Grundlagen der Theoretischen Informatik

Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Heribert Vollmer

Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

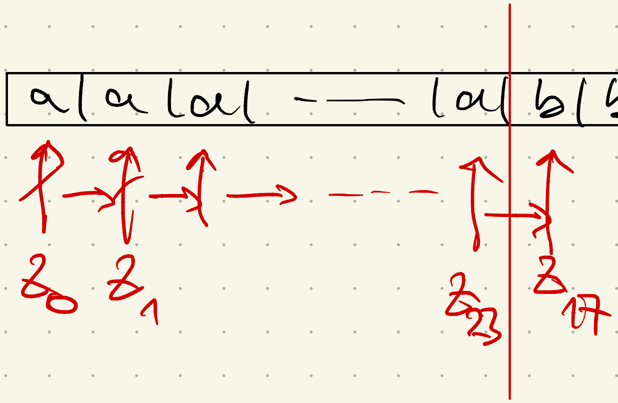
Link für Kurzfragen:

URL: https://pingo.coactum.de/events/739935

Inhalt

Kontextfreie Sprachen

Warum ist $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nicht regulär?



kein Hilfsspeicher

endl. viele Zustände

endl. Information über den gelesenen Teil der Eingabe

notwendig hier: genaue Anzahl der gel. Zeichen a

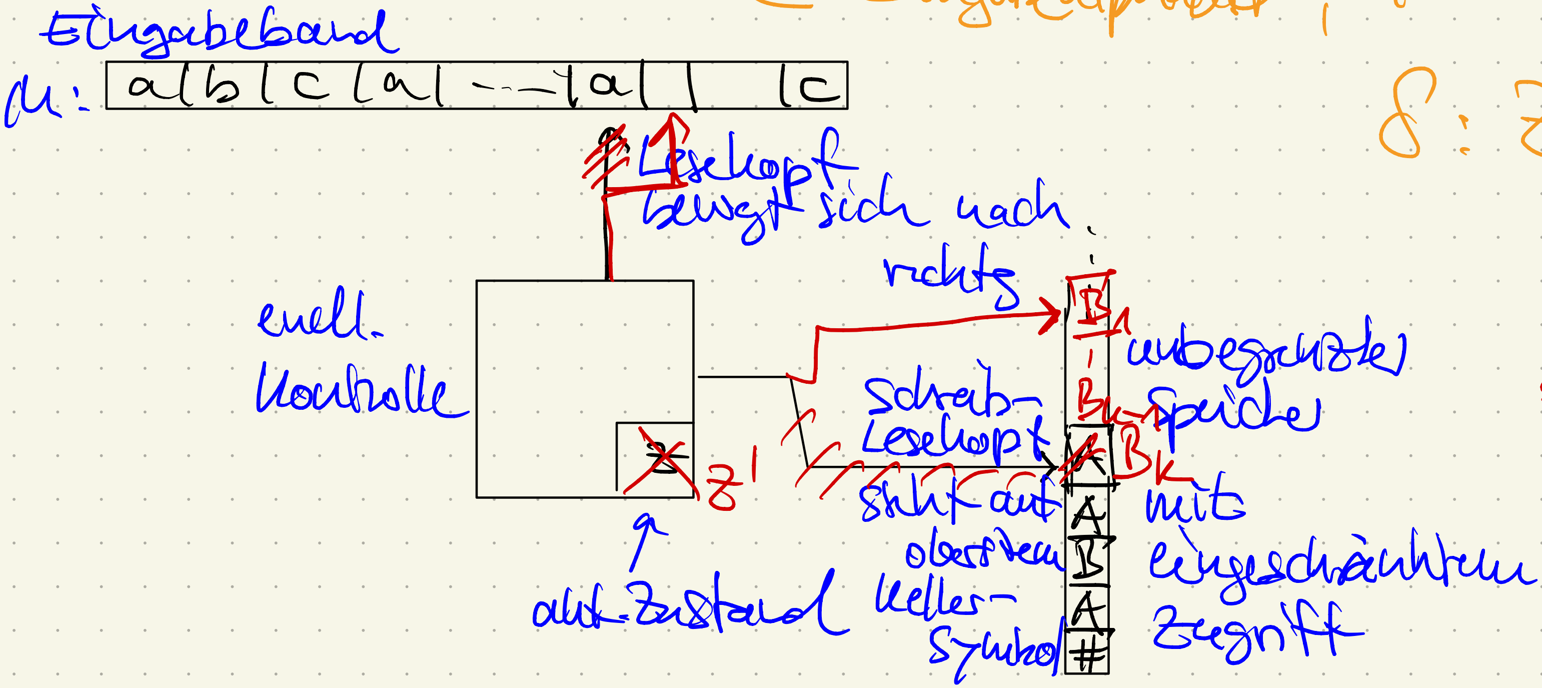
müssen Automaten um unbegrenzten Speicher erweitern

Kellerautomaten

nichtdeterministisch!

Σ – Eingabealphabet ; Γ – Kelleralphabet

$$\delta: Z \times \Sigma \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^*)$$



z.B.

$$\delta(z, a, A) = (z', B_1 - B_k$$

Abhängig von
- aktuellen Zustand von M
- dem gelesenen Zeichen auf dem Eingabeband
- gelesenem (obersten) Kellersymbol

führt M folgende Aktionen durch:
- Eingabekopf eine Zelle nach rechts
- Zustand ändert sich
- oberstes Kellersymbol wird ersetzt durch Folge von Kellersymbolen

Beispiel: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

$L = L(M)$ für folgenden NKA

$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{\#, \underline{A}, A\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$,

wobei δ wie folgt definiert ist:

$\delta(z_0, a, \#) \ni (z_0, A)$

$\delta(z_0, a, A) \ni (z_0, AA)$

$z_0 a \# \rightarrow z_0 \underline{A}$

$z_0 a \underline{A} \rightarrow z_0 A \underline{A}$

$z_0 a A \rightarrow z_0 A A$

$z_0 b A \rightarrow z_1 \varepsilon$

$z_0 b \underline{A} \rightarrow z_2 \varepsilon$

$z_1 b A \rightarrow z_1 \varepsilon$

$z_1 b \underline{A} \rightarrow z_2 \varepsilon$

Definition

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat (NKA, Pushdown Automaton (PDA)) ist ein 7-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E),$$

wobei für die einzelnen Komponenten gilt:

- Z ist die endliche Menge der Zustände
- Σ ist das Eingabealphabet
- Γ ist das Kelleralphabet
- δ: $Z \times \Sigma \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^*)$ ist die Überführungsfunktion. Es gilt: $\delta(z, a, A)$ ist endlich für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand
- $\# \in \Gamma$ ist das unterste Kellersymbol
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände

Erläuterung der Arbeitsweise

Startkonfiguration:

M befindet sich am Anfang im Zustand z_0. Der Eingabekopf steht auf dem ersten Zeichen der Eingabe. Der Keller enthält lediglich das Symbol $\#$.

Zustandsübergang:

$\delta(z, a, A) \ni (z', B_1, \ldots, B_k)$ bedeutet:
Ist M im Zustand z, liest das Eingabezeichen a und ist A das oberste Kellersymbol, so kann M in den Zustand z' übergehen und das Kellersymbol A durch die Symbole $B_1, \ldots, B_k$ (B_1 wird oberstes Kellersymbol) ersetzen. Der Eingabekopf wandert eine Position nach rechts.
($z, z' \in Z$, $a \in \Sigma$, $A, B_1, \ldots, B_k \in \Gamma$.)

Erläuterung der Arbeitsweise

Ende der Rechnung:

- Eingabe ganz gelesen
- oder keine Einträge in δ passen zur aktuellen Situation, d. h. M stürzt ab, beispielsweise dadurch, dass der Keller geleert wurde.

Akzeptierte Sprache:

Ein Eingabewort wird akzeptiert, falls ein Zustand aus E angenommen wird, nachdem die Eingabe ganz gelesen wurde. Genauer: Falls es eine Folge von nichtdeterministischen Wahlmöglichkeiten gibt, sodass M einen Endzustand annimmt, nachdem die Eingabe ganz gelesen wurde.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$$

Beispiel 1: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$L = L(M)$ für den NKA

$$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{\#, A, \underline{A}\}, \delta, z_0, \{z_2\}),$$

wobei δ wie folgt definiert ist:

$$\begin{array}{ll} z_0 a\# \to z_0 \underline{A} & (1) \\ z_0 a\underline{A} \to z_0 A\underline{A} & (2) \\ z_0 aA \to z_0 AA & (3) \\ & \\ z_0 bA \to z_1 \varepsilon & (4) \\ z_0 b\underline{A} \to z_2 \varepsilon & (5) \\ & \\ z_1 bA \to z_1 \varepsilon & (6) \\ z_1 b\underline{A} \to z_2 \varepsilon & (7) \end{array}$$

Beispiel 1a: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$w = \text{aaabbb}$

Zustand	Rest der Eingabe	Kellerinhalt	Befehl
z_0	aaabbb	#	(1)
z_0	aabbb	$\underline{A}$	(2)
z_0	abbb	$A\underline{A}$	(3)
z_0	bbb	$AA\underline{A}$	(4)
z_1	bb	$A\underline{A}$	(6)
z_1	b	$\underline{A}$	(7)
z_2	ε	ε	

Damit gilt also aaabbb $\in L(M)$.

Beispiel 1b: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$w = \text{aaabb}$

Zustand	Rest der Eingabe	Kellerinhalt	Befehl
z_0	aaabb	#	(1),(2),(3)
z_0	bb	$AA\underline{A}$	(4)
z_1	b	$A\underline{A}$	(6)
z_1	ε	$\underline{A}$	

An dieser Stelle ist die Eingabe ganz gelesen und kein Endzustand erreicht worden, also gilt: aaabb $\notin L(M)$.

Beispiel 1c: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$w = \mathrm{abb}$

Zustand	Rest der Eingabe	Kellerinhalt	Befehl
z_0	abb	#	(1)
z_0	bb	$\underline{A}$	(5)
z_2	b	ε	

An dieser Stelle ist kein weiterer Befehl möglich und die Eingabe ist noch nicht vollständig gelesen worden, also gilt: $\mathrm{abb} \notin L(M)$.

Beispiel 2: $L = \{w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$ $\subseteq \{a, b, \$\}^*$

w „rückwärts"

$L = L(M)$ für den NKA

$$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B, \underline{A}, \underline{B}\}, \delta, z_0, \{z_2\}),$$

wobei δ wie folgt definiert ist:

einlesen $ auslesen

$z_0 a \# \to z_0 \underline{A}$	$z_0 a \underline{A} \to z_0 A \underline{A}$	$z_0 a A \to z_0 A A$	$z_0 a \underline{B} \to z_0 A \underline{B}$	$z_0 a B \to z_0 A B$
$z_0 b \# \to z_0 \underline{B}$	$z_0 b \underline{A} \to z_0 B \underline{A}$	$z_0 b A \to z_0 B A$	$z_0 b \underline{B} \to z_0 B \underline{B}$	$z_0 b B \to z_0 B B$
	$z_0 \$ \underline{A} \to z_1 \underline{A}$	$z_0 \$ A \to z_1 A$	$z_0 \$ \underline{B} \to z_1 \underline{B}$	$z_0 \$ B \to z_1 B$
	$z_1 a \underline{A} \to z_2 \varepsilon$	$z_1 a A \to z_1 \varepsilon$		
			$z_1 b \underline{B} \to z_2 \varepsilon$	$z_1 b B \to z_1 \varepsilon$

abb\$bba

Beispiel 2a: $L = \{w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$

$w = ab\$ba$

Zustand	Rest der Eingabe	Kellerinhalt
z_0	ab\$ba	#
z_0	b\$ba	$\underline{A}$
z_0	\$ba	$B\underline{A}$
z_1	ba	$B\underline{A}$
z_1	a	$\underline{A}$
z_2	ε	ε

Also ist $ab\$ba \in L(M)$.

Beispiel 2b: $L = \{w\$w^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$

$w = \text{ab\$bb}$

Zustand	Rest der Eingabe	Kellerinhalt
z_0	ab$bb	#
z_0	b$bb	$\underline{A}$
z_0	$bb	$B\underline{A}$
z_1	bb	$B\underline{A}$
z_1	b	$\underline{A}$

keine weitere Bewegung möglich

Also ist ab\$bb $\notin L(M)$.

Satz

Eine Sprache L ist kontextfrei gdw. es einen NKA M gibt mit $\mathrm{L} = \mathrm{L}(M)$.

(ohne Beweis, sh. z.B.
Hopcroft/Ullman)

DKA sind nicht ausreichend!

Satz (Pumping-Lemma ($uvwxy$-Theorem))

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl n, sodass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lassen in $z = uvwxy$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. Für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^iwx^iy \in L$

$$\boxed{\begin{array}{l} |v| \geq 1 \\ |uv| \leq n \\ uv^iw \in L \text{ f.a. } i \end{array}}$$

regulär

Logische Struktur der Aussage des Pumping-Lemmas:

$$(L \text{ kontextfrei}) \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{c}(\exists n \in \mathbb{N})(\forall z \in L, |z| \geq n)(\exists u, v, w, x, y),\\ [z = uvwxy \wedge (1)\text{–}(3) \text{ gelten}]\end{array}}_{(\star)}$$

Anwendung: Kontraposition des Satzes, also:

$$(\star) \text{ gilt nicht} \Rightarrow L \text{ ist nicht kontextfrei.}$$

Logische Struktur der Aussage des Pumping-Lemmas:

$$(L \text{ kontextfrei}) \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{array}{c}(\exists n \in \mathbb{N})(\forall z \in L, |z| \geq n)(\exists u, v, w, x, y), \\ [z = uvwxy \wedge (1)\text{–}(3) \text{ gelten}]\end{array}}_{(\star)}$$

Anwendung: Kontraposition des Satzes, also:

$$(\star) \text{ gilt nicht} \Rightarrow L \text{ ist nicht kontextfrei.}$$

Logische Struktur der Aussage des Pumping-Lemmas:

$$(L \text{ kontextfrei}) \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{array}{c}(\exists n \in \mathbb{N})(\forall z \in L, |z| \geq n)(\exists u, v, w, x, y), \\ [z = uvwxy \wedge (1)\text{–}(3) \text{ gelten}]\end{array}}_{(\star)}$$

Anwendung: Kontraposition des Satzes, also:

$$(\star) \text{ gilt nicht} \Rightarrow L \text{ ist nicht kontextfrei.}$$

Beispiel: $L = \{ a^i b^i c^i \mid i \geq 1 \}$

Gesehen: L ist kontextsensitiv

$BA \to AB$

$CB \to BC$

Beh.: L ist nicht kontextfrei.

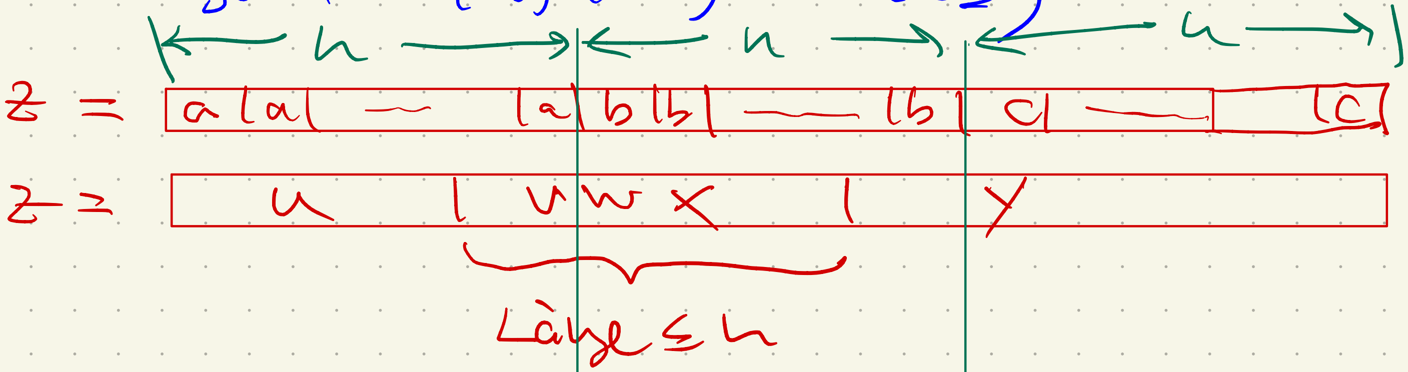
Beweis: ~~A~~ L wäre kf.

Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ sodass f.a. $z \in L$, $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ ex. mit (1)–(3).

Betrachte $z = a^n b^n c^n$, $z \in L$, $|z| = 3n \geq n$.

Man kann also z zerlegen in $z = uvwxy$ mit (1)–(3).

Wir zeigen: $(1) \wedge (2) \to \neg(3)$



In vwx können nicht alle drei Symbole a, b, c vorkommen.

$\Longrightarrow uv^2wx^2y \notin L$ ↯