L^p における合成積の単位元について

関数 f, g において, 合成積 (畳み込み, convolution) $f * g$ は

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義される. このとき, Young の不等式とよばれる合成積に関する以下の基本的な不等式が成り立つ.

Young の不等式

$1 \leq p, q, r \leq \infty$ が $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ を満たすとする. $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ に対して $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ となり, $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が成り立つ.

ここで, 今回のテーマである合成積の単位元について考える. 合成積の単位元とは, 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $f * e = f$ をみたす $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ のことである.

実はこのような e は $L^p(\mathbb{R})$ の中には存在しないことが知られている. しかしながら単位元のような性質を関数列の極限を考えることで構成できる. これから近似単位元について述べる.

$L^1(\mathbb{R}^n)$ における関数列 $\{k_n\}$ が以下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき, 近似単位または総和核と呼ばれる.

(i) $\displaystyle\sup_{n \geq 1} \|k_n\|_1 < \infty$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} k_n(x)\,dx = 1$.

(iii) 任意の $\delta > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\|x\| \geq \delta} |k_n(x)|\,dx = 0$.

また, 条件 (iv) をみたすとき $\{k_n\}$ は正値核という.

(iv) $k_n \geq 0, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} k_n(x)\,dx = 1 \ (n = 1, 2, \ldots)$.

このとき, 近似単位に関する以下の定理が成り立つ.

近似単位との合成積の L^p 収束

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ とする. また, $\{k_n\}$ を近似単位とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \|k_n * f - f\|_p = 0$$

が成り立つ.

証明. $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$L_n f = k_n * f, \alpha_n = \int_{\mathbb{R}^n} k_n(y)\,dy$$

とする. このとき, MInkowski の不等式より

$$\|L_n f - f\|_p \leq \|L_n f - \alpha_n f\|_p + \|\alpha_n f - f\|_p = \|L_n f - \alpha_n f\|_p + \|f\|_p |\alpha_n - 1|$$

が成り立つ. 右辺の第二項は $n \to \infty$ のとき, 条件 (ii) より 0 に収束する. また

$$L_n f(x) - \alpha_n f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_n(y)(f(x-y) - f(x))\,dy$$

と書けるから, 積分型の Minkowski の不等式より

$$\|L_n f - \alpha_n f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |k_n(y)| \, \|f(\cdot - y) - f\|_p \, dy$$

が成り立つ. ここで, L^p の平行移動連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|x\| < \delta$ のとき $\|f(\cdot - y) - f\|_p < \varepsilon$ をみたす $\delta > 0$ が存在する. この δ に対して

$$I_n = \int_{\|x\|<\delta} |k_n(y)| \, \|f(\cdot - y) - f\|_p \, dy, J_n = \int_{\|x\|\geq\delta} |k_n(y)| \, \|f(\cdot - y) - f\|_p \, dy$$

とすると

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k_n(y)| \, \|f(\cdot - y) - f\|_p \, dy = I_n + J_n$$

となる.

I_n については, 条件 (i) より, ある $K > 0$ が存在して $\|k_n\|_1 < K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となるから

$$I_n < \varepsilon \int_{\|x\|<\delta} |k_n(y)| \, dy \leq K\varepsilon$$

が成り立つ.

J_n については, 条件 (iii) を用いることにより

$$J_n \leq 2 \|f\|_p \int_{\|x\|\geq\delta} |k_n(y)| \, dy \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる.

ゆえに, $\lim_{n\to\infty} \|L_n f - \alpha_n f\|_p = 0$ が示されたので, 定理が示されたことになる. ■

系として, 正値核に関しては条件 (i), (ii) に関しては自動的にみたされているので条件 (iii) をみたすことで近似単位となることがわかる.