Fejérの定理

Theorem. $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 f の n 次 Fourier 複素級数 $S_n f(x)$ を

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \ (k \in \mathbb{Z})$$

とする.

また, $\sigma_n f(x) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x)$ とする. もし $p \geq 1$ なる p に対して $f \in L^p([-\pi, \pi])$ ($p = \infty$ のときは連続) であれば

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n f - f\|_p = 0$$

となる.

Proof. まずは $\sigma_n f$ を積分表示する.c_k の定義に従うと

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} c_j e^{ijx} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ijy}\, dy \right) e^{ijx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} e^{ij(x-y)} \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y)\, dy
\end{aligned}$$

と式変形を行うことができる. ただし, $F_n(t) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} e^{ijt}$ と置いた. F_n は n 次の Fejér 核と呼ばれている.

ここで, F_n を総和記号を用いずに閉じた形で表示をする. 等比数列の和の公式および Euler の公式を

用いると

$$
\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-ikt}(e^{i(2k+1)t}-1)}{e^{it}-1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})t}-e^{-i(k+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t}-e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2i\sin\frac{1}{2}t}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+\frac{1}{2})t}-e^{-i(k+\frac{1}{2})t}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2i\sin\frac{1}{2}t}\left(\frac{e^{i\frac{1}{2}t}(e^{i(n+1)t}-1)}{e^{it}-1}-\frac{e^{-i\frac{1}{2}t}(1-e^{-i(n+1)t})}{1-e^{-it}}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2i\sin\frac{1}{2}t}\left(\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{i\frac{1}{2}t}-e^{i\frac{1}{2}t}}-\frac{1-e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t}-e^{-i\frac{1}{2}t}}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2i\sin\frac{1}{2}t}\frac{e^{i(n+1)t}-2-e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t}-e^{i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2i}{(2i)^2\sin\frac{1}{2}t}\frac{(e^{i\frac{n+1}{2}t}-e^{-i\frac{n+1}{2}}t)^2}{e^{i\frac{1}{2}t}-e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2
\end{aligned}
$$

と変形される. このことから, 次の 3 つの性質をみたすことがわかる.

(i) $F_n(t) \geq 0 \ (t \in \mathbb{R})$

(ii) $\|F_n\|_1 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 2\pi$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|t|<\pi} F_n(t)\,dt = 0 \ (\forall\delta > 0)$

実際, (i) は, $F_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 \geq 0$ より明らか. (ii) は, $k \in \mathbb{Z}$ が $k \neq 0$ のとき $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,dt = 0$ であり, $F_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikt}$ であることよりわかる. (iii) は, F_n は偶関数であり $\delta < t < \pi$ のとき $\dfrac{\delta}{2} < \dfrac{1}{2}t < \dfrac{\pi}{2}$ から Jordan の不等式から $\sin\dfrac{1}{2}t \geq \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{2}t > \dfrac{\delta}{\pi}$ となり

$$
\int_{\delta<|t|<\pi} F_n(t)\,dt = 2\int_{\delta<t<\pi} F_n(t)\,dt \leq \frac{2}{n+1}\cdot\frac{\pi^2}{\delta^2}\int_{\delta<t<\pi}\sin^2\frac{n+1}{2}t\,dt = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{\pi^2}{\delta^2}(\pi-\delta) \to 0 \ (n\to\infty)
$$

よりわかる.

$\sigma_n f - f$ を積分表示して評価していく. また, $1 < p < \infty$ のとき L^p 連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $|y| \leq \delta$ のとき $\|f(\cdot - y) - f\|_p < \varepsilon$ をみたすような $\delta > 0$ が存在する. よって

$$
\begin{aligned}
\sigma_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)F_n(x-y)\,dy - f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)F_n(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y)-f(x))F_n(y)\,dy \\
\|\sigma_n f - f\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - y) - f\|_p F_n(y)\,dy \ (\because \text{積分型の Minkowski の不等式}) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\leq\delta} \|f(\cdot - y) - f\|_p F_n(y)\,dy + 2\|f\|_p\int_{\delta<|y|<\pi} F_n(y)\,dy \\
&< \varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{|y|\leq\delta} F_n(y)\,dy + 2\|f\|_p\int_{\delta<|y|<\pi} F_n(y)\,dy \\
&< \varepsilon + 2\|f\|_p\int_{\delta<|y|<\pi} F_n(y)\,dy
\end{aligned}
$$

となる. ここで, 性質 (iii) より n を十分大きくすれば $2\|f\|_p \int_{\delta<|y|<\pi} F_n(y)\,dy < \varepsilon$ となるから, $\|\sigma_n f - f\|_p < 2\varepsilon$ となり, $1 < p < \infty$ のときは示された.

$p = \infty$ のとき f は連続なので, $\|f(\cdot - y) - f\|_\infty$ の値は十分小さくできるから同様に示すことができる.

以上より, 定理が示された. ■