物理数学　2016.04.18

演習問題その 4 小テスト

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. デカルト座標系で，$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y + \left(x^2 + y^2\right)\boldsymbol{e}_z$ と表示されるベクトル $\boldsymbol{a}$ を，図のような円柱座標系 (ρ, ϕ, z) で表せ.

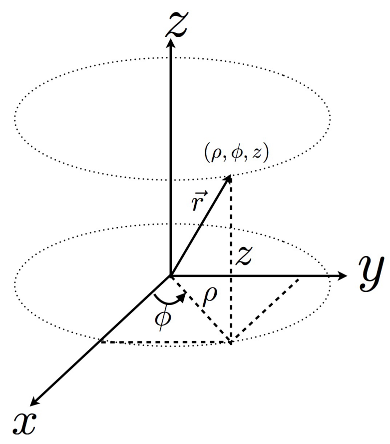
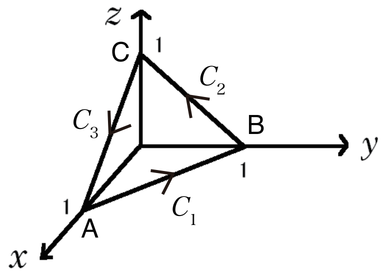


図 1: 円柱座標系

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2. 図のように点 A，B，C をそれぞれ $(x, y, z) = (1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ とする．このときベクトル $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + y\boldsymbol{e}_z$ を点 A→ 点 B→ 点 C→ 点 A の経路で線積分せよ．



演習問題その 4 小テスト　解答例

1. デカルト座標系で，$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y + \left(x^2 + y^2\right)\boldsymbol{e}_z$ と表示されるベクトル $\boldsymbol{a}$ を，図のような円柱座標系 (ρ, ϕ, z) で表せ.

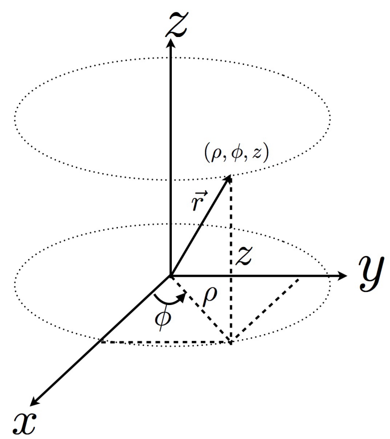


図 2: 円柱座標系

（解答例）

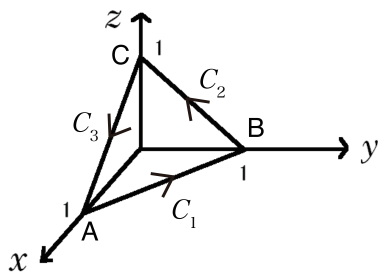
$x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi$ であり，さらに

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= \cos\phi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi \\
\boldsymbol{e}_y &= \sin\phi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \\
\boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

であるので，代入して整理すると，

$$
\boldsymbol{a} = -\rho\boldsymbol{e}_\phi + \rho^2\boldsymbol{e}_z.
$$

2. 図のように点 A，B，C をそれぞれ $(x, y, z) = (1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ とする．このときベクトル $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + y\boldsymbol{e}_z$ を点 A→ 点 B→ 点 C→ 点 A の経路で線積分せよ．



(解答例)
まず経路 C_1 について考える。
経路 C_1 上の位置ベクトルは，媒介変数 t $(0 \le t \le 1)$ を用いて $\boldsymbol{r} = (1-t)\boldsymbol{e}_x + t\boldsymbol{e}_y$ と書けるから，$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}t$．$z = 0, x = 1-t, y = t$ に注意して，経路 C_1 上での線積分を計算すると，

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^1 (x\boldsymbol{e}_y + y\boldsymbol{e}_z) \cdot (-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

経路 C_2, C_3 については $x = 1-t, y = t, z = 0$ を $x = 0, y = 1-t, z = t$ あるいは $x = t, y = 0, z = 1-t$ に変えることで C_1 の場合と全く同様に計算できるので，

$$\oint_C \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 3\int_{C_1} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{3}{2}$$