Grundlagen der Theoretischen Informatik

Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Heribert Vollmer

Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Link für Kurzfragen:

URL: https://pingo.coactum.de/events/739935

Bitte scannen!

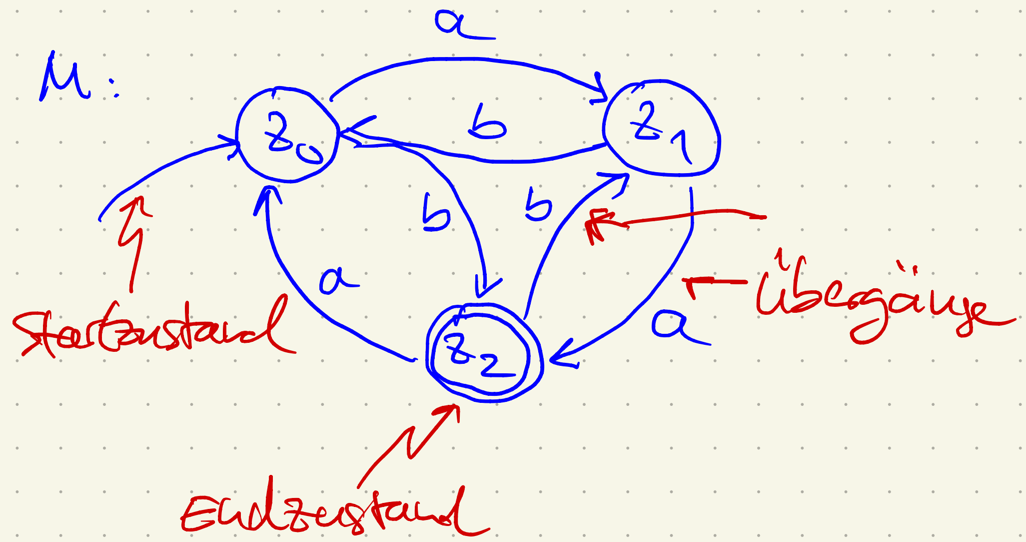
URL: https://pingo.coactum.de/events/739935

Inhalt

Reguläre Sprachen

Endliche Automaten: Ein Beispiel

M:



Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$

Beispiel für Eingabe	Zustand nach Lesen des Wortes
$aaba \in L(M)$	z_2 akz.
$aabaa$	z_0
$aabaab \in L(M)$	z_2 akz.

$L(M)$ = die von M akz. Sprache

$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit

$Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\delta(z_0, a) = z_1$

$E = \{z_2\}$, $\delta(z_0, b) = z_2$

$$\hat{\delta}(z_0, aab) = \hat{\delta}(\underbrace{\delta(z_0, a)}, ab)$$

$$\notin \quad = \hat{\delta}(z_1, ab)$$

$$L(M) \quad \hat{\delta}(\underbrace{\delta(z_1, a)}, b)$$

$$\hat{\delta}(z_2, b) = \hat{\delta}(\delta(z_2, b), \varepsilon)$$

$$= \hat{\delta}(z_1, \varepsilon) = z_1$$

Definition „Syntax"

Ein (deterministischer) endlicher Automat (kurz: DEA) ist ein 5-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E),$$

wobei für die einzelnen Komponenten gilt:

- Z ist eine endliche Menge, die so genannte Zustandsmenge
- Σ ist ein Alphabet, das so genannte Eingabealphabet, $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- $\delta\colon Z \times \Sigma \to Z$ ist die so genannte Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ ist der so genannte Startzustand
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der so genannten Endzustände

$\delta(z, a) = z'$ bedeutet:
Ist M im Zust. z und liest Zeichen a,
so wechselt M in Zustand z'.

Definition

„Semantik“

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DEA. Die erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\delta}$: $Z \times \Sigma^* \to Z$ ist (induktiv) definiert wie folgt:

$\hat{\delta}(z, \varepsilon) = z$ für alle $z \in Z$

$\hat{\delta}(z, ax) = \hat{\delta}(\delta(z, a), x)$ für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$

Die von M akzeptierte Sprache ist

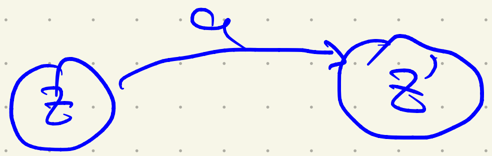
$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(z_0, x) \in E\}.$$

$\delta(z, w) = z'$ bedeutet:

Ist M im Zust. z und liest Wort w, so ist der Automat danach im Zustand z'!

Determinismus vs. Nichtdeterminismus

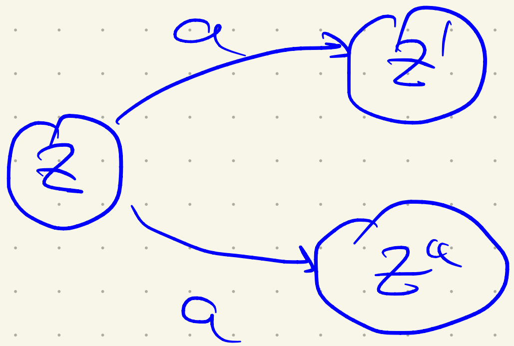
Deterministische EA:



$z \in Z$
$a \in \Sigma$

$$\delta : Z \times \Sigma \to Z$$

Für jeden Zustand z und jedes Zeichen a gibt es genau einen Folgezustand / Pfeil, der von z ausgeht und mit a beschriftet ist.



$\delta(z, a) = \{z', z''\}$

Für $z \in Z$, $a \in \Sigma$

- mehrere Pfeile erlaubt
- kein Pfeil

$$\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$$

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (kurz: NEA) ist ein 5-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E),$$

wobei für die einzelnen Komponenten gilt:

- Z, Σ, z_0 und E sind wie bei deterministischen endlichen Automaten definiert
- Für die Überführungsfunktion gilt: $\delta \colon Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$. $\mathcal{P}(Z)$ ist die Potenzmenge von Z. Für $z \in Z$ und $a \in \Sigma$ ist also $\delta(z, a)$ eine Menge von möglichen Folgezuständen

Definition

Wir definieren $\hat{\delta}$: $\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ wie folgt:
$\hat{\delta}(Z', \varepsilon) = Z'$ für alle $Z' \subseteq Z$
$\hat{\delta}(Z', ax) = \bigcup_{z \in Z'} \hat{\delta}(\delta(z, a), x)$ für alle $Z' \subseteq Z$, $a \in \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$.

Die von M akzeptierte Sprache ist

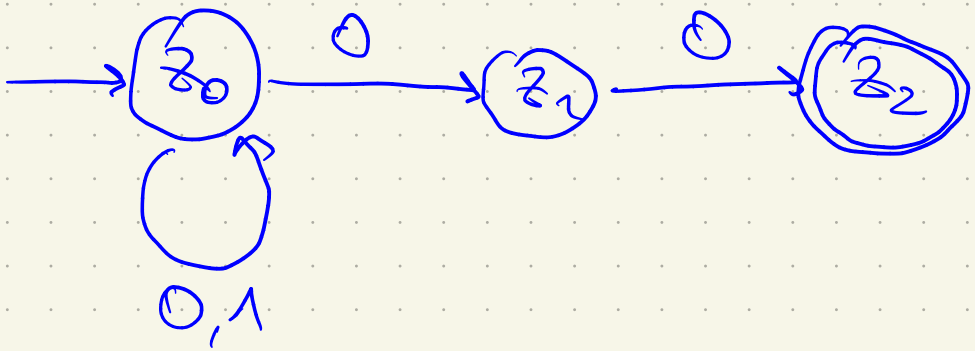
$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\{z_0\}, x) \cap E \neq \emptyset\}.$$

<u>Idee:</u> $\hat{\delta}(Z', w)$ = Menge der Zustände, die M erreichen kann, wenn w gelesen wird bei Start in einem Zustand aus Z'

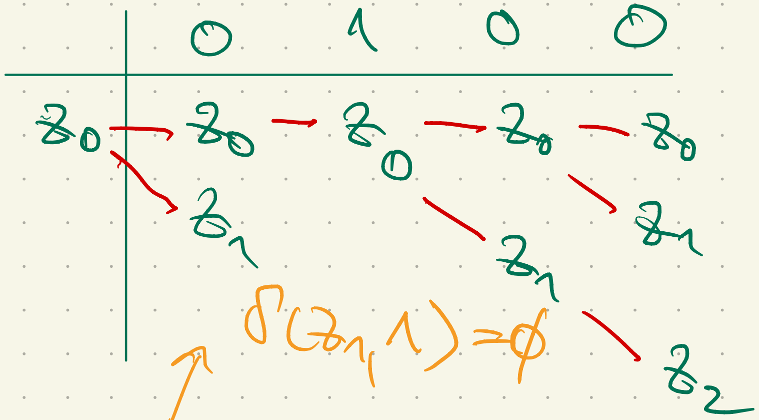
$Z' \subseteq Z$

Beispiel für einen NEA:

$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{0, 1\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit δ wie folgt:



Beispieleingabe: $w = 0100$



$w \in L(M)$

$\delta(z_1, 1) = \emptyset$

$\hat{\delta}(\{z_0\}, 0) = \{z_0, z_1\}$

Jedes DEA „ist" ein NEA mit $|\delta(z,a)| = 1$ f.a. $z \in Z, a \in \Sigma$.

Umkehrung?

Satz

Zu jedem NEA M existiert ein DEA M' mit $L(M) = L(M')$.

Beweis: Idee: Zustände des DEA $\hat{=}$ Mengen von Zuständen von M

„Potenzmengenkonstruktion"

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben.

Definiere DEA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ wie folgt:

- $Z' = \mathcal{P}(Z)$
- $z_0' = \{z_0\}$
- $E' = \{X \subseteq Z \mid X \cap E \neq \emptyset\}$
- $\delta'(X, a) = \bigcup_{z \in X} \delta(z, a) = \hat{\delta}(X, a)$

f. $X \subseteq Z$, $a \in \Sigma$

Es gilt: $w = a_1 a_2 \dots a_n$

$w \in L(M)$

$\iff$ es gibt $z_1, z_2, \dots, z_n \subseteq Z$ mit $\delta(\{z_0\}, a_1) = z_1$

$z_{i+1} = \hat{\delta}(z_i, a_{i+1})$ f. $1 \leq i < n$

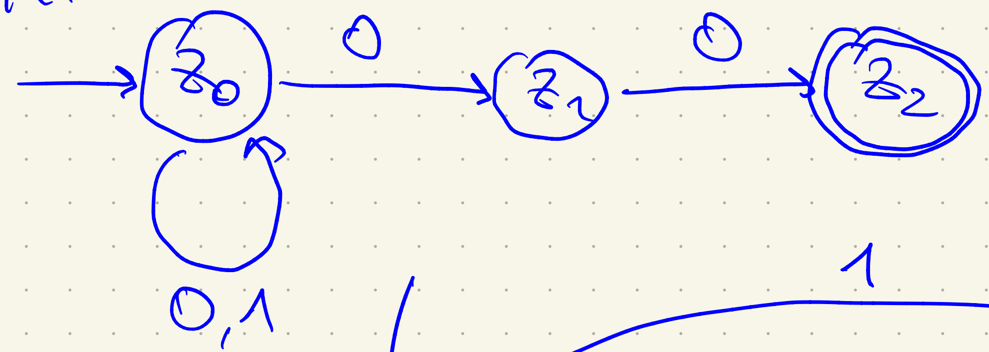
und $z_n \cap E \neq \emptyset$

$\iff$ es gibt $z_1, \dots, z_n \in Z'$ mit $\delta'(z_0', a_1) = z_1$, $\delta'(z_i, a_{i+1}) = z_{i+1}$

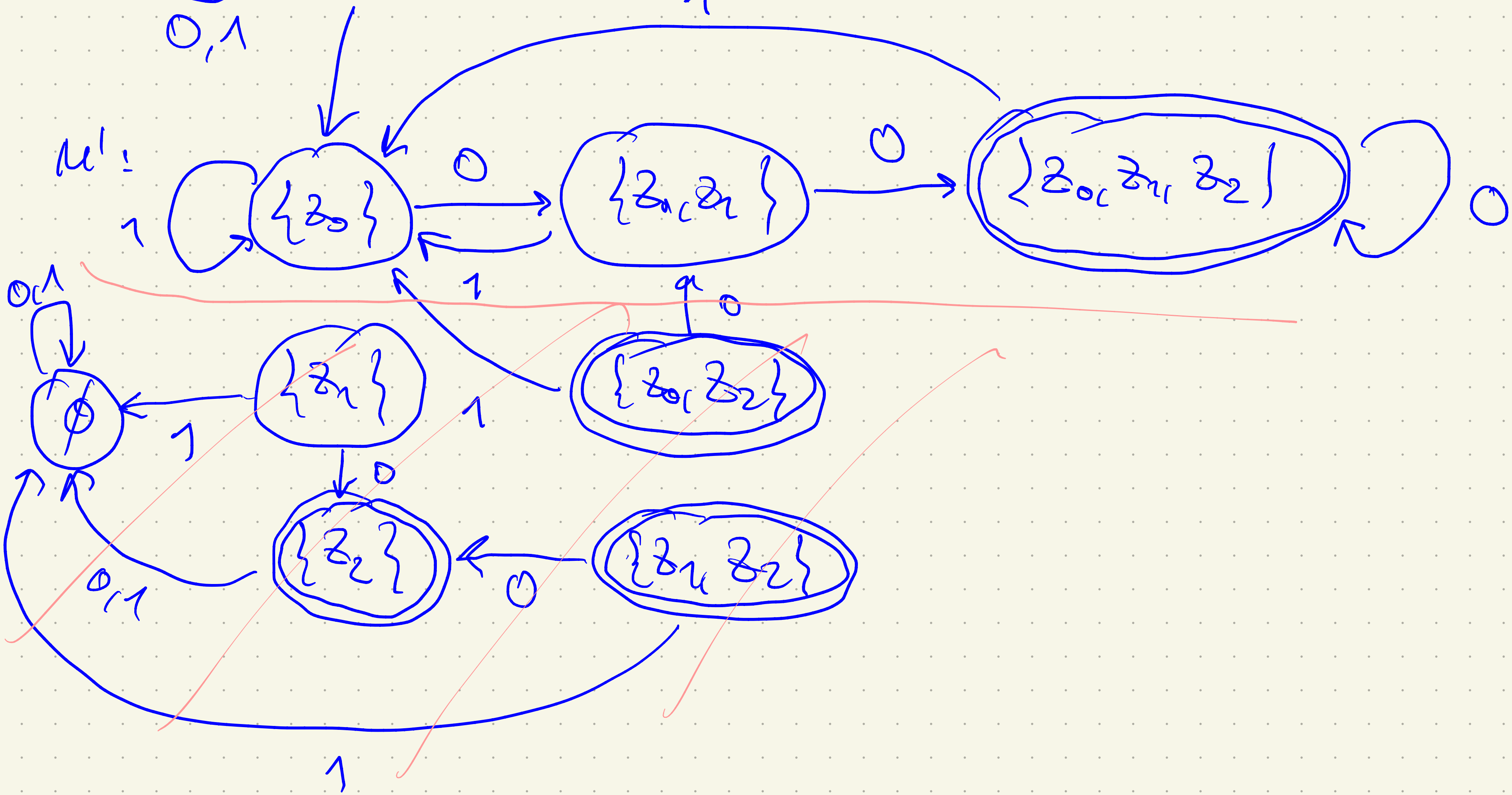
$z_n \in E'$ $\iff$ $w \in L(M')$ $\square$

Beispiel für die Methode des Beweises:

M:



M'!



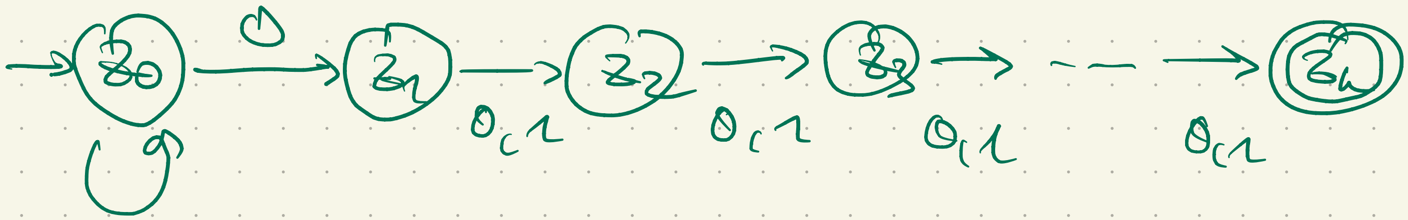
Wozu also überhaupt NEAs?

Sei $k \geq 1$.

$$L_k = \{ w \in \{0,1\}^* \mid |w| \geq k \text{ und das } k\text{-te Zeichen in } w \text{ von rechts ist „}0\text{"} \}$$

$$L_2 = \{00, 01, 000, 001, 100\}$$

NEA:



$k+1$ Zustände

Man kann zeigen:
Jeder DEA, der L_k akzeptiert, hat $\geq 2^k$ Zustände.