演習問題その 13 フーリエ変換 (3), 偏微分方程式 (1)

※以下、$y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする.

1. 次の関数をフーリエ変換せよ.
   (1) $\delta(x)$
   (2) $\sin k_0 x$　　(ただし k_0は定数)
   (3) $\theta(x)$
   ただし、$\theta(x)$ はヘビサイド関数；

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \ (x < 0) \\ 1 \ (x > 0). \end{cases}$$

2. (応用問題) 誘電体は電場をかけると分極する．誘電体に加える電場を $E(t)$ とすると，分極ベクトルの大きさ $P(t)$ は一般に

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t')E(t')dt'$$

とかける．ただし，χ は帯電率と呼ばれ，次のようにかける．

$$\chi(t) = \begin{cases} \chi_0 e^{-t/\tau_0} \ (t \geq 0) \\ 0 \ (t < 0) \end{cases}$$

ここで，χ_0, τ は定数である．電場 $E(t)$ を以下の形で加えたとき，$P(t)$ がどのような振る舞いをするかフーリエ変換を用いて求める．

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\epsilon t} \ (t \geq 0, \epsilon \to 0_+) \\ 0 \ (t < 0) \end{cases}$$

ここで，$\epsilon \to 0_+$ なので，$t = 0$ でほとんどヘビサイド関数的に電場を加えたことに相当する $(E(t) = E_0\theta(t))$．以下の問いに答えよ．

(1) $\chi(t), E(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[\chi(t)], \mathcal{F}[E(t)]$ を求めよ．また $\mathcal{F}[e^{-t/\tau}], \mathcal{F}[\theta(t)]$ を求めよ．

(2) フーリエ変換の合成積 (たたみ込み積分) によって、$P(t)$ のフーリエ変換は以下のようになる;

$$\mathcal{F}[P(t)] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[\chi(t)]\mathcal{F}[E(t)].$$

$P(t)$ 求めよ.
(ヒント：部分分数分解によって $\mathcal{F}[e^{-t/\tau}], \mathcal{F}[\theta(t)]$ に分解する)

3. 2 変数関数 $u(x, y)$ について、以下の偏微分方程式を解け.

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$$

(2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y$$

4. 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = xy$ を満たし、$x = 0$ で $u = e^{-y}$ に従って指数関数的に減少する解を求めよ.

(2) $u(x, y)$ についての偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 10x^4$ を解け.
ただし $u(x, 0) = x^2,\ u(0, y) = e^y - 1$ とする.

5. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ を満たす $u(x,y)$ のうち, $y = \pm 1$ で $u(x,y) = 0$, $y = 0$ で $u = x^2$ となるものを求めよ.

6. (超重要!) 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(\kappa > 0)$ を変数分離法で解け.

7. (超重要!) 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を変数分離法を用いて解け.

8. 2 次元極座標におけるラプラス方程式

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0$$

を $f(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ とする変数分離によって解け.

(ヒント:r の積分で困ったら過去の演習の「同次形微分方程式」を参照)