

Fourier 級数の初歩

山 K

記法

ここには本書で登場する基本的な記号などの定義を載せておく.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq [-\pi, \pi) \text{ } ([-\pi, \pi) \text{ を基本区間とする周期 } 2\pi \text{ の周期関数の定義域として使用})$$

$$C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } X \text{ 上連続.}\}$$

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0.\}}$$

$$C_0(X) = \{f \in C(X) \mid \text{supp } f \text{ は compact.}\}$$

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 \mid |f(x)| \leq \alpha \text{ a.e.}\} < \infty.\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T}))$$

目次

記法	ii
第 1 章 Fourier 級数の歴史的経緯	1
第 2 章 Fourier 級数の定義と簡単な性質	2
2.1 係数 a_n, b_n, c_n を形式的に求める	2
2.2 Fourier 級数の例	4
第 3 章 Fourier 級数と L^2 最良近似	6
3.1 L^2 最良近似問題	6
3.2 Bessel の不等式	7
第 4 章 Fourier 級数の収束	9
4.1 各点収束性	9
4.2 一様収束性	14
第 5 章 Fourier 級数の Cesàro 和	16
5.1 関数の L^p 連続性と積分型の Minkowski の不等式	16
5.2 Fejér 核と L^p 収束	18
第 6 章 Fourier 級数の完全性	21

第 1 章

Fourier 級数の歴史的経緯

Fourier 級数とは, 三角関数による級数展開であり, フランスの熱力学者 Fourier が, 『熱の解析的理論』(1822) 内で

「任意の (周期) 関数は, 三角関数の和で表現できる。」

と主張したことから始まった. ここで, 周期は一般に正の数 T でよいが, ここでは周期 2π , 基本区間を $[-\pi, \pi)$ とする.

三角関数による級数とは, $\sin nx, \cos nx$ による級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$$

あるいは, 複素指数関数 e^{inx} による級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (c_n \in \mathbb{C})$$

のことである.

ここで, Fourier について簡単に紹介しておこう. Fourier は 1768 年 3 月 21 日にフランスのヨンヌ県で生まれる. 陸軍幼年学校に入学後, 数学に興味を持ち勉強に没頭した. Fourier は 1794 年にエコール・ノルマル・シュペリユールに入学し, 後に才能を認められ解析数学の教授になった. Fourier は熱力学を研究している際に, ある固体内の温度分布が熱伝導方程式に従うことを発見し, その解を求める際に上述のとおり三角級数を用いて解を導いた. 1830 年 5 月 16 日にパリで没した.



図 1.1 Joseph Fourier (1768-1830)

Fourier が解析学に与えた影響は大きく, 特にこの Fourier 解析学を厳密に理論立てていく中で「収束性」関連の概念が発達していったのである.

第2章

Fourier 級数の定義と簡単な性質

ここでは、適当な (都合のいい) 関数 $f(x)$ ($-\pi \leq x < \pi$) が「もし」

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.1)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (2.2)$$

と表現できたときに、係数 a_n, b_n, c_n を $f(x)$ を用いて表せないか考える.

2.1 係数 a_n, b_n, c_n を形式的に求める

まずは、基本的な三角関数の直交性とも呼べる次の性質を補題として挙げておく.

補題 2.1. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 2\pi & (n = 0) \end{cases}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. また、 δ_{mn} は Kronecker の δ であり、 $m = n$ のとき 1、 $m \neq n$ のとき 0 である.

証明. 最初の 2 つの積分はすぐに求められる. 三角関数の積の形の積分は、積和の公式

$$\begin{aligned} \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \}, \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \}, \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} \{ \sin(m+n)x + \sin(m-n)x \} \end{aligned}$$

を用いると補題を示すことができる. □

この補題を用いて、係数 a_n, b_n, c_n を形式的に求めていく. ただし、積分と級数の順序交換などは認めるものとする (形式的に求める).

係数 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は、(2.1) の両辺に $\cos nx$ をかけて積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n$$

より

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

となる. 同様に, 係数 b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は, (2.1) の両辺に $\sin nx$ をかけて積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \pi b_n$$

より

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

となる. 係数 c_n は, $n \in \mathbb{N}$ のときは Euler の公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ に $\theta = nx$ を代入し, 実部と虚部を考えることで得られる等式

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

を (2.1) の両辺に代入することで

$$f(x) = \frac{a_0}{2} e^{i0x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{i(-n)x} \right)$$

となるから,

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & (n = 1, 2, 3, \dots), \\ \frac{a_0}{2} & (n = 0), \\ \frac{a_{|n|} + ib_{|n|}}{2} & (n = -1, -2, -3, \dots) \end{cases}$$

のように, a_n, b_n を用いて表すことができる. 後は a_n, b_n の積分表示を利用することで最終的に

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となる.

よって, **Fourier 係数** (Fourier coefficient) および **Fourier 級数** (Fourier series) を次のように定義する.

定義 2.2. $f \in L^1(\mathbb{T})$ のとき, **Fourier 余弦係数** (Fourier cosine coefficients) a_n , **Fourier 正弦係数** (Fourier sine coefficient) b_n , 複素 **Fourier 係数** (complex Fourier coefficient) c_n を

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.4)$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.5)$$

で定義する. また, **Fourier 級数** (Fourier series) $S[f](x)$ および Fourier 級数の第 N 部分和 (N -th partial sum) $S_N[f](x)$ を

$$S[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.6)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (2.7)$$

$$S_N[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.8)$$

$$= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \quad (2.9)$$

で定義する. このとき

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と表記する. ここで, 「 $=$ 」ではなく「 \sim 」を用いているのは, あくまでこの級数は形式的なものであり, 元の $f(x)$ に等しいことや, そもそも収束するかどうかすら現時点では不明であるからである.

次に Fourier 係数の簡単な性質を定理として確認していく.

定理 2.3. $f \in L^1(\mathbb{T})$ の Fourier 係数 a_n, b_n, c_n について以下の (i) ~ (iii) が成り立つ.

- (i) 関数を Fourier 係数に写す写像は線形性を保つ.
- (ii) $f(x)$ が偶関数のとき,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx, b_n \equiv 0$$

であり, $f(x)$ が奇関数のとき,

$$a_n \equiv 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

である.

- (iii) $f(x)$ が実数値関数のとき, $c_{-n} = \overline{c_n}$ が成り立つ.

証明. 簡単である.

- (i) 明らか.
- (ii) 積分区間の対称性より明らか.
- (iii) c_n の定義式より明らか.

□

2.2 Fourier 級数の例

定理 2.3(ii) のとき, $f(x)$ の偶奇で Fourier 係数および Fourier 級数が従来より簡略化される. 簡略された級数にも名前がついているので定義でまとめておく.

定義 2.4. $f(x)$ を周期 2π の可積分周期関数とする.

- (i) $f(x)$ が偶関数のとき, 定理 2.3(ii) より $b_n \equiv 0$ であるから

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$$

となる. この右辺の級数を **Fourier 余弦級数** (Fourier cosine series) という.

- (ii) $f(x)$ が奇関数のとき, 定理 2.3(ii) より $a_n \equiv 0$ であるから

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

となる. この右辺の級数を **Fourier 正弦級数** (Fourier sine series) という.

例 2.5. Fourier 級数の例として 3 つの簡単な関数を考える. ここでは, $f(x) = x, g(x) = x^2, h(x) = |x|$ を考える. ただし, 関数は $[-\pi, \pi)$ 上で考え, 周期 2π で, それ以外の範囲に拡張するものとする.

$f(x)$ は奇関数より, $a_n \equiv 0$ であり

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

となる. よって

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

が成り立つ.

$g(x)$ は偶関数より, $b_n \equiv 0$ であり

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる. よって

$$g(x) \sim \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

が成り立つ.

$h(x)$ は偶関数より, $b_n \equiv 0$ であり

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる. よって

$$h(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

が成り立つ. ここで, $[-\pi, \pi]$ の範囲で $f(x)$ と $S_{10}[f](x)$, $g(x)$ と $S_{10}[g](x)$, $h(x)$ と $S_{10}[h](x)$ をそれぞれ重ねて比較してみる. ここで, 青色の曲線が元の関数で, 赤色の曲線が Fourier 級数の部分和である.

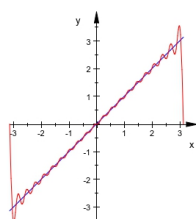


図 2.1 $f(x)$ と $S_{10}[f](x)$

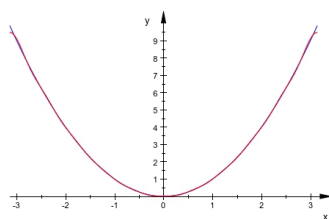


図 2.2 $g(x)$ と $S_{10}[g](x)$

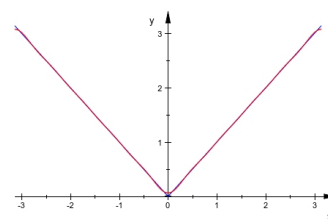


図 2.3 $h(x)$ と $S_{10}[h](x)$

第 10 部分和しか考えていないのに, Fourier 級数の部分和が元の関数に十分近似できていそうな雰囲気がこの 3 つの関数の例で読み取ることができる. しかし, 図 2.1 の $x = -\pi, \pi$ 付近に注目すると $S_{10}[f](x)$ が $f(x)$ からだんだんと大きく振動しているようにみえる. 実は「元の関数の不連続点の近傍ではその Fourier 級数は無限に上下に振動する」という事実が知られており, これを **Gibbs 現象** (Gibbs phenomena) という.

例 2.6. $\alpha \notin \mathbb{Z}$ に対して $\cos \alpha x$ の Fourier 級数を求める. $\cos \alpha x$ は偶関数であるから, $b_n \equiv 0$ である. また, a_n は

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x dx = \frac{2 \sin \pi \alpha}{\pi \alpha}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{2(-1)^n \alpha \sin \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

となる. よって

$$\cos \alpha x \sim \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha \sin \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \quad (\alpha \notin \mathbb{Z})$$

となる.

第3章

Fourier 級数と L^2 最良近似

この章では、元の実数値周期関数を三角多項式で L^2 の意味で近似しようとしたときに、最良近似を与える三角多項式が、実は Fourier 級数の部分和であることを示す。また、関連する話題として Bessel の不等式および、それ自体重要な Riemann-Lebesgue の定理を証明する。

3.1 L^2 最良近似問題

早速ではあるが、 L^2 最良近似問題とは何か具体的に説明する。

L^2 最良近似問題

$[-\pi, \pi)$ 上で定義され、かつ周期 2π で実数全体に拡張された与えられた実数値周期関数 $f(x)$ (つまり実数値な $f \in C(\mathbb{T})$) を、 L^2 ノルムの意味でもっともよく近似する三角多項式 $T_N(x)$ が

$$T_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

と表されるとき、 $T_N(x)$ はどのような三角多項式か。

というのが L^2 最良近似問題である。地道に計算をしていくとこの問題の解答を得ることがわかる。ここでは、先にこの問題の解答を定理として述べてから、証明をするという流れをとることとする。

定理 3.1. 実数値をとる $f \in L^2(\mathbb{T})$ を L^2 ノルムの意味で、もっともよく近似する三角多項式 $T_N(x)$ は、 $T_N(x) \equiv S_N[f](x)$ である。

証明. 証明そのものは易しいが、証明を行うことで、ある重要な不等式が登場するため、証明を省略しないで行う。

$f(x), T_N(x)$ を定理 3.1 のものとする。ここで

$$T_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad (\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R})$$

と表されているとする。このとき、 $\|f - T_N\|_2^2$ を展開すると

$$\|f - T_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\langle f, T_N \rangle + \|T_N\|_2^2$$

となる。ここで三角関数の直交性を用いることにより

$$\begin{aligned} \langle f, T_N \rangle &= \frac{\pi}{2} a_0 \alpha_0 + \pi \sum_{n=1}^N (a_n \alpha_n + b_n \beta_n), \\ \|T_N\|_2^2 &= \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 + \pi \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2), \\ \|S_N[f]\|_2^2 &= \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

となる. よって, $-2\langle f, T_N \rangle + \|T_N\|_2^2$ に代入して整理すると

$$\begin{aligned} -2\langle f, T_N \rangle + \|T_N\|_2^2 &= \frac{\pi}{2}(a_0^2 - 2a_0\alpha_0) + \pi \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 - 2a_n\alpha_n + \beta_n^2 - 2b_n\beta_n) \\ &= \frac{\pi}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{n=1}^N \{(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2\} - \|S_N[f]\|_2^2 \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\|f - T_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{n=1}^N \{(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2\} - \|S_N[f]\|_2^2$$

$\alpha_n \equiv a_n, \beta_n \equiv b_n$ のとき, つまり $T_N(x) \equiv S_N[f](x)$ のときが, L^2 の意味で $f(x)$ の最良近似を与える三角多項式であることがわかる. \square

ちなみに f が複素数値の場合も複素 Fourier 級数を用いて同様に示すことができる. 実際, $T_N(x) = \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{inx}$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (T_N(x) - f(x)) \overline{(T_N(x) - f(x))} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x)|^2 dx - 2 \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{T_N(x)} dx \right) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{n,m=-N}^N \gamma_n \overline{\gamma_m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx - 2 \sum_{n=-N}^N \operatorname{Re} \left(\overline{\gamma_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &= 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2 - 4\pi \sum_{n=-N}^N \operatorname{Re}(\overline{\gamma_n} c_n) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &= 2\pi \sum_{n=-N}^N |\gamma_n - c_n|^2 - 2\pi \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

となる. ゆえに, 求める T_N は $\gamma_n \equiv c_n$ つまり $T_N(x) \equiv S_N[f](x)$ であることが示された.

ここで, $T_N(x) = S_N[f](x)$ のとき, 定理 3.1 の証明から $\|f\|_2^2 = \|f - S_N[f]\|_2^2 + \|S_N[f]\|_2^2$ が成り立つことがわかる. この等式は Pythagoras の定理であり, $f = (f - S_N[f]) + S_N[f]$ と合わせて考えると $L^2(\mathbb{T})$ 内の $f(x)$ の直交分解となることがわかる.

3.2 Bessel の不等式

前節の最後に定理 3.1 の証明から, $\|f\|_2^2 = \|f - S_N[f]\|_2^2 + \|S_N[f]\|_2^2$ が得られることを確認した. この等式から次の重要な不等式が得られる.

定理 3.2 (Bessel の不等式). $f \in C(\mathbb{T})$ に対して **Bessel の不等式**

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, a_n, b_n, c_n は $f(x)$ の Fourier 係数である.

証明. $\|f\|_2^2 = \|f - S_N[f]\|_2^2 + \|S_N[f]\|_2^2$ が, 任意の $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成り立つことに注意すると, $\|f - S_N[f]\|_2^2 \geq 0$ より $\|f\|_2^2 \geq \|S_N[f]\|_2^2$ が成り立つことがわかる. 今, $f(x)$ は連続であり, $[-\pi, \pi)$ 上で 2 乗可積分なので $\|f\|_2 < \infty$ であるから, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N[f]\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$ が成り立つ. ここで

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N[f]\|_2^2 = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

を代入して整理すると不等式が示される. \square

今示した Bessel の不等式を用いることで、それ自身非常に重要で興味深い **Riemann-Lebesgue の定理**を簡単に示すことができる。

定理 3.3 (Riemann-Lebesgue の定理). $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{\pm inx} \, dx = 0$$

が成り立つ。

証明. 複素 Fourier 係数の場合のみ示す。 $f \in C(\mathbb{T})$ の場合は、 $f(x)$ の Fourier 係数 a_n, b_n, c_n は Bessel の不等式をみたし、 $\|f\|_2 < \infty$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\pm n} = 0$ となる。あとは Fourier 係数の定義式を用いればよい。

一般の $f \in L^1(\mathbb{T})$ の場合は、まず単関数の場合に定理が成り立つことを示してから一般の場合を示す。

$s(x) = \chi_{[a,b)}(x)$, $[a, b) \subset [-\pi, \pi)$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{inx} \, dx = \int_a^b e^{inx} \, dx = \frac{e^{inb} - e^{ina}}{in} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。ゆえに線型結合である単関数の場合も定理が成り立つ。次に、一般の $f \in L^1(\mathbb{T})$ の場合を示す。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f - s\|_1 < \varepsilon$ をみたす単関数 s が存在する。このとき

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx \right| \leq \|f - s\|_1 + \left| \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{inx} \, dx \right|$$

となる。ここで n を十分大きく取れば第 2 項が ε でおさえられる。よって、十分大きな n に対して $\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx \right| \leq 2\varepsilon$ となるから定理が示された。 \square

第 4 章

Fourier 級数の収束

この章では, Fourier 級数の収束性について述べて証明を行う.

4.1 各点収束性

定義 4.1 (Dirichlet 核). 非負整数 n に対して, **Dirichlet 核** (Dirichlet kernel) $D_n(t)$ を $D_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$ で定義する.

補題 4.2. Dirichlet 核 D_n は以下の性質がなりたつ.

- (i) $D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt$.
- (ii) $D_n(t)$ は偶関数.
- (iii) $D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$.
- (iv) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi, \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \pi$.

証明. (i) $k \in \mathbb{N}$ に対して, Euler の公式より $\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$ であるから, $D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt$ となる.

(ii) 定義または (i) より明らか.

(iii) 初項 e^{-int} , 公比 e^{it} , 項数 $2n+1$ の等比数列の和であるから

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{e^{-int}(e^{i(2n+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{2i} \frac{2i}{e^{\frac{1}{2}it} - e^{-\frac{1}{2}it}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

となる.

(iv) 1 つめの積分等式は定義式または (i) より明らか. 残りの等式は (ii) より明らか.

□

定理 4.3 (積分の第 2 平均値の定理). ϕ, ψ を $[a, b]$ 上の実数値関数とする. また $[a, b]$ 上で ϕ は単調で右連続, ψ を連続とする. このとき, ある $\eta \in [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x) dx = \phi(a) \int_a^{\eta} \psi(x) dx + \phi(b) \int_{\eta}^b \psi(x) dx$$

が成り立つ.

証明. ϕ が定数のときは両辺が等しくなるので, $\phi(x)$ は定数ではないと仮定する. さらに $\phi(x) - \phi(a)$ とすることではじめから $\phi(a) = 0$ としてよく, また, ϕ が単調減少のときは $-\phi$ を考えればよいので $\phi(x)$ は単調増加とする.

ここで, $\Psi(x) = \int_x^b \psi(t) dt$ とすると, $\Psi'(x) = -\psi(x)$ である. また, 部分積分より

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x) dx = \left[-\phi(x)\Psi(x) \right]_a^b + \int_a^b \Psi(x) d\phi = \int_a^b \Psi(x) d\phi$$

となる. ここで, $\phi(a) = \Psi(b) = 0$ であることを用いた. $\Psi(x)$ の $[a, b]$ 上における最小値および最大値をそれぞれ m, M とすると, $\int_{(a,b]} d\phi = \phi(b) - \phi(a) = \phi(b)$ より

$$m\phi(b) \leq \phi(b) \int_a^b \Psi(x) d\phi \leq M\phi(b)$$

となるから, 積分の平均値の定理より, $\phi(b) \int_a^b \Psi(x) d\phi = \phi(b)\Psi(\eta)$ をみたす $\eta \in (a, b)$ が存在する. これで定理が示された. \square

補題 4.4. ある定数 C が存在して, 任意の非負整数 m および任意の $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ に対して

$$\left| \int_a^b D_m(x) dx \right| \leq C$$

が成り立つ.

証明. まず, 補題 4.2(iii) を用いて

$$\int_a^b D_m(x) dx = \int_a^b \sin(2m+1)x \left(\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx + \int_a^b \frac{\sin(2m+1)x}{x/2} dx$$

のように変形する. 第1項については, $|\sin(2m+1)x| \leq 1$ であり, $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ とすると $g(t)$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上有界である. 実際, $t \rightarrow 0$ のとき $g(t)$ は, l'Hospital の定理を繰り返し用いることで $g(t) \rightarrow 0$ であることがわかり, 他の点では連続であることから有界性が従う. ゆえに第1項の絶対値は m によらない定数でおさえることができる. 第2項は $y = (2m+1)x$ とすると

$$\int_a^b \frac{\sin(2m+1)x}{x/2} dx = 2 \int_{(2m+1)a}^{(2m+1)b} \frac{\sin y}{y} dy = 2\{\text{Si}((2m+1)b) - \text{Si}((2m+1)a)\}$$

となる. ここで, $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ である. $\text{Si}(x)$ は連続で, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{Si}(x) = \pm \frac{\pi}{2}$ より $\text{Si}(x)$ は有界である. 以上より定理は示された. \square

定義 4.5. (有界変動関数) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, **全変動関数** (total variation function) $T_f(x)$ を

$$T_f(x) = \sup_{-\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_n = x} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

で定義する. また, $[a, b]$ における**全変動** (total variation) $V_{[a,b]}(f)$ を

$$V_{[a,b]}(f) = T_f(b) - T_f(a) = \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

で定義する. また集合 $BV, BV([a, b])$ を

$$BV = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid T_f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_f(x) < \infty\}, BV([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid V_{[a,b]}(f) < \infty\}$$

で定義する. $f \in BV$ のとき, f は \mathbb{R} 上で**有界変動** (bounded variation) であるといい, $f \in BV([a, b])$ のとき, f は $[a, b]$ 上で有界変動であるという.

定理 4.6 (Jordan 分解). 任意の右連続な $f \in BV$ に対して $f = g - h$ となるような単調増加な関数 g, h が存在する.

証明. $g(x) = \frac{1}{2}(T_f(x) + f(x)), h(x) = \frac{1}{2}(T_f(x) - f(x))$ とすると, $f(x) = g(x) - h(x)$ がなりたつ. この g, h に対して単調性を示す.

まずは単調性を示す. 今, $x < y$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$T_f(x) - \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \varepsilon$$

となる分割 $-\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ が存在する. この不等式は, $\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| > T_f(x) - \varepsilon$ と変形される. よって

$$T_f(y) \pm f(y) \geq \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(y) - f(x)| \pm (f(y) - f(x)) \pm f(x) > T_f(x) - \varepsilon \pm f(x)$$

となり, ε は任意であるから単調増加であることが示された. \square

補題 4.7. $f(x)$ が右連続のとき, $T_f(x)$ も右連続である.

証明. 与えられた $x \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha = T_f(x+) - T_f(x)$ として $\alpha = 0$ を示せばよい.

任意の ε に対して, $0 < h < \delta$ のとき, $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon, T_f(x+h) - T_f(x+) < \varepsilon$ をみたすような $\delta > 0$ が存在する. また, どのような h に対して

$$\{T_f(x+h) - T_f(x)\} - \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \frac{1}{4}\{T_f(x+h) - T_f(x)\}$$

つまり

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4}\{T_f(x+h) - T_f(x)\}$$

をみたすような $x = x_0 < \dots < x_n = x+h$ が存在する. このとき, $\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4}\alpha$ が成り立つ. よって

$$\sum_{j=2}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4}\alpha - |f(x_1) - f(x_0)| \geq \frac{3}{4}\alpha - \varepsilon$$

となる.

同様に, $\sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| \geq \frac{3}{4}\alpha$ となるような $x = t_0 < \dots < t_m = x_1$ が存在する. よって

$$\begin{aligned} \alpha + \varepsilon &> T_f(x+h) - T_f(x) \\ &= \{T_f(x+h) - T_f(x_1)\} + \{T_f(x_1) - T_f(x)\} \\ &\geq \sum_{j=2}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &\geq \left(\frac{3}{4}\alpha - \varepsilon\right) + \frac{3}{4}\alpha \\ &= \frac{3}{2}\alpha - \varepsilon \end{aligned}$$

となるから, $\alpha < 4\varepsilon$ となる. $\alpha \geq 0$ で, $\varepsilon > 0$ は任意より $\alpha = 0$ となる. これで定理が示された. \square

定理 4.8 (Dirichlet). $f \in BV(\mathbb{T})$ ならば

$$S[f](x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m[f](x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. 特に f が x において連続であるときは

$$S[f](x) = f(x)$$

が成り立つ.

証明. 各点収束する点について f の平行移動を考えることにより, はじめから $x = 0$ としてよい. また, $f(t)$ のかわりに $f(t+)$ を考えても, 示す等式の左辺右辺ともに影響はない. $f(t+)$ は右連続であるため, はじめから f は右連続であると仮定してよく, さらにこのとき定理 4.6, 補題 4.7 より f は単調増加な右連続関数であるとして示してよい.

まずは, 補題 4.2 を用いて $S_m[f]$ を積分を用いて表現すると

$$\begin{aligned}
 S_m[f](x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \\
 &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(-s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds
 \end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
 S_m[f](0) - \frac{f(+0) + f(-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(s) D_n(s) ds - \frac{1}{2\pi} f(+0) \int_0^{\pi} D_n(s) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(s) D_n(s) ds - \frac{1}{2\pi} f(-0) \int_{-\pi}^0 D_n(s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(s) - f(+0)) D_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(s) - f(-0)) D_n(s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_+(s) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 g_-(s) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds
 \end{aligned}$$

と変形することができる. ここで右辺の第 1 項について考える. f が右連続であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対してある十分小さな $\delta > 0$ が存在して $f(\delta) - f(+0) < \frac{2\pi\varepsilon}{C}$ となる. ここで, 定数 C は補題 4.4 の C である. また, 積分範囲を $[0, \delta], [\delta, \pi]$ に分割する.

最初に $[0, \delta]$ 上の積分を考える. 定理 4.3 よりある $\eta \in [0, \delta]$ が存在して

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} (f(x) - f(+0)) D_m(x) dx \right| = \frac{1}{2\pi} (f(\delta) - f(+0)) \left| \int_{\eta}^{\delta} D_m(x) dx \right| < \varepsilon$$

となる.

次に $[\delta, \pi]$ 上の積分について考える. 関数 g_{\pm} を

$$g_{\pm}(x) = \frac{(f(x) - f(+0))e^{\pm i\frac{x}{2}}}{2i \sin(x/2)} \chi_{[\delta, \pi)}(x) \text{ (複号同順)}$$

とし, g_{\pm} の複素 Fourier 係数を c_n^{\pm} とする. このとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} (f(x) - f(+0)) D_m(x) dx = c_{-m}^{+} - c_m^{-}$$

であり, $g_{\pm} \in L^1(\mathbb{T})$ であるから定理 3.3 より $c_{\mp m}^{\pm} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) である. ただし複号同順とする.

以上より

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x) - f(+0)) D_m(x) dx \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta (f(x) - f(+0)) D_m(x) dx \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{\frac{1}{2}} (f(x) - f(+0)) D_m(x) dx \right| \end{aligned}$$

から

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x) - f(+0)) D_m(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

となる. 同様の議論をすることによりに

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x) - f(-0)) D_m(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

も得られるから, 定理は示された. \square

例 4.9. 例 2.5 で扱った (周期 2π の) 関数 $f(x) = x, g(x) = x^2, h(x) = |x|$ の Fourier 級数はそれぞれ

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, g(x) \sim \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, h(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

である. \mathbb{R} において $f(x)$ は π の整数倍のところで不連続あり $g(x), h(x)$ は連続である. よって

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \quad (x \notin \pi\mathbb{Z}) \\ g(x) &= \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (x \in \mathbb{R}) \\ h(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで例えば $x = \pi$ は $f(x)$ の不連続点であるが, $S[f](\pi) = 0 = \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2}$ となっていることに注意する.

また, $x = \frac{\pi}{2}$ を $f(x)$ の Fourier 級数に代入すると

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

より Leibniz 級数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

が得られる.

また, $x = \pi$ を $g(x)$ の Fourier 級数に代入すると

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

より

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

が得られる.

例 4.10. 例 2.6 で求めた Fourier 級数についても考える.

$$\cos \alpha x \sim \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sin \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \quad (\alpha \notin \mathbb{Z})$$

$\cos \alpha x$ は \mathbb{R} 上で連続なので

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sin \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \quad (\alpha \notin \mathbb{Z})$$

が成り立つ. 今, 両辺に $x = \pi$ を代入すると

$$\cos \pi \alpha = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \sin \pi \alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

となる. 両辺を $\sin \pi \alpha$ で割り, π をかけると

$$\pi \cot \pi \alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

が得られる. これは α を変数とみると $\pi \cot \pi \alpha$ の部分分数展開になっていることがわかる.

4.2 一様収束性

定義 4.11 (区分的に連続, 区分的に滑らか). 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で**区分的に連続** (piecewise continuous) であるとは, 有限個の点 $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ が存在して, $f(x)$ は各 (a_{j-1}, a_j) ($j = 1, \dots, n$) で連続であり, $f(a_{j-1} + 0), f(a_j - 0)$ が有限値として存在することをいう.

また, 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で**区分的に滑らか** (piecewise smooth) であるとは, $f(x), f'(x)$ が $[a, b]$ 上で区分的に連続であることをいう.

定理 4.12 (Fourier 級数の完全性). $f(x)$ は周期 2π をもつ周期関数で $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx = 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) をみたすならば, $f(x)$ は連続点 x_0 で $f(x_0) = 0$ であり, 特に f が $[-\pi, \pi]$ 上で連続ならば $f(x) \equiv 0$ である.

証明. 第 6 章で示すため略. □

定理 4.13. $f(x)$ は \mathbb{T} 上で区分的に滑らかならば, $f(x)$ の Fourier 級数は $f(x)$ に一様収束する.

証明. $f'(x)$ の複素 Fourier 係数を c'_n で表すことにする. $f'(x)$ は区分的に連続だから, 定理 3.2 より (連続でなくても区分的に連続であればよい)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$$

であり, c'_n を c_n を用いて表すと

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(x)e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \\ &= inc_n \end{aligned}$$

となるから, $|c_n| = \frac{|c'_n|}{|n|}$ となる. よって, Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\sum_{|n|>0} |c_n| = \sum_{|n|>0} \frac{|c'_n|}{|n|} \leq \left(\sum_{|n|>0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|n|>0} |c'_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

となる. よって $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ となる.

また, $|S[f](x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ より, Weierstrass の優級数定理より $S[f](x)$ は \mathbb{R} 上ある連続関数に一様収束する. その一様収束先が $f(x)$ であることを示す.

$S[f](x)$ の無限和と積分記号は交換可能 (項別積分可能) であることを利用すると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S[f](x) e^{-inx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx} \right) e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx \\ &= 2\pi c_n \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

となる. よって, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\int_{-\pi}^{\pi} (S[f](x) - f(x)) e^{-inx} dx = 0$ が成り立つので, 補題 4.12 より $S[f](x) = f(x)$ となる. これで定理が示された. \square

系 4.14. $f(x)$ は \mathbb{T} 上区分的に滑らかならば, **Parseval の等式**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx, \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

が成り立つ.

証明. 定理 3.2 の証明において, 先ほどの結果より $\|f - S_N[f]\|_2 \rightarrow 0$ であることから従う. \square

例 4.15. 例 2.5 における $g(x)$ に関して

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2, a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, b_n \equiv 0$$

であり

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5}\pi^5$$

であるから, 系 4.14 より

$$\frac{1}{2} \frac{4}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{5} \pi^5$$

となる. 整理すると

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

が得られる.

第5章

Fourier 級数の Cesàro 和

ここでは Fourier 級数の Cesàro 和について, Fejér 核を用いて元の関数に L^p 収束することを示す.

5.1 関数の L^p 連続性と積分型の Minkowski の不等式

ここでは, 関数の L^p 連続性を示していく. ただし, dx, μ 等は n 次元 Lebesgue 測度である.

補題 5.1. $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ は一様連続である.

証明. $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ とする. f の連続性より, $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta_x > 0$ が存在して, $|y| < \delta_x$ ならば $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

ここで $B(x, r)$ を中心 x , 半径 r の開球とすると, $\text{supp } f \subset \bigcup_{x \in \text{supp } f} B\left(x, \frac{1}{2}\delta_x\right)$ が成り立ち, $\text{supp } f$ の compact 性からある x_1, \dots, x_N が存在して $\text{supp } f \subset \bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$ が成り立つ.

$\delta = \frac{1}{2} \min \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_N}\} > 0$ とし, $|y| < \delta$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, 被覆性から $x-y \in B\left(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$ となるような x_i が存在するから, 連続性より $|f(x-y) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ. また三角不等式から, $|x - x_i| \leq |x_i - y - x| + |y| < \delta_{x_i}$ より連続性から $|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

ゆえに, $|y| < \delta$ のとき三角不等式から

$$|f(x-y) - f(x)| \leq |f(x-y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり一様連続性が示された. □

定理 5.2. $1 \leq p < \infty$ とする. このとき

$$S := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}, a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, E_j \text{ は非交和}, \mu(E_j) < \infty, N < \infty \right\}$$

は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内で稠密である.

証明. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $f_j \rightarrow f$ a.e., $|f_j| \leq |f|$ なる列 $\{f_j\} \subset S$ をとる. このとき $f_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ であり, 三角不等式から $|f_j - f|^p \leq (|f_j| + |f|)^p \leq 2^p |f|^p$ が成り立つから, 優収束定理より $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$ となる. また, $f_j \in S$ より, $f_j = \sum_{k=1}^{N_j} a_k \chi_{E_k}$ すると, $\|f_j\|_p^p = \sum_{k=1}^{N_j} |a_k|^p \mu(E_k) < \infty$ より, $\mu(E_k) < \infty$ となる. よって, 定理が示された. □

定理 5.3 (Lebesgue 測度の正則性). n 次元 Lebesgue 測度を μ とすると μ は正則である. つまり, 任意の $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, K \text{ は compact}\} = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U, U \text{ は開集合}\}$$

が成り立つ. また, 正則になるための同値な条件として $\forall \varepsilon > 0, U, K$ はそれぞれ \mathbb{R}^n の開集合, compact とするとき, $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$ が成り立つことである.

証明. 複雑なので略. □

補題 5.4 (Urysohn の補題). X を局所 compact Hausdorff, K を compact, U を開集合, $K \subset U \subset X$ とする. このときある $f \in C(X, [0, 1])$ が存在して, $f(x) = 1$ ($x \in K$) かつ $f(x) = 0$ ($x \in X \setminus U$) となる. ここで U は X のある compact 部分集合である.

証明. 複雑なので略. □

定理 5.5. $1 \leq p < \infty$ のとき, $C_0(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内で稠密である.

証明. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ とする. 段階を踏んで示していく.

- (i) $f = \chi_B$ ($\mu(B) < \infty$) の場合, Lebesgue 測度の正則性より $K \subset B \subset U, \mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$ を満たすような, ある compact 集合 K と, ある開集合 U が存在する. また, Urysohn の補題より, $\chi_K \leq g \leq \chi_U$ となる $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. この h に対して

$$\begin{aligned} \|f - g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_B(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_U(x) - \chi_K(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{U \setminus K}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立ち, 定義関数の場合は示された.

- (ii) $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}$ ($a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, E_j$ は非交和, $\mu(E_j) < \infty, N < \infty$) の場合, (i) の結果から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|\chi_{E_j} - g_j\|_p < \varepsilon$ ($j = 1, \dots, N$) となるような $g_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. よって, $g = \sum_{j=1}^N a_j g_j$ とすると, $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ であり, Minkowski の不等式から

$$\|f - g\|_p \leq \sum_{j=1}^N |a_j| \|\chi_{E_j} - g_j\|_p < \left(N \sum_{j=1}^N |a_j| \right) \varepsilon$$

が成り立ち, 単関数の場合も示された.

- (iii) 一般の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ の場合, 定理 5.2 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある単関数 g が存在して, $\|f - g\|_p < \varepsilon$ となる. また, (ii) の結果より $\|g - h\|_p < \varepsilon$ となる $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. ゆえに, Minkowski の不等式から

$$\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < 2\varepsilon$$

となり, 一般の場合も示された.

以上より定理が示された. □

定理 5.6. $1 \leq p < \infty$ とする. 平行移動作用素 $\tau_z : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ ($z \in \mathbb{R}^n$) を $(\tau_z f)(x) = f(x - z)$ ($f \in L^p(\mathbb{R}^n)$) で定義する. このとき, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して L^p 連続性

$$\lim_{z \rightarrow 0} \|\tau_z f - f\|_p = 0$$

つまり

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - z) - f(x)|^p dx = 0$$

が成り立つ.

証明. 2 段階に分けて示す.

- (i) $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ の場合, $|z| \leq 1$ に対して, ある compact 集合 K に対して $\text{supp}(\tau_z f), \text{supp} f \subset K$ となるから

$$\|\tau_z f - f\|_p \leq \max_{x \in K} |(\tau_z f)(x) - f(x)| \mu(K)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0)$$

より示された.

- (ii) 一般の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ の場合, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して稠密性から $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ となる $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. このとき, Lebesgue 測度の平行移動不変性から

$$\|\tau_z f - \tau_z g\|_p = \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ.

また, (i) の結果から $|z| < \delta$ のとき $\|\tau_z g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ を満たすような $\delta > 0$ が存在するから, $|z| \leq \min\{\delta, 1\}$ のとき Minkowski の不等式から

$$\|\tau_z f - f\|_p \leq \|\tau_z f - \tau_z g\|_p + \|\tau_z g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon$$

が成り立から, 一般の場合も示された.

以上より定理が示された. □

定理 5.7 (積分型の Minkowski の不等式). $1 \leq p < \infty, f \in C(\mathbb{R}^{m+n})$ のとき

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

つまり

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_p dy$$

が成り立つ.

証明. 直接示すのではなく

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy \right)^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

を示す. そうすれば, 積分と絶対値の基本的な不等式により示すべき不等式を示すことができるからである.

$p = 1$ のときは, Fubini の定理から明らかなので $1 < p < \infty$ の場合を示す.

$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy$ とし, $F(x) \neq 0$ a.e. とする. 実際 $F(x) = 0$ a.e. ならば $f(x, y) = 0$ a.e. となり示す不等式が成り立つからである. また, Fubini の定理と Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} F(x)^p dx &= \int_{\mathbb{R}^m} F(x)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} F(x)^{p-1} |f(x, y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} F(x)^{p-1} |f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_p dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

と評価できるから, 両辺を $\left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} (\neq 0)$ で割れば求める不等式が得られる. □

5.2 Fejér 核と L^p 収束

定義 5.8 (Fejér 核). 非負整数 n に対して, **Fejér 核** (Fejér kernel) $F_n(t)$ を $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$ で定義する.

定理 5.9. Fejér 核 $F_n(t)$ は以下の性質をみたす.

- (i) $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2$.
- (ii) $F_n(t) \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}$).
- (iii) $\|F_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 2\pi$.
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) dt = 0$ ($\forall \delta > 0$).

証明.

(i) $D_n(t)$ の定義式を用いて, 等比数列の和として計算すると

$$\begin{aligned}
 F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-ikt}(e^{i(2k+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{-i(k+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \sum_{k=0}^n \left(e^{i(k+\frac{1}{2})t} - e^{-i(k+\frac{1}{2})t} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{i\frac{1}{2}t}(e^{i(n+1)t} - 1)}{e^{it} - 1} - \frac{e^{-i\frac{1}{2}t}(1 - e^{-i(n+1)t})}{1 - e^{-it}} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \left(\frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2}t} \frac{e^{i(n+1)t} - 2 - e^{-i(n+1)t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2i}{(2i)^2 \sin \frac{1}{2}t} \frac{(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t})^2}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2
 \end{aligned}$$

となる.

(ii) (i) より明らか.

(iii) $k \in \mathbb{Z}$ が $k \neq 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt = 0$ であり, $F_n(t) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1} \right) e^{ikt}$ であることよりわかる.

(iv) F_n は偶関数であり $\delta < t < \pi$ のとき $\frac{\delta}{2} < \frac{1}{2}t < \frac{\pi}{2}$ から Jordan の不等式から $\sin \frac{1}{2}t \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}t > \frac{\delta}{\pi}$ となり

$$\int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) dt = 2 \int_{\delta < t < \pi} F_n(t) dt \leq \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2} \int_{\delta < t < \pi} \sin^2 \frac{n+1}{2}t dt = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2} (\pi - \delta) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よりわかる.

□

定理 5.10 (Fejér の定理). \mathbb{T} 上で定義された関数 $f(x)$ の Cesàro 和

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k[f](x)$$

とする. もし $p \geq 1$ なる p に対して $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p = \infty$ のときはさらに連続性も仮定) であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n[f] - f\|_p = 0$$

となる.

証明. まずは $\sigma_n[f]$ を積分表示する. c_k の定義に従うと

$$\begin{aligned}
 \sigma_n[f](x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ijy} dy \right) e^{ijx} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k e^{ij(x-y)} \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x-y) \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) dy
 \end{aligned}$$

と式変形を行うことができる. 次に, $\sigma_n f - f$ を積分表示して評価していく. また, $1 < p < \infty$ のとき L^p 連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $|y| \leq \delta$ のとき $\|f(\cdot - y) - f\|_p < \varepsilon$ をみたすような $\delta > 0$ が存在する. よって

$$\begin{aligned}
 \sigma_n[f](x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) dy - f(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) F_n(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) dy \\
 \|\sigma_n[f] - f\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - y) - f\|_p F_n(y) dy \quad (\because \text{積分型の Minkowski の不等式}) \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} \|f(\cdot - y) - f\|_p F_n(y) dy + 2\|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy \\
 &< \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} F_n(y) dy + 2\|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy \\
 &< \varepsilon + 2\|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 定理 5.9 より n を十分大きくすれば, $2\|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} F_n(y) dy < \varepsilon$ となるから, $\|\sigma_n[f] - f\|_p < 2\varepsilon$ となり, $1 < p < \infty$ のときは示された.

$p = \infty$ のとき f は連続なので, $\|f(\cdot - y) - f\|_{\infty}$ の値は十分小さくできるから同様に示すことができる. 以上より, 定理が示された. \square

第 6 章

Fourier 級数の完全性

この章では, Fourier 級数の $L^2(\mathbb{T})$ における完全性を証明する.

定義 6.1 (正規直交系). $L^2(\mathbb{T})$ の集合 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は, $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) をみたすとき, **正規直交系** (orthonormal system, ONS) という.

例 6.2. Fourier 級数でお馴染みの三角関数系を正規化した

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ (n \in \mathbb{N}) \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \ (n \in \mathbb{Z}) \right\}$$

は正規直交系である. また

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

も正規直交系である.

定理 6.3. $L^2(\mathbb{T})$ における正規直交系 $\{e_n\}$ について, 以下の条件は同値である.

- (i) $\{e_n\}$ による有限線型結合で表される元全体の集合 M は, $L^2(\mathbb{T})$ 内で稠密である.
- (ii) $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ に対して, $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$, つまり $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, e_n \rangle e_n \right\|_2 = 0$ が成り立つ.
- (iii) $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ に対して, Parseval の等式 $\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$ が成り立つ.
- (iv) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $\langle f, e_n \rangle = 0$ ならば, $f = 0$ が成り立つ.

証明.

(i) \Rightarrow (ii) $f \in L^2(\mathbb{T})$ とする. 仮定より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f - T| < \varepsilon$ となる三角多項式 T が存在する. よって,

$\|f - T\|_2 < \sqrt{2\pi}\varepsilon$ となる. 定理 3.1 の証明と同様にして, 一般の正規直交系についても L^2 最良近似を成り立たせる元が $\sum_{n=1}^N \langle f, e_n \rangle e_n$ であることが示せるので, そのことを用いて

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n \right\|_2 \leq \|f - T\|_2 < \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

となる. ゆえに示された.

(ii) \Rightarrow (iii) 内積の連続性より

$$\langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n, f \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle f, e_n \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

となり, 示された.

(iii) \Rightarrow (iv) 明らか.

(iv) \Rightarrow (i) M が稠密であることと同値な $M^\perp = \{0\}$ あることを示す.

$g \in M^\perp$ とする. このとき直交補空間の定義より $\langle f, g \rangle = 0$ ($f \in M$) である. 今, $e_n \in M$ ($n \in \mathbb{Z}$) より $\langle e_n, g \rangle = 0$ となる. よって, 仮定から $g = 0$ となり $M^\perp = \{0\}$ となる. ゆえに示された. \square

定義 6.4 (完全正規直交系). $L^2(\mathbb{T})$ 内の正規直交系 $\{e_n\}$ が定理 6.3 の条件の内どれか一つでも成り立つとき $\{e_n\}$ を **完全正規直交系** (complete orthonormal system, CONS) または, **正規直交基底** (orthonormal basis, ONB) という.

以上の結果から, どれか 1 つの条件を示せば $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \ (n \in \mathbb{Z})\right\}$ の完全性を示すことができる. つまり, 連続でなくても $L^2(\mathbb{T})$ に属してさえいれば L^2 の意味ではあるが, Fourier 級数展開を行うことができる.

定理 6.5. $f \in C(\mathbb{T})$ は三角多項式で一様に近似される.

証明. 定理 5.10 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|\sigma_N[f] - f\|_\infty < \varepsilon$ をみたす非負整数 N が存在する. $\sigma_N[f] - f$ は連続であるから, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_N[f](x) - f(x)| = \|\sigma_N[f] - f\|_\infty < \varepsilon$ が成り立つ. また

$$\sigma_N[f](x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^k c_j e^{ijx} = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k e^{ikx}$$

と変形されることから, T は三角多項式であることがわかる. □

例 6.6. 例 6.2 で扱った 3 つの正規直交系の内

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ (n \in \mathbb{N})\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \ (n \in \mathbb{Z})\right\}$$

は完全正規直交系である. また

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ (n \in \mathbb{N})\right\}$$

は正規直交系であるが, 完全正規直交系ではない. 実際, 3 つ目の正規直交系は, 偶関数を表現できないことに注意する.