Grundlagen der Theoretischen Informatik

Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Heribert Vollmer

Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Link für Kurzfragen:

URL: https://pingo.coactum.de/events/739935

Inhalt

Satz

Zu jedem NEA M existiert ein DEA M' mit $\mathrm{L}(M) = \mathrm{L}(M')$.

Satz

$A \rightarrow a$

$A \rightarrow aB$

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Es gibt einen DEA M mit $L = L(M)$ gdw. es eine reguläre Grammatik G mit $L = L(G)$ gibt.

$S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2$

$\Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1}$

$\Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} a_n$

__Beweis:__ $\Leftarrow$: Sei $L = L(G)$, $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Definiere NEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ wie folgt:

$Z = \{z_A \mid A \in V\} \cup \{z_+\}$, $E = \{z_+\}$, falls $S \rightarrow \varepsilon \notin P$

$E = \{z_+, z_S\}$, falls $S \rightarrow \varepsilon \in P$

$z_0 = z_S$

Falls $A \rightarrow aB \in P$, so $\delta(z_A, a) = z_B$

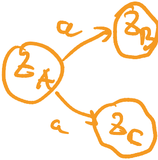
Falls $A \rightarrow a \in P$, so $\delta(z_A, a) = z_+$

Dann ist $L(G) = L(M)$.

NEA in DEA überführen.

$A \rightarrow aB$

$A \rightarrow aC$



Satz

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Es gibt einen DEA M mit $L = L(M)$ gdw. es eine reguläre Grammatik G mit $L = L(G)$ gibt.

„$\Rightarrow$": Sei $L = L(M)$,
$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DEA

Definiere Grammatik
$G = (V, \Sigma, P, S)$ wie folgt:

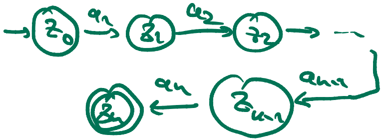
$V = \{A_z \mid z \in Z\}$

$S = A_{z_0}$

P enthält folgende Regeln:

Falls $\delta(z, a) = z'$, so ist
$A_z \to a A_{z'}$,

Falls $\delta(z, a) \in E$, so ist
(zusätzlich) $A_z \to a$



Falls $\varepsilon \in L(M)$, so ist $S \to \varepsilon \in P$ (evtl. Grammatik in Normalform bringen).

Dann ist $L(M) = L(G)$.

$\boxed{1}$

Die Klasse $\mathcal{L}_3$

Sei $L \subseteq \Sigma^*$.

DFASä:

(1) Es gibt Typ-3-Grammatik G mit $L = L(G)$.

(2) Es gibt DEA M mit $L = L(M)$.

(3) Es gibt NEA M mit $L = L(M)$.

Wie zeigt man, dass L nicht regulär ist?

Hilfsmittel: Pumping Lemma

Satz (Pumping-Lemma, uvw-Theorem)

Pumping-Zahl

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $\underline{n}$, sodass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq n$
3. Für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^iw \in L$.

Strukturaussage über reguläre Sprachen

Satz (Pumping-Lemma, uvw-Theorem)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl n, sodass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq n$
3. Für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^i w \in L$.

<u>Beweis</u> des P.L.: Sei L regulär, $L = L(M)$ für den DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$.

Sei $n = |Z|$.

Sei $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq n$,

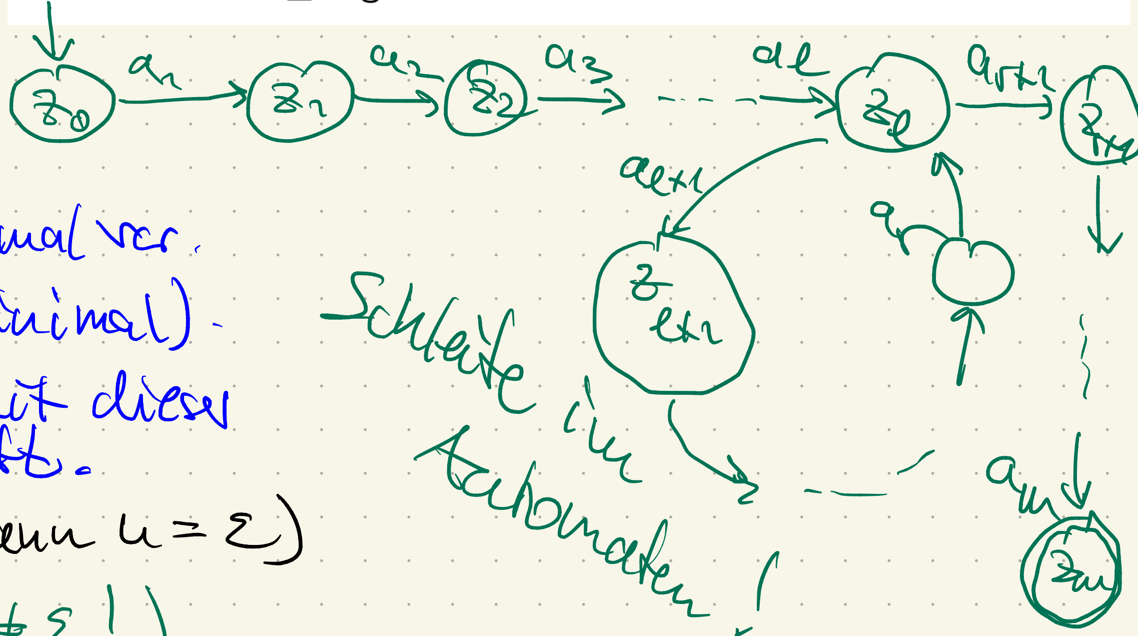
$x = a_1 a_2 \ldots a_m$ mit $m \geq n$.

Sei $z_i := \hat{\delta}(z_0, a_1 \ldots a_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Unter den Zuständen $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m$ mit $m \geq n$ kommt mindestens ein Zustand zweimal vor.

Sei z_l der erste solche Zustand (l minimal).

Sei $z_l = z_r$ mit $r > l$ minimal mit dieser Eigenschaft.



Sei $u = a_1 \ldots a_l$ (falls $l = 0$, dann $u = \varepsilon$)

$v = a_{l+1} \ldots a_r$ (NB: $v \neq \varepsilon$!)

$w = a_{r+1} \ldots a_m$ (falls $r = m$, dann $w = \varepsilon$)

Dann gilt:

(1) $|v| \geq 1$. ✓

(2) $|uv| \leq n$, da l, r minimal gewählt.

(3) $uv^i w \in L$ f.a. $i \geq 0$, da

$\hat{\delta}(z_0, u) = z_l$, $\hat{\delta}(z_l, w) \in E$,

$\hat{\delta}(z_0, uv) = z_l$,

$\hat{\delta}(z_0, uvv) = z_l = \hat{\delta}(z_0, uv^i)$ also $uv^i w \in L$ f.a. $i \geq 0$.

Logische Struktur der Aussage des Pumping-Lemmas:

$$(L \text{ regulär}) \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{array}{c}(\exists n)(\forall x \in L, |x| \geq n)(\exists u, v, w), \\ [x = uvw \text{ und } (1)\text{–}(3) \text{ gelten}]\end{array}}_{\text{Aussage } (\star)}$$

Nach dem Pumping-Lemma gilt: „L regulär $\Rightarrow$ $(\star)$“.
Die Umkehrung (d. h. „$(\star) \Rightarrow$ L regulär“) gilt im Allgemeinen nicht!
Aber: $(\star)$ gilt nicht $\Rightarrow$ L nicht regulär. In dieser Form wird das Pumping-Lemma meistens verwendet.

Kontraposition

Satz (Pumping-Lemma, uvw-Theorem)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl n, sodass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq n$
3. Für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^iw \in L$.

$L_1 = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$.

Schon gesehen: L_1 ist kontextfrei.

Beh.: L_1 ist nicht regulär.

Beweis mit P.L.: A L_1 wäre regulär.

Dann gibt es n, sodass sich alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, sodass $(1) \wedge (2) \wedge (3)$ gilt.

Sei n beliebig.

Wähle $x = a^n b^n$, $x \in L$, $|x| = 2n \geq n$.

Nach P.L. kann man x zerlegen in $x = uvw$ sodass $(1) \wedge (2) \wedge (3)$.

Wir zeigen: Falls $(1) \wedge (2)$, dann nicht (3).

$$x = \underbrace{a\,a \cdots a}_{n}\,\underbrace{b\,b \cdots b}_{n}$$

$$x = u\; v\; w$$

Sei $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$.

Also besteht uv nur aus a's.

Also $|uv^2w|_a > |uv^2w|_b = |uvw|_b$, also $uv^2w \notin L$. ↯ □

$L_2 = \{ 0^m \mid m \text{ ist Quadratzahl} \}$

Satz (Pumping-Lemma, uvw-Theorem)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl n, sodass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ zerlegen lassen in $x = uvw$, sodass folgende Eigenschaften gelten:

1. $|v| \geq 1$
2. $|uv| \leq n$
3. Für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^iw \in L$.

Beh.: L_2 ist nicht regulär.

Beweis: A doch.

Dann gibt es n wie im P.-L.

Wähle $x = 0^{n^2} \in L$, $|x| = n^2 \geq n$.

Man kann also x zerlegen in $x = uvw$ sodass $(1) \wedge (2) \wedge (3)$.

Angenommen, $(1) \wedge (2)$,

also $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$.

Betrachte

$$n^2 = \underbrace{|x|}_{=|uvw|} < |uv^2w| = n^2 + |v| \underset{\substack{|v| \leq |uv| \leq n \\ \text{wg. } (2)}}{\leq} n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

also ist $|uv^2w|$ keine Quadratzahl,

also $uv^2w \notin L$ $\lightning$

$\square$