Zusammenfassung

Sei A eine Sprache. Aus den bisherigen Resultaten ergibt sich, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. A ist vom Typ 0.
2. $A = L(M)$ für eine Turingmaschine M.
3. A ist semi-entscheidbar.
4. A ist rekursiv-aufzählbar.
5. A ist Wertebereich einer totalen berechenbaren Funktion oder $A = \emptyset$.
6. A ist Wertebereich einer (eventuell partiellen) berechenbaren Funktion.
7. A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
8. Es gibt eine entscheidbare Sprache B sodass $A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}$.

18.2. 14 - 16 Uhr Repetitorium
E001

19.2. 11 - 13 Uhr offene Fragestunde
Seminarraum A501
Appelstr. 11 A

Weitere Anliegen/ausführliche Fragen: Tutor:innen
↳ alternativ: Sprechstunde:
Mail an holzapfel@thi.uni-hannover.de

Korollar

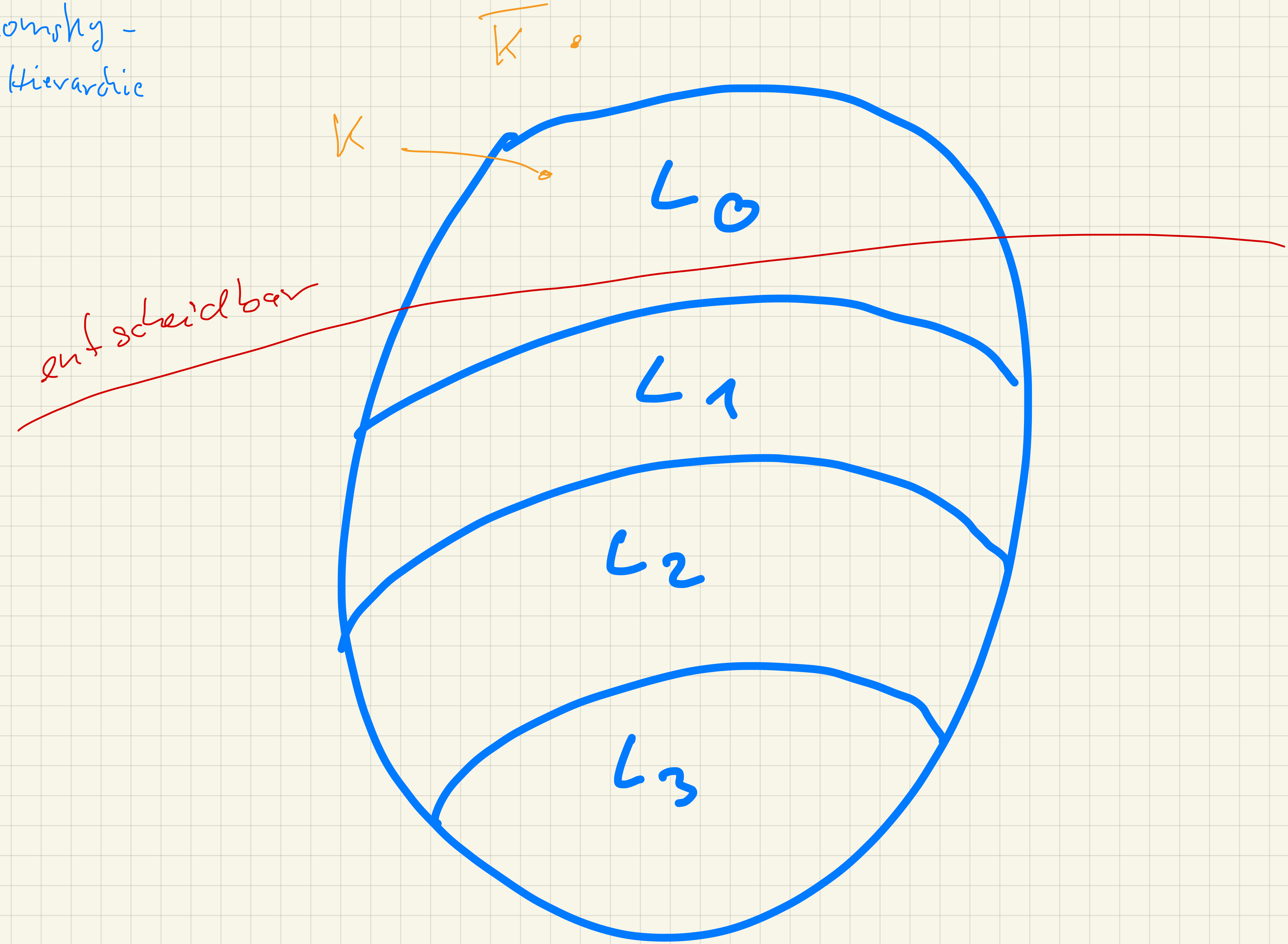
Die Klasse der Typ-1-Sprachen ist eine echte Teilmenge der Klasse der Typ-0-Sprachen.

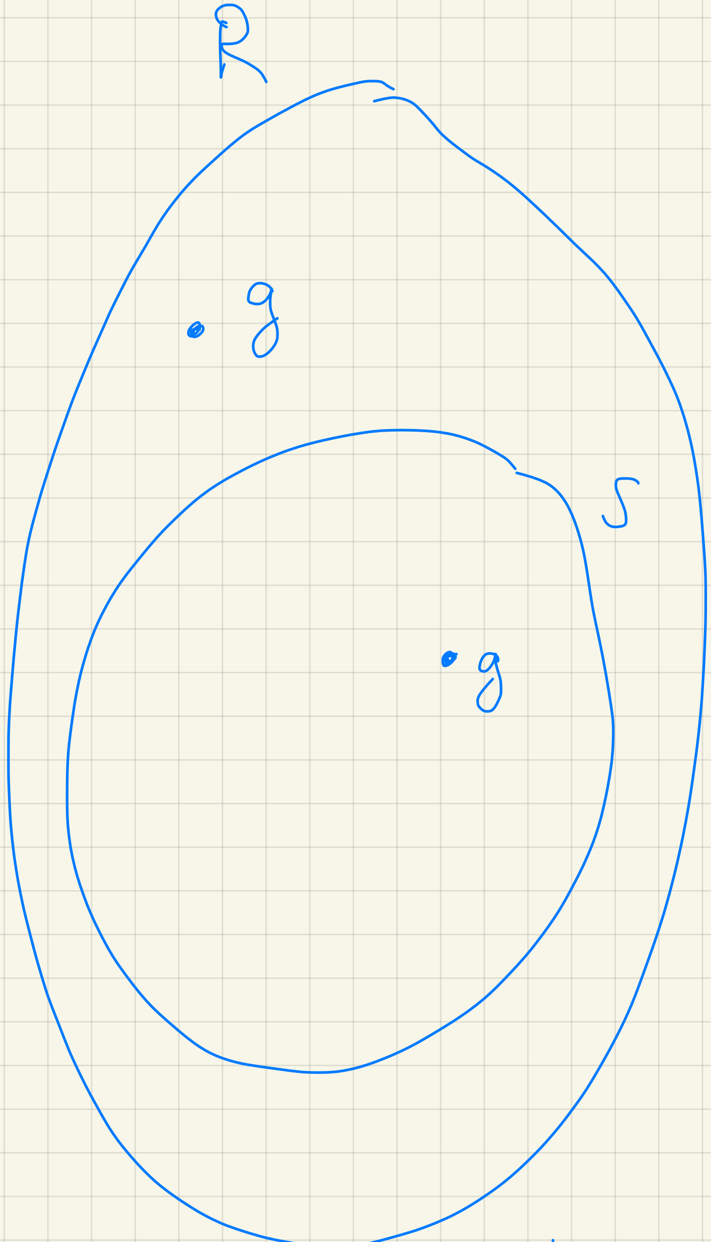
Beweis: K (oder H) ist semi-entscheidbar,
also vom Typ 0.
K ist nicht entscheidbar.
Alle Typ 1 Sprachen sind entscheidbar.
Also: K ist nicht vom Typ 1.

Korollar
Es gibt Sprachen die nicht von Typ 0 sind – also nicht von einer Grammatik beschrieben werden können.

Beweis: $\overline{K}$, $\overline{H}$, denn wäre $\overline{K}$ von Typ 0
$\Rightarrow \overline{K}$ semi-entscheidbar $\Rightarrow K$ entscheidbar $\lightning$

Chomsky-Hierarchie





R – Menge der berechenbaren Fktn

$S \subseteq R$

<u>Eingabe</u> $f \in R$

$w \in \{0,1\}^*$
(= Gödelnummer einer TM, die f berechnet)

<u>Frage</u> $f \in S$

Gehört die Funktion die von M_w berechnet wird zu S?

$C(S) = \{w \mid M_w$ berechnet eine Funktion aus $S\}$

<u>Satz von Rice</u>

$S \neq R$, $S \neq \emptyset \Rightarrow$ obiges Entscheidungsproblem unentscheidbar

Jede nicht-triviale funktionale Eigenschaft von Turing-Maschinen ist unentscheidbar

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller berechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ mit $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$\mathrm{C}(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } \mathrm{M}_w \text{ berechnete Funktion ist aus } \mathcal{S}\}$$

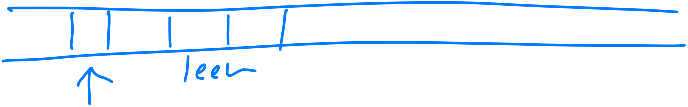
nicht entscheidbar.

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist die Sprache

$$H_0 = \{w \mid M_w \text{ angesetzt auf leerem Band hält}\}.$$

$Z = \varepsilon$



Achtung: Sonderfall Eingabe nicht von der geforderten Form $w\#x$ weggelassen

Satz

H_0 ist nicht entscheidbar.

Beweis

Wir zeigen $H \le H_0$

Gesucht: f mit $w\#x \in H \iff f(w\#x) \in H_0$

M_w hält auf x $\quad$ $M_{f(w\#x)}$ hält auf ε

w' ist Gödelnummer folgender TM:

w'

"

Eingabe z

Falls $z = \varepsilon$ (Band leer)

Schreibe x auf das Band und simulieren M_w auf x

Falls $z \neq \varepsilon$

stoppe

$w\#x \in H \iff M_w$ hält auf $x \iff M_{w'}$ hält auf $\varepsilon \iff w' \in H_0$

H ist nicht entscheidbar, f ist total und berechenbar (s. Sonderfall)

$\Rightarrow H_0$ ist nicht entscheidbar

$\square$

Satz

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller berechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ mit $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$. Die Sprache $\mathrm{C}(\mathcal{S})$ sei definiert als

$$\mathrm{C}(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist aus } \mathcal{S}\}.$$

Dann gilt:

$$\mathrm{K} \leq \mathrm{C}(\mathcal{S}) \text{ oder } \overline{\mathrm{K}} \leq \mathrm{C}(\mathcal{S})$$

H_0 $\overline{H_0}$

$K \leq H_0$

Beweis:

Fallunterscheidung

Fall 1 $\quad \Omega \notin S$

Sei $g \in S$ (ex. da $S \neq \emptyset$). Sei M^g die TM die g berechnet.

Ziel: $H_0 \leq C(S)$, also $w \in H_0 \Leftrightarrow f(w) \in C(S)$

f definiert die TM $\quad \hat{M}'$: Eingabe x

simuliere M_w auf ε

Falls Simulation stoppt, dann simuliere $M^g(x)$

Welche Fkt wird von $\hat{M}'$ berechnet?

Falls $w \in H_0$, dann wird g berechnet $\quad g \in S$

Falls $w \notin H_0$, dann wird Ω berechnet $\quad \Omega \notin S$

$w \in H_0 \Rightarrow f(w) \in C(S)$

$w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(S)$

Also: $\quad H_0 \leq C(S)$

Fall 2: $\Omega \in S$

Sei $g \notin S$ (ex. da $S \neq R$). sei M^g die TM die g berechnet

Ziel: $\overline{H_0} \leq C(S)$, also

$$w \in H_0 \iff f(w) \notin C(S)$$

f definiert TM $\hat{M}'$: Eingabe x

simuliere M_w auf ε

Falls Simulation stoppt, dann simuliere M_g auf x

welche Fkt wird von $\hat{M}'$ berechnet?

Falls $w \in H_0$, dann wird g berechnet.

Falls $w \notin H_0$, dann wird Ω berechnet.

$$w \notin \overline{H_0} \Rightarrow w \in H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(S)$$

$$w \in \overline{H_0} \Rightarrow w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \in C(S)$$

Also $\overline{H_0} \leq C(S)$

$\square$

Exkurs/Widerholung: Unterschied Eingabe Reduktionsfkt/Eingabe Maschine

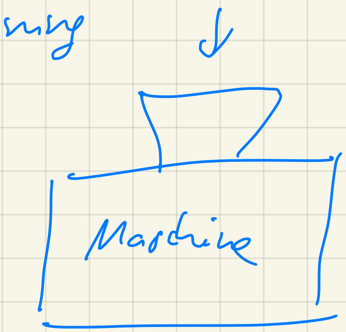
Reduktionsfkt $f(z)$

$K = \{ w \mid M_w \text{ hält auf } w \}$

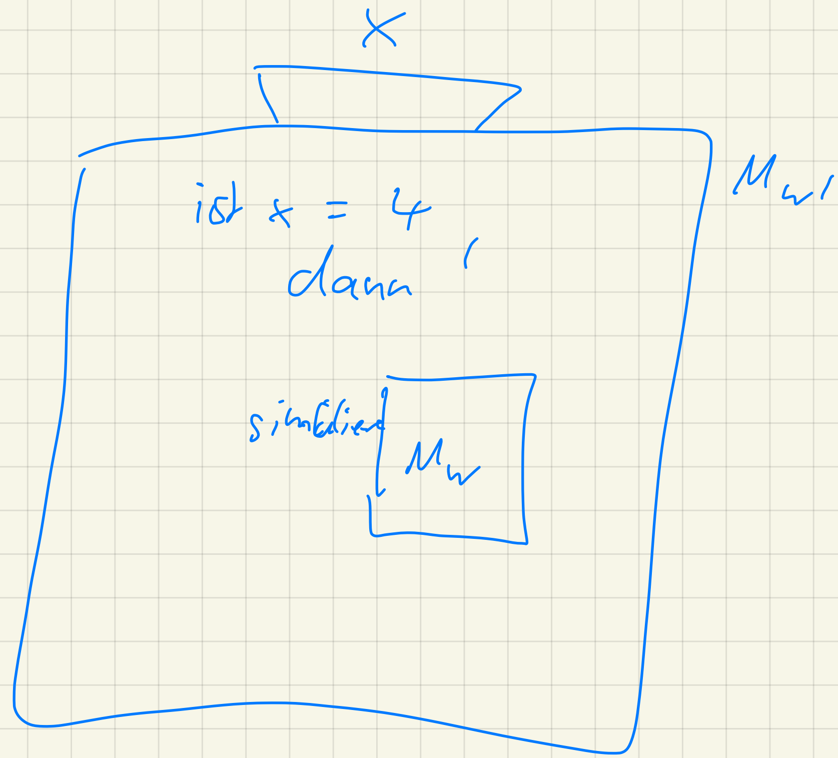
$$f(z) = \begin{cases} w' & z = w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

w ist Gödelisierung

Eingabe x



$w' = 0 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 0 \longrightarrow M_{w'}$



Korollar (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller berechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ mit $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$\mathrm{C}(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist aus } \mathcal{S}\}$$

nicht entscheidbar.

Anwendung des Satz von Rice:

Menge S muss definiert werden
und zeigen, dass $S \neq \emptyset$ und $S \neq R$
$S \subseteq R$

Dann nach Satz von Rice $C(S)$ nicht entscheidbar

Korollar

Berechenbarkeit der Fkt ist dadurch gegeben, dass „M_w berechnet …“ gefordert wird

Die folgenden Sprachen sind nicht entscheidbar:

- $\{w \mid M_w$ berechnet eine totale Funktion$\}$
  „Das gegebene Programm stürzt nicht ab.“
- $\{w \mid M_w$ berechnet eine monotone Funktion$\}$
- $\{w \mid M_w$ berechnet eine konstante Funktion$\}$
- $\{w \mid M_w$ berechnet die Funktion $f(x) = x + 1\}$
  „Das gegebene Programm erfüllt eine gegebene Spezifikation“
  (hier im Beispiel: „Das gegebene Programm berechnet die Nachfolgerfunktion“).