演習問題その 12 フーリエ変換 (2)

※以下、$y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする.

1. 次の関数をフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ (-T < x < 0) \\ 0 \ (x = 0) \\ 1 \ (0 < x < T) \end{cases}$$

2. $f(x) = e^x$(周期 $2\pi, -\pi < x < \pi$) を指数関数型のフーリエ級数に展開せよ.

3. 以下の問に答えよ.

(1) 次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ (第 11 回演習問題参照).

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi,\ \text{周期}\ 2\pi)$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ のフーリエ係数に対して

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2 \mathrm{d}x \qquad (\text{パーセバルの等式})$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1),(2) の結果を用いて以下の等式を示せ.

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

4. 次の積分値を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^2-a^2)e^{ix}\mathrm{d}x$$

5. デルタ関数の定義により次の関係式を証明せよ.

$$x\delta'(x) + \delta(x) = 0 \qquad \text{(ヒント：部分積分を用いる)}$$

6. 2 階の定数係数線形の微分方程式

$$y'' + 3y' + 2y = e^{ix}$$

の特殊解をフーリエ変換を用いて求める．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{F}[e^{ix}] = \sqrt{2\pi}\delta(k-1)$ を示せ.

(2) 任意の関数 $f(k)$ に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-k_0)\mathrm{d}k = f(k_0)$ を示せ.

(3) $y(x)$ のフーリエ変換を $Y(k)$ として、与えられた微分方程式より、$Y(u)$ を u とデルタ関数を用いて表せ.

(4) (3) で求めた $Y(k)$ をフーリエ逆変換せよ．(得られる $y(x)$ は与えられた微分方程式を満たす特殊解である)

$+\alpha$問題

7. 次の積分値を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x-1)\sin\pi x \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x$

8. $\mathcal{F}[f(x)] = F(k),\ \mathcal{F}[g(x)] = G(k)$ として、次の等式を証明せよ.

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)\mathrm{d}t$$

(2) $$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{k}{a}) \qquad (a \text{ は実定数})$$

9. $\phi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ が区間 $[a,b]$ で正規直交関数系を作るとき、以下の関係式が成立する. 以下の問いに答えよ.

$$\int_a^b \phi_m^*(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm} \qquad (\delta_{nm}\text{はクロネッカーのデルタ})$$

(1) 関数 $f(x)$ が $\phi_n(x)$ を用いて、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

と級数展開できるとすれば、係数 c_n は、

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x$$

より決められることを示せ.(c_n を一般化フーリエ係数という)

(2) 関数 $\phi_m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で正規直交関数系を作ることを示せ.