数値微分

→ コンピュータで微分を扱う際には、極限をとる操作を差分の形でおきかえて計算する。

∘前進差分

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

∘後進差分

$$\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

→ 1次精度

∘中心差分

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

→ 2次精度

∘2次精度前進差分

$$\frac{-3f(x)+4f(x+\Delta x)-f(x+2\Delta x)}{2\Delta x}$$

∘2次精度後進差分

$$\frac{3f(x)-4f(x-\Delta x)+f(x-2\Delta x)}{2\Delta x}$$

前進差分の計算

テイラー展開 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ にて.

$x \to x+h$, $a \to x$ とおくと.

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(x+h-x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k$$

$$= \frac{1}{0!} f(x) h^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(x) h^1 + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x) h^2 + \cdots$$

$$= f(x) + h f'(x) + O(h^2)$$

従って.

$$h f'(x) = f(x+h) - f(x) + O(h^2)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{O(h^2)}{h}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

ここまでで近似すると.
hの1次程度の誤差となる。
$\Downarrow$
1次精度.