情報数学 第7回レポート

540322D 高橋裕基

1. $H(X,Y) = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log P(x,y)$

$= -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(y|x)P(x))$

$= -\sum_x \sum_y P(x,y)(\log P(y|x) + \log P(x))$

$= -\sum_x \sum_y P(x,y) \log P(y|x) - \sum_x \sum_y P(x,y) \log P(x)$

$= -\sum_x \sum_y P(x,y) \log P(y|x) + H(X)$

$= -\sum_x \sum_y P(y|x) P(x) \log P(y|x) + H(X)$

$= -\sum_x P(x) \sum_y P(y|x) \log P(y|x) + H(X)$

$= \sum_x P(x) H(Y|X=x) + H(X)$

$= H(Y|X) + H(X)$

2. $I(Y;X) = H(Y) - H(Y|X)$

$= H(Y) - (H(X,Y) - H(X))$

$= H(X) + H(Y) - H(X,Y)$ …㊟

㊟はX, Yについて対称なので, $I(X;Y) = I(Y;X)$

4. $H(Y|X)$は非負であることと1.より,

$H(X) \leq H(X,Y)$

$H(X) - H(X|Y) = I(X;Y)$ 2.より

$= H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$= -\sum_x P(x) \log P(x) - \sum_y P(y) \log P(y) - H(X,Y)$

$= -\sum_x \sum_y P(x,y) \log P(x) - \sum_x \sum_y P(x,y) \log P(y) - H(X,Y)$

$= -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(x)P(y)) + \sum_x \sum_y P(x,y) \log P(x,y)$

$= \sum_x \sum_y P(x,y) \log \left(\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} \right)$ …㊟

$P(x,y) \geq P(x)P(y)$ならば㊟≥ 0

$P(x,y) - P(x)P(y)$

$= P(x)P(y|x) - P(x)P(y)$