$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内における稠密性について

山 K@yamak0523

2021 年 1 月 3 日

目 次

第1章　Lebesgue積分に関する基礎事項

Lebesgue 積分論において非常に重要な積分に関する定理や補題を幾つか挙げておく. 以下 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 等の組は測度空間, $\mathcal{S}(X)$ は X 上の単関数の集合, $\mathcal{M}(X, Y)$ は X から Y への可測関数の集合としておく.

Theorem 1.1 (Beppo Levi の単調収束定理[1])
$\{f_n\}$ を非負の広義単調増加な可測関数列, つまり

$$f_{k+1} \geq f_k, f_k \geq 0 \ (k \in \mathbb{N})$$

を満たすとする. また, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ a.e. とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

が成り立つ.

証明. $\{f_n\}$ は広義単調増加より $\left\{\int_X f_n \, d\mu\right\}$ も広義単調増加列である. 従って, この数列の極限は ∞ の場合も含め存在することがわかる. また $\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ より両辺 $n \to \infty$ の極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

が得られる.

一方, $\alpha \in (0,1)$ を固定し $\phi \in \mathcal{S}(X), E_n = \{x \mid f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$ とする. このとき $\{E_n\}$ は可測集合であり

$$E_k \subset E_{k+1} \ (k \in \mathbb{N}), \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$$

を満たすから

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi \, d\mu = \alpha \int_X \phi \, d\mu$$

となる. ただし最後の等式は写像

$$A (\in \mathfrak{M}) \mapsto \int_A f \, d\mu$$

が測度になることおよび ν を測度とすれば

$$E_k \subset E_{k+1} \ (k \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$$

が成り立つことを用いた. よって

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \sup_{\alpha\uparrow 1} \left(\alpha \int_X \phi \, d\mu\right) = \int_X \phi \, d\mu$$

よって ϕ は単関数であるから

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \sup_{0\leq\phi\leq f} \int_X \phi \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

となる.

以上より定理が示された. ■

Corollary 1.2 (項別積分定理)
$\{f_n\}$ を非負の可測関数列とする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)\,d\mu$$

が成り立つ.

証明. 非負の可測関数列 $\{f_n\}$ に対して, 可測関数列 $\{g_n\}$ を $g_n=\sum_{k=1}^{n}f_k$ とすれば単調収束定理の仮定を満たすから, 定理を適用すればよい. ■

Lemma 1.3 (Fatou の補題)
$\{f_n\}$ を非負の可測関数列とする. このとき

$$\int_X\left(\liminf_{n\to\infty}f_n\right)\,d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

が成り立つ.

証明. $k\in\mathbb{N}$ に対して, $j\ge k$ のとき

$$\inf_{n\ge k}f_n\le f_j$$

であるから, 両辺積分すると

$$\int_X\left(\inf_{n\ge k}f_n\right)\,d\mu\le\int_X f_j\,d\mu$$

となる. よって

$$\int_X\left(\inf_{n\ge k}f_n\right)\,d\mu\le\inf_{j\ge k}\int_X f_j\,d\mu$$

であるから, 両辺 $k\to\infty$ の極限をとれば

$$\int_X\left(\liminf_{n\to\infty}f_n\right)\,d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

となり, 示された. ■

Theorem 1.4 (Lebesgue の優収束定理[2])
$\{f_n\}$ を可測関数列とし, $f_n\to f$ a.e. とする. このとき, ある非負の可積分な可測関数 g が存在[3]し, $|f_n|\le g$ a.e. $(n\in\mathbb{N})$ となるとき $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ は可測であり, 可積分で

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$$

が成り立つ.

証明. f の可測性は明らか.

$|f_n|\le g$ a.e. より, 両辺 $n\to\infty$ の極限をとれば $|f|\le g$ a.e. となる. よって

$$\left|\int_X f\,d\mu\right|\le\int_X|f|\,d\mu\le\int_X g\,d\mu<\infty$$

から f は可積分であることがわかる.

また, $g+f_n\ge 0$ a.e. より Fatou の補題から

$$\int_X g\,d\mu+\int_X f\,d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X(g+f_n)\,d\mu=\int_X g\,d\mu+\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

---
[3] この関数 g のことを Lebesgue の優収束定理における優圧関数という.

同様に $g - f_n \geq 0$ a.e. より Fatou の補題から

$$\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

となる. 以上より

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

となる. しかし, 一般的事実として

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

が成り立つから, 結局

$$\int_X f\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

となり, 定理が示された. ■

Corollary 1.5 (Lebesgue の有界収束定理)
$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を有限測度空間, $\{f_n\}$ を有界な可測関数列とし, $f_n \to f$ a.e. とする. このとき $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ は可測であり, 可積分で

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

が成り立つ.

証明. $\{f_n\}$ は有界な可測関数列だから

$$|f_n| \leq M \ (n \in \mathbb{N})$$

となる $M(>0)$ が存在する. また

$$\int_X M\,d\mu = M\mu(X) < \infty$$

より M は可積分. よって, Lebesgue の優収束定理の g を $g(x) = M$ として定理を適用させればよい. ■

Corollary 1.6 (一般優収束定理[4])
$\{f_n\}$ を可測関数列とし, $f_n \to f$ a.e. とする. このとき, ある非負な可積分な可測関数列 $\{g_n\}$ が存在し

$$|f_n| \leq g_n \text{ a.e. } (n \in \mathbb{N}), g_n \to g \text{ a.e.}, \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu = \int_X g\,d\mu$$

となるとき $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ は可測であり, 可積分で

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

が成り立つ.

証明. $g_n + f_n, g_n - f_n \geq 0$ a.e. であるから, Lebesgue の優収束定理の証明と同様に Fatou の補題を適用させればよい. ■

Theorem 1.7 (Fubini-Tonelli の定理)
$(X, \mathfrak{M}, \mu), (Y, \mathfrak{N}, \nu)$ を σ-finite な測度空間とする. このとき以下が成り立つ. ただし, $f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ とする.

(a) (Tonelli) f を $X \times Y$ 上の非負値可測関数とする. このとき $g(x), h(y)$ を

$$g(x) = \int_Y f_x\,d\nu, h(y) = \int_X f^y\,d\mu$$

はそれぞれ, X 上, Y 上の非負値可測関数で

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu \times \nu) = \int_Y \int_X f\,d\mu\,d\nu = \int_X \int_Y f\,d\nu\,d\mu \ \cdots (*)$$

が成り立つ.

(b) (Fubini) f が $X \times Y$ 上絶対可積分とする. このとき, f_x は a.e.$x \in X$ で Y 上絶対可積分, f^y は a.e.$y \in Y$ で X 上絶対可積分であり, (a) における g, h はそれぞれ X 上, Y 上絶対可積分で $(*)$ の等式が成り立つ.

証明.

(a) まずは, f が特性関数のときに示す. $E \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ として, $f(x,y) = \chi_E(x,y)$ とする. このとき

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(E)$$

であり

$$\int_Y \int_X f\, d\mu\, d\nu = \int_Y \mu(E_x)\, d\nu, \int_X \int_Y f\, d\nu\, d\mu = \int_X \nu(E^y)\, d\mu$$

である. ただし, $E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}, E^y = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ である. これらの 3 つの積分の値は一致するから, f が特性関数のときは示された.

次に f が非負値単関数のときであるが, 積分の線形性により単関数のときも成り立つことがわかる.

最後に一般の場合であるが, f に概収束する非負値単調増加単関数列 $\{f_n\}$ をとり, 関数列 $\{g_n\}, \{h_n\}$ を

$$g_n(x) = \int_Y (f_n)_x\, d\nu, h_n(y) = \int_X (f_n)^y\, d\mu$$

とすると, $\{g_n\}, \{h_n\}$ はそれぞれ非負値単調増加関数列で g, h に概収束する. よって単調収束定理から

$$\begin{aligned}\int_X g\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n\, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu)\\ \int_Y h\, d\nu &= \lim_{n\to\infty} \int_Y h_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n\, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu)\end{aligned}$$

となりこれは $(*)$ を示している. この結果から f が $X \times Y$ 上で非負値可測関数で可積分ならば, $g < \infty$ a.e.$x \in X, h < \infty$ a.e.$y \in Y$ であり, つまり f_x, f^y はそれぞれ Y 上, X 上で絶対可積分であることがわかる. これで示された.

(b) (b) の仮定を満たす f に対して $f = f_1 + if_2$ (f_1, f_2は実数値可測関数) のように実部と虚部に分けさらに $f = ({f_1}^+ - {f_1}^-) + i({f_2}^+ - {f_2}^-)$ として (a) を適用すればよい. これで示された.

以上により, 定理が示された. ■

第2章　L^p 空間の定義と基礎的な性質

ここでは, L^p 空間の定義および Banach 空間としての基礎的な性質を述べる.

Definition 2.1 (L^p 空間)
$1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に対して $\mathcal{L}^p$ ノルム $\|\cdot\|_p$ を

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \\ \inf\{a \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > a\}) = 0\} & (p = \infty) \end{cases}$$

と定義し, $\mathcal{L}^p$ 空間を

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{M}, \mu) = \{f \mid f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}), \|f\|_p < \infty\}$$

と定義する. ここで $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ は X 上から $\mathbb{C}$ 上への μ-可測関数全体の集合とする. ここで $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ に対して, 同値関係 $\sim$ を

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f = g \text{ a.e.}$$

で定義し, $L^p(X)$ を

$$L^p(X) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{L}^p(X)/\sim$$

で定義する. また, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ を単に $L^p, L^p(X), L^p(\mu)$ と, $\|f\|_p$ を $\|f\|_{L^p}$ と表記することもある.

Lemma 2.2
$f \in L^\infty$ ならば $|f| \leq \|f\|_\infty$ a.e. となる.

Proof. 下限の定義から

$$\exists\{M_k\} \ (M_k \geq 0) \text{ s.t. } M_k \to \|f\|_\infty \ (k \to \infty), |f| \leq M_k \text{ a.e.}$$

となる. すると, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対してある零集合 $N_k (\subset X)$ が存在して

$$x \in X \setminus N_k \Longrightarrow |f(x)| \leq M_k$$

となる. ここで $N = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ とすると, N も零集合であり

$$x \in X \setminus N \Longrightarrow |f(x)| \leq M_k \ (\forall k \in \mathbb{N})$$

から, 両辺 $k \to \infty$ の極限をとると

$$x \in X \setminus N \Longrightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

つまり $|f| \leq \|f\|_\infty$ a.e. となる. ■

Theorem 2.3
$1 \leq p \leq \infty$ のとき, L^p は $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間である.

Proof. $f, g \in L^p, c \in \mathbb{C}$ のとき $f + g, cf \in L^p$ を示せば良い.

(i) $1 \leq p < \infty$ のとき

- $f+g \in L^p$
$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p)$$
より $\|f+g\|_p^p \leq 2^p(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p) < \infty$ より $f+g \in L^p$ となる.
- $cf \in L^p$
$$\|cf\|_p = \left(\int_X |cf|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |c| \, \|f\|_p < \infty$$
より $cf \in L^p$ となる.

(ii) $p=\infty$ のとき

- $f+g \in L^\infty$
$$|f+g| \leq |f|+|g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ \text{ a.e.}$$
より, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$ であるから $f+g \in L^\infty$ となる.
- $cf \in L^\infty$
$c=0$ のときは明らかなので, $c \neq 0$ とする.
$$\begin{aligned} \|cf\|_\infty &= \inf\{a \geq 0 \mid \mu\{x \in X \mid |cf(x)| > a\} = 0\} \\ &= |c| \inf\{b \geq 0 \mid \mu\{x \in X \mid |cf(x)| > b\} = 0\} \quad \left(b = \frac{a}{|c|}\right) \\ &= |c| \, \|f\|_\infty \\ &< \infty \end{aligned}$$

以上より, 題意は示された. ■

Lemma 2.4 (Young の不等式)
$a, b \geq 0$ のとき, $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす p, q に対して $ab \leq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ が成り立つ. ただし, 等号は $a^p = b^q$ のときである.

Proof. $ab=0$ のときは明らかなので $ab>0$ の場合を示す. $h(t) = \dfrac{t^p}{p} - t + \dfrac{1}{q}$ $(t \geq 0)$ とする. このとき $h'(t) = t^{p-1}-1$ であるから, $h(t)$ は $t=1$ で最小値 $h(1) = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1 = 0$ となる. あとは $a, b > 0$ に対して $t = ab^{-\frac{q}{p}}$ とおいて整理すると Young の不等式が示される. 等号は $a^p = b^q$ のときに成り立つ. ■

Definition 2.5
$1 \leq p \leq \infty$ に対して $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ となる q $\left(=\dfrac{p}{p-1}\right)$ を p の共役指数という. 便宜上 $1, \infty$ の共役指数はそれぞれ $\infty, 1$ とする.

Theorem 2.6 (Hölder の不等式)
$1 \leq p, q \leq \infty$ を互いに共役, $f \in L^p, g \in L^q$ とする. このとき $fg \in L^1$ であり
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$
が成り立つ.

Proof. $1 < p, q < \infty$ のときと $p=1, q=\infty$ のときを場合を分けて示す.

(i) $1 < p, q < \infty$ のとき, Young の不等式において $a = \dfrac{|f|}{\|f\|_p}, b = \dfrac{|g|}{\|g\|_q}$ とすると
$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}$$
より両辺積分すると
$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$
より $fg \in L^1, \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が示された. また, 等号は Young の不等式の等号条件より明らか.

(ii) $p=1, q=\infty$ のとき
$$\|fg\|_1 = \int_X |fg|\, d\mu \le \|g\|_\infty \int_X |f| d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$
となるから, $fg \in L^1$ であり不等式が示された.

以上により, Hölder の不等式が示された. ■

Theorem 2.7 (Minkowski の不等式)
$1 \le p \le \infty, f, g \in L^p$ のとき, 三角不等式
$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$
が成り立つ.

Proof. $p=\infty$ の場合は Theorem 2.3 で示していから, $1 \le p < \infty$ の場合を示す.

(i) $p=1$ のとき

$|f+g| \le |f| + |g|$ より両辺を積分すると不等式が成り立つ.

(ii) $1 < p < \infty$ のとき
$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \le (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}$$
より, p の共役指数を q とすると $(p-1)q = p$ であり, Hölder の不等式より
$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p \, d\mu \\
&\le \left\| f|f+g|^{p-1} \right\|_1 + \left\| g|f+g|^{p-1} \right\|_1 \\
&\le \|f\|_p \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$
となる. 以上より $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ が示された.

以上より, 題意は示された. ■

Corollary 2.8
$1 \le p \le \infty$ のとき L^p は $\|\cdot\|_p$ をノルムとするノルム空間になる.

Proof. 単射性については $|f(x)| \ge 0$ であることを用いる. スカラー倍に関しては既に示してある. 三角不等式については Minkowski の不等式のことであり既に示してある. ■

Theorem 2.9
$1 \le p \le \infty$ のとき, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ は Banach 空間である.

Proof. L^p が L^p ノルムに関して完備であること, つまり L^p ノルムに関する任意の Cauchy 列が収束列であることを示せばよい. また, $1 < p < \infty$ のときと $p = \infty$ のときに場合分けをして示す.

(i) $\{f_n\} \subset L^p$ を Cauchy 列とする. このとき部分列 $\{f_{n_k}\}$ を $\|f_{k+1} - f_{n_k}\|_p < \dfrac{1}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ となるようにとる. また, $\{g_n\}$ を $g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ とすると, Minkowski の不等式から $\|g_k\|_p < \sum_{j=1}^{k} \dfrac{1}{2^j} = 1$ である. ここで $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ とすると, Fatou の補題から
$$\int_X |g|^p \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X |g_k|^p \, d\mu \le 1$$

となるから, $g(x) < \infty$ a.e. となる. ただし, $g(x) = \infty$ となる x のときは, $g(x) = 0$ と値を修正する. よって

$$f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$$

は, ある関数 f に X 上 a.e. 収束することがわかる. よって, $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f_{n_{k+1}} = f$ a.e. が成り立つ. さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n, m \geq N$ のとき $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ となる N が存在するから, $n \geq N$ のとき Fatou の補題より

$$\begin{aligned}
\int_X |f - f_n|^p \, d\mu &= \int_X \left| \lim_{k\to\infty} f_{n_k} - f_n \right|^p \, d\mu \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu \\
&\leq \varepsilon^p
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $n \geq N$ となる n を用いると $f = (f - f_n) + f_n \in L^p$ であることがわかる. ゆえに, Cauchy 列 $\{f_n\}$ は f に L^p 収束することが示された.

(ii) $p = \infty$ のとき $\{f_j\}$ を L^∞ の任意の Cauchy 列とする. このとき

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } j, k \geq n_m \Longrightarrow \|f_j - f_k\|_\infty < \frac{1}{m}$$

となる. このとき, Lemma 1.2 からある零集合 $N_{j,k,m}$ が存在して, $x \in X \setminus N_{j,k,m}$ ならば

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leq \|f_j - f_k\|_\infty < \frac{1}{m}$$

が成り立つ. ここで $N = \bigcup_{j,k,m=1}^{\infty} N_{j,k,m}$ も零集合であり

$$x \in X \setminus N, j, k \geq n_m \Longrightarrow |f_j(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m} \tag{$*$}$$

であるから $x \in X \setminus N$ ならば $\{f_j(x)\}$ は $\mathbb{C}$ における Cauchy 列であることがわかる. よって $\mathbb{C}$ の完備性から $x \in X \setminus N$ のとき $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ が存在する. ここで $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{j\to\infty} f_j(x) & (x \in X \setminus N) \\ 0 & (x \in N) \end{cases}$$

とすると, f は可測であり $(*)$ において $k \to \infty$ とすると

$$x \in X \setminus N, j \geq n_m \Longrightarrow |f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \tag{$**$}$$

となるから $(**)$ の不等式から $j \geq m_m$ のとき $f_j - f \in L^\infty$ であることがわかる. また L^∞ はベクトル空間であるから

$$f = f_j + (-1)(f_j - f) \in L^\infty$$

となる. また $(**)$ から

$$j \geq n_m \Longrightarrow \|f_j - f\|_\infty \leq \frac{1}{m}$$

であることがわかるから, Cauchy 列 $\{f_j\}$ は f に L^∞ 収束することがわかる.

以上より L^p の完備性が示せたので L^p は Banach 空間であることが示された. ■

第3章　関数の L^p 連続性

ここでは, 関数の L^p 連続性を示していく. ただし, dx, μ 等は n 次元 Lebesgue 測度である.

Lemma 3.1
$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ は一様連続である.

Proof. $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ とする. f の連続性より, $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta_x > 0$ が存在して, $|y| < \delta_x$ ならば $|f(x-y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

ここで $B(x,r)$ を中心 x, 半径 r の開球とすると, $\operatorname{supp} f \subset \displaystyle\bigcup_{x \in \operatorname{supp} f} B\left(x, \frac{1}{2}\delta_x\right)$ が成り立ち, $\operatorname{supp} f$ の compact 性からある $x_1, \ldots, x_N$ が存在して $\operatorname{supp} f \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} B\left(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$ が成り立つ.

$\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_N}\} > 0$ とし, $|y| < \delta$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, 被覆性から $x - y \in B\left(x_i, \dfrac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$ となるような x_i が存在するから, 連続性より $|f(x-y) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ. また三角不等式から, $|x - x_i| \leq |x_i - y - x| + |y| < \delta_{x_i}$ より連続性から $|f(x) - f(x_i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.

ゆえに, $|y| < \delta$ のとき三角不等式から

$$|f(x-y) - f(x)| \leq |f(x-y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり一様連続性が示された. ■

Theorem 3.2
$1 \leq p < \infty$ とする. このとき

$$S := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}, a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, E_j \text{は非交和}, \mu(E_j) < \infty, N < \infty \right\}$$

は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内で稠密である.

Proof. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $f_j \to f$ a.e. , $|f_j| \leq |f|$ なる列 $\{f_j\} \subset S$ をとる. このとき $f_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ であり, 三角不等式から $|f_j - f|^p \leq (|f_j| + |f|)^p \leq 2^p |f|^p$ が成り立つから, 優収束定理より $\|f_j - f\|_p \to 0$ となる. また, $f_j \in S$ より, $f_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_j} a_k \chi_{E_k}$ とすると, $\|f_j\|_p^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{N_j} |a_k|^p \mu(E_k) < \infty$ より, $\mu(E_k) < \infty$ となる. よって, 定理が示された. ■

Fact 3.3 (Lebesgue 測度の正則性)
n 次元 Lebesgue 測度を μ とすると μ は正則である. つまり, 任意の $E \subset \mathbb{R}^n$ 対して

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, K \text{ は compact}\} = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U, U \text{ は開集合 }\}$$

が成り立つ. また, 正則になるための同値な条件として $\forall \varepsilon > 0$, U, K はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の開集合, compact とするとき, $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$ が成り立つことである.

Fact 3.4 (Urysohn の補題)
X を局所 compact Hausdorff, K を compact, U を開集合, $K \subset U \subset X$ とする. このときある $f \in C(X, [0,1])$ が存在して, $f(x) = 1$ $(x \in K)$ かつ $f(x) = 0$ $(x \in X \setminus V)$ となる. ここで V は U のある compact 部分集合である.

Theorem 3.5
$1 \leq p < \infty$ のとき, $C_0(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内で稠密である.

Proof. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ とする. 段階を踏んで示していく.

(i) $f = \chi_B$ $(\mu(B) < \infty)$ の場合, Lebesgue 測度の正則性より $K \subset B \subset U, \mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$ を満たすような, ある compact 集合 K と, ある開集合 U が存在する. また, Urysohn の補題より, $\chi_K \leq g \leq \chi_U$ となる $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. この h に対して

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_B(x) - g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_U(x) - \chi_K(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{U\setminus K}(x) \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立ち, 定義関数の場合は示された.

(ii) $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ $(a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, E_j$は非交和$, \mu(E_j) < \infty, N < \infty)$ の場合, (i) の結果から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\left\|\chi_{E_j} - g_j\right\|_p < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, N)$ となるような $g_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. よって, $g = \sum_{j=1}^{n} a_j g_j$ とすると, $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ であり, Minkowski の不等式から

$$\|f-g\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} |a_j| \left\|\chi_{E_j} - g_j\right\|_p < \left(N \sum_{j=1}^{N} |a_j|\right) \varepsilon$$

が成り立ち, 単関数の場合も示された.

(iii) 一般の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ の場合, Lemma 2.2 により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある単関数 g が存在して, $\|f-g\|_p < \varepsilon$ となる. また, (ii) の結果より $\|g-h\|_p < \varepsilon$ となる $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. ゆえに, Minkowski の不等式から

$$\|f-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p < 2\varepsilon$$

となり, 一般の場合も示された.

以上より定理が示された. ■

Theorem 3.6
$1 \leq p < \infty$ とする. 平行移動作用素 $\tau_z : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ $(z \in \mathbb{R}^n)$ を $(\tau_z f)(x) = f(x-z)$ $(f \in L^p(\mathbb{R}^n))$ で定義する. このとき, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して L^p 連続性

$$\lim_{z \to 0} \|\tau_z f - f\|_p = 0$$

つまり

$$\lim_{z \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z) - f(x)|^p \, dx = 0$$

が成り立つ.

Proof. 2 段階に分けて示す.

(i) $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ の場合, $|z| \leq 1$ に対して, ある compact 集合 K に対して $\operatorname{supp}(\tau_z f), \operatorname{supp} g \subset K$ となるから

$$\|\tau_z f - f\|_p \leq \max_{x \in K} |(\tau_z f)(x) - f(x)| \mu(K)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ (z \to 0)$$

より示された.

(ii) 一般の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ の場合, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して稠密性から $\|f-g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$ となる $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ が存在する. このとき, Lebesgue 測度の平行移動不変性から

$$\|\tau_z f - \tau_z g\|_p = \|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ.

また, (i) の結果から $|z| < \delta$ のとき $\|\tau_z g - g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$ を満たすような $\delta > 0$ が存在するから, $|z| \leq \min\{\delta, 1\}$ のとき Minkowski の不等式から

$$\|\tau_z f - f\|_p \leq \|\tau_z f - \tau_z g\|_p + \|\tau_z g - g\|_p + \|g-f\|_p < \varepsilon$$

が成り立から, 一般の場合も示された.

以上より定理が示された. ■

第4章　合成積と稠密性

ここでは, 合成積を用いて $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$ 内で稠密であることを示していく. ただし, dx, μ 等は n 次元 Lebesgue 測度である.

Definition 4.1
$f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ に対して合成積（畳み込み, convolution）$f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

で定義する. このとき, 右辺の積分は少なくともほとんど至る所で定義されていなければならない.

Lemma 4.2
$f, g, h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), z \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき以下のことが成り立つ.

(i) $f * g = g * f$

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(iii) $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$

(iv) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\{x + y \mid x \in \operatorname{supp} f, y \in \operatorname{supp} g\}}$

Proof.

(i) $z = x - y$ と変数変換すると

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = (g * f)(x)$$

より示される.

(ii) Fubini-Tonelli の定理と (i) を用いる.

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x-y)h(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x-y)h(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-y-z)h(y)\,dz\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-y-z)h(y)\,dy\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x-z)\,dz \\
&= (f * (g * h))(x)
\end{aligned}$$

より示される.

(iii)

$$\begin{aligned}
\tau_z(f * g)(x) &= (f * g)(x-z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_z f)(x-y)g(y)\,dy \\
&= (\tau_z f) * g
\end{aligned}$$

となる. 後は (i) を用いると

$$\tau_z(f*g) = \tau_z(g*f) = (\tau_z g)*f = f*(\tau_z g)$$

より示される.

(iv) 対偶を示す.

$x \notin \overline{\{x+y \mid x \in \operatorname{supp} f, y \in \operatorname{supp} g\}}$ とすると, $\forall y \in \operatorname{supp} g$ に対して $x-y \notin \operatorname{supp} f$ となる. よって $f(x-y) = 0$ となるから, $(f*g)(x) = 0$ となり $x \notin \operatorname{supp}(f*g)$ となる.

以上より, 定理が示された. ■

Theorem 4.3 (合成積に関する Young の不等式)
$1 \leq p, q, r \leq \infty$ が $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ を満たすとする. $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ に対して $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ となり, $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が成り立つ.

Proof. 一般 Hölder の不等式と平行移動不変性を用いて示していく.

- $r = \infty$ のとき

$$\begin{aligned}
|f*g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy \\
&= \|f(x-\cdot)\|_p \|g\|_q \\
&= \|f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

より, $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が成り立つ.

- $1 \leq r < \infty$ のとき $1 \leq p, q < \infty$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
|f*g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \cdot |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \cdot |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \cdot |g(y)|^{\frac{r-q}{r}}\,dy \\
&\leq \left\| (|f(x-\cdot)|^p |g|^q)^{\frac{1}{r}} \right\|_r \left\| |f(x-\cdot)|^{\frac{r-p}{r}} \right\|_{\frac{pr}{r-p}} \left\| |g|^{\frac{r-q}{r}} \right\|_{\frac{qr}{q-r}} \quad \left(\because \frac{1}{r} + \frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{qr} = 1\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned}
\left\| (|f(x-\cdot)|^p |g|^q)^{\frac{1}{r}} \right\|_r &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\,dy \right)^{\frac{1}{r}} \\
\left\| |f(x-\cdot)|^{\frac{r-p}{r}} \right\|_{\frac{pr}{r-p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\,dy \right)^{\frac{r-p}{pr}} \\
&= \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \\
\left\| |g|^{\frac{r-q}{r}} \right\|_{\frac{qr}{q-r}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q\,dy \right)^{\frac{q-r}{qr}} \\
&= \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}}
\end{aligned}$$

と変形できるから, Fubini の定理から

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f*g(x)|^r\,dx &\leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right) dx \\
&= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\,dx \right) dy \\
&= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q \\
&= \|f\|_p^r \|g\|_q^r
\end{aligned}$$

が得られ, 両辺の r 乗根を取れば不等式が示される. ■

Lemma 4.4
$f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le k \le \infty)$ とし $\partial^\alpha g$ $(|\alpha| \le k)$ は有界であるとする. このとき, $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり, $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ が成り立つ. また, $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g$ が compact であれば $f * g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ となる.

Proof. まずは $|\alpha| = 1$ の場合を示す. $\phi = f * g$ $(f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in C^k(\mathbb{R}^n))$ とする. このとき, 平均値の定理から

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x+he_j) - \phi(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{g(x+he_j-y) - g(x-y)}{h}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_j g(x+ce_j-y)\, dy \ (0 < c < h) \end{aligned}$$

となる. ただし, e_j は $\mathbb{R}^n$ の j 番目の標準基底である.

仮定から $\partial_j g$ は有界であり, $f \in L^1(\mathbb{R}^n), |f(y)\partial_j g(x+ce_j-y)| \le M|f(y)|$ (M は $|\partial_j g|$ の最大値) より, Lebesgue の優収束定理から $h \to 0$ の極限と積分記号が交換できるから, $\partial_j \phi = f * (\partial_j g)$ が示された. 一般の場合は, 帰納法により全く同様の手順で示される.

k 階導関数が連続であることは, $k = 0$ の場合を示せば十分である.

$$\begin{aligned} |\phi(x+he_j)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x+he_j-y)\, dy \right| \\ &\le \max_{z \in \mathbb{R}^n} |g(z)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \\ &< \infty \end{aligned}$$

より, Lebesgue の優収束定理から

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \phi(x+he_j) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\lim_{h \to 0} g(x+he_j-y) \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

となり, 連続性も示された.

ゆえに, 補題が示された. ■

Corollary 4.5
$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty), g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ とし, $1 < p < \infty$ のとき $\operatorname{supp} f$ は compact であるとする. このとき, $f * g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ であり, $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ が成り立つ.

Proof. $1 < p < \infty$ の場合を示せばよい. p の共役指数を q とするとき, Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx &= \int_{\operatorname{supp} f} |f(x)|\, dx \\ &\le \left(\int_{\operatorname{supp} f} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\operatorname{supp} f} 1^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p\, \mu(\operatorname{supp} f)^{\frac{1}{q}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

より, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であることがわかるから, 先程の補題より結果が従う. ■

Definition 4.6 (Friedrichs の軟化子)
ρ を

$$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \rho(x) \ge 0, \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1, \operatorname{supp} \rho = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\}$$

を満たすとする. また, $\rho_t(x) = t^{-n}\rho(t^{-1}x)$ とすると $\operatorname{supp} \rho_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le t\}$ は compact であり, 積分値は 1 になる. このとき, ρ_t を Friedrichs の軟化子という.

Example 4.7

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases}$$

は軟化子である. ここで, C は積分値が 1 になるようするための定数である.

Theorem 4.8 (積分型の Minkowski の不等式)
$1 \leq p < \infty, f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{C})$ のとき

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

つまり

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) \, dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_p \, dy$$

が成り立つ.

Proof. 直接示すのではなく

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| \, dy \right)^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

を示す. そうすれば, 積分と絶対値の基本的な不等式により示すべき不等式を示すことができるからである.

$p = 1$ のときは, Fubini の定理から明らかなので $1 < p < \infty$ の場合を示す.

$F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| \, dy$ とし, $F(x) \neq 0$ a.e. とする. 実際 $F(x) = 0$ a.e. ならば $f(x,y) = 0$ a.e. となり示す不等式が成り立つからである. また, $F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$ であるから, Fubini の定理と Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^m} F(x)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| \, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} F(x)^{p-1} |f(x,y)| \, dy \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} F(x)^{p-1} |f(x,y)| \, dx \, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^{q(p-1)} \, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_p \, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

と評価できるから, 両辺を $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} F(x)^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$ $(\neq 0)$ で割れば求める不等式が得られる. ■

Theorem 4.9
$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n), \varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(t^{-1}x), \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx = a$ とする. このとき以下のことが成り立つ.

(i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ ならば, $\|f * \varphi_t - af\|_p \to 0$ $(t \to 0)$ となる.

(ii) f が有界かつ一様連続ならば, $t \to 0$ のとき一様に, $f * \varphi_t \to af$ となる.

(iii) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ開集合 U 上で連続ならば, compact 集合 $K \subset U$ 上で $t \to 0$ のとき一様に, $f * \varphi_t \to af$ となる.

Proof.

(i) 合成積および a を積分表示し変数変換すると

$$
\begin{aligned}
(f * \varphi_t)(x) - af(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\varphi_t(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-tz) - f(x))\varphi(z)\,dz
\end{aligned}
$$

と変形できる. よって, 積分型の Minkowski の不等式を用いると

$$
\|f * \varphi_t - af\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz} f - f\|_p \,|\varphi(z)|\,dz
$$

が得られる.

ここで, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n), \|\tau_{tz} f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$ より Lebesgue の優収束定理および, 平行移動の L^p 連続性から, $\|f * \varphi_t - af\|_p \to 0$ $(t \to 0)$ となる.

(ii) (i) と同様にして

$$
(f * \varphi_t)(x) - af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-tz) - f(x))\varphi(z)\,dz
$$

が得られる.

ここで f の有界性より $|f(x-tz) - f(x)||\varphi(z)| \leq M|\varphi(z)|$ $(M > 0)$ となり, Lebesgue の優収束定理を使用することができる. また f の一様連続性より

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(f * \varphi_t)(x) - af(x)| &\leq \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x-tz) - f(x)|\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| \lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x-tz) - f(x)|\,dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる. ゆえに, 一様に $f * \varphi_t \to af$ となる.

(iii) $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\displaystyle\int_{E^c} |\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$ をみたす compact 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ が存在する.

また, t が十分小さいとき, $x - tz \in U$ $(x \in K, z \in E)$ となるから K の compact 性より Lemma 2.1 より $\displaystyle\sup_{x\in K, z\in E} |f(x-tz) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つことがわかる.

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in K} |f * \varphi_t(x) - af(x)| &\leq \int_E |f(x-tz) - f(x)||\varphi(z)|\,dz + \int_{E^c} |f(x-tz) - f(x)||\varphi(z)|\,dz \\
&< (\|\varphi\|_1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon
\end{aligned}
$$

となり, $t \to 0$ のとき一様に $f * \varphi_t \to af$ となる.

以上より, 題意は示された. ■

Theorem 4.10
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ 内で稠密である.

Proof. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\left\|f - f\chi_{B(0,R)}\right\|_p < \varepsilon$ を満たす $R > 0$ が存在する. これを 1 つ固定して R_0 とする. また, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$ であるようなものとし, $t > 0$ に対して ρ_t を軟化子とする.

$g_{t,R_0} = f\chi_{B(0,R_0)} * \rho_t$ とすると, Theorem 4.9 (i) より $\left\|f\chi_{B(0,R_0)} - g_{t,R_0}\right\|_p < \varepsilon$ を満たす $t > 0$ が存在する. これを 1 つ固定して t_0 とする. このとき $g_{t_0,R_0} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ である.

$$\|f - g_{t_0,R_0}\|_p \leq \left\|f - f\chi_{B(0,R_0)}\right\|_p + \left\|f\chi_{B(0,R_0)} - g_{t_0,R_0}\right\|_p < 2\varepsilon$$

となる.

以上より, 題意は示された. ■

第5章　おまけ

ここでは, 第 4 章までで示してきた数学的結果を用いて, 解析学で有用な結果をおまけ程度に紹介する. ただし, dx, μ 等は n 次元 Lebesgue 測度である.

Theorem 5.1 (Riemann-Lebesgue の定理)
$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき f の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\,dx$ に対して, $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$ が成り立つ.

Proof. $x = (x_1, \ldots, x_n), \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ とする. $|\xi| \to \infty$ のとき, $|\xi_j| \to \infty$ となる $1 \leq j \leq n$ が少なくとも 1 つ存在する. それを一般性を失うことなく $j = 1$ とする. このとき, $e^{-ix_1\xi_1} = -e^{-i\xi_1\left(x - \frac{\pi}{\xi_1}\right)}$ であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n) e^{-i\xi_1\left(x_1 - \frac{\pi}{\xi_1}\right)} e^{-i(x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n)}\,dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(x_1 + \frac{\pi}{\xi_1}, x_2, \ldots, x_n\right) e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)}\,dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x_1 + \frac{\pi}{\xi_1}, x_2, \ldots, x_n\right) e^{-ix\cdot\xi}\,dx
\end{aligned}
$$

となる. ただし, 途中で Lebesgue 測度の平行移動不変性を用いた.

よって, L^1 連続性から

$$
2|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x_1, \ldots, x_n) - f\left(x_1 + \frac{\pi}{\xi_1}, x_2, \ldots, x_n\right) \right| dx \to 0 \ (|\xi_1| \to \infty)
$$

となる.

以上より, 題意が成り立つことが示された. ■

参考文献

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, 1st edition, Academic Press INC. (1975)

[2] G. B. Folland, *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, INC. (1999).

[3] A. J. Weir, *Lebesgue Integration & Measure*, volume one, Cambridge University Press. (1973).