演習問題その 5 解答例

1.

次の行列 A の行列式を解け。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(解答例)
余因子展開しやすくなるように、行列式を基本変形していく。

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = -180. \end{aligned}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3a \\ ab & 2b & 3ab \\ 4 & 3a^2 & 12 \end{pmatrix}$$

(解答例)
(1 列) − (3 列) × (1/3) の基本変形を行うと、

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 3a \\ ab & 2b & 3ab \\ 4 & 3a^2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & 2b & 3ab \\ 0 & 3a^2 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

2.

次の行列 A の固有値、固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(解答例)
2 次の単位行列と求める固有値をそれぞれ E, λ として固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を解くと、

$$|A - \lambda E| \;=\; \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \;=\; \lambda^2 - 5\lambda + 4 \;=\; 0$$

$$\text{よって、}\lambda \;=\; 4,\; 1$$

対応する固有ベクトルは $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ を求めればよい。

- $\lambda = 4$ のとき、

$$(A - 4E)\boldsymbol{x} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{0}$$

$$\text{よって、}x_1 + x_2 = 0$$

  これを満たすすべての $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトル。ここで $x_1 = \alpha$ とおけば、$x_2 = \alpha$ となり求める固有ベクトルは以下のように表せられる (ただし α は任意の定数)。

$$\boldsymbol{x} \;=\; \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 1$ のとき、

$$(A - E)\boldsymbol{x} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{0}$$

$$\text{よって、}2x_1 + x_2 = 0$$

  $x_1 = \alpha$ とおけば、$x_2 = -2\alpha$ となり求める固有ベクトルは以下のように表せられる (ただし α は任意の定数)。

$$\boldsymbol{x} \;=\; \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3.

以下のヤコビアンを求めよ。

(1)

$$
\begin{aligned}
u &= x + y + z, \\
v &= 3x + 4y + 8z, \\
w &= 2x + 2y + z,
\end{aligned}
$$

のヤコビアン $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z)$.

(解答例)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 4 + 6 + 16 - (8 + 3 + 16) \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

(2) a, b, c を定数とするとき、

$$
\begin{aligned}
x &= u + v + w, \\
y &= au + bv + cw, \\
z &= a^2 u + b^2 v + c^2 w,
\end{aligned}
$$

のヤコビアン $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$.

(解答例)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\
&= ab^2 + bc^2 + ca^2 - (a^2 b + b^2 c + c^2 a) \\
&= -ab(a-b) + c(a^2 - b^2) - c^2(a-b) \\
&= (a-b)(-ab + bc + ca - c^2) \\
&= (a-b)\{b(c-a) - c(c-a)\} \\
&= (a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}
$$

4.

円柱座標系 (ρ, ϕ, z)、球座標系 (r, θ, ϕ) での微小体積 dV をヤコビアンの計算から求めよ。

(解答例)

- 円柱座標系

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

であり、微小体積は $dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)}\right| d\rho d\phi dz$ であるから、まずヤコビアンを計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \rho d\rho d\phi dz
\end{aligned}$$

よって微小体積は、$dV = |\rho d\rho d\phi dz| = \rho d\rho d\phi dz.$

- 球座標系

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

であり、微小体積は $dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| dr d\theta d\phi$ であるから、まずヤコビアンを計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= -r^2\sin\theta dr d\theta d\phi
\end{aligned}$$

よって微小体積は、$dV = |-r^2\sin\theta dr d\theta d\phi| = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi.$

5.

楕円体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$ 中の位置ベクトルは、球座標系を用いて

$$\begin{aligned} x &= ar\sin\theta\cos\phi \\ y &= br\sin\theta\sin\phi \\ z &= cr\cos\theta \end{aligned}$$

で表される。微小体積を積分することによって、この楕円体の体積を求めよ。

(解答例)

微小体積は $dV=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right|drd\theta d\phi$ であるから、まずヤコビアンを計算する。

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\phi & ar\cos\theta\cos\phi & -ar\sin\theta\sin\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

よって微小体積は、$dV=|-abcr^2\sin\theta drd\theta d\phi|=abcr^2\sin\theta drd\theta d\phi.$
もとめる体積は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abcr^2\sin\theta drd\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi}{3}abc \end{aligned}$$

.