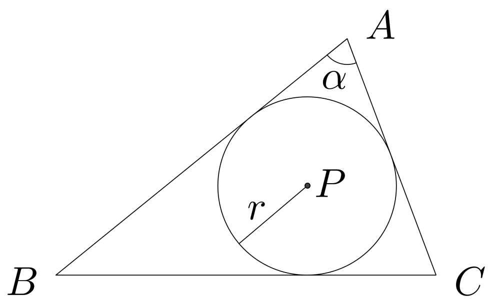
Corso di approfondimento

Esempi e problemi 04/05/2015

Problema 18 (foglio 1)

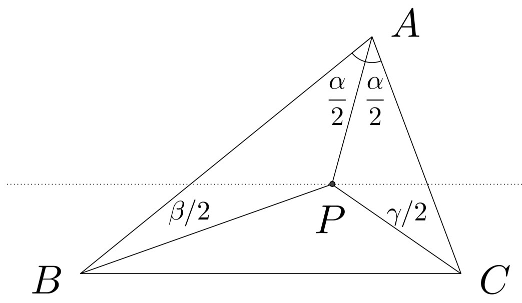


Il problema chiede di trovare un triangolo dati la lunghezza di un lato a, l'angolo opposto ad esso α e il raggio della circonferenza inscritta. Come consigliato, cominciamo *disegnando la soluzione* come se fosse già tutto risolto. Cercando di *ridurre il problema* alla costruzione di un solo punto dobbiamo compiere una scelta: cercare di costruire direttamente il punto A (che consiste sostanzialmente nella soluzione del problema) o passare attraverso la costruzione del punto P. Valutiamo pregi e difetti delle due scelte:

1. il punto A è la soluzione diretta e una volta trovato A il problema è risolto; inoltre, cercare altri punti potrebbe portarci fuori strada
2. il centro della circonferenza inscritta P non è la soluzione del problema, ma conduce ad essa con estrema facilità: avendo P basta tracciare la circonferenza di raggio dato r e poi trovare i lati BA e CA come tangenti a quest'ultima circonferenza
3. abbiamo già un luogo geometrico su cui cercare A: come imparato nel problema 6, il luogo geometrico dei punti che vede BC sotto l'angolo α è una circonferenza che riusciamo a disegnare (l'altro luogo geometrico non è così evidente)
4. abbiamo già un luogo geometrico su cui cercare P: dato che la circonferenza ha raggio r, il centro si trova su una retta parallela a BC posta a distanza r (l'altro luogo geometrico non è così evidente)

Vista la situazione molto ambigua facciamo una scelta seguendo l'intuizione, ricordando però che abbiamo un 50% di probabilità di sbagliare: se ci troviamo in un *cul-de-sac* possiamo sempre provare l'altra strada.

Decidendo di trovare prima il punto P cerchiamo di scrivere la condizione che lo caratterizza in modo da ottenre due luoghi geometrici disegnabili. Come detto prima, il punto P si trova su una retta parallela a BC posta a distanza r. L'altra parte della condizione deriva dal fatto che alla fine, l'angolo in A deve essere α. Cerchiamo di disegnare qualcosa in più alla figura, per mettere in luce che *proprietà aggiuntive* deve avere il punto P affinché ci si ritrovi, alla fine, con l'angolo α.



Visto che la condizione discende dall'angolo α, cerchiamo direttamente proprietà degli angoli che stanno attorno a P. Dato che P è il centro della circonferenza che è tangente ai tre lati AP è la bisettrice dell'angolo in A, dunque BAP e CAP valgono entrambi $\frac{\alpha}{2}$. Lo stesso vale in B e C, quindi ABP vale $\frac{\beta}{2}$ e ACP vale $\frac{\gamma}{2}$. Se potessimo disegnare β e γ, oppure $\frac{\beta}{2}$ e $\frac{\gamma}{2}$, riusciremmo subito a trovare P. Ma non abbiamo né β né γ.

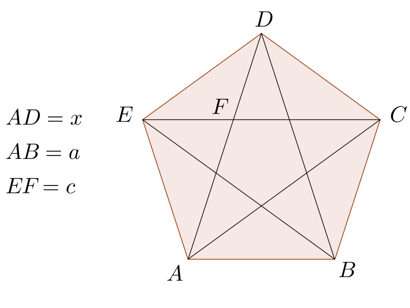
L'angolo APB è quello che resta nel triangolo APB, deve necessariamente valere $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Nemmeno questo angolo possiamo disegnare direttamente, sempre perché non abbiamo β. L'angolo APC, con medesimo ragionamento, vale $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

L'ultimo angolo rimasto nel disegno però, essendo ciò che rimane di un angolo giro, vale $360^\circ - \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}$. Questo angolo possiamo costruirlo, infatti non abbiamo β e γ separatamente, ma abbiamo $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$. Dunque l'angolo BPC vale $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

Completa la dimostrazione: per concludere la dimostrazione mancano alcuni semplici passaggi:

1. dato l'angolo α, come si costruisce $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ con riga e compasso?
2. data l'angolo $\eta = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, come si trova il luogo geometrico dei punti che vedono il segmento BC sotto l'angolo η? (vedi problema 6)
3. data la lunghezza r, come si traccia con riga e compasso la parallela a BC che passa per P?
4. disegnata la circonferenza di centro P, come disegno con riga e compasso i lati BA e CA?

Costruisci un pentagono regolare



Ci viene richiesto di costruire un pentagono regolare dato il lato $AB = a$. Esistono in letteratura soluzioni di questo problema che già di greci avevano risolto, ma cerchiamo di farci strada con il metodo che stiamo sviluppando.

Disegnamo la soluzione che immaginiamo e aggiungiamo alla figura ulteriori particolari che ci permettono di scoprire *proprietà aggiuntive*. Diamo un nome alle varie lunghezze che troviamo

$$AB = BC = CD = DE = EA = a$$

perché il pentagono è regolare, quindi tutti i lati sono uguali.

Possiamo *ridurre il problema* a costruire un solo punto, il punto D. Infatti avendo i punti A, B e D, i due punti rimanenti si trovano subito con il compasso. Andiamo oltre per sfruttare l'algebra: possiamo ridurre il problema alla determinazione di *una sola quantità* ovvero la lunghezza $AD = x$. Infatti avendo la lunghezza x, il punto D si trova facilmente, sempre con il compasso.

Cominciamo a notare che, per simmetria, $AD = DB = BE = EC = CA = x$. Dunque il triangolo ABD è isoscele e congruente al triangolo EAC, dunque l'angolo DAB è congruente all'angolo CEA. Per simmetria la retta che passa per AB è parallela alla retta che passa per BC, quindi l'angolo EFA è congruente all'angolo FAB. Essendo che i due angoli alla base sono congruenti, il triangolo EFA è isoscele e $AE = AF = a$. Ripetendo lo stesso ragionamento per gli altri lati si scopre che $AF = FC = a$.

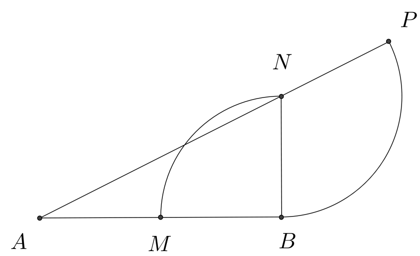
Abbiamo dunque una sola incognita, x, perché la lunghezza a è un dato del problema. I triangoli AFC e DFE sono isosceli e simili tra loro, ne segue che

$$AC : AF = ED : DF \quad \text{ovvero} \quad \frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

Risolvendo l'equazione troviamo un unica soluzione sensata che è $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$.

Resta solo da trovare una costruzione per x:

1. trova il punto medio M del segmento AB
2. costruisci il segmento BN, perpendicolare ad AB e lungo quanto BM
3. prolunga il segmento AN con il segmento NP che è lungo quanto NB
4. il segmento AP è della lunghezza cercata $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$



Completa la dimostrazione: per concludere la dimostrazione mancano alcuni semplici passaggi:

1. avendo trovato il punto D, come si costruiscono i punti C ed E?
2. avendo la lunghezza x, come si costruisce il punto D?
3. data la lunghezza r, come si traccia con riga e compasso la parallela a BC che passa per P?
4. disegnata la circonferenza di centro P, come disegno con riga e compasso i lati BA e CA?