演習問題その 9 常微分方程式 (4)

※以下 $x', \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ とする.

1. 次の 1 階連立微分方程式を解け.

(1)

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + e^t \\ x_2' = x_1 + e^{-t} \end{cases}$$

ヒント：定数変化法

2. 次の 3 元連立微分方程式を解け.

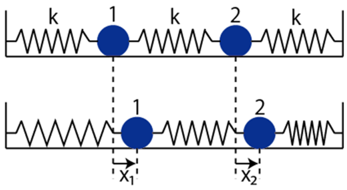
(1)

$$
\begin{cases}
x_1' = -x_1 + x_2 \\
x_2' = -x_2 + 4x_3 \\
x_3' = x_1 - 4x_3
\end{cases}
$$

3. a を定数とする.連立微分方程式 $\frac{dx}{dt} + ay = 0,\ ax - \frac{dy}{dt} = 0$ を解け.また、その解 (x, y) はどんな図形を描くか.

4.

等質量 m のおもり 1,2 がバネにつながれている. 各バネのバネ定数は全て同じ k である. 以下の問いに答えよ.



(1) おもり 1, 2 それぞれの平衡点からの変位を x_1, x_2としておもりの運動方程式を求めよ.

(2) x_1, x_2の一般解を求めよ.

$+\alpha$問題

5. 次の 1 階連立微分方程式を解け.

(1)

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + \cos t \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 + \sin t \\ x'_2 = x_1 + \cos t \end{cases}$$

6.

(1)　以下の連立微分方程式を解け.ただしΩ, ηは定数とする.

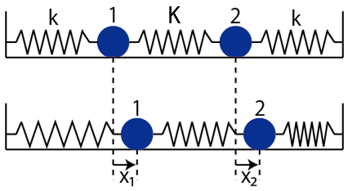
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = -\eta x \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = 0 \end{cases}$$

7.

等質量 m のおもり 1,2 がバネにつながれている. 各バネのバネ定数は図の通り (順に k, K, k) である. このとき、おもり 1,2 のそれぞれの変位を x_1, x_2 としてそれぞれのおもりの運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + K(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1), \end{cases}$$

となる. 初期条件として、おもり 1,2 の速度をそれぞれ $\dot{x}_1 = 2\sqrt{(k+K)/m}$, $\dot{x}_2 = -2\sqrt{K/m}$ としたときの $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ.



(解答欄つづき)

8. 動物生態学では、カナダオオヤマネコの個体数と野ウサギの個体数が 10 年程度の時間で振動することが知られている。以下、このダイナミクスを簡単なモデルで数理化することを考える。

被食者 (野ウサギ) の個体数を X、捕食者 (カナダオオヤマネコ) の個体数を Y とおく。ここで個体数は実数で近似する。被食者は草食動物で、自然出生率に応じて $\frac{dX}{dt} = AX$ にて指数関数的に増殖する。ただし捕食者があると、その数に比例して食われるために、個体数変化には $-BXY$ の減少効果が見込まれる。

一方、捕食者 Y の増加率は被食者数に比例する $\frac{dY}{dt} = CXY$ と考えられるが、被食者がいなければ自然減少するので、個体数変化には $-DY$ の減少効果が含まれる。これらの効果を総合することによって、以下の非線形連立微分方程式が得られる；

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BY)X \\ \dot{Y} = (CX - D)Y \end{cases}$$

この方程式はロトカ＝ヴォルテラ方程式と呼ばれ、振動解を持つことが知られている。
以下の問いに答えよ。

(1) この方程式は非線形 (XY の項を含む) なので、解析的に解くことが難しい。そこでここでは簡単のため、$\dot{X} = \dot{Y} = 0$ を満たす不動点 $(X, Y) = (D/C, A/B)$ からのずれ $(x, y) = (X - D/C, Y - A/B)$ を考えることにする。$|x|, |y|$ が小さいとして $\mathcal{O}(xy)$ の項を無視することにより、以下の線形連立微分方程式を導出せよ。

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{BD}{C} y \\ \dot{y} = \frac{CA}{B} x \end{cases}$$

(2)

x, y に関する (1) の微分方程式を解くことによって、y が x の振動に $\pi/2$ だけ遅れて追従することを示せ。