べき和の公式

@yamak0523

1 Bernoulli 数

定義 1.1 (Bernoulli 数) Bernoulli 数 B_k は以下の漸化式

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

によって与えられる. ただし, $\binom{m}{n}$ は二項係数で

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \ (m \geq n \geq 0)$$

である.

例 1.2 B_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ の値は $B_0 = 1, B_1 = \dfrac{1}{2}, B_2 = \dfrac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\dfrac{1}{30}$ である.

2 べき和の公式

定義 2.1 べき和 $S_k(n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \sum_{j=1}^{n} j^k$$

で定義する.

例 2.2 $S_k(n)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ の具体的な表示は

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
S_1(n) &= \frac{1}{2} n(n+1) \\
S_2(n) &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
S_3(n) &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \\
S_4(n) &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)
\end{aligned}$$

である.

定理 2.3 $k \geq 0$ を整数とするとき

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

が成り立つ.

証明 m を自然数とする. このとき, 二項定理から

$$(m+1)^{k+1}-m^{k+1}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}m^j$$

が成り立つから両辺 $m=1,2,\ldots,n$ を代入したものを加えれば

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}S_j(n)$$

が得られる. よって k が自然数のとき

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{(n+1)^{k+1}-1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}S_j(n)\right\}$$

のように式変形できるから, $S_k(n)$ は $k=0$ のときも含めて n について最高次の係数 $\dfrac{1}{k+1}$ の $(k+1)$ 次多項式であることがわかる.

ここで, $S_k(n+1)-S_k(n)=(n+1)^k$ が n に関しての恒等式であることに注意し, $S_k(n)$ の自然数変数 n を実数変数 x に変えても (多項式の定義域を実数全体に拡張しても)

$$S_k(x+1)-S_k(x)=(x+1)^k$$

が成り立つ. また, $S_k(1)=1$ であることを用いると $S_k(0)=0$ であることがわかる.

上の等式を両辺微分すると

$$S_k'(x+1)-S_k'(x)=k(x+1)^{k-1}$$

が得られる. $x=0,1,\ldots,n-1$ を代入し両辺加えると

$$S_k'(n)-S_k'(0)=kS_{k-1}(n)$$

となり, これは自然数 n に関して恒等式である. ここで, $b_k=S_k'(0)$ とすると

$$S_k'(x)=kS_{k-1}(x)+b_k$$

が成り立ち両辺微分すれば

$$S_k''(x)=kS_{k-1}'(x)$$

となり, $S_k''(0)=kb_{k-1}$ が得られる. さらに両辺微分すると

$$S_k'''(x)=kS_{k-1}''(x)=k(k-1)S_{k-2}'(x)$$

より, $S_k'''(0)=k(k-1)b_{k-2}$ となる. 同様にして

$$S_k^{(j)}(0)=k(k-1)\cdots(k-j+2)b_{k-j+1}$$

が得られる.

よって, $k \geq 1$ として $S_k(x)$ の Maclaurin 展開を考えると

$$
\begin{aligned}
S_k(x) &= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!} x^j \\
&= b_k x + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!} x^j \ \ (\because S_k^{(0)}(0) = 0, S_k^{(1)}(0) = b_k) \\
&= b_k x + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{k(k-1)\cdots(k-j+2)b_{k-j+1}}{j!} x^j \\
&= b_k x + \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{k-j+1} b_{k-j+1} x^j \\
&= b_k x + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} b_j x^{k-j+1} \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j x^{k-j+1}
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで $x = 1$ であることを用いると

$$
1 = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j
$$

となり $\{b_j\}$ と Bernoulli 数の列 $\{B_j\}$ は一致する. ゆえに, $k = 0$ のときも含めて

$$
S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}
$$

が成り立つことがわかる. ■

参考文献 Tsuneo Arakawa, Tomoyoshi Ibukiyama, Masanobu Kaneko, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer (2003).