

## 1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

เดิมจริง และสามารถไปสู่ขั้นตอน Phase II ได้

- ◊ หากไม่สามารถทำให้  $W = 0$  ได้ (เช่น  $W > 0$  เสมอ) แสดงว่าปัญหานี้ไม่มี feasible solution (infeasible problem) ไม่จำเป็นต้องดำเนินการต่อ

3. เมื่อได้  $W = 0$  แล้ว (กำจัดตัวแปรจำลองหมดแล้ว) เราจะดำเนินการต่อในขั้นที่สอง (Phase II) โดยกลับไปใช้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จริงของปัญหาเดิม และเริ่มทำ Simplex method ตามปกติจนได้คำตอบสุดท้าย

สรุปได้ว่าในกรณีที่ 2 นี้ การใช้ตัวแปรจำลอง (Artificial variable) และวิธีการ Simplex Phase I จะช่วยให้เราสามารถเริ่มต้นแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นได้ แม้ว่าเงื่อนไขของปัญหาจะทำให้จุดกำเนิดไม่สามารถเป็น basic feasible solution ตั้งต้นได้ก็ตาม

## ตัวอย่าง 1.3.8

ใช้วิธี simplex หาค่าผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & -3x + 5y \geq 4 \\ & x + 2y \leq 8 \end{aligned}$$

วิธีทำ:

ขั้นที่ 1: ปรับสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

- ◊ เนื่องจาก  $(0, 0)$  ไม่สอดคล้องเงื่อนไข  $-3x + 5y \geq 4$  (แทนค่าแล้วได้  $0 \geq 4$  ซึ่งเป็นเท็จ) เป็นจริง ดังนั้นจึงต้องเติมตัวแปรส่วนเกินและตัวแปรจำลอง ได้เป็น  $-3x + 5y - s_1 + a_1 = 4$  โดยที่  $s_1, a_1 \geq 0$  โดยที่ให้  $a_1$  เป็นตัวแปรฐาน และ  $x, y, s_1 = 0$  ในขั้นตั้งต้น
- ◊ เนื่องจาก  $(0, 0)$  สอดคล้องเงื่อนไข  $x + 2y \leq 8$  (แทนค่าแล้วได้  $0 \leq 8$  ซึ่งเป็นจริง) ดังนั้นจึงเติมตัวแปรส่วนขาดเข้าไปเท่านั้น ได้เป็น  $x + 2y + s_2 = 8$  โดยที่ให้  $s_2$  เป็นตัวแปรฐานและ  $x, y = 0$

และเนื่องจากว่ามีตัวแปรจำลอง จึงต้องตั้งฟังก์ชันจุดประสงค์ชั่วคราวมาให้เป็นการหาค่าต่ำสุดของผลรวมตัวแปรจำลอง กล่าวคือ  $\min a_1$  แต่เนื่องจากเรากำลังจะทำ simplex จึงต้องปรับปัญหาให้เป็นการหาค่าสูงสุดด้วยการคูณ  $-1$  เข้าไปได้เป็น  $\max W = -a_1$  จึงได้ปัญหา Phase 1 ออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \max \quad & W = -a_1 \\ \text{subject to} \quad & x, y, s_1, s_2, a_1 \geq 0 \\ & -3x + 5y - s_1 + a_1 = 4 \\ & x + 2y + s_2 = 8 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2: ตั้งตารางซิมเพล็กซ์ของตัวแปรจำลอง ได้เป็น

Pivot	$x$	$y$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	RHS
$a_1$	-3	5	-1	0	1	4
$s_2$	1	2	0	1	0	8
$W$	0	0	0	0	1	0

และทำการกำจัดตัวแปรจำลองออกจากจุดประสงค์ (การเอาตัวแปรอื่นมาพิจารณา) เพื่อให้คอลัมน์  $a_1$  มีแถวของ  $a_1$  เป็น 1 เพียงคนเดียว (เป็น pivot element ที่ตำแหน่งอื่นเป็น 0 ล้วน) ซึ่งทำได้โดยดำเนินการตามแถว  $(-1) R_1 + R_3 \rightarrow R_3$  จะได้สมาชิกในแถวที่  $R_3$  ใหม่คำนวณได้ดังนี้

- ◇ คอลัมน์  $x$ :  $(-1)(-3) + 0 = 3$
- ◇ คอลัมน์  $y$ :  $(-1)(5) + 0 = -5$
- ◇ คอลัมน์  $s_1$ :  $(-1)(-1) + 0 = 1$
- ◇ คอลัมน์  $s_2$ :  $(-1)(0) + 0 = 0$
- ◇ คอลัมน์  $a_1$ :  $(-1)(1) + 1 = 0$
- ◇ คอลัมน์  $RHS$ :  $(-1)(4) + 0 = -4$

จึงได้ตารางซิมเพล็กซ์ตั้งต้นดังนี้ (ถ้าในข้อสอบถามหาตารางตั้งต้น ต้องตอบตารางนี้ เพราะคอลัมน์  $a_1$  ในตารางก่อนหน้านี้ยังไม่อยู่ในรูปแบบ Pivot column)

Pivot	$x$	$y$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	RHS
$a_1$	-3	5	-1	0	1	4
$s_2$	1	2	0	1	0	8
$W$	3	-5	1	0	0	-4

#### หมายเหตุ 2: การหาแถว $W$ อีกแบบ

เราสามารถหาแถว  $W$  ได้แบบเร็วๆ โดยการนำสมการเงื่อนไขที่มีตัวแปรจำลองมาจัดรูปให้ตัวแปรจำลองอยู่ฝั่งหนึ่ง และตัวแปรที่เหลืออยู่อีกฝั่ง แล้วนำไปแทนค่าใน  $W$  เช่นในเงื่อนไขที่ 1 ของตัวอย่างนี้คือ  $-3x + 5y - s_1 + a_1 = 4$  และจัดรูปได้เป็น  $a_1 = 3x - 5y + s_1 + 4$  แล้วนำไปแทนใน  $W$  จะได้

$$W = -a_1 = -(3x - 5y + s_1 + 4) = -3x + 5y - s_1 - 4$$

และย้ายข้างได้รูปแบบ  $W + 3x - 5y + s_1 = -4$  ทำให้เขียนสัมประสิทธิ์ได้เป็น

$$3 \quad -5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -4$$

และทำกระบวนการ simplex ไปจนกว่าตัวแปรจำลองจะออกจากตัวแปรฐานทั้งหมด โดยจากตารางจะเห็นว่าต้องให้  $y$  เป็นตัวแปรเข้าฐาน และเมื่อหาอัตราส่วนเพื่อเลือกตัวแปรขาออกจากฐานตามตารางด้านล่างจะได้ว่าต้องใช้  $a_2$  ออกจากฐาน

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

Pivot	$x$	$y$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	RHS	อัตราส่วน
$a_1$	-3	5	-1	0	1	4	$4/5 = 0.8$
$s_2$	1	2	0	1	0	8	$8/2 = 4$
$W$	3	-5	1	0	0	-4	

ดำเนินการตามแถวเพื่อเปลี่ยน pivot โดยใช้  $R_1/5, (-2/5)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$  และ  $(1)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$  จะได้

Pivot	$x$	$y$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	RHS
$y$	-3/5	1	-1/5	0	1/5	4/5
$s_2$	11/5	0	2/5	1	-2/5	32/5
$W$	0	0	0	0	1	0

ซึ่งตารางใหม่ไม่สามารถอัปเดตเพิ่มเติมได้อีกแล้ว และตัวแปรจำลองถูกกำจัดออกจากตัวแปรฐานได้ทั้งหมด และได้  $W = 0$  จึงได้เราสามารถทำ simplex phase 2 ต่อได้โดยใช้ชุดสัมประสิทธิ์ที่ได้จาก phase 1

Pivot	$x$	$y$	$s_1$	$s_2$	RHS
$y$	-3/5	1	-1/5	0	4/5
$s_2$	11/5	0	2/5	1	32/5
$z$	-4	-5	0	0	0

หมายเหตุ 3: ความหมายของผลที่ได้จาก Phase 1

ผลที่ได้จากการทำ simplex phase 1 คือการพยายามหาจุดผลเฉลยตั้งต้น (basic feasible solution) ซึ่งจากเดิมเราสามารถเริ่มได้โดยง่ายที่จุด  $x = 0, y = 0$  แต่ว่าในกรณีที่มีเงื่อนไขที่ทำให้จุดดังกล่าวไม่สอดคล้อง (เช่น เงื่อนไข  $-3x + 5y \geq 4$ ) เราจึงจำเป็นต้องเพิ่มตัวแปรจำลองเพื่อจำลองการเดินทางจากจุด  $(0, 0)$  ไปที่จุดมุมตั้งต้นที่ใกล้ที่สุด ซึ่งจากตารางสุดท้ายที่ได้มาจาก phase 1 เราได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{5}s_1 &= \frac{4}{5} \\ \frac{11}{5}x + \frac{2}{5}s_1 + s_2 &= \frac{32}{5} \end{aligned}$$

โดยที่  $x = 0, s_1 = 0$  (เพราะไม่ใช่ฐาน) ซึ่งเมื่อแก้ระบบสมการหาค่าตัวแปรฐาน จะได้  $y = 4/5$  และ  $s_2 = 32/5$  ซึ่งหมายถึง เราหาจุดผลเฉลยตั้งต้นได้เป็นจุด  $(x, y) = (0, 4/5)$  และใช้ระบบของจุดนี้เพื่อไปแก้หาค่าสูงสุดของ  $Z$  ต่อได้

ขั้นที่ 3: ดำเนินการ simplex ได้ตามปกติ (ทั้งไว้ให้เป็นแบบฝึกหัดเพิ่มเติมเพื่อทบทวนการดำเนินการ simplex)

□