演習問題その 13 解答例

1. 次の関数をフーリエ変換せよ.

(1) $\delta(x)$

(解答例)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\delta(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

(2) $\sin k_0 x$　　(ただし k_0は定数)

(解答例)

$\sin k_0 x = (e^{ik_0x} - e^{-ik_0x})/2i$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin k_0 x] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{ik_0x}-e^{-ik_0x}}{2i}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_0x}-e^{-ik_0x}}{2i}e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-i(k-k_0)x}dx - \int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-i(k+k_0)x}dx\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i}\left(2\pi\delta(k-k_0) - 2\pi\delta(k+k_0)\right) \\ &= \frac{i\pi}{\sqrt{2\pi}}(\delta(k+k_0) - \delta(k-k_0))\end{aligned}$$

(3) $\theta(x)$

ただし、$\theta(x)$ はヘビサイド関数；

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \ (x<0) \\ 1 \ (x>0). \end{cases}$$

(解答例)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\theta(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-ik}e^{-ikx}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

2. (応用問題) 誘電体は電場をかけると分極する．誘電体に加える電場を $E(t)$ とすると，分極ベクトルの大きさ $P(t)$ は一般に

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t')E(t')dt'$$

とかける．ただし，χ は帯電率と呼ばれ，次のようにかける．

$$\chi(t) = \begin{cases} \chi_0 e^{-t/\tau_0} \ (t \geq 0) \\ 0 \ (t < 0) \end{cases}$$

ここで，χ_0, τ は定数である．電場 $E(t)$ を以下の形で加えたとき，$P(t)$ がどのような振る舞いをするかフーリエ変換を用いて求める．

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\epsilon t} \ (t \geq 0, \epsilon \to 0_+) \\ 0 \ (t < 0) \end{cases}$$

ここで，$\epsilon \to 0_+$ なので，$t = 0$ でほとんどヘビサイド関数的に電場を加えたことに相当する ($E(t) = E_0\theta(t)$)．以下の問いに答えよ．

(1) $\chi(t), E(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[\chi(t)], \mathcal{F}[E(t)]$ を求めよ．また $\mathcal{F}[e^{-t/\tau}], \mathcal{F}[\theta(t)]$ を求めよ．

(解答例)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\chi(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{-ikt} dt = \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} e^{-ikt} dt \\ &= \frac{\chi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+ik\right)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\chi_0}{\frac{1}{\tau}+ik} \end{aligned}$$

これは、$1/\sqrt{2\pi}(1/\tau + ik)$ が $e^{-t/\tau}$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[e^{-t/\tau}] = 1/\sqrt{2\pi}(1/\tau + ik)$ であることを示している。また、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[E(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-ikt} dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t} e^{-ikt} dt \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon+ik)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{E_0}{\epsilon + ik} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{E_0}{ik} \ (\epsilon \to 0_+) \end{aligned}$$

これは、$1/ik\sqrt{2\pi}$ が階段関数 $\theta(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[\theta(t)] = 1/ik\sqrt{2\pi}$ であることを示している。

(2) フーリエ変換の合成積 (たたみ込み積分) によって、$P(t)$ のフーリエ変換は以下のようになる;

$$\mathcal{F}[P(t)] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[\chi(t)]\mathcal{F}[E(t)].$$

$P(t)$ 求めよ.
(ヒント：部分分数分解によって $\mathcal{F}[e^{-t/\tau}], \mathcal{F}[\theta(t)]$ に分解する)
(解答例)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[P(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\chi_0 E_0}{i\omega\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} = \frac{\chi_0 E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{i\omega} - \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}}\right) \\ &= \chi_0 E_0 \tau \left\{\mathcal{F}[\theta(t)] - \mathcal{F}[e^{-t/\tau}]\right\} \\ &= \mathcal{F}\left[\chi_0 E_0 \tau \left(\theta(t) - e^{-t/\tau}\right)\right]\end{aligned}$$

したがって

$$P(t) = \chi_0 E_0 \tau \left(\theta(t) - e^{-t/\tau}\right)$$

3. 2 変数関数 $u(x,y)$ について、以下の偏微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$

（解答例）

まず y で積分する．x のみに依存する任意関数 $f(x)$ を用いて，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + f(x)$$

さらに x で積分する．$f(x)$ を x で積分しても x の関数であることに変わりはないので，$\mathrm{d}g(x)/\mathrm{d}x = f(x)$ となる $g(x)$ を用いて，

$$u(x,y) = \frac{1}{2}xy(x+y) + g(x) + h(y).$$

ここで $g(x)$ は x のみに，$h(y)$ は y のみに依存する任意関数.

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y$

（解答例）

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}x^2 + xy + f(y) \\ \Leftrightarrow u(x,y) &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + f(y)x + g(y).\end{aligned}$$

ただし $f(y)$, $g(y)$ は y のみに依存する関数.

4. 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = xy$ を満たし、$x=0$ で $u = e^{-y}$ に従って指数関数的に減少する解を求めよ.
(解答例)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= xy \\ \Leftrightarrow u &= \frac{1}{2}x^2 y + f(y) \end{aligned}$$

$x=0$ における条件式を代入すると、

$$\begin{aligned} e^{-y} &= f(y) \\ u &= \frac{1}{2}x^2 y + e^{-y}. \end{aligned}$$

(2) $u(x,y)$ についての偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 10x^4$ を解け.
ただし $u(x,0) = x^2,\ u(0,y) = e^y - 1$ とする.
(解答例)
x, y で順に積分していくと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 2x^5 + f(y). \\ u &= 2x^5 y + g(y) + h(x). \qquad \left(f = \frac{dg}{dy} \right) \end{aligned}$$

条件式より,

$$u(x,0) = g(0) + h(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad h(x) = x^2 - g(0). \tag{1}$$
$$u(0,y) = g(y) + h(0) = e^y - 1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = e^y - 1 - h(0) = e^y + g(0) - 1. \quad (\because (1)\ \text{式})$$

$$\therefore\ g(y) + h(x) = x^2 + e^y - 1.$$

よって　$u(x,y) = 2x^5 y + x^2 + e^y - 1.$

5. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ を満たす $u(x,y)$ のうち, $y=\pm 1$ で $u(x,y)=0,\ y=0$ で $u=x^2$ となるものを求めよ.

(解答例)

$u = X(x)Y(y)$ とおく. 与式に代入すると,

$$yX(x)\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} = X(x)\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}.$$

ここで $X(x)$ は両辺にかかっているので, 任意の関数 $f(x)$ である. 両辺を X で割って,

$$y\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}.$$

ここで $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} = p$ とおくと,

$$yp' = p \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}.$$

$$\therefore \ln|p| = \ln|y| + C'. \qquad (C'\text{は積分定数})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} = p = Cy. \qquad \left(C = \pm e^{C'}\right)$$

$$\therefore\ Y = C_1 y^2 + C_2. \qquad \left(C_1 = \frac{C}{2}\text{とした}\right)$$

よって $u(x,y) = f(x)y^2 + g(x)$. 境界条件より $f(x),\ g(x)$ を求めると,

$y=\pm 1$ で $u=0$ より $f(x) = -g(x)$.

また, $y=0$ で $u=x^2$ より $x^2 = g(x)$.

よって求める解は $u(x,y) = -x^2y^2 + x^2$.

6. (超重要!) 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(\kappa > 0)$ を変数分離法で解け.
(解答例)

$u = T(t)X(x)$ と変数分離し、

$$X\frac{dT}{dt} = \kappa T \frac{d^2X}{dx^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\kappa T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \omega$$

と定数 ω で置く. これを解くと、

(i) $\omega = 0$ の場合

$$\begin{aligned} T &= C_1. \\ X &= C_2 x + C_3. \\ \therefore \quad u(x,t) &= Ax + B. \end{aligned}$$

(ii) $\omega < 0$ の場合

$$\begin{aligned} T &= C_1 e^{\kappa\omega t}. \\ X &= C_2 \sin\sqrt{-\omega}x + C_3 \cos\sqrt{-\omega}x. \\ \therefore \quad u(x,t) &= e^{\kappa\omega t}\left(A\sin\sqrt{-\omega}x + B\cos\sqrt{-\omega}x\right). \end{aligned}$$

(iii) $\omega > 0$ の場合

$$\begin{aligned} T &= C_1 e^{\kappa\omega t}. \\ X &= C_2 e^{\sqrt{\omega}x} + C_3 e^{-\sqrt{\omega}x}. \\ \therefore \ u &= e^{\kappa\omega t}\left(Ae^{\sqrt{\omega}x} + Be^{-\sqrt{\omega}x}\right). \end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3 は積分定数. また、$C_1C_2 = A,\ C_1C_3 = B$ とした.

7. (超重要!) 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を変数分離法を用いて解け.

(解答例)

$u(x,t) = X(x)T(t)$ とおく (変数分離). このとき、

$$X \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = c^2 T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = c^2 \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}. \quad \cdots (a)$$

左辺は t のみに、右辺は x のみに依存し、これらが x, t の値によらず等しいので、(a) 式の両辺はていすうである. この定数を λ とおくと、

(i) $\lambda = 0$ のとき

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ T = C_1 t + C_2.$$

$$c^2 \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ X = C_3 x + C_4.$$

$$\therefore \quad u(x,t) = (C_1 t + C_2)(C_3 x + C_4).$$

(ii) $\lambda < 0$ のとき

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = \lambda < 0 \ \Leftrightarrow\ T = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}t.$$

$$c^2 \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda < 0 \ \Leftrightarrow\ X = C_3 \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x + C_4 \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x.$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \left(C_1 \sin\sqrt{-\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}t\right)\left(C_3 \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x + C_4 \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right).$$

(iii) $\lambda > 0$ のとき

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = \lambda > 0 \ \Leftrightarrow\ T = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

$$c^2 \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda > 0 \ \Leftrightarrow\ X = C_3 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + C_4 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \left(C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}\right)\left(C_3 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + C_4 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}\right).$$

8. 2 次元極座標におけるラプラス方程式

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0$$

を $f(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ とする変数分離によって解け.
(ヒント:r の積分で困ったら過去の演習の「同次形微分方程式」を参照)
(解答例)

$f(r,\ \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ より

$$\begin{aligned}\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial (R\Phi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (R\Phi)}{\partial \phi^2} = 0.\\ \Leftrightarrow\ \frac{\Phi}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0.\\ \Leftrightarrow\ \frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0.\end{aligned}$$

第 1 項は r のみに、第 2 項は ϕ のみに依存し、これらが r,ϕ の値によらず等しいので、どちらも定数である. この定数を λ とおくと、

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = \lambda.$$

(i)$\lambda = 0$ の場合、
(第 1 項)$= 0$ から、

$$\begin{aligned}\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = 0\ \Leftrightarrow\ r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = C_1 = \mathrm{const.}\\ \Leftrightarrow\ R = C_1\ln(r) + C_2.\quad (C_2 = \mathrm{const.}.)\end{aligned}$$

(第 2 項)$= 0$ から、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0\ \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi} = C_3 = \mathrm{const.}\\ \Leftrightarrow\ \Phi = C_3\phi + C_4.\quad (C_4 = \mathrm{const.}.)\end{aligned}$$

以上より

$$f = \left(C_1\ln(r) + C_2\right)\left(C_3\phi + C_4\right).$$

(ii) $\lambda < 0$ の場合

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -\lambda > 0$$

$$\Leftrightarrow\ \Phi = C_3 e^{\sqrt{-\lambda}\phi} + C_4 e^{-\sqrt{-\lambda}\phi} \qquad (C_n = \text{const.}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4))$$

また、

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda < 0$$

$$\therefore\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$

これは $r = e^u$ とおくと $(\mathrm{d}r = e^u \mathrm{d}u)$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}u}\right) = \lambda < 0$$

$$\Leftrightarrow\ R = C_1 e^{i\sqrt{-\lambda}u} + C_2 e^{-i\sqrt{-\lambda}u} = C_1 r^{i\sqrt{-\lambda}} + C_2 r^{-i\sqrt{-\lambda}}.$$

よって、

$$f = \left(C_1 r^{i\sqrt{-\lambda}} + C_2 r^{-i\sqrt{-\lambda}}\right)\left(C_3 e^{\sqrt{-\lambda}\phi} + C_4 e^{-\sqrt{-\lambda}\phi}\right).$$

(iii)$\lambda > 0$ の場合

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -\lambda < 0$$

$$\Leftrightarrow\ \Phi = C_3 \sin\sqrt{\lambda}\phi + C_4 \cos\sqrt{\lambda}\phi.$$

また、

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda > 0.$$

これは $r = e^u$ とおくと $(\mathrm{d}r = e^u \mathrm{d}u)$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}u}\right) = \lambda > 0$$

$$\Leftrightarrow\ R = C_1 e^{\sqrt{\lambda}u} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}u} = C_1 r^{\sqrt{\lambda}} + C_2 r^{-\sqrt{\lambda}}.$$

よって、

$$f = \left(C_1 r^{\sqrt{\lambda}} + C_2 r^{-\sqrt{\lambda}}\right)\left(C_3 \sin\sqrt{\lambda}\phi + C_4 \cos\sqrt{\lambda}\phi\right).$$