Grundlagen der Theoretischen Informatik

Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Heribert Vollmer

Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Link für Kurzfragen:

URL: https://pingo.coactum.de/events/739935

Inhalt

Zusammenfassung

Sei A eine Sprache. Aus den bisherigen Resultaten ergibt sich, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. A ist vom Typ 0. (d.h. sie hat Typ-0-Grammatik)
2. $A = L(M)$ für eine Turingmaschine M. (Maschinenchar. v. Typ 0)
3. A ist semi-entscheidbar.
4. A ist rekursiv-aufzählbar. ($A=\emptyset$ oder $A=\{f(0), f(1), \ldots\}$ für total rek.-Fkt. f)
5. A ist Wertebereich einer totalen berechenbaren Funktion oder $A = \emptyset$.
6. A ist Wertebereich einer (eventuell partiellen) berechenbaren Funktion.
7. A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
8. Es gibt eine entscheidbare Sprache B sodass $A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}$.

Kodierung des Paares (x, y)

Satz

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv-aufzählbar gdw. es eine berechenbare Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \Sigma^*$ gibt, sodass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}.$$

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$":

Falls $A = \emptyset$, dann ist A Wertebereich von Ω.

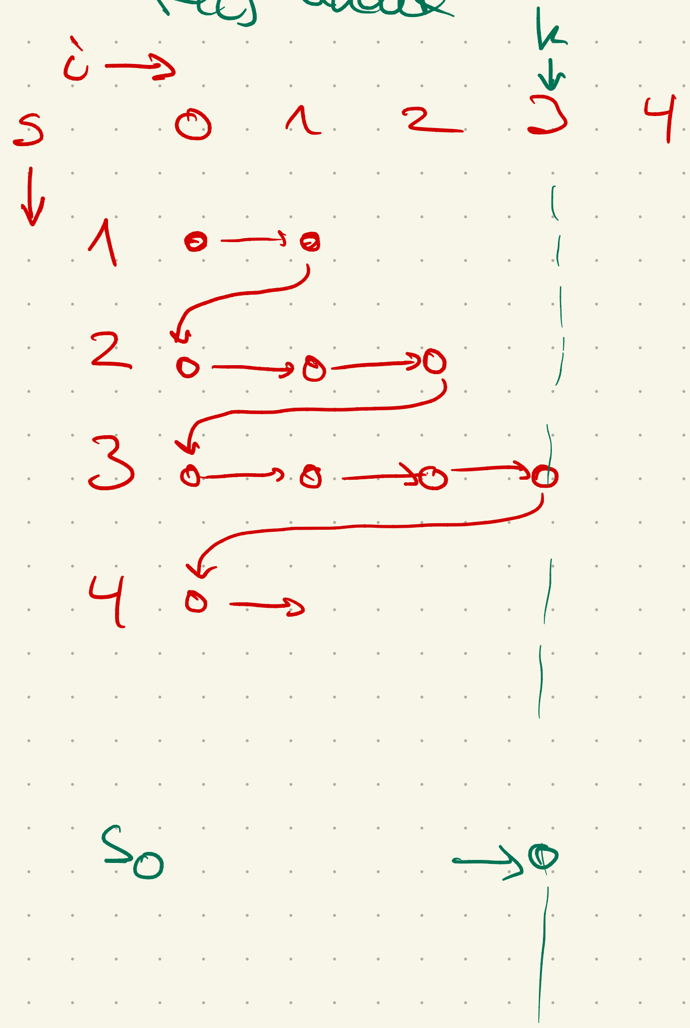
Ansonsten ist $A = \{f(0), f(1), \ldots\}$ für totale ber. Fkt.

„⇐": Sei f berechenbar durch TM M,

$A = \{f(0), f(1), \ldots\}$.

Semi-Entscheidungsalgorithmus für A:

$w \in A$, $w = f(k)$, also es gibt $i < k$ mit $f(i)$ undef



Eingabe: w {gibt es k mit $w = f(k)$?}

for $s := 1$ **to** ∞ **do**

  for $i := 0$ **to** s **do**

    Simuliere $M(i)$ für s Schritte

  if eine dieser Simulationen hält mit Ausgabe w

  then akzept stopp

end

Algorithmus stoppt mit Eingabe w

$\Longleftrightarrow$ $M(k)$ hält mit Ausgabe w nach s_0 Schritten (für $k, s_0 \in \mathbb{N}$)

$\Longleftrightarrow$ $w \in A$

$\square$

for $s := 0$ **to** ∞

if $M(s)$ hält mit Ausgabe 1 **then**

Stopp tals

Satz

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv-aufzählbar gdw. es eine entscheidbare Sprache B gibt, sodass

$$A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}.$$

Beweis: „$\Rightarrow$":

Sei A r.a. Falls $A = \emptyset$, wähle $B = \emptyset$.

Sei $A \neq \emptyset$, $A = \{f(0), f(1), \ldots\}$, f ist total u. ber.

Dann ist

$$A = \{w \mid \exists i \; f(i) = w\}$$
$$= \{w \mid \exists i \; \langle w, i \rangle \in B\} \text{ mit}$$
$$B = \{\langle w, i \rangle \mid f(i) = w\}$$

B ist entscheidbar.

„$\Leftarrow$": Sei $A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Gamma^* \ \langle x, y \rangle \in B\}$, B entscheidbar.

Semi-Entscheidungsalgorithmus für A:

<u>Eingabe</u>: $x \in \Sigma^*$

<u>for all</u> $y \in \Gamma^*$ <u>do</u> {quasi-lexikogr. Reihenfolge}

<u>if</u> $\langle x, y \rangle \in B$

<u>then</u> akzept halt

<u>end</u>

Alg. hält bei Eingabe x

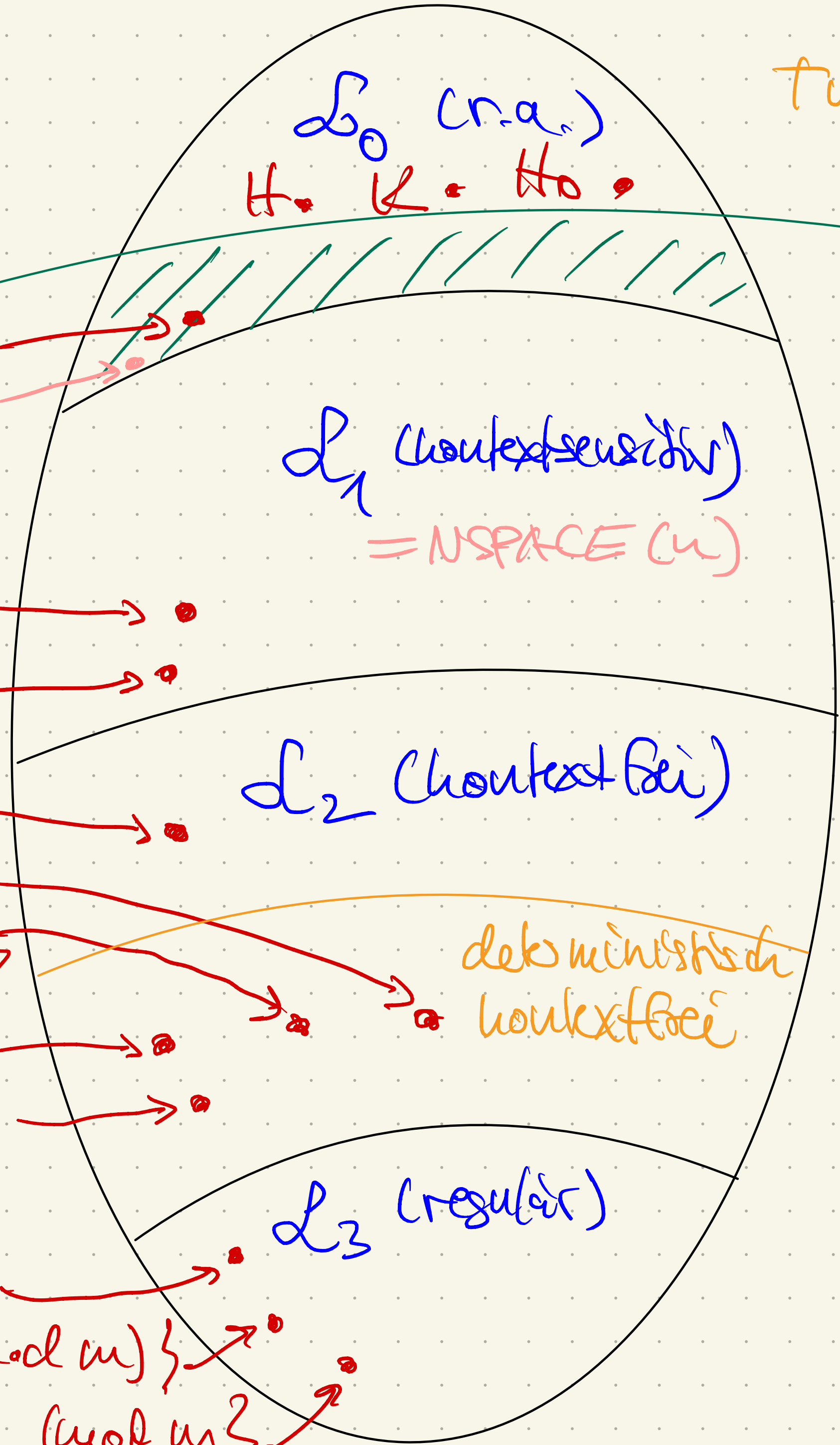
gdw. es gibt y mit $\langle x, y \rangle \in B$

gdw. $x \in A$.

$\square$

Chomsky-Hierarchie

$\mathcal{L}_i$ = Klasse der Typ-i-Sprachen



Turingmaschine

entscheidbar

LBA

Kellerautomat

det. Kellerautomaten

endl. Automaten

?

QBF

$\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$

$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

$\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$

Klammersprache

$\Sigma = \{a, b\}$

$S \to aSa$

$S \to bSb$

$S \to \varepsilon$

$\{w\#w^R \mid w \in \Sigma^*\}$

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$\{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

$\{w \mid |w|_a > 6\}$

$\{w \mid |w|_a \equiv r \pmod m\}$

$\{w \mid |w|_a = |w|_b \pmod m\}$

Korollar

Die Klasse der Typ-1-Sprachen ist eine echte Teilmenge der Klasse der Typ-0-Sprachen.