演習問題その 4 解答例

1.

デカルト座標系 (x, y, z) と円柱座標系 (ρ, ϕ, z) の間の座標変換を考える。

(1) (x, y, z) を (ρ, ϕ, z) を用いて表せ。また、(ρ, ϕ, z) を (x, y, z) を用いて表せ。

(2) $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ。また、$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ。

(解答例)

$$x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\ z = z$$

e_z はデカルト座標でも円筒座標でも共通である。$(\boldsymbol{e}_\rho,\, \boldsymbol{e}_\phi)$ と $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ は平面内を ϕ だけ回転させたものであるので、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

よって $\boldsymbol{e}_\rho = \cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z.$

いっぽう、式 (1.1) 両辺に逆行列をかける事で、
$\boldsymbol{e}_x = \cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi,\ \boldsymbol{e}_y = \sin\phi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi$ を得る。

(3) デカルト座標系で $\boldsymbol{A} = z\boldsymbol{e}_x - 2x\boldsymbol{e}_y + y\boldsymbol{e}_z$ と表されるベクトル $\boldsymbol{A}$ を円柱座標系で表せ。

(解答例)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= z(\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi) - 2\rho\cos\phi(\sin\phi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi) + \rho\sin\phi\boldsymbol{e}_z \\ &= (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi)\boldsymbol{e}_\rho - (z\sin\phi + 2\rho\cos^2\phi)\boldsymbol{e}_\phi + \rho\sin\phi\boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

2.

デカルト座標系 (x, y, z) と極座標系 (r, θ, ϕ) の間の座標変換を考える。

(1) (x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ。また、(r, θ, ϕ) を (x, y, z) を用いて表せ。

(2) $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$を $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$を用いて表せ。また、$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$を $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$を用いて表せ。

(解答例)

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right),\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = (x, y, z)$ とすると、極座標系の基底ベクトルは以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}/|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}|,\ \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}/|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}|,\ \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}/|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}|$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),\ |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}| = 1 \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta),\ |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}| = r \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= (-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0),\ |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}| = r\sin\theta
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}$$

逆行列をかけて、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix}$$

(3) 極座標系で、$\boldsymbol{A} = r^2 \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta$と表されるベクトル $\boldsymbol{A}$ をデカルト座標で表せ。

(解答例)

$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z$$

であるので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - r^2\sin^2\theta\boldsymbol{e}_z \\
&= (r\sin\theta\cos\phi)(r\cos\theta)\boldsymbol{e}_x + (r\cos\theta)(r\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{e}_y - (r^2 - r^2\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_z \\
&= xz\boldsymbol{e}_x + yz\boldsymbol{e}_y - (x^2+y^2)\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

3.

$f = x + 2y + z$ とする。極座標系での ∇f をそれぞれ求めよ。

(解答例)

f を球座標系で書きなおすと、

$$f = r\sin\theta\cos\phi + 2r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta$$

よって、

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi \\
&= (\sin\theta\cos\phi + 2\sin\theta\sin\phi + \cos\theta)\boldsymbol{e}_r \\
&\quad +(\cos\theta\cos\phi + 2\cos\theta\sin\phi - \sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\
&\quad +(2\cos\phi - \sin\phi)\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}$$

4.

円柱座標系 (ρ,ϕ,z) で $\boldsymbol{a}=\rho\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - z\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi+\rho z\boldsymbol{e}_z$ と表されるベクトル $\boldsymbol{a}$ について、$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$, $\nabla\times\boldsymbol{a}$ をそれぞれ求めよ。

(解答例)

$$\boldsymbol{a} \;=\; a_\rho\boldsymbol{e}_\rho + a_\phi\boldsymbol{e}_\phi + a_z\boldsymbol{e}_z$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{a} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\\
\nabla\times\boldsymbol{a} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\phi}-\frac{\partial a_\phi}{\partial z},\ \frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\phi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}$$

であるので、具体的に計算することにより、

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{a} &= \cos\phi\left(2-\frac{z}{\rho}\right)+\rho\\
\nabla\times\boldsymbol{a} &= \sin\phi\boldsymbol{e}_\rho - z\boldsymbol{e}_\phi+\sin\phi\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

5.

円柱座標系 $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z)$ について、以下の問いに答えよ。

(1)

基底ベクトルの時間微分が $\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\rho = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$, $\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\phi = -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\rho$ であることを示せ。

(解答例)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\rho &= \frac{d}{dt}(\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y) \\
&= \dot{\phi}(-\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y) = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\phi &= \frac{d}{dt}(-\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y) \\
&= \dot{\phi}(-\cos\phi\boldsymbol{e}_x - \sin\phi\boldsymbol{e}_y) = -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\rho
\end{aligned}$$

(2)

質点の速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$ を円筒座標系で表せ。

(解答例)

粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ を円柱座標系に書き直すと、
$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$ と書ける。これを時間微分して、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\frac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_z \\
&= \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z) \\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

6.

以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{a} = (3x^2 + y^2)\boldsymbol{e}_x + 2xy\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z$であるとき、$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z$ として次式を媒介変数 r, ϕ, z で表せ ($\boldsymbol{a}$ や $d\boldsymbol{r}$ を円柱座標系の基底ベクトルを用いて表す必要はない)

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

(解答例)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (3x^2 + y^2)\boldsymbol{e}_x + 2xy\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z \\
&= \{3(r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2\}\boldsymbol{e}_x + 2(r\cos\phi)(r\sin\phi)\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z \\
&= (r^2 + 2r^2\cos^2\phi)\boldsymbol{e}_x + 2r^2\sin\phi\cos\phi\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は、$\mathrm{d}x = \cos\phi\mathrm{d}r - \rho\sin\phi\mathrm{d}\phi,\ \mathrm{d}y = \sin\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\mathrm{d}\phi,\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z$ これらを用いて計算することで以下が得られる。

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (3r^2\cos\phi\mathrm{d}r - r^3\sin\phi\mathrm{d}\phi + z^2\mathrm{d}z)$$

(2) $z = 0$ 上の平面において、C が半径 3 の半円の弧を描くとき (1) の線積分の値を求めよ (つまり、C は $r = 3 =$ 一定$, \phi : [0 \to \pi]$ となる)

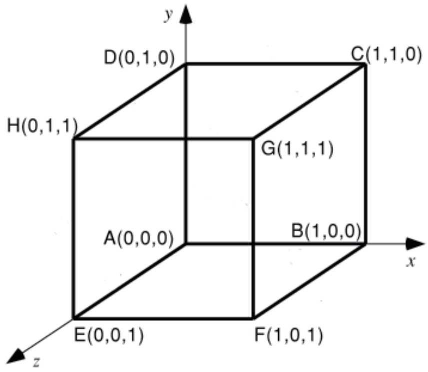
(解答例)

$r = 3,\ z = 0,\ \mathrm{d}r = 0,\ \mathrm{d}z = 0$ として、(1) の値は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (3r^2\cos\phi\mathrm{d}r - r^3\sin\phi\mathrm{d}\phi + z^2\mathrm{d}z) \\
&= \int_C (3\cdot 3^2\cos\phi\cdot 0 - 3^3\sin\phi\mathrm{d}\phi + 0) \\
&= \int_0^{\pi} (-27\sin\phi)\mathrm{d}\phi = -54.
\end{aligned}$$

7.

$\boldsymbol{b}=-z\boldsymbol{e}_x-3x^2y\boldsymbol{e}_y+2x^2y^2\boldsymbol{e}_z$ とする．図のような立方体の面 EFGH を除く 5 つの面を S とし，閉曲線 E → H → G → F → E を C とするとき，$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ と $\int_C\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を計算することにより，ストークスの定理が成り立っていることを確かめよ．



（解答例）

まず面積分を計算する．$\nabla\times\boldsymbol{b}=4x^2y\boldsymbol{e}_x-(1+4xy^2)\boldsymbol{e}_y-6xy\boldsymbol{e}_z$ であるので，立方体の各面について $(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を考えると，

面 ABCD : $z=0,\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\Rightarrow(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=6xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$
面 AEFB : $y=0,\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x\quad\Rightarrow(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$
面 ADHE : $x=0,\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad\Rightarrow(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,$
面 BCGF : $x=1,\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad\Rightarrow(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4y\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$
面 CDHG : $y=1,\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x\quad\Rightarrow(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-(4x+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$

従って，

$$\begin{aligned}\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint_{\mathrm{ABCD}}(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\mathrm{AEFB}}(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&+\iint_{\mathrm{BCGF}}(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\mathrm{CDHF}}(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\int_0^1\int_0^1 6xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\int_0^1\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_0^1\int_0^1 4y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\int_0^1\int_0^1(4x+1)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2}+1+2-3=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

次に線積分を計算する．媒介変数 t $(0\le t\le 1)$ を用いると各経路における $\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は，

E → H : $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_y\Rightarrow\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0,$
H → G : $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_x\Rightarrow\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\mathrm{d}t,$
G → F : $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x+(1-t)\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_y\Rightarrow\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=3(1-t)\mathrm{d}t,$
F → E : $\boldsymbol{r}=(1-t)\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z,\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\mathrm{d}t\boldsymbol{e}_x\Rightarrow\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}t.$

よって

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{H}\to\mathrm{G}} \boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{G}\to\mathrm{F}} \boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{F}\to\mathrm{E}} \boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{d}t + 3\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t \\
&= 3\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

以上より，$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 3/2$ なのでストークスの定理は成り立っている．

8.

放物面 $z = 1-(x^2+y^2)$ のうち，$z \geq 0$ の領域を S とする．$\boldsymbol{a} = -2y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ とするとき，$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし，$d\boldsymbol{S}$ の向きは $+z$ 方向とする。
（ヒント：面積分しない）
（解答例）

放物面と平面 $z=0$ との交線である円 $x^2+y^2=1$ を反時計回りに回る経路を C とする．媒介変数 t $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を用いて，C 上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{e}_x + \sin t\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，$\boldsymbol{a} = -2\sin t\boldsymbol{e}_x + \cos t\boldsymbol{e}_y$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\sin t\boldsymbol{e}_x + \cos t\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}t$ となるので，

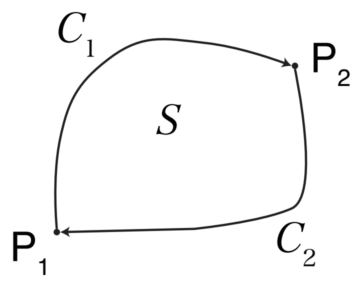
$$
\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (2\sin^2 t + cos^2 t)\mathrm{d}t = (1+\sin^2 t)\mathrm{d}t.
$$

ストークスの定理より

$$
\begin{aligned}
\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 3\pi.
\end{aligned}
$$

9.

ある場から物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ が、スカラー場 ϕ を用いて $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ と書けるとき、この力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であることを示せ。ただし、保存力とは、任意の 2 点間を移動するときになされる仕事が経路に依らないような力のことである。
(ヒント:任意のスカラー場 ϕ に対して $\nabla\times(\nabla\phi)$ をとると...?)
（解答例）



図のような空間中の任意の異なる 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ と，2 点をつなぐ任意の異なる 2 経路 C_1 ($\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2$)，$C_2$ ($\mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_1$) を考え，$C_1$ と C_2 に囲まれた領域を S とする．
いま，質点が経路 $C_1 + C_2$ を移動する間に場からなされる仕事は，ストークスの定理より

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1+C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= -\iint_S (\nabla \times \nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= 0 \quad (\text{任意のスカラー場}\phi\text{に対して } \nabla \times (\nabla\phi) = 0)
\end{aligned}$$

となる．これより，

$$\oint_{C_1+C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{-C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

ここで，経路 $-C_2$ は P_1 と P_2 を結ぶ C_1 とは異なる経路である．上式が任意の C_1，C_2 で成り立つので，任意の点 P_1 から P_2 までを移動する間に場からなされる仕事は，その経路によらない．従って $\boldsymbol{F}$ は保存力である．

10. $+\alpha$ 問題

任意の直交曲線座標系 (円柱座標系や球座標系など)q_1, q_2, q_3 における ∇f の表記が以下の通りであることを示したい。

$$\nabla f = \frac{\partial f}{h_1 \partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial q_3}\boldsymbol{e}_3$$

ただし、$\delta \boldsymbol{r} = \delta x \boldsymbol{e}_x + \delta y \boldsymbol{e}_y + \delta z \boldsymbol{e}_z = h_1 \delta q_1 \boldsymbol{e}_1 + h_2 \delta q_2 \boldsymbol{e}_2 + h_3 \delta q_3 \boldsymbol{e}_3$ である。

(1) まずデカルト座標系において $(x, y, z) \to (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ となったときの f の変化量δf を求めることにより、$\nabla f \cdot \delta \boldsymbol{r}$ となることを示せ。

(解答例)

$$\begin{aligned}
\delta f &= f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f(x, y, z) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x \cdot \delta x \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y \cdot \delta y \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \cdot \delta z \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

ここで、$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$, $\delta \boldsymbol{s} = \delta x \boldsymbol{e}_x + \delta y \boldsymbol{e}_y + \delta z \boldsymbol{e}_z$ より以下のようになる。

$$\delta f = \nabla f \cdot \delta \boldsymbol{s}.$$

(2) 次に任意の直交曲線座標系で $(q_1, q_2, q_3) \to (q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3)$ となったときの f の変化量δf を求め、題意を示せ。

(解答例)

$$\begin{aligned}
\delta f &= f(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3) - f(q_1, q_2, q_3) \\
&= \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3}\delta q_3 \\
&= \frac{\partial f}{h_1 \partial q_1}(h_1 \delta q_1) + \frac{\partial f}{h_2 \partial q_2}(h_2 \delta q_2) + \frac{\partial f}{h_3 \partial q_3}(h_3 \delta q_3)
\end{aligned}$$

ここで、$\delta \boldsymbol{r} = h_1 \delta q_1 \boldsymbol{e}_1 + h_2 \delta q_2 \boldsymbol{e}_2 + h_3 \delta q_3 \boldsymbol{e}_3$ より以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta f &= \frac{\partial f}{h_1 \partial q_1}\boldsymbol{e}_1 \cdot (h_1 \delta q_1)\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial y}\boldsymbol{e}_2 \cdot (h_2 \delta q_2)\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial z}\boldsymbol{e}_3 \cdot (h_3 \delta q_3)\boldsymbol{e}_3 \\
&= \left(\frac{\partial f}{h_1 \partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial z}\boldsymbol{e}_3 \right) \cdot \delta \boldsymbol{s}
\end{aligned}$$

(1) より $\delta f = \nabla f \cdot \delta \boldsymbol{s}$ だったので

$$\nabla f = \frac{\partial f}{h_1 \partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial q_3}\boldsymbol{e}_3$$

である。よって題意が示された。

(3) 上記の結果を用いて、極座標系における ∇f を求めよ。

補足：$h_i (i=1,2,3)$ について、

$$h_i \delta q_i \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial x}{\partial q_i}\delta q_i \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_i}\delta q_i \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_i}\delta q_i \boldsymbol{e}_z$$

となるので h_i は以下のように表せる：

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

(解答例)

極座標では、$\boldsymbol{r} = (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ となる。
$q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \phi$ とおけば、$h_r,\ h_\theta,\ h_\phi$ はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned}
h_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1 \\
h_\theta &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r \\
h_\phi &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} = r\sin\theta
\end{aligned}$$

よって、∇f は、

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

(4)　時間が余った人向け

(3) で求めた、極座標についての ∇ を用いて Δf が以下のように記述できることを示せ。

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

補足:
$\Delta f = \nabla\cdot(\nabla f)$. 極座標の単位ベクトルの座標微分 ($\frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\theta$ など) はゼロでないことに注意。

(解答例)

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \nabla\cdot(\nabla f)\\
&= \left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi\right)\\
&= \dots\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$

球座標の単位ベクトルの微分は値を持つことを考慮し、項をまとめると Δf の表式が得られる (途中計算は省略)。