Corso di approfondimento

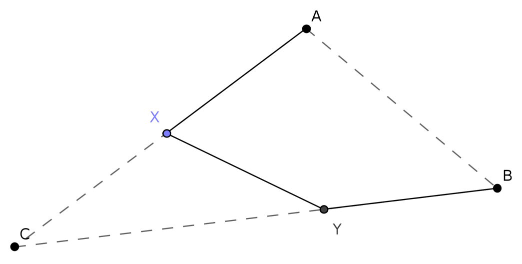
Seconda lezione 23/03/2015

Alcuni problemi di geometria sembrano insormontabili, irrisolvibili. La situazione è peggiore per gli studenti perché, oltre a non sapere come trovare la soluzione, spesso non sanno riconoscere la soluzione quando gli passa casualmente sotto gli occhi. Ci vogliono alcuni esempi per capire cos'è una soluzione; ci vogliono altri esempi aggiuntivi per capire come si trova una soluzione; ci vogliono ancora esempi e incoraggiamenti per convincere lo studente che ce la può fare con le proprie forze.

Riprendendo i consigli della lezione precedente, consideriamo le soluzioni di altri problemi per vedere se riusciamo a trovare nuovi consigli da dare al giovane risolutore di problemi.

Esempio 5

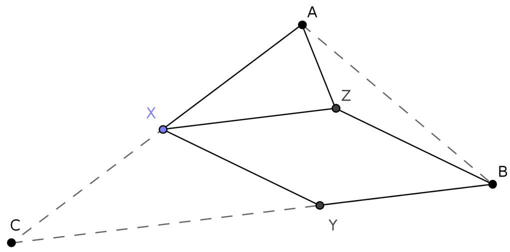
Sono dati tre punti A, B, C, non allineati. Si richiede di trovare il punto X su AC e il punto Y su BC in modo che sia $AX = XY = YB$. Proviamo ad applicare i precetti della lezione precedente.

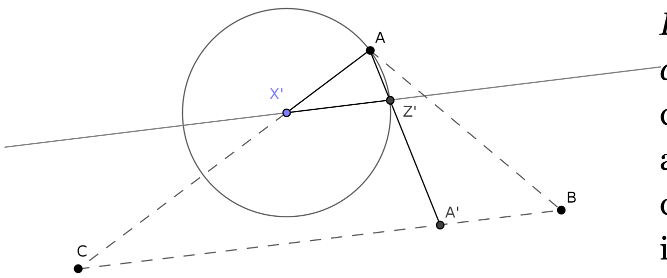


Disegna la soluzione, scopri proprietà aggiuntive: possiamo disegnare la soluzione in modo approssimativo, certo. Scopriamo proprietà aggiuntive? Forse AB è parallelo a XY: no, alcuni esperimenti e alcuni ragionamenti ci concinveranno che è così soltanto in alcuni casi particolari. Così com'è la figura è talmente scarna che sembra non ci sia nulla di cui scoprire ulteriori proprietà.

Riduci il problema alla costruzione di un solo punto: il problema chiede di trovare due punti, ma basterebbe trovare X e la soluzione sarebbe a portata di mano. Se avessimo X basterebbe tracciare un centro con centro in X che passa per A e Y salterebbe fuori subito. Viceversa, anche avendo solo Y si riuscirebbe a trovare subito X. La condizione che determina X (e allo stesso modo Y) non si lascia scomporre in figure disegnabili.

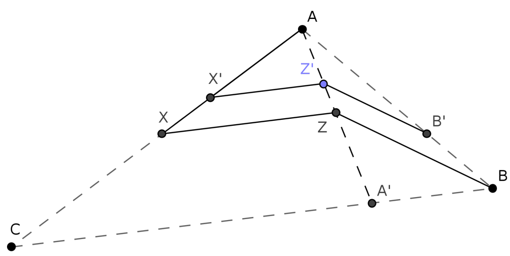
*L'approccio più immediato non è l'unico possibile:*volendo ridurre il problema alla costruzione di un solo punto, abbiamo pensato subito a X o ad Y. E se il punto da costruire fosse un altro, un punto ausiliario che poi condurrà facilmente a costruire X e Y? Proviamo a ragionare all'indietro: che punto potrebbe tornarci utile per costruire X ed Y? Dopo una serie di infruttuosi tentativi potrebbe saltare in mente al giovane di tentare con il punto Z scelto in modo che $XYBZ$ sia un parallelogramma; ne segue che AXZ è un triangolo isoscele e che XZ è parallelo a YB. In complesso AX, XZ, XY, ZB e YB sono tutti segmenti congruenti. Ora dobbiamo solo trovare Z...





Disegna la soluzione, trova proprietà aggiuntive: la figura l'abbiamo già disegnata, possiamo trovare proprietà aggiuntive? Della complessa figura formata dal parallelogramma e dal triangolo isoscele conosciamo quasi niente se non l'angolo AXZ, che è congruente all'angolo ACB. Essendo che il triangolo AXZ è isoscele conosciamo anche i due angoli alla base: ci interessa XAZ e possiamo costruirlo. Basta prendere un punto qualsiasi X' sul lato AC, tracciare la parallela a BC che passa per X' e segnare su di essa il segmento $X'Z'$ congruente a $X'A$. È molto interessante notare che la posizione del punto Z' dipende dalla scelta di X', ma il segmento AA' è indipendente da questa scelta. Il vero punto Z si troverà su questo segmento che riusciamo già a costruire: siamo a metà dell'opera perché abbiamo uno dei due luoghi geometrici che intersecati daranno Z. Sfortunatamente la ricerca dell'altro luogo geometrico, l'altra parte della condizione, non da risultati utili.

Proviamo a riformulare il problema sfruttando quanto abbiamo scoperto: abbiamo tre punti A, B, C e il punto A' su BC. Dobbiamo trovare il punto Z su AA' in modo che $ZB = BX$ (e X è costruito in modo che XZ sia parallelo a BC). Come prima, per orientarci possiamo scegliere un Z' a caso sul segmento AA' e costruire X' in modo che sia $X'Z'$ parallelo a BC. Proviamo a costruire il segmento $B'Z'$ con la proprietà che ci interessa: essere congruente a $X'Z'$. Come si vede i quadrilateri $AX'Z'B'$ e $AXZB$ sono simili, anzi omotetici. Con il senno di poi, questo ci restituisce un metodo per trovare il punto Z.



Riguardando alla soluzione e a tutta la strada fatta per raggiungerla, possiamo annotare qualche altro consiglio che potrebbe tornarci utile nella risoluzione dei prossimi problemi. Un punto cruciale del ragionamento è stato spostare l'attenzione su Z: questo punto che non faceva parte della figura è entrato in scena perché abbiamo aggiunto alla figura altre figure a noi più consuete e mansuete (un triangolo isoscele, un rombo). L'esperienza insegna che questa è una grande tattica:

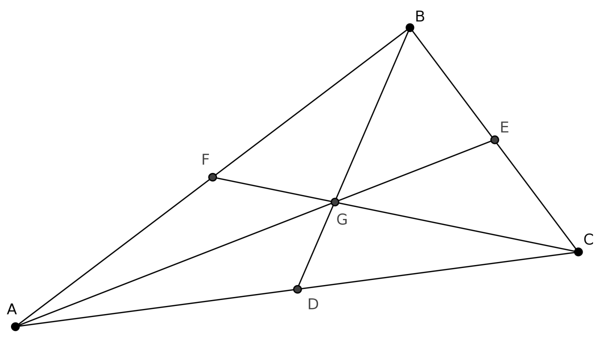
> aggiungi alla soluzione figure ausiliarie

Il secondo passo fondamentale, compiuto nella ricerca di Z, è stato quello di rinunciare a trovare proprio Z in cambio di qualcosa di poco differente: il quadrilatero $AX'Z'B'$ aveva la magica proprietà di essere simile al quadrilatero $AXZB$ che cercavamo, ma aveva anche il vantaggio di essere direttamente costruibile:

> costruisci qualcosa di simile alla soluzione

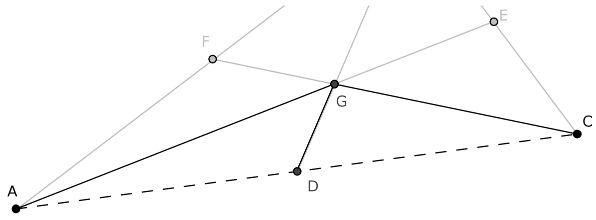
Esempio 6

Questo esempio, che avrebbe dovuto essere l'ultimo ad illustrare un nuovo consiglio per la soluzione di problemi, è per me un punto di svolta. Nel cercare la soluzione dei cinque esempi precedenti, gli studenti hanno solo assorbito quanto veniva loro detto e non sapevano dare consigli su come risolvere il problema. In questo caso, anche se sotto forti incoraggiamenti, hanno suggerito una idea chiave per risolvere il problema: una idea diversa da quella che io avevo in mente. Questo dimostra che la soluzione è stata incoraggiata ma non imboccata agli studenti. Il problema è il seguente: date le tre mediane di un triangolo, costruire il triangolo stesso.

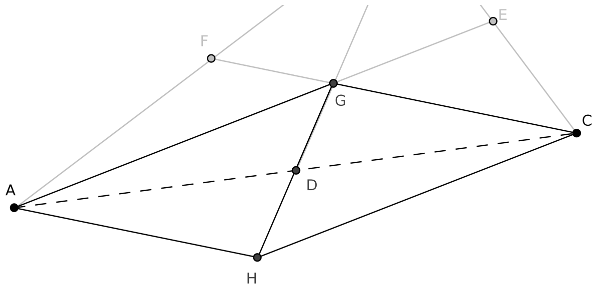


Disegna la soluzione, trova proprietà aggiuntive: disegnamo un triangolo qualsiasi con le sue tre mediane. Quali proprietà aggiuntive ha questa figura? Forse è difficile immaginarlo se non lo si è sentito dire almeno una volta, ma le mediane di qualsiasi triangolo si incontrano in un unico punto che sta a un terzo della lunghezza di tutte e tre le mediane (potrebbe chiamarsi teorema del baricentro). Siamo in grado di trovare quel punto su tutte e tre le mediane assegnate, ma questo non è definitivo nel costruire il triangolo richiesto. Osservando la soluzione si vede però che AGC è un triangolo del quale conosciamo due lati (basta prendere $\frac{2}{3}$ delle prime due mediane assegnate) e la mediana tra essi compresa (basta prendere $\frac{1}{3}$ della mediana assegnata rimanente). Spostiamo l'attenzione su questo nuovo problema che sembra promettere una più agevole soluzione. Questa idea, geniale, vale la pena ricordarla:

costruisci una parte accessibile della soluzione



Aggiungi alla soluzione figure ausiliarie: abbiamo disegnato la soluzione della quale conosciamo due lati e la mediana tra essi compresa. Cosa si potrebbe aggiungere per completare la figura e avere delle figure consuete? Dopo alcuni tentativi, ci siamo resi conto che raddoppiando la mediana data viene a formarsi un parallelogramma del quale conosciamo tutti i lati e anche una diagonale: possiamo costruirlo!



Problemi

Sul sito indicato a lezione (http://yamatteo.github.io/contenuti.html) c'è una lista di 40 problemi che si possono risolvere con la geometria delle superiori, con i consigli visti a lezione e con tanta pervicacia. Invito tutti i partecipanti al corso di approfondimento ad intestardirsi nella soluzione di alcuni di questi problemi, se non di tutti. Potete chiedere consigli via mail o in qualsiasi momento incontrandomi per strada. In ogni caso avvisatemi quando risolvete un problema e se avete voglia inviatemi o portatemi la soluzione. Non cambia nulla se siete i primi o gli ultimi a risolvere quel determinato problema: non ha senso fare a gara su chi è più intelligente così come non ha senso fare a gara su chi è più felice.