物理数学演習 2016/05/16

演習問題その 12 フーリエ変換 (2)

※以下、$y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ とする.

1. 次の関数をフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ (-T < x < 0) \\ 0 \ (x = 0) \\ 1 \ (0 < x < T) \end{cases}$$

(解答例) 周期 $2T$ の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right),$$
$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} \mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} \mathrm{d}x.$$

$f(x)$ を代入して a_n, b_n を計算すると、

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \frac{n\pi x}{T} \mathrm{d}x + \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \left(-\sin \frac{n\pi x}{T} \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\}$$

これらを $f(x)$ に代入することにより、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \sin \frac{n\pi x}{T} \right]$$

2. $f(x) = e^x$(周期 $2\pi, -\pi < x < \pi$) を指数関数型のフーリエ級数に展開せよ.
(解答例)$e^{\neq in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$ であることに注意すると、展開係数は、

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-in)x}}{1 - in} \right] = \frac{(-1)^n (e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi(1 - in)}$$

よって複素級数展開したものは、

$$e^x = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{(1 - in)}$$

3. 以下の問に答えよ．

(1) 次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ (第 11 回演習問題参照)．

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi,\ \text{周期 } 2\pi)$$

(解答例)

周期 2π の関数 $f(x)$ は以下の形にフーリエ級数展開できる．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x.$$

$f(x) = x^2$ を代入して a_n，b_n を計算すると，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n. \qquad (n \neq 0) \end{aligned}$$

また，$x^2 \sin nx$ は奇関数なので，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \mathrm{d}x = 0.$$

これらを $f(x)$ に代入することにより，

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx\right).$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ のフーリエ係数に対して

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2 \mathrm{d}x \quad \text{(パーセバルの等式)}$$

が成り立つことを示せ．(解答例)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の両辺を 2 乗すると，

$$
\begin{aligned}
\{f(x)\}^2 = &\frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \times \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\
= &\frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)(a_m \cos mx + b_m \sin mx).
\end{aligned}
$$

よって，与式の右辺は，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2 \mathrm{d}x = &\frac{1}{\pi}\frac{a_0^2}{4}\,[x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{a_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n a_m \cos nx \cos mx + b_n a_m \sin nx \cos mx \\
&+ a_n b_m \cos nx \sin mx + b_n b_m \sin nx \sin mx)\mathrm{d}x \\
= &\frac{a_0^2}{2} + 0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\pi a_n a_m \delta_{nm} + \pi b_n b_m \delta_{nm}) \\
= &\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).
\end{aligned}
$$

ただし，δ_{nm} はクロネッカーのデルタ．以上より，パーセバルの等式が示された．

(3) (1),(2) の結果を用いて以下の等式を示せ．

$$
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.
$$

(解答例)

(1) で求めた $-\pi < x < \pi$ での $f(x) = x^2$ のフーリエ展開を使う．

このとき，

$$
a_0 = \frac{2\pi^2}{3}\ ,\ a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n\ ,\ b_n = 0.
$$

また，(2) より，

$$\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{5}\pi^4.$$

よって、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

4. 次の積分値を計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^2-a^2)e^{ix}\mathrm{d}x$$

(解答例)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^2-a^2)e^{ix}\mathrm{d}x=\frac{1}{2|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}e^{ix}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2|a|}(e^{ia}+e^{-ia})=\frac{\cos a}{|a|}$$

5. デルタ関数の定義により次の関係式を証明せよ.

$$x\delta'(x) + \delta(x) = 0 \qquad (\text{ヒント：部分積分を用いる})$$

(解答例)

両辺に性質の良い (何度も微分可能で $x \to \pm\infty$ で急激に 0 になる) 関数 $\varphi(x)$ をかけ、区間 $[-\infty, \infty]$ で積分することで証明する. この場合は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)x\delta'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$

を示せばよい. 部分積分することにより、

$$(\text{左辺}) = [\varphi(x)x\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)x\delta(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x = -\varphi(0)$$

$$(\text{右辺}) = -\varphi(0) \qquad (\text{デルタ関数の定義より})$$

よって、(左辺)=(右辺) となり与式は示された.

6. 2 階の定数係数線形の微分方程式

$$y'' + 3y' + 2y = e^{ix}$$

の特殊解をフーリエ変換を用いて求める．以下の問に答えよ．

(1)　$\mathcal{F}[e^{ix}] = \sqrt{2\pi}\delta(k-1)$ を示せ.

(解答例)

フーリエ変換の定義式より、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{ix}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}e^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(1-k)x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

デルタ関数の積分表示より、

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}x$$

これを $k \to 1-k$ と書き直すことで与式が得られる.

(2)　任意の関数 $f(k)$ に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-k_0)\mathrm{d}k = f(k_0)$ を示せ.

(解答例)

左辺において $x = k - k_0$, $f(x+k_0) = g(x)$ として、デルタ関数の定義、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = g(0)$$

に適用すると与式を得る.

(3)　$y(x)$ のフーリエ変換を $Y(k)$ として、与えられた微分方程式より、$Y(k)$ を k とデルタ関数を用いて表せ.

(解答例)

与えられた微分方程式の両辺をフーリエ変換する．

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (ik)^n F(k)$$

であるから，与式の左辺は,

$$(\text{左辺}) = (ik)^2 Y(k) + 3\cdot ikY(k) + 2Y(k)$$

となる．一方、与式の右辺は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{ix}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-1)x}dx \\ &= \sqrt{2\pi}\delta(u-1).\end{aligned}$$

となる．ここで、デルタ関数の積分表示、

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dx$$

を用いた．これを整理することで，

$$Y(k) = \frac{\sqrt{2\pi}\delta(k-1)}{-k^2+3ik+2}.$$

(4) (3) で求めた $Y(k)$ をフーリエ逆変換せよ．(得られる $y(x)$ は与えられた微分方程式を満たす特殊解である) (解答例)

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Y(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(k-1)}{-k^2+3ik+2}e^{ikx}\mathrm{d}k.$$

ここで $f(k) = e^{ikx}\left(-k^2+3ik+2\right)^{-1}$ と置けば，問 (2) の結果より，

$$y(x) = f(1) = \frac{e^{ix}}{1+3i}.$$

(追記)

線形微分方程式の一般解は特殊解と斉次解の線形結合で表される．
いま，斉次微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ の一般解は $y = C_1e^{-1} + C_2e^{-2x}$ であるから，与式の微分方程式の一般解は，

$$y = C_1e^{-1} + C_2e^{-2x} + \frac{e^{ix}}{1+3i}.$$

(※斉次解は特性方程式より容易に求められる．各自で確かめよ)

$+\alpha$問題

7. 次の積分値を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2x-1)\sin\pi x\mathrm{d}x$

(解答例)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2x-1)\sin\pi x\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})\sin\pi x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x$

(解答例)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}-\frac{\delta(x)}{x}(x^2-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)(1-x)\mathrm{d}x = 1\end{aligned}$$

8. $\mathcal{F}[f(x)] = F(k),\ \mathcal{F}[g(x)] = G(k)$ として、次の等式を証明せよ.

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)\mathrm{d}t$$

(解答例)

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\mathrm{d}t\right)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)\mathrm{d}t \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

(2) $$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{k}{a}) \qquad (a \text{ は実定数})$$

(解答例)

$a > 0$ のとき、$ax = X$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(ax)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-iu\frac{X}{a}}\cdot\frac{1}{a}\mathrm{d}X \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-i\frac{u}{a}X}\mathrm{d}X\right) \\
&= \frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a}\right)
\end{aligned}$$

$a < 0$ のときも同様にする. 積分区間に注意して、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(ax)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(X)e^{-iu\frac{X}{a}}\cdot\frac{1}{a}\mathrm{d}X \\
&= -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-i\frac{u}{a}X}\mathrm{d}X\right) \\
&= -\frac{1}{a}F\left(\frac{u}{a}\right)
\end{aligned}$$

したがって、与式が導かれる.

9. $\phi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が区間 $[a, b]$ で正規直交関数系を作るとき、以下の関係式が成立する. 以下の問いに答えよ.

$$\int_a^b \phi_m^*(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm} \qquad (\delta_{nm}\text{はクロネッカーのデルタ})$$

(1) 関数 $f(x)$ が $\phi_n(x)$ を用いて、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

と級数展開できるとすれば、係数 c_n は、

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x$$

より決められることを示せ.(c_n を一般化フーリエ係数という)

(解答例)

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ の両辺に $\phi_m(x)$ をかけて、x について区間 $[a, b]$ で積分すると、

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x$$

$\{\phi_n(x)\}$ は正規直交関数系をつくるから、

$$\int_a^b \phi_m^*(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm} \qquad (\delta_{nm}\text{はクロネッカーのデルタ})$$

したがって、

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x = c_m.$$

(2) 関数 $\phi_m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}$ $(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ は区間 $[-\pi,\pi]$ で正規直交関数系を作ることを示せ.

(解答例)

$n\neq m$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m^*(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-imx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)x}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}\{e^{i(n-m)\pi}-e^{-i(n-m)\pi}\}=0\end{aligned}$$

$n=m$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m^*(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-imx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}\mathrm{d}x\\&=1\end{aligned}$$

よって、$\{\phi_m(x)\}$ は正規直交関数系となる.