熱方程式の解の形式的に求める

次の熱方程式 (HE), (GHE)

$$\text{(HE)}\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) & ((x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,\infty)) \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

$$\text{(GHE)}\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t) & ((x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,\infty)) \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

について考える.

Fourier 変換 $\mathscr{F}$, 逆 Fourier 変換 $\mathscr{F}^{-1}$ を

$$(\mathscr{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx, (\mathscr{F}^{-1}u)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

とする. このとき, 合成積 $u * v$ に対して $\mathscr{F}(u*v) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathscr{F}u)(\mathscr{F}v), \mathscr{F}^{-1}(uv) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\mathscr{F}^{-1}u)*(\mathscr{F}^{-1}v)$ が成り立つ. また, 微分に関して $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}\mathscr{F}u = -i\xi_j \mathscr{F}u$ が成り立つ.

また, n 次元の熱核 (Gauss-Weierstrass 核) $G_n(x,t)$ を $G_n(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ $((x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,\infty))$ と定義する.

(GHE) の 2 つの等式を Fourier 変換することで, t に関する次の常微分方程式 (FGHE)

$$\text{(FGHE)}\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathscr{F}u)(\xi,t) = -|\xi|^2(\mathscr{F}u)(\xi,t) + (\mathscr{F}f)(\xi,t) & ((\xi,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,\infty)) \\ (\mathscr{F}u)(\xi,0) = (\mathscr{F}u_0)(\xi) & (\xi \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

が得られる. これを解くと

$$(\mathscr{F}u)(\xi,t) = (\mathscr{F}u_0)(\xi) e^{-|\xi|^2 t} + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} (\mathscr{F}f)(\xi,s)\, ds$$

となる. よって, 両辺逆 Fourier 変換を施すと

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(u_0 * (\mathscr{F}^{-1}e^{-|\cdot|^2 t}))(x,t) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^t ((\mathscr{F}^{-1}e^{-(t-s)|\cdot|^2}) * f(\cdot,s))(x,s)\, ds \\ &= (G_n * u_0)(x,t) + \int_0^t (G_n(\cdot,t-s) * f(\cdot,s))(x,s)\, ds \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} f(y,s)(4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, dy\, ds \end{aligned}$$

となる. よって, (GHE) の解が形式的に得られた. $f = 0$ とすると, (HE) の解も得られる. ■