Fejér の定理

Theorem. $[-\pi,\pi]$ で定義された関数 f の n 次 Fourier 複素級数の第 n 部分和 $S_nf(x)$ を

$$S_n f(x) = \sum_{k=-r}^{n} c_k e^{ikx}, c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \ (k \in \mathbb{Z})$$

とする.

また, $\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x)$ とする. もし $p \ge 1$ なる p に対して $f \in L^p([-\pi,\pi])$ $(p=\infty$ のときは連続性も仮定) であれば

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n f - f\|_p = 0$$

となる.

Proof. まずは $\sigma_n f$ を積分表示する. c_k の定義に従うと

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ijy} \, dy \right) e^{ijx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k e^{ij(x-y)} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) \, dy$$

と式変形を行うことができる. ただし, $F_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\sum_{j=-k}^k e^{ijt}$ と置いた. F_n は n 次の Fejér 核と呼ばれている.

ここで、 F_n を総和記号を用いずに閉じた形で表示をする。等比数列の和の公式および Euler の公式を

用いると

$$\begin{split} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-ikt} (e^{i(2k+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{-i(k+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \sum_{k=0}^n \left(e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{-i(k+\frac{1}{2})t} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{i\frac{1}{2}t} (e^{i(n+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} - \frac{e^{-i\frac{1}{2}t} (1 - e^{-i(n+1)t})}{1 - e^{-it}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{1}{2}t}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \frac{e^{i(n+1)t} - 2 - e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2i}{(2i)^2 \sin \frac{1}{2}t} \frac{(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t})^2}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 \end{split}$$

と変形される.このことから、次の3つの性質をみたすことがわかる.

(i)
$$F_n(t) \ge 0 \ (t \in \mathbb{R})$$

(ii)
$$||F_n||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 2\pi$$

(iii)
$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) dt = 0 \ (\forall \delta > 0)$$

実際、(i) は、 $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 \ge 0$ より明らか。(ii) は、 $k \in \mathbb{Z}$ が $k \ne 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt = 0$ であり、 $F_n(t) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right) e^{ikt}$ であることよりわかる。(iii) は、 F_n は偶関数であり $\delta < t < \pi$ のとき $\frac{\delta}{2} < \frac{1}{2}t < \frac{\pi}{2}$ から Jordan の不等式から $\sin \frac{1}{2}t \ge \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}t > \frac{\delta}{\pi}$ となり $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 2 \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{n+1}{2}t dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} (\pi - \delta) \to 0 \ (n \to \infty)$

 $\int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) \, dt = 2 \int_{\delta < t < \pi} F_n(t) \, dt \le \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2} \int_{\delta < t < \pi} \sin^2 \frac{n+1}{2} t \, dt = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2} (\pi - \delta) \to 0 \ (n \to \infty)$ $\downarrow 0 \text{ in } \delta.$

 $\sigma_n f - f$ を積分表示して評価していく. また, $1 のとき <math>L^p$ 連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $|y| \le \delta$ のとき $\|f(\cdot - y) - f\|_p < \varepsilon$ をみたすような $\delta > 0$ が存在する. よって

$$\begin{split} \sigma_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) \, dy - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) \, dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) \, dy \\ \|\sigma_n f - f\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - y) - f\|_p \, F_n(y) \, dy \, \left(\because 積分型の \, \text{Minkowski} \, \text{②不等式}\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} \|f(\cdot - y) - f\|_p \, F_n(y) \, dy + 2 \, \|f\|_p \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) \, dy \\ &< \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} F_n(y) \, dy + 2 \, \|f\|_p \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) \, dy \\ &< \varepsilon + 2 \, \|f\|_p \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) \, dy \end{split}$$

となる. ここで, 性質 (iii) より n を十分大きくすれば $2\|f\|_p \int_{\delta<|y|<\pi} F_n(y)\,dy < \varepsilon$ となるから, $\|\sigma_n f - f\|_p < 2\varepsilon$ となり, 1 のときは示された.

 $p=\infty$ のとき f は連続なので, $\|f(\cdot-y)-f\|_\infty$ の値は十分小さくできるから同様に示すことができる.

以上より,定理が示された. ■