Corso di approfondimento

Prima lezione 16/03/2015

Risolviamo i problemi di geometria per formare alcuni meccanismi del pensiero che poi saranno applicabili ad altri problemi: semplicemente di geometria, scolastici in generale o, addirittura, della vita in generale. Un problema è più interessante quanto più è astratto, perché lo sforzo che facciamo è più utile e più riutilizzabile.

Cos'è un problema? C'è un problema se c'è qualcosa che non conosciamo, qualcosa che non possiamo ottenere direttamente. Deve esserci qualcosa di noto, altrimenti non avremmo nulla da cui partire per ottenere quello che non conosciamo. Tra quello che è noto e quello che è ignoto, desiderato, deve esserci una condizione, più o meno esplicitata, che spiega come collegare questi due estremi. La condizione è anche insispensabile per riconoscere la soluzione dopo averla trovata.

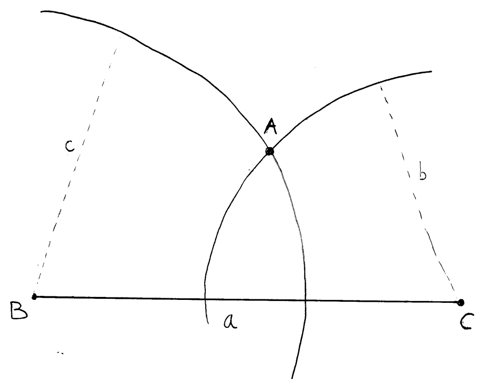
Esempio 1

Un esempio molto semplice ma molto istruttivo è la soluzione del primo problema del primo libro degli Elementi di Euclide: costruire un triangolo, date le lunghezze dei tre lati. Qui i dati sono tre lunghezze; l'obiettivo è un triangolo; la condizione è che le tre lunghezze date devono essere le lunghezze dei tre lati che verranno a formarsi.

Chiamiamo a, b e c le tre lunghezze date. Il primo passo è sceglere una delle tre lunghezze (scegliamo a) e costruire un segmento di quella lunghezza. In questo modo abbiamo già fissato due vertici del triangolo, chiamiamoli B e C. Quello che resta per avere il triangolo completo è trovare il terzo vertice, in modo che i lati che si formeranno siano lunghi della giusta lunghezza. Questo è il primo insegnamento:

> riduci il problema alla costruzione di un singolo punto

Certo, non è che ora un punto qualsiasi risolverà il problema: bisogna rispettare la condizione. Prendiamo ad esempio un punto qualsiasi, chiamiamolo P, e immaginiamolo variabile: P è capace di scorrazzare a piacere nel piano. Questo punto sarà la soluzione al problema se riusciamo a metterlo nella posizione giusta affinché $BP = b$ e contemporaneamente $CP = c$, cioè se P dista da B e da C proprio quanto richiesto dalla condizione. Proviamo a realizzare un pezzo della condizione alla volta: se ci limitiamo a chiedere che sia $BP = b$, il punto variabile può ancora trovarsi in



molte posizione, ma non è più completamente libero. Con il compasso si può disegnare una circonferenza che ha centro in B e raggio assegnato b: tutti i punti di questa circonferenza si trovano a distanza b dal centro, cioè da B e solo i punti di questa circonferenza hanno questa proprietà. Viceversa, possiamo disegnare con il compasso una circonferenza che ha centro in C e raggio assegnato c. Ancora, tutti i punti di questa circonferenza sono alla distanza voluta dal centro C.

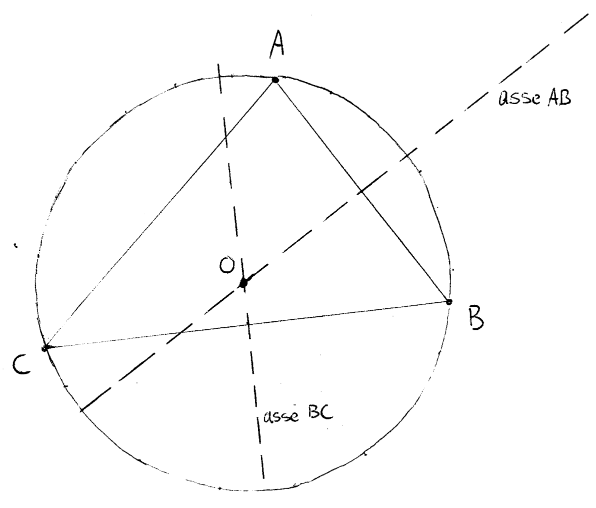
Il punto che cerchiamo si trova nell'intersezione delle due circonferenze, perché solo i punti che stanno in entrambe le circonferenze soddisfano entrambe le parti della condizione del problema. Da questo metodo possiamo trarre un metodo molto potente che permette di risolvere moltissimi problemi:

> separa la condizione in due figure disegnabili

Esempio 2

Un secondo esempio ci permetterà di applicare quanto imparato e, probabilmente, capirlo meglio. Il problema è il seguente: dato un triangolo ABC, costruire una circonferenza circoscritta al triangolo. Qui i dati sono tre punti, ovvero i vertici del triangolo; ciò che bisogna trovare è una circonferenza; la condizione è che la circonferenza deve passare per i tre vertici del triangolo. Per disegnare una circonferenza con il compasso serve il centro e il raggio, ma non abbiamo né il centro né il raggio: questo è un problema!

Riduci il problema alla costruzione di un punto: non abbiamo il raggio ma abbiamo tre punti per i quali passa la circonferenza; basterà trovare il centro della circonferenza, chiamiamolo O e poi tracciare la circonferenza con centro O che passa per A. Automaticamente la circonferenza che disegnamo passerà anche per B e per C: se O è veramente il centro della circonferenza che cerchiamo, che deve passare per A, B e C, allora necessariamente $OA = OB = OC$. Questa è la condizione del problema ridotto: trovare un punto che abbia la stessa distanza da A, B e C.



Dividi la condizione in parti che si possano disegnare: consideriamo prima una parte della condizione, ovvero vediamo che figura genera un punto variabile che sia semplicemente equidistante da A e da B. La figura fatta da tutti e soli i punti che sono equidistanti dagli estremi di un segmento è l'asse del segmento stesso, ovvero la retta perpendicolare che passa per il punto medio del segmento. Se facciamo la stessa cosa con B e C, disegnando l'asse del segmento BC, troviamo un'altra retta. Il punto O sta nell'intersezione delle due rette: sta nella prima quindi $OA = OB$ e sta nella seconda quindi $OB = OC$. Ovviamente segue anche che $OA = OC$, quindi O è proprio il centro della circonferenza che stiamo cercando.

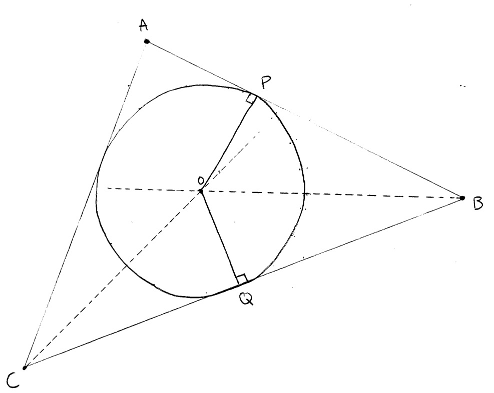
Tra l'altro, questa conta come dimostrazione di alcuni fatti non proprio banali: per i tre vertici di un triangolo passa sempre una (e una sola!) circonferenza; i tre assi dei lati di un triangolo si incontrano sempre in un singolo punto.

Esempio 3

Questo terzo esempio servirà a rafforzare ancora quanto visto, ma ci permetterà di trarre un nuovo insegnamento: dato un triangolo ABC, costruire una circonferenza inscritta al triangolo dato. Significa che, come nell'esempio precedente, i tre vertici del triangolo sono i dati e l'incognita è una circonferenza. Quello che cambia è la condizione: la circonferenza deve essere iscritta nel triangolo, cioè deve essere tangente ai tre lati.

Riduci il problema alla costruzione di un punto: come prima potrebbe bastare il centro della circonferenza, ma non sarà immediato disegnare la circonferenza, perché non avremmo il raggio. Non è nemmeno evidente quale condizione deve rispettare il centro affinché la sua circonferenza sia tangente a qualche retta. Cerchiamo di vederci più chiaro:

disegna la soluzione, scopri proprietà aggiuntive



Immaginiamo di aver già trovato il centro della circonferenza inscritta. Di quali proprietà gode? Come possiamo riconoscerlo per qualche altro motivo collegato all'essere il centro della circonferenza inscritta? Proviamo così: se avessimo il centro, come faremmo a disegnare la circonferenza?

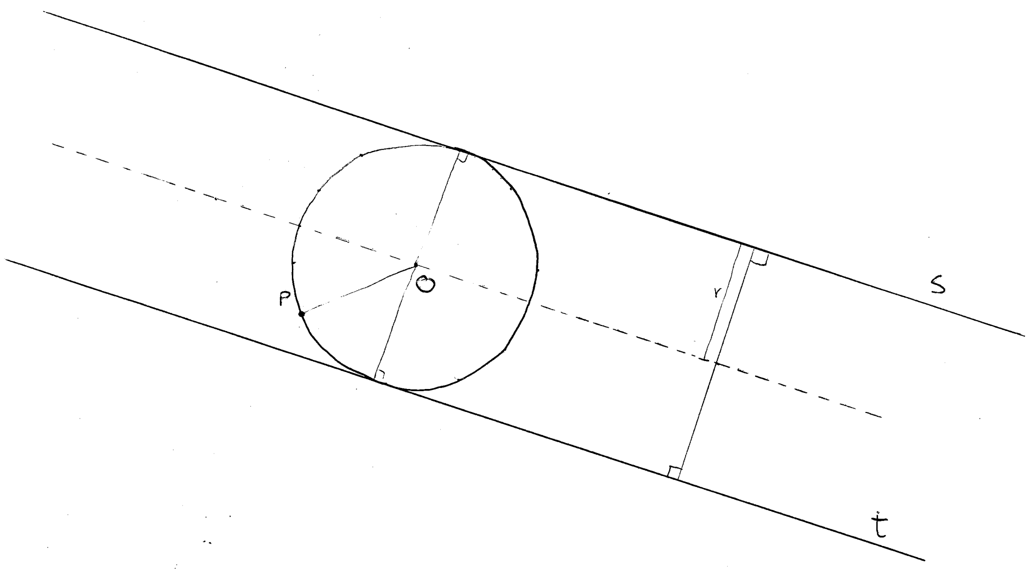
Se la circonferenza che ha centro O è tangente al lato AB, significa che le due figure si toccano in un solo punto P. Ha qualche proprietà speciale, questo punto P, che mi permetterebbe di riconoscerlo tra tutti quelli del segmento AB? Certo: l'angolo OPB deve essere retto, altrimenti la circonferenza sarebbe secante (perché il raggio OP sarebbe maggiore della distanza centro-segmento). Lo stesso vale dall'altro lato BC, in cui il punto di tangenza Q forma l'angolo retto OQB. Osserviamo la figura formatasi: ha qualche regolarità, qualche proprietà che possiamo riconoscere? Certo: i due triangoli OPB e OQB sono retti e congruenti tra loro. Quindi anche l'angolo PBO è congruente all'angolo QBO, ovvero OB è bisettrice dell'angolo interno in ABC.

Dividi la condizione in parti che si possano disegnare: quando troveremo il centro O della circonferenza iscritta, esso sarà alla stessa distanza dai tre lati del triangolo; come abbiamo visto, scegliendo due lati e chiedendo che O sia equidistante da questi due lati, si scopre che O deve stare sulla bisettrice di quei due lati. Il centro della circonferenza si troverà quindi nell'intersezione delle due bisettrici di due angoli interni qualsiasi (questo dimostra che esiste sempre un cerchio inscritto e che le tre bisettrici si incontrano in un punto singolo).

Esempio 4

Vediamo ora un esempio di come i precetti precedenti possono fallire o non essere immediatamente applicabili: non possiamo sperare di trovare un metodo che risolva tutti i problemi. Sono date due rette parallele e un punto compreso tra esse. È richiesto di disegnare una circonferenza tangente ad entrambe le rette che passi per il punto dato.

Riduci il problema alla costruzione di un solo punto: ricopiando quanto fatto prima, basterà trovare il centro O della circonferenza; tracciare la circonferenza stessa sarà poi immediato, perché basterà centrare il compasso in O e far passare l'altra punta per il punto dato P.



Disegna la soluzione, scopri proprietà aggiuntive: se disegnamo la soluzione vediamo che il centro ha la proprietà di essere alla stessa distanza (cioè il raggio) dal punto dato e dalle due rette; sappiamo anche che la distanza del centro O da ognuna delle due rette esterne si misura con un segmento perpendicolare.

Dividi la condizione in parti che si possano disegnare: chiamiamo s ed t le due rette date. Anche se non conosciamo il raggio della circonferenza che dovremo costruire possiamo scrivere la condizione del problema con $OP = Ot = Os$. Potremmo essere tentati di dividere la condizione in queste due parti $OP = Ot$ e $OP = Os$, ma questo è un vicolo cieco: il luogo geometrico dei punti che sono equidistanti da O e dalla retta s è una parabola e non abbiamo strumenti per disegnare parabole. Dobbiamo allora riformulare la divisione della condizione in due figure disegnabili: possiamo disegnare almeno il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due rette? Sì, è la retta parallela ad entrambe le rette date che si trova esattamente a metà tra le due. Tuttavia non possiamo comunque disegnare l'altra metà della condizione, che sarebbe $OP = Ot$ oppure $OP = Os$, perché è sempre una parabola.

È vero, basterebbe trovare il centro della circonferenza e il problema sarebbe risolto, ma non potrebbe tornarci utile avere il raggio? Abbiamo scelto noi di cercare prima il centro, forse abbiamo guardato alla parte sbagliata del problema:

> l'approccio più immediato non è l'unico possibile

anche se non abbiamo il centro possiamo trovare il raggio: visto che il centro sta a metà tra le due rette, la distanza tra le due rette è il diametro della circonferenza; metà di questa lunghezza è il raggio della circonferenza che ci serve. Ora che conosciamo con esattezza il raggio r, come può tornarci utile? Il punto P sta a distanza r dal centro O, ma è anche vero che il punto O sta a distanza r da P, quindi O si troverà su una circonferenza di raggio r e centro P. Troveremo il centro O nell'intersezione di questa circonferenza ausiliaria e della retta che sta a metà delle due rette date.