コラム：複利計算と72の法則

Twitter ID：@yamak0523

2022年7月1日

金融機関にお金を複利方式で積み立てる際に, 積立合計金額がどのように推移していくかについて考えよう.

今、初期の口座の預金額を a 円, 年利 $100r\%$, n 年後の積立合計金額を a_n 円とする. このとき, 1 年後に受け取る利息は ar 円より, $a_1 = a(1+r)$ 円となる. また, 2 年後に受け取る利息は $ar(1+r) = a(r+r^2)$ 円より, $a_2 = a(1+2r+r^2) = a(1+r)^2$ 円となる.

同様にして, n 年後に受け取る利息は $ar(1+r)^{n-1}$ 円より, $a_n = a(1+r)^{n-1} + ar(1+r)^{n-1} = a(1+r)^n$ 円となる.

ここで, 次のようなモデルについて考えよう.

> a 円を年利 100%, 1 年間の n 等分したタイミングで n 回積立を行う.(この際, 年利も n 等分される.)

このとき, 1 年後の積立合計金額は $a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 円となる. ここで, 仮に $n \to \infty$ とすると, 積立合計金額の極限は ae 円となる. ここで, Napier 数の e が出てくるのである.

複利計算に関連して, **72 の法則**という経済学上のある法則がある. それについて考えよう. 72 の法則とは以下の主張である.

> 年利 $r\%$でで複利方式で積立を行うとき, 積立合計金額が元本の 2 倍となる年数を n とすると $nr \fallingdotseq 72$ が成り立つ.

この事実を簡単に確認していこう. まず, 仮定から $\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n = 2$ が成り立つとすると, 両辺, 自然対数を取り, $\log(1+x)$ の Maclauren 展開を行うことにより

$$\log 2 = n\log\left(1+\frac{r}{100}\right) = n\left\{\frac{r}{100} - \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{100^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{100^3} - \cdots\right\} \fallingdotseq \frac{nr}{100}$$

より, $nr = 100\log 2 \fallingdotseq 69.3$ となるが, 69.3 よりも扱いやすく, 多くの約数を持つ 72 を代わりに用いて, $nr \fallingdotseq 72$ とみなす.

実際に, シミュレーションをしてみよう. 元金を 100 万円とし, 年利 6%とする. このとき, 72 の法則では元金が 2 倍の 200 万円になるのには 12 年かかることになるが, 実際にはどうなのか積立合計金額の推移を表にしてみた.

年	積立合計金額 [円]
0	1,000,000
1	1,060,000
2	1,123,600
3	1,191,016
4	1,262,476
5	1,338,225
6	1,418,519
7	1,503,630
8	1,593,848
9	1,689,478
10	1,790,847
11	1,898,298
12	2,012,196
13	2,132,928

表によると確かに 72 の法則が成り立つことがわかる. 当然ではあるが、72 の法則はあくまで厳密な関係式ではないが, ひとつの参考にはなる法則ではあることには間違いがないので, 覚えておいて損はないのではないだろうか.