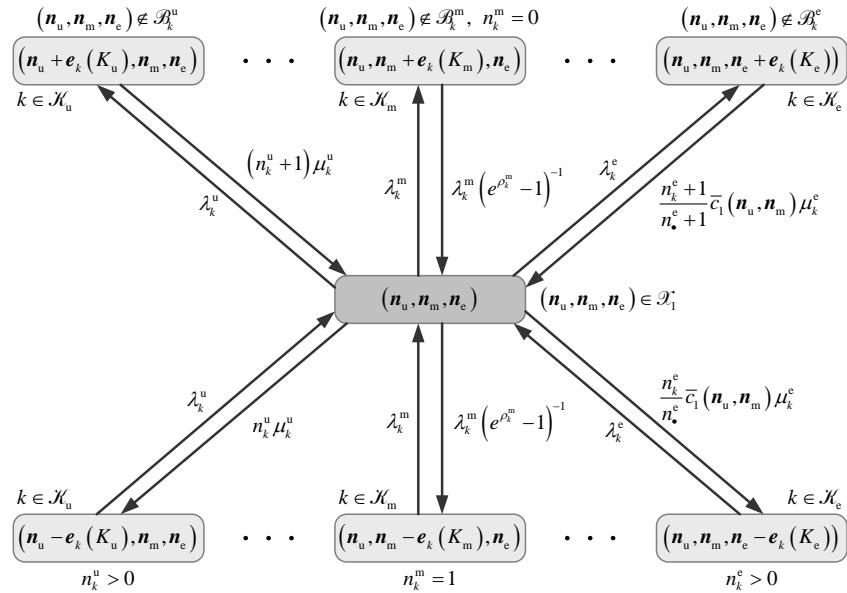


Рис. 4.2. Диаграмма интенсивностей переходов СП  $(N_u(t), N_m(t), N_e(t))$  для мультисервисной модели

Отметим, что решение СУР (4.3) не является мультиплексионным.

Основными ВВХ мультисервисной модели с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком являются:

- вероятность  $B_k^u := P\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{B}_k^u\}$  блокировки запроса на установление одноадресного соединения  $k$ -класса,  $k \in \mathcal{K}_u$ ;
- вероятность  $B_k^m := P\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{B}_k^m\}$  блокировки запроса на установление многоадресного соединения  $k$ -класса,  $k \in \mathcal{K}_m$ ;
- вероятность  $B_k^e := P\{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{B}_k^e\}$  блокировки запроса на передачу блока эластичных данных  $k$ -типа;

- среднее время  $T_k^e$  передачи блока эластичных данных  $k$ -типа,  $k \in \mathcal{K}_e$ .

Зная распределение  $p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e)$ ,  $(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1$ , можно вычислить по формуле Литтла среднее время  $T_k^e$

$$T_k^e = \frac{\sum_{(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \mathcal{X}_1} n_k^e \cdot p_1(\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e)}{\lambda_k^e (1 - B_k^e)}, \quad k \in \mathcal{K}_e. \quad (4.7)$$

#### 4.1.2. Упрощенная модель с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком

Рассматривается звено сети с  $C$  ЕКР, поддерживающее один класс одноадресных и один класс многоадресных соединений, и по которому передаются блоки эластичных данных одного типа. Схема модели схематично изображена рис. 4.5. Нагрузочными параметрами системы являются  $(\lambda_s, \mu_s, b_s)$ ,  $s \in \{u, m, e\}$  (см. табл. 4.1).

Функционирование рассматриваемой системы описывает составной марковский СП

$$\{(N_u(t), N_m(t), N_e(t)), t \geq 0\} \quad (4.8)$$

над пространством состояний

$$\mathcal{X} := \left\{ (\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_m, \mathbf{n}_e) \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor \right\} \times \{0, 1\} \times \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right\}: \sum_{s \in \{u, m, e\}} n_s b_s \leq C \right\}. \quad (4.9)$$

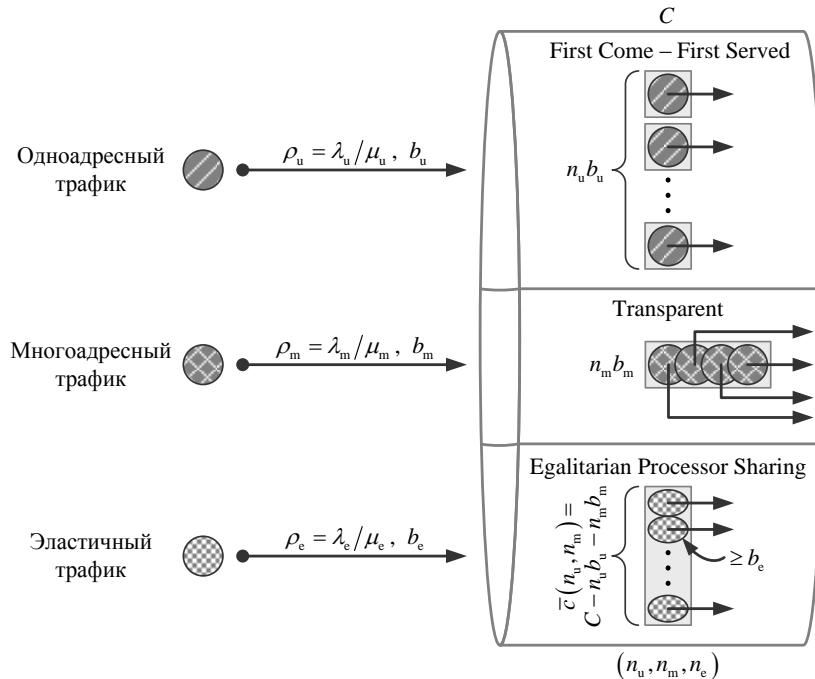


Рис. 4.3. Схема упрощенной модели звена сети с «тройной услугой»

Исследуемую систему в обозначениях Башарина-Кендалла кодируем так:

$$\left( \begin{matrix} M & M & M \\ \lambda_u, b_u & \lambda_m, b_m & \lambda_e, b_e \end{matrix} \right) \left| \left( \begin{matrix} M & M & M \\ \mu_u & \mu_m & \mu_e \end{matrix} \right) \right| C \left| 0 \right| (\text{FCFS}, \text{Tr}, \text{PS}) \left| (f_u, f_m, f_e), \right.$$

где

$$f_s(n_u, n_m, n_e) = \begin{cases} 1, & \sum_{s_l \in \{u, m, e\}} n_{s_l} b_{s_l} + b_s \leq C, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}, \quad s \in \{u, e\},$$

$$f_m(n_u, n_m, n_e) = \begin{cases} 1, & [n_m = 1] \vee \left[ n_m = 0, \sum_{s \in \{u, m, e\}} n_s b_s + b_m \leq C \right], \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}$ .

Табл. 4.1. Параметры модели с тремя типами трафика

| Параметр                           | Тип трафика<br>$s$ | Описание                                                                              |
|------------------------------------|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lambda_s$                        | u                  | Интенсивность пуссоновского потока запросов на установление одноадресных соединений   |
|                                    | m                  | Интенсивность пуссоновского потока запросов на установление многоадресного соединения |
|                                    | e                  | Интенсивность пуссоновского потока запросов на передачу блоков эластичных данных      |
| $\mu_s^{-1}$                       | u                  | Среднее время занятия одноадресного соединения (с)                                    |
|                                    | m                  | Среднее время занятия многоадресного соединения (с)                                   |
|                                    | e                  | Средняя длина блока эластичных данных (бит)                                           |
| $\rho_s = \frac{\lambda_s}{\mu_s}$ | u                  | Интенсивность предложенной нагрузки одноадресного трафика (Эрл)                       |
|                                    | m                  | Интенсивность предложенной нагрузки многоадресного трафика (Эрл)                      |
|                                    | e                  | Интенсивность предложенной нагрузки эластичного трафика (бит/с)                       |

|       |   |                                                                                                                                                        |
|-------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $b_s$ | u | Число ЕКР, требуемых для установления одноадресного соединения (бит/с)                                                                                 |
|       | m | Число ЕКР, требуемых для установления многоадресного соединения (бит/с)                                                                                |
|       | e | Минимальное число ЕКР, требуемых для передачи блока эластичных данных – гарантированный порог (бит/с)                                                  |
| $n_s$ | u | Число установленных одноадресных соединений<br>$n_u \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor \right\}$                           |
|       | m | Состояние многоадресного соединения:<br>$n_m = 1$ обслуживается хотя бы один запрос – соединение «on», $n_m = 0$ в противном случае – соединение «off» |
|       | e | Число передаваемых блоков эластичных данных<br>$n_e \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right\}$                           |

Диаграмма интенсивностей переходов примет вид, показанный на рис. 4.4, и получим СУР в виде

$$\begin{aligned}
& p(n_u, n_m, n_e) \cdot \left[ \sum_{s \in \{u, m, e\}} \lambda_s \cdot 1\{(n_u, n_m, n_e) \notin \mathcal{B}_s\} + \right. \\
& + \lambda_m \cdot 1\{(n_u, n_m, n_e) \notin \mathcal{B}_m, n_m = 0\} + n_u \mu_u + \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1} \cdot 1\{n_m = 1\} + \\
& + \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e \cdot 1\{n_e > 0\} \Big] = p(n_u - 1, n_m, n_e) \cdot \lambda_u \cdot 1\{n_u > 0\} + \\
& + p(n_u, 0, n_e) \cdot \lambda_m \cdot 1\{n_m = 1\} + p(n_u, n_m, n_e - 1) \cdot \lambda_e \cdot 1\{n_e > 0\} + \\
& + p(n_u + 1, n_m, n_e) \cdot (n_u + 1) \mu_u \cdot 1\{(n_u, n_m, n_e) \notin \mathcal{B}_u\} + \\
& + p(n_u, 1, n_e) \cdot \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1} \cdot 1\{(n_u, n_m, n_e) \notin \mathcal{B}_m, n_m = 0\} + \\
& + p(n_u, n_m, n_e + 1) \cdot \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e \cdot 1\{(n_u, n_m, n_e) \notin \mathcal{B}_e\}, \\
& (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

По аналогии с мультисервисной моделью, здесь величина  $\bar{c}(n_u, n_m) := C - n_u b_u - n_m b_m$  является числом ЕКР, не занятых потоковым трафиком, и  $\mathcal{B}_s$ ,  $s \in \{u, m, e\}$  множества блокировок, определяемые формулами

$$\mathcal{B}_s := \left\{ (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}: \sum_{s_1 \in \{u, m, e\}} n_{s_1} b_{s_1} + b_s > C \right\}, \quad s \in \{u, e\}, \tag{4.11}$$

$$\mathcal{B}_m := \left\{ (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}: \sum_{s \in \{u, m, e\}} n_s b_s + b_m > C, n_m = 0 \right\}. \tag{4.12}$$

Доопределим для упрощенной модели с тремя типами трафика вероятности  $B_s := P\{(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{B}_s\}$ ,  $s \in \{u, m, e\}$  блокировок запросов, соответствующих каждому типу трафика, и среднее время  $T_e$  передачи блока эластичных данных

$$T_e = \frac{\sum_{(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}} n_e \cdot p(n_u, n_m, n_e)}{\lambda_e (1 - B_e)}. \tag{4.13}$$

Таким образом, была разработана мультисервисная модель звена сети с «тройной услугой», учитывающая три типа трафика – одноадресный, многоадресный и эластичный.

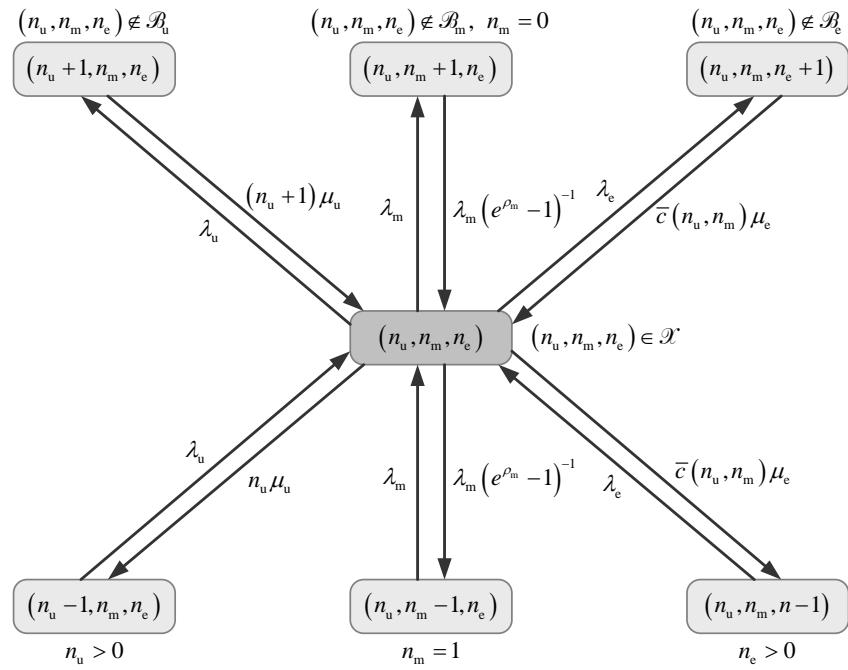


Рис. 4.4. Диаграмма интенсивностей переходов СП  $(N_u(t), N_m(t), N_e(t))$  для упрощенной модели

#### 4.1.3. Подходы к приближенному расчету стационарного распределения вероятностей

Применяя три подхода к получению формул для приближенного расчета стационарного распределения вероятностей состояний к модели с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком, получаем следующие восемь расчетных формул.

- (1) Аппроксимация мультипликативным решением.

$$p(n_u, n_m, n_e) \approx p(0, 0, 0) \cdot \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot (e^{\rho_m} - 1)^{n_m} \cdot \left( \frac{\rho_e}{C} \right)^{n_e}, \quad (4.14)$$

$(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X},$

$$p(n_u, n_m, n_e) \approx p(0, 0, 0) \cdot \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot (e^{\rho_m} - 1)^{n_m} \cdot \left( \frac{\rho_e}{C - n_u b_u} \right)^{n_e}, \quad (4.15)$$

$(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X},$

$$p(n_u, n_m, n_e) \approx p(0, 0, 0) \cdot \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot (e^{\rho_m} - 1)^{n_m} \cdot \left( \frac{\rho_e}{C - n_m b_m} \right)^{n_e}, \quad (4.16)$$

$(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X},$

$$p(n_u, n_m, n_e) \approx p(0, 0, 0) \cdot \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot (e^{\rho_m} - 1)^{n_m} \cdot \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{n_e}, \quad (4.17)$$

$(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}.$

(2) Приближенный расчет маргинального распределения числа передаваемых блоков эластичных данных.

$$p(i_u, i_m, i_e) = P\{n_u = i_u, n_m = i_m | n_e = i_e\} \cdot P\{n_e = i_e\} \approx \quad (4.18)$$

$$\approx P\{n_u = i_u, n_m = i_m | n_e = i_e\} \cdot \tilde{p}_1(i_e), \quad (i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X}.$$

(3) Приближенный расчет маргинального распределения числа установленных соединений.

$$p(i_u, i_m, i_e) = P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot P\{n_u = i_u, n_m = i_m\} \approx \quad (4.19)$$

$$\approx P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot \tilde{p}(i_u, i_m), \quad (i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X},$$

$$p(i_u, i_m, i_e) = P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot P\{n_u = i_u | n_m = i_m\} \cdot \quad (4.20)$$

$$\cdot P\{n_m = i_m\} \approx P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot \tilde{p}_2(i_u | i_m) \cdot \tilde{p}_3(i_m),$$

$(i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X},$

$$p(i_u, i_m, i_e) = P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot P\{n_m = i_m | n_u = i_u\} \cdot \quad (4.21)$$

$$\cdot P\{n_u = i_u\} \approx P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot \tilde{p}_4(i_m | i_u) \cdot \tilde{p}_5(i_u),$$

$(i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X}.$

Проведенные численные исследования (см. разделы 4.3.3 и 4.3.4) показали, что только распределение, вычисленное по формуле (4.19), подходит для расчета основной характеристики модели – среднего времени передачи блока эластичных данных,

при этом относительная погрешность вычислений составляет менее 1% для исходных данных, разработанных при проведении численного анализа.

Сформулированные ниже леммы 4.1 и 4.2 определяют формулы для распределения вероятностей  $p(n_u, n_m, n_e)$  состояний модели с тремя типами трафика. Иллюстрация метода показана на рис. 4.5. Сначала необходимо найти условное распределение вероятностей  $P\{n_e | n_u, n_m\}$  для каждого из макросостояний  $(n_u, n_m)$ , затем, с использованием полученного распределения, рассчитать агрегированные интенсивности переходов между макросостояниями системы. Именно из-за этого агрегирования и усреднения интенсивностей метод является приближенным, а не точным. Наконец, на третьем шаге, вычисляется распределение вероятностей  $\tilde{p}(n_u, n_m)$  макросостояний модели,  $(n_u, n_m) \in \mathcal{X}$ .

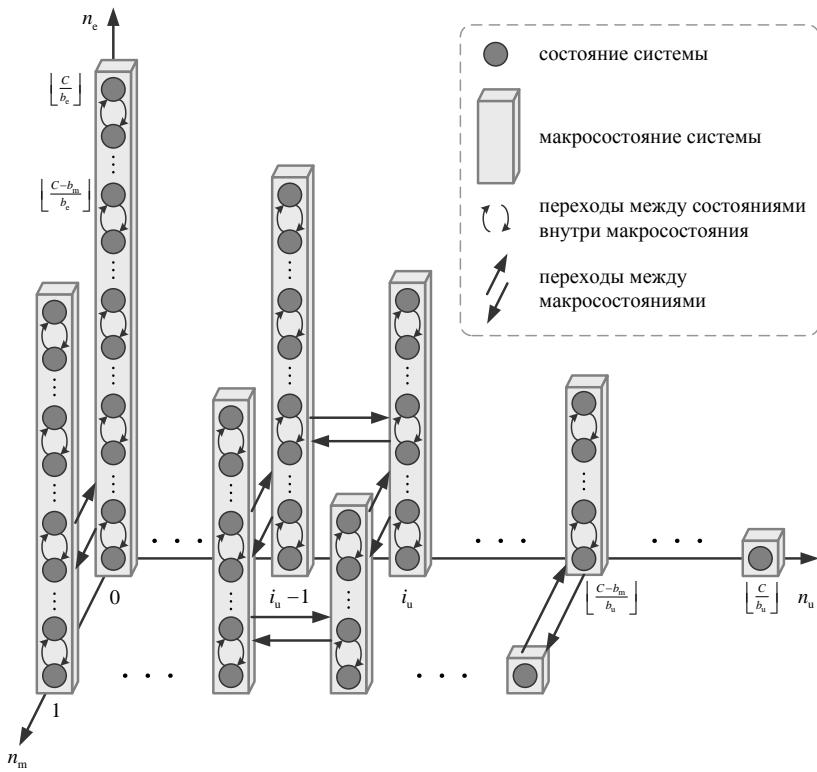


Рис. 4.5. Иллюстрация приближенного метода

#### 4.1.4. Условное распределение числа блоков эластичных данных

Введем  $P\{n_e = i_e | n_u, n_m\}$  условную вероятность того, что в некоторый момент времени по звену сети передаются  $i_e$  блоков эластичных данных при условии, что установлено  $n_u \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor\right\}$  одноадресных и  $n_m \in \{0, 1\}$  многоадресных соединений.

Лемма 4.1. Условное распределение числа блоков эластичных данных модели звена сети с «тройной услугой» вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
P\{n_e = i_e | n_u, n_m\} = & \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{i_e} \cdot \\
& \cdot \frac{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, n_m) - \rho_e)}{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1}}, \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Доказательство. Диаграмма интенсивностей переходов между состояниями  $(n_e = i_e | n_u, n_m)$  показана на рис. 4.6.

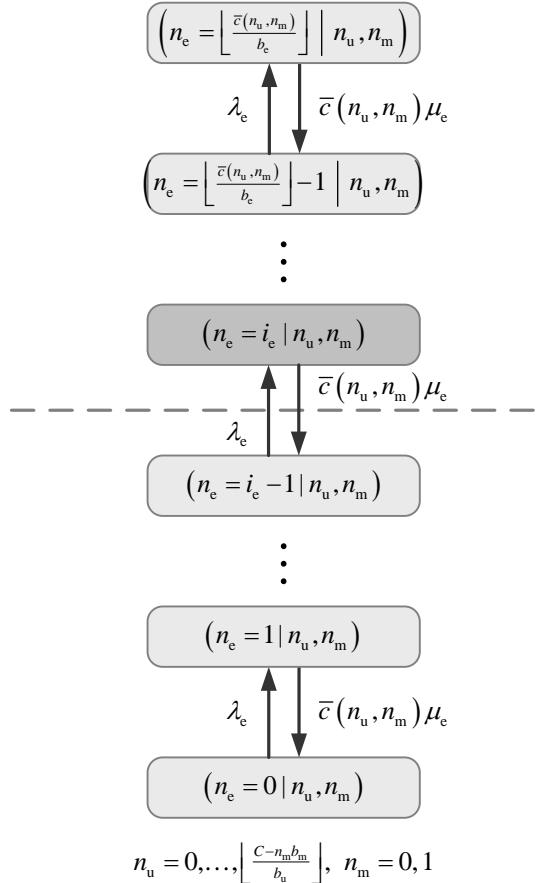


Рис. 4.6. Диаграмма интенсивностей переходов «внутри» макросостояния

Для доказательства воспользуемся системой уравнений локального баланса (СУЛБ)

$$\lambda_e \cdot P\{n_e = i_e - 1 | n_u, n_m\} = \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e \cdot P\{n_e = i_e | n_u, n_m\},$$

$$i_e = 1, \dots, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor, \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
P\{n_e = i_e | n_u, n_m\} &= P\{n_e = i_e - 1 | n_u, n_m\} \cdot \frac{\lambda_e}{\bar{c}(n_u, n_m) \mu_e} = \\
&= P\{n_e = i_e - 1 | n_u, n_m\} \cdot \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} = P\{n_e = i_e - 2 | n_u, n_m\} \cdot \\
&\cdot \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^2 = \dots = P\{n_e = 0 | n_u, n_m\} \cdot \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{i_e}, \\
i_e &= 1, \dots, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor, \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1.
\end{aligned}$$

Учитывая условие нормировки, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P\{n_e = 0 | n_u, n_m\}} &= 1 + \sum_{i_e=1}^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor} \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{i_e} = \\
&= \sum_{i_e=0}^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor} \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{i_e} = \frac{1 - \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1}}{1 - \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)}} = \\
&= \frac{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1}}{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, n_m) - \rho_e)}, \\
n_u &= 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

#### 4.1.5. Маргинальное распределение состояний одноадресных и многоадресного соединений

Найдем маргинальное распределение состояний одноадресных и многоадресного соединений. Обозначим  $P_m(n_u)$  вероятность того, что многоадресное соединение может быть установлено при условии, что установлено  $n_u$  одноадресных соединений, и, пусть,  $P_u(n_u, n_m)$  вероятность того, что одноадресное соединение может

быть установлено при условии, что установлено  $n_u$  одноадресных и  $n_m \in \{0, 1\}$  многоадресных соединений.

Лемма 4.2. Маргинальное распределение состояний одноадресных и многоадресного соединений модели звена сети с «тройной услугой» вычисляется приближенно по формуле

$$\begin{aligned} P\{n_u = i_u, n_m = i_m\} &:= \sum_{i_e=0}^{\lfloor C/b_e \rfloor} p(i_u, i_m, i_e) \approx \\ &\approx G^{-1} \cdot \left( \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{i_m} P_m^{i_m}(i_u) \right) \cdot \left( \frac{\rho_u^{i_u}}{i_u!} \prod_{j=0}^{i_u-1} P_u(j, i_m) \right), \\ i_u &= 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-i_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad i_m = 0, 1, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} G &:= \sum_{i_u=0}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \frac{\rho_u^{i_u}}{i_u!} \prod_{j=0}^{i_u-1} P_u(j, 0) + \\ &+ \sum_{i_u=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} \left( \left( e^{\rho_m} - 1 \right) P_m(i_u) \right) \cdot \left( \frac{\rho_u^{i_u}}{i_u!} \prod_{j=0}^{i_u-1} P_u(j, 1) \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} P_u(n_u, n_m) &:= \sum_{i_e=0}^{\lfloor \bar{c}(n_u+1, n_m)/b_e \rfloor} P\{n_e = i_e | n_u, n_m\} = \\ &= \bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor - \lfloor \bar{c}(n_u+1, n_m)/b_e \rfloor}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} P_m(n_u) &:= \sum_{i_e=0}^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor} P\{n_e = i_e | n_u, 0\} = \\ &= \bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor - \lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \frac{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor + 1}}{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor + 1}}, \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Доказательство. I. Найдем интенсивности переходов между макросостояниями  $(n_u, n_m)$ . Вероятности  $P_u(n_u, n_m)$  получаются по рис. 4.7:

$$P_u(n_u, n_m) = \frac{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, n_m) - \rho_e)}{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1}} \cdot \\ \cdot \sum_{i_e=0}^{\lfloor \bar{c}(n_u+1, n_m)/b_e \rfloor} \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, n_m)} \right)^{i_e} = \frac{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, n_m) - \rho_e)}{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, n_m)/b_e \rfloor + 1}} \cdot \\ \cdot \frac{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u+1, n_m)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u+1, n_m)/b_e \rfloor + 1}}{\bar{c}(n_u, n_m)^{\lfloor \bar{c}(n_u+1, n_m)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, n_m) - \rho_e)}, \\ n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-n_m b_m}{b_u} \right\rfloor - 1, n_m = 0, 1.$$

Аналогично выводятся вероятности  $P_m(n_u)$  (см. рис. 4.8):

$$P_m(n_u) = \frac{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, 0) - \rho_e)}{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor + 1}} \sum_{i_e=0}^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor} \left( \frac{\rho_e}{\bar{c}(n_u, 0)} \right)^{i_e} = \\ = \frac{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, 0) - \rho_e)}{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, 0)/b_e \rfloor + 1}} \cdot \\ \cdot \frac{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor + 1} - \rho_e^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor + 1}}{\bar{c}(n_u, 0)^{\lfloor \bar{c}(n_u, 1)/b_e \rfloor} (\bar{c}(n_u, 0) - \rho_e)}, n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor.$$

II. Получаем, что диаграмма интенсивностей переходов имеет вид, показанный на рис. 4.9. Для замкнутого контура  $(0, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 1) \cup (1, 0) \cup (0, 0)$  критерий Колмогорова [1] не выполнен

$$\lambda_m \cdot P_m(0) \times \lambda_u \cdot P_u(0, 1) \times \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1} \times \mu_u \neq \\ \neq \lambda_u \cdot P_u(0, 0) \times \lambda_m \cdot P_m(1) \times \mu_u \times \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1}$$

следовательно, СП также не обратим. В соответствии с формулой (4.19), приближенное решение аппроксимируем мультиплекативным.

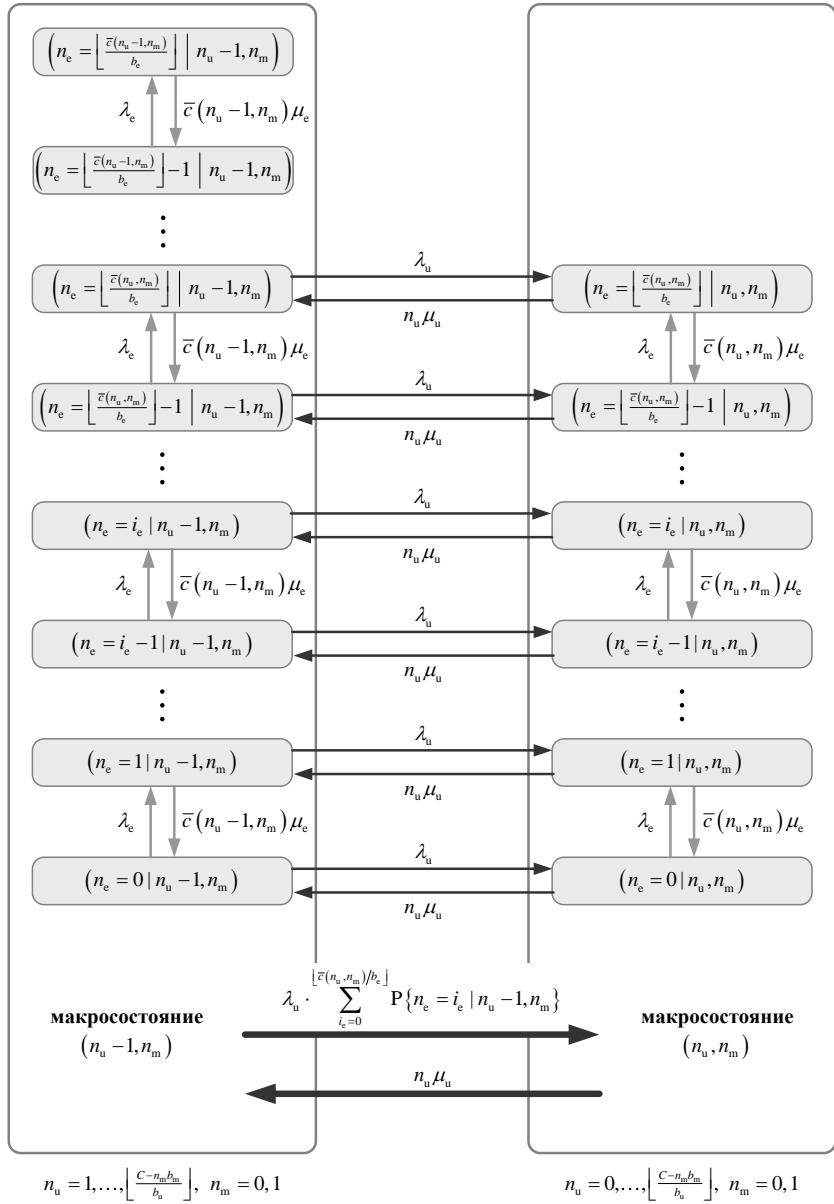


Рис. 4.7. Фрагмент диаграммы интенсивностей переходов между макросостояниями  $(n_u - 1, n_m)$  и  $(n_u, n_m)$

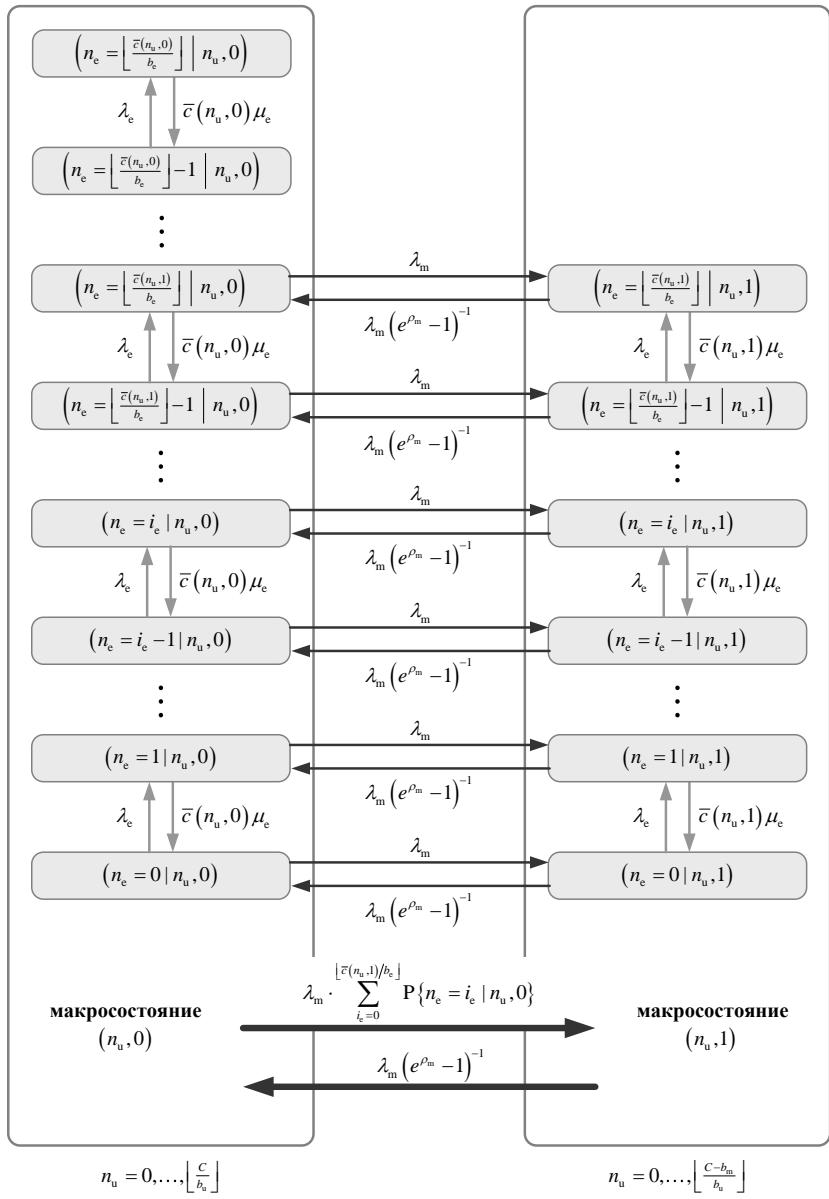


Рис. 4.8. Фрагмент диаграммы интенсивностей переходов между макросостояниями  $(n_u, 0)$  и  $(n_u, 1)$

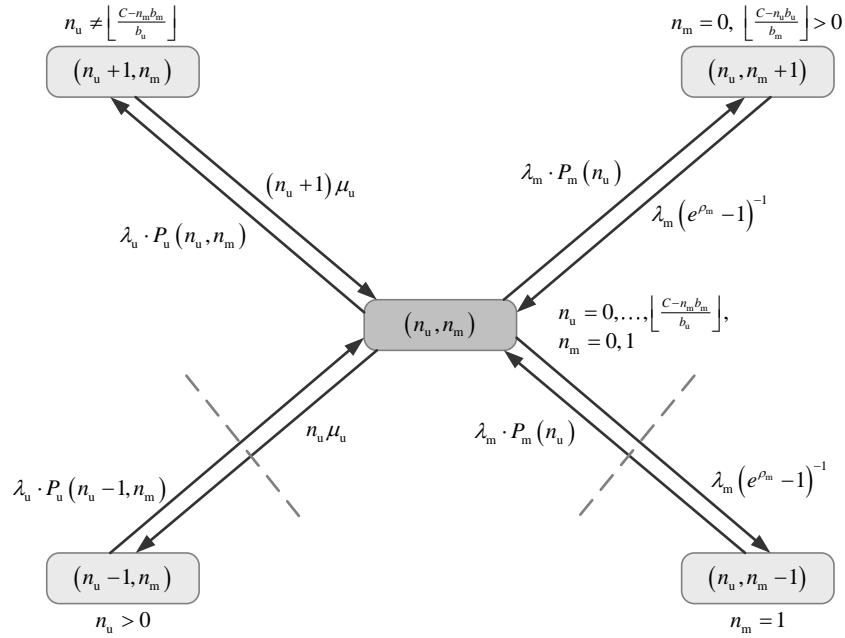


Рис. 4.9. Диаграмма интенсивностей переходов для СП с укрупненными состояниями

Относительно состояния одноадресных соединений получаем

$$\tilde{p}(n_u - 1, n_m) \cdot \lambda_u \cdot P_u(n_u - 1, n_m) = \tilde{p}(n_u, n_m) \cdot n_u \mu_u, \quad (4.27)$$

$$n_u = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, n_m = 0, 1,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(n_u, n_m) &= \tilde{p}(n_u - 1, n_m) \cdot \frac{\lambda_u}{n_u \mu_u} \cdot P_u(n_u - 1, n_m) = \\
&= \tilde{p}(n_u - 1, n_m) \cdot \frac{\rho_u}{n_u} \cdot P_u(n_u - 1, n_m) = \\
&= \tilde{p}(n_u - 2, n_m) \cdot \frac{\rho_u^2}{n_u(n_u - 1)} \cdot P_u(n_u - 1, n_m) P_u(n_u - 2, n_m), \\
n_u &= 1, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1.
\end{aligned}$$

Дальнейшее применение рекуррентной формулы (4.27) приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(n_u, n_m) &= \tilde{p}(0, n_m) \cdot \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot \prod_{j=0}^{n_u-1} P_u(j, n_m), \\
n_u &= 1, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Относительно состояния многоадресного соединения получаем

$$\tilde{p}(n_u, 0) \cdot \lambda_m \cdot P_m(n_u) = \tilde{p}(n_u, 1) \cdot \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1}, \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_u} \right\rfloor,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(n_u, 1) &= \tilde{p}(n_u, 0) \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1}} \cdot P_m(n_u), \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_u} \right\rfloor, \\
\tilde{p}(n_u, 1) &= \tilde{p}(n_u, 0) \cdot (e^{\rho_m} - 1) \cdot P_m(n_u), \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_u} \right\rfloor.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

С учетом формул (4.27) и (4.28), считаем, что вероятности  $\tilde{p}(n_u, n_m)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(n_u, 0) &= \tilde{p}(0, 0) \cdot \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot \prod_{j=0}^{n_u-1} P_u(j, 0), \quad n_u = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor, \\
\tilde{p}(0, 1) &= \tilde{p}(0, 0) \cdot (e^{\rho_m} - 1) \cdot P_m(n_u), \\
\tilde{p}(n_u, 1) &= \tilde{p}(0, 0) \cdot \left( \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot \prod_{j=0}^{n_u-1} P_u(j, 1) \right) \cdot ((e^{\rho_m} - 1) \cdot P_m(n_u)),
\end{aligned}$$

$$n_u = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_u} \right\rfloor,$$

что соответствует распределению (4.23).

Тогда получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{p}(0,0)} = & 1 + \sum_{n_u=1}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \left( \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot \prod_{j=0}^{n_u-1} P_u(j,0) \right) + (e^{\rho_m} - 1) \cdot P_m(n_u) + \\ & + \sum_{n_u=1}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} \left( \frac{\rho_u^{n_u}}{n_u!} \cdot \prod_{j=0}^{n_u-1} P_u(j,1) \right) \cdot ((e^{\rho_m} - 1) \cdot P_m(n_u)), \end{aligned}$$

которое, если доопределить  $\prod_{i \in \emptyset} a_i := 1$ , преобразуется в (4.24).

Лемма доказана. ■

#### 4.1.6. Алгоритм для расчета стационарного распределения вероятностей состояний

Теперь стационарное распределение состояний модели звена сети с «тройной услугой» может быть вычислено по формуле:

$$p(i_u, i_m, i_e) = P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot P\{n_u = i_u, n_m = i_m\}, \quad (4.30)$$

$$(i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X}.$$

Замечание 4.1. Численно показано, что

$$\sum_{(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}} p(n_u, n_m, n_e) = 1.$$

Запишем метод приближенного расчета распределения вероятностей состояний модели звена сети с «тройной услугой» в виде алгоритма 4.1.

Алгоритм 4.1. Расчет стационарного распределения вероятностей состояний модели звена сети с «тройной услугой» по приближенному методу.

Шаг 1. Расчет условных вероятностей  $P\{n_e = i_e | n_u, n_m\}$ ,  $i_e = 0, \dots, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor$ ,  $n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-n_m b_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $n_m = 0, 1$  по формуле (4.22) леммы 4.1.

Шаг 2. Расчет вероятностей  $P_u(n_u, n_m)$ ,  $n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-n_m b_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $n_m = 0, 1$  и  $P_m(n_u)$ ,  $n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor$  переходов между

макросостояниями по формулам (4.25) и (4.26) леммы 4.2 соответственно.

Шаг 3. Расчет приближенных значений маргинальных вероятностей  $P\{n_u = i_u, n_m = i_m\}$ ,  $i_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - i_m b_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $i_m = 0, 1$  по формулам (4.23)–(4.24) леммы 4.2.

Шаг 4. Расчет приближенного стационарного распределения  $p(i_u, i_m, i_e)$ ,  $(i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X}$  по формуле (4.30).

Замечание 4.2. Алгоритм 4.1 может быть расширен и на мультисервисную по каждому типу трафика модель звена сети с «тройной услугой», т. е.

$$p_1(i_u, i_m, i_e) = P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot P\{n_u = i_u, n_m = i_m\} \approx \\ \approx P\{n_e = i_e | n_u = i_u, n_m = i_m\} \cdot \tilde{p}(i_u, i_m), \quad (i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X}_1,$$

но необходимо учесть, что схожие с результатами леммы формулы могут быть получены только для случая  $b_1^u = \dots = b_{K_u}^u = b_1^m = \dots = b_{K_m}^m$ . Вопрос точности метода требует дополнительных исследований.

Таким образом, в данном разделе для расчета среднего времени передачи блока данных в модели звена сети с «тройной услугой» предложен приближенный метод, основанный на вычислении маргинального распределения числа одноадресных и многоадресных соединений. В разделах 4.3.1 и 4.3.2 разработан точный алгоритм для снижения размерности решаемой задачи.

## 4.2. Упрощенная модель звена сети с одноадресными и многоадресными соединениями

### 4.2.1. Модель трафика мультивещания как система с прозрачными заявками

В данном разделе строится моносервисная модель звена сети, по которой пользователям предоставляется услуга мультивещания. Модель строится в предположении, что нагрузка, создаваемая пользователями услуги, постоянна, и для предоставления услуги

используется один многоадресный поток трафика. С учетом особенностей формирования потоков при предоставлении услуг мультивещания, описанных в данном разделе, исследуются две модели предоставления услуги мультивещания.

Перейдем к построению модели. Рассматривается звено сети, поддерживающей предоставление одной услуги мультивещания, которая может находиться в состоянии «1» (включена), если услуга предоставляется хотя бы одному пользователю, или в состоянии «0» (выключена), в противном случае. Функционирование звена может быть описано с помощью системы массового обслуживания (СМО) с «прозрачными» [11] заявками  $M|G|1|0|\Pi$ , на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Заявка, поступившая в пустую систему, занимает прибор и обслуживается в течение некоторого случайного интервала времени. Все последующие заявки, поступившие в систему в период занятости, присоединяются к ранее поступившим заявкам и обслуживаются «прозрачно», т.е. одновременно на одном приборе. Дисциплина прозрачного обслуживания проиллюстрирована на рис. 4.10.

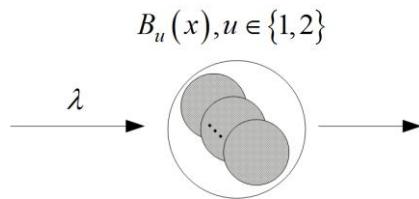


Рис. 4.10. Система массового обслуживания  $M|G|1|0|\Pi_u$  с прозрачными заявками

Исследуются две дисциплины «прозрачного» обслуживания. В первом случае (дисциплина  $\Pi_1$ ) период занятости прибора определяет первая из поступивших заявок, а в момент окончания ее обслуживания систему одновременно покидают все заявки, поступившие за время ее обслуживания, незамедлительно освобождая занятые ресурсы. Длительность обслуживания заявки-инициатора периода занятости распределена по произвольному закону с ФР  $B_1(x)$  и средним значением  $\mu^{-1} < \infty$ . При дисциплине

$P_2$  заявки, обслуживаясь одновременно на одном приборе, покидают систему независимо друг от друга. Длительность обслуживания заявок распределена в соответствии с ФР  $B_2(x)$  со средним значением  $\gamma^{-1} < \infty$ .

Введем случайные процессы (СП)  $\xi^{(1)}(t)$  и  $\xi^{(2)}(t)$ , описывающие число заявок в системе в момент времени  $t$  для дисциплин  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, которые проиллюстрированы на рис. 4.11.

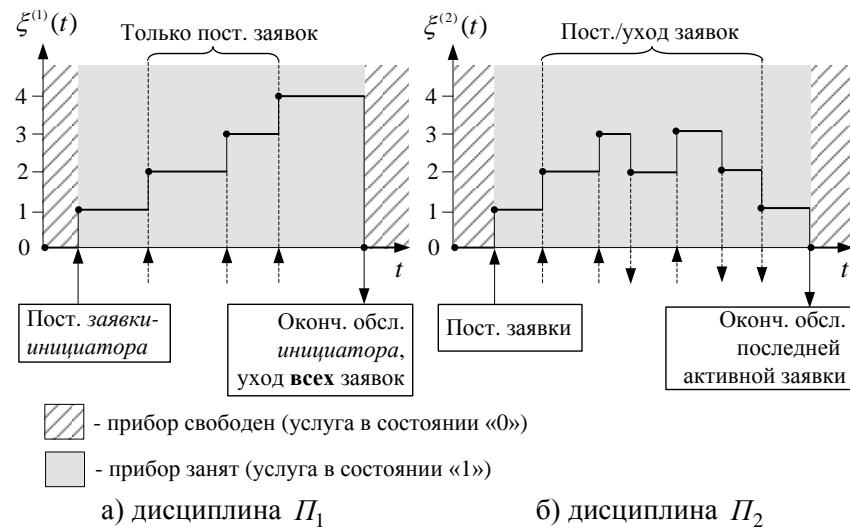


Рис. 4.11. Диаграммы случайных процессов  $\xi^{(1)}(t)$  и  $\xi^{(2)}(t)$  числа заявок в системе

Исследуем отдельно модели с двумя указанными дисциплинами. Для анализа модели с дисциплиной  $P_1$  рассматриваемая СМО кодируется как  $M|G|1|0|P_1$  и анализируется с помощью аппарата линейчатых марковских процессов [5]. Введем случайный процесс  $\{\eta(t), t \geq 0\}$ , характеризующий состояние системы, следующим образом. Если в

момент  $t$  система свободна, т.е. число заявок в системе  $\xi^{(1)}(t) = 0$ , то  $\eta(t) = \xi^{(1)}(t)$ . В противном случае  $\eta(t) = (\xi^{(1)}(t), \nu(t))$ , где  $\nu(t)$  – прошедшее время обслуживания первой из поступивших заявок, т.е. время, прошедшее с начала периода занятости системы. По построению  $\eta(t)$  является линейчатым марковским процессом, определенным на множестве состояний  $\mathcal{X}_1 = \{(0); (i, x), i=1, 2, \dots, x > 0\}$ .

Введем вероятности  $p_0^{(1)}(t) = P\{\xi^{(1)}(t) = 0\}$ ,  $P_k^{(1)}(x, t) = P\{\xi^{(1)}(t) = k, \nu(t) < x\}$ , и функцию плотности  $p_k^{(1)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} P_k^{(1)}(x, t)$ ,  $k \geq 1$ . Тогда для моментов времени  $t$  и  $t + \Delta$  и  $k \geq 1$  выполняется соотношение

$$p_k^{(1)}(x + \Delta, t + \Delta) = p_k^{(1)}(x, t)(1 - \lambda\Delta) \frac{1 - B_1(x + \Delta)}{1 - B_1(x)} + \\ + u(k-1)p_{k-1}^{(1)}(x, t)\lambda\Delta \frac{1 - B_1(x + \Delta)}{1 - B_1(x)} + o(\Delta) \quad (4.31)$$

где  $\frac{1 - B_1(x + \Delta)}{1 - B_1(x)}$  – вероятность того, что за время  $\Delta$  период занятости не закончился, при условии, что с момента его начала прошло время  $x$ , а  $u(\cdot)$  – функция Хэвисайда.

Предположим, что существуют вероятности  $p_0^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0^{(1)}(t)$ ,  $P_k^{(1)}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k^{(1)}(x, t)$  и функции плотности  $p_k^{(1)}(x) = (P_k^{(1)})'(x)$ . Тогда, выполнив в (4.31) предельный переход, получаем систему уравнений

$$q_k(x) = -\lambda q_k(x) + u(k-1)\lambda q_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \quad (4.32)$$

где для удобства записи введена функция

$$q_k(x) = \frac{p_k^{(1)}(x)}{1 - B_1(x)}. \quad (4.33)$$

Несложно заметить, что граничные условия для системы уравнений (4.32) имеют вид

$$\lambda p_0^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} q_k(x) dB_1(x), \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} q_1(0) = \lambda p_0, \\ q_k(0) = 0, k \geq 2, \end{cases} \quad (4.35)$$

а ее решение определяется формулой

$$q_k(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} q_1(0), \quad k \geq 1, \quad (4.36)$$

что доказывается с помощью метода математической индукции.

Из (4.33) и (4.36) следует, что

$$p_k^{(1)}(x) = (1 - B_1(x)) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} q_1(0).$$

С учетом того, что  $p_k^{(1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} P_k^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} p_k^{(1)}(x) dx$  и после

преобразований получаем  $p_k^{(1)} = \frac{q_1(0)}{\lambda} Q_{k-1}$ , где  $Q_k = 1 - \sum_{i=0}^k \beta_i$  и

$\beta_i = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} dB_1(t)$ . Теперь найти  $p_0^{(1)}$  можно из системы

уравнений (4.32) с учетом граничных условий (4.34):  $p_0^{(1)} = \frac{1}{1 + \rho}$ ,

где  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.3. Стационарные вероятности  $\{p_k^{(1)}, k \geq 0\}$  СП  $\xi^{(1)}(t)$ ,

описывающего число заявок в СМО  $M|G|1|0|\Pi_1$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} p_0^{(1)} &= \frac{1}{1+\rho}, \\ p_k^{(1)} &= \frac{1}{1+\rho} Q_{k-1}, \quad k \geq 1, \\ \text{где } Q_k &= 1 - \sum_{i=0}^k \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} dB_1(t). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Нетрудно видеть, что производящая функция (ПФ)  $P(z)$  распределения (4.37) записывается как

$$P(z) = \frac{1 - z\beta(\lambda - \lambda z)}{(1-z)(1+\rho)}, \tag{4.38}$$

и, далее, имея ПФ  $P(z)$ , получаем математическое ожидание  $M\xi^{(1)}$  и дисперсию  $D\xi^{(1)}$  числа заявок в СМО  $M|G|1|0|\Pi_1$ :

$$M\xi^{(1)} = \frac{\lambda^2 b^{(2)} + 2\rho}{2(1+\rho)}, \tag{4.39}$$

$$D\xi^{(1)} = \frac{2\lambda^3 b^{(3)} + 9\lambda^2 b^{(2)} + 6\rho}{6(1+\rho)} - \frac{\lambda^2 (b^{(2)})^2 + 4\lambda^2 \rho b^{(2)} + 4\rho^2}{4(1+\rho)^2}, \tag{4.40}$$

где  $b^{(i)}$  –  $i$ -й начальный момент ФР  $B_1(x)$ .

Отметим отдельно случай экспоненциального распределения длительности обслуживания, когда распределение (4.37) принимает вид

$$\begin{aligned} p_0^{(1)} &= \frac{1}{1+\rho}, \\ p_k^{(1)} &= \frac{1}{1+\rho} \left( \frac{\rho}{1+\rho} \right)^k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{4.41}$$

а характеристики (4.39) и (4.40) рассчитываются по формулам

$$M\xi^{(1)} = \rho, \quad D\xi^{(1)} = \rho(1+\rho). \tag{4.42}$$

Рассмотрим теперь модель с дисциплиной обслуживания  $P_2$ , и пусть число источников нагрузки  $N$  конечно. Рассмотрим следующую интерпретацию модели: каждый из  $N$  пользователей создает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda_i$ ,

$i=1,...,N$ , где  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda$ . Функция распределения  $B_2(x)$  времени

обслуживания заявок  $i$ -потока распределена по общему закону и имеет конечное математическое ожидание  $\gamma_i^{-1}$ . Запрос каждого из пользователей обслуживается на отдельном приборе, который закреплен за данным пользователем и не может использоваться остальными.

Анализ модели проводится с помощью линейчатого процесса  $\eta(t) = (\xi^{(2)}(t), v_1(t), \dots, v_N(t))$ , где  $\xi^{(2)}(t)$  – число заявок в системе,  $v_k(t)$  – прошедшее время обслуживания заявки  $k$ -го потока. Процесс  $\eta(t)$  является марковским (см., например, [5]), множество его состояний

$$\mathcal{X}_2 = \left\{ \omega_0; \omega_k(x_1, \dots, x_N), 0 \leq x_1, \dots, x_N < \infty, k = 1, \dots, N \right\}.$$

Введем обозначения

$$p_0^{(2)}(t) = P\{\xi^{(2)}(t) = 0\}$$

$$p_i^{(2)}(x_1, \dots, x_N, t) = P\{\xi^{(2)}(t) = i, v_1(t) < x_1, \dots, v_N(t) < x_N\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Выразим распределения вероятностей в момент времени  $t + \Delta$  через распределение вероятностей в момент времени  $t$  с помощью формулы полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_0^{(2)}(t + \Delta) &= p_0^{(2)}(t) \left( 1 - \sum_{j=1}^N \lambda_j \Delta \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^\infty p_i^{(2)}(0, \dots, x_i, \dots, 0; t) \frac{B_2(x_i + \Delta) - B_2(x_i)}{1 - B_2(x_i)} dx_i + o(\Delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n; t + \Delta) &= p_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n; t) \prod_{j \in \mathcal{F}(\omega_k)} \frac{1 - B_2(x_j)}{1 - B_2(x_j - \Delta)} \cdot \\
&\cdot \left( 1 - \sum_{i \in \mathcal{F}(\omega_k)} \lambda_i \Delta \right) + \sum_{i \in \overline{\mathcal{F}}(\omega_k^1)} \int_0^\infty p_{k+1}^{(2)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; t) \prod_{j \in \mathcal{F}(\omega_k)} \frac{1 - B_2(x_j)}{1 - B_2(x_j - \Delta)} \times \\
&\times \frac{B_2(x_i + \Delta) - B_2(x_i)}{1 - B_2(x_i - \Delta)} dx_i + o(\Delta), \\
p_N^{(2)}(x_1, \dots, x_N; t + \Delta) &= p_N^{(2)}(x_1 - \Delta, \dots, x_N - \Delta; t) \prod_{i=1}^N \frac{1 - B_2(x_i)}{1 - B_2(x_i - \Delta)},
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{F}(\omega_k) = \{i : x_i > 0, i = 1, \dots, N | \omega_k(x_1, \dots, x_N)\},$$

$$\overline{\mathcal{F}}(\omega_k) = \{i : x_i = 0, i = 1, \dots, N | \omega_k(x_1, \dots, x_N)\},$$

$$x_i = \begin{cases} x_i + \Delta, & x_i > 0, \\ 0, & x_i = 0. \end{cases}$$

Определим функции

$$q_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{p_k^{(2)}(x_1, \dots, x_N)}{\prod_{j \in \mathcal{F}(\omega_k)} (1 - B_2(x_j))}, \quad k = 0, \dots, N. \quad (4.43)$$

Предположим, что существуют производные  $\frac{\partial q_k}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial q_k}{\partial x_i}$ ,

$i \in \mathcal{F}(\omega_k)$ ;  $k = 1, \dots, N$ . Тогда с учетом того, что для непрерывной ограниченной функции  $g(x)$  и функции распределения  $F(x)$  справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{F(x+t) - F(x)}{t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x),$$

получаем:

$$\frac{\partial q_0(t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \lambda_j q_0(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^\infty q_1(0, \dots, x_j, \dots, 0; t) dB_2(x_j),$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial q_k(x_1, \dots, x_N; t)}{\partial t} + \sum_{j \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \frac{\partial q_k(x_1, \dots, x_N; t)}{\partial x_i} + \dots \\
& \dots + \sum_{j \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \lambda_j q_k(x_1, \dots, x_N; t) = \sum_{i \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \int_0^\infty (q_{k+1} x_1, \dots, x_N; t) dB_2(x_i), \\
& k = 1, \dots, N, \\
& \frac{\partial q_N}{\partial t} + \frac{\partial q_N}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial q_N}{\partial x_N} = 0.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Из соотношений

$$\begin{aligned}
& p_k^{(2)}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N; t) \prod_{j \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \frac{1 - B_2(x_j + \Delta)}{1 - B_2(x_j)} \lambda_i \Delta = \\
& = p_{k+1}^{(2)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N; t + \Delta)
\end{aligned}$$

получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
& \lambda_i q_k(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N; t) = \\
& = q_{k+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N; t), i \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k), k = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Если функции (4.43) соответствуют стационарному распределению, то все производные по  $t$  обращаются в нуль и система (4.44) запишется в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \lambda_j q_0 = \sum_{j=1}^N \int_0^\infty q_1(0, \dots, x_j, \dots, 0; t) dB(x_j), \\
& \sum_{j \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \frac{\partial q_k(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} + \sum_{j \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \lambda_j q_k(x_1, \dots, x_N) = \\
& = \sum_{i \in \bar{\mathcal{F}}(\omega_k)} \int_0^\infty q_k(x_1, \dots, x_N) dB_2(x_i), k = 1, \dots, N, \\
& \frac{\partial q_N}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial q_N}{\partial x_N} = 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Наоборот, любое распределение вероятностей, удовлетворяющее (4.46) и граничным условиям (4.45), является стационарным. Таким решением является

$$q_k(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i \in \mathcal{F}(\omega_k)} \lambda_i p_0^{(2)}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.47)$$

Это легко проверяется подстановкой. При этом  $p_0^{(2)}$  определяется из условия нормировки:

$$p_0^{(2)} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_j + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \tilde{\rho}_{j_1} \tilde{\rho}_{j_2} + \dots + \prod_{j=1}^N \tilde{\rho}_j}, \quad (4.48)$$

$$\text{где } \tilde{\rho}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_i}.$$

Обозначим  $p_k(\mathbf{e}) = p_k(e_1, \dots, e_N)$ ,  $e_i \in \{0, 1\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} p_k(e_1, \dots, e_N) &= \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \lambda_1^{e_1} \lambda_2^{e_2} \dots \lambda_N^{e_N} (1 - B_2(x_1))^{e_1} \dots (1 - B_2(x_N))^{e_N} d\mathbf{x}_e, \end{aligned} \quad (4.49)$$

где введено обозначение  $d\mathbf{x}_e = dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$ , где  $i_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  такие, что  $e_{i_j} = 1$ .

Из формулы (4.49) получаем:

$$p_k^{(2)}(e_1, \dots, e_N) = \prod_{i=1}^N \tilde{\rho}_i^{e_i} p_0^{(2)}. \quad (4.50)$$

Общая вероятность того, что в системе находится  $k$  заявок

$$p_k^{(2)} = \sum_{\mathbf{e} \in E_k} p_k^{(2)}(\mathbf{e}), \quad (4.51)$$

$$\text{где } E_k = \left\{ \mathbf{e} : \sum_{i=1}^N e_i = k \right\}.$$

Таким образом, если  $B_2(x)$  имеет конечное математическое ожидание  $\gamma^{-1}$ , то справедливо следующее утверждение:

Лемма 4.4. Распределение вероятностей  $\{p_k^{(2)}, k \geq 0\}$  процесса  $\xi^{(2)}(t)$  имеет вид

$$p_0^{(2)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq N} \tilde{\rho}_{j_1} \dots \tilde{\rho}_{j_i}}, \quad (4.52)$$

$$p_k^{(2)} = \sum_{\mathbf{e} \in E_k} p_k^{(2)}(\mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{e} \in E_k} \prod_{i=1}^N \tilde{\rho}_i^{e_i} p_0, \quad k = 1, \dots, N.$$

В частности, при  $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , с учетом (4.52) справедливо следствие.

Следствие 4.1. Распределение вероятностей  $\{p_k^{(2)}, k \geq 0\}$  процесса  $\xi^{(2)}(t)$  при  $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , имеет вид

$$p_0^{(2)} = \frac{1}{(1 + \tilde{\rho})^N}, \quad p_k^{(2)} = \frac{C_N^k \tilde{\rho}^k}{(1 + \tilde{\rho})^N}, \quad k \geq 1. \quad (4.53)$$

Отметим, что в этом случае среднее число  $M\xi^{(2)}$  заявок в системе и дисперсия  $D\xi^{(2)}$  числа заявок рассчитываются по формулам

$$M\xi^{(2)} = \frac{N\tilde{\rho}}{1 + \tilde{\rho}}, \quad D\xi^{(2)} = \frac{N\tilde{\rho}}{(1 + \tilde{\rho})^2}. \quad (4.54)$$

На основе распределения (4.53) с помощью предельного перехода несложно получить распределение числа заявок в системе для случая бесконечного числа  $N$  источников.

Следствие 4.2. При  $N \rightarrow \infty$  распределение  $\{p_k^{(2)}, k \geq 0\}$  процесса  $\xi^{(2)}(t)$  имеет вид

$$p_0^{(2)} = e^{-\rho}, \quad p_k^{(2)} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}, \quad k \geq 1, \quad (4.55)$$

где  $\rho = \tilde{\rho}N$  – суммарная нагрузка.

В таком случае, среднее число  $M\xi^{(2)}$  заявок в системе и дисперсия  $D\xi^{(2)}$  числа заявок принимают вид

$$M\xi^{(2)} = \rho, \quad D\xi^{(2)} = \rho. \quad (4.56)$$

Рассмотренную модель с дисциплиной обслуживания  $P_2$  можно интерпретировать также следующим образом. Пусть на систему поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda(k) = (N-k)\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \frac{\lambda}{N}$ . Поскольку при дисциплине  $P_2$  заявки обслуживаются независимо друг от друга, то несложно видеть, что рассматриваемая система эквивалентна частному случаю модели Энгсета с явными потерями (см., например, [1]), когда число обслуживающих приборов совпадает с числом  $N$  источников нагрузки. В таком случае, стационарное распределение вероятностей  $p_k$  СП  $\xi^{(2)}(t)$  имеет вид (4.53), где  $\tilde{\rho} = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ .

Учитывая особенности обслуживания трафика услуг мультивещания, помимо СП  $\xi^{(1)}(t)$  и  $\xi^{(2)}(t)$ , описывающих число заявок в системе, целесообразно рассматривать также СП  $\psi^{(1)}(t)$  и  $\psi^{(2)}(t)$ , описывающие занятость системы, т.е. наличие в системе в момент времени  $t$  хотя бы одной заявки. Теперь с учетом полученных выше результатов сформулируем следующее важное утверждение.

Лемма 4.5. Стационарное распределение  $\{\pi_i^{(u)}\}_{i=0,1}$  СП  $\psi^{(u)}(t)$ ,

$u \in \{1, 2\}$ , инвариантно относительно закона распределения длительности обслуживания и имеет вид

$$\pi_i^{(1)} = \frac{\rho^i}{1+\rho}, \quad i \in \{0, 1\}; \quad (4.57)$$

$$\pi_i^{(2)} = (e^\rho - 1)^i e^{-\rho}, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (4.58)$$

Доказательство. В момент времени  $t$  система не пуста, если в ней есть хотя бы одна заявка, что происходит с вероятностью  $\pi_1^{(u)} = \sum_{k \geq 1} p_k^{(u)} = 1 - p_0^{(u)}$ , где  $p_0^{(u)}$ , в зависимости от дисциплины прозрачного обслуживания задается формулой (4.41) или (4.55). ■

Рассмотрим также такую важную характеристику, как средняя длительность периода занятости системы, которую мы обозначим  $w^u$ ,  $u \in \{1, 2\}$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4.6.** Средняя длительность  $w^u$  периода занятости системы  $M|G|1|0|\Pi_u$  определяется формулой

$$w^u = \begin{cases} \mu^{-1}, & u = 1, \\ (e^\rho - 1)\lambda^{-1}, & u = 2. \end{cases} \quad (4.59)$$

**Доказательство.** Для дисциплины  $\Pi_1$ , исходя из особенностей построения процесса  $\xi^{(1)}(t)$ , среднее время занятости системы совпадает со средней длительностью обслуживания заявки, т.е.  $w^1 = \mu^{-1}$ .

В случае дисциплины  $\Pi_2$  модель  $M|G|1|0|\Pi_2$ , как показано выше, эквивалентна модели  $M|G|1|\infty$ , среднее время занятости которой  $w^2 = (e^\rho - 1)\lambda^{-1}$ . ■

#### 4.2.2. Подходы к расчету вероятностей блокировок

В данном разделе проводится построение математической модели звена мультисервисной сети и определяются вероятностные характеристики для анализа эффективности функционирования системы.

Вначале сделаем обзор известных работ, посвященных исследованию моделей сетей мультивещания, и введем систему обозначений, необходимую для дальнейшего построения модели звена мультисервисной сети. Будем рассматривать сеть многоадресной передачи с несколькими источниками информации, которые, как и пользователи, могут быть подключены к любому узлу сети. Каждый источник предоставляет конечное число услуг и по запросам пользователей передает информацию, соответствующую содержанию услуги. Соединения в сети мультивещания имеют структуру дерева, корнем которого является узел подключения источника, а листьями – узлы подключения пользователей. Поскольку каждый пользователь сети

может обращаться к источнику независимо от других пользователей, структура многоадресных соединений динамична: сделавший запрос на предоставление услуги пользователь будет подключен к активному дереву мультивещания, если эта услуга уже предоставляется другим пользователям, или инициализирует новое дерево мультивещания, если эта услуга никому не предоставлялась. Помимо многоадресных соединений, в сети также могут предоставляться одноадресные соединения различных классов. Одноадресные соединения, в отличие от многоадресных, могут быть установлены между двумя произвольным узлами сети.

Рассмотрим описание модели сети с двумя типами соединений (одноадресными и многоадресными), взяв за основу работы [7, 12] при этом учтем то, что услуги мультивещания могут обслуживаться согласно двум дисциплинам «прозрачного» обслуживания  $P_1$  и  $P_2$ , описанным в разделе 2.1.2.

Обозначим  $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$  множество всех источников в сети и  $\mathcal{M}_s = \{1, \dots, M_s\}$  – множество услуг, предоставляемых  $s$ -источником. Пусть  $b_{ms}$  – число единиц емкости звена, требуемое для предоставления услуги  $m \in \mathcal{M}_s$ . Последовательность звеньев сети от узла подключения пользователя до источника будем называть физическим путем. Обозначим  $\mathcal{P}_s = \{1, \dots, P_s\}$  множество физических путей от  $s$ -источника,  $\mathcal{L}_{ps} \subseteq \mathcal{L}$  – множество всех звеньев  $p$ -пути к  $s$ -источнику,  $\mathcal{P}_s^l = \{p \in \mathcal{P}_s : l \in \mathcal{L}_{ps}\}$  – множество физических путей к  $s$ -источнику, проходящих через звено  $l \in \mathcal{L}$ , и  $\mathcal{S}^l = \{s \in \mathcal{S} : \mathcal{P}_s^l \neq \emptyset\}$  – множество источников, предоставляющих услуги через  $l$ -звено.

Обозначим  $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$  множество всех классов одноадресных соединений сети. Каждый класс соединений характеризуется двумя параметрами: маршрутом, то есть множеством звеньев сети, через которые устанавливается соединение, и требованием к емкости звеньев маршрута. Пусть  $\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}$  – маршрут, а  $d_k$  – требование к емкости всех звеньев маршрута соединения  $k$ -класса. Введем также множество

$\mathcal{K}^l = \{k \in \mathcal{K} : l \in \mathcal{L}_k\}$  классов одноадресных соединений, маршруты которых включают  $l$ -звено.

Пару  $(m, s)$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , будем называть  $(m, s)$ -услугой. Пусть для предоставления  $(m, s)$ -услуги на всех звеньях физического пути  $p \in \mathcal{P}_s$  требуется  $b_{ms}$  единиц емкости звена. Тройку  $(m, p, s)$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$ ,  $p \in \mathcal{P}_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , будем называть логическим путем или  $(m, p, s)$ -путем. Состояние логического пути обозначим  $\alpha_{mps}$ , при этом пусть  $\alpha_{mps} = 1$ , когда  $(m, s)$ -услуга предоставляется пользователю, которого связывает с источником  $s$  физический путь  $p$ ; в противном случае  $\alpha_{mps} = 0$ . Теперь детальное состояние всех логических путей можно описать набором матриц  $\boldsymbol{\alpha} = (A_1, \dots, A_S)$ , где матрица

$$A_s = \begin{pmatrix} \alpha_{11s} & \dots & \alpha_{1P_ss} \\ \dots & & \dots \\ \alpha_{M_s1s} & \dots & \alpha_{M_sP_ss} \end{pmatrix}$$

определяет детальное состояние всех логических путей к источнику  $s \in \mathcal{S}$ . Множество всех возможных матриц такого вида

$$\text{обозначим } \mathcal{A} = \left\{ \sum_{s \in \mathcal{S}} M_s P_s \right\}.$$

Запрос пользователя на установление одноадресного соединения  $k$ -класса удовлетворяется при условии наличия на каждом звене маршрута свободных  $d_k$  единиц емкости. При нехватке необходимых ресурсов на момент поступления запроса хотя бы на одном звене маршрута происходит блокировка установления соединения, и запрос пользователя теряется. Состояние  $k$ -класса одноадресных соединений определяется числом установленных в сети соединений данного класса. Обозначим его  $\beta_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Состояние всех классов одноадресных соединений в сети определяется вектором  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_K)$ , а множество всех возможных состояний  $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, \dots\}^K$ .

Будем предполагать, что логические пути и классы одноадресных соединений в сети функционируют независимо друг от друга. Пусть запросы на использование  $(m, p, s)$ -пути образуют пуассоновский поток интенсивности  $\lambda_{mps}$ , а время занятия пути не зависит от процесса поступления запросов и распределено по экспоненциальному закону со средним  $\mu_{mps}^{-1}$ ,  $\rho_{mps} = \lambda_{mps} / \mu_{mps}$ . Аналогично, пусть запросы на установление соединений  $k$ -класса образуют пуассоновский поток интенсивности  $v_k$ , а времена занятия таких соединений не зависят от моментов их установления и распределены по экспоненциальному закону со средним  $\kappa_k^{-1}$ ,

$$a_k = \frac{v_k}{\kappa_k}.$$

Состояние всей сети определяется совокупностью состояний всех логических путей и классов одноадресных соединений и при условии неограниченных емкостей звеньев, то есть при  $C_l = \infty$ ,  $l \in \mathcal{L}$ , для случая, когда обслуживание трафика многоадресных соединений происходит согласно дисциплине обслуживания  $\Pi_u$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , описывается составным случайным процессом

$$\left\{ \tilde{\Gamma}^{(u)}(t) = \left( \left( A_{mps}^{(u)}(t) \right)_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}}, \left( B_k(t) \right)_{k \in \mathcal{K}} \right), t \geq 0 \right\}, \quad (4.60)$$

$$u \in \{1, 2\},$$

определенным на множестве

$$\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} = \{0, 1\}^{\sum_{s \in \mathcal{S}} M_s P_s}, \quad \mathcal{B} = \{0, 1, 2, \dots\}^K. \quad (4.61)$$

При этом случайные процессы  $\left\{ A_{mps}^{(u)}(t), t \geq 0 \right\}$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$ ,  $p \in \mathcal{P}_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , и  $\left\{ B_k(t), t \geq 0 \right\}$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , описывают, соответственно, поведение  $(m, p, s)$ -пути в зависимости от дисциплины обслуживания трафика многоадресных соединений и  $k$ -класса одноадресных соединений.

Стационарное распределение процесса  $\{\tilde{\Gamma}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ , а также случай, когда емкость звеньев сети  $C_l$ ,  $l \in \mathcal{L}$ , ограничена, рассмотрим позднее. А теперь, введя основные понятия, описывающие модель мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями, перейдем к описанию модели отдельного полнодоступного звена сети. Исследование проведем на основе работ [7], где рассматривается дисциплина обслуживания трафика услуг мультивещания типа  $\Pi_1$ , и работы [12], где рассматривается дисциплина типа  $\Pi_2$ . Обобщим и расширим полученные в указанных работах результаты, рассмотрев модель с двумя дисциплинами обслуживания, и, кроме того, исследовав две важные характеристики – распределение числа пользователей услуг мультивещания и состояние услуг. Предположим, что в модели сети все звенья, кроме некоторого звена  $l^*$ , имеют неограниченные ресурсы для обслуживания запросов пользователей, то есть  $C_l = \infty$  для  $l \in \mathcal{L} \setminus \{l^*\}$ . Задача анализа блокировок в такой системе сводится к анализу сети, состоящей из одного звена  $l^*$ , с одним источником  $s^*$ , который предоставляет услуги из множества  $\mathcal{M} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}^{l^*}} \mathcal{M}_s$ , и множеством классов одноадресных соединений  $\mathcal{K}^{l^*}$ . Для удобства записи далее индексы  $l^*$  и  $s^*$  опускаются.

Функционирование звена мультисервисной сети с двумя типами соединений будем описывать с помощью многопотоковой мультисервисной системы массового обслуживания, схематично изображенной на рис. 4.12.

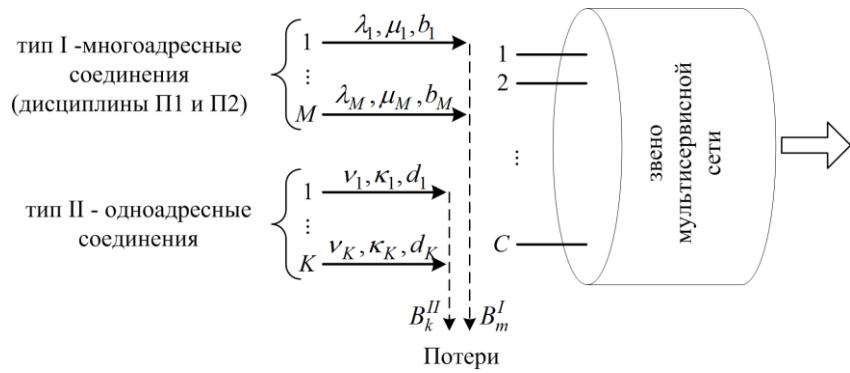


Рис. 4.12. Схема модели звена мультисервисной сети с одноадресными и многоадресными соединениями с учетом двух дисциплин обслуживания  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  трафика мультивещания

На полнодоступную систему, состоящую из  $C = C_l^*$  приборов (единиц канального ресурса) и не имеющую накопителя, поступают  $M = |\mathcal{M}|$  потоков заявок типа  $I$  и  $K = |\mathcal{K}|$  потоков заявок типа  $II$ . Будем считать, что все  $M + K$  поступающих в систему потоков являются пуассоновскими и независимы в совокупности. Первая группа потоков ( $I$ -потоки) моделирует поступление запросов на установление многоадресных соединений. Заявки обслуживаются согласно одной из двух дисциплин  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ , описанных в разделе 2.1.2, при этом поток ( $I, m$ )-заявок характеризуется интенсивностью  $\lambda_m$ , требованием  $b_m$  приборов и обслуживается экспоненциально с параметром  $\mu_m$ .

Обозначим также  $\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m}$  – нагрузочный параметр. Заметим, что

параметры  $\rho_1, \dots, \rho_M$  связаны с интенсивностями потоков запросов пользователей на включение соответствующих логических путей в сети соотношением [7]

$$\rho_m = \prod_{p \in \mathcal{P}^I} (1 + \rho_{mp}) - 1, \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.62)$$

Потоки второй группы ( $II$ -потоки) соответствуют потокам запросов пользователей на установление через звено  $l$

одноадресных соединений. Поступившая  $(I, k)$ -заявка принимается на обслуживание, если на момент ее прихода в системе имеется  $d_k$  свободных приборов. Принятая заявка занимает это число приборов на случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром  $\kappa_k$  и также не зависящее ни от длительности обслуживания заявок других потоков, ни от процессов поступления, после чего заявка покидает систему, освобождая  $d_k$  приборов. Если на момент поступления заявки достаточного количества свободных приборов не оказывается, заявка теряется. Интенсивности  $v_1, \dots, v_K$  входящих потоков этого типа совпадают с интенсивностями соответствующих потоков запросов пользователей,  $a_k = v_k / \kappa_k$ .

Введем многомерный случайный процесс  $\{\tilde{\mathbf{N}}(t) = N_k(t)_{k \in \mathcal{K}}, t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\tilde{\mathcal{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}^K$ , характеризующий  $I$ -потоки, где  $N_k(t)$  – число  $(I, k)$ -заявок в системе в момент времени  $t \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Процесс  $\{N_k(t), t \geq 0\}$  является обратимым марковским процессом (ОМП), а его стационарное распределение имеет вид

$$p_k(n_k) = P\{N_k(t) = n_k\} = \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} e^{-a_k}, \quad n_k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (4.63)$$

Для описания  $I$ -потоков рассмотрим два составных случайных процесса: многомерный случайный процесс

$$\{\tilde{\mathbf{X}}^{(u)}(t) = X_m^{(u)}(t)_{m \in \mathcal{M}}, t \geq 0\}, u \in \{1, 2\},$$

где  $\{X_m^{(u)}(t), t \geq 0\}$  описывает число  $(I, m)$ -заявок в системе с дисциплиной  $\Pi_u$ , и процесс

$$\{\tilde{\mathbf{Y}}^{(u)}(t) = Y_m^{(u)}(t)_{m \in \mathcal{M}}, t \geq 0\}, u \in \{1, 2\},$$

где  $\{Y_m^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $m \in \mathcal{M}$ , находится в состоянии «1», если в момент времени  $t \geq 0$  в системе обслугивается хотя бы одна  $(I, m)$ -заявка, и в состоянии «0» в противном случае.

Случайные процессы  $\{\tilde{\mathbf{X}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\tilde{\mathcal{X}} = \{0, 1, 2, \dots\}^M$  и  $\{\tilde{\mathbf{Y}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\tilde{\mathcal{Y}} = \{0, 1\}^M$  по построению являются обратимыми и описывают состояние системы для случая  $C = \infty$ .

Исследуем вначале процесс  $\{\tilde{\mathbf{X}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ . По построению этот процесс является обратимым и в случае дисциплины  $\Pi_1$  (т.е.  $u = 1$ ), как следует из формулы (2.3), имеет стационарное распределение

$$\tilde{p}^{(1)}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M \left( \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} \right)^{x_m} (1 + \rho_m)^{-1}, \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (4.64)$$

Аналогично, для случая дисциплины  $\Pi_2$  из формулы (2.3) следует, что распределение процесса  $\{\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}(t), t \geq 0\}$  мультипликативно и имеет вид

$$\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{x_m}}{x_m!} e^{-\rho_m}, \mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (4.65)$$

Обозначим  $b(\mathbf{x})$  – число приборов системы, занятых  $(I, m)$ -заявками,  $m \in \mathcal{M}$ , и пусть теперь  $C < \infty$ . Кроме того, будем пока полагать, что в системе присутствуют только  $(I, m)$ -заявки, т.е. заявки  $(II, k)$ ,  $k \in \mathcal{K}$  в систему не поступают. Тогда функционирование системы описывает многомерный случайный процесс

$$\{\mathbf{X}^{(u)}(t) = X_m^{(u)}(t)_{m \in \mathcal{M}}, t \geq 0\}, u \in \{1, 2\},$$

с пространством состояний  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}} : b(\mathbf{x}) \leq C\}$ , где  $b(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathcal{M}} u(x_m) b_m$  и  $u(\cdot)$  – функция Хэвисайда. Процесс  $\{\mathbf{X}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  обратим как сужение обратимого марковского процесса и, следовательно, для дисциплин  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  справедливы, соответственно, леммы 4.7 и 4.8.

**Лемма 4.7.** Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\mathbf{X}^{(1)}(t), t \geq 0\}$  имеет мультипликативный вид

$$p^{(1)}(\mathbf{x}) = \left( G^{(1)}(\mathcal{X}) \right)^{-1} \prod_{m=1}^M \left( \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} \right)^{x_m}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad (4.66)$$

$$\text{где } G^{(1)}(\mathcal{X}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{m=1}^M \left( \frac{\rho_m}{1 + \rho_m} \right)^{x_m}.$$

**Лемма 4.8.** Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\mathbf{X}^{(2)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$p^{(2)}(\mathbf{x}) = \left( G^{(2)}(\mathcal{X}) \right)^{-1} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{x_m}}{x_m!}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad (4.67)$$

$$\text{где } G^{(2)}(\mathcal{X}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{x_m}}{x_m!}.$$

Дополнительно рассмотрим случай ограничения на максимальное число заявок в системе. Рассмотрим следующую интерпретацию модели. Пусть

1. для модели с дисциплиной  $\Pi_1$  к  $m$ -услуге имеют доступ  $x_m$  пользователей,  $m \in \mathcal{M}$ , каждый из которых создает независимый пуассоновский поток запросов на  $m$ -услугу с интенсивностью  $\varepsilon_m$ , и создает нагрузку  $\tilde{\rho}_m = \varepsilon_m \mu_m^{-1}$ ;
2. для модели с дисциплиной  $\Pi_2$  каждый из  $x$  пользователей создает  $M$  пуассоновских потоков интенсивностью  $\varepsilon_m$ ,

$m=1,\dots,M$ , при этом каждый поток характеризуется нагрузкой  $\tilde{\rho}_m = \varepsilon_m \mu_m^{-1}$ .

Состояние системы в таком случае опишем многомерным случайным процессом  $\{\hat{\mathbf{X}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ , множество состояний  $\hat{\mathcal{X}}^{(u)}$  которого зависит от дисциплины обслуживания  $\Pi_u$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , и имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}}^{(1)} &= \left\{ \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}} : c(\mathbf{x}) \leq C, x_m \leq \hat{x}_m \right\}, \\ \hat{\mathcal{X}}^{(2)} &= \left\{ \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}} : c(\mathbf{x}) \leq C, x_* = \sum_{m=1}^M x_m \leq \hat{x} \right\}.\end{aligned}$$

Фрагменты диаграмм интенсивностей переходов для процессов  $\hat{\mathbf{X}}^{(1)}(t)$  и  $\hat{\mathbf{X}}^{(2)}(t)$  показаны на рис. 4.13.

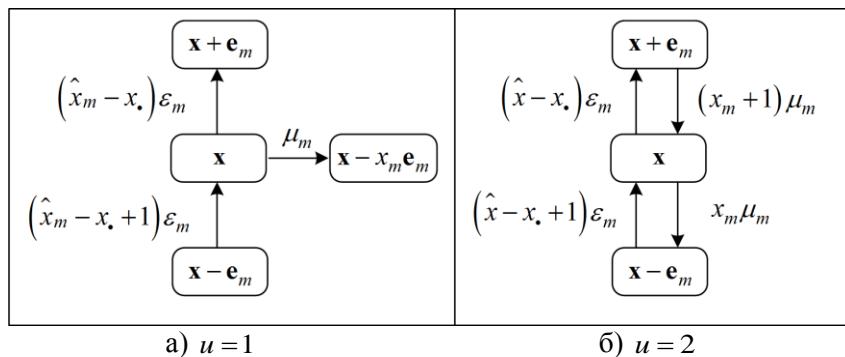


Рис. 4.13. Фрагменты диаграмм интенсивностей переходов случайных процессов  $\{\hat{\mathbf{X}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $u \in \{1, 2\}$

Стационарное распределение вероятностей процесса  $\{\hat{\mathbf{X}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  для случаев  $u=1$  и  $u=2$  описывают леммы 4.9 и 4.10 соответственно.

Лемма 4.9. Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\hat{\mathbf{X}}^{(1)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$\hat{p}^{(1)}(\mathbf{x}) = G^{-1}\left(\hat{\mathcal{X}}^{(1)}\right) \prod_{m=1}^M \frac{(\hat{x}_m)_{x_m}}{\left(\hat{x}_m - 1 + \tilde{\rho}_m^{-1}\right)_{x_m}}, \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(1)}, \quad (4.68)$$

где нормирующая константа  $G\left(\hat{\mathcal{X}}^{(1)}\right) = \sum_{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(1)}} \prod_{m=1}^M \frac{(\hat{x}_m)_{x_m}}{\left(x_m - 1 + \tilde{\rho}_m^{-1}\right)_{x_m}}$ , а

$$(\hat{x}_m)_{x_m} = x_m(x_m - 1)\dots(x_m - x_m + 1).$$

Доказательство. Система уравнений глобального баланса (СУГБ) для рассматриваемого процесса имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x}) & \left\{ \sum_{m=1}^M (\hat{x}_m - x_m) \mathbf{1}_{(\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(1)})} \varepsilon_m + \sum_{m=1}^M x_m \mu_m \right\} = \\ & = \sum_{m=1}^M \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_m) (\hat{x}_m - x_m + 1) u(x_m) \varepsilon_m. \end{aligned} \quad (4.69)$$

где введена функция-индикатор

$$\mathbf{1}_{(\text{событие } A)} = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.70)$$

Выдвинем гипотезу о том, что наряду с глобальным балансом имеет место частичный баланс отдельно для каждого из  $M$  потоков. В таком случае СУГБ распадается на подсистемы уравнений частичного баланса:

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x}) & ((\hat{x}_m - x_m) \varepsilon_m + \mu_m) = \\ & = \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_m) u(x_m) (\hat{x}_m - x_m + 1) \varepsilon_m, \\ \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(1)}, m & = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Решая систему (4.71) получаем:

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x}) & = \frac{(\hat{x}_m - x_m + 1) \varepsilon_m}{(\hat{x}_m - x_m) \varepsilon_m + \mu_m} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_m) = \dots = \\ & = \frac{x_m \dots (x_m - x_m + 1) \varepsilon_m^{x_m}}{(x_m - 1) \varepsilon_m + \mu_m} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x} - x_m \mathbf{e}_m) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{x_m}{x_m}}{\binom{x_m - 1 + \tilde{\rho}_m^{-1}}{x_m}} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{x} - x_m \mathbf{e}_m) = \dots$$

$$\dots = \prod_{m=1}^M \frac{\binom{x_m}{x_m}}{\binom{x_m - 1 + \tilde{\rho}_m^{-1}}{x_m}} \hat{p}^{(1)}(\mathbf{0}^M).$$

Нормирующая константа распределения

$$G(\hat{\mathcal{X}}^{(1)}) = \hat{p}^{(1)}(\mathbf{0}^M)^{-1} = \sum_{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(1)}} \prod_{m=1}^M \frac{\binom{x_m}{x_m}}{\binom{x_m - 1 + \tilde{\rho}_m^{-1}}{x_m}}.$$

Решение системы уравнений частичного баланса (4.71) удовлетворяет решению СУГБ (4.69). Подставив значение нормирующей константы, окончательно получаем искомое распределение (4.68). ■

Лемма 4.10. Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\hat{\mathbf{X}}^{(2)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$\hat{p}^{(2)}(\mathbf{x}) = G^{-1}(\hat{\mathcal{X}}^{(2)})(x) \prod_{m=1}^M \frac{\tilde{\rho}_m^{x_m}}{x_m!}, \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(2)}, \quad (4.72)$$

$$\text{где } G(\hat{\mathcal{X}}^{(2)}) = \sum_{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(2)}} \binom{x}{x} \prod_{m=1}^M \frac{\tilde{\rho}_m^{x_m}}{x_m!}, \text{ а}$$

$$(\hat{x}_m)_{x_m} = \hat{x}_m (\hat{x}_m - 1) \dots (x - x_m + 1).$$

Доказательство. Система уравнений глобального баланса для процесса  $\{\hat{\mathbf{X}}^{(2)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$\hat{p}^{(2)}(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{m=1}^M (x - x_\bullet) \mathbf{1}_{\{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(2)}\}} \varepsilon_m + \sum_{m=1}^M x_m \mu_m \right\} =$$

$$= \sum_{m=1}^M \hat{p}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_m)(x - x_\bullet + 1) u(x_m) \varepsilon_m + \\ + \sum_{m=1}^M \hat{p}^{(2)}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_m)(x_m + 1) \mathbf{1}_{\{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(2)}\}} \mu_m.$$

Как и в лемме 4.9, выдвинем гипотезу о том, что наряду с глобальным балансом имеет место частичный баланс между входящим и обслуживаемым трафиком отдельно для каждого из  $M$  потоков, тогда СУГБ распадается на подсистемы уравнений частичного баланса:

$$\hat{p}^{(2)}(\mathbf{x}) x_m \mu_m = \hat{p}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_m) u(x_m)(x - x_m + 1) \varepsilon_m, \\ \mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(2)}, m = \overline{1, M}. \quad (4.73)$$

Решая систему (4.73) получаем:

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{(x - x_\bullet + 1)}{x_m} \tilde{\rho}_m \hat{p}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_m) = \dots = \\ &= \frac{(x - x_\bullet + 1) \dots (x - x_\bullet + x_m)}{x_m!} \tilde{\rho}_m^{x_m} \hat{p}^{(2)}(\mathbf{x} - x_m \mathbf{e}_m) = \dots = \\ &= \frac{x(x-1) \dots (x - x_\bullet + 1)}{x_1! \dots x_M!} \tilde{\rho}_1^{x_1} \dots \tilde{\rho}_M^{x_M} \hat{p}^{(2)}(\mathbf{0}^M) = (\mathbf{x})_{x_\bullet} \prod_{m=1}^M \frac{\tilde{\rho}_m^{x_m}}{x_m!} \hat{p}^{(2)}(\mathbf{0}^M). \end{aligned}$$

Нормирующая константа

$$G(\hat{\mathcal{X}}^{(2)}) = \hat{p}^{(2)}(\mathbf{0}^M)^{-1} = \sum_{\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}^{(2)}} (\mathbf{x})_{x_\bullet} \prod_{m=1}^M \frac{\tilde{\rho}_m^{x_m}}{x_m!}.$$

Несложно видеть, что решение системы уравнений частичного баланса удовлетворяет СУГБ, и, подставив значение нормирующей константы, получаем распределение (4.72). ■

Перейдем теперь к исследованию процесса  $\{\tilde{\mathbf{Y}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , который, напомним, описывает наличие в системе  $(I, m)$ -заявок,  $m \in \mathcal{M}$ , и задан на множестве  $\tilde{\mathcal{Y}} = \{0, 1\}^M$ . По построению

этот процесс является обратимым и в зависимости от исследуемой дисциплины обслуживания  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ , имеет стационарное распределение

$$\tilde{\pi}^{(1)}(\mathbf{y}) = \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{y_m}}{1 + \rho_m}, \quad \mathbf{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}, \quad (4.74)$$

или

$$\tilde{\pi}^{(2)}(\mathbf{y}) = \prod_{m=1}^M (e^{\rho_m} - 1)^{y_m} e^{-\rho_m}, \quad \mathbf{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}. \quad (4.75)$$

При  $C < \infty$  состояние системы в предположении отсутствия заявок  $\Pi$ -потоков описывает процесс  $\{\mathbf{Y}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , заданный на множестве  $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in \tilde{\mathcal{Y}} : b(\mathbf{y}) \leq C\}$ , где  $b(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^M y_m b_m$ .

Как сужение обратимого процесса, процесс  $\mathbf{Y}^{(u)}(t)$  также обратим и, следовательно, его стационарное распределение описывают леммы 4.11 и 4.12 соответственно.

Лемма 4.11. Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\mathbf{Y}^{(1)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$\pi^{(1)}(\mathbf{y}) = \left(G^{(1)}(\mathcal{Y})\right)^{-1} \prod_{m=1}^M \rho_m^{y_m}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \quad (4.76)$$

где  $G^{(1)}(\mathcal{Y}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \prod_{m=1}^M \rho_m^{y_m}$ .

Лемма 4.12. Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\mathbf{Y}^{(2)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$\pi^{(2)}(\mathbf{y}) = \left(G^{(2)}(\mathcal{Y})\right)^{-1} \prod_{m=1}^M (e^{\rho_m} - 1)^{y_m}, \quad (4.77)$$

где  $G^{(2)}(\mathcal{Y}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \prod_{m=1}^M (e^{\rho_m} - 1)^{y_m}$ .

Отметим, что распределение случайного процесса  $\{Y_m^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , инвариантно относительно функции распределения длительности обслуживания  $(I, m)$ -заявок. В таком случае, формулы (4.76) и (4.77) также справедливы для случая функции распределения длительности обслуживания общего вида с конечным математическим ожиданием.

Перейдем теперь к общему случаю, когда в системе обслуживаются заявки  $(I, m)$ -потоков,  $m \in \mathcal{M}$ , и  $(\Pi, k)$ -потоков,  $k \in \mathcal{K}$ . С учетом введенных выше обозначений, функционирование модели с двумя типа заявок для случая  $C = \infty$  можно описывать с помощью составного случайного процесса

$$\{\tilde{\mathbf{Z}}_x^{(u)}(t) = (\tilde{\mathbf{X}}^{(u)}(t), \tilde{\mathbf{N}}(t)), t \geq 0\}, u \in \{1, 2\}, \quad (4.78)$$

или же процесса

$$\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(u)}(t) = (\tilde{\mathbf{Y}}^{(u)}(t), \tilde{\mathbf{N}}(t)), t \geq 0\}, u \in \{1, 2\}, \quad (4.79)$$

в зависимости от исследуемых характеристик. Случайный процесс (4.79) позволяет получить такие характеристики системы, как например, число приборов, занятых  $(I, m)$ -заявками,  $m \in \mathcal{M}$ . С помощью случайного процесса (4.78), помимо указанных характеристик, можно дополнительно получить характеристики, связанные с числом  $(I, m)$ -заявок, такие, например, как среднее число заявок в системе. Поскольку задачей исследования является расчет вероятностей потерь  $(I, m)$ -заявок, то удобнее использовать процесс  $\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  (4.79), поскольку размерность его пространства состояний

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{Y}} \times \tilde{\mathcal{N}} = \{0, 1\}^M \times \{0, 1, 2, \dots\}^K$$

меньше размерности пространства состояний процесса (4.78), которая, в свою очередь, равна

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}^M \times \{0, 1, 2, \dots\}^K.$$

По построению процесс  $\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  является ОМП на множестве  $\tilde{\mathcal{X}}$  и, как следует из формул (4.63), (4.74) и (4.75), имеет стационарное распределение

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}^{(u)}(z) &= \left(G^{(u)}(\tilde{\mathcal{X}})\right)^{-1} \prod_{m=1}^M \left(\varphi_m^u\right)^{y_m} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \\ z &= (\mathbf{y}, \mathbf{n}) \in \tilde{\mathcal{X}}, u \in \{1, 2\}\end{aligned}\quad (4.80)$$

где функция  $G^{(u)}(\Omega)$  для любого множества  $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$  определяется соотношением

$$G^{(u)}(\Omega) = \sum_{z \in \Omega} \prod_{m=1}^M \left(\varphi_m^u\right)^{y_m} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad u \in \{1, 2\}, \quad (4.81)$$

следовательно, нормирующая константа  $G^{(u)}(\tilde{\mathcal{X}})$  распределения процесса  $\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  равна

$$G^{(u)}(\tilde{\mathcal{X}}) = e^{\sum_{k=1}^K a_k} \prod_{m=1}^M \left(1 + \varphi_m^u\right).$$

Обозначим  $c(z)$  число занятых приборов системы в состоянии  $z \in \tilde{\mathcal{X}}$  и заметим, что эта величина представима в виде

$$c(z) = c(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = b(\mathbf{y}) + d(\mathbf{n}) = \sum_{m=1}^M b_m y_m + \sum_{k=1}^K d_k n_k, \quad (4.82)$$

где  $b(\mathbf{y})$  и  $d(\mathbf{n})$  – число приборов, занятых в состоянии  $z = (\mathbf{y}, \mathbf{n})$  заявками I- и II-потоков соответственно. Пусть теперь  $C < \infty$  и, следовательно, возможны потери заявок. Будем считать, что система функционирует с явными потерями. В этом случае функционирование системы описывает случайный процесс  $\{\mathbf{Z}^{(u)}(t), t \geq 0\}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , являющийся сужением процесса  $\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  на множество

$$\mathcal{X} = \{z \in \tilde{\mathcal{X}} : c(z) \leq C\}. \quad (4.83)$$

Как сужение обратимого процесса он также обратим, и, следовательно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\mathbf{Z}^{(u)}(t), t \geq 0\}$  имеет вид

$$\pi^{(u)}(z) = \left(G^{(u)}(\mathbb{X})\right)^{-1} \prod_{m=1}^M \left(\varphi_m^u\right)^{y_m} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad z \in \mathbb{X}, u \in \{1, 2\}, \quad (4.84)$$

$$\varphi_m^u = \begin{cases} \rho_m, & m \in \mathcal{M}, u = 1, \\ e^{\rho_m} - 1, & m \in \mathcal{M}, u = 2, \end{cases} \quad (4.85)$$

где  $G^{(u)}(\mathbb{X})$  – нормирующая константа:

$$G^{(u)}(\mathbb{X}) = \sum_{z \in \mathbb{X}} \prod_{m=1}^M \left(\varphi_m^u\right)^{y_m} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad u \in \{1, 2\}. \quad (4.86)$$

Доказательство теоремы следует из лемм 4.11 и 4.12.

Рассмотрим дополнительно случай, когда в системе часть потоков типа  $I$  обслуживается согласно дисциплине  $P_1$ , а другая часть – согласно дисциплине  $P_2$ . Состояние такой системы описывается с помощью процесса  $\{\mathbf{Z}^{(\mathbf{u})}(t), t \geq 0\}$ , где  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M)$ ,  $u_m \in \{1, 2\}$ ,  $m = 1, \dots, M$ , заданного на множестве  $\mathbb{X} = \{z \in \tilde{\mathbb{X}} : c(z) \leq C\}$  (4.83). Процесс обратим и его распределение описывает следствие 4.3.

**Следствие 4.3.** Стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $\{\mathbf{Z}^{(\mathbf{u})}(t), t \geq 0\}$  имеет мультипликативный вид

$$\pi^{(\mathbf{u})}(z) = \left(G^{(\mathbf{u})}(\mathbb{X})\right)^{-1} \prod_{m=1}^M \left(\varphi_m^{u_m}\right)^{y_m} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad (4.87)$$

$$z \in \mathbb{X}, u_m \in \{1, 2\}, m \in \mathcal{M}$$

$$\varphi_m^{u_m} = \begin{cases} \rho_m, & u_m = 1, m \in \mathcal{M}, \\ e^{\rho_m} - 1, & u_m = 2, m \in \mathcal{M}, \end{cases} \quad (4.88)$$

где  $G^{(\mathbf{u})}(\mathbb{X})$  – нормирующая константа:

$$G^{(u)}(\mathcal{X}) = \sum_{z \in \mathcal{X}} \prod_{m=1}^M \left( \varphi_m^{u_m} \right)^{y_m} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad u_m \in \{1, 2\}, m \in \mathcal{M}. \quad (4.89)$$

Зная стационарное распределение вероятностей состояний системы, можно получить выражения для основных ее вероятностных характеристик. Выражения для многих важных характеристик отдельного звена сети, которые задаются вероятностью некоторого события, то есть подмножества  $\Omega$  пространства состояний системы  $\mathcal{X}$ , могут быть получены посредством функции  $G^{(u)}(\Omega)$ , определенной формулой (4.81), с помощью соотношения

$$G^{(u)}(\Omega) = \sum_{z \in \Omega} \pi^{(u)}(z) = \frac{G^{(u)}(\Omega)}{G^{(u)}(\mathcal{X})}. \quad (4.90)$$

Основной вероятностной характеристикой, исследуемой в работе, как уже было указано выше, является вероятность потери заявки. Для  $(I, m)$ -заявок условием потери, помимо отсутствия достаточного числа приборов, является отсутствие в системе заявок данного типа. Поэтому множество потерь  $(I, m)$ -заявок определяется формулой

$$\mathcal{B}_m^I = \{z \in \mathcal{X} : c(z) > C - b_m, y_m = 0\}, \quad m \in \mathcal{M}. \quad (4.91)$$

Будем рассматривать безусловную вероятность потери  $(I, m)$ -заявки, которой задается формулой

$$B_m^{I,u} = \sum_{z \in \mathcal{B}_m^I} \pi^{(u)}(z), \quad m \in \mathcal{M}, u \in \{1, 2\}. \quad (4.92)$$

и условную вероятность блокировки, в случае, когда в системе нет  $(I, m)$ -заявок и отсутствует достаточное количество приборов для их обслуживания:

$$\tilde{B}_m^{I,u} = \sum_{z \in \mathcal{B}_m^I} \pi^{(u)}(z) \left( \sum_{z \in \mathcal{X}: y_m=0} \pi^{(u)}(z) \right)^{-1}, \quad m \in \mathcal{M}, u \in \{1, 2\}. \quad (4.93)$$

Отметим, что величина (4.92) соответствует вероятности блокировки на звене запроса на установление многоадресного

соединения  $m$ -класса, а величина (4.93) – вероятности блокировки на звене  $m$ -услуги мультивещания.

Заявки  $\Pi$ -потоков теряются в том случае, если в системе недостаточно свободных приборов для их обслуживания. Таким образом, множество потерь  $(\Pi, k)$ -заявок имеет вид

$$\mathcal{B}_k^{\Pi} = \{z \in \mathcal{X} : c(z) + d_k > C\}, \quad k \in \mathcal{K}. \quad (4.94)$$

Значения вероятностей  $B_m^{I,u}$  и  $B_k^{\Pi} = P\{z \in \mathcal{B}_k^{\Pi}\}$  можно получить по формуле (4.90).

Вернемся теперь вновь к модели мультисервисной сети с одноадресным и многоадресным трафиком. Состояние сети для случая неограниченной емкости звеньев, как уже было показано выше в данном разделе, описывается составным случайным процессом

$$\left\{ \tilde{\Gamma}(t) = \left( \left( A_{mps}(t) \right)_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}}, \left( B_k(t) \right)_{k \in \mathcal{K}} \right), t \geq 0 \right\}$$

(формула (4.60)) с пространством состояний (4.61). По построению этот процесс является ОМП и, с учетом формул (4.87)-(4.89), а также результатов исследования моделей функционирования сетей с одноадресным и многоадресным трафиком [7], стационарное распределение процесса имеет мультипликативный вид

$$q^{(u)}(\gamma) = \left( G^{(u)}(\tilde{\mathcal{T}}) \right)^{-1} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \left( \varphi_{mps}^u \right)^{\alpha_{mps}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad (4.95)$$

$$\gamma = (\alpha, \beta) \in \tilde{\mathcal{T}}, u \in \{1, 2\},$$

где

$$\varphi_{mps}^u = \begin{cases} \rho_{mps}, & u = 1, s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M}_s, \\ e^{\rho_{mps}} - 1, & u = 2, s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M}_s, \end{cases} \quad (4.96)$$

а функция  $G^{(u)}(\Omega)$  для любого множества  $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$  определяется соотношением

$$G(\Omega) = \sum_{\gamma \in \Omega} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \left( \varphi_{mps}^u \right)^{\alpha_{mps}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}. \quad (4.97)$$

Определим для каждого звена  $l \in \mathcal{L}$ , источников  $s \in \mathcal{S}^l$  и состояний логических путей сети  $\alpha \in \mathcal{A}$  функцию

$\alpha_{ms}^l(\alpha) = u \left( \sum_{p \in \mathcal{P}_s^l} \alpha_{mps} \right)$ , соответствующую состоянию  $(m, s)$ -услуги

на  $l$ -звене. Обозначим  $\alpha^l(\alpha) = (\alpha_{ms}^l(\alpha))_{m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l}$  состояние услуг мультивещания на  $l$ -звене, когда логические пути сети находятся в состоянии  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Для  $l \in \mathcal{L}$  введем величины

$$\begin{aligned} b_l(\alpha) &= \sum_{s \in \mathcal{S}^l} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} \alpha_{ms}^l(\alpha), \quad \alpha \in \mathcal{A}, \\ d_l(\beta) &= \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k n_k, \quad \beta \in \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{4.98}$$

$$c_l(\gamma) = b_l(\alpha) + d_l(\beta), \quad \gamma \in \tilde{\mathcal{T}}, \tag{4.99}$$

представляющие собой число единиц емкости, занятых на  $l$ -звене соответственно многоадресными соединениями, одноадресными соединениями и соединениями обоих типов, когда сеть находится в состоянии  $\gamma \in \tilde{\mathcal{T}}$ .

Пусть теперь  $C_l < \infty$ ,  $l \in \mathcal{L}$ , и возможны блокировки установления многоадресных и одноадресных соединений. В этом случае пространство состояний модели примет вид

$$\mathcal{T} = \left\{ \gamma \in \tilde{\mathcal{T}} : c_l(\gamma) \leq C_l, l \in \mathcal{L} \right\}. \tag{4.100}$$

Функционирование сети со звеньями ограниченной емкости описывает случайный процесс  $\left\{ \Gamma^{(u)}(t), t \geq 0 \right\}$ , являющийся сужением процесса  $\left\{ \tilde{\Gamma}^{(u)}(t), t \geq 0 \right\}$  на множество  $\mathcal{T}$ , заданное формулой (4.100). Из свойства сужения ОМП вытекает, что случайный процесс  $\left\{ \Gamma^{(u)}(t), t \geq 0 \right\}$  является ОМП с распределением вероятностей вида

$$q^{(u)}(\gamma) = \left( G^{(u)}(\mathcal{T}) \right)^{-1} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \left( \varphi_{mps}^u \right)^{\alpha_{mps}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \tag{4.101}$$

$\gamma \in \mathcal{T}$ ,  $u \in \{1, 2\}$ ,

где  $G^{(u)}(\mathcal{T})$  – нормирующая константа:

$$G^{(u)}(\mathcal{T}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{T}} \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \left( \varphi_{mps}^u \right)^{\alpha_{mps}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad u \in \{1, 2\}. \quad (4.102)$$

Вероятностные характеристики для сети в целом, так же как и для отдельного звена сети, могут быть выражены с использованием функции  $G^{(u)}(\Omega)$  (4.97) от соответствующего подмножества пространства состояний посредством соотношения

$$P\{\gamma \in \Omega, u = v\} = \sum_{\gamma \in \Omega} \pi^{(v)}(\gamma) = \frac{G^{(v)}(\Omega)}{G^{(v)}(\mathcal{T})}. \quad (4.103)$$

Множество блокировок  $(m, p, s)$ -пути имеет вид

$$\mathcal{B}_{mps} = \left\{ \gamma \in \mathcal{T} : \exists l \in \mathcal{L}_{ps} : y_{ms}^l(\alpha) = 0, c_l(\gamma) + b_{ms} > C_l \right\}, \quad (4.104)$$

а множество блокировок одноадресных соединений  $k$ -класса

$$\mathcal{B}_k = \left\{ \gamma \in \mathcal{T} : \exists l \in \mathcal{L}_k : c_l(\gamma) + d_k > C_l \right\}. \quad (4.105)$$

Теперь для нахождения вероятностей событий  $B_{mps}^v = P\{\gamma \in \mathcal{B}_{mps}, u = v\}$  и  $B_k = P\{\gamma \in \mathcal{B}_k\}$ , которые представляют собой вероятности блокировки соответственно многоадресных и одноадресных соединений «по времени», применима формула (4.103).

#### 4.2.3. Рекуррентный алгоритм расчета нормирующей константы

Для расчета вероятностных характеристик в мультисервисных моделях, в связи с большой размерностью пространства состояний системы, традиционно применяются рекуррентные алгоритмы. Для эффективного вычисления точных значений вероятностей блокировок и коэффициента использований звена в модели звена сети с одноадресными соединениями применяется алгоритм Кауфмана – Робертса [2, 7]. Данный метод основан на разбиении пространства состояний модели

$$\mathcal{N} = \left\{ \mathbf{n} \in \{0, 1, 2, \dots\}^K : d(\mathbf{n}) \leq C \right\}$$

по числу занятых единиц емкости:

$$\mathcal{C}(c) = \{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : d(\mathbf{n}) = c\}, c = 0, \dots, C, \quad (4.106)$$

$$\mathcal{N} = \bigcup_{c=0}^C \mathcal{C}(c); \mathcal{C}(i) \cap \mathcal{C}(j) = \emptyset, i \neq j.$$

Для распределения вероятностей числа занятых единиц емкости

$$P(c) = P\{\mathcal{C}(c)\} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{C}(c)} \pi(\mathbf{n}) \quad (4.107)$$

справедливо рекуррентное соотношение

$$cP(c) = \sum_{k=1}^K d_k a_k P(c - d_k), c = 0, \dots, C. \quad (4.108)$$

Соотношение (4.108) позволяет построить простой и эффективный алгоритм расчета искомых характеристик. Введем функцию

$$h(c) = \begin{cases} 0, & c < 0, \\ 1, & c = 0, \\ \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K d_k a_k h(c - d_k), & c = 1, \dots, C. \end{cases} \quad (4.109)$$

Значение нормирующей константы стационарного распределения вероятностей состояний отдельного звена сети с одноадресными соединениями можно получить по формуле

$$G(\mathcal{N}) = \sum_{c=0}^C h(c). \quad (4.110)$$

Из формулы (4.109) получаем выражение для расчета вероятности блокировки установления соединения  $k$ -класса

$$B_k = G^{-1}(\mathcal{N}) \sum_{c=C-d_k+1}^C h(c), k \in \mathcal{K}. \quad (4.111)$$

Порядок временной сложности вычисления нормирующей константы по формуле (4.109) составляет  $O(CK)$  и, следовательно, время вычисления характеристик увеличивается линейно с ростом емкости звена.

Рассмотрим теперь модель звена сети с многоадресными соединениями. В связи с особенностями построения модели рекуррентная формула (4.109) не может быть применена для расчета ее вероятностных характеристик, и требуется модификация алгоритма. В данном разделе пособия изложен

алгоритм для расчета вероятностных характеристик звена сети с многоадресными соединениями, описанном в [7], учитывающий две дисциплины  $P_1$  и  $P_2$ , и, кроме того, как будет показано далее в данном разделе, позволяющий более эффективно производить расчет вероятностей блокировок соединений.

Рассмотрим вначале модель звена сети, в которой предоставляются только многоадресные соединения. Ниже проводится разбиение пространства состояний модели в виде, удобном для вывода рекуррентного алгоритма.

Рассмотрим вектор  $\mathbf{y}(m) := (y_1, \dots, y_m)$ , состоящий из  $m \leq M$  первых координат вектора  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ , введем множество

$$\mathcal{Y}(c, m) := \left\{ \mathbf{y}(m) : c(\mathbf{y}(m)) = c \right\}, \text{ где } c(\mathbf{y}(m)) := \sum_{i=1}^m y_i b_i,$$

и заметим, что множество  $\mathcal{Y}(c, m)$  представимо в виде:

$$\mathcal{Y}(c, m) = \mathcal{Y}_{+i}(c, m) \cup \mathcal{Y}_{-i}(c, m), \quad m = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.112)$$

где

$$\mathcal{Y}_{-i}(c, m) := \left\{ \mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(c, m) : y_i = 0 \right\}, \quad (4.113)$$

$$\mathcal{Y}_{+i}(c, m) := \left\{ \mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(c, m) : y_i = 1 \right\}. \quad (4.114)$$

По построению  $\mathcal{Y}(c, m) \cap \mathcal{Y}(\tilde{c}, m) = \emptyset$ ,  $c \neq \tilde{c}$ , и, очевидно, что разбиение пространства состояний модели определяется формулой

$\mathcal{Y} = \bigcup_{c=0}^C \mathcal{Y}(c, M)$ . Поскольку  $\mathbf{y}(M) = \mathbf{y}$ , то можно представить

множество  $\mathcal{B}_m^I$  блокировок  $m$ -заявок в виде

$$\mathcal{B}_m^I = \bigcup_{c=C-b_m+1}^C \mathcal{Y}_m(c, M), \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.115)$$

С учетом введенных обозначений структура пространства состояний  $\mathcal{Y}$  системы проиллюстрирована на рис. 4.14.

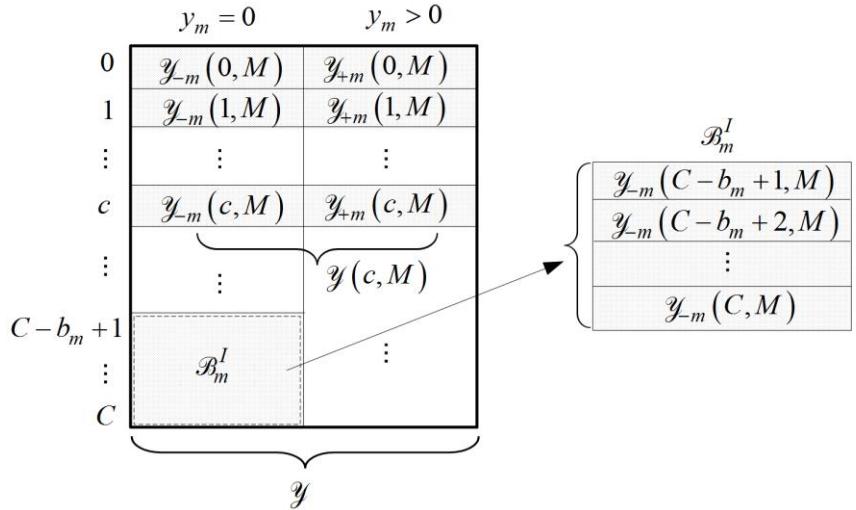


Рис. 4.14. Структура пространства состояний  $\mathcal{Y}$  и множества  $\mathcal{B}_m^I$  блокировок  $m$ -заявок

Необходимые в дальнейшем свойства множеств  $\mathcal{Y}(m, c)$  и  $\mathcal{Y}_{-i}(c, m)$  сформулируем в виде леммы, положив для определенности  $\mathcal{Y}(c, m) = \mathcal{Y}_{-i}(c, m) = \emptyset$ , если  $c < 0$ .

Лемма 4.13.

$$1. \quad \mathcal{Y}(0, m) = \{\mathbf{0}^m\}, \quad m = 0, \dots, M, \quad (4.116)$$

$$2. \quad \mathcal{Y}(c, 0) = \emptyset, \quad c = 1, \dots, C, \quad (4.117)$$

$$3. \quad \mathcal{Y}(c, m) = (\mathcal{Y}(c, m-1) \times \{0\}) \cup (\mathcal{Y}(c - b_m, m-1) \times \{1\}), \\ c = 1, \dots, C, \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.118)$$

$$4. \quad \mathcal{Y}_i(0, m) = \{\mathbf{0}^m\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.119)$$

$$5. \quad \mathcal{Y}_i(c, m) = \mathcal{Y}(c, m) / (\mathcal{Y}_{-i}(c - b_i, m) + e_i), \quad c = 1, \dots, C, \\ i = 1, \dots, m, \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.120)$$

Теперь все готово для вывода рекуррентного алгоритма для расчета нормирующей константы и вероятностей блокировок заявок. Обозначим  $q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) := \prod_{i=1}^m (\varphi_i^u)^{y_i}$  – ненормированную вероятность состояния  $\mathbf{y}(m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , и положим  $q^{(u)}(\mathbf{y}(0)) := 1$ . Нам также понадобятся следующие свойства функции  $q^{(u)}(\mathbf{y}(m))$ :

$$\sum_{\mathbf{y}(m) \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) = \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{A}} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) + \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{B}} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)), \quad (4.121)$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset, \quad m = 1, \dots, M, \quad u \in \{1, 2\},$$

$$\sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(m-1, c) \times \{k\}} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) = (\varphi_m^u)^k \sum_{\mathbf{y}(m-1) \in \mathcal{Y}(m-1, c-u(k)b_m)} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)), \quad (4.122)$$

$$m = 1, \dots, M, \quad k = 0, 1, \quad u \in \{1, 2\}.$$

Введем теперь функции

$$g^{(u)}(c, m) := \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(c, m)} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)), \quad m = 1, \dots, M, \quad c = 0, \dots, C, \quad (4.123)$$

$$g_{\pm i}^{(u)}(c, m) := \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}_{\pm i}(c, m)} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)), \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.124)$$

$$c = 0, \dots, C, \quad i = 1, \dots, m, \quad u \in \{1, 2\},$$

которые задают ненормированные вероятности того, что  $j$ -заявками,  $j = 1, \dots, m$ , занято ровно  $c$  приборов. Заметим, что нормирующая константа  $G^{(u)}(\mathcal{Y})$  распределения  $\pi(\cdot)$  может быть представлена в виде

$$G^{(u)}(\mathcal{Y}) = \sum_{c=0}^C g^{(u)}(c, M), \quad (4.125)$$

а с учетом (4.115) и (4.124) получаем формулу для расчета вероятности блокировки  $(I, m)$ -заявок:

$$\begin{aligned}
B_m^{I,u} &= \left( G^{(u)}(\mathcal{Y}) \right)^{-1} \sum_{\mathbf{y}(M) \in \mathcal{B}_m^I} q^{(u)}(\mathbf{y}(M)) = \\
&= \left( G^{(u)}(\mathcal{Y}) \right)^{-1} \sum_{c=C-b_m+1}^C \sum_{\mathbf{y}(M) \in \mathcal{Y}_{-m}(M,c)} q^{(u)}(\mathbf{y}(M)) = \\
&= \left( \sum_{c=0}^C g^{(u)}(c,M) \right)^{-1} \sum_{c=C-b_m+1}^C g_{-m}^{(u)}(c,M).
\end{aligned} \tag{4.126}$$

Заметим, что при  $c < 0$   $g^{(u)}(c,m) = g_{-i}^{(u)}(c,m) = 0$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Функции  $g^{(u)}(c,m)$  и  $g_{-i}^{(u)}(c,m)$  удовлетворяют соотношениям:

$$1. \quad g^{(u)}(0,m) = 1, \quad m = 0, \dots, M, \quad u \in \{1, 2\}, \tag{4.127}$$

$$2. \quad g^{(u)}(c,0) = 0, \quad c = 1, \dots, C, \quad u \in \{1, 2\}, \tag{4.128}$$

$$3. \quad g^{(u)}(c,m) = g^{(u)}(c,m-1) + \varphi_m^u g^{(u)}(c-b_m, m-1), \tag{4.129}$$

$$m = 1, \dots, M, \quad c = 1, \dots, C, \quad u \in \{1, 2\},$$

$$4. \quad g_{-i}^{(u)}(0,m) = 1, \quad m = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, m, \quad u \in \{1, 2\}, \tag{4.130}$$

$$5. \quad g_{-i}^{(u)}(c,m) = g^{(u)}(c,m) - \varphi_i^u g_{-i}^{(u)}(c-b_i, m), \quad m = 1, \dots, M,$$

$$i = 1, \dots, m, \quad c = 1, \dots, C, \quad u \in \{1, 2\}. \tag{4.131}$$

Доказательство. Для краткости ограничимся доказательством формулы (4.129), вытекающим из свойств (4.121) и (4.122):

$$\begin{aligned}
g^{(u)}(c,m) &= \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(c,m)} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) = \\
&= \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(c,m-1) \times \{0\}} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) + \sum_{\mathbf{y}(m) \in \mathcal{Y}(c-b_m, m-1) \times \{1\}} q^{(u)}(\mathbf{y}(m)) = \\
&= \sum_{\mathbf{y}(m-1) \in \mathcal{Y}(c,m-1)} q^{(u)}(\mathbf{y}(m-1)) + \varphi_m^u \sum_{\mathbf{y}(m-1) \in \mathcal{Y}(c-b_m, m-1)} q^{(u)}(\mathbf{y}(m-1)) =
\end{aligned}$$

$$= g^{(u)}(c, m-1) + \varphi_m^u g^{(u)}(c - b_m, m-1).$$

■

Теорема 4.2 и формула (4.125) определяют рекуррентный алгоритм расчета нормирующей константы  $G^{(u)}(\mathcal{Y})$ , причем общая сложность вычислений вероятностей блокировок заявок всех типов, включая расчет нормирующей константы, равна  $O(MC)$ . Для наглядности схема расчета нормирующей константы и вероятностей блокировки  $m$ -заявок проиллюстрирована на рис. 4.15, где  $\bar{B}_m^{I,u} = \sum_{c=C-b_m+1}^C g^{(u)}(c)$  – ненормированная вероятность блокировки  $(I, m)$ -заявок.

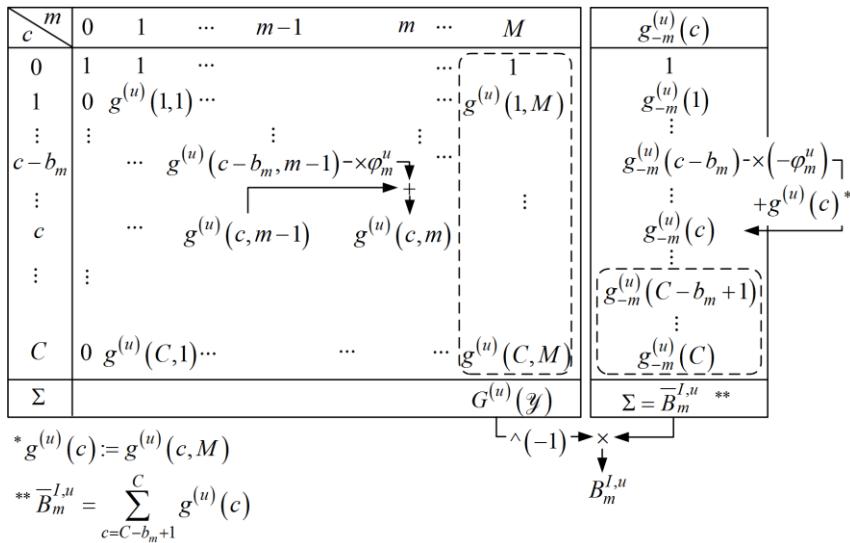


Рис. 4.15. Схема расчета нормирующей константы  $G^{(u)}(\mathcal{Y})$  и

вероятности  $B_m^{I,u}$  блокировки  $(I, m)$ -заявок

Рассмотрим теперь модель с двумя типами заявок –  $(I, m)$ ,  $m \in \mathcal{M}$ , и  $(II, k)$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , соответствующим запросам на установление многоадресных и одноадресных соединений. Введем

разбиение пространства состояний  $\mathcal{X}$  по числу занятых в системе приборов

$$\mathcal{X} = \bigcup_{c=0}^C \mathcal{X}(c), \mathcal{X}(c) = \{z \in \mathcal{X} : c(z) = c\}, c = 0, \dots, C, \quad (4.132)$$

$$\mathcal{X}(i) \cap \mathcal{X}(j) = \emptyset, i \neq j, i, j = 0, \dots, C,$$

и распределение числа занятых приборов

$$P^{(v)}(c) = P\{\mathcal{X}(c), u = v\}, c = 0, \dots, C. \quad (4.133)$$

Тогда множество потерь  $(I, k)$ -заявок представимо в виде

$$\mathcal{B}_k^I = \bigcup_{c=C-d_k+1}^C \mathcal{X}(c), k = 1, \dots, K, \quad (4.134)$$

а вероятность их потерь определяется формулой

$$B_k^{I,u} = \sum_{c=C-d_k+1}^C P^{(u)}(c), k = 1, \dots, K, u \in \{1, 2\}, \quad (4.135)$$

Множество  $\mathcal{B}_m^I$  потерь  $(I, m)$ -заявок имеет более сложную структуру по сравнению с множеством потерь заявок  $I$ -потоков. Введем систему событий

$$\mathcal{X}_{-i}(c) = \{z \in \mathcal{X} : c(z) = c, y_i = 0\}, c = 0, \dots, C, i = 1, \dots, M, \quad (4.136)$$

и соответствующее распределение вероятностей

$$P_{-i}^{(v)}(c) = P\{\mathcal{X}_{-i}(c), u = v\}, c = 0, \dots, C, i = 1, \dots, M. \quad (4.137)$$

Теперь множество потерь заявок первого типа представимо в виде

$$\mathcal{B}_m^I = \bigcup_{c=C-b_m+1}^C \mathcal{X}_{-m}(c), m = 1, \dots, M, \quad (4.138)$$

а вероятности потерь  $(I, m)$ -заявок вычисляются по формуле

$$B_m^{I,u} = \sum_{c=C-b_m+1}^C P_{-m}^{(u)}(c), m = 1, \dots, M, u \in \{1, 2\}. \quad (4.139)$$

Эффективные алгоритмы для случаев, когда в систему поступают заявки только одного типа, были описаны выше. Для

вычисления  $P^{(u)}(c)$  и  $P_{-m}^{(u)}(c)$  в общем случае представим множества  $\mathcal{X}(c)$  и  $\mathcal{X}_{-m}(c)$  в виде свертки

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(c) &= \bigcup_{i=0}^c (\mathcal{Y}(i) \times \mathcal{C}(c-i)), \quad c = 0, \dots, C, \\ \mathcal{X}_{-m}(c) &= \bigcup_{i=0}^c (\mathcal{Y}_{-m}(i) \times \mathcal{C}(c-i)), \quad c = 0, \dots, C, \quad m = 1, \dots, M,\end{aligned}$$

где множества  $\mathcal{C}(i)$  определены формулой (4.106), а  $\mathcal{Y}(i) := \mathcal{Y}(M, i)$  и  $\mathcal{Y}_{-m}(i) := \mathcal{Y}_{-m}(M, i)$  определены формулами (4.112)-(4.114). Легко показать, что для любых множеств  $\Omega \subseteq \mathcal{N}$  и  $\Upsilon \subseteq \mathcal{Y}$

$$G^{(u)}(\Omega \times \Upsilon) = G^{(u)}(\Omega)G(\Upsilon).$$

Тогда в вероятностной форме получаем:

$$\begin{aligned}P^{(u)}(c) &= \frac{G^{(u)}(\mathcal{X}(c))}{G^{(u)}(\mathcal{X})} = \\ &= \left( G^{(u)}(\mathcal{X}) \right)^{-1} \sum_{i=0}^c G^{(u)}(\mathcal{Y}(i))G(\mathcal{C}(c-i)), \\ c &= 0, \dots, C\end{aligned}\tag{4.140}$$

$$\begin{aligned}P_{-m}^{(u)}(c) &= \frac{G^{(u)}(\mathcal{X}_{-m}(c))}{G^{(u)}(\mathcal{X})} = \\ &= \left( G^{(u)}(\mathcal{X}) \right)^{-1} \sum_{j=0}^c G^{(u)}(\mathcal{Y}_{-m}(j))G(\mathcal{C}(c-j)), \\ c &= 0, \dots, C; i = 1, \dots, M\end{aligned}\tag{4.141}$$

Введем следующие обозначения:

$$f^{(u)}(c, i) := \sum_{n=0}^c (g^{(u)}(n, i) \cdot h(c-n)), \quad c = 0, \dots, C; i = 1, \dots, M,\tag{4.142}$$

$$f^{(u)}(c, 0) := h(c), \quad c = 0, \dots, C,\tag{4.143}$$

$$f_{-m}^{(u)}(c) := \sum_{j=0}^c (g_{-m}^{(u)}(j) \cdot h(c-j)), \quad c = 0, \dots, C; m = 1, \dots, M,\tag{4.144}$$

где для удобства дальнейшей записи

$$f^{(u)}(c, M) = f^{(u)}(c), g^{(u)}(c, M) = g^{(u)}(c)$$

Отметим, что функция  $f^{(u)}(c, i)$  соответствует ненормированной вероятности того, что услугами  $(1, \dots, i)$  мультивещания и одноадресными соединениями занято  $c$  единиц емкости звена, и  $f_{-m}^{(u)}(c)$  – ненормированная вероятность того, что услугами мультивещания и одноадресными соединениями занято  $c$  единиц емкости звена, и  $m$ -услуга мультивещания отключена.

Теперь справедлива следующая лемма.

Лемма 4.14. Ненормированные вероятности  $f^{(u)}(c, i)$  и  $f_{-m}^{(u)}(c)$ ,  $u \in \{1, 2\}$ , вычисляются по формулам:

$$f^{(u)}(c, i) = \begin{cases} 0, & c < 0, m = 0, 1, \dots, M, \\ 1, & c = 0, m = 0, 1, \dots, M, \\ \frac{1}{c} \sum_{k \in \mathcal{K}} a_k d_k f^{(u)}(c - d_k, 0), & c = 1, \dots, C, m = 0, \\ f^{(u)}(c, i-1) + \varphi_i^u f^{(u)}(c - b_i, i-1), & c = 1, \dots, C, i = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (4.145)$$

$$f_{-m}^{(u)}(c) = \begin{cases} 0, & c < 0, m = 1, \dots, M, \\ 1, & c = 0, m = 1, \dots, M, \\ f^{(u)}(c) - \varphi_m^u f_{-m}^{(u)}(c - b_m), & c = 1, \dots, C, m = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (4.146)$$

Доказательство. С учетом формул (4.109) и (4.143) получаем:

$$f^{(u)}(c, 0) = h(c) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K a_k d_k h(c - d_k) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K a_k d_k f^{(u)}(c - d_k, 0)$$

При  $c > 0$  и  $i = 1, \dots, M$  с учетом формул (4.129) и (4.142) имеем:

$$\begin{aligned} f^{(u)}(c, i) &= \sum_{n=0}^c g^{(u)}(c - n, i) h(n) = \\ &= \sum_{n=0}^c \left( g^{(u)}(c - n, i - 1) + \varphi_i^u g^{(u)}(c - n - b_i, i - 1) \right) h(n) = \\ &= \sum_{n=0}^c g^{(u)}(c - n, i - 1) h(n) + \varphi_i^u \sum_{i=0}^c g^{(u)}(c - b_i - n, i - 1) h(n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f^{(u)}(c, i-1) + \varphi_i^u \sum_{n=0}^{c-b_i} g^{(u)}(c-b_i-n, i-1) h(c) = \\
&= f^{(u)}(c, i-1) + \varphi_i^u f^{(u)}(c-b_i, i-1).
\end{aligned}$$

Для формулы (4.146) с учетом (4.130)-(4.131) и (4.144) справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
f_{-m}^{(u)}(c) &= \sum_{i=0}^c g_{-m}^{(u)}(c-i) h(i) = \sum_{i=0}^c \left( g^{(u)}(c-i) - \varphi_m^u g^{(u)}(c-i-b_m) \right) h(i) = \\
&= \sum_{i=0}^c g^{(u)}(c-i) h(i) - \varphi_m^u \sum_{i=0}^c g_{-m}^{(u)}(c-b_m-i) h(i) = \\
&= f^{(u)}(c) - \varphi_m^u \sum_{i=0}^{c-b_m} g_{-m}^{(u)}(c-b_m-i) h(i) = f^{(u)}(c) - \varphi_m^u f_{-m}^{(u)}(c-b_m).
\end{aligned}$$

■

Заметим, что функции  $f^{(u)}(c)$  и  $f_{-m}^{(u)}(c)$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$G^{(u)}(\mathcal{X}(c)) = f^{(u)}(c), \quad u \in \{1, 2\}. \quad (4.147)$$

$$G^{(u)}(\mathcal{X}_{-m}(c)) = f_{-m}^{(u)}(c), \quad m = 1, \dots, M, \quad u \in \{1, 2\}. \quad (4.148)$$

Теперь справедливо важное следствие, позволяющее производить расчет вероятностей блокировок заявок в системе.

Следствие 4.4. Нормирующая константа  $G^{(u)}(\mathcal{X})$  и вероятностные характеристики  $B_m^{I,u}$  и  $B_k^{II,u}$  определены формулами:

$$G^{(u)}(\mathcal{X}) = \sum_{c=0}^C f(c), \quad u \in \{1, 2\}, \quad (4.149)$$

$$B_m^{I,u} = \left( G^{(u)}(\mathcal{X}) \right)^{-1} \sum_{c=C-b_m+1}^C f_{-m}^{(u)}(c), \quad m \in \mathcal{M}, \quad u \in \{1, 2\}, \quad (4.150)$$

$$B_k^{II,u} = \left( G^{(u)}(\mathcal{X}) \right)^{-1} \sum_{c=C-d_k+1}^C f^{(u)}(c), \quad k \in \mathcal{K}, \quad u \in \{1, 2\}. \quad (4.151)$$

Доказательство. Действительно, для нормирующей константы  $G^{(u)}(\mathcal{X})$  из (4.132), (4.133) и (4.147) получаем:

$$G^{(u)}(\mathcal{X}) = \sum_{c=0}^C G^{(u)}(\mathcal{X}(c)) = \sum_{c=0}^C f^{(u)}(c)$$

Докажем также утверждение формулы (4.150), формула (4.151) доказывается аналогично. Учитывая (4.139) и (4.148), вероятность блокировки  $(I, m)$ -заявок можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_m^{I,u} &= \sum_{c=C-b_m+1}^C P_{-m}^{(u)}(c) = \sum_{c=C-b_m+1}^C \frac{G^{(u)}(\mathcal{X}_{-m}(c))}{G^{(u)}(\mathcal{X})} = \\ &= \left(G^{(u)}(\mathcal{X})\right)^{-1} \sum_{c=C-b_m+1}^C f_{-m}^{(u)}(c). \end{aligned}$$

■

Отметим, что сложность вычисления нормирующей константы  $G^{(u)}(\mathcal{X})$  составляет  $O(C(K+M))$ , а сложность вычисления вероятностей блокировок услуг мультивещания с учетом вычисления нормировочной константы –  $O(C(K+2M))$ .

Последнее показывает, что разработанный алгоритм снижает вычислительную сложность расчета вероятностей блокировок по сравнению с известными алгоритмами. Для сравнения, сложность вычисления вероятностей блокировок услуг мультивещания по алгоритму [12] для модели поведения пользователей, соответствующий модели с дисциплиной обслуживания  $\Pi_2$ , составляет  $O(CM(K+M))$  (см. табл. 4.2).

Табл. 4.2. Вычислительная сложность расчета нормирующей константы и вероятностей блокировок соединений

| Вероятностная характеристика                 | Лемма 4.14  | Работа [7]      | Работа [12] |
|----------------------------------------------|-------------|-----------------|-------------|
| Нормирующая константа $G^{(u)}(\mathcal{X})$ | $O(C(K+M))$ | $O(C(K+M)+C^2)$ | $O(C(K+M))$ |

|                                                                       |              |                  |              |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------|------------------|--------------|
| Вероятност<br>и<br>блокировок<br>$B_m^{I,u}$ ,<br>$m \in \mathcal{M}$ | $O(C(K+2M))$ | $O(C(K+3M)+C^2)$ | $O(CM(K+M))$ |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------|------------------|--------------|

Для наглядности эффективные схемы расчета нормирующей константы  $G^{(u)}(\chi)$  и вероятности  $B_k^{II,u}$  показаны на рис. 4.18, а на рис. 4.17 показана схема расчета вероятностей  $B_m^{I,u}$ .

| $m \backslash c$ | 0               | 1        | ...      | $c - b_m$             | ...      | $c - 1$                                    | $c$                                                | ... | $C$                   | $\Sigma$ |
|------------------|-----------------|----------|----------|-----------------------|----------|--------------------------------------------|----------------------------------------------------|-----|-----------------------|----------|
| 0                | $f^{(u)}(1,0)$  |          |          |                       |          | $f^{(u)}(c-1,0)$                           | $\xrightarrow{*} f^{(u)}(c,0) \cdots f^{(u)}(C,0)$ |     |                       |          |
| 1                | $f^{(u)}(1,1)$  |          |          |                       |          |                                            |                                                    |     | $\cdots f^{(u)}(C,1)$ |          |
| $\vdots$         | $\vdots$        |          |          |                       |          |                                            |                                                    |     | $\vdots$              |          |
| $m-1$            |                 |          | $\cdots$ | $f^{(u)}(c-b_m, m-1)$ |          | $f^{(u)}(c, m-1)$                          |                                                    |     |                       |          |
|                  |                 |          |          |                       |          |                                            | $\downarrow \times \varphi_m^u$                    |     |                       | $\vdots$ |
| $m$              |                 | $\cdots$ |          |                       |          |                                            | $f^{(u)}(c, m)$                                    |     |                       |          |
| $\vdots$         | $\vdots$        |          |          |                       |          |                                            |                                                    |     |                       |          |
| $M$              | $f^{(u)}(1, M)$ |          |          |                       | $\cdots$ | $f^{(u)}(C-d_k+1, M) \cdots f^{(u)}(C, M)$ | $G^{(u)}(\chi)$                                    |     |                       |          |

$*f^{(u)}(c, 0) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^K a_k d_k f^{(u)}(c-d_k, 0)$ 
 $\xrightarrow{+} \times G^{(u)}(\chi)^{-1} \rightarrow B_k^{II,u}$

Рис. 4.16. Схема расчета нормирующей константы  $G^{(u)}(\chi)$  и вероятности  $B_k^{II,u}$  блокировок одноадресных соединений

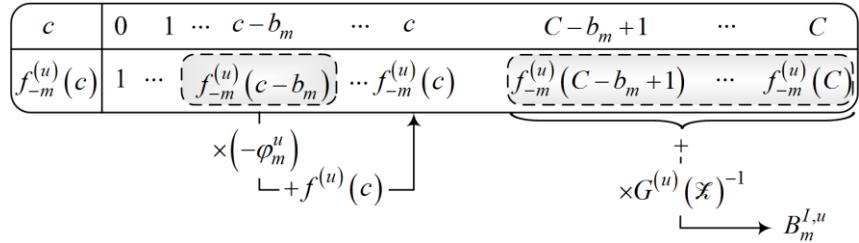


Рис. 4.17. Схема расчета вероятности блокировок  $B_m^{I,u}$  запросов на  $m$ -услугу мультивещания

#### 4.2.4. Анализ вероятностных характеристик модели с одноадресным и многоадресным трафиком

Для анализа полученных результатов исследует вероятности потерь для сети оператора видео-трафика, параметры которой описаны в [13]. Предполагается, что 400 офисов оператора обслуживают 4 миллиона домохозяйств, что в среднем дает около 10000 домохозяйств на один офис. Подписчиками услуг видео по требованию являются 40% домохозяйств (4000 в расчете на 1 офис), при этом в каждом домохозяйстве имеется 2 телевизионные приставки. Пользователи в 94% случаев выбирают видео в стандартном качестве (SD), а 6% случаев – видео повышенной четкости (HD). Для обеспечения требований услуги предлагается для каждого офиса выделить ширину полосы пропускания порядка 4 Гбит/с.

Табл. 4.3. Параметры звена мультисервисной сети с одноадресным и многоадресным трафиком

| Услуги мультивещания           |              |       |                                                            |
|--------------------------------|--------------|-------|------------------------------------------------------------|
| Трафик                         | $M$          | $b_m$ | $\rho_m$                                                   |
| Канал HDTV, 8 Мбит/с           | 1, ..., 60   | 4     | $\frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^M \frac{1}{i} \right) \rho$ |
| Канал SDTV, 2 Мбит/с           | 61, ..., 300 | 1     |                                                            |
| Классы одноадресных соединений |              |       |                                                            |

| Трафик                                      | $K$ | $d_k$ | $a_k$           |
|---------------------------------------------|-----|-------|-----------------|
| Видео по требованию в HD-качестве, 8 Мбит/с | 1   | 4     | $0,06 \times a$ |
| Видео по требованию в SD-качестве, 2 Мбит/с | 2   | 1     | $0,94 \times a$ |

Также пользователям предоставляются услуги вещательного телевидения – 300 телевизионных каналов, 20% из которых транслируются в HD-качестве, а 80% – в стандартном качестве. Для обеспечения требований вещательного телевидения выделяется ШПП порядка 1 Гбит/с. Полагаем, что популярность телевизионных каналов распределена по закону Ципфа, при этом наиболее популярными являются каналы в HD-качестве.

Выбрав в качестве условной единицы канального ресурса величину 2 Мбит/с, получаем емкость звена сети 2500 ЕКР. Основные параметры, требуемые для расчета вероятностей блокировок на звене сети, показаны в табл. 4.3. Графики зависимости вероятностей блокировок запросов пользователей на просмотр видео по требованию, а также на просмотр каналов вещательного телевидения от суммарной нагрузки на звено сети показаны на рис. 4.18.

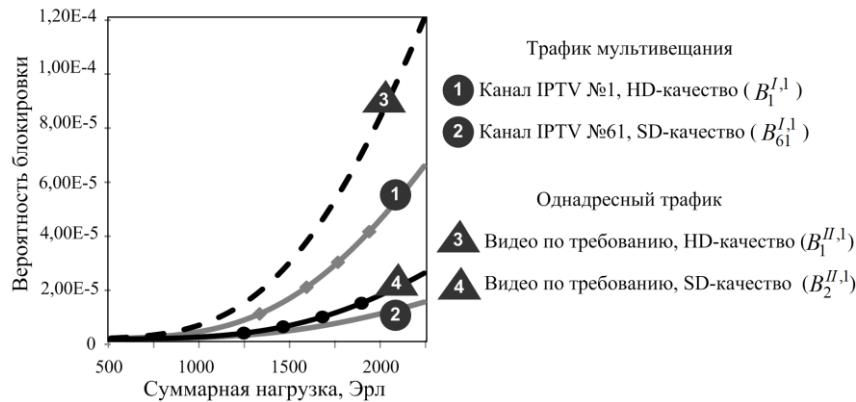


Рис. 4.18. Вероятности блокировок запросов пользователей на звене мультисервисной сети с одноадресным и многоадресным трафиком

Заметим также, что применение при расчетах вероятностей блокировок в сетях с трафиком мультивещания классической и мультисервисной моделей Эрланга дает существенную погрешность, поскольку указанные модели разработаны для расчета вероятностных характеристик моделей сетей с одноадресными соединениями. Напомним, что в случае мультисервисной модели Эрланга функционирование звена сети описывается многомерным случайным процессом

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\tilde{Z}}^{(u)}(t) = \left( X_1^{(u)}(t), \dots, X_M^{(u)}(t), N_1(t), \dots, N_K(t) \right), t \geq 0 \end{array} \right\}$$

с пространством состояний

$$\mathcal{\tilde{X}} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} : \sum_{m=1}^M b_m x_m + \sum_{k=1}^K d_k n_k \leq C \right\},$$

$$\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}^M, \quad \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}^K$$

и распределением вероятностей

$$\pi^{(u)}(z) = \left( G^{(u)}(\mathcal{\tilde{X}}) \right)^{-1} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{x_m}}{x_m!} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad z \in \mathcal{\tilde{X}}, \quad u \in \{1, 2\}, \quad (4.152)$$

$$G^{(u)}\left(\frac{\rho}{x}\right) = \sum_{z \in \mathcal{X}} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{x_m}}{x_m!} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}, \quad u \in \{1, 2\}. \quad (4.153)$$

На рис. 4.19 сравниваются результаты расчета по формуле Эрланга и рекуррентному алгоритму (4.145)-(4.146) для оценки вероятностей блокировок запросов.

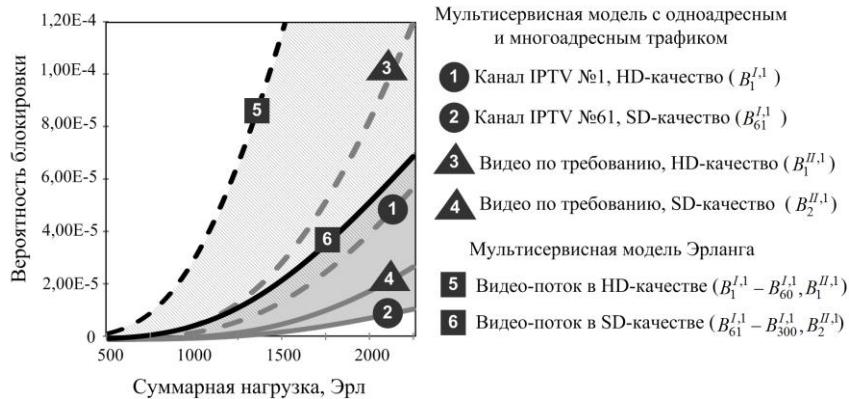


Рис. 4.19. Расчет вероятностей блокировок по формуле Эрланга и с помощью рекуррентного алгоритма (4.145)-(4.146)

Как видно из графика, погрешность расчетов вероятностей блокировок запросов пользователей на звене мультисервисной сети с одноадресным и многоадресным трафиком с помощью мультисервисной модели Эрланга является неприемлемой.

Помимо блокировок «по времени» для полноты картины исследуем также блокировки «по вызовам» на звене сети мультивещания. Для этого рассмотрим последовательность моментов  $\{\tau_n^m, n \geq 1\}$  процесса  $\chi_m(t)$  и последовательность моментов  $\{t_n^m, n \geq 1\}$  процесса  $\tilde{\chi}_m(t)$ , где  $\tau_n^m$  –  $n$ -й момент поступления  $(I, m)$ -заявки, а  $t_n^m$  –  $n$ -й момент начала периода занятости приборов системы  $(I, m)$ -заявками. В построенной имитационной модели на интервале  $[0, T]$  моделируются следующие величины:

$$L_m^{(u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \chi_m (\tau_n^m - 0) \in \mathcal{B}_m^{I,u} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\chi_m (\tau_i^m - 0) \in \mathcal{B}_m^{I,u}\}}}{n}, \quad u \in \{1, 2\} \quad (4.154)$$

$$\tilde{L}_m^{(u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \tilde{\chi}_m (t_n^m - 0) \in \mathcal{B}_m^{I,u} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tilde{\chi}_m (t_i^m - 0) \in \mathcal{B}_m^{I,u}\}}}{n}, \quad u \in \{1, 2\} \quad (4.155)$$

где  $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$  – индикаторная функция. Отметим, что согласно введенным обозначениям величина  $L_m$  соответствует вероятности блокировки запроса пользователя, а  $\tilde{L}_m$  – вероятности блокировки  $m$ -услуги мультивещания. Аналогичные характеристики вероятностей блокировок по «времени» заданы формулами (4.92) и (4.93).

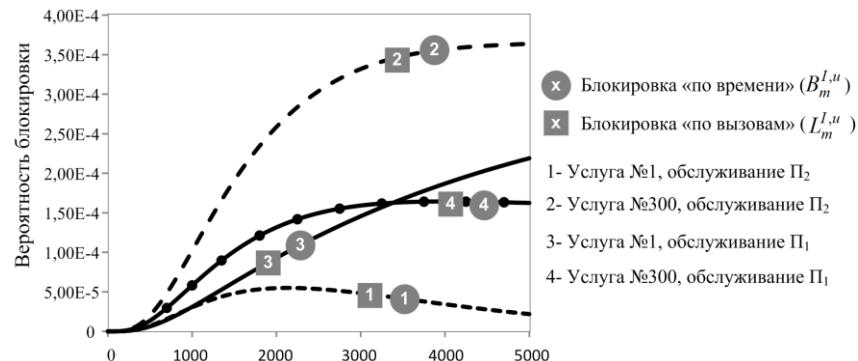


Рис. 4.20. Вероятности блокировок «по времени» и «по вызовам» услуг мультивещания

На рис. 4.20 показано, что для обеих дисциплин обслуживания  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  вероятность блокировки услуги «по времени» и «по вызовам» совпадает.

### 4.3. Анализ модель мультисервисной сети одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком

#### 4.3.1. Алгоритм для модели с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком

Алгоритм, сформулированный ниже в лемме 4.15, получен в предположениях  $b_e \leq b_u$  и  $b_e \leq b_m$ , которые основаны на анализе реальных исходных данных для сетей с «тройной услугой».

Лемма 4.15. 1) Ненормированные вероятности состояний модели звена сети с «тройной услугой» вычисляются по формулам

$$q(0,0,0) = 1, \quad (4.156)$$

$$q(n_u, 0, 0) = X_{n_u, 0}, \quad n_u = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor, \quad (4.157)$$

$$q(n_u, 1, 0) = X_{n_u, 1}, \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned} q(n_u, n_m, n_e) &= \alpha_{00}(n_u, n_m, n_e) + \sum_{i=1}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \alpha_{i0}(n_u, n_m, n_e) \cdot X_{i0} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} \alpha_{i1}(n_u, n_m, n_e) \cdot X_{i1}, \quad (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}: n_e > 0. \end{aligned} \quad (4.159)$$

2) В формуле (4.159) коэффициенты  $\alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e)$  вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e) &= \frac{1}{\bar{c}(n_u, n_m) \mu_e} \left[ \left( \lambda_u \cdot 1 \left\{ n_u < \left\lfloor \frac{C-n_m b_m - (n_e-1)b_e}{b_u} \right\rfloor \right\} + \right. \right. \\ &+ \lambda_m \cdot 1 \left\{ n_m = 0, \left\lfloor \frac{C-n_u b_u - (n_e-1)b_e}{b_m} \right\rfloor > 0 \right\} + \lambda_e + n_u \mu_u + \\ &+ \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} \cdot 1 \left\{ n_m = 1 \right\} + \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e \cdot 1 \left\{ n_e > 1 \right\} \left. \right) \cdot \\ &\cdot \alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e - 1) - \lambda_u \cdot 1 \left\{ n_u > 0 \right\} \cdot \alpha_{ij}(n_u - 1, n_m, n_e - 1) - \\ &- \lambda_m \cdot 1 \left\{ n_m = 1 \right\} \cdot \alpha_{ij}(n_u, 0, n_e - 1) - \lambda_e \cdot 1 \left\{ n_e > 1 \right\} \cdot \\ &\cdot \alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e - 2) - (n_u + 1) \mu_u \cdot 1 \left\{ n_u < \left\lfloor \frac{C-n_m b_m - (n_e-1)b_e}{b_u} \right\rfloor \right\}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \alpha_{ij}(n_u + 1, n_m, n_e - 1) - \lambda_m(e^{\rho_m} - 1)^{-1} \cdot \\ & \cdot 1\left\{n_m = 0, \left\lfloor \frac{C - n_u b_u - (n_e - 1) b_e}{b_m} \right\rfloor > 0\right\} \cdot \alpha_{ij}(n_u, 1, n_e - 1), \\ & i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - j b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad j = 0, 1, \quad (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}: n_e > 0, \\ & \alpha_{ij}(i, j, 0) = 1, \quad i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - j b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad j = 0, 1, \end{aligned} \quad (4.161)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e) = 0, \quad i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - j b_m}{b_u} \right\rfloor: i \neq n_u, \quad j = 0, 1: j \neq n_m, \quad (4.162) \\ & (n_u, n_m, 0) \in \mathcal{X}, \quad n_e \leq 0. \end{aligned}$$

3) В формулах (4.157)–(4.159) величины  $X_{ij}$  являются решением системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \beta_{00}(n_u, n_m) + \sum_{i=1}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \beta_{i0}(n_u, n_m) \cdot X_{i0} + \\ & + \sum_{i=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} \beta_{il}(n_u, n_m) \cdot X_{il} = 0, \\ & n_u = \delta_{n_m, 0}, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1, \end{aligned} \quad (4.163)$$

$$\begin{aligned} & \beta_{ij}(n_u, n_m) = \left[ n_u \mu_u + \lambda_m(e^{\rho_m} - 1)^{-1} \cdot 1\{n_m = 1\} + \right. \\ & + c(n_u, n_m) \mu_e \cdot 1\left\{ \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor > 0 \right\} \cdot \alpha_{ij}\left(n_u, n_m, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor\right) - \\ & - \lambda_u \cdot 1\{n_u > 0\} \cdot \alpha_{ij}\left(n_u - 1, n_m, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor\right) - \\ & - \lambda_m \cdot 1\{n_m = 1\} \cdot \alpha_{ij}\left(n_u, 0, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, 1)}{b_e} \right\rfloor\right) - \\ & - \lambda_e \cdot 1\left\{ \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor > 0 \right\} \cdot \alpha_{ij}\left(n_u, n_m, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor - 1\right), \\ & i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - j b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad j = 0, 1, \quad n_u = \delta_{n_m, 0}, \dots, \left\lfloor \frac{C - n_m b_m}{b_u} \right\rfloor, \quad n_m = 0, 1. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Доказательство. Основная идея доказательства показана на рис. 4.21 и пояснена ниже.

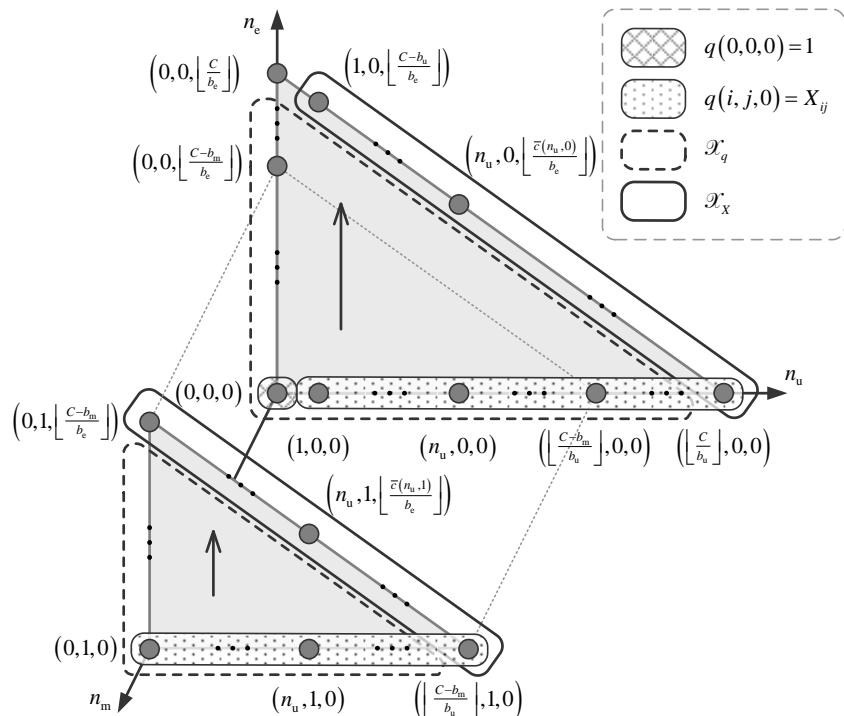


Рис. 4.21. Иллюстрация доказательства леммы 4.15

I. Пространство  $\mathcal{X}$  состояний системы разобьем на два подпространства следующим образом

$$\mathcal{X} = \{(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}: n_e = 0\} \cup \{(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}: n_e > 0\}.$$

Первое множество содержит состояния, через вероятности которых выразим вероятности состояний второго множества.

Примем  $q(0,0,0) = 1$ , что отражено формулой (4.156), а вспомогательные переменные  $X_{ij}$  определим в соответствии с формулами (4.157) и (4.158), т. е.

$$X_{n_u,0} := q(n_u, 0, 0), \quad n_u = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor,$$

$$X_{n_u,1} := q(n_u, 1, 0), \quad n_u = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor.$$

Таким образом, нижний «слой» состояний системы на рис. 4.21 соответствует переменным величинам, через которые далее «слой» за «слоем» по направлению вверх будем выражать остальные ненормированные вероятности  $q(n_u, n_m, n_e)$ ,  $n_e > 0$ .

II. Воспользуемся для этой цели СУР (4.10). Выделим три группы уравнений системы в соответствии со следующим разбиением пространства состояний

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \mathcal{X}_q \cup \mathcal{X}_X \cup \left\{ \left( 0, 0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right) \right\}, \\ \mathcal{X}_q &:= \left\{ (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X} : n_e < \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor \right\}, \\ \mathcal{X}_X &:= \left\{ (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X} \setminus \left( 0, 0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right) : n_e = \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor \right\}.\end{aligned}$$

Первая группа послужит для установления зависимости вероятностей  $q(n_u, n_m, n_e)$  от величин  $X_{ij}$ , а вторая – для составления системы уравнений для нахождения  $X_{ij}$ . Отметим,

что состояние  $\left( 0, 0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right)$  умышленно исключается из рассмотрения ввиду того, что  $\text{rang } \mathcal{X} = |\mathcal{X}| - 1$ .

Очевидно, что исходя из описанной схемы выражения вероятностей, вероятности  $q(n_u, n_m, n_e)$ ,  $n_e > 0$  зависят от  $q(0, 0, 0)$  и  $X_{ij}$  линейно, т. е. справедлива формула (4.159).

III. Докажем, что коэффициенты  $\alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e)$  задаются рекуррентно по формулам (4.160)–(4.162).

Соотношения (4.161) и (4.162) формально необходимы для того, чтобы определить зависимость (4.159) для случая  $n_e = 0$ , т. е. получить формулы (4.156)–(4.158).

Чтобы доказать соотношение (4.160), воспользуемся уравнениями СУР (4.10) для состояний  $(n_u, n_m, n_e - 1) \in \mathcal{X}_q$  (см. рис. 4.22)

$$\begin{aligned}
& q(n_u, n_m, n_e - 1) \cdot \left( \lambda_u \cdot 1\left\{ n_u < \left\lfloor \frac{C - n_m b_m - (n_e - 1)b_e}{b_u} \right\rfloor \right\} + \right. \\
& + \lambda_m \cdot 1\left\{ n_m = 0, \left\lfloor \frac{C - n_u b_u - (n_e - 1)b_e}{b_m} \right\rfloor > 0 \right\} + \\
& + \lambda_e + n_u \mu_u + \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} \cdot 1\{n_m = 1\} + \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e \cdot 1\{n_e > 1\} \Big) - \\
& - q(n_u - 1, n_m, n_e - 1) \cdot \lambda_u \cdot 1\{n_u > 0\} - \\
& - q(n_u, n_m - 1, n_e - 1) \cdot \lambda_m \cdot 1\{n_m = 1\} - \\
& - q(n_u, n_m, n_e - 2) \cdot \lambda_e \cdot 1\{n_e > 1\} - \\
& - q(n_u + 1, n_m, n_e - 1) \cdot (n_u + 1) \mu_u \cdot 1\left\{ n_u < \left\lfloor \frac{C - n_m b_m - (n_e - 1)b_e}{b_u} \right\rfloor \right\} - \\
& - q(n_u, n_m + 1, n_e - 1) \cdot \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} \cdot \\
& \cdot 1\left\{ n_m = 0, \left\lfloor \frac{C - n_u b_u - (n_e - 1)b_e}{b_m} \right\rfloor > 0 \right\} = \\
& = q(n_u, n_m, n_e) \cdot \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e, \quad (n_u, n_m, n_e - 1) \in \mathcal{X}_q,
\end{aligned}$$

откуда выразим вероятности  $q(n_u, n_m, n_e)$ . Поскольку формула (4.159) справедлива для всех остальных участвующих в уравнениях ненормированных вероятностей, получим, что  $q(n_u, n_m, n_e)$  также представляет собой линейную комбинацию от  $X_{ij}$  с коэффициентами  $\alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e)$ , вычисляемыми по рекуррентным соотношениям (4.160).

IV. Наконец, получим систему уравнений относительно величин  $X_{ij}$ . Для этого также воспользуемся уравнениями СУР (4.10), но, на этот раз, для состояний  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}_X$  (см. рис. 4.23)

$$\begin{aligned}
& q\left(n_u, n_m, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor\right) \cdot \left( n_u \mu_u + \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1} \cdot 1\{n_m = 1\} + \right. \\
& \left. + \bar{c}(n_u, n_m) \mu_e \cdot 1\left\{ \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor > 0 \right\} \right) = q\left(n_u - 1, n_m, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor\right) \cdot \\
& \cdot \lambda_u \cdot 1\{n_u > 0\} + q\left(n_u, n_m - 1, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor\right) \cdot \lambda_m \cdot 1\{n_m = 1\} + \\
& + q\left(n_u, n_m, \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor - 1\right) \cdot \lambda_e \cdot 1\left\{ \left\lfloor \frac{\bar{c}(n_u, n_m)}{b_e} \right\rfloor > 0 \right\}, \quad (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}_X.
\end{aligned}$$

Подставив вместо  $q(n_u, n_m, n_e)$  линейные комбинации (4.159), получим систему линейных уравнений (4.163) с коэффициентами  $\beta_{ij}(n_u, n_m)$ , рассчитываемыми по формуле (4.164).

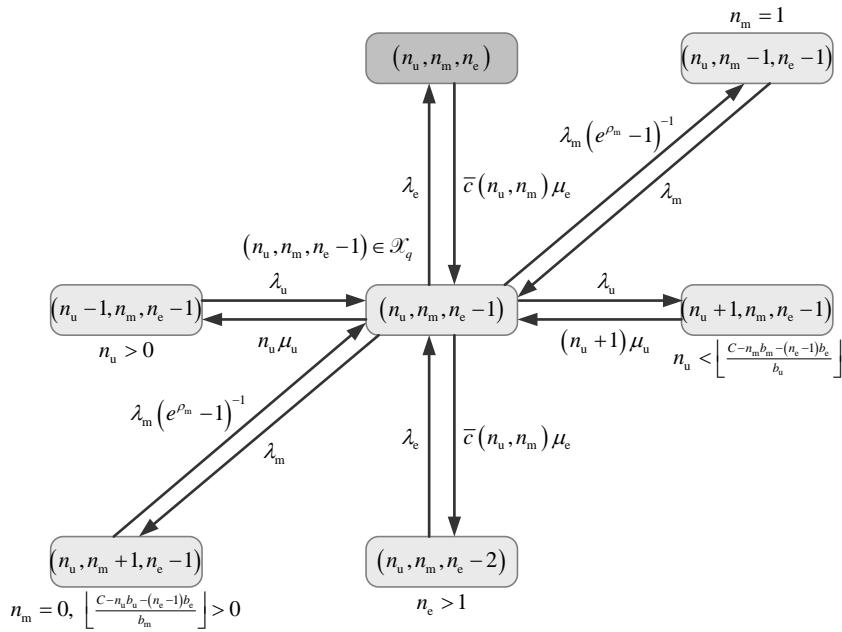


Рис. 4.22. Фрагмент диаграммы интенсивностей переходов СП СП  $(N_u(t), N_m(t), N_e(t))$  для  $(n_u, n_m, n_e - 1) \in \mathcal{X}_q$

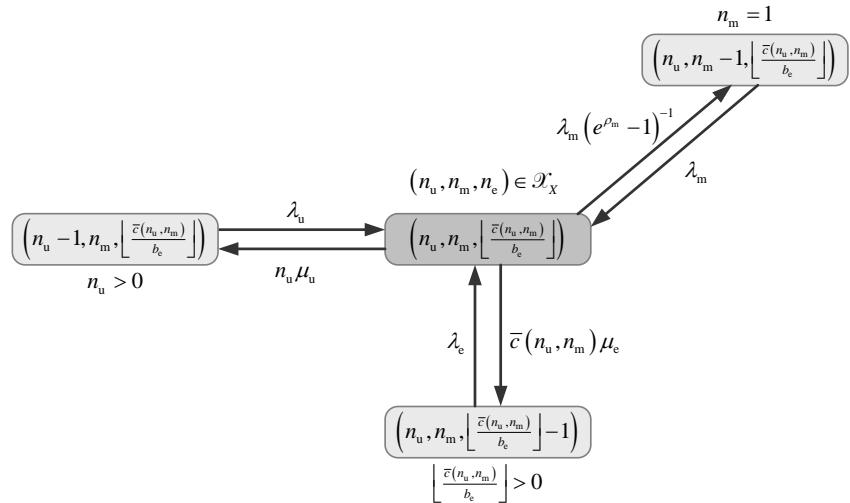


Рис. 4.23. Фрагмент диаграммы интенсивностей переходов СП  $(N_u(t), N_m(t), N_e(t))$  для  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}_X$

Лемма доказана. ■

Замечание 4.3. Стационарное распределение вероятностей состояний модели с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком находятся по формуле

$$p(n_u, n_m, n_e) = \frac{q(n_u, n_m, n_e)}{\sum_{(i_u, i_m, i_e) \in \mathcal{X}} q(i_u, i_m, i_e)}, \quad (n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}. \quad (4.165)$$

Замечание 4.4. Доказательство леммы 4.15 основано на линейных преобразованиях исходной СУР (4.10), поэтому решение системы (4.156)–(4.164) существует и единственно.

Замечание 4.5. Алгоритм леммы 4.15 выписан в предположениях  $b_e \leq b_u$  и  $b_e \leq b_m$ . Аналогичные алгоритмы можно получить и при других соотношениях между  $b_u$ ,  $b_m$  и  $b_e$ . В общем случае, в качестве переменных  $X_{ij}$  берутся ненормированные вероятности, для которых  $u_s = 0$ ,  $s \in \{u, m, e\}$ :  $\min_{s_l \in \{u, m, e\}} \{b_{s_l}\} = b_s$ .

Следствие 4.5. Алгоритм леммы 4.15 снижает размерность задачи (4.10) от

$$|\mathcal{X}| = \sum_{n_u=0}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \left\lfloor \frac{C-n_u b_u}{b_e} \right\rfloor + \sum_{n_u=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} \left\lfloor \frac{C-n_u b_u - b_m}{b_e} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor + 2 \quad (4.166)$$

до

$$\left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor + 1.$$

Доказательство. Величина  $\left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor + 1$  есть размерность системы (4.163)–(4.164). ■

Результат леммы 4.15 запишем по шагам в виде алгоритма 4.2.

Алгоритм 4.2. Расчет стационарного распределения вероятностей состояний модели звена сети с «тройной услугой» по точному методу.

Шаг 1. Расчет коэффициентов коэффициентов  $\alpha_{ij}(n_u, n_m, n_e)$ ,  $i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-jb_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $j = 0, 1$ ,  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}$ :  $n_e > 0$  по формулам (4.160)–(4.162) леммы 4.15.

Шаг 2. Расчет коэффициентов  $\beta_{ij}(n_u, n_m)$ ,  $i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C-jb_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $j = 0, 1$ ,  $n_u = \delta_{n_m, 0}, \dots, \left\lfloor \frac{C-n_m b_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $n_m = 0, 1$ , по формуле (4.164) леммы 4.15.

Шаг 3. Расчет величин  $X_{ij}$ ,  $i = \delta_{j, 0}, \dots, \left\lfloor \frac{C-jb_m}{b_u} \right\rfloor$ ,  $j = 0, 1$  как решения системы линейных уравнений (4.163) (см. лемму 4.15).

Шаг 4. Расчет ненормированных вероятностей  $q(n_u, n_m, n_e)$ ,  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}$  по формулам (4.156)–(4.159) леммы 4.15.

Шаг 5. Расчет стационарного распределения  $p(n_u, n_m, n_e)$ ,  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}$  по формуле (4.165).

### 4.3.2. Алгоритм для модели с многоадресным и эластичным трафиком

Рассмотрим важный частный случай модели с тремя типами трафика – модель с многоадресным и эластичным трафиком, в которой гарантированный порог  $b_e$  отличен от нуля. Функционирование системы описывает составной марковский СП

$$\{(N_m(t), N_e(t)), t \geq 0\} \quad (4.167)$$

над пространством состояний

$$\mathcal{X}_{m,e} := \left\{ (n_m, n_e) \geq \{0, 1\} \times \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right\} : \sum_{s \in \{m, e\}} n_s b_s \leq C \right\}. \quad (4.168)$$

Обозначим  $r(n_m, n_e)$  ненормированную вероятность того, что установлено  $n_m$  многоадресных соединений и передается  $n_e$  многоадресных соединений и передается  $n_e$  блоков эластичных данных, тогда справедливо следствие 4.6 для их расчета.

Следствие 4.6. 1) Ненормированные вероятности состояний модели с многоадресным и эластичным трафиком вычисляются по формулам

$$r(0, 0) = 1, \quad (4.169)$$

$$r(1, 0) = -\frac{\tilde{\beta}_0}{\tilde{\beta}_1}, \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \left( \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} + (C - b_m) \mu_e \right) \cdot \tilde{\alpha}_0 \left( 1, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor \right) - \\ &\quad - \lambda_m \cdot \tilde{\alpha}_0 \left( 0, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor \right) - \lambda_e \cdot \tilde{\alpha}_0 \left( 1, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor - 1 \right), \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= \left( \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} + (C - b_m) \mu_e \right) \cdot \tilde{\alpha}_1 \left( 1, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor \right) - \\ &\quad - \lambda_m \cdot \tilde{\alpha}_1 \left( 0, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor \right) - \lambda_e \cdot \tilde{\alpha}_1 \left( 1, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor - 1 \right), \end{aligned} \quad (4.172)$$

$$\begin{aligned} r(n_m, n_e) &= \tilde{\alpha}_0(n_m, n_e) + \tilde{\alpha}_1(n_m, n_e) \cdot r(1, 0), \\ (n_m, n_e) &\in \mathcal{X}_{m,e} \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}. \end{aligned} \quad (4.173)$$

2) В формулах (4.171)–(4.173) коэффициенты  $\tilde{\alpha}_j(n_m, n_e)$  вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\tilde{\alpha}_1(0,0)=0, \quad \tilde{\alpha}_0(1,0)=0, \quad (4.174)$$

$$\tilde{\alpha}_0(0,0)=1, \quad \tilde{\alpha}_1(1,0)=1, \quad (4.175)$$

$$\tilde{\alpha}_0(0,1)=\frac{\lambda_m + \lambda_e}{C\mu_e}, \quad \tilde{\alpha}_1(0,1)=-\frac{\lambda_m(e^{\rho_m}-1)}{C\mu_e}^{-1}, \quad (4.176)$$

$$\tilde{\alpha}_0(1,1)=-\frac{\lambda_m}{(C-b_m)\mu_e}, \quad \tilde{\alpha}_1(1,1)=\frac{\lambda_e + \lambda_m(e^{\rho_m}-1)}{(C-b_m)\mu_e}^{-1}, \quad (4.177)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j(0,n_e) = & (\tilde{\alpha}_0(0,1)+1) \cdot \tilde{\alpha}_j(0,n_e-1) - \frac{\rho_e}{C} \cdot \tilde{\alpha}_j(0,n_e-2) + \\ & + \tilde{\alpha}_1(0,1) \cdot \tilde{\alpha}_j(1,n_e-1), \quad j=0,1, \quad n_e=2, \dots, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_e} \right\rfloor + 1, \end{aligned} \quad (4.178)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j(0,n_e) = & \left( \frac{\rho_e}{C} + 1 \right) \cdot \tilde{\alpha}_j(0,n_e-1) - \frac{\rho_e}{C} \cdot \tilde{\alpha}_j(0,n_e-2), \\ & j=0,1, \quad n_e=\left\lfloor \frac{C-b_m}{b_e} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor, \end{aligned} \quad (4.179)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j(1,n_e) = & (\tilde{\alpha}_1(1,1)+1) \cdot \tilde{\alpha}_j(1,n_e-1) - \tilde{\alpha}_0(1,1) \cdot \tilde{\alpha}_j(0,n_e-1) - \\ & - \frac{\rho_e}{C-b_m} \cdot \tilde{\alpha}_j(1,n_e-2), \quad j=0,1, \quad n_e=2, \dots, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_e} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (4.180)$$

Доказательство. I. Для доказательства воспользуемся результатом леммы 4.15 в отсутствие одноадресного трафика. Вид пространства состояний и соответствующее разбиение на подмножества

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{m,e} &= \mathcal{X}_r \cup \mathcal{X}_{\tilde{X}} \cup \left\{ \left( 0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right) \right\}, \\ \mathcal{X}_r &\coloneqq \left\{ (n_m, n_e) \in \mathcal{X}_{m,e} : n_e < \left\lfloor \frac{C-n_m b_m}{b_e} \right\rfloor \right\}, \\ \mathcal{X}_{\tilde{X}} &\coloneqq \left\{ \left( 1, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_e} \right\rfloor \right) \right\} \end{aligned}$$

приведены на рис. 4.24. Тогда формулы (4.156)–(4.164) примут вид

$$r(0,0)=1, \quad (4.181)$$

$$r(1,0) = \tilde{X}, \quad (4.182)$$

$$\begin{aligned} r(n_m, n_e) &= \tilde{\alpha}_0(n_m, n_e) + \tilde{\alpha}_1(n_m, n_e) \cdot \tilde{X}, \\ (n_m, n_e) \in \mathcal{X}_{m,e} : n_e > 0, \end{aligned} \quad (4.183)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j(n_m, n_e) &= \frac{1}{(C - n_m b_m) \mu_e} \left[ \left( \lambda_m \cdot 1\left\{ n_m = 0, \left\lfloor \frac{C - (n_e - 1)b_e}{b_m} \right\rfloor > 0 \right\} + \right. \right. \\ &\quad + \lambda_e + \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} \cdot 1\{n_m = 1\} + (C - n_m b_m) \mu_e \cdot 1\{n_e > 1\} \Big) \cdot \\ &\quad \cdot \tilde{\alpha}_j(n_m, n_e - 1) - \lambda_m \cdot 1\{n_m = 1\} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, n_e - 1) - \lambda_e \cdot 1\{n_e > 1\} \cdot \\ &\quad \cdot \tilde{\alpha}_j(n_m, n_e - 2) - \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot 1\left\{ n_m = 0, \left\lfloor \frac{C - (n_e - 1)b_e}{b_m} \right\rfloor > 0 \right\} \cdot \tilde{\alpha}_j(1, n_e - 1) \Big], \\ j &= 0, 1, \quad (n_m, n_e) \in \mathcal{X}_{m,e} : n_e > 0, \end{aligned} \quad (4.184)$$

$$\tilde{\alpha}_j(j, 0) = 1, \quad j = 0, 1, \quad (4.185)$$

$$\tilde{\alpha}_j(n_m, n_e) = 0, \quad j = 0, 1: j \neq n_m, \quad (n_m, 0) \in \mathcal{X}_{m,e}, \quad n_e \leq 0, \quad (4.186)$$

$$\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{X} = 0, \quad (4.187)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_j &= \left( \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} + (C - b_m) \mu_e \right) \cdot \tilde{\alpha}_j \left( 1, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor \right) - \\ &\quad - \lambda_m \cdot \tilde{\alpha}_j \left( 0, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor \right) - \lambda_e \cdot \tilde{\alpha}_j \left( 1, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor - 1 \right), \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (4.188)$$

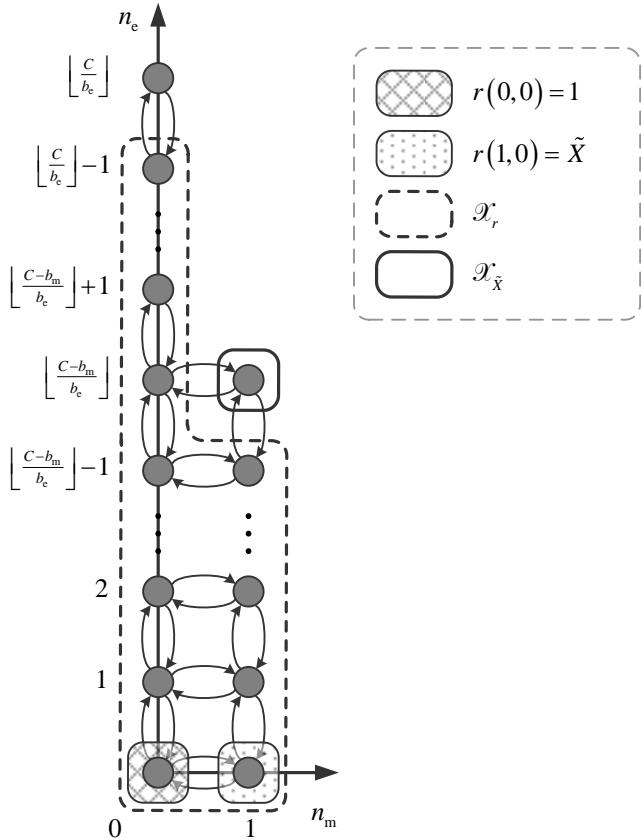


Рис. 4.24. Иллюстрация доказательства следствия 4.6

II. Получим вид коэффициентов  $\tilde{\alpha}_j(n_m, n_e)$ . Из формулы (4.186) следует формула (4.174), а из (4.185) – (4.175). Рассмотрим отдельно случай  $n_e = 1$ , тогда формула (4.184) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j(n_m, 1) &= \frac{1}{(C - n_m b_m) \mu_e} \cdot \\ &\cdot \left[ \left( \lambda_m \cdot 1\{n_m = 0\} + \lambda_e + \lambda_m \left( e^{\rho_m} - 1 \right)^{-1} \cdot 1\{n_m = 1\} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \tilde{\alpha}_j(n_m, 0) - \lambda_m \cdot 1\{n_m = 1\} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, 0) - \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1} \cdot \\ \cdot 1\{n_m = 0\} \cdot \tilde{\alpha}_j(1, 0) \Big], j = 0, 1, n_m = 0, 1.$$

Нетрудно убедиться, что данная формула сводится к формулам (4.176) и (4.177).

При  $n_e > 1$  необходимо рассмотреть три случая.

$$1) \quad n_m = 0 \text{ и } \left\lfloor \frac{C - (n_e - 1)b_e}{b_m} \right\rfloor > 0, \text{ т. е. } n_e = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor + 1:$$

$$\tilde{\alpha}_j(0, n_e) = \frac{\lambda_e + \lambda_m + C\mu_e}{C\mu_m} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, n_e - 1) - \frac{\lambda_e}{C\mu_e} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, n_e - 2) - \\ - \frac{\lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1}}{C\mu_e} \cdot \tilde{\alpha}_j(1, n_e - 1), \quad j = 0, 1, n_e = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor + 1,$$

откуда получается (4.178).

$$2) \quad n_m = 0 \text{ и } \left\lfloor \frac{C - (n_e - 1)b_e}{b_m} \right\rfloor \leq 0, \text{ т. е. } n_e = \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor:$$

$$\tilde{\alpha}_j(0, n_e) = \frac{\lambda_e + C\mu_e}{C\mu_m} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, n_e - 1) - \frac{\lambda_e}{C\mu_e} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, n_e - 2), \\ j = 0, 1, n_e = \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor,$$

следовательно, справедливо соотношение (4.179).

$$3) \quad n_m = 1:$$

$$\tilde{\alpha}_j(1, n_e) = \frac{\lambda_e + \lambda_m (e^{\rho_m} - 1)^{-1} + (C - b_m)\mu_e}{(C - b_m)\mu_e} \cdot \tilde{\alpha}_j(1, n_e - 1) - \\ - \frac{\lambda_m}{(C - b_m)\mu_e} \cdot \tilde{\alpha}_j(0, n_e - 1) - \frac{\lambda_e}{(C - b_m)\mu_e} \cdot \tilde{\alpha}_j(1, n_e - 2), \\ j = 0, 1, n_e = 2, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_m}{b_e} \right\rfloor,$$

а значит, верно соотношение (4.180).

III. Вид  $r(1, 0)$  получается решением линейного уравнения (4.187)–(4.188).

Следствие доказано. ■

При расчетах по алгоритму следствия 4.6 воспользуемся более компактной формулой для вычисления ненормированной вероятности  $r(1,0)$ . Этот результат сформулирован в виде утверждения 4.1.

Утверждение 4.1. 1) Ненормированные вероятности состояний модели с многоадресным и эластичным трафиком вычисляются по формулам

$$r(0,0)=1, \quad (4.189)$$

$$r(1,0)=\frac{\tilde{\alpha}_0\left(0,\left\lfloor\frac{C}{b_e}\right\rfloor\right)-\frac{\rho_e}{C}\cdot\tilde{\alpha}_0\left(0,\left\lfloor\frac{C}{b_e}\right\rfloor-1\right)}{\tilde{\alpha}_1\left(0,\left\lfloor\frac{C}{b_e}\right\rfloor-1\right)-\tilde{\alpha}_1\left(0,\left\lfloor\frac{C}{b_e}\right\rfloor\right)}, \quad (4.190)$$

$$r(n_m,n_e)=\tilde{\alpha}_0(n_m,n_e)+\tilde{\alpha}_1(n_m,n_e)\cdot r(1,0), \quad (4.191)$$

$$(n_m,n_e)\in\mathcal{X}_{m,e}\setminus\{(0,0),(1,0)\}.$$

2) Коэффициенты  $\tilde{\alpha}_j(n_m,n_e)$  вычисляются по рекуррентным соотношениям (4.174)–(4.180).

Доказательство. Выражение (4.190) получается при следующем разбиении пространства состояний

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{m,e} &= \mathcal{X}_r \cup \mathcal{X}_{\hat{X}} \cup \left\{ \left(1, \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_e} \right\rfloor \right) \right\}, \\ \mathcal{X}_r &:= \left\{ (n_m, n_e) \in \mathcal{X}_{m,e} : n_e < \left\lfloor \frac{C-n_m b_m}{b_e} \right\rfloor \right\}, \\ \mathcal{X}_{\hat{X}} &:= \left\{ \left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor \right) \right\}, \end{aligned}$$

а именно, как решение системы из двух линейных уравнений, выписанных для состояния  $(n_m, n_e) = \left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor\right)$  – линейной комбинации (4.191) и соответствующего уравнения СУР (4.10):

$$r\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor\right) = \tilde{\alpha}_0\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor\right) + \tilde{\alpha}_1\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor\right) \cdot r(1,0), \quad (4.192)$$

$$r\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor - 1\right) \cdot \lambda_e = r\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor\right) \cdot C \mu_e.$$

Из последнего уравнения, с учетом (4.191), имеем

$$r\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor\right) = \frac{\rho_e}{C} \cdot \tilde{\alpha}_0\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor - 1\right) + \frac{\rho_e}{C} \cdot \tilde{\alpha}_1\left(0, \left\lfloor \frac{C}{b_e} \right\rfloor - 1\right) \cdot r(1, 0). \quad (4.193)$$

Приравнивая правые части (4.192) и (4.193), получаем формулу (4.190). Доказательство леммы завершено. ■

Замечание 4.6. Стационарное распределение вероятностей состояний модели с многоадресным и эластичным трафиком находится по формуле

$$p_{m,e}(n_m, n_e) = \frac{r(n_m, n_e)}{\sum_{(i_m, i_e) \in \mathcal{X}_{m,e}} r(i_m, i_e)}, \quad (n_m, n_e) \in \mathcal{X}_{m,e}.$$

Замечание 4.7. Сложность вычисления нормирующей константы  $G_{m,e}$  для модели с многоадресным и эластичным трафиком составляет  $O(\mathcal{X}_{m,e})$ .

Таким образом, для модели с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком разработан точный алгоритм для снижения размерности решаемой задачи. В отличие от приближенного метода, данный алгоритм может быть использован для вычисления не только среднего времени передачи блоков эластичных данных, но и вероятностей блокировок, а также других BBX модели. Раздел 4.3 завершается численным анализом BBX сети с «стройной услугой».

#### 4.3.3. Формулы для расчета вероятностно-временных характеристик модели

В приводимом без доказательства следствии 4.7 выписаны формулы для вычисления BBX модели звена сети с одноадресным, многоадресным и эластичным трафиком при стационарном распределении вероятностей состояний, найденном по приближенному методу (леммы 4.1 и 4.2 раздела 4.1) или точному алгоритму (лемма 4.15 раздела 4.3).

Следствие 4.7. Если известно стационарное распределение  $p(n_u, n_m, n_e)$ ,  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}$  вероятностей состояний модели

звена сети с «тройной услугой», то BBX  $B_u$ ,  $B_m$ ,  $B_e$  и  $T_e$  вычисляются по формулам

$$B_u = \sum_{n_e=0}^{\lfloor C/b_e \rfloor} p\left(\left\lfloor \frac{C-n_e b_e}{b_u} \right\rfloor, 0, n_e\right) + \sum_{n_e=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_e \rfloor} p\left(\left\lfloor \frac{C-b_m-n_e b_e}{b_u} \right\rfloor, 1, n_e\right), \quad (4.194)$$

$$B_m = \sum_{n_u=0}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \sum_{n_e=0}^{\lfloor (C-n_u b_u)/b_e \rfloor} 1\{(n_u, 1, n_e) \notin \mathcal{X}\} \cdot p(n_u, 0, n_e), \quad (4.195)$$

$$B_e = \sum_{n_u=0}^{\lfloor C/b_u \rfloor} p\left(n_u, 0, \left\lfloor \frac{C-n_u b_u}{b_e} \right\rfloor\right) + \sum_{n_u=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} p\left(n_u, 1, \left\lfloor \frac{C-n_u b_u-b_m}{b_e} \right\rfloor\right), \quad (4.196)$$

$$T_e = \frac{\sum_{n_e=1}^{\lfloor C/b_e \rfloor} \sum_{n_u=0}^{\lfloor (C-n_e b_e)/b_u \rfloor} p(n_u, 0, n_e) + \sum_{n_e=1}^{\lfloor (C-b_m)/b_e \rfloor} \sum_{n_u=0}^{\lfloor (C-b_m-n_e b_e)/b_u \rfloor} p(n_u, 1, n_e)}{\lambda_e (1 - B_e)}. \quad (4.197)$$

Возникает закономерный вопрос выбора формул для расчета BBX системы. Как показано ниже для разработанного примера численного анализа, приближенный метод может быть применим только для расчета среднего времени  $T_e$  передачи блока эластичных данных. Погрешности метода при вычислении вероятностей  $B_s$ ,  $s \in \{u, m, e\}$  блокировок неприемлемы. Очевидно, что точный алгоритм может быть использован для расчета всех BBX системы. Следовательно, необходимо сравнить сложность вычисления среднего времени  $T_e$  по приближенному методу и по точному алгоритму, что сделано в следствии 4.8.

Следствие 4.8. Порядки сложности вычисления среднего времени  $T_e$  передачи блока эластичных данных по приближенному методу (алгоритм 4.1) и по точному алгоритму (алгоритм 4.2) удовлетворяют неравенству  $\phi_{\text{приб.}} < \phi_{\text{точ.}}$  и

$$\phi_{\text{приб.}} = O\left(|\mathcal{X}| + \left(\left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor\right)^2 + \left(\left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor\right)^2\right), \quad (4.198)$$

$$\phi_{\text{точ.}} = O \left( |\mathcal{X}| \cdot \left( \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor + 1 \right) + \left( \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor \right)^2 \right) + \phi, \quad (4.199)$$

где  $\phi$  – вычислительная сложность решения системы линейных уравнений (4.163).

Доказательство. Оценку сложности вычисления среднего времени  $T_e$  проведем через оценку сложности вычисления стационарного распределения вероятностей  $p(n_u, n_m, n_e)$ ,  $(n_u, n_m, n_e) \in \mathcal{X}$  состояний системы –  $\phi_{\text{приб.}}$  и  $\phi_{\text{точ.}}$  для приближенного и точного алгоритмов соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{n_u=0}^{\lfloor C/b_u \rfloor} \left\lfloor \frac{C-n_u b_u}{b_e} \right\rfloor + \sum_{n_u=0}^{\lfloor (C-b_m)/b_u \rfloor} \left\lfloor \frac{C-n_u b_u-b_m}{b_e} \right\rfloor = |\mathcal{X}| - B - C - 2, \\ B &:= \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor = C + D, \\ C &:= \left\lfloor \frac{C}{b_u} \right\rfloor, \\ D &:= \left\lfloor \frac{C-b_m}{b_u} \right\rfloor. \end{aligned}$$

I. Найдем  $\phi_{\text{приб.}}$  по алгоритму 4.1, а именно по его шагам.

$$\phi_{\text{приб.}} := \phi_1^{\text{приб.}} + \phi_2^{\text{приб.}} + \phi_3^{\text{приб.}} + \phi_4^{\text{приб.}},$$

$$\phi_1^{\text{приб.}} = O(A + B + 2) = O(A + B),$$

$$\phi_2^{\text{приб.}} = O((C + D) + (D + 1)) = O(B),$$

$$\begin{aligned} \phi_3^{\text{приб.}} &= O \left( 2 \left( 1 + \sum_{i=1}^C i + 1 + \sum_{i=1}^D i \right) \right) = O \left( 2 \left( \frac{C(C+1)}{2} + \frac{D(D+1)}{2} \right) \right) = \\ &= O(C^2 + D^2 + B), \end{aligned}$$

$$\phi_4^{\text{приб.}} = O(A + B + 2) = O(A + B).$$

Следовательно,

$$\phi_{\text{приб.}} = O(A + B + C^2 + D^2). \quad (4.200)$$

II. Аналогичные рассуждения проводим для точного алгоритма 4.2 – оценка  $\phi_{\text{точ.}}$ .

$$\phi_{\text{точ.}} := \phi_1^{\text{точ.}} + \phi_2^{\text{точ.}} + \phi_3^{\text{точ.}} + \phi_4^{\text{точ.}} + \phi_5^{\text{точ.}},$$

$$\phi_1^{\text{точ.}} = O((B+2)(A+B+2)) = O(AB + A + B^2 + B),$$

$$\phi_2^{\text{точ.}} = O((B+2)(B+1)) = O(B^2 + B),$$

$$\phi_3^{\text{точ.}} = \phi,$$

$$\phi_4^{\text{точ.}} = O(B + 2 + A(B+1)) = O(AB + A + B),$$

$$\phi_5^{\text{точ.}} = O(2(A+B+2)) = O(A+B).$$

Следовательно,

$$\phi_{\text{точ.}} = O(AB + A + B^2 + B) + \phi. \quad (4.201)$$

Итоговое значение  $\phi_{\text{точ.}}$  зависит от метода решения системы линейных уравнений (4.163).

III. Расчет времени  $T_e$  вносит в сложность компоненту  $O(A)$ , что не сказывается на итоговых формулах (4.200) и (4.201). Очевидно, что даже без разработки специального алгоритма для расчета нормирующей константы (4.24)  $\phi_{\text{приб.}} < \phi_{\text{точ.}}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{приб.}} &= O(A + B^2 + B - 2CD) < O(A + B^2 + B) < \\ &< O(AB + A + B^2 + B) + \phi = \phi_{\text{точ.}} \end{aligned} \quad (4.202)$$

Следствие доказано. ■

#### 4.3.4. Модель трафика «тройной услуги»

За основу исходных данных для примера взят отчет [13] компании Cisco Systems по статистическому исследованию трафика, генерируемого пользователями телекоммуникационных сетей. Индекс визуальных сетевых технологий Cisco Visual

Networking Index (VNI) – это текущая инициатива компании по составлению прогнозов и анализу развития и использования IP-сетей во всем мире. Исследование Cisco VNI Usage предоставляет количественные оценки текущей деятельности в сетях поставщиков услуг и качественные примеры поведения пользователей при работе в сети. В рамках этой совместной программы более 20 поставщиков услуг со всего мира анонимно предоставляют Cisco сводные данные для анализа текущих тенденций использования сетей и оценки перспективных требований к инфраструктуре. Поставщики услуг, принявшие участие в программе, обслуживают миллионы абонентов во всем мире. Они представляют сегменты мобильного, проводного и кабельного доступа в Северной и Латинской Америке, Европе, Азиатско-Тихоокеанском регионе и на различных развивающихся рынках.

В отчете Cisco содержатся статистические данные о долях трафика, генерируемого при предоставлении различных услуг. Как видно из табл. 4.4, трафик пакетных услуг «данные» и «видео» относится ко всем шести рассматриваемым группам, тогда как трафик пакетной услуги «голос» составляет всего порядка 2% от общего объема трафика. Учитывая особенности передачи трафика для того или иного приложения, можно поставить в соответствие каждой услуге один из трех типов трафика – одноадресный, многоадресный или эластичный.

Просуммировав доли трафика по каждому его типу, получим табл. 4.5. Без ограничения общности можно считать, что доля одноадресного трафика составляет 20%, многоадресного – 10%, а эластичного – 70%. Важно отметить, что многоадресный трафик представлен только потоковым видео, т. е. вещательным телевидением IPTV. Приложения, генерирующие одноадресный трафик, делятся на два типа по величине своего требования к ресурсам сети. Поскольку доля второй группы составляет всего около 2%, будем считать, что одноадресный трафик представлен только онлайн видео, т. е. приложением видео по запросу. Наконец, эластичный трафик соответствует всем услугам, предоставляемым не в режиме реального времени.

Табл. 4.4. Доля трафика приложений «тройной услуги»

| Пакетная услуга        | Тип услуги                                                    | Доля трафика | Тип трафика   |
|------------------------|---------------------------------------------------------------|--------------|---------------|
| Обмен файлами (43.54%) | Обмен файлами по P2P-сетям                                    | 24.85%       | Эластичный    |
|                        | Обмен файлами по сети Интернет                                | 18.69%       | Эластичный    |
| Обмен данными (27.51%) | Передача данных по протоколу HTTP                             | 26.05%       | Эластичный    |
|                        | Передача данных по протоколу HTTPS                            | 0.63%        | Эластичный    |
|                        | Услуги по сетям VPN, предоставляемые по методу туннелирования | 0.57%        | Одноадресный  |
|                        | Административные приложения                                   | 0.16%        | Эластичный    |
|                        | Другие услуги                                                 | 0.09%        | Эластичный    |
|                        | Загрузка данных для электронных карт                          | 0.01%        | Эластичный    |
|                        |                                                               |              |               |
| Онлайн видео (26.15%)  | Потоковое видео                                               | 10.52%       | Многоадресный |
|                        | Флеш-видео                                                    | 6.99%        | Одноадресный  |
|                        | Потоковое P2P-видео                                           | 4.80%        | Одноадресный  |
|                        | Прослушивание аудио и просмотр видео по протоколу HTTP        | 3.56%        | Одноадресный  |
|                        | Скачивание видео перед его воспроизведением                   | 0.28%        | Эластичный    |
| Голосовые и видео      | Телефония по другим протоколам                                | 0.64%        | Одноадресный  |

|                                                                       |                                                                       |       |              |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------|--------------|
| приложения<br>при общении<br>между<br>пользователями<br>(1.71%)       | Skype                                                                 | 0.57% | Одноадресный |
|                                                                       | IP-телефония по протоколу MGCP                                        | 0.40% | Одноадресный |
|                                                                       | SIP-телефония                                                         | 0.05% | Одноадресный |
|                                                                       | Голосовые и видео услуги в приложениях обмена мгновенными сообщениями | 0.04% | Одноадресный |
|                                                                       | IP-телефония                                                          | 0.01% | Одноадресный |
| Игровые<br>приложения<br>(0.81%)                                      | Игры для персонального компьютера                                     | 0.65% | Одноадресный |
|                                                                       | Игры при помощи приставки Xbox                                        | 0.12% | Одноадресный |
|                                                                       | Игры при помощи приставки PlayStation                                 | 0.04% | Одноадресный |
| Обмен<br>данными при<br>общении<br>между<br>пользователями<br>(0.20%) | Электронная почта                                                     | 0.19% | Эластичный   |
|                                                                       | Обмен мгновенными сообщениями                                         | 0.07% | Эластичный   |
|                                                                       | Обмен файлами в приложениях обмена мгновенными сообщениями            | 0.02% | Эластичный   |

Табл. 4.5. Суммарная доля трафика по его типу

| Тип трафика          | Доля трафика | Класс услуг                                     |
|----------------------|--------------|-------------------------------------------------|
| Одноадресный трафик  | 18.44%       | Онлайн видео (видео по запросу) и игры (16.16%) |
|                      |              | Другие услуги (2.28%)                           |
| Многоадресный трафик | 10.52%       | Потоковое видео (IPTV)                          |

|                   |        |                     |
|-------------------|--------|---------------------|
| Эластичный трафик | 71.04% | Услуги всех классов |
|-------------------|--------|---------------------|

Скорости передачи потокового трафика (видео по запросу, IPTV) зависят от технологии кодирования видео-потоков. Так, при предоставлении услуги HDTV использование видео-кодека MPEG-4 part 10 позволяет достичь скоростей 7.5–13 Мбит/с по сравнению, например, с 15 Мбит/с для MPEG-2 (ITU-T H.262). Схожее соотношение между получаемыми скоростями имеем и для SDTV – 2.0 Мбит/с (MPEG-4) против 3.5 Мбит/с (MPEG-2). Что касается эластичного трафика, целесообразным представляется обеспечить ему некоторую минимальную скорость передачи, чтобы соответствовать требованиям стандарта ITU-T G.1010 и рекомендации DSL-Forum TR-126: рекомендуемое время передачи файла 10 Мбайт не должно превышать 15 с, а допустимое время передачи – 60 с. Будем считать, что минимальная скорость равна 1 Кбит/с. Завершая построенную модель трафика «тройной услуги», необходимо определить длительности занятия ресурсов сети потоковым трафиком. Она отличается для услуги видео по запросу и IPTV и составляет 3 и 1 час соответственно.

## 5. ПРОСЕЯННАЯ НАГРУЗКА

### 5.1. Метод просеянной нагрузки

Оказывается, что чем больше и сложнее структура сети, тем проще во многом становится ее анализ, поскольку в этом случае можно допустить, что установление соединения блокируется независимо на различных звеньях маршрута. Предположение о независимости блокировок на звеньях, значительно облегчающее исследование, лежит в основе метода просеянной нагрузки<sup>1</sup> – метода приближенного расчета вероятностей блокировок в сети. Этот метод впервые был предложен еще в 1960-х гг., но долгое время был незаслуженно обделен вниманием ученых. Признаком возрождения интереса к нему можно считать появление в середине 1980-х сразу двух фундаментальных работ на эту тему – [18] и [26]. И Вард Уитт в [26], и английский математик Фрэнк Келли в [18] исследовали метод просеянной нагрузки в сетях с одноадресными одноканальными соединениями<sup>2</sup>. При этом если первый в своей работе уделил больше внимания способам решения получающихся при использовании метода уравнений, то второй математически обосновывает метод, рассматривая асимптотическое поведение системы при одновременном увеличении емкости звеньев и предложенной нагрузки, а также изучает вопросы существования решения упомянутых уравнений.

---

<sup>1</sup> От англ. Reduced load approximation, другое название – Fixed-point method (метод неподвижной точки).

<sup>2</sup> Сети, в которых любое соединение занимает на звеньях маршрута одну единицу ширины полосы пропускания (англ. networks with single-rate traffic).

Кроме того, Ф. Келли сделал попытку обобщить полученные результаты на сети с многоканальными соединениями<sup>3</sup>.

Применению метода просеянной нагрузки в сетях с многоканальными соединениями посвящена работа [15], авторы которой предлагают еще две модификации метода просеянной нагрузки: метод стохастического ранца и метод Паскаля, дающие более точные результаты в случае многоканальных соединений, чем метод, предложенный Ф. Келли. Основное различие трех подходов состоит в выборе модели для расчета вероятности блокировки на отдельно взятом звене сети. Тогда как Ф. Келли использует несколько обобщенную модель Эрланга, то в [15]лагаются более адекватные модель стохастического ранца и процесс гибели и размножения, у которого состояние соответствует числу занятых единиц емкости звена, а интенсивности переходов подобраны таким образом, что при неограниченной емкости звена математическое ожидание числа занятых единиц емкости и дисперсия совпадают с аналогичными характеристиками в модели стохастического ранца.

### 5.1.1. Сеть с одноадресными соединениями

Изложение метода просеянной нагрузки проще всего начать с модели сети с одноканальными одноадресными соединениями. Рассмотрим модель, представленную в разделе 1, при  $d_k = 1$ ,  $k \in \mathcal{K}$ . Введем систему событий:

$$\mathcal{B}(l) = \{\mathbf{n} \in \mathcal{N} : d_l(\mathbf{n}) = C_l\}, l \in \mathcal{L}.$$

Ясно, что если имеет место событие  $\mathcal{B}(l)$ , то запрос на установление соединения любого класса, маршрут которого проходит через  $l$ -звено, будет заблокирован. С другой стороны, блокировка запроса происходит тогда и только тогда, когда нет

---

<sup>3</sup> Сети, в которых требования классов соединений к ширине полосы пропускания звеньев различны (англ. networks with multirate traffic).

свободных ресурсов хотя бы на одном из звеньев маршрута, то есть

$$\mathcal{B}_k = \bigcup_{l \in \mathcal{L}_k} \mathcal{B}(l), \quad k \in \mathcal{K}. \quad (5.1)$$

Отсюда, используя закон де Моргана, получаем

$$B_k = P(\mathcal{B}_k) = P\left(\bigcup_{l \in \mathcal{L}_k} \mathcal{B}(l)\right) = 1 - P\left(\bigcap_{l \in \mathcal{L}_k} \bar{\mathcal{B}}(l)\right), \quad k \in \mathcal{K}. \quad (5.2)$$

Если предположить, что блокировки на всех звеньях сети не зависят друг от друга, то есть события  $\{\mathcal{B}(l)\}_{l \in \mathcal{L}}$  независимы в совокупности, то из (5.2) вытекает

$$B_k^* = 1 - \prod_{l \in \mathcal{L}_k} (1 - B(l)), \quad k \in \mathcal{K}, \quad (5.3)$$

где  $B(l) = P(\mathcal{B}(l))$  и  $B_k^*$  – условная вероятность блокировки запроса на установление соединения  $k$ -класса при условии, что блокировки на звеньях происходят независимо.

Будем и дальше считать, что потери на звеньях происходят независимо. Тогда на каждое звено сети поступает пуассоновский поток запросов и для расчета вероятности блокировки звена можно воспользоваться формулой Эрланга

$$B(l) = E(a(l), C_l), \quad l \in \mathcal{L}, \quad (5.4)$$

где  $a(l)$  – интенсивность нагрузки, поступающей на  $l$ -звено, и

$$E(a, C) = \frac{\frac{a^C}{C!}}{\sum_{n=0}^C \frac{a^n}{n!}}.$$

Предложенная нагрузка на  $l$ -звено складывается из предложенной нагрузки от потоков запросов на установление соединения всех классов, маршруты которых проходят через это звено, с учетом потери ее части на других звеньях маршрутов из-за блокировок на этих звеньях. Таким образом, интенсивность предложенной нагрузки на звено можно представить в виде

$$a(l) = \sum_{k \in \mathcal{K}^l} a_k \prod_{j \in \mathcal{L}_k \setminus \{l\}} (1 - B(j)), \quad l \in \mathcal{L}. \quad (5.5)$$

Подставляя это выражение в (5.4), получим систему уравнений

$$B(l) = E \left( \sum_{k \in \mathcal{K}^l} a_k \prod_{j \in \mathcal{K}_k \setminus \{l\}} (1 - B(j)), C_l \right), \quad l \in \mathcal{L}. \quad (5.6)$$

Решение этой системы существует, согласно теореме Брауэра, как неподвижная точка непрерывного отображения  $E: [0,1]^L \rightarrow [0,1]^L$ , а доказательство единственности решения для общего случая ( $d_k \geq 1$ ,  $k \in \mathcal{K}$ ) представлено в [18]. Что же касается способа решения системы (5.6), то наиболее удобным здесь представляется использовать метод последовательных приближений. Вопрос сходимости итерационной последовательности при решении данной системы был подробно изучен В. Уиттом [26]. Исследователь пришел к выводу, что сходимость имеет место для большинства конфигураций сетей, и, что особенно важно, для реально используемых конфигураций.

Получив решение системы (5.6), следует подставить его в формулу (5.3) и таким образом рассчитать искомые вероятности. Вообще говоря, то, насколько точно  $B_k^*$  приближают  $B_k$ , зависит от того, насколько правомерно делать предположение о независимости блокировок на звеньях для данной конкретной сети. Свойства модели во многом становятся проще при рассмотрении больших сетей сложной топологии, когда велико количество звеньев и различных маршрутов соединений. В качестве обоснования применимости метода просеянной нагрузки в [18] доказана асимптотическую точность приближения при одновременном стремлении емкости звеньев сети и интенсивности предложенной нагрузки к бесконечности.

Вернемся к общему случаю, когда  $d_k \geq 1$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , и разберем метод вычислений вероятностей блокировок, который был предложен в [18] и является попыткой обобщить уже рассмотренный нами алгоритм на мультисервисные сети с дифференцированными требованиями соединений к емкости звеньев. Опять будем предполагать, что блокировки на звеньях сети происходят независимо. Приближенные значения  $B_k^*$  вероятностей блокировки запросов  $B_k$  предлагается вычислять по следующей формуле:

$$B_k^* = 1 - \prod_{l \in \mathcal{L}_k} (1 - B(l))^{d_k}, \quad k \in \mathcal{K}, \quad (5.7)$$

где  $B(l)$ ,  $l \in \mathcal{L}$  – решение системы уравнений

$$B(l) = E \left( \frac{1}{1 - B(l)} \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k a_k \prod_{j \in \mathcal{L}_k} (1 - B(j))^{d_k}, C_l \right), \quad l \in \mathcal{L}. \quad (5.8)$$

Соотношения (5.8) объясняются следующим образом: если заявка на одну единицу ресурса на звене блокируется с вероятностью  $B(l)$  и если предположить, что такие блокировки происходят независимо на различных звеньях, то поток заявок, приходящий на  $l$ -звено, будет пуассоновским, а интенсивность обслуженной этим звеном нагрузки составит

$$\hat{a}(l) = \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k a_k \prod_{j \in \mathcal{L}_k} (1 - B(j))^{d_k}, \quad l \in \mathcal{L}. \quad (5.9)$$

Тогда интенсивность предложенной нагрузки можно выразить следующим образом:

$$a(l) = \frac{\hat{a}(l)}{1 - B(l)} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k a_k \prod_{j \in \mathcal{L}_k} (1 - B(j))^{d_k}}{1 - B(l)}, \quad l \in \mathcal{L}, \quad (5.10)$$

и уже эту величину следует подставить в формулу Эрланга.

Легко проверить, что при  $d_k = 1$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , соотношения (5.7) и (5.8) сводятся к (5.3) и (5.6) соответственно. Существование решения системы (5.8) вновь вытекает из теоремы Брауэра, поскольку мы опять ищем неподвижную точку непрерывного отображения выпуклого компактного множества из  $\mathbb{R}^n$  на себя. Доказательство единственности решения см. в [18].

Применение формулы Эрланга для расчета вероятности блокировки на отдельном звене приводит к системе уравнений неподвижной точки (5.8), имеющей единственное решение, однако использование других более адекватных моделей отдельного звена ощутимо повышает точность метода на уровне всей сети. В [15] рассматривается система событий

$$\mathcal{B}_k(l) = \{ \mathbf{n} \in \mathcal{N} : \sum_{i \in \mathcal{K}^l} d_i n_i > C_l - d_k \}, \quad k \in \mathcal{K}, \quad l \in \mathcal{L}_k.$$

В этом случае соотношения (5.1) и (5.3) принимают вид

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_k &= \bigcup_{l \in \mathcal{I}_k} \mathcal{B}_k(l), \quad k \in \mathcal{K}, \\ B_k^* &= 1 - \prod_{l \in \mathcal{I}_k} (1 - B_k(l)), \quad k \in \mathcal{K},\end{aligned}\tag{5.11}$$

где  $B_k(l) = P(\mathcal{B}_k(l))$ ,  $k \in \mathcal{K}$ ,  $l \in \mathcal{L}$ , а  $B_k^*$ , напомним, – условная вероятность блокировки запроса на установление соединения  $k$ -класса при условии, что блокировки на звеньях происходят независимо.

Для нахождения  $B_k(l)$  применима модель отдельного звена (ее также называют моделью стохастического ранца), и алгоритм Кауфмана – Робертса. При этом  $B_k(l)$  вычисляются как функции от интенсивности поступающей на звено нагрузки, которая, в свою очередь, выражается через вероятности блокировок на других звеньях:

$$a_k(l) = a_k \prod_{j \in \mathcal{I}_k \setminus \{l\}} (1 - B_k(j)), \quad k \in \mathcal{K}^l, \quad l \in \mathcal{L}.\tag{5.12}$$

Таким образом, мы вновь ищем эти вероятности как неподвижную точку некоторого отображения. Однако в данном случае система неподвижной точки не обязательно имеет единственное решение.

### 5.1.2. Сеть мультивещания

Посмотрим, как модифицируется метод просеянной нагрузки при применении к модели сети мультивещания, рассмотренной в разделе 2. Обозначим  $B_{ms}(l)$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$ ,  $s \in \mathcal{S}^l$ ,  $l \in \mathcal{L}$ , вероятности блокировки  $(m, s)$ -услуги на  $l$ -звене, то есть вероятность того, что  $(m, s)$ -услуга через звено  $l$  не предоставляется и на нем недостаточно ресурсов для ее включения. Будем предполагать, что блокировки на звеньях сети происходят независимо.

Величины  $B_{ms}(l)$  являются функциями от следующих параметров: емкости  $l$ -звена  $C_l$ , матрицы требований услуг к ресурсам звеньев  $\mathbf{b}(l) = (b_{ms})_{m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l}$  и величины поступающего на  $l$ -звено трафика  $\rho(l) = (\rho_{mps}(l))_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}^l}$ , то есть

$$B_{ms}(l) = B_{ms}(l)[C_l, \mathbf{b}(l), \boldsymbol{\rho}(l)], m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l, l \in \mathcal{L}. \quad (5.13)$$

Эти вероятности можно вычислить, используя формулы для отдельного звена сети из раздела 2. При этом  $C_l$  и  $\mathbf{b}(l)$  являются фиксированными параметрами сети, а величину поступающего на звено трафика предлагается искать, руководствуясь аналогичными изложенным в разделе 5.1.1 соображениями: считая, что предложенная на звено нагрузка равна доле поступающей от пользователей нагрузки, которая не была потеряна на остальных звеньях маршрута, получим для  $l \in \mathcal{L}$ ,  $s \in \mathcal{S}^l$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$  и  $p \in \mathcal{P}_s$

$$\frac{\rho_{mps}(l)}{1 + \rho_{mps}(l)} = \frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} \prod_{j \in \mathcal{L}_{ps} \setminus \{l\}} (1 - B_{ms}(j)). \quad (5.14)$$

Предположение о независимости блокировок на звеньях сети и тот факт, что вероятности блокировки  $m$ -услуги на отдельном звене для всех пользователей равны, так как блокировка  $(m, p)$ -пути имеет место, если  $m$ -услуга никому не предоставляется и на звене свободно менее  $b_m$  единиц емкости, дают нам следующее выражение для вероятности блокировки логического пути:

$$B_{mps} = 1 - \prod_{l \in \mathcal{L}_{ps}} (1 - B_{ms}(l)), m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}. \quad (5.15)$$

Из (5.13) и (5.14) видно, что вычисление вероятностей блокировок на звеньях  $B_{ms}(l)$  сводится к нахождению неподвижной точки многомерного отображения, что на практике удобно сделать методом простых итераций. Для получения окончательного результата следует воспользоваться формулой (5.15).

### 5.1.3. Сеть с двумя типами соединений

Рассмотрим метод просеянной нагрузки для модели сети с двумя типами соединений, представленной в разделе 4. Если принять предположение о независимости блокировок на различных звеньях сети, получим для вероятности блокировки  $(m, p, s)$ -пути

$$B_{mps}^I = 1 - \prod_{l \in \mathcal{L}_{ps}} (1 - B_{ms}^I(l)), \quad m \in \mathcal{M}_s, \quad p \in \mathcal{P}_s, \quad s \in \mathcal{S}, \quad (5.16)$$

и для вероятности блокировки установления соединения  $k$ -класса

$$B_k^{II} = 1 - \prod_{l \in \mathcal{L}_k} (1 - B_k^{II}(l)), \quad k \in \mathcal{K}. \quad (5.17)$$

Здесь  $B_{ms}^I(l)$  и  $B_k^{II}(l)$  представляют собой соответственно вероятности блокировок  $(m, s)$ -услуги и одноадресного соединения  $k$ -класса на звене  $l \in \mathcal{L}$ . Поскольку блокировки на различных звеньях сети происходят независимо, каждое звено можно рассматривать отдельно, пользуясь моделью отдельного звена МСС, построенную в разделе 4, причем параметры резервирования могут различаться от звена к звену.

Для каждого звена сети  $B_{ms}^I(l)$  и  $B_k^{II}(l)$  являются функциями от фиксированных структурных параметров  $l$ -звена: емкости  $C_l$ , требований к ресурсам  $(b_{ms})_{m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l}$  и  $(d_k)_{k \in \mathcal{K}^l}$ , параметров резервирования, а также от нагрузочных параметров: величины поступающего на  $l$ -звено трафика многоадресных и одноадресных соединений  $\rho(l) = (\rho_{mps}(l))_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}^l}$  и  $a(l) = (a_k(l))_{k \in \mathcal{K}^l}$ .

Нагрузочные параметры для каждого звена зависят от исходных нагрузочных параметров логических путей и классов одноадресных соединений, а также от вероятностей блокировок на остальных звеньях соответствующих маршрутов. Таким образом, вероятности блокировок находятся как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} B_{ms}^I(l) = B_{ms}^I(l, \rho(l), a(l)), \quad m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l; \\ B_k^{II}(l) = B_k^{II}(l, \rho(l), a(l)), \quad k \in \mathcal{K}, \end{cases} \quad (5.18)$$

где функции  $B_{ms}^I(\cdot)$  и  $B_k^{II}(\cdot)$  можно вычислить по формулам (4.149)-(4.151). При этом начальную нагрузку  $(\rho_{mps})_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}}$  и  $(a_k)_{k \in \mathcal{K}}$  следует предварительно «просеять» на звеньях из  $\mathcal{L} \setminus \{l\}$  по формулам

$$\rho_{mps}(l) = \left( 1 - \frac{\rho_{mps}}{1 + \rho_{mps}} \prod_{j \in \mathcal{L}_{ps} \setminus \{l\}} \left( 1 - B_{ms}^I(j) \right) \right)^{-1}, \quad (5.19)$$

$m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s^l, s \in \mathcal{S}^l,$

и

$$a_k(l) = a_k \prod_{j \in \mathcal{L}_k \setminus \{l\}} \left( 1 - B_k^{II}(j) \right), \quad k \in \mathcal{K}^l. \quad (5.20)$$

Соотношения (5.19) и (5.20), как и ранее, основаны на том соображении, что предложенная на звено нагрузка равна доле поступающей от пользователей нагрузки, которая не была потеряна на остальных звеньях маршрута. Напомним, что переход от  $(\rho_{mps}(l))_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s^l, s \in \mathcal{S}^l}$  к  $(\rho_{ms}(l))_{m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l}$  осуществляется посредством соотношения (4.62).

Поскольку величина поступающей на звено просеянной нагрузки в свою очередь зависит от вероятностей блокировки на остальных звеньях сети, система (5.18) является системой уравнений неподвижной точки. Существование решения вытекает из теоремы Брауэра, поскольку необходимо найти неподвижную точку непрерывного отображения выпуклого компактного множества  $[0, 1]^{\sum_{l \in \mathcal{L}} (|\mathcal{K}^l| + \sum_{s \in \mathcal{S}^l} |\mathcal{M}_s|)}$  на себя. Для решения системы удобно воспользоваться методом последовательных приближений с некоторым начальным приближением, например

$$B_{ms}^I(l)^{[0]} = 0,5, \quad m \in \mathcal{M}_s, s \in \mathcal{S}^l, l \in \mathcal{L},$$

$$B_k^{II}(l)^{[0]} = 0,5, \quad k \in \mathcal{K}^l, l \in \mathcal{L},$$

и условием остановки

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \left( \sum_{s \in \mathcal{S}^l} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} \left| B_{ms}^I(l)^{[i]} - B_{ms}^I(l)^{[i-1]} \right| + \sum_{k \in \mathcal{K}^l} \left| B_k^{II}(l)^{[i]} - B_k^{II}(l)^{[i-1]} \right| \right) < \varepsilon,$$

где  $i$  – номер итерации и  $\varepsilon > 0$ .

Добавим, что в общем случае решение системы (5.18) не является единственным. Этот факт может отразиться на

сходимости метода последовательных приближений при решении системы и на точности оценки вероятностей блокировок. Точность метода подробно обсуждается в следующей части пособия на основе результатов численного анализа системы. Пока лишь заметим, что точность оценки зависит, главным образом, от того, насколько правомерно делать предположение о независимости блокировок на звеньях для данной конкретной сети. В [19] отмечено, что свойства модели рассматриваемого типа во многом становятся проще при рассмотрении больших сетей сложной топологии, когда велико количество звеньев и не совпадающих друг с другом маршрутов соединений. В этом случае предположение о независимости блокировок на различных звеньях хорошо отражает характер функционирования системы, и метод просеянной нагрузки демонстрирует высокую точность.

## *5.2. Метод Монте-Карло*

Метод Монте-Карло, или метод статистических испытаний, – это метод вычислительной и прикладной математики, основанный на моделировании случайных величин и построении статистических оценок для искомых величин. Метод оформился в 1940-х гг., когда в связи с работами по созданию атомных реакторов американские ученые Дж. Нейман и С. Улам начали широко применять аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Первоначально использование метода Монте-Карло ограничивалось решением сложных задач теории переноса излучения и нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались мало пригодными. Затем его влияние распространилось на больший класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. Сегодня метод Монте-Карло применяется для решения задач теории игр, теории массового обслуживания и математической экономики и др.

Для решения задачи по методу Монте-Карло прежде всего строят вероятностную модель, представляют искомую величину в виде математического ожидания функционала от случайного

процесса, который затем моделируется на компьютере. Так, пусть требуется найти значение  $x$  некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину  $\xi$ , математическое ожидание которой равно  $x$ :  $M\xi = x$ . Произведя  $I$  испытаний, получают выборку  $(\xi_1, \dots, \xi_I)$  объема  $I$  значений  $\xi$ , вычисляют

среднее значение  $\bar{\xi} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \xi_i$  и принимают  $\bar{\xi}$  в качестве оценки  $x^*$

искомого числа  $x$ :  $x \approx x^* = \bar{\xi}$ . Теория метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину  $\xi$ , как найти ее возможные значения. Особое внимание в различных приложениях метода Монте-Карло уделяется проблеме моделирования случайных величин с заданными распределениями.

### 5.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим применение метода Монте-Карло к расчету вероятностных характеристик модели сети с двумя типами соединений. Необходимо получить приближенные значения нормировочной константы  $G(\mathcal{X})$  и вероятностей блокировок  $B_{mps}$  и  $B_k$ , исходя из распределения вероятностей (4.84) с пространством состояний вида (4.83). Для этого введем многомерную СВ  $\xi = (\xi_{mps})_{m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}}$ ,  $\xi_{mps} \in \{0,1\}$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$ ,

$p \in \mathcal{P}_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ , распределенную в соответствии с некоторым произвольным дискретным законом  $p_\xi(x) = P\{\xi = x\}$ ,  $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ , удовлетворяющим условию  $p_\xi(x) > 0$  для таких  $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ , что  $z = (x, \theta) \in \mathcal{X}$ . Аналогично, введем СВ  $\eta = (\eta_k)_{k \in \mathcal{K}}$ ,  $\eta_k \in \{0,1,2,\dots\}$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , распределенную по произвольному закону  $p_\eta(n) = P\{\eta = n\}$ ,  $n \in \tilde{\mathcal{N}}$ , такому что  $p_\eta(n) > 0$  при  $z = (\theta, n) \in \mathcal{X}$ .

Будем рассматривать выборку  $(\xi^1, \eta^1), \dots, (\xi^I, \eta^I)$  объема  $I$ , где  $\xi^i$  –  $i$ -ая реализация СВ  $\xi$ , и  $\eta^i$  –  $i$ -ая реализация СВ  $\eta$ . Введем для любого подмножества  $\Omega \subseteq \mathcal{X}$  СВ

$$\Gamma_{\Omega}^i = \frac{G\left(\left(\xi^i, \eta^i\right)\right)1_{(\xi^i, \eta^i) \in \Omega}}{p_{\xi}(\xi^i)p_{\eta}(\eta^i)}, \quad i=1, \dots, I. \quad (5.21)$$

Уточним, что в соответствии с формулой (4.86)

$$G\left(\left(\xi^i, \eta^i\right)\right) = \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} \rho_{mps}^{\xi^i} \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{a_k^{\eta_k^i}}{\eta_k!}, \quad i=1, \dots, I. \quad (5.22)$$

Тогда статистика

$$\bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \Gamma_{\mathcal{X}}^i \quad (5.23)$$

является несмещенной оценкой нормирующей константы  $G(\mathcal{X})$  для любого фиксированного  $I$ . Из центральной предельной теоремы следует, что доверительный интервал уровня значимости  $\alpha$  для  $G(\mathcal{X})$  имеет вид

$$\left( \bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I) - \frac{\varphi_{\alpha/2} \sigma_{\mathcal{X}}}{\sqrt{I}}, \bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I) + \frac{\varphi_{\alpha/2} \sigma_{\mathcal{X}}}{\sqrt{I}} \right), \quad (5.24)$$

где  $\varphi_{\alpha/2}$  – квантиль порядка  $\frac{\alpha}{2}$  стандартного нормального закона,

и  $\sigma_{\mathcal{X}}^2$  – выборочная дисперсия СВ  $\Gamma_{\mathcal{X}}$ :

$$\sigma_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I \left( \Gamma_{\mathcal{X}}^i - \bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I) \right)^2. \quad (5.25)$$

### 5.2.2. Метод существенной выборки

Порождение реализаций СВ  $(\xi^i, \eta^i)$ , исходя из законов распределения  $p_{\xi}(x)$ ,  $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ , и  $p_{\eta}(n)$ ,  $n \in \tilde{\mathcal{N}}$ , упрощается тем, что все компоненты вектора независимы в совокупности. В этом случае СВ можно генерировать покомпонентно на основе распределений  $p_{\xi_{mps}}(x)$ ,  $x \in \{0,1\}$ , и  $p_{\eta_k}(n)$ ,  $n \in \{0,1,2,\dots\}$ , таких что  $p_{\xi}(x) = \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{p \in \mathcal{P}_s} \prod_{m \in \mathcal{M}_s} p_{\xi_{mps}}(x_{mps})$  и  $p_{\eta}(n) = \prod_{k \in \mathcal{K}} p_{\eta_k}(n_k)$ . Для выбора этих распределений прибегнем к методу существенной

выборки (англ. importance sampling). Пусть закон распределения СВ  $\xi_{mps}$  имеет вид

$$p_{\xi_{mps}}(x) = \frac{\rho_{mps}^x}{1 + \rho_{mps}}, \quad x \in \{0, 1\}, \quad (5.26)$$

а СВ  $\eta_k$  распределена по пуассоновскому закону с параметром  $a_k$ :

$$p_{\eta_k}(n) = \frac{a_k^n}{n!} e^{-a_k}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (5.27)$$

В этом случае статистика (5.23) принимает удобную форму:

$$\bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I) = \frac{G(\tilde{\mathcal{X}})}{I} \sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\xi^i, \eta^i) \in \mathcal{X}}. \quad (5.28)$$

Далее, введем для любого подмножества  $\Omega \subseteq \mathcal{X}$  статистику

$$\Theta_{\Omega}(I) = \frac{\sum_{i=1}^I \Gamma_{\Omega}^i}{\sum_{i=1}^I \Gamma_{\mathcal{X}}^i}, \quad (5.29)$$

являющуюся оценкой вероятности  $P\{z \in \Omega\}$ , которая определяется формулой (4.90). Согласно [24],  $(1-\alpha) \cdot 100$ -процентный доверительный интервал для  $P\{z \in \Omega\}$  имеет вид

$$\left( \Theta_{\Omega}(I) - \frac{\varphi_{\alpha/2} s_I}{\bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I)\sqrt{I}}, \Theta_{\Omega}(I) + \frac{\varphi_{\alpha/2} s_I}{\bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I)\sqrt{I}} \right), \quad (5.30)$$

где

$$s_I^2 = \sigma_{\Omega}^2 - 2\Theta_{\Omega}(I)\sigma_{\mathcal{X}\Omega}^2 + \Theta_{\Omega}^2(I)\sigma_{\mathcal{X}}^2 \quad (5.31)$$

и

$$\sigma_{\mathcal{X}\Omega}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (\Gamma_{\mathcal{X}}^i - \bar{\Gamma}_{\mathcal{X}}(I))(\Gamma_{\Omega}^i - \bar{\Gamma}_{\Omega}(I)). \quad (5.32)$$

Для оценки вероятностей блокировки  $B_{mps}$  и  $B_k$  естественно воспользоваться статистиками  $\Theta_{\mathcal{A}_{mps}}(I)$  и  $\Theta_{\mathcal{A}_k}(I)$  соответственно.

В случае, когда СВ  $(\xi, \eta)$  распределена по закону (5.26), (5.27), они принимают вид

$$\Theta_{\mathcal{B}_{mps}}(I) = \frac{\sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\xi^i, \eta^i) \in \mathcal{B}_{mps}}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\xi^i, \eta^i) \in \mathcal{X}}}, \quad m \in \mathcal{M}_s, p \in \mathcal{P}_s, s \in \mathcal{S}, \quad (5.33)$$

и

$$\Theta_{\mathcal{B}_k}(I) = \frac{\sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\xi^i, \eta^i) \in \mathcal{B}_k}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\xi^i, \eta^i) \in \mathcal{X}}}, \quad k \in \mathcal{K}. \quad (5.34)$$

Статистика (5.29), в отличие от (5.23), является смещенной оценкой искомой величины, однако смещение уменьшается с ростом объема выборки. Известно, что являющееся доминирующим слагаемое порядка  $O(1/I)$  смещения такой оценки имеет вид

$$\frac{\Theta_\Omega(I)}{I} \left( \frac{D\Gamma_{\mathcal{X}}^i}{\left(M\Gamma_{\mathcal{X}}^i\right)^2} - \frac{\text{cov}(\Gamma_{\mathcal{X}}^i, \Gamma_\Omega^i)}{M\Gamma_{\mathcal{X}}^i M\Gamma_\Omega^i} \right). \quad (5.35)$$

Легко проверить, что для оценок вида (5.33) и (5.34), то есть при использовании в качестве распределения СВ  $(\xi, \eta)$  законов (5.26) и (5.27), величина (5.35) равна 0.

Законы распределения (5.26) и (5.27) удобно использовать в значимых для практики диапазонах нагрузочных параметров сети. Если же сеть сильно перегружена (вероятности блокировок установления соединений превышают 0,2–0,25), существенная часть генерируемых реализаций СВ  $(\xi, \eta)$  попадает за пределы пространства состояний  $\mathcal{X}$ . Аналогичная проблема возникает при очень слабой загрузке сети (вероятности блокировок установления соединений меньше  $10^{-6}$ ), поскольку реализации СВ  $(\xi, \eta)$  редко попадают в соответствующее множество блокировок. В этом случае необходимо либо значительно увеличивать объем выборки, либо применять другой закон распределения СВ  $(\xi, \eta)$ . Отметим,

однако, что при выборе другого закона распределения СВ  $(\xi, \eta)$  величина смещения (5.35) оценки (5.29) будет отлична от нуля, что, как показывает численный анализ системы рассматриваемого типа, приводит к возникновению плохо предсказуемых погрешностей. Добавим, что вопросы выбора распределения генерируемого вектора  $(\xi, \eta)$  для сети с одноадресными соединениями обсуждаются в [24].

### 5.2.3. Вычислительные алгоритмы

Для приближенного расчета нормирующей константы на основе оценки (5.28) разработан следующий алгоритм.

Алгоритм 5.1 (вычисление нормирующей константы (4.86) методом Монте-Карло).

- 
- 1:  $\Gamma \leftarrow 0$
  - 2: **для**  $i = 1, 2, \dots, I$  **выполнять**
  - 3:     **для всех**  $s \in \mathcal{S}$ ,  $m \in \mathcal{M}_s$ ,  $p \in \mathcal{P}_s$  **выполнять**
  - 4:          $x_{mps} \leftarrow CB \quad \xi \in \{0,1\}: P\{\xi = x\} = \frac{\rho_{mps}^x}{1 + \rho_{mps}}$
  - 5:         **для всех**  $k \in \mathcal{K}$  **выполнять**
  - 6:              $n_k \leftarrow CB \quad \eta \sim Poiss(a_k)$
  - 7:         **если для всех**  $l \in \mathcal{L}$   $\sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{m \in \mathcal{M}_s} b_{ms} \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_s^l} x_{mps} + \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k n_k \leq C_l$
  - 8:             **то**  $\Gamma \leftarrow \Gamma + 1$
  - 9:          $\Gamma \leftarrow \frac{G(\tilde{\chi})}{I} \Gamma$
  - 10: **возвратить**  $\Gamma$
- 

Сложность вычисления нормирующей константы методом Монте-Карло с помощью алгоритма 5.1 имеет порядок  $O(NL\max\{MPS, K\})$  в случае сети произвольной топологии или  $O(NMP^2)$  в случае бинарного дерева. Напомним, что  $N = \max_{k \in \mathcal{K}} N_k$ , где  $N_k = \max\{n_k \in \{0, 1, 2, \dots\} : z = (\mathbf{0}, \mathbf{n}) \in \mathcal{X}\}$ .

На основе алгоритма 5.1 строится алгоритм расчета вероятностей блокировки путем добавления переменной-счетчика числа состояний блокировки соответствующего логического пути или класса одноадресных соединений. Алгоритм 5.2 разработан для приближенного расчета вероятности блокировки  $(m, p, s)$ -пути на основе оценки (5.33).

**Алгоритм 5.2 (вычисление вероятности блокировки  $(m, p, s)$ -пути методом Монте-Карло)**

---

- 1:  $\Gamma \leftarrow 0$ ,  $\Gamma_{mps} \leftarrow 0$
  - 2: **для**  $i = 1, 2, \dots, I$  **выполнять**
  - 3:     **для всех**  $\tilde{s} \in \mathcal{S}$ ,  $\tilde{m} \in \mathcal{M}_{\tilde{s}}$ ,  $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{\tilde{s}}$  **выполнять**
  - 4:          $x_{\tilde{m}\tilde{p}\tilde{s}} \leftarrow CB \xi \in \{0,1\}: P\{\xi = x\} = \frac{\rho_{\tilde{m}\tilde{p}\tilde{s}}^x}{1 + \rho_{\tilde{m}\tilde{p}\tilde{s}}}$
  - 5:         **для всех**  $k \in \mathcal{K}$  **выполнять**
  - 6:              $n_k \leftarrow CB \eta \sim Poiss(a_k)$
  - 7:         **если для всех**  $l \in \mathcal{L}$   $\sum_{\tilde{s} \in \mathcal{S}} \sum_{\tilde{m} \in \mathcal{M}_{\tilde{s}}} b_{\tilde{m}\tilde{s}} \oplus_{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{\tilde{s}}^l} x_{\tilde{m}\tilde{p}\tilde{s}} + \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k n_k \leq C_l$
  - то**
  - 8:              $\Gamma \leftarrow \Gamma + 1$
  - 9:         **если**  $x_{mps} = 0$  **то**
  - 10:              $x_{mps} \leftarrow 1$
  - 11:         **если**  $\exists l \in \mathcal{L}_{ps}$ :
  - $\sum_{\tilde{s} \in \mathcal{S}} \sum_{\tilde{m} \in \mathcal{M}_{\tilde{s}}^l} b_{\tilde{m}\tilde{s}} \oplus_{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{\tilde{s}}^l} x_{\tilde{m}\tilde{p}\tilde{s}} + \sum_{k \in \mathcal{K}^l} d_k n_k > C_l$  **то**
  - 12:              $\Gamma_{mps} \leftarrow \Gamma_{mps} + 1$
  - 13:      $\Gamma_{mps} \leftarrow \frac{\Gamma_{mps}}{\Gamma}$
  - 14: **возвратить**  $\Gamma_{mps}$
- 

Отметим, что алгоритм 5.2, как и алгоритм 5.1, прост в реализации. Алгоритм расчета вероятности блокировки одноадресных соединений на основе оценки (5.34) строится аналогично.

## **6. РАЗВИТИЕ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА**

### ***6.1. Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком***

Сеть GSM, предназначенная в первую очередь для передачи речи, накладывает на использование приложений Интернет ряд технических ограничений, которые связаны, в основном, с невозможностью обеспечить требуемую для приложения скорость передачи. Для преодоления этих ограничений был разработан новый стандарт общего сервиса пакетной радиопередачи в сетях GSM технология GPRS (GPRS, General Packet Radio Service). Технология GPRS, использующая для передачи данных существующий в сети GSM радиоинтерфейс, является первым промежуточным шагом в создании систем третьего поколения 3G.

В сети GSM используется множественный доступ с временным (TDMA, Time Division Multiple Access) и частотным (FDMA, Frequency Division Multiple Access) разделением. Как показано на Рис. 6.1. Схема несущих частот GSM и кадра TDMAрис. 6.1, для GSM зарезервированы две частотные полосы с разносом в 45 МГц: с 890МГц по 915МГц для восходящего и с 935МГц по 960МГц для нисходящего трафика. Каждая полоса шириной в 25 МГц разделяется на 124 несущих канала по 200КГц шириной. Частоты группируются парами, организуя дуплексный канал, за распределение несущих частот отвечает базовая приемопередающая станция.

Каждая частотная несущая содержит восемь физических каналов, соответствующих восьми временным интервалам, составляющим TDMA-кадр. В то время как в сети GSM для передачи речи используется по одному физическому каналу для передачи восходящего и нисходящего трафика, в сети GPRS для обслуживания одной сессии при передаче данных может использоваться до 8 физических каналов.

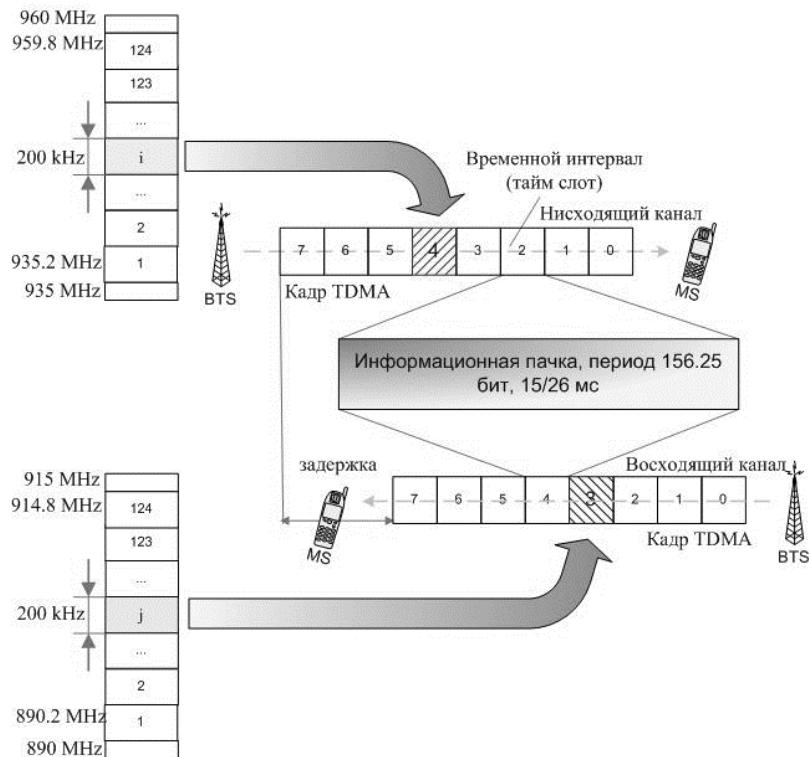


Рис. 6.1. Схема несущих частот GSM и кадра TDMA

На основе механизма распределения радиочастот на базовой приёмопередающей станции построим функциональную модель, в которой на частотный канал (рис. 6.2), состоящий из восьми физических каналов, поступают нисходящие потоки пакетов GPRS-сессий (например, данные, получаемые пользователем из сети Интернет).

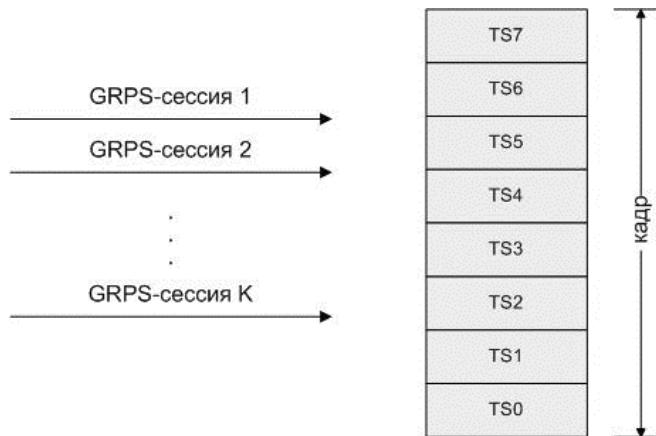


Рис. 6.2. Функциональная схема обслуживания трафика GPRS-сессий на частотном канале

Восходящий трафик пакетов от мобильной станции (MS, Mobile Station) к базовой станции (BTS, Base Transceiver Station) в модели не учитывается (например, запросы пользователя на получение данных из сети Интернет), т.к. он не создает существенной нагрузки на систему.

Возможность предоставления услуги передачи данных по технологии GPRS с различными уровнями качества обеспечивается с помощью одной из стратегий управления доступом пакетов в частотный канал. Для каждой GPRS-сессии устанавливается максимально возможное число доступных для передачи физических каналов. Если сессия исчерпала все доступные ей каналы, то вновь прибывающие пакеты данной сессии теряются.

GPRS-сессия, как показано на рис. 6.3, представляется последовательностью чередующихся периодов «On»/«Off» - активности и пауз. В течение периода активности может быть передано некоторое количество пакетов, во время паузы пакеты не передаются, таким образом, трафик GPRS-сессий имеет пульсирующий характер. На рис. 6.3 стрелками показаны моменты поступления пакетов в период «On».

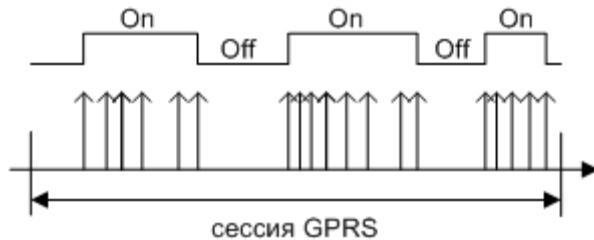


Рис. 6.3. Временная диаграмма трафика GPRS-сессии

Задачей исследования является анализ одного из основных показателей качества обслуживания трафика GPRS-сессии на участке между мобильной и базовой приемопередающими станциями - вероятности потери пакета из-за отсутствия свободных каналов. С этой целью построена математическая модель в виде многолинейной системы массового обслуживания (СМО) с входящим ММРП потоком (Markov Modulated Poisson Process), а также предложен метод расчета характеристик модели.

На рис. 6.4 схематично изображена СМО, моделирующая обслуживание трафика GPRS-сессий одним частотным каналом.

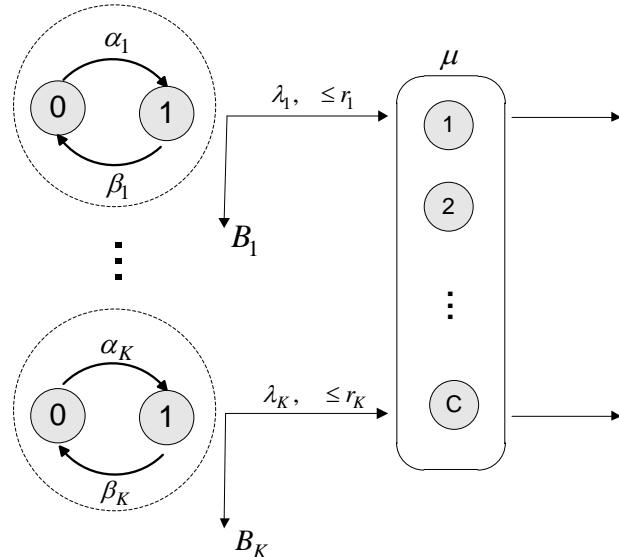


Рис. 6.4. СМО  $MMPP(K, r)|M|C$

На систему, состоящую из  $C$  приборов, от  $K$  источников (GPRS-сессий) поступают MMPP-потоки заявок (GPRS-пакетов). Каждый источник может находиться в одном из двух состояний «0» (Off) или «1» (On). Длительности пребывания  $k$ -источника в состояниях «0» и «1» имеют экспоненциальное распределение с параметрами  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  соответственно,  $k = 1, \dots, K$ . В состоянии «0» источник не генерирует заявки. В состоянии «1»  $k$ -й источник генерирует заявки ( $k$ -заявки) с интенсивностью  $\lambda_k$ ,  $0 < \lambda_k < \infty$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Число приборов, доступных  $k$ -заявкам, не превосходит заданной величины  $r_k$ ,  $0 \leq r_k \leq C$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Если в момент поступления  $k$ -заявки заявками того же типа занято меньше, чем  $r_k$  приборов,  $k$ -заявка поступает на обслуживание, занимает один прибор и обслуживается на нем в течение случайного времени, имеющего экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ ,  $0 < \mu < \infty$ , не зависящим от типа заявки. Если в момент поступления  $k$ -заявки заявками того же типа занято  $r_k$  приборов или все приборы в системе заняты, поступившая заявка теряется. Построенную СМО будем кодировать в обозначениях Башарина-Кендалла как  $MMPP(K, \mathbf{r})|M|C$ .

Обозначим  $n_k(t)$  – число  $k$ -заявок в СМО,  $0 < n_k(t) \leq r_k(t)$ , и  $l_k(t) \in \{0, 1\}$  – состояние  $k$ -го MMPP потока ( $k$ -потока) в момент времени  $t \geq 0$ . Тогда составной случайный процесс  $X(t) = (\mathbf{n}(t), \mathbf{l}(t))$  по построению является Марковским процессом и описывает поведение исследуемой системы над множеством состояний

$$\mathcal{X} = \mathcal{N} \times \mathcal{L}, \quad \mathcal{N} = \left\{ \mathbf{n} : \sum_{i=1}^K n_i \leq C, 0 \leq n_k \leq r_k, k = 1, \dots, K \right\}, \quad \mathcal{L} = \{0, 1\}^K \quad (6.1)$$

Обозначим  $p(\mathbf{n}, \mathbf{l})$ ,  $(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \mathcal{X}$ , стационарное распределение вероятностей состояний МП  $X(t)$  и рассмотрим  $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{X}$  – множество состояний, в которых система не может принять на обслуживание  $k$ -заявку. Будем называть  $\mathcal{B}_k$

множеством блокировок  $k$ -заявок, и для его построения введем следующие вспомогательные множества:

- $\Pi_k^b = \{(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \mathcal{X} : n_k = r_k; l_k = 1\}$  - множество состояний блокировки из-за того, что в системе уже обслуживается  $r_k$  заявок того же типа;
- $\Pi_k^C = \{(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \mathcal{X} : n_k = C, n_k \neq r_k; l_k = 1\}$  - множество состояний блокировок  $k$ -заявок из-за отсутствия свободных приборов.

С учетом введенных обозначений множество блокировок  $\mathcal{B}_k$  имеют вид

$$\mathcal{B}_k = \Pi_k^b \cup \Pi_k^C, \quad (6.2)$$

а вероятность блокировки  $B_k$  определяется формулой

$$B_k = \sum_{(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \Pi_k^b} p(\mathbf{n}, \mathbf{l}) + \sum_{(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \Pi_k^C} p(\mathbf{n}, \mathbf{l}) - \sum_{(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \Pi_k^b \cap \Pi_k^C} p(\mathbf{n}, \mathbf{l}). \quad (6.3)$$

Дальнейшим этапом является разработка метода вычислений распределения вероятностей  $p(\mathbf{n}, \mathbf{l})$ ,  $(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \mathcal{X}$ , и вероятностей блокировки  $B_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ .

Пусть  $A$  инфинитезимальный оператор МП  $X(t)$  и  $\gamma = \max_{j=1, K} r_j$  максимальное значение элементов вектора  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ . Обозначим  $\mathbf{x}(\gamma+1) = (\overline{x_1 x_2 \dots x_{2K}})_{\gamma+1}$  число, составленное из элементов вектора  $\mathbf{x}$  и представленное в системе счисления по основанию  $(\gamma+1)$ . Очевидно, что представление числа  $\mathbf{x}(\gamma+1)$  в десятичной системе счисления определяется формулой

$$(\mathbf{x}(\gamma+1))_{10} = \sum_{i=1}^{2K} x_i (\gamma+1)^{2K-i}. \quad (6.4)$$

Обозначим  $e_i$  вектор длины  $K$ ,  $i$ -й элемент которого равен 1, а остальные элементы равны 0. Для определения стационарных вероятностей необходимо решить систему уравнений равновесия (СУР)

$$\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{o}^T. \quad (6.5)$$

Задача осложняется большой размерностью пространства состояния. Далее сформулируем и докажем лемму, позволяющую применить к решению СУР (6.5) метод LU-разложения.

Лемма 6.1. Если на множестве  $\mathcal{X}$  состояний СМО

$MMPP(K, \mathbf{r}) | M | C | 0$  введен лексикографический порядок

$$\left( \mathbf{x}' = (\mathbf{n}', \mathbf{l}') > \mathbf{x}'' = (\mathbf{n}'', \mathbf{l}'') \right) \Leftrightarrow \left( (\mathbf{n}' > \mathbf{n}'') \vee \left( (\mathbf{n}' = \mathbf{n}'') \wedge \left( \sum_{i=1}^{2K} (x'_i - x''_i) \cdot (1 + \gamma)^{2K-i} > 0 \right) \right) \right), \quad (6.6)$$

$$\text{где } \mathbf{n} = \sum_{k=1}^K n_k,$$

тогда

1. Матрица интенсивностей переходов МП  $X(t) = (\mathbf{n}(t), \mathbf{l}(t))$  представима в блочном трехдиагональном виде

$$A = \begin{pmatrix} D_0 & U_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_1 & D_1 & U_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_2 & D_2 & U_2 & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & L_{C-1} & D_{C-1} & U_{C-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & L_C & D_C \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

2. Ненулевые элементы блоков  $U_i$ ,  $L_i$ ,  $D_i$  матрицы  $A$  вычисляются по следующим формулам

$$U((\mathbf{n}', \mathbf{l}'), (\mathbf{n}'', \mathbf{l}'')) = \lambda_j, \quad (6.8)$$

если  $\mathbf{l}'' = \mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'' = \mathbf{n}' + \mathbf{e}_j$ ,  $0 < n'_j < r_j$ ,  $l'_j = 1$ ,

$$L((\mathbf{n}', \mathbf{l}'), (\mathbf{n}'', \mathbf{l}'')) = n_j \cdot \mu, \quad j = \overline{1, K}, \quad (6.9)$$

если  $\mathbf{l}' = \mathbf{l}''$ ,  $\mathbf{n}'' = \mathbf{n}' - \mathbf{e}_j$ ,

$$D((\mathbf{n}', \mathbf{l}'), (\mathbf{n}'', \mathbf{l}'')) = \begin{cases} \alpha_j, & \text{если } \mathbf{n}'' = \mathbf{n}', \mathbf{l}'' = \mathbf{l}' + \mathbf{e}_j, l'_j = 0, \\ \beta_j, & \text{если } \mathbf{n}'' = \mathbf{n}', \mathbf{l}'' = \mathbf{l}' - \mathbf{e}_j, l'_j = 1. \end{cases} \quad (6.10)$$

3. Если  $r_k = C$ ,  $k = 1, \dots, K$ , тогда размерности блоков матрицы  $A$  определяются формулами

$$\begin{aligned}
& \mathbf{D}_c : \dim \mathcal{X}_c \times \dim \mathcal{X}_c, c = 0, \dots, C, \\
& \mathbf{L}_c : \dim \mathcal{X}_c \times \dim \mathcal{X}_{c-1}, c = 1, \dots, C, \\
& \mathbf{U}_c : \dim \mathcal{X}_c \times \dim \mathcal{X}_{c+1}, c = 0, \dots, C-1,
\end{aligned} \tag{6.11}$$

где  $\dim \mathcal{X}_c = \frac{2^K}{(K-1)!} \cdot \prod_{j=1}^{K-1} (c+j)$ .

Доказательство: Введение на множестве  $\mathcal{X}$  лексикографического порядка (6.6), по сути, означает выполнение сортировки на множестве в два этапа. На первом этапе выполняется сортировка по возрастанию, причем элемент  $\mathbf{x}'$  «больше»  $\mathbf{x}''$ , если справедливо соотношение  $\mathbf{x}' > \mathbf{x}'' \Leftrightarrow \mathbf{n}' > \mathbf{n}''$ . При такой сортировке множество  $\mathcal{X}$  разбивается на подмножества  $\mathcal{X}_c$ ,  $c = 1, \dots, C$ , в порядке возрастания значения индекса  $c$ , такие что  $\mathcal{X} = \bigcup_{c=0}^C \mathcal{X}_c$ ,  $\mathcal{X}_c = \{(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \in \mathcal{X} : n_c = c\}$ . На втором этапе сортируются элементы внутри каждого подмножества  $\mathcal{X}_c$ , причем

$$\forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathcal{X}_c, (\mathbf{x}' > \mathbf{x}'') \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^{2K} (x'_i - x''_i) \cdot (1 + \gamma)^{2K-i} > 0 \right).$$

В [10]

показано, что элемент  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  определяет интенсивность перехода МП из состояния  $i$  в состояние  $j$ , причем может произойти только одно «элементарное» событие из следующих: поступление/обслуживание заявки или смена состояния источника. Следовательно, ненулевые элементы матрицы определяющие такие переходы расположены в соответствии со следующим принципом:

- наддиагональные блоки  $\mathbf{U}_i$  описывают переходы МП  $X(t)$  из состояний множества  $\mathcal{X}_c$  в состояние множества  $\mathcal{X}_{c+1}$ ,  $c = 0, \dots, C-1$ ;
- поддиагональные блоки  $\mathbf{L}_i$  описывают переходы из состояний множества  $\mathcal{X}_c$  в состояние множества  $\mathcal{X}_{c-1}$ ,  $c = 1, \dots, C$ ;

- диагональные блоки  $D_i$  описывают переходы внутри множества  $\mathcal{X}_c$ ,  $c = 0, \dots, C$ .

Аналогично ненулевые элементы блоков, описывающие интенсивность того, что произошло одно из «элементарных» событий, будут определяться соотношениями (6.8)–(6.10) по построению.

Перейдем к доказательству пункта 3. Поскольку соотношение (6.11) справедливо по построению матрицы  $A$ , то осталось

$$\text{доказать, что } \dim \mathcal{X}_c = \frac{2^K}{(K-1)!} \prod_{j=1}^{K-1} (c+j). \quad \text{Пусть}$$

$$\mathcal{N}_c = \left\{ (n_1, n_2, \dots, n_K) : \sum_{k=1}^K n_k = c \right\} \quad \text{и}$$

$\mathcal{L}_c = \left\{ (l_1, l_2, \dots, l_K) : l_k \in \{0, 1\}, k = 1, \dots, K \right\}$ . Поскольку  $\mathcal{X}_c = \mathcal{N}_c \times \mathcal{L}_c$ , то справедлива формула  $\dim \mathcal{X}_c = \dim \mathcal{N}_c \cdot \dim \mathcal{L}_c$ . Количество векторов длины  $K$  с элементами из множества  $\{0, 1\}$  равно размещению с повторениями из 2 по  $K$ , т.е.  $\dim \mathcal{L}_c = 2^K$ . Рассчитаем мощность множества  $\mathcal{N}_c$ , для этого запишем вектор  $(n_1, n_2, \dots, n_K)$  в виде вектора состоящего из  $c$  единиц, разбитых на группы как показано на рис. 6.5.

$$(1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1 | 1, 1, \dots, 1 | 1, 1, \dots, 1 | \dots | 1, 1, \dots, 1 | 1, \dots, 1 | 1, \dots, 1, 1)$$

Рис. 6.5. Представление вектора  $n_c$

Количество таких векторов равно числу всевозможных размещений  $K-1$  линии между единицами, т.е.

$$C_{K+c-1}^{K-1} = \frac{(c+1) \cdots (K+c-1)}{(K-1)!} = \frac{1}{(K-1)!} \prod_{j=1}^{K-1} (c+j).$$

Причем случаи, когда между линиями не будет ни одной единицы, соответствуют нулевым значениям компоненты вектора. Таким образом,

$$\dim \mathcal{X}_c = \dim \mathcal{N}_c \cdot \dim \mathcal{L}_c = \frac{2^K}{(K-1)!} \prod_{j=1}^{K-1} (c+j).$$

■

Лемма 6.1 определяет все компоненты для метода LU-разложения, необходимые для решения системы уравнений равновесия, в результате которого можно получить представление матрицы в виде произведения  $A = L \cdot U$ , где  $U$  - верхняя треугольная матрица, а  $L$  - нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали - единицы. Полученные в ходе разложения матрицы  $L$  и  $U$  будут также блочными, и размеры их блоков будут совпадать с размерами соответствующих блоков матрицы  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} D_0 U_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ L_1 D_1 & U_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & \dots & L_C D_C & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -Y_1 I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \dots & -Y_C I & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 V_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_1 V_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & W_C \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Представим вектор стационарных вероятностей в виде  $\mathbf{p}^T = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_C)$ , причем число элементов подвектора  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = \overline{0, C}$ , равно числу строк (столбцов) блока  $D_i$ ,  $i = \overline{0, C}$ . Согласно [10] для неразложимой матрицы  $A$  справедливо утверждение: существует единственное LU-разложение  $A = (I - Y) \cdot W$ , где  $Y$  - нижняя треугольная блочная матрица с блоками  $Y_{ij}$ , имеющая нулевые диагональные блоки,  $W$  - верхняя треугольная блочная матрица с блоками  $W_{ij}$ , матрица  $W_{CC}$  - нижний блок матрицы  $W$  - является неразложимой консервативной матрицей, а вектор  $\mathbf{p}^T = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_C)$  является решением СУР (6.5) тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{p}_C^T \cdot W_{CC} = \mathbf{0}^T, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{p}_k^T = \sum_{i=k+1}^C \mathbf{p}_i^T Y_{ik}, \quad k = C-1, \dots, 0. \quad (6.14)$$

Из формул (6.13) и (6.14) следует, что вектор  $\mathbf{p}^T = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_C)$  является решением СУР (6.5), если с учетом

обозначений  $Y_{ii} \equiv Y_i, W_{ii} \equiv W_i$  справедливы соотношения:  $p_C^T \cdot W_C = \mathbf{0}^T$  и  $p_i^T = p_{i+1}^T \cdot Y_{i+1}, i = \overline{0, C-1}$ , которые позволяют свести решение исходной системы к решению системы меньшего порядка.

Для успешной работы алгоритма LU-разложения элементы главной диагонали матрицы  $A$  не должны обращаться в нуль в процессе вычислений. Сложности могут возникать и в случае, когда эти элементы не равны нулю, но близки к нему. В прикладных задачах вместо LU-разложения чаще используют LUP-разложение  $P \cdot A = L \cdot U$ , где  $P$  – матрица перестановок, в каждом столбце которой и в каждой строке по одному элементу, равному единице, а остальные элементы равны нулю, определитель матрицы  $P$  по модулю равен единице,  $P^T = P^{-1}$ , произведение двух матриц перестановки также является матрицей перестановки.

Для получения LUP-разложения используют модифицированный метод Гаусса исключения неизвестных, причем на каждой итерации происходит операция перестановки местами двух строк соответствующей матрицы, необходимая для получения ненулевых ведущих элементов.

Рассмотрим пример построения матрицы  $A$  для случая  $K = 2$ ,  $C = 3$ ,  $r = (2, 3)$ . Выпишем пространство состояний  $\mathcal{X}$  согласно формуле (6.1) и первые несколько блоков матрицы  $A$

$$\mathcal{X} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1)\} \times \{0,1\}^2,$$

$$A = \begin{pmatrix} D_0 & U_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_1 & D_1 & U_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_2 & D_2 & U_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L_3 & D_3 \end{pmatrix},$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -(\alpha_1 + \alpha_2) & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \beta_2 & -(\beta_2 + \alpha_1 + \lambda_2) & 0 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 0 & -(\beta_1 + \alpha_2 + \lambda_1) & \alpha_2 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & -(\beta_1 + \beta_2 + \lambda_2 + \lambda_1) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на каждом шаге происходит увеличение размера блока: если блок  $\mathbf{D}_0$  имеет размер  $4 \times 4$ , то блок  $\mathbf{D}_3$  - уже  $12 \times 12$ .

Построим вспомогательные множества и множества блокировок

$$\Pi_1^b = \{(2,0,1,0), (2,0,1,1), (2,1,1,0), (2,1,1,1)\},$$

$$\Pi_2^b = \{(0,3,0,1), (0,3,1,1)\},$$

$$\Pi_1^C = \{(0,3,1,0), (0,3,1,1), (1,2,1,0), (1,2,1,1)\},$$

$$\Pi_2^C = \{(2,1,0,1), (2,1,1,1)\},$$

$$\mathcal{B}_1 = \{(2,0,1,0), (2,0,1,1), (2,1,1,0), (2,1,1,1), (0,3,1,0), (0,3,1,1), (1,2,1,0), (1,2,1,1)\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0,3,0,1), (0,3,1,1), (2,1,0,1), (2,1,1,1)\}.$$

Выполним расчеты в предположении, что GPRS-пакеты передаются по схеме CS2 со средней скоростью  $v=13.4$  кбит/с.

Выберем среднюю длину пакета  $l=480$  байт, среднюю продолжительность периода «On» 2 секунды, среднюю продолжительность периода «Off» 20 секунд. Среднее время

передачи по каналу можно рассчитать как  $\mu^{-1} = \frac{l}{v}$  с.

На рис. 6.6 и рис. 6.7 приведены графики зависимости вероятностей блокировок  $k$ -заявок от нагрузки  $\rho_k = \lambda_k / \mu$ ,

$0 \leq \rho_k < 1$ , для случаев  $K = 2, C = 3, \mathbf{r} = (2, 3)$  и  $K = 2, C = 4, \mathbf{r} = (3, 4)$ . Заметим, что при увеличении числа приборов на единицу вероятность блокировки уменьшилась в два раза.

Как видно из графиков, кривая вероятностей блокировки 2-заявок лежит выше соответствующей кривой для 1-заявок. Это объясняется тем, что для обоих примеров значения компонент вектора  $\mathbf{r}$  выбраны так, чтобы обеспечить приоритетное обслуживание заявок второго типа.

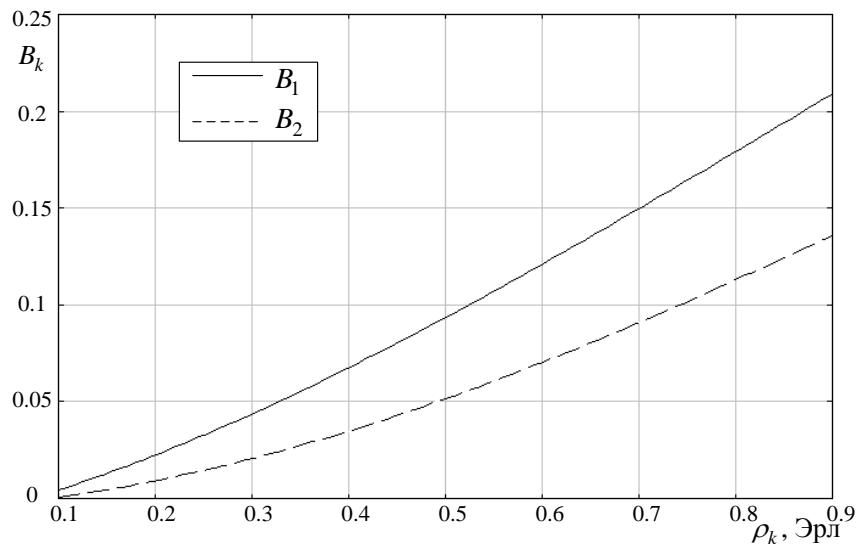


Рис. 6.6. Зависимость вероятностей  $k$ -заявок  $B_k, k = 1, 2$ , от нагрузки  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  ( $K = 2, C = 3, \mathbf{r} = (2, 3)$ )

Таким образом, пользователь второй GPRS-сессии получает услугу передачи данных по технологии GPRS с более высоким уровнем качества по сравнению с пользователем первой GPRS-сессии.

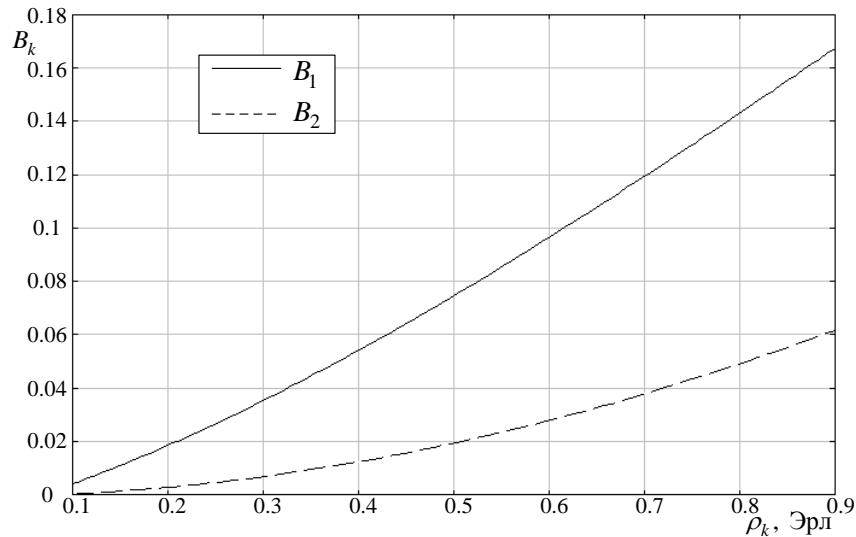


Рис. 6.7. Зависимость вероятностей блокировки  $k$ -заявок  $B_k, k = 1, 2$ , от нагрузки  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  ( $C = 4, K = 2, r = (3, 4)$ )

Для пользователя второй GPRS-сессии это может означать, например, более высокое качество изображения в случае загрузки видеинформации или более высокую скорость получения данных из сети Интернет, что приведет к меньшему времени ожидания до полной загрузки запрошенных данных.

### 6.2. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока. Простейшая однопотоковая модель

$$M | M | 1 | \langle L, H \rangle | B$$

В современных пакетных сетях передачи данных доминирующим транспортным протоколом остается TCP (Transmission Control Protocol), основные принципы которого описаны в RFC 793 (Request For Comments) - документе Рабочей группы по инженерным проблемам сети Интернет (Internet Engineering Task Force, IETF). Протокол TCP обеспечивает установление надёжного соединения и передачу данных между

двумя узлами сети, контролируя размер пакета передаваемых данных и осуществляя повторную пересылку в случае сбоя. В этом протоколе в 1980 году Ван Якобсоном (V. Jacobson) впервые был реализован механизм управления перегрузками (congestion control), позволивший контролировать и регулировать интенсивность передаваемого потока. Этот механизм состоит из четырёх фаз, влияющих на изменение размера TCP-окна: медленного старта, предотвращения перегрузки, быстрой передачи и быстрого восстановления, описанные в RFC 1122 и RFC 2581 IETF. В разных версиях TCP могут быть реализованы не все указанные фазы. Для регулирования интенсивности потока также широко применяется механизм Explicit Congestion Notification (ECN) — явное уведомление о перегруженности канала связи. Механизм ECN используется при возникновении перегрузки для маркировки вызвавших её пакетов и посылки сообщения отправителю о необходимости снижения интенсивности предложенной нагрузки. При этом уничтожения пакетов не происходит, следовательно, не требуется повторная пересылка данных. Использование ECN эффективно только в сочетании с политикой активного управления очередью (Active Queue Management, AQM), например, в совокупности с такими алгоритмами как RED [16]. Механизмы AQM ограничивают размер очереди маршрутизатора, задают определённую политику обслуживания разным типам потоков и применяются, например, в технологии дифференцированного обслуживания (Differentiated Service, DiffServ).

Алгоритм RED позволяет регулировать интенсивность потока с помощью выборочного сброса пакетов до того, как очередь будет заполнена полностью. Если очередь маршрутизатора почти пустая, то все приходящие пакеты принимаются. По мере заполнения очереди начинает работать функция сброса пакетов. Это заставляет протоколы, подобные TCP, снижать скорость передачи и предотвращает повторную синхронизацию параметров соединения. Обзор методов регулирования состояния потока и анализа процессов передачи трафика, а также классификацию этих методов можно найти в [9].

### 6.2.1. Модель модуля RED

Алгоритмы регулирования состояния потока обычно реализованы в виде модулей в сетевом оборудовании (например, маршрутизаторе). Функционирование модуля, реализующего алгоритм типа RED, можно схематично представить следующим образом (рис. 6.8).

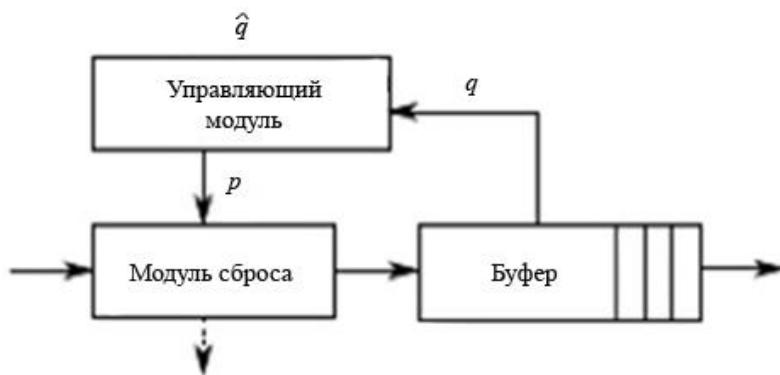


Рис. 6.8. Модуль RED

Пакет передаваемых данных при поступлении в систему попадает в модуль сброса. Решение о сбросе пакета принимается на основе значения функции  $p(\hat{q})$ , получаемого от управляющего модуля. Функция  $p(\hat{q})$  зависит от значения экспоненциально взвешенного скользящего среднего размера длины очереди  $\hat{q}$ , также вычисляемого управляющим модулем, основываясь на текущем значении длины очереди  $q$ .

Классический алгоритм RED подробно рассмотрен в работе [16]. Здесь приведены лишь формулы для расчёта функции сброса  $p(\hat{q})$  и экспоненциально взвешенной скользящей средней длины очереди  $\hat{q}$ .

Для вычисления  $\hat{q}$  используется рекуррентная формула экспоненциально взвешенного скользящего среднего (Exponentially Weighted Moving-Average, EWMA):

$$\hat{q}_{k+1} = (1 - \omega_q)\hat{q}_k + \omega_q q_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.15)$$

где  $\omega_q$ ,  $0 < \omega_q < 1$ , — весовой коэффициент экспоненциально взвешенного скользящего среднего, который определяется по формуле:

$$\omega_q = 1 - e^{-1/C},$$

где  $C$  — пропускная способность канала (пакетов в секунду).

Функции  $p(\hat{q})$  сброса пакетов линейно зависят от  $\hat{q}$ , минимального  $q_{min}$  и максимального  $q_{max}$  пороговых значений и параметра максимального сброса  $p_{max}$ , задающего максимальный уровень сброса пакетов при достижении  $\hat{q}$  значения  $q_{max}$ , и вычисляется следующим образом:

$$p(\hat{q}) = \begin{cases} 0, & 0 < \hat{q} \leq q_{min}, \\ \frac{\hat{q} - q_{min}}{q_{max} - q_{min}} p_{max}, & q_{min} < \hat{q} \leq q_{max}, \\ 1, & \hat{q} > q_{max}. \end{cases}$$

Под сбросом в данном случае понимается как собственно отбрасывание пакета в соответствии с функцией  $p_d(\hat{q})$ , так и маркировка пакета в соответствии с функцией  $p_m(\hat{q})$  для последующей отсылки сообщения ECN (Explicit Congestion Notification). Таким образом, функция сброса представима в виде  $p(\hat{q}) = p_d(\hat{q}) + p_m(\hat{q})$ .

Применение функции сброса к поступившему в систему пакету может носить случайный характер. В этом случае вероятность  $p_a$  того, что за время  $X$  между моментами сброса пакетов будет сброшено  $n$  пакетов, может иметь геометрическое распределение с параметром  $p(\hat{q})$ :

$$p_a = P\{X = n\} = (1 - p(\hat{q}))^{n-1} p(\hat{q})$$

или равномерное распределение:

$$p_a = \begin{cases} \frac{p(\hat{q})}{1 - (n-1)p(\hat{q})} \prod_{i=0}^{n-2} \left(1 - \frac{p(\hat{q})}{1 - ip(\hat{q})}\right) = p(\hat{q}), & 1 \leq n \leq \frac{1}{p(\hat{q})}, \\ 0, & n > \frac{1}{p(\hat{q})}. \end{cases}$$

Для второго случая вероятность быть сброшенным для каждого приходящего пакета равна  $p(\hat{q}) / (1 - count \cdot p(\hat{q}))$ , где  $count$  —

количество несброшенных пакетов, прибывших после последнего сброшенного.

Далее рассмотрим, каким изменениям можно подвергнуть классический алгоритм RED. Поведение модуля RED (рис. 6.8) можно описать системой

$$\begin{cases} \hat{q} = \hat{Q}(p), \\ p(\hat{q}) = P(\hat{q}), \end{cases} \quad (6.16)$$

образованной функцией экспоненциально взвешенной скользящей средней длины очереди  $\hat{q} = \hat{Q}(p)$  и функцией сброса  $p(\hat{q}) = P(\hat{q})$ .

Решение  $(\hat{q}_s, p_s)$  системы уравнений (6.16) задаёт её равновесное состояние (рис. 6.9). Пороговые значения  $q_{min}$  и  $q_{max}$  задают рабочую область системы (6.16). Алгоритм эффективно действует только в её границах. При этом выход за верхнюю границу менее желателен, чем за нижнюю.

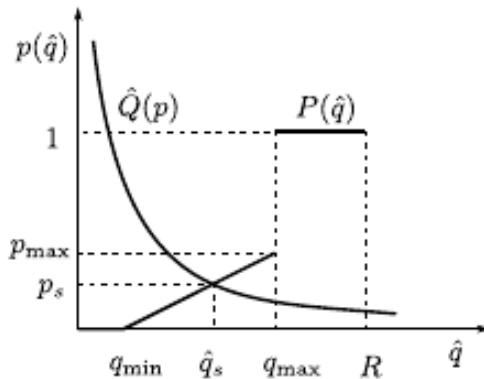


Рис. 6.9. Точка равновесия для системы

Для эффективной работы алгоритма типа RED его функция сброса  $p(\hat{q}) = P(\hat{q})$  должна удовлетворять следующим условиям:

- в районе нижней границы рабочего диапазона её наклон (т.е. первая производная) должен быть как можно меньше (для повышения эффективности использования полосы пропускания);
- в районе верхней границы рабочего диапазона её наклон должен быть максимальным (для предотвращения выхода системы из рабочего диапазона).

Из этого можно сделать вывод, что функция сброса должна быть нелинейной. Но основным требованием при разработке алгоритма RED стало обеспечение малых накладных расходов при обработке трафика, что проявилось в простоте всех операций в этом алгоритме. Он построен так, чтобы минимизировать сложные расчёты (умножение, вычисления с плавающей точкой). Поэтому при модификации базового алгоритма вместо нелинейной функции сброса можно использовать её аппроксимацию кусочно-линейной функцией.

Функция экспоненциально взвешенной скользящей средней длины очереди  $\hat{q} = \hat{Q}(p)$  зависит от многих параметров (характеристик потока, дисциплины обслуживания и т.д.) и требует построения математической модели для своего описания. Можно модифицировать формулу (6.15), считая, что вся зависимость от внешних параметров учитывается мгновенной длиной очереди  $q$ . При этом  $\hat{q}$  должна строиться так, чтобы противодействовать выходу системы из рабочей области.

### **6.2.2. Математическое описание динамических переменных модели**

Подход к построению модели базируется на исследованиях работ [22]. В модели TCP-поток задаётся скачкообразным марковским процессом посредством аппарата стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для пуассоновского процесса. В уравнении для TCP-окна при анализе учитывается возникновение потерь пакетов по так называемому «тайм-ауту» (максимальное время, в течение которого ожидается подтверждение доставки пакета), а в уравнении для мгновенной длины очереди учитывается возникновение сброса пакетов в следствие функционирования алгоритма (типа RED) регулирования состояния потока.

Полученная система стохастических дифференциальных уравнений сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой было впоследствии качественно исследовано на устойчивость путём построения и анализа фазового и параметрического портретов.

На рис. 6.10 схематично изображена система, моделирующая передачу трафика в узел, работающий по одному из алгоритмов семейства RED.

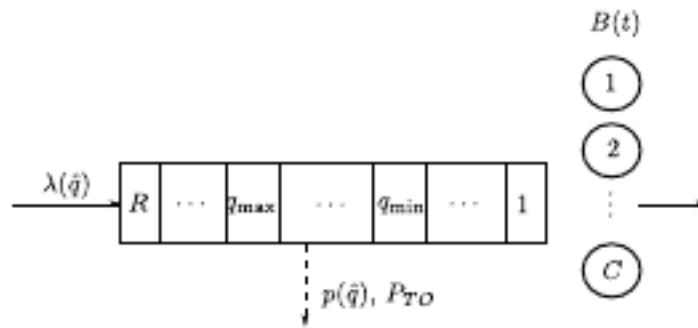


Рис. 6.10. Модель алгоритма RED

Узел состоит из управляющего по некоторому алгоритму семейства RED модуля и очереди конечной ёмкости  $R < \infty$ . Скорость передачи пакетов в канале связи —  $C$  пакетов в единицу времени.

В случае TCP-Reno трафика на систему поступает групповой пуассоновский поток заявок (заявка соответствует TCP-пакету) II рода с динамической интенсивностью, зависящей от состояния системы. Число заявок в группе соответствует размеру TCP-окна  $w(t)$  в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ . Размер окна  $w(t)$  (интенсивность входящего потока) зависит от двух функций сброса пакетов в системе:  $P_{TO}(t)$  — учитывает потери, возникающие по тайм-ауту, и  $p(t)$  — учитывает потери, возникающие при функционировании алгоритма семейства RED в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ . Функция сброса  $p(t)$  зависит от значения экспоненциально взвешенной скользящей средней длины очереди  $\hat{q}(t)$  в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ , для которого определены пороговые значения  $q_{min}$  и  $q_{max}$ .

Если в момент времени  $t$  поступления заявки прибор свободен, то заявка поступает на обслуживание и занимает прибор на всё время обслуживания, которое является случайной величиной с

функцией распределения  $B(t) = I(t-1)$ ,  $t \geq 0$  (одна заявка в единицу времени), где  $I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  — индикаторная функция.

Если в момент времени  $t$  поступления заявки прибор занят и величина  $\hat{q}(t)$  удовлетворяет соотношению  $0 < \hat{q}(t) \leq q_{min}$ , то заявка занимает одно место в очереди и ожидает доступа к прибору (порядок выбора заявок из очереди на обслуживание First Call First Served (FCFS)).

Если в момент времени  $t$  поступления заявки прибор занят и величина  $\hat{q}(t)$  удовлетворяет соотношению  $q_{min} < \hat{q}(t) \leq q_{max}$ , то происходит потеря заявки согласно функции сброса  $p(\hat{q}(t))$ ,  $0 < p(\hat{q}(t)) \leq p_{max}$ . Вид функции  $p(\hat{q}(t))$  и параметра максимального сброса  $p_{max}$  определяется согласно используемому алгоритму семейства RED.

Если в момент времени  $t$  поступления заявки прибор занят и  $\hat{q}(t) > q_{max}$ , то заявка теряется.

Интенсивность поступления заявок в систему соответствует размеру TCP Reno-окна в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ , и моделируется случайным марковским процессом  $\{w(t)\} \equiv \{w(t), t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\mathcal{W} = \{1, \dots, w_{max}\}$  для некоторого  $w_{max} < \infty$ . Число заявок в очереди в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$  моделируется случайным процессом  $\{q(t)\} = \{q(t), t \geq 0\}$ . Для определённости будем считать, что  $w(0) = 1$ ,  $q(0) = 0$ . Таким образом, можно определить двумерный марковский процесс  $\{w(t), q(t)\} \equiv \{w(t), q(t), t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\mathcal{L} = \mathcal{W} \times [0, R]$ .

Стохастическое дифференциальное уравнение представляет собой уравнение вида:

$$d\psi(t) = f(\psi, t)dt + \sum_{i=1}^m g_i(\psi, t)dN_i(t),$$

где  $\psi(t)$  — исходная функция,  $f(\psi, t)$  — изменение функции  $\psi(t)$ , не зависящее от случайного воздействия,  $g_i(\psi, t)$  — изменение функции  $\psi(t)$  под действием случайного процесса  $N_i(t)$ .

Для рассматриваемой системы необходимо получить математическое описание динамических переменных  $w(t)$ ,  $q(t)$  и  $\hat{q}(t)$ .

Окно TCP-Reno формируется с учётом фазы медленного старта, фазы избежания перегрузок и алгоритма избежания перегрузок, определяющего потери по тайм-ауту (Timed Out, TO) и потери по получению задублированных ACK-пакетов (Triple Duplicate, TD). На фазе избежания перегрузок размер окна увеличивается на  $1/w$  при получении каждого подтверждения, в случае TD-потери размер окна сокращается вдвое, а при TO-потере становится равным 1. Таким образом, в терминах СДУ имеем:

$$dw(t) = \frac{dt}{T(t)} + \left(-\frac{w(t)}{2}\right) dN_{TD}(t) + (1 - w(t)) dN_{TO}(t), \quad (6.17)$$

где  $N_{TD}(t)$  - случайный пуссоновский процесс с интенсивностью  $\lambda_{TD}(t)$  потерь по получению задублированных ACK-пакетов,  $N_{TO}(t)$  - случайный пуссоновский процесс с интенсивностью  $\lambda_{TO}(t)$  потерь по тайм-ауту. Время  $T(t)$  вычисляется по следующей формуле

$$T(t) = \begin{cases} T_b + \frac{q(t)}{C(t)}, & q(t) > 0, \\ T_b, & q(t) = 0, \end{cases} \quad C(t) = \begin{cases} C, & q(t) > C, \\ q(t), & q(t) \leq C, \end{cases}$$

где  $T_b$  – время на передачу и подтверждение приёма (Round Trip Time, RTT) одного пакета,  $q(t)$  — значение мгновенной длины очереди в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ ,  $C(t)$  – интенсивность обслуженной нагрузки.

Для решения СДУ осуществляется переход к ОДУ путём усреднения всех членов, входящих в СДУ. Для некоторой функции  $x(t)$  под усреднением понимается  $E[x(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t x(t') dt'$ .

С учётом того, что  $E[dN_{TD}(t)] + E[dN_{TO}(t)] = \lambda_{TD}(t)dt + \lambda_{TO}(t)dt$ ,

и ограничения на размер TCP-окна преобразуем уравнение (6.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{dw(t)}{dt}\right] &= \frac{I(w_{max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + \\ &+ I(w(t) - 1) \left[ \left( \frac{-E[w(t)]}{2} \right) \lambda_{TD}(t) + (1 - E[w(t)]) \lambda_{TO}(t) \right] \end{aligned}$$

Интенсивность сброса пакетов  $\lambda(t) = \lambda_{TD}(t) + \lambda_{TO}(t)$  представима в виде:

$$\lambda(t) = \frac{E[w(t)]}{E[T(t)]} E[p(\hat{q}(t))], \quad (6.18)$$

где  $p(\hat{q}(t))$  - функция сброса пакетов из окна  $w(t)$  в момент времени  $t \geq 0$  (определенная, например, по алгоритму RED), состоящая из функции  $p_m(\hat{q}(t))$  маркировки пакета на сброс при помощи механизма ECN и собственно функции  $p_d(\hat{q}(t))$  сброса пакета.

Поскольку в уравнении (6.18) необходимо учесть время  $\tau \geq 0$  оповещения источника о потере пакета, то

$$\lambda(t) = \frac{E[w(t-\tau)]}{E[T(t-\tau)]} [E[p_m(\hat{q}(t-\tau))] + E[p_d(\hat{q}(t-\tau))]].$$

Кроме того,

$$\lambda_{TD}(t) + \lambda_{TO}(t) = (1 - E[P_{TO}(w(t-\tau))] + E[P_{TO}(w(t-\tau))])\lambda(t),$$

где  $P_{TO}(w(t-\tau))$  - функция сброса пакетов по тайм-ауту.

Таким образом, изменение  $E[w(t)]$  определяется уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dE[w(t)]}{dt} &= \frac{I(w_{max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + \\ &+ I(w(t) - 1) \left[ \left( \frac{-E[w(t)]}{2} \right) (1 - E[P_{TO}(w(t-\tau))]) \times \right. \\ &\times \frac{E[w(t-\tau)]}{E[T(t-\tau)]} [E[p_m(\hat{q}(t-\tau))] + E[p_d(\hat{q}(t-\tau))]] \\ &+ (1 - E[w(t)]) E[P_{TO}(w(t-\tau))] \\ &\left. \times \frac{E[w(t-\tau)]}{E[T(t-\tau)]} E[p_d(\hat{q}(t-\tau))] \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Для описания поведения функции мгновенной длины очереди  $q(t)$  воспользуемся дифференциальным аналогом интегрального уравнения Линдли:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -C(t) + I(R - q(t)) \frac{Nw(t)}{T(t)} (1 - p_d(\hat{q}(t))) \quad (6.20)$$

определяющего в данном случае разность между числом поступивших за время  $t$ ,  $t \leq 0$ , пакетов и интенсивности

обслуженной нагрузки  $C(t)$ . Здесь  $N$  — число поступающих в очередь потоков.

Напомним, что функция  $p(\hat{q}(t))$  зависит от экспоненциально взвешенной скользящей средней длины очереди  $\hat{q}(t)$ , которая в случае дискретного времени имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{q}_{k+1} &= (1 - \omega_q)\hat{q}_k + \omega_q q_k \equiv \\ &\equiv \hat{q}(t_{k+1}) = (1 - \omega_q)\hat{q}(t_k) + \omega_q q(t_k), \quad t_k = t_0 + k\delta\end{aligned}\quad (6.21)$$

где  $\delta$  — время между поступлениями пакетов в систему, а  $\omega_q$  — параметр (весовой коэффициент) экспоненциально взвешенного скользящего среднего (EWMA):

$$\omega_q = 1 - e^{-1/C},$$

где  $C$  — пропускная способность канала (пакетов в секунду).

Для перехода в (6.21) к непрерывному времени, необходимо найти решение в виде  $\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = A\hat{q}(t) + Bq(t)$ . Константы А и В находятся из соотношения:

$$\hat{q}(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\hat{q}(t_k) + q(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-t')}\hat{q}(t')Bdt',$$

откуда

$$e^{A\delta} = (1 - \omega_q), \quad \delta = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{C}$$

и, следовательно:

$$A = \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta}, \quad B = -\frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta}\hat{q}(t) - \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta}q(t) \quad (6.22)$$

Поскольку уравнение (6.19) записано для усреднённых переменных  $w(t)$ ,  $q(t)$  и  $\hat{q}(t)$  то и в уравнениях (6.20) и (6.22) необходимо провести процедуру усреднения. Таким образом, получаем систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую моделируемую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE[w(t)]}{dt} = \frac{I(w_{max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + \\ + I(w(t) - 1) \left[ \left( \frac{-E[w(t)]}{2} \right) (1 - E[P_{TO}(w(t - \tau))]) \times \right. \\ \times \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} \left[ E[p_m(\hat{q}(t - \tau))] + E[p_d(\hat{q}(t - \tau))] \right] + \\ + (1 - E[w(t)]) E[P_{TO}(w(t - \tau))] \times \\ \times \left. \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} E[p_d(\hat{q}(t - \tau))] \right] \\ \frac{dE[q(t)]}{dt} = I(R - q(t)) \frac{Nw(t)}{T(t)} (1 - E[p_d(\hat{q}(t))]) - E[C(t)] \\ \frac{dE[\hat{q}(t)]}{dt} = \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta} E[\hat{q}(t)] - \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta} E[q(t)] \end{array} \right. \quad (6.23)$$

### 6.2.3. Определение области возникновения автоколебательного режима модема

Система (6.23) определяет разбиение фазового пространства на траектории. Семейство фазовых траекторий при заданных значениях параметров образует фазовый портрет системы, дающий полное качественное представление о возможном её поведении. Качественная картина фазового портрета определяется положениями равновесия (особыми точками) и особыми траекториями, например, взаимным расположением предельных циклов, положений равновесия. Предельный цикл, отвечающий режиму периодических колебаний, — это замкнутая траектория на фазовой плоскости. Положение равновесия, отвечающее стационарному режиму, — это точка  $\hat{q}_s$  фазовой плоскости, в которой обращаются в ноль правые части системы (6.23).

Особые точки и циклы представляют собой стационарные решения - если начальные условия совпадают с особой точкой или расположены на предельном цикле, то система будет сколь угодно долго там оставаться. На практике так будет лишь в случае устойчивости, когда при начальных условиях из малой окрестности решений система возвращается к исходному стационарному режиму. Фазовый портрет даёт наглядное

представление о возможных устойчивых стационарных решениях, а также областях их притяжения, если таких решений несколько.

Весьма актуальна задача изучения характера изменения фазовых портретов системы в зависимости от параметров или её деформации. В процессе деформации могут возникнуть бифуркационные ситуации, при которых происходит изменение структуры фазового портрета в некоторой окрестности носителя бифуркации (положения равновесия или предельного цикла) в фазовом пространстве, т.е. фазовый портрет качественно меняется. Множество бифуркационных значений параметров, разбивающее пространство параметров на области с различными типами фазовых портретов, представляет собой параметрический портрет системы. Конечной целью качественного исследования является получение параметрического портрета системы, т.е. разбиения пространства параметров на области различного поведения, соответствующие топологически различным фазовым портретам.

Вернёмся к системе (6.23). Поскольку функция сброса  $p(\hat{q})$  является кусочной функцией, то система (6.23) может быть записана как совокупность нескольких систем нелинейных уравнений, каждая для одного из интервалов значений функции  $p(\hat{q})$ . При  $p(\hat{q}(t)) \neq 0$ ,  $p(\hat{q}(t)) \neq 1$  и  $q_{min} < \hat{q}(t) < q_{max}$  имеем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{I(w_{max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + \\ + I(w(t) - 1) \left[ \left( \frac{-E[w(t)]}{2} \right) (1 - E[P_{TO}(w(t - \tau))]) \times \right. \\ \times \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} \left[ E[p_m(\hat{q}(t - \tau))] + E[p_d(\hat{q}(t - \tau))] \right] + \\ + (1 - E[w(t)]) E[P_{TO}(w(t - \tau))] \times \\ \times \left. \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} E[p_d(\hat{q}(t - \tau))] \right] \\ 0 = I(R - q(t)) \frac{Nw(t)}{T(t)} (1 - E[p_d(\hat{q}(t))]) - E[C(t)] \\ 0 = \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta} E[\hat{q}(t)] - \frac{\ln(1 - \omega_q)}{\delta} E[q(t)] \end{array} \right. \quad (6.24)$$

решая которую, получим действительные корни, являющиеся стационарными очками.

Решение системы (6.23) может быть как устойчивым, так и представлять собой автоколебательный процесс. Для рассматриваемой системы возникновение автоколебаний обусловлено характером разрывов функции сброса  $p(\hat{q}(t))$ . Так, для алгоритмов с кусочно-линейной функцией  $p(\hat{q}(t))$  (например, RED) в точке  $q_{max}$  функция сброса имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{\hat{q}(t) \rightarrow q_{max}^-} p(\hat{q}(t)) \neq \lim_{\hat{q}(t) \rightarrow q_{max}^+} p(\hat{q}(t))$$

т.е. имеет место разрыв 1-го рода. Автоколебания возникают, когда значение стационарной точки  $\hat{q}_s$ , вычисленное в рабочей области (область медленных движений), попадает на интервал безусловного сброса ( $p(\hat{q}(t)) = 1$ , область быстрых движений).

Параметрический портрет системы будет представлять собой график поведения стационарной точки  $\hat{q}_s$  в предположении, что участок безусловного сброса отсутствует. Заметим, что если оставить свободными  $n$  параметров, то в результате получим поверхность размерности  $n$ . Границная поверхность размерности  $n-1$  разделит области устойчивого / неустойчивого поведения системы.

Таким образом, предлагается следующий метод определения области возникновения автоколебательного режима модели:

- зафиксировать  $n$  параметров процесса регулирования состояния потока;
- вычислить значения стационарной точки  $\hat{q}_s$  для свободных параметров;
- построить параметрический портрет системы (поверхность размерности  $n$ ) в предположении, что участок безусловного сброса ( $p(\hat{q}(t)) = 1$ ) отсутствует;
- построить граничную поверхность размерности  $n-1$  (переход к области ( $p(\hat{q}(t)) = 1$ ), разделяющую области с различным поведением системы).

Тогда области возникновения автоколебаний будет соответствовать область, лежащая выше граничной поверхности.

Систему (6.23) можно решить численно с помощью метода Рунге–Кутта 4-го порядка с начальными параметрами  $w_{max} = 32$  пак.,  $R=100$  пак.,  $T_b = 0,01$  сек.,  $\omega_q = 0,0007$  сек.,

$C=1400$  пак./сек.,  $\delta = 1/C$  сек. при упрощающих предположениях  $N = 1$ ,  $p_m(\hat{q}(t)) = 0$ ,  $P_{TO} = \min\{1, 3/w(t)\}$ . Для численного решения получившейся системы нелинейных уравнений (6.24) можно использовать метод Ньютона.

Параметрический портрет (рис. 6.11) показывает наличие изменения структуры фазового портрета (рис. 6.12), на котором видно, что узел переходит в предельный цикл, что подтверждается наличием для системы как стабильного поведения  $E[q(t)]$ , так и релаксационных автоколебаний.

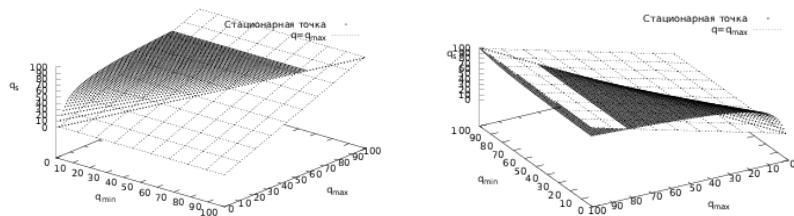


Рис. 6.11. Параметрический портрет для системы с RED

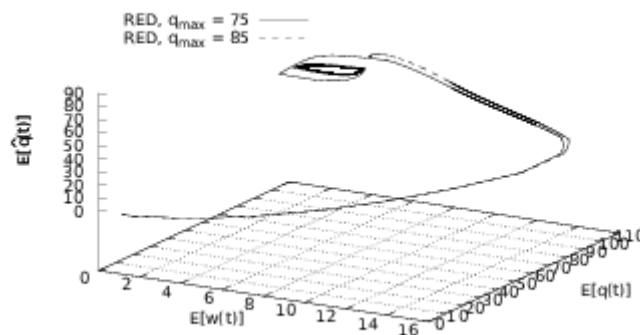


Рис. 6.12. Фазовый портрет для системы с RED,  $q_{min} = 20$

## **7. МОДЕЛИ ОДНОРАНГОВЫХ СЕТЕЙ СВЯЗИ (P2P – СЕТЕЙ)**

### ***7.1. Принципы построения файлообменных и потоковых сетей***

Peer-to-Peer (P2P) (от англ. peer-to-peer, P2P – «равный к равному») технологии в последнее время стали перспективным подходом к построению распределенных и масштабируемых сетевых приложений. Основная идея дизайна P2P заключается в мотивировании пользователей выступать в роли клиента и сервера одновременно, и в этом случае пользователей называют пирами (англ. peer – равный). Здесь и в дальнейшем ввиду отсутствия русскоязычных терминов мы будем использовать обозначения, полученные транслитерацией на русский язык англоязычных терминов. В P2P-сетях пользователи не только загружают данные от других пользователей, но и раздают загруженные данные другим пользователям, требующим эти данные. Таким образом, пропускная способность конечных пользователей эффективно используется для того, чтобы уменьшить нагрузку на серверы.

P2P-сети можно разделить на файлообменные и потоковые сети (рис. 7.1). При передаче в P2P-сети файл делится на несколько частей - порций данных. Каждый пользователь загружает недостающие части файла от других пользователей, которые уже загрузили эти части. В файлообменных P2P-сетях (рис. 7.1а) пользователям необходимо загрузить файл целиком до начала его использования, и, следовательно, отсутствует ограничение на время загрузки частей файла. В потоковых P2P-сетях пользователи одновременно загружают и воспроизводят видеопоток. Временные ограничения имеют решающее значение для потоковых услуг, так как порция данных, прибывающая после окончания срока ее воспроизведения, не будет участвовать в воспроизведении.

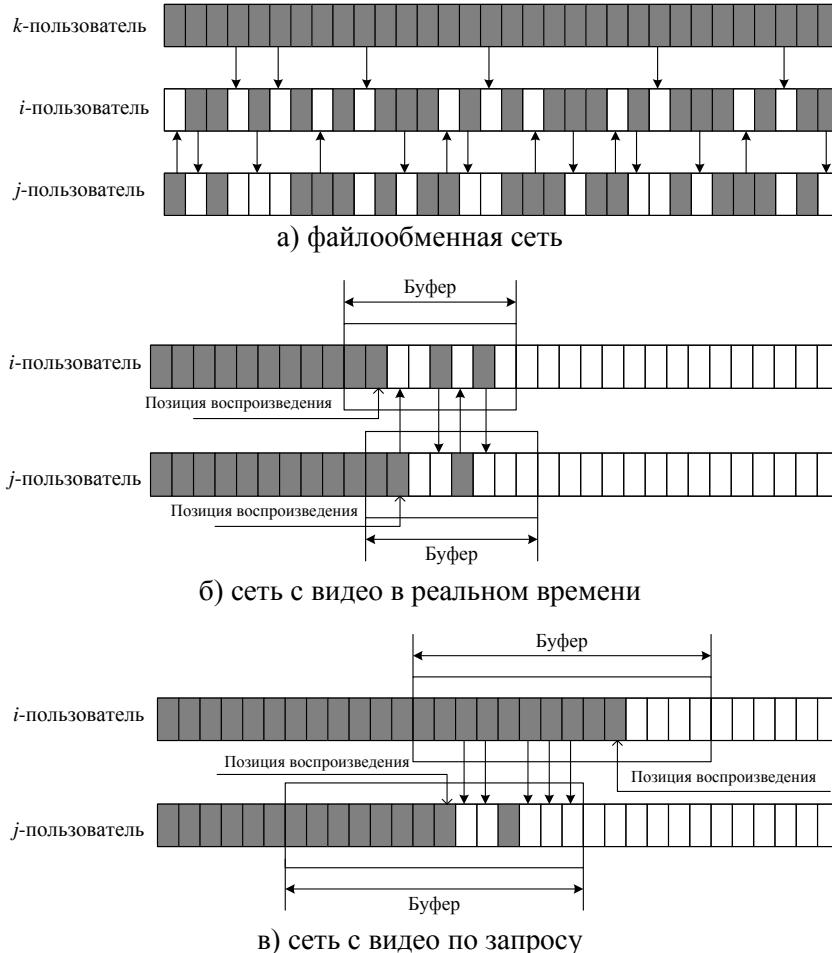


Рис. 7.1. Процесс обмена порциями данных в P2P-сетях

Обмен порциями данных в P2P-сетях различного типа показан на рис. 7.1. В файлообменных сетях файл не воспроизводится до тех пор, пока все его части не загружены. Таким образом, загружающий недостающие порции данных пользователь может загрузить любые требуемые ему порции от другого пользователя, как показано на рис. 7.1а. Порядок загрузки в файлообменной сети

не важен, а уже загруженные данные хранятся на диске для обслуживания других пользователей.

В потоковых сетях с видео в реальном времени каждый пользователь имеет буфер для кэширования недавно загруженных порций данных, причём загрузка может осуществляться в позиции, расположенные как до, так и после текущей позиции воспроизведения. В таких сетях, как показано на рис. 7.1б, пользователи воспроизводят видеопоток из очень близких друг к другу позиций, что позволяет им обмениваться имеющимися в буферах порциями данных. Небольшие несовпадения моментов воспроизведения видео объясняются различием задержек доставки данных.

В потоковых сетях с видео по требованию разные пользователи воспроизводят видеопоток с разных позиций. Как показано на рис. 7.1в., пользователь с «ранней» позицией воспроизведения (*i*-пользователь) может пересыпать те части видео, которые уже просмотрены, в буфераы пользователей с более поздней позицией воспроизведения (*j*-пользователь)

На рис. 7.2 представлены показатели эффективности функционирования файлообменных и потоковых P2P-сетей.

Основным показателем эффективности функционирования файлообменных сетей является время загрузки файла (англ. Latency), т.е. время, за которое пользователь сможет загрузить все без исключения части файла.

В потоковых сетях основными показателями эффективности функционирования являются: задержка начала воспроизведения (англ. Startup Delay), вероятность просмотра видео без перерывов воспроизведения (англ. Playback Continuity) и вероятность состояния всеобщей передачи (англ. Universal Streaming).

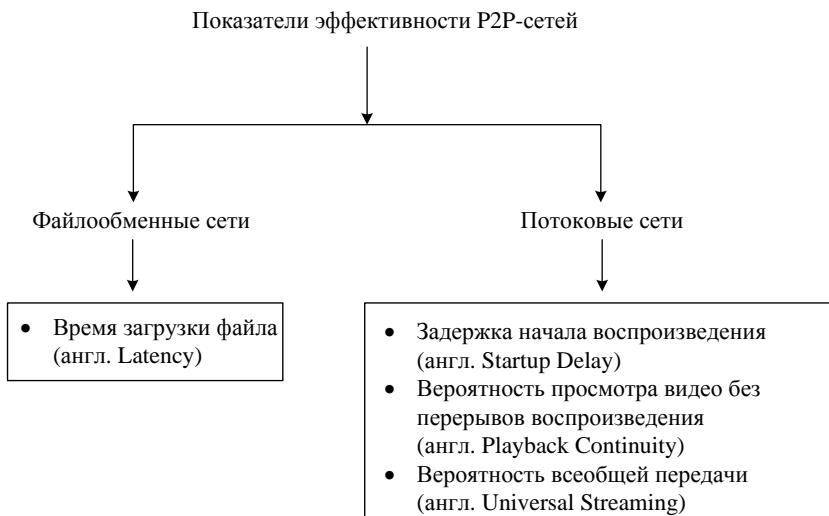


Рис. 7.2. Показатели эффективности файлообменных и потоковых P2P-сетей

Для анализа показателей эффективности функционирования P2P-сетей строятся математические модели. При анализе файлообменных сетей применяются так называемые жидкостные модели (англ. Fluid Models), известные, например, по работе [14, 21]. Ниже в данной главе проведено исследование двух наиболее типичных жидкостных моделей файлообменных сетей. Заметим, что жидкостные модели файлообменных сетей появились раньше, чем модели потоковых сетей [25]. Потоковые сети имеют более жесткие требования к показателям, чем файлообменные сети, а их отличительной особенностью является то, что их построение, как правило, осуществляется в дискретном времени.

## 7.2. Жидкостная модель файлообменной сети

В данном разделе исследуется жидкостная модель, предназначенная для анализа показателя эффективности функционирования файлообменной P2P-сети - времени загрузки

файла пользователем (англ. Latency), т.е. времени, за которое пользователь сможет загрузить все без исключения части файла. Как показано в разделе 7.1, файлообменные сети используется для быстрого обмена файлами через Интернет. В таких сетях файл (например, видеоролик, фильм, компьютерная программа и т.д.) разбивается на небольшие части – так называемые «порции данных» (англ. chunk). В сети имеется трекер-сервер, который хранит информацию например, IP-адреса, обо всех подключенных к сети пользователях, а также информацию об имеющихся у них файлах (Рис. 7.3. Файлообменная сеть с трекер-серверомрис. 7.3).

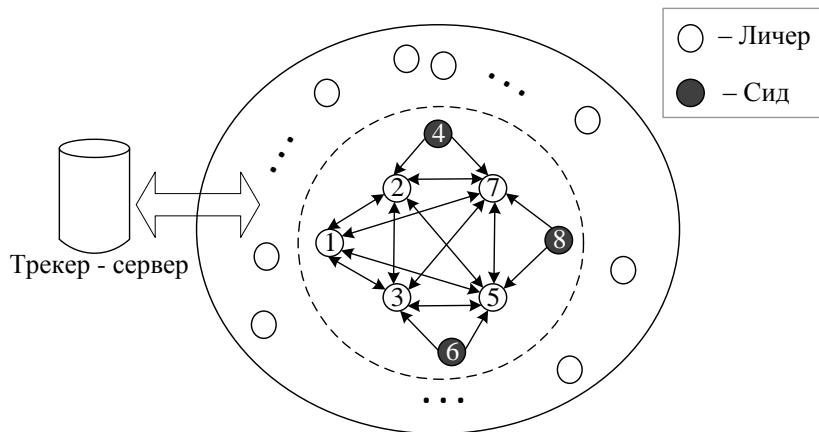


Рис. 7.3. Файлообменная сеть с трекер-сервером

Пользователь, желающий загрузить файл, обращается сначала к трекер-серверу с целью получения адресов пользователей, загружающих или загрузивших данный файл. Пользователи, загружающие один и тот же файл, обмениваются частями файла между собой. В таких сетях имеются два вида пользователей: так называемые «личеры» (англ. Leecher) и «сиды» (англ. Seeder). Пользователь, который пока не имеет всех частей файла и продолжает загружать их от других пользователей, а также раздавать другим пользователям имеющиеся у него части файла, называется личером. Таким образом, личер – это пользователь, который одновременно загружает и раздает данные. Например,  $i$ -пользователь и  $j$ -пользователь на рис. 7.1а являются личерами.

Пользователь, который имеет все части файла, поскольку уже полностью загрузил весь файл и остался в сети, чтобы только раздавать части файла личерам, называется сидом. Таким образом, сид - это пользователь, который имеет весь файл целиком, присутствует в сети и только раздает порции данных другим пользователям. Например,  $k$ -пользователь на рис. 7.1а является сидом.

Пусть  $x(t)$  - число личеров в сети и  $y(t)$  - число сидов в сети в момент  $t \geq 0$ ,  $\lambda$  - интенсивность поступления личеров в сеть. Пусть  $\mu$  - скорость раздачи данных пользователем любого типа – личером или сидом. Будем считать, что все пользователи сети имеют одинаковую скорость раздачи. Обозначим  $C$  скорость загрузки данных пользователем любого типа. Предполагается, что  $C \geq \mu$ .

Личеры могут перервать или отменить процесс загрузки файла по тем или иным причинам. Например, файл долго загружается, и пользователь не может ждать завершения загрузки. Пусть  $\theta$  - интенсивность отмены процесса загрузки личерами. Личер, который успешно загрузил все части файла, т.е. имеет весь файл, может сразу покинуть сеть или остаться в ней в качестве сида. Время пребывания в сети в качестве сида зависит от поведения. Пусть  $\gamma$  - интенсивность ухода сидов из сети. Кроме того, нужно учесть, что не все личеры участвуют в процессе раздачи данных, некоторые только загружают данные, но не раздают их. Введем параметр  $0 \leq \eta \leq 1$  - коэффициент эффективности сети, который соответствует доле личеров, участвующих в процессе раздачи данных.

Предположим, что размер файла равен некоторой условной единице. Нормируем скорость раздачи и загрузки относительно размера файла для того, чтобы параметры сети имели одинаковую размерность, т.е.

$$Q = \langle x(t), y(t), \lambda [сек^{-1}], \mu [сек^{-1}], C [сек^{-1}], \theta [сек^{-1}], \gamma [сек^{-1}], \eta \rangle$$

Если нет никаких ограничений на скорости загрузки, общая суммарная скорость раздачи в системе может быть выражена

формулой  $\mu(\eta x(t) + y(t))$ . Если  $\eta = 0$ , то личеры не раздают данные друг другу, а только загружают их от сидов. Когда скорость загрузки ограничена, то общая скорость раздачи определяется формулой  $\min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\}$ . Вероятность того, что личер станет сидом в течение небольшого интервала времени  $\delta$ , определяется формулой  $\min(Cx, \mu(\eta x + y))\delta$ .

Рассмотрим параметры  $\theta$  и  $\gamma$ . Личер может покинуть систему, не дожидаясь завершения процесса загрузки всего файла, например, если сочтет, что файл загружается слишком долго. Предположим, что личер независимо от других пользователей сам прерывает процесс загрузки через некоторое время, которое распределено экспоненциально с средним  $\theta^{-1}$ . Таким образом,  $\theta$  – это интенсивность, с которой личеры прерывают процесс загрузки и покидают систему. В жидкостной модели интенсивность выхода личера из сети или превращения его в сида определяется формулой  $\min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} + \theta x(t)$ .

Здесь первое слагаемое соответствует переходам, происходящим вследствие того, что загрузка файла была успешно завершена, и личеры стали сидами, а второе слагаемое – переходам, происходящим вследствие того, что остальные личеры навсегда покинули систему. Параметр  $\gamma$  – интенсивность ухода сидов из сети. Предположим, что сид остается в системе на некоторое случайное время, распределенное по экспоненциальному закону со средним  $\gamma^{-1}$ . Очевидно, что значение параметра  $\gamma$  окажет влияние на производительность системы: чем меньше  $\gamma$ , тем меньше время загрузки, так как в системе будет больше сидов. Параметр  $\gamma$  может регулироваться механизмом, который поощряет пользователей оставаться в системе после того, как они загрузили файл полностью. Однако большинство файлообменных систем в настоящее время не имеют подобных механизмов поощрений, поэтому будем считать, что

величина  $\gamma$  является константой. Введенные параметры проиллюстрированы на рис. 7.4.

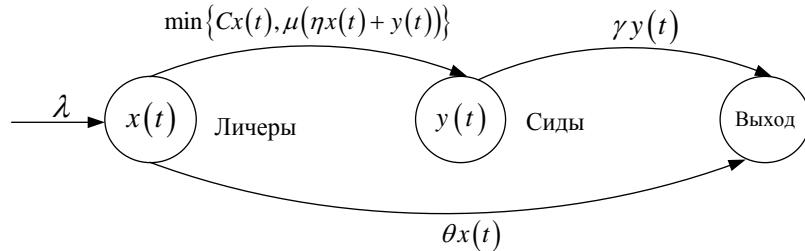


Рис. 7.4. Диаграмма изменения состояния пользователя  
файлообменной P2P-сети

Теперь можно описать изменение состояний процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ , исходя из сделанных выше предположений о модели функционирования файлообменной сети. Нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.1. Жидкостная модель изменения числа пользователей (личеров и сидов) описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \lambda - \left( \min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} + \theta x(t) \right); \\ \frac{dy(t)}{dt} = \min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} - \gamma y(t). \end{cases} \quad (7.1)$$

Предположим, что сеть стационарна, т.е.  $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = 0$ ,

тогда из (7.1) имеем, что

$$\begin{cases} 0 = \lambda - \theta \bar{x} - \min\{C\bar{x}, \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})\}, \\ 0 = \min\{C\bar{x}, \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})\} - \gamma \bar{y}, \end{cases} \quad (7.2)$$

где  $(\bar{x}, \bar{y})$  - точка равновесия.

Пусть  $\eta > 0$ , и рассмотрим случай, когда суммарная скорость загрузки не превосходит суммарной скорости раздачи, т.е.

$$C\bar{x} \leq \mu(\eta \bar{x} + \bar{y}). \quad (7.3)$$

В этом случае система уравнений (7.2) становится системой линейных алгебраических уравнений, решая которую, получаем

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\lambda}{C\left(1 + \frac{\theta}{C}\right)}, \\ \bar{y} = \frac{\lambda}{\gamma\left(1 + \frac{\theta}{C}\right)}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Теперь предположение (7.3) эквивалентно следующему неравенству, т.е. из (7.3) и (7.4) следует, что  $\frac{1}{C} \geq \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right)$ .

Если предположить, что суммарная скорость раздачи не превосходит суммарной скорости загрузки, т.е.

$$C\bar{x} \geq \mu(\eta\bar{x} + \bar{y}), \quad (7.5)$$

тогда получаем, что

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\lambda}{\nu\left(1 + \frac{\theta}{\nu}\right)}, \\ \bar{y} = \frac{\lambda}{\gamma\left(1 + \frac{\theta}{\nu}\right)}, \end{cases} \quad (7.6)$$

где  $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right)$ . Из неравенства (7.5) имеем, что

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right).$$

Введем параметр

$$\frac{1}{\beta} := \max \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \quad (7.7)$$

для объединения двух выше полученных уравнений (7.4) и (7.6).

Следовательно, получаем, что

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\lambda}{\beta \left(1 + \frac{\theta}{\beta}\right)}, \\ \bar{y} = \frac{\lambda}{\gamma \left(1 + \frac{\theta}{\beta}\right)}. \end{cases} \quad (7.8)$$

Заметим, что величина  $\lambda$  [1/c] является средним значением интенсивности поступления личеров в систему, а  $\theta\bar{x}$  [1/c] – средним значением интенсивности ухода нетерпеливых личеров из системы, т.е. таких личеров, которые по каким-либо причинам не дождались окончательной загрузки файла. Тогда разность  $\lambda - \theta\bar{x}$  представляет собой среднее число личеров, которые останутся в системе до полной загрузки файла целиком, после чего станут сидами. Таким образом ясно, что эта величина представляет собой среднюю интенсивность окончания загрузки.

Теперь с помощью закона Литтла найдем среднее время загрузки файла в стационарном режиме:

$$\frac{\lambda - \theta\bar{x}}{\lambda} \bar{x} = (\lambda - \theta\bar{x})T, \quad (7.9)$$

где  $T$  – среднее время загрузки файла,  $\lambda - \theta\bar{x}$  – интенсивность окончания загрузки, и  $\frac{\lambda - \theta\bar{x}}{\lambda}$  – доля личеров, которые станут сидами. Из (7.9) следует, что

$$\frac{\bar{x}}{\lambda} = T, \quad (7.10)$$

и с учетом (7.8) получаем, что  $T = \frac{\lambda}{\lambda\beta \left(1 + \frac{\theta}{\beta}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{\beta}} = \frac{1}{\beta + \theta}$ .

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1.2. Среднее время загрузки файла для файлообменной P2P-сети определяется формулой

$$T = \frac{1}{\theta + \beta}, \quad (7.11)$$

$$\text{где } \frac{1}{\beta} = \max \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right) \right\}.$$

Формула (7.11) очевидным образом получена из формулы (7.8). Из утверждения 7.2 можно сделать следующие выводы.

- Среднее время загрузки  $T$  не зависит от интенсивности  $\lambda$  поступления личеров, поэтому файлообменные сети имеют хорошую масштабируемость.
- При увеличении доли  $\eta$  раздающих личеров время  $T$  загрузки файла уменьшается. Это происходит потому, что личеры тоже участвуют в процессе раздачи данных.
- При увеличении интенсивности  $\gamma$  ухода сидов время  $T$  загрузки файла увеличивается.
- При увеличении скорости  $C$  загрузки время  $T$  загрузки уменьшается. Однако с достижением скоростью  $C$  значения, при котором выполняется неравенство  $\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right)$ , дальнейшее увеличение скорости  $C$  не приводит к уменьшению времени  $T$ , время  $T$  остается постоянным. Это объясняется тем, что скорость  $C$  загрузки перестает быть «узким местом», им становится скорость  $\mu$  раздачи с учетом интенсивности ухода сидов из сети и доли личеров, участвующих в процессе раздачи данных.
- Рассмотрим случай, когда скорость  $C$  загрузки пользователей больше, чем скорость раздачи  $\mu$  ( $C > \mu$ ), примером которого является асимметричная технология DSL. Из формулы (7.7) следует, что если интенсивность  $\gamma$  ухода сидов из системы меньше скорости раздачи  $\mu$ , то скорость  $C$  загрузки определяет производительность сети, т.е.  $\beta = C$ .

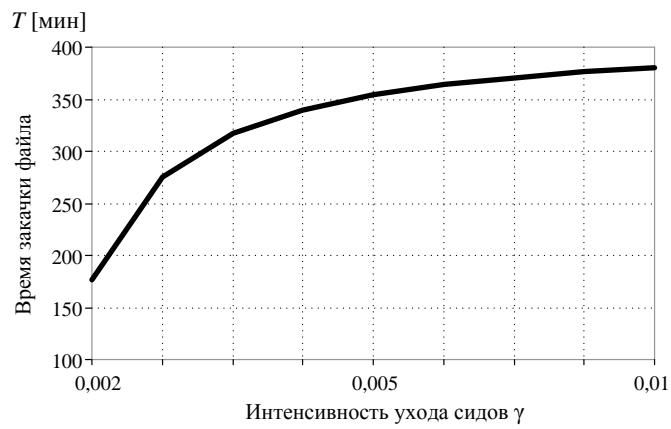
Коротко можно прокомментировать случай  $\eta = 0$ , когда личеры не участвуют в процессе раздачи данных, а только загружают данные от сидов. Если  $\gamma < \mu$ , выше сделанные выводы для случая

$\eta > 0$  остаются в силе, и  $T = \frac{1}{C}$ . В противном случае, если  $\gamma > \mu$ , из формулы (7.1) следует, что

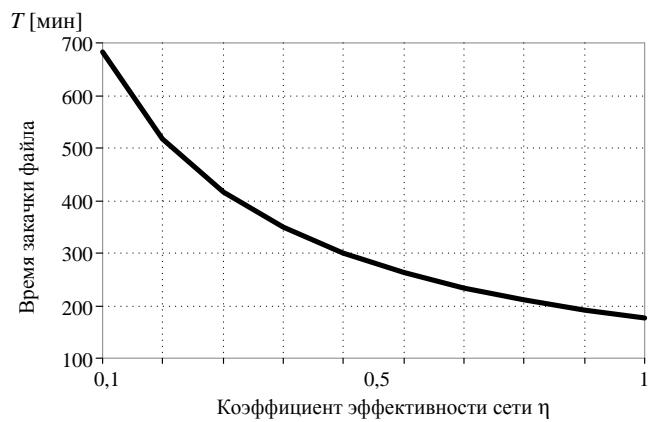
$$\frac{dy(t)}{dt} \leq (\mu - \gamma)y(t).$$

Это означает, что число сидов  $y(t)$  уменьшается, по крайней мере, экспоненциально. Так, если  $\gamma > \mu$ , число сидов будет экспоненциально стремиться к нулю, и система умрет. Отметим, что когда  $\eta > 0$ , система достигнет стационарного состояния независимо от значения интенсивности  $\gamma$  ухода сидов из системы. Поэтому в файлообменных P2P-системах важно, чтобы личеры участвовали в процессе раздачи, т.е. обменивались друг с другом данными. Даже если файлообмен не является эффективным (т.е.  $\eta \rightarrow 0$ ), участие личеров в процессе раздачи играет важную роль в сохранении жизни системы. Из (7.6) можно также заметить, что параметр  $\eta$  влияет на производительность сети.

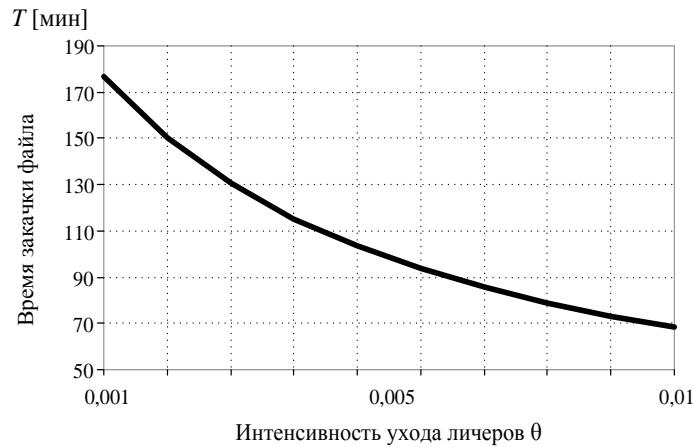
Проведем численный анализ, подтверждающий сделанные выше выводы к утверждению 7.2. Предположим, что загружаемый файл имеет размер 530 Мб, а средняя скорость раздачи данных в сети равна 100 кбит/с. Если взять минуту в качестве единицы времени, тогда получим, что средняя скорость раздачи равна 6000 кбит/мин. Нормируя данную скорость размером файла, получим, что средняя скорость раздачи равна  $\mu = 0,0014$ . Пусть личеры отменяют процесс загрузки с интенсивностью  $\theta = 0,001$ . Поскольку пользователи в файлообменных сетях всегда имеют достаточные ресурсы для получения данных, для простоты будем считать скорость загрузки  $C = 1$ .



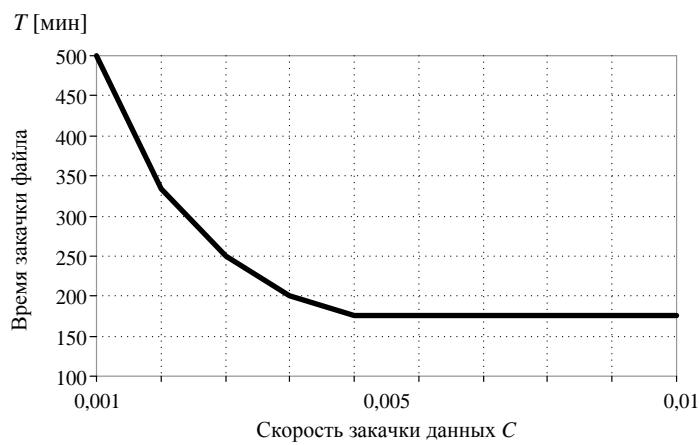
а) в зависимости от интенсивности ухода сидов



б) в зависимости от коэффициента эффективности сети



в) в зависимости от интенсивности ухода личеров при  $\gamma = 0,002$



г) в зависимости от скорости загрузки при  $\gamma = 0,002$  и  $\theta = 0,001$

Рис. 7.5. Время загрузки файла в файлообменных P2P-сетях

Из графика на рис. 7.5а можно видеть, что время загрузки файла увеличивается с ростом интенсивности  $\gamma$  ухода сидов из сети. Поэтому важно для повышения производительности сети, чтобы личеры после успешной загрузки файла и превращения в

сидов оставались в сети для того, чтобы раздавать части файла другим личерам. На рис. 7.5б можно также заметить, что участие личеров в процессе раздачи существенно уменьшает время загрузки файла, поэтому важно, чтобы личеры раздавали друг другу части файла. Если число сидов больше числа личеров в сети, время загрузки падает, рис. 7.5в. Первоначальное увеличение скорости  $C$  загрузки введет к уменьшению времени загрузки  $T$ . Однако после того, как скорость  $C$  становится достаточно большой, дальнейшее увеличение  $C$  не приведет к уменьшению  $T$ , так как скорость  $C$  загрузки перестает быть «узким местом» сети, что видно на графике рис. 7.5г.

При получении формул для точки равновесия  $(\bar{x}, \bar{y})$  мы предполагали, что система (7.1) устойчива и точка равновесия может быть найдена. Проверим это предположение.

Пусть  $\frac{1}{C} < \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right)$ , т.е. скорость раздачи ограничена, и в окрестности точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  имеем, что

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \lambda - \theta x(t) - \mu(\eta x(t) + y(t)); \\ \frac{dy(t)}{dt} = \mu(\eta x(t) + y(t)) - \gamma y(t). \end{cases} \quad (7.12)$$

Матрица  $A_1$ , представляющая собою гессиан системы уравнений (7.12), имеет вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu\eta + \theta) & -\mu \\ \mu\eta & -(\gamma - \mu) \end{bmatrix}.$$

Известно, что собственные числа матрицы  $A_1$  определяют устойчивость системы в точке равновесия  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Пусть  $\psi$  - собственное число матрицы, которое является решением следующего уравнения

$$\psi^2 + (\mu\eta + \theta + \gamma - \mu)\psi + \mu\eta\gamma + \theta(\gamma - \mu) = 0.$$

Так как  $\frac{1}{C} < \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right)$ , имеем  $\gamma > \mu$ . Когда  $\eta > 0$ , оба коэффициента  $\mu\eta + \theta + \gamma - \mu$  и  $\mu\eta + \theta(\gamma - \mu)$  больше нуля. Поэтому собственные числа матрицы  $A_1$  имеют отрицательные действительные части и, следовательно, система (7.1) устойчива.

Теперь, если  $\frac{1}{C} > \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right)$ , т.е. скорость загрузки ограничена,

и в окрестности точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  имеем, что

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \lambda - \theta x(t) - Cx(t); \\ \frac{dy(t)}{dt} = Cx(t) - \gamma y(t). \end{cases}$$

Пусть

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\theta + C) & 0 \\ C & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Тогда собственные значения матрицы  $A_2$  удовлетворяют уравнению

$$\psi^2 + (\theta + \gamma + C)\psi + \gamma(\theta + C) = 0.$$

Так как оба коэффициента  $\theta + \gamma + C$  и  $(\theta + C)\gamma$  больше нуля, собственные значения имеют отрицательные действительные части, и, следовательно, система (7.1) устойчива. На этом исследование простейшей жидкостной модели файлообменной P2P-сети завершено, и мы переходим к построению и анализу еще одной модели, учитывающей расстояние, на котором взаимодействуют ее пользователи.

### ***7.3. Принципы вещательного телевидения в одноранговой сети***

На сегодняшний день множество потоковых P2P систем были успешно созданы и обслуживают одновременно десятки тысяч пользователей, окончное оборудование которых воспроизводит ТВ-каналы со скоростью от 300 кбит/с до 1 Мбит/с. Примерами таких систем являются PPStream, UUSee, SopCast, TVants и многие другие. Так как большинство видеопотоков в этих сетях являются телевизионными каналами со всего мира, их называют P2PTV-сетями. Для простоты далее будем использовать аббревиатуру P2PTV для обозначения потоковых P2P-сетей. В P2PTV-сетях один телевизионный канал могут просматривать тысячи или даже миллионы пользователей со всего мира одновременно. Все существующие на сегодняшний день P2PTV-сети, включая CoolStreaming, PPStream и UUSee, имеют одинаковую структуру. Такие сети состоят из оборудования пользователей (STB, Set Top Box), видеосервера и трекер-серверов. Видеосервер является источником потокового видео, т.е. он генерирует видеопоток. Трекер-сервер является управляющим сервером, в нем содержится информация обо всей P2PTV-сети, например, информация о транслируемых каналах в сети, информация о всех пользователях (кто, что смотрит), и т.д. В качестве оборудования пользователя может использоваться не только приставка STB, но и персональный компьютер с установленным программным обеспечением (так называемым «торрент-клиентом»).

В P2PTV-сетях пользователи группируются в соответствии с каналом, который они просматривают, и таким образом для каждого канала образуется группа пользователей (рис. 7.6), причем каждый пользователь может получить видеопоток как от сервера, так и от соседей по группе.

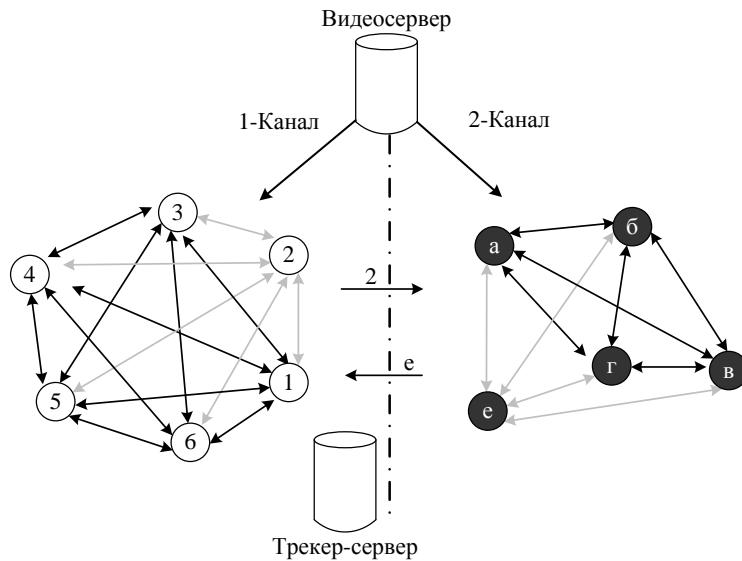


Рис. 7.6. Процесс переключения каналов в P2PTV-сети

В P2PTV-сетях видеосервер разделяет видеопоток на маленькие части, так называемые «порции видеоданных» (англ. Chunk), каждая порция состоит из видеоданных для воспроизведения, например, в течение одной секунды. Программное обеспечение, установленное в оборудовании пользователя (STB, компьютер), реконструирует видеопоток, как только порции видеоданных поступают в буфер видеоплеера. Начальное распределение видеоданных осуществляется видеосервером путем их передачи небольшой группе пользователей.

Так как P2PTV-сети построены на основе технологии P2P, то каждый пользователь, получая порции данных из сети, сразу же рассыпает полученную порцию другим пользователям, у которых нет данной порции, таким образом, пользователь повышает общую пропускную способность системы. Поэтому, чем больше пользователей участвует в видеосессии, тем выше качество воспроизведения канала.

Если пользователь хочет посмотреть определенный канал, программное обеспечение, установленное в оборудовании

пользователя, связывается с трекер-сервером для получения адресов других пользователей, просматривающих данный канал. После получения списка пользователь устанавливает связи с полученными пользователями, с помощью, например, TCP соединения, для однорангового обмена данными. Трекер-сервер сохраняет адрес данного пользователя для того, чтобы предоставлять его другим пользователям, желающим присоединиться к просмотру данного телевизионного канала. В результате этого процесса создается наложенная сеть поверх сети Интернет для распределения видеопотока в режиме реального времени. Если пользователь переключился на другой канал, или ушел из системы (например, выключил STB, компьютер или завершил работу приложения торрент-клиент), он сразу прекращает отправлять видеоданные своим соседям по группе. В результате качество воспроизведения видео у соседей, лишившихся одного из источников получения видеоданных, ухудшается, и они должны найти другого пользователя - соседа по P2P- сети, для того, чтобы поддерживать непрерывное воспроизведение видео.

Как это показано на рис. 7.6, при переключении пользователя (2) с телевизионного 1-канала на телевизионный 2-канал он прекращает отправлять видеоданные своим соседям по группе, что ухудшает их качество обслуживания. В этом случае все его соседи должны найти другие источники данных, чтобы поддерживать непрерывное воспроизведение видео. То же самое происходит при переключении пользователя (e) с 2-канала на 1-канал. Вновь присоединившийся к телевизионному каналу пользователь должен найти соседей, которые имеют возможность (достаточную скорость раздачи) отправлять ему видеоданные.

Таким образом, возникает задача построения моделей Р2РТВ-сети с целью анализа их показателей эффективности. Впервые такие модели в терминах экспоненциальных сетей массового обслуживания (СeМО) [1, 3, 5, 21] были построены проф. К. Россом, известным также по монографии, посвященной анализу мультисервисных сетей связи.

## **7.4. Модель потоковой сети в виде однородной сети массового обслуживания**

В данном разделе исследован метод и построена модель переключения каналов пользователями P2PTV-сети как процесса блуждания заявок (пользователей) по узлам (каналам) замкнутой экспоненциальной СeМО. В рассматриваемой СeМО все узлы являются узлами типа Infinite Server (IS), и поэтому далее показано, что из теоремы Гордона-Ньюэлла может быть получено явное выражение для нормирующей константы. Для полноты изложения в разделе сформулированы известные из теории экспоненциальных однородных СeМО утверждения и факты [1].

В P2PTV-сетях можно выделить два понятия: ротация пользователями, соответствующая процессу включения и выключения STB или приложения (торент-клиента) пользователями, и ротация каналов, соответствующая процессу переключения канала каким-либо пользователем. Когда пользователи используют специальное оборудование, например, STB, для просмотра пиринговых вещательных телевизионных каналов, то ротация пользователей минимальна, т.к. это оборудование может постоянно участвовать в раздаче видеоданных. Ротация оказывает достаточно сильное влияние, когда пользователи пользуются компьютерным программным обеспечением для просмотра видео, т.к. обычно пользователь завершает работу этого приложения после завершения просмотра видео.

Процесс переключения каналов пользователем P2PTV-сети может быть описан с помощью замкнутой сети массового обслуживания (СeМО)

$Q = \langle \mathcal{M}, \Theta, N; \mu_m, c_m = \infty, r_m = 0, m \in \mathcal{M}; FCFS \rangle$ , состоящей из  $|\mathcal{M}| = M$  узлов, каждый из которых соответствует каналу P2PTV-сети [1]. В сети циркулирует постоянное число  $N$  заявок, соответствующих пользователям сети. Замкнутая СeМО описывает функционирование сети, в которой отсутствует ротация пользователей.

Узел  $m$  СeМО представляют собой систему массового обслуживания (СМО)  $M|M|\infty$ ,  $m \in \mathcal{M}$ . Длительность обслуживания заявок в узле имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_m$ , что соответствует среднему времени  $1/\mu_m$  просмотра пользователем  $m$ -канала,  $m \in \mathcal{M}$ .

Процесс переключения каналов пользователем Р2РТВ-сети рассматривается как процесс блуждания некоторой заявки (пользователя) между узлами СeМО (каналами). Пусть  $t_k$  – случайный момент окончания просмотра канала пользователем (и переключения на следующий канал), и пусть  $v_k = v(t_k^{+0})$  – номер канала, на который переключился пользователь,  $v_k \in \mathcal{M}$ ,  $k \geq 0$ . Тогда процесс блуждания заявки описывает однородная ЦМ  $\{v_k, k \geq 0\}$ , вложенная по моментам поступления заявки в узлы сети. Также положим  $\theta_{im} = P\{v_{k+1} = m \mid v_k = i\}$  – вероятность перехода из состояния (узла, канала)  $i$  в состояние (узел, канал)  $m$  за один шаг,  $i, m \in \mathcal{M}$ , а матрица  $\Theta = (\theta_{im})$ ,  $i, m \in \mathcal{M}$  – соответствующая матрица переходных вероятностей ЦМ  $\{v_k, k \geq 0\}$ .

По построению модели все состояния рассматриваемой вложенной конечной ЦМ сообщаются и, следовательно, все они положительно-возвратны, и матрица  $\Theta$  неразложима. Поэтому ранг СУР

$$x_m = \sum_{i=1}^M x_i \theta_{im}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad (7.13)$$

или в матричном виде  $\mathbf{x}^T \Theta = \mathbf{x}^T$ , на единицу меньше ее размерности, т.е. равен  $M - 1$ . Поэтому СУР (7.13) имеет положительное решение  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_M) > \mathbf{0}^T$ , определяемое с точностью до произвольной постоянной. Если нормировать это решение

$$p_m = \frac{x_m}{\sum_{i=1}^M x_i}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad (7.14)$$

получаем стационарное распределение вероятностей  $\mathbf{p}^T = (p_1, \dots, p_M)$  ЦМ  $\{\nu_k, k \geq 0\}$ . Стационарные вероятности  $p_m$  можно интерпретировать как число попаданий в состояние (узел, канал)  $m$  на большом интервале времени,  $m \in \mathcal{M}$ . Если же выделить некоторый узел  $i^*$  и нормировать решение  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_M)$  так, чтобы

$$h_m = \frac{p_m}{p_{i^*}}, \quad m \neq i^*, \quad h_{i^*} = 1 \quad (7.15)$$

то  $h_m$  можно интерпретировать как среднее число посещений некоторой заявкой узла  $m$  за период длительности  $\tau_{i^*}$ , начавшийся с момента поступления этой заявки в узел  $i^*$  и до момента ее возвращения в этот узел. Поэтому в замкнутых сетях величина

$$d_m = \frac{h_m}{\mu_m}, \quad (7.16)$$

имеет смысл среднего значения суммарной трудоемкости, предъявляемой каждой заявкой узлу  $m$ ,  $m \in \mathcal{M}$ , в указанном интервале времени.

Пусть  $X_m(t)$  – число заявок в узле  $m$  в момент  $t \geq 0$ . Тогда  $M$ -мерный ступенчатый Марковский процесс  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_M(t))$ , описывающий функционирование рассматриваемой СeМО при сделанных ранее предположениях, будет регулярным и неприводимым над конечным пространством состояний

$$\mathcal{D}(M, N) = D = \left\{ \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M) : n_m = 0, 1, \dots, N; \sum_{m=1}^M n_m = N \right\}.$$

Заметим, что  $|\mathcal{D}(M, N)| = D(M, N) = \binom{M+N-1}{M-1}$ ,  $M \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,

что можно получить из комбинаторных соображений.

По теореме Гордона-Ньюэла [1], если матрица  $\Theta$  замкнутой экспоненциальной сети  $Q$  неразложима, то у описывающего СeМО ступенчатого процесса  $\mathbf{X}(t)$ , независимо от начального

распределения существует стационарное распределение  $\{p(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)\}$ , которое имеет следующий мультипликативный вид:

$$p(\mathbf{n}) = G^{-1}(M, N) \prod_{m=1}^M \frac{d_m^{n_m}}{\beta_m(n_m)}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N), \quad (7.17)$$

где  $d_i$  определяется формулой (7.16), а нормирующая константа  $G(M, N)$  находится из нормировочного условия  $\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} p(\mathbf{n}) = 1$ :

$$G(M, N) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{d_m^{n_m}}{\beta_m(n_m)}, \quad M \geq 1, \quad N \geq 0. \quad (7.18)$$

Рассмотрим случай, когда  $\rho_m = \frac{d_m}{\sum_{i=1}^M d_i}$ ,  $m \in \mathcal{M}$ , т.е. нормируем

величины  $d_m$ , и тогда имеет место равенство  $\sum_{m=1}^M \rho_m = 1$ . Покажем, что (7.17) справедлива и для нормированных значений  $d_m$ , то есть для величин  $\rho_m$ . Для этого подставим  $d_m = \rho_m \sum_{i=1}^M d_i$  в формулу (7.16) и с учетом (7.18) получаем, что

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}') &= \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n'_m} (\sum_{i=1}^M d_i)^{n'_m}}{\beta_m(n'_m)} \left( \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m} (\sum_{i=1}^M d_i)^{n_m}}{\beta_m(n_m)} \right)^{-1} = \\ &= \frac{\prod_{m=1}^M (\sum_{i=1}^M d_i)^{n'_m} \prod_{m=1}^M \rho_m^{n'_m}}{\prod_{m=1}^M \beta_m(n'_m)} \left( \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \frac{\prod_{m=1}^M (\sum_{i=1}^M d_i)^{n_m} \prod_{m=1}^M \rho_m^{n_m}}{\prod_{m=1}^M \beta_m(n_m)} \right)^{-1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^M d_i)^{\sum_{m=1}^M n'_m} \prod_{m=1}^M \rho_m^{n'_m}}{\prod_{m=1}^M \beta_m(n'_m)} \left( \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \frac{(\sum_{i=1}^M d_i)^{\sum_{m=1}^M n_m} \prod_{m=1}^M \rho_m^{n_m}}{\prod_{m=1}^M \beta_m(n_m)} \right)^{-1}. \quad (7.19)$$

Так как для любого  $\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)$  справедливо равенство

$\sum_{m=1}^M n_m = N$ , то из (7.19) следует, что

$$p(\mathbf{n}') = \frac{\prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n'_m}}{\beta_m(n'_m)}}{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{\beta_m(n_m)}},$$

и, если положить  $G(M, N) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{\beta_m(n_m)}$ , то получаем

стационарное распределение случайного процесса  $X(t)$  в виде

$$p(\mathbf{n}) = G^{-1}(M, N) \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{\beta_m(n_m)}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N). \quad (7.20)$$

Далее нам необходимо получить явный вид нормирующей константы  $G(M, N)$  и стационарного распределения числа заявок в замкнутой экспоненциальной СeМО, все узлы которой имеют тип IS, и в которой для распределения (7.20) выполняется соотношение  $\sum_{m=1}^M \rho_m = 1$ .

Утверждение 7.3. В замкнутой экспоненциальной СeМО с узлами типа IS и  $\sum_{m=1}^M \rho_m = 1$  нормирующая константа определяется по формуле

$$G(M, N) = \frac{1}{N!}. \quad (7.21)$$

Доказательство. Так как для узлов типа IS

$$\beta_m(n_m) = n_m!, \quad m \in \mathcal{M}, \quad (7.22)$$

то нормирующая константа принимает вид

$$G(M, N) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{n_m!}. \quad (7.23)$$

Умножим и разделим правую часть уравнения (7.23) на  $N!$ :

$$\begin{aligned} G(M, N) &= \frac{N!}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{n_m!} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N)} \frac{N!}{n_1! \dots n_M!} \prod_{m=1}^M \rho_m^{n_m} = \\ &= \frac{1}{N!} (\rho_1 + \dots + \rho_M)^N = \frac{1}{N!}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

и утверждение доказано. ■

Подставив (7.22) и (7.24) в (7.20), получим

$$p(\mathbf{n}) = N! \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{n_m!}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N).$$

Таким образом, доказано следующее следствие из теоремы Гордона-Ньюэлла.

Следствие 7.1. Если матрица  $\Theta$  замкнутой экспоненциальной СeМО, все узлы которой являются СМО типа IS,  $m \in \mathcal{M}$ , неразложима, то у описывающего СeМО ступенчатого процесса  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , независимо от начального распределения существует стационарное распределение мультипликативного вида

$$p(\mathbf{n}) = N! \prod_{m=1}^M \frac{\rho_m^{n_m}}{n_m!}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{D}(M, N), \quad (7.25)$$

где величины  $\rho_m$  являются единственным решением СУР

$$\rho_m = \sum_{i=1}^M \rho_i \theta_{im}, \quad m \in \mathcal{M},$$

с нормирующим условием  $\sum_{m=1}^M \rho_m = 1$ .

Очевидным следствием также является биномиальный вид маргинального распределения числа  $n_m$  заявок по узлам СeМО:

$$p(n_m) = \frac{N!}{n_m!(N-n_m)!} \rho_m^{n_m} (1-\rho_m)^{N-n_m}, m \in \mathcal{M}. \quad (7.26)$$

Теперь построим модель поведения отдельного пользователя (англ. User behavior) P2PTV-сети в виде замкнутой экспоненциальной СeМО, в которой, как и ранее, число узлов соответствует числу каналов системы, а единственная заявка, блуждающая по узлам сети, описывает процесс переключения каналов пользователем (рис. 7.9). Обозначим  $y_m \in \{0,1\}$  - состояние пользователя на  $m$ -канале и  $\mathbf{y} = (y_m)_{m \in \mathcal{M}}$  - состояние системы.

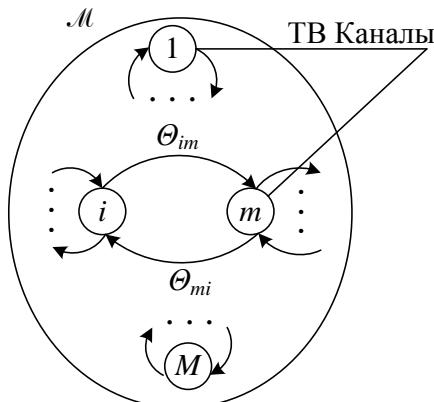


Рис. 7.7. Модель поведения пользователя

Из (7.17) и (7.25) для случая  $N=1$  (один пользователь в системе) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.4. Для СeМО, описывающей поведение отдельного пользователя P2PTV-сети, стационарное распределение вероятностей состояний пользователя имеет вид

$$P(\mathbf{y}) = \prod_{m \in \mathcal{M}} \rho_m^{y_m}, \quad \mathbf{y} \in \{\mathbf{y} : y_m \in \{0,1\}, \sum_{m \in \mathcal{M}} y_m = 1\}. \quad (7.27)$$

Заметим, что величина  $\rho_m$  имеет смысл популярности  $m$ -канала. Для сети с одним пользователем популярность канала соответствует предпочтениям этого пользователя, а для сети с несколькими пользователями популярность канала отражает предпочтения всех пользователей сети.

Рассмотрим P2PTV-сеть, в которой транслируется  $|\mathcal{M}| = M$  каналов, в сети находятся  $|\mathcal{N}| = N$  пользователей, каждый из которых просматривает один из каналов сети,  $\rho_m$  - популярность  $m$ -канала,  $\sum_{m=1}^M \rho_m = 1$ , а  $\mu_m^{-1}$  - среднее время просмотра  $m$ -канала пользователем.

Модель одноранговой сети передачи потокового видео строится в предположении, что все  $N$  пользователей функционируют независимо друг от друга в соответствии с моделью поведения пользователя, определенной в утверждении 7.4. Обозначим  $x_{nm} \in \{0,1\}$  состояние  $n$ -пользователя на  $m$ -канале,  $x_{nm} = 1$ , если  $n$ -пользователь просматривает  $m$ -канал, иначе  $x_{nm} = 0$ . Состояние сети описывает матрица  $\mathbf{X} = (x_{nm})_{n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}}$ , а пространство состояний сети имеет вид

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{X} : x_{nm} \in \{0,1\}, \sum_{m \in \mathcal{M}} x_{nm} = 1, n \in \mathcal{N} \right\}. \quad (7.28)$$

Можно заметить, что в матрице  $\mathbf{X}$  сумма  $x_m = \sum_{n \in \mathcal{N}} x_{nm}$  по  $m$ -столбцу соответствует числу пользователей сети, просматривающих  $m$ -канал, когда сеть находится в состоянии  $\mathbf{X}$ . Множество состояний сети, когда  $m$ -канал просматривают ровно  $k$  пользователей, имеет вид.

$$\mathcal{X}_m(k) = \{ \mathbf{X} \in \mathcal{X} : x_m = k \}, \quad k = \overline{0, N}, \quad m \in \mathcal{M}. \quad (7.29)$$

Тогда маргинальное распределение  $p_m(k)$  числа пользователей, просматривающих  $m$ -канал, определяется формулой

$$p_m(k) = P\{X \in \mathcal{X}_m(k)\} = \sum_{X \in \mathcal{X}_m(k)} P(X), k = \overline{0, N}, m \in \mathcal{M}. \quad (7.30)$$

Поскольку каналы и пользователи в сети функционируют независимо друг от друга, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.5. Вероятность  $P(X)$  состояния  $X$  модели P2PTV-сети с  $N < \infty$  пользователями определяется формулой

$$P(X) = \prod_{n \in \mathcal{N}} \prod_{m \in \mathcal{M}} \rho_m^{x_{nm}}(N), X \in \mathcal{X}. \quad (7.31)$$

■

Формула (7.31) очевидным образом вытекает из предположения о независимости пользователей и утверждения 7.4.

Утверждение 7.6. В случае  $N < \infty$  маргинальное распределение числа пользователей P2PTV-сети, просматривающих  $m$ -канал, имеет вид

$$p_m(k) = \binom{N}{k} \rho_m^k(N) (1 - \rho_m(N))^{N-k}, k = \overline{0, N}, m \in \mathcal{M}. \quad (7.32)$$

■

Формула (7.32) вытекает из формулы (7.26).

Мы предлагаем исследовать случай с бесконечным числом пользователей путем предельного перехода от модели с конечным числом к модели с бесконечным числом пользователей.

Утверждение 7.7. В случае  $N \rightarrow \infty$  маргинальное распределение числа пользователей P2PTV-сети, просматривающих  $m$ -канал, имеет вид

$$p_m(k) = e^{-\gamma_m} \frac{\gamma_m^k}{k!}, k \geq 0, m \in \mathcal{M}, \quad (7.33)$$

где

$$\gamma_m = \lim_{N \rightarrow \infty} N \rho_m(N). \quad (7.34)$$

■

Доказательство утверждения 7.7 следует из известного предельного перехода от биномиального распределения к распределению Пуассона [5]. Здесь  $\gamma_m$  имеет смысл среднего числа присутствующих в сети пользователей при  $N \rightarrow \infty$ .

Поскольку в рассматриваемой нами системе пользователи подключаются к сети и отключаются от нее, а также переключаются с канала на канал независимо друг от друга, совместное распределение числа пользователей по каналам системы имеет мультипликативный вид:

$$P(k_1, \dots, k_M) = \prod_{m \in \mathcal{M}} e^{-\gamma_m(N)} \frac{\gamma_m^{k_m}}{k_m!}, \quad k_m \geq 0, \quad m \in \mathcal{M}. \quad (7.35)$$

Рассмотрим P2PTV-сеть с несколькими каналами и конечным числом пользователей  $N < \infty$ . Видеопоток, доступный пользователям, просматривающим  $m$ -канал, формируется из потока, отдаваемого видеосервером, и потоков, отдаваемых всеми пользователями  $m$ -канала. Обозначим  $s_m$  скорость раздачи видеопотока  $m$ -канала сервером и  $u_n$  скорость раздачи  $n$ -пользователя.

Пусть  $R_m$  - скорость воспроизведения  $m$ -канала, т.е. скорость, требуемая для воспроизведения канала без пауз, без рассинхронизации звука и изображения, а также других явлений, свидетельствующих о низком качестве предоставления услуги телевещания по P2PTV-сети. Пусть когда система находится в состоянии  $X$ , величина  $w_{nm}(X)$  - видеопоток, доступный  $n$ -пользователю, просматривающему  $m$ -канал. Для воспроизведения  $m$ -канала со стандартным качеством  $n$ -пользователю необходимо получать видеопоток  $m$ -канала из системы со скоростью не меньше  $R_m$ , т.е.  $w_{nm}(X) \geq R_m$ .

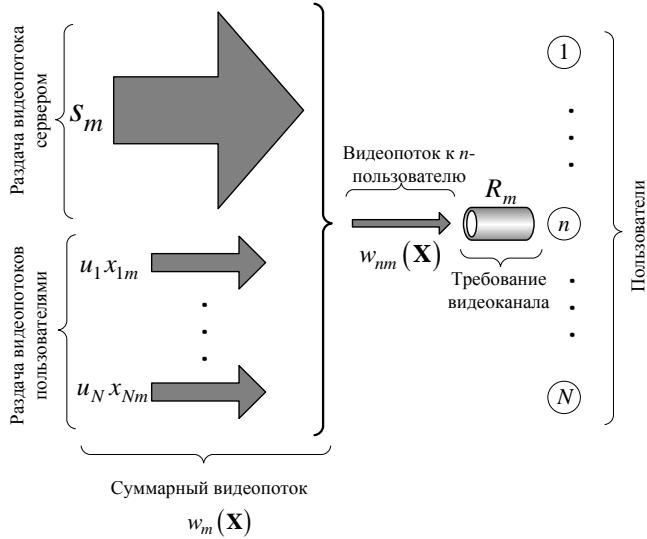


Рис. 7.8. Схема формирования видеопотока в P2P-TV сети

Тогда величина  $w_m(X)$  - суммарный видеопоток, доступный всем пользователям, просматривающим  $m$ -канал, когда система находится в состоянии  $X$ , и эта величина задается следующей формулой

$$w_m(X) = \sum_{n \in \mathcal{N}} w_{nm} = s_m + \sum_{n \in \mathcal{N}} x_{nm} u_n. \quad (7.36)$$

Будем говорить, что  $m$ -канал находится в состоянии всеобщей передачи, если все пользователи, просматривающие его, имеют возможность получать биты видеоданных данного канала со скоростью не ниже скорости воспроизведения канала  $R_m$ .

Если выполнено неравенство  $w_m(X) \geq R_m \sum_{n \in \mathcal{N}} x_{nm}$ , то можно

считать, что скорость доступного видеопотока соответствует требованиям к качеству всех пользователей  $m$ -канала, и  $m$ -канал находится в состоянии всеобщей передачи.

Обозначим  $\mathcal{A}_m$  событие, при котором скорости суммарного доступного видеопотока в сети достаточно для получения

видеоданных канала каждым просматривающим канал пользователем со скоростью воспроизведения канала:

$$\mathcal{A}_m = \left\{ X \in \mathcal{X} : s_m + \sum_{n \in \mathcal{N}} x_{nm} u_n \geq R_m \sum_{n \in \mathcal{N}} x_{nm} \right\}. \quad (7.37)$$

Пусть  $\pi_m$  - вероятность этого события. Таким образом,  $\pi_m$  есть вероятность состояния всеобщей передачи для  $m$ -канала P2PTV-сети (для краткости - вероятность всеобщей передачи):

$$\pi_m := P(\mathcal{A}_m) = \sum_{X \in \mathcal{X}} I(\mathcal{A}_m) P(X), \quad (7.38)$$

где  $I(\mathcal{A}_m)$  - функция-индикатор:

$$I(\mathcal{A}_m) = \begin{cases} 1, & \text{если событие } \mathcal{A}_m \text{ истинно;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следствие 7.2. Вероятность всеобщей передачи для  $m$ -канала P2PTV-сети определяется формулой

$$\pi_m := \sum_{X \in \mathcal{X}} I(\mathcal{A}_m) P(X) = \sum_{X \in \mathcal{X}} I(\mathcal{A}_m) \prod_{n \in \mathcal{N}} \prod_{n \in \mathcal{N}} \rho_m^{x_{nm}}(N). \quad (7.39)$$

В следующем разделе, используя формулу (7.39), мы проводим анализ модели P2PTV-сети с двумя типами пользователей – с высокой и с низкой скоростью раздачи видеопотока.

### 7.5. Анализ модели сети с двумя типами пользователей с высокой и с низкой скоростью раздачи видеопотока

Для упрощения анализа предположим, что в сети имеются два вида пользователей: пользователи с высокой скоростью раздачи и пользователи с низкой скоростью раздачи, хотя в общем случае скорость подключения к сети Интернет у пользователей бывает разная. Предположим также, что часть пользователей имеет одинаковую высокую скорость раздачи, равную равную  $u^h$ , а другая часть имеет одинаковую низкую скорость раздачи, равную  $u^l$ , т.е.  $u^l < u^h$ . Обозначим соответствующие подмножества пользователей  $\mathcal{N}^h$  и  $\mathcal{N}^l$ ,  $N^h = |\mathcal{N}^h|$ ,  $N^l = |\mathcal{N}^l|$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^h \cup \mathcal{N}^l$ . Тогда

$$u_n = \begin{cases} u^h, & n \in \mathcal{N}^h, \\ u^l, & n \in \mathcal{N}^l. \end{cases}$$

Введем обозначения аналогично тому, как это было сделано выше: в каждом состоянии сети  $\mathbf{X}$  величина  $x_m^h = \sum_{n \in \mathcal{N}^h} x_{nm}$  обозначает число пользователей  $m$ -канала с высокой скоростью раздачи и  $x_m^l = \sum_{n \in \mathcal{N}^l} x_{nm}$  - число пользователей с низкой скоростью раздачи, при этом верно равенство  $x_m = x_m^h + x_m^l, m \in \mathcal{M}$ .

С учетом введенных обозначений событие  $\mathcal{A}_m$  из (7.37) определяется следующей формулой:

$$\mathcal{A}_m = \left\{ (x_m^h, x_m^l) : 0 \leq x_m^h \leq N^h, 0 \leq x_m^l \leq N^l, s_m + x_m^h u^h + x_m^l u^l \geq x_m R_m \right\}. \quad (7.40)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.8. Вероятность всеобщей передачи  $m$ -канала P2PTV-сети с конечным числом пользователей с высокой и с низкой скоростью определяется формулой

$$\pi_m = P(\mathcal{A}_m) = \sum_{x_m^h=0}^{N^h} \sum_{x_m^l=0}^{N^l} I(\mathcal{A}_m) p_m(x_m^h) p_m(x_m^l), \quad m \in \mathcal{M} \quad (7.41)$$

где маргинальные распределения  $p(x_m^s), s \in \{h, l\}$  имеют вид

$$p_m(x_m^s) = \binom{N^s}{x_m^s} \rho_m^{x_m^s} (N^s) \left(1 - \rho_m(N^s)\right)^{N^s - x_m^s}, \quad (7.42)$$

$$x_m^s = \overline{0, N^s}, \quad m \in \mathcal{M}, s \in \{h, l\}$$

Утверждение 7.9. Вероятность всеобщей передачи  $m$ -канала P2PTV-сети с бесконечным числом пользователей с высокой и с низкой скоростью определяется формулой

$$\pi_m = P(\mathcal{A}_m) = \sum_{x_m^h=0}^{\infty} \sum_{x_m^l=0}^{\infty} I(\mathcal{A}_m) p_m(x_m^h) p_m(x_m^l), \quad m \in \mathcal{M}, \quad (7.43)$$

где маргинальные распределения имеют вид

$$p_m(x_m^s) = e^{-\gamma_m^s} \cdot \frac{(\gamma_m^s)^{x_m^s}}{x_m^s!}, m \in \mathcal{M}, s \in \{h, l\}, \quad (7.44)$$

$$\gamma_m^s = \lim_{N^s \rightarrow \infty} N^s \rho_m(N^s), m \in \mathcal{M}, s \in \{h, l\}. \quad \blacksquare$$

В качестве примера численного анализа вероятности всеобщей передачи телевизионных каналов с различными популярностями рассмотрим фрагмент P2PTV-сети, в которой транслируются транслируются  $M=100$  телевизионных каналов и присутствуют  $N=2000$  пользователей, каждый из которых просматривает один из телевизионных каналов. Предполагается, что популярность каналов распределена по закону Ципфа с параметром  $z=1$ , т.е.

$$\rho_m = \left( m^z \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^z} \right)^{-1}, m \in \mathcal{M}. \text{ Все каналы в сети имеют одинаковые}$$

требования к скорости передачи данных, т.е.  $R_m = R = 500 \text{ кбит/с}$ ,  $m \in \mathcal{M}$ . Предположим, что  $N^l = 0,5N$  пользователей в сети имеют низкую скорость раздачи, а остальные имеют высокую скорость раздачи. Пользователи с высокой скоростью отдают видеопоток со скоростью  $u^h = 1500 \text{ кбит/с}$ , пользователи с низкой скоростью отдают со скоростью  $u^l = 100 \text{ кбит/с}$ .

Из рис. 7.9 видно, что при уменьшении популярности канала вероятность состояния всеобщей передачи для этого канала падает. Для первых пяти по популярности каналов вероятность состояния всеобщей передачи равна единице. Для непопулярных каналов эта вероятность низка, потому что среднее число пользователей, просматривающих соответствующий канал, становится малым ( $\pi_{100} = 0,879$ ). Малые значения вероятностей состояния всеобщей передачи в этом случае объясняются тем, что из-за малого количества пользователей в группе часто не получается эффективно организовать сеть и моментально переключить потоки в случае, когда кто-то из пользователей прекращает передачу данных.

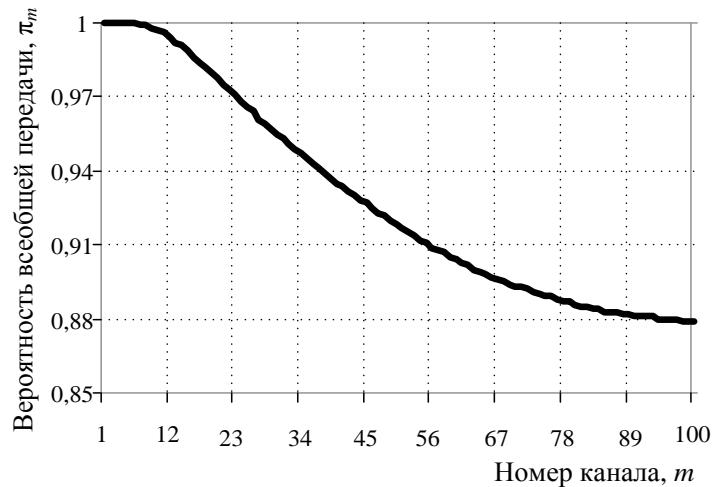


Рис. 7.9. Вероятность всеобщей передачи каналов

Интересно провести анализ того, как вероятность всеобщей передачи для каналов с различной степенью популярности меняется в зависимости от сочетания (комбинации) числа пользователей с низкой и с высокой скоростью раздачи. Для этого на рис. 7.10 и рис. 7.11 изображены графики зависимости вероятности  $\pi_m$  от числа пользователей  $N^h$  и  $N^l$  для 1-го и 100-го канала соответственно, т.е. для канала с самой высокой популярностью и канала с самой низкой популярностью.

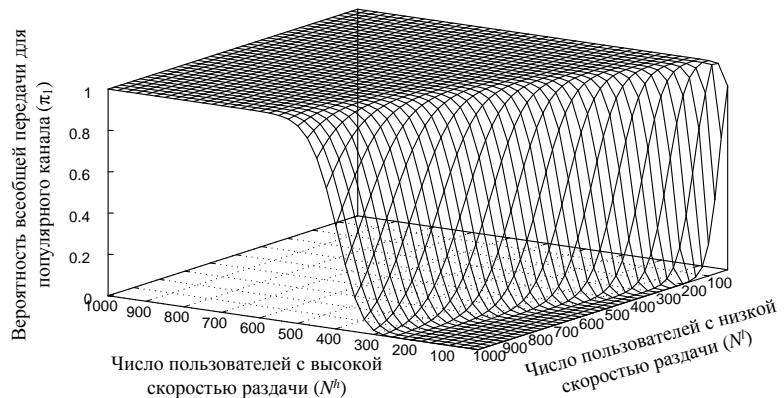


Рис. 7.10. Вероятность всеобщей передачи для самого популярного 1-го канала

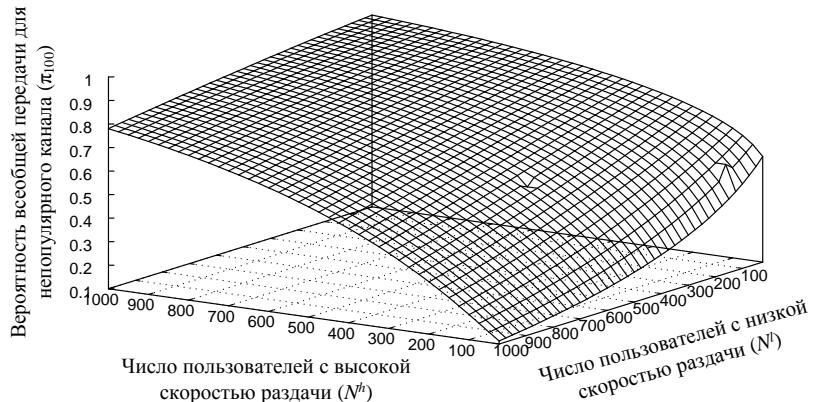


Рис. 7.11. Вероятность всеобщей передачи для наименее популярного 100-го канала

Из графика на рис. 7.10 видно, что вероятность всеобщей передачи для самого популярного 1-канала быстро растет к единице даже при небольшом числе пользователей с высокой скоростью раздачи.

И наоборот, на рис. 7.11 для наименее популярного 100-канала вероятность всеобщей передачи растет медленно и достигает значение 1 только при большом числе пользователей с высокой

скоростью раздачи и небольшом числе пользователей с низкой скоростью раздачи.

Данный анализ подтверждается графиком на рис. 7.12, где вероятность всеобщей передачи для 1-канала и 100-канала показаны в зависимости от отношения числа пользователей с высокой скоростью раздачи к числу пользователей с низкой скоростью раздачи,  $K = N^h \cdot (N^l)^{-1}$ .

Из графика на рис. 7.12 видно, что вероятность всеобщей передачи становится близкой к единице для 1-канала при  $K \geq 0,5$ , в то время как для менее популярного 100-канала даже при  $K = 2$  значение этой вероятности не превышает 0,9.

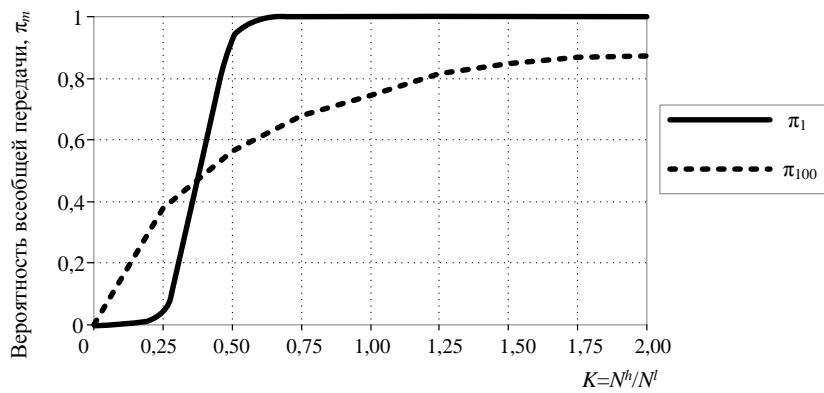


Рис. 7.12. Зависимость вероятности всеобщей передачи от соотношения числа пользователей с высокой и с низкой скоростью раздачи

В заключение к данному разделу заметим, что еще одной задачей, которую можно решить с использованием построенной в данном разделе модели, является определение максимальной скорости  $R_m$ , при которой  $m$ -канал будет находиться в состоянии всеобщей передачи. На рис. 7.13 иллюстрированы используемые далее обозначения.

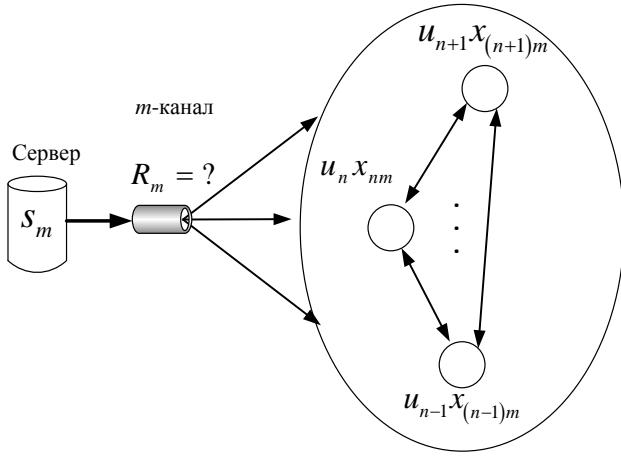


Рис. 7.13. Иллюстрация обозначений модели

Утверждение 7.10. Максимальная скорость  $R_m$  воспроизведения  $m$ -канала, при которой достигается состояние всеобщей передачи, определяется формулой

$$R_m(X) = \min \left\{ s_m, \frac{w_m(X)}{x_m} \right\}, \quad (7.45)$$

$$R_m = \min_{X \in \mathcal{X}} R_m(X).$$

Доказательство утверждения 7.10 следует из работы [25] и поэтому здесь не приводится. ■

### 7.6. Аппроксимация нормальным законом вероятности всеобщей передачи

Пусть  $\xi_m^h$  и  $\xi_m^l$  - случайные величины (СВ), обозначающие число активных пользователей с высокой и низкой скоростью раздачи на  $m$ -канале соответственно, принимающие значения  $0 \leq \xi_m^h \leq N^h$ ,  $0 \leq \xi_m^l \leq N^l$ . Предположим, что СВ  $\xi_m^h$  и  $\xi_m^l$  имеют

распределение Пуассона с параметрами  $\gamma_m^h$  и  $\gamma_m^l$  соответственно,  
где

$$\begin{aligned}\gamma_m^h &= \lim_{N^h \rightarrow \infty} N^h \rho_m(N^h), \\ \gamma_m^l &= \lim_{N^l \rightarrow \infty} N^l \rho_m(N^l).\end{aligned}\quad (7.46)$$

Здесь  $\gamma_m^h$  и  $\gamma_m^l$  среднее число пользователей с высокой и с низкой скоростью раздачи на  $m$ -канале соответственно.

Пусть теперь  $K = \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}$  - отношение среднего числа пользователей с высокой скоростью раздачи в сети к среднему числу пользователей с низкой скоростью раздачи на  $m$ -канале;  
 $\varepsilon_m = \frac{R_m - u^l}{u^h - R_m}$  - отношение разницы между скоростью воспроизведения канала и скоростью раздачи пользователя с низкой скоростью раздачи к разнице между скоростью раздачи пользователя с высокой скоростью раздачи и скоростью воспроизведения канала;  $\delta_m = \frac{s_m}{u^h - R_m}$  - отношение скорости раздачи сервера к разнице между скоростью раздачи пользователя с высокой скоростью раздачи и скоростью воспроизведения канала.

С учетом обозначений  $\varepsilon_m$  и  $\delta_m$  событие  $\mathcal{A}_m$  из (7.40) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m &= \left\{ \left( \xi_m^h, \xi_m^l \right) : s_m + \xi_m^h u^h + \xi_m^l u^l \geq (\xi_m^h + \xi_m^l) R_m \right\} = \\ &= \left\{ \left( \xi_m^h, \xi_m^l \right) : \xi_m^h \geq \varepsilon_m \xi_m^l - \delta_m \right\}; \\ \mathcal{A}_m &= \left\{ \left( \xi_m^h, \xi_m^l \right) : \xi_m^h \geq \varepsilon_m \xi_m^l - \delta_m \right\}, 0 \leq \xi_m^h \leq N^h, 0 \leq \xi_m^l \leq N^l.\end{aligned}\quad (7.47)$$

Утверждение 7.11. Вероятность  $\pi_m$  всеобщей передачи  $m$ -канала в сети P2PTV с бесконечным числом пользователей с высокой и с

низкой скоростью раздачи аппроксимируется нормальным законом  $N\left(0, \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} + \varepsilon_m^2\right)$  т.е.

$$\pi_m = \Phi\left(\frac{d_m}{\sqrt{K + \varepsilon_m^2}}\right), \quad (7.48)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$  - стандартное нормальное

распределение и  $d_m = \frac{(K - \varepsilon_m)\gamma_m^l + \delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}$  и  $K = \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}$ .

Доказательство. Воспользуемся центральной предельной теоремой в условиях Линденберга-Леви. Нормируем случайные величины  $\xi_m^h$  и  $\xi_m^l$ , которые распределены по закону Пуассона, следующим образом:

$$Z_m^h = \frac{\xi_m^h - \gamma_m^h}{\sqrt{\gamma_m^h}} \text{ и } Z_m^l = \frac{\xi_m^l - \gamma_m^l}{\sqrt{\gamma_m^l}}. \quad (7.49)$$

Тогда с учетом (7.49) событие  $A_m$  из (7.47) имеет вид

$$\begin{aligned} A_m &= \left\{ (\xi_m^h, \xi_m^l) : \xi_m^h \geq \varepsilon_m \xi_m^l - \delta_m \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt{\gamma_m^h} Z_m^h + \gamma_m^h \geq \varepsilon_m \left( \sqrt{\gamma_m^l} Z_m^l + \gamma_m^l \right) - \delta_m \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt{\gamma_m^h} Z_m^h + \gamma_m^h \geq \varepsilon_m \left( \sqrt{\gamma_m^l} Z_m^l + \gamma_m^l \right) - \delta_m \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}} Z_m^h + \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} \sqrt{\gamma_m^l} \geq \varepsilon_m \left( Z_m^l + \sqrt{\gamma_m^l} \right) - \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}} Z_m^h + \left( \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m \right) \sqrt{\gamma_m^l} \geq \varepsilon_m Z_m^l - \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}} \right\} = \\
&= \left\{ \sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}} Z_m^h - \varepsilon_m Z_m^l \geq - \left( \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m \right) \sqrt{\gamma_m^l} - \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}} \right\} = \\
&= \left\{ \varepsilon_m Z_m^l - \sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}} Z_m^h \leq \left( \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m \right) \sqrt{\gamma_m^l} + \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}} \right\}.
\end{aligned}$$

Обозначим  $\hat{Z}_m = \varepsilon_m Z_m^l - \sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}} Z_m^h$ .

С учетом этого обозначения событие  $\mathcal{A}_m$  из (7.47) имеет вид

$$\mathcal{A}_m = \left\{ \hat{Z}_m \leq \left( \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m \right) \sqrt{\gamma_m^l} + \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}} \right\}. \quad (7.50)$$

Поскольку из (7.49) СВ  $Z_m^h \sim N(0,1)$  и  $Z_m^l \sim N(0,1)$ , то их линейная комбинация также распределена по нормальному закону. Ввиду этого получаем, что СВ  $\hat{Z}_m$  имеет нормальное распределение с параметрами  $N\left(0, \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} + \varepsilon_m^2\right)$  и, следовательно, из

(7.50) окончательно получаем следующую формулу

$$\pi_m = P(\mathcal{A}_m) = \Phi\left( \frac{\left( \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} - \varepsilon_m \right) \sqrt{\gamma_m^l} + \frac{\delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}}}{\sqrt{\frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l} + \varepsilon_m^2}} \right).$$

Таким образом, получена формула (7.48)  $\pi_m = \Phi\left(\frac{d_m}{\sqrt{K + \varepsilon_m^2}}\right)$ , где

$$d_m = \frac{(K - \varepsilon_m)\gamma_m^l + \delta_m}{\sqrt{\gamma_m^l}} \text{ и } K = \frac{\gamma_m^h}{\gamma_m^l}.$$

■

Для проверки погрешности полученной приближенной формулы приведем пример расчета вероятности всеобщей передачи для сети с  $M = 100$  телеканалами, в которой находятся  $N=1800$  пользователей, с помощью точного метода (7.41)-(7.44) и аппроксимации (7.48).

Пусть все каналы имеют одинаковые требования к ширине полосы пропускания, т.е.  $R_m = R = 500$  кбит/с,  $m \in \mathcal{M}$ . В системе присутствуют два типа пользователей:  $N^l = 0,5N$  пользователей с низкой скоростью раздачи  $u^l = 100$  кбит/с и  $N^h = 0,5N$  пользователей с высокой скоростью раздачи  $u^h = 1500$  кбит/с. Как и ранее, предполагается, что величины популярности каналов распределены по закону Ципфа с параметром  $z=1$ , т.е.

$$\rho_m = \left( m^z \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^z} \right)^{-1}, m \in \mathcal{M}, z=1. \quad \text{В этом случае телеканалы}$$

пронумерованы в порядке уменьшения их популярности.

На рис. 7.14 для всех каналов показаны значения вероятности  $\pi_m$  всеобщей передачи, рассчитанные по формулам (7.41)-(7.44) и по формуле (7.48). Сравнение значений показывает, что относительная погрешность приближения (7.48) для каналов с большой популярностью (каналы 1-7) равна нулю. Самая большая относительная погрешность приближения наблюдается для наименее популярного канала (канал 100), она составляет порядка  $10^{-2}$ . Следовательно, аппроксимацию (7.48) можно использовать для оценки значения вероятности  $\pi_m$  всеобщей передачи Р2РТВ-сети, причем с ростом популярности канала точность оценки повышается.

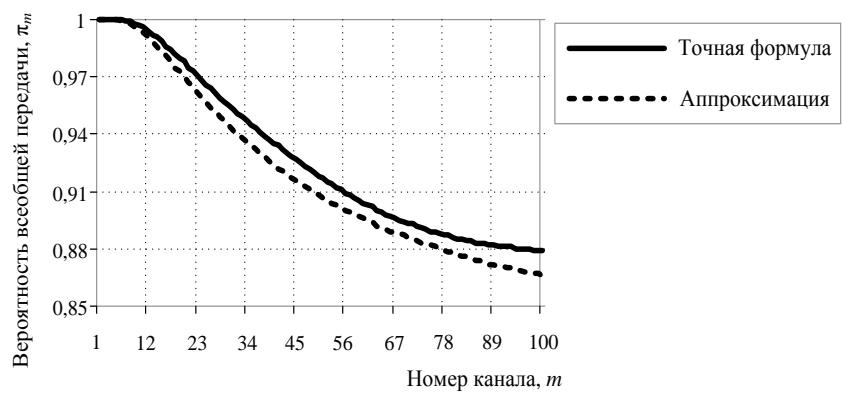


Рис. 7.14. Вероятность всеобщей передачи для каналов Р2РТВ-сети

## **ЛИТЕРАТУРА**

### **Основная**

- [1] Башарин Г.П. Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: РУДН. - 2009. – 342 с.
- [2] Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 137 с.
- [3] Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина .В. Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 157 с.
- [4] Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи: Учебно-метод.пособие. – М.: РУДН. - 2008. – 72 с.
- [5] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 4 изд. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
- [6] Летников А.И., Пшеничников А.П., Гайдамака Ю.В., Чукарин А.В. Системы сигнализации в сетях с коммутацией каналов и пакетов: Уч. пособие для вузов. – М.: МТУСИ. - 2008. – 195 с.
- [7] Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей: Монография. – М.: РУДН. - 2007. – 191 с.

### **Дополнительная**

- [8] Гольдштейн А.Б., Гольдштейн Б.С. Технология и протоколы MPLS // СПб: БХВ-Петербург 2005. - 304 стр.
- [9] Королькова А.В., Кулябов Д.С., Черноиванов А.И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — № 3. — С. 34–46.

- [10] Наумов В.А. Численные методы анализа марковских систем. Учебное пособие. – М.: РУДН. - 1985. – 36 с.
- [11] Рыков В.В., Самуилов К.Е. К анализу вероятностей блокировок ресурсов сети с динамическими многоадресными соединениями // Электросвязь. – 2000. – № 10. – С. 27-30.
- [12] Boussetta K., Beylot A.-L. Multirate Resource Sharing for Unicast and Multicast Connections // Proc. of 5th FIP Broadband Communications (BC'99, Hong Kong, November 1999). – 1999. – P. 561-570.
- [13] Cisco, Integrated Video Admission Control for the Delivery of Quality Video Experience. White paper. – 2006.
- [14] Clevenot F. and Nain P. A Simple fluid model for the analysis of the squirrel peer-to-peer caching system // Proc. of the IEEE INFOCOM'2004. – 2004. - P. 1-10.
- [15] S.-P. Chung, K.W. Ross, Reduced load approximations for multirate loss networks // IEEE Transaction on communications. – 1993. – Vol. 41.
- [16] Floyd S., Jacobson V. Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Aug. — No. 1(4). — P. 397–413.
- [17] Kaufman J.S. Blocking in a shared resource environment. IEEE Transactions on Communications. 29 (10), 1474–1481 (1981).
- [18] F.P. Kelly, Blocking probabilities in large circuit-switched networks // Advances in Applied Probability. – 1986. – Vol. 18.
- [19] F.P. Kelly, Mathematical models of multiservice networks // Complex Stochastic Systems and Engineering. – Oxford: Oxford University Press. - 1995.
- [20] F.P. Kelly, Reversibility and stochastic network. – Chichester: Wiley. - 1979.
- [21] Kleinrock L., Tewari S. Analytical model for bittorrent-based live video streaming // Proc. of the IEEE CCNC. - 2007. – P. 976-980.
- [22] Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30. — P. 151–160.

- [23] Roberts J.W. A service system with heterogeneous user requirements. In: G. Pujolle (Ed.), *Performance of Data Communications Systems and Their Applications*, North-Holland, Amsterdam. - 1981. - P. 423–431.
- [24] K.W. Ross, Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. – London : Springer-Verlag, 1995.
- [25] Ross K.W., Kumar R., Liu Y. Stochastic fluid theory for P2P streaming systems // Proc. of the IEEE INFOCOM'2007. – 2007. - P. 919-927.
- [26] W. Whitt, Blocking when service is required from several facilities simultaneously // AT&T Tech. J. – 1985. – Vol. 64.

## **Содержание**

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| ОПИСАНИЕ КУРСА И ПРОГРАММА «МУЛЬТИСЕРВИСНЫЕ СЕТИ СВЯЗИ».....       | 3  |
| 1. ОПИСАНИЕ КУРСА «МУЛЬТИСЕРВИСНЫЕ СЕТИ СВЯЗИ» .....               | 5  |
| 2. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ .....                                      | 46 |
| ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ .....                                      | 74 |
| Словарь (глоссарий) основных терминов и понятий .....              | 74 |
| Методические указания для преподавателя, студента, слушателя ..... | 77 |
| Лабораторный практикум по дисциплине.....                          | 77 |
| Описание балльно-рейтинговой системы .....                         | 78 |
| Перечень рефератов и/или курсовых работ по темам.....              | 81 |
| Перечень вопросов итоговой аттестации по курсу .....               | 81 |
| УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ «ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЕЙ» .....   | 87 |
| 1. ОДНОАДРЕСНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ.....                                    | 89 |
| 1.1. Модель сети с одноадресными соединениями.....                 | 89 |
| 1.1.1. Постановка задачи .....                                     | 89 |
| 1.1.2. Стационарное распределение вероятностей состояний.....      | 92 |
| 1.1.3. Вероятности блокировок установления соединений              | 93 |
| 1.2. Методы расчета отдельного звена .....                         | 94 |
| 1.2.1. Постановка задачи .....                                     | 95 |

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.2.2. Алгоритм Кауфмана – Робертса .....                                                                                  | 96  |
| 2. МНОГОАДРЕСНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ .....                                                                                          | 98  |
| 2.1. Модель сети мультивещания.....                                                                                        | 100 |
| 2.1.1. Основные понятия .....                                                                                              | 100 |
| 2.1.2. Пространство состояний и равновесное<br>распределение вероятностей .....                                            | 104 |
| 2.1.3. Вероятностные характеристики модели.....                                                                            | 110 |
| 2.1.4. Рекуррентный алгоритм для сети с одним<br>источником.....                                                           | 114 |
| 2.2. Модель отдельного звена.....                                                                                          | 119 |
| 2.2.1. Построение модели.....                                                                                              | 119 |
| 2.2.2. Вероятностные характеристики .....                                                                                  | 123 |
| 2.2.3. Алгоритм свертки .....                                                                                              | 126 |
| 3. ЭЛАСТИЧНЫЙ ТРАФИК .....                                                                                                 | 129 |
| 3.1. Мультисервисная модель с эластичным трафиком.....                                                                     | 129 |
| 3.1.1. Построение модели.....                                                                                              | 129 |
| 3.1.2. Разбиение пространства состояний модели .....                                                                       | 135 |
| 3.1.3. Свойства подмножеств пространства состояний....                                                                     | 139 |
| 3.1.4. Свойства ненормированных вероятностей состояний<br>.....                                                            | 142 |
| 3.1.5. Рекуррентный алгоритм для расчета<br>ненормированных макровероятностей.....                                         | 144 |
| 3.1.6. Метод расчета вероятностно-временных<br>характеристик .....                                                         | 150 |
| 3.2. Модель разделения ресурсов отдельного звена сети между<br>виртуальными частными сетями с эластичным трафиком<br>..... | 155 |
| 3.2.1. Модели реализации VPN.....                                                                                          | 155 |
| 3.2.2. Метод решения задачи разделения пропускной<br>способности звена мультисервисной сети .....                          | 160 |
| 3.2.3. Численный пример.....                                                                                               | 165 |

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. МОДЕЛЬ МУЛЬТИСЕРВИСНОЙ СЕТИ С «ТРОЙНОЙ УСЛУГОЙ».....                                            | 172 |
| 4.1. Построение модели.....                                                                        | 172 |
| 4.1.1. Мультисервисная модель с одноадресным,<br>многоадресным и эластичным трафиком.....          | 172 |
| 4.1.2. Упрощенная модель с одноадресным,<br>многоадресным и эластичным трафиком.....               | 177 |
| 4.1.3. Подходы к приближенному расчету стационарного<br>распределения вероятностей .....           | 182 |
| 4.1.4. Условное распределение числа блоков эластичных<br>данных .....                              | 185 |
| 4.1.5. Маргинальное распределение состояний<br>одноадресных и многоадресного соединений .....      | 188 |
| 4.1.6. Алгоритм для расчета стационарного распределения<br>вероятностей состояний.....             | 197 |
| 4.2. Упрощенная модель звена сети с одноадресными и<br>многоадресными соединениями .....           | 198 |
| 4.2.1. Модель трафика мультивещания как система с<br>прозрачными заявками.....                     | 198 |
| 4.2.2. Подходы к расчету вероятностей блокировок .....                                             | 210 |
| 4.2.3. Рекуррентный алгоритм расчета нормирующей<br>константы .....                                | 230 |
| 4.2.4. Анализ вероятностных характеристик модели с<br>одноадресным и многоадресным трафиком.....   | 243 |
| 4.3. Анализ модель мультисервисной сети одноадресным,<br>многоадресным и эластичным трафиком ..... | 248 |
| 4.3.1. Алгоритм для модели с одноадресным,<br>многоадресным и эластичным трафиком .....            | 248 |
| 4.3.2. Алгоритм для модели с многоадресным и<br>эластичным трафиком .....                          | 256 |
| 4.3.3. Формулы для расчета вероятностно-временных<br>характеристик модели .....                    | 262 |
| 4.3.4. Модель трафика «тройной услуги».....                                                        | 265 |
| 5. ПРОСЕЯННАЯ НАГРУЗКА .....                                                                       | 270 |

|        |                                                                                                                                                                                               |     |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1.   | Метод просеянной нагрузки .....                                                                                                                                                               | 270 |
| 5.1.1. | Сеть с одноадресными соединениями .....                                                                                                                                                       | 271 |
| 5.1.2. | Сеть мультивещания.....                                                                                                                                                                       | 275 |
| 5.1.3. | Сеть с двумя типами соединений .....                                                                                                                                                          | 276 |
| 5.2.   | Метод Монте-Карло .....                                                                                                                                                                       | 279 |
| 5.2.1. | Постановка задачи .....                                                                                                                                                                       | 280 |
| 5.2.2. | Метод существенной выборки.....                                                                                                                                                               | 281 |
| 5.2.3. | Вычислительные алгоритмы.....                                                                                                                                                                 | 284 |
| 6.     | РАЗВИТИЕ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА.....                                                                                                                                         | 286 |
| 6.1.   | Модель сессий GPRS/GSM с пульсирующим трафиком..                                                                                                                                              | 286 |
| 6.2.   | Модель процесса передачи трафика с регулируемой<br>алгоритмом типа RED динамической интенсивностью<br>потока. Простейшая однопотоковая модель<br>$M   M   1   \langle L, H \rangle   B$ ..... | 299 |
| 6.2.1. | Модель модуля RED .....                                                                                                                                                                       | 301 |
| 6.2.2. | Математическое описание динамических<br>переменных модели.....                                                                                                                                | 304 |
| 6.2.3. | Определение области возникновения<br>автоколебательного режима модема.....                                                                                                                    | 310 |
| 7.     | МОДЕЛИ ОДНОРАНГОВЫХ СЕТЕЙ СВЯЗИ (P2P – СЕТЕЙ).....                                                                                                                                            | 314 |
| 7.1.   | Принципы построения файлообменных и потоковых сетей<br>.....                                                                                                                                  | 314 |
| 7.2.   | Жидкостная модель файлообменной сети.....                                                                                                                                                     | 317 |
| 7.3.   | Принципы вещательного телевидения в одноранговой сети<br>.....                                                                                                                                | 330 |
| 7.4.   | Модель потоковой сети в виде однородной сети массового<br>обслуживания .....                                                                                                                  | 333 |
| 7.5.   | Анализ модели сети с двумя типами пользователей с<br>высокой и с низкой скоростью раздачи видеопотока.....                                                                                    | 344 |

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.6. Аппроксимация нормальным законом вероятности<br>всеобщей передачи ..... | 350 |
| ЛИТЕРАТУРА.....                                                              | 356 |