

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Wintersemester 2024/25

Prof. Dr. Heribert Vollmer

Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Link für Kurzfragen:



URL: <https://pingo.coactum.de/events/739935>

Inhalt

Sprachen und Grammatiken

Die Chomsky-Hierarchie

Reguläre (Typ-3-) Sprachen

Endliche Automaten

Nichtdeterministische endliche
Automaten

Endliche Automaten und
Typ-3-Grammatiken

Das Pumping Lemma für
reguläre Sprachen

Kontextfreie (Typ-2-) Sprachen

Kellerautomaten

Das Pumping-Lemma für
kontextfreie Sprachen

Typ-1- und Typ-0-Sprachen

Der intuitive Berechenbarkeitsbegriff

Berechenbarkeit durch Maschinen

Turing-Berechenbarkeit

Mehrband-Maschinen

Berechenbarkeit in
Programmiersprachen

Die Programmiersprache LOOP

Die Programmiersprache WHILE

Die Church'sche These

Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Unentscheidbare Probleme

Das Halteproblem

Der Satz von Rice

Zusammenfassung

Sei A eine Sprache. Aus den bisherigen Resultaten ergibt sich, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. A ist vom Typ 0. (d.h. sie hat Typ-0-Semantik)
2. $A = L(M)$ für eine Turingmaschine M. (Maschinenchar. v. Typ 0)
3. A ist semi-entscheidbar.
4. A ist rekursiv-aufzählbar. ($A = \emptyset$ oder $A = \{f(0), f(1), \dots\}$ für total reke. Pkt. f.)
5. A ist Wertebereich einer totalen berechenbaren Funktion oder $A = \emptyset$.
6. A ist Wertebereich einer (eventuell partiellen) berechenbaren Funktion.
7. A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
8. Es gibt eine entscheidbare Sprache B sodass $A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}$.

↑↑ Kodierung des Paars (x, y)

Satz

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv-aufzählbar gdw. es eine berechenbare Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ gibt, sodass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}.$$

Beweis: „ \Rightarrow “:

Falls $A = \emptyset$, dann ist A Wertebereich von λ .

Aussonstet ist $A = \{f(0), f(1), \dots\}$ für totale funktl. Fkt.

" \Leftarrow ": Seif berechenbar durch TMR M_1

$$A = \{f(0), f(1), \dots\}$$

Semi-Entscheidungsalgorithmus für A :

Eingabe: w {gibt es h mit $w=f(h)$?}

für $s := 1$ bis ∞ do

für $i := 0$ bis s do

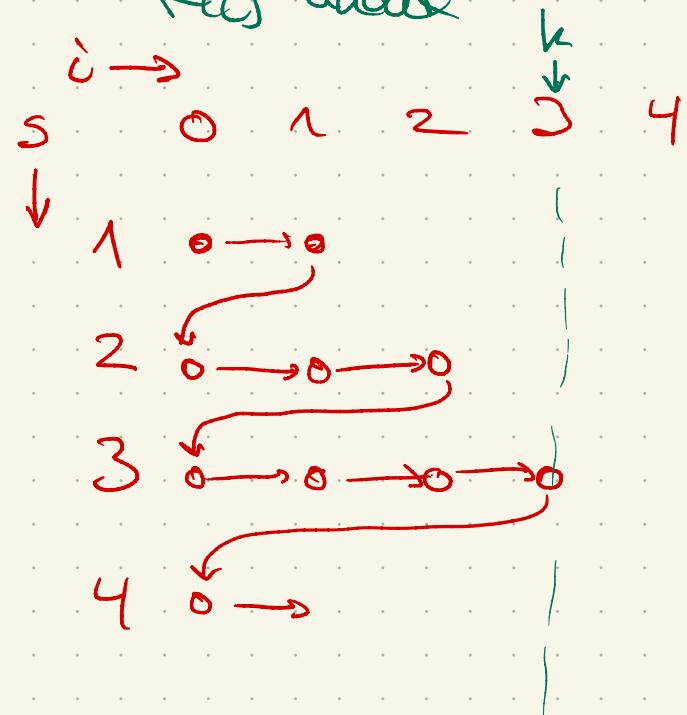
Simuliere $M(k)$ für s Schritte

ist eine dieser Simulationen k mit Ausgabe w

dann abz + stopp

end

$w \in A$, $w = f(k)$, also
es gibt $i < k$ mit
 $f(i) = w$



Algorithmus stoppt mit Eingabe w

$\Leftrightarrow M(k)$ hält mit Ausgabe w
nach s Schritten (für $k, s \in \mathbb{N}$)

$\Leftrightarrow w \in A$

so $\rightarrow 0$

□

~~G~~ $s \Rightarrow o \not\in \Delta$

~~G~~ MS) hält mit Ausgabe \sqcup hier

Stopptals

Satz

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv-aufzählbar gdw. es eine entscheidbare Sprache B gibt, sodass

$$A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}.$$

Beweis:, \Rightarrow :

Sei A n.a. Falls $A = \emptyset$, wähle $B = \emptyset$.

Sei $A \neq \emptyset$, $A = \{f(0), f(1), \dots\}$, f ist total u. ber.

Dann gibt

$$A = \{w \mid \exists i \quad f(i) = w\}$$

$$= \{w \mid \exists i \quad \langle w, i \rangle \in B\} \text{ mit}$$

$$B = \{ \langle w, i \rangle \mid f(i) = w \}$$

B ist entscheidbar.

\Leftarrow : Sei $A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in T^* \quad \langle xy \rangle \in B\}$, B entscheidbar.

Semi-Entscheidungsalgorithmus für A :

Eingabe: $x \in \Sigma^*$

for all $y \in T^*$ do {quasi-lexikogr. Reihenfolge}

if $\langle xy \rangle \in B$

then abz + hatt

end

Abz. hält bei Eingabe x

gda. es gibt y mit $\langle xy \rangle \in B$

gda. $w \in A$.

□

Chomsky-Hierarchie

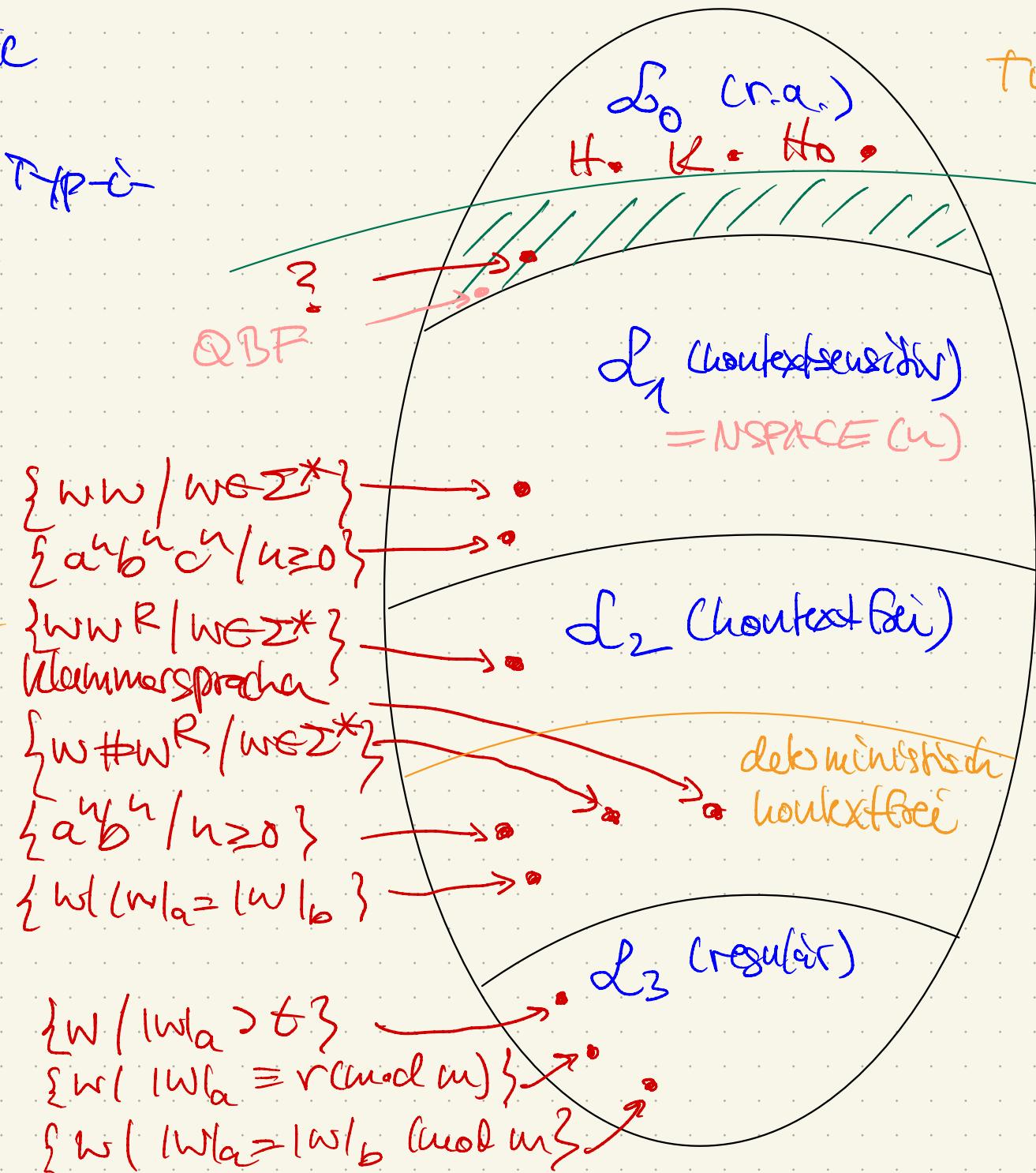
$L_i = \text{Klasse der Typ-} i$ -Sprachen

$$\Sigma \rightarrow \{a, b\}$$

$$S \rightarrow aSa$$

$$S \rightarrow bSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$



Turingmaschine

entscheidbar

LBA

Kleibautomat

det. Kleibautomaten

endl. Automaten

Korollar

Die Klasse der Typ-1-Sprachen ist eine echte Teilmenge der Klasse der Typ-0-Sprachen.