

演習問題その 12 小テスト

学籍番号： _____, 氏名： _____

1. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) フーリエ変換とフーリエ逆変換の定義式を書け.

(2) $\mathcal{F}[e^{ix}] = \sqrt{2\pi}\delta(k-1)$ を示せ.

演習問題その12 小テスト 解答例

1. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) フーリエ変換とフーリエ逆変換の定義式を書け.

(解答例)

$$\text{フーリエ変換は、}\mathcal{F}[f(x)] = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$$\text{フーリエ逆変換は、}\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{+ikx} dk$$

(2) $\mathcal{F}[e^{ix}] = \sqrt{2\pi}\delta(k-1)$ を示せ.

(解答例) フーリエ変換の定義式より、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{ix}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(1-k)x} dx\end{aligned}$$

デルタ関数の積分表示より、

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx$$

これを $k \rightarrow 1-k$ と書き直すことで与式が得られる.

(採点基準) 10 点満点.

(1) フーリエ変換、逆変換それぞれ+3 点.

(2)

$\mathcal{F}[e^{ix}]$ が明記されていて+2 点.

$\delta(k-1)$ の表式が説明されていて+2 点 (いちおう証明問題なので最低限の説明がないものは減点した).

そのほか、オマケで加点してある. ちなみに (2) はフーリエ逆変換を用いても解くことができる.