

คณิตศาสตร์ดิสครีตสำหรับการเขียนโปรแกรม

(Discrete Mathematics for Programming)

Phaphontee Yamchote

Information System for Digital Business, Faculty of Business Administration

Southeast Asia University

Update at October 15, 2025

Contents

I	Basic Thinking: Mathematical Thinking, Reasoning, and Proving	3
1	Fundamental of Problem Solving	5
1.1	Problem Solving คืออะไร	5
1.2	การแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ	7
1.2.1	การแบ่งย่อยปัญหา (decomposition)	7
1.2.2	การเข้าใจรูปแบบ (pattern recognition)	9
1.2.3	การคิดเชิงนามธรรม (abstraction)	10
1.2.4	การออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm design)	11
1.3	แบบฝึกหัด: การวิเคราะห์ปัญหาเชิงการคำนวณ	15
2	Mathematics as a Language	19
2.1	เซต	20
2.2	ตรรกศาสตร์	21
2.3	ความสัมพันธ์	23
2.4	ฟังก์ชัน	23
2.5	โครงสร้างของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง: ปริบทและการตีความ	23
3	Logic, Reasoning and Proof	25
3.1	ตรรกศาสตร์คืออะไร	26

3.2	การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์	26
3.2.1	องค์ประกอบพื้นฐานของข้อความตรรกะ	27
3.2.2	การพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ <i>for all</i>	28
3.2.3	การพิสูจน์ข้อความเงื่อนไขผลสรุป	28
3.2.4	การพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ <i>there exist</i>	30
3.2.5	การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (ทั่วไป)	30
3.3	ข้อควรคำนึงในการเขียนพิสูจน์	30
4	Recursion and Mathematical Induction	35
II	Discrete Mathematics with Programming	37
5	Set Theory and Its Family	39
5.1	เซต	40
5.1.1	เซตว่าง	43
5.1.2	เซตย่อยและเซตกำลัง	44
5.1.3	การดำเนินการของเซต	48
5.2	ความสัมพันธ์	51
5.2.1	คู่อันดับ ผลคูณคาร์ทีเซียน และความสัมพันธ์	51
5.2.2	ความสัมพันธ์ประเภทต่าง ๆ	51
5.2.3	ความสัมพันธ์สมมูล และชั้นสมมูล	51
5.3	ฟังก์ชัน	51
5.3.1	ฟังก์ชัน โดเมน และเรนจ์	51
5.3.2	ประเภทของฟังก์ชัน	51
5.3.3	ฟังก์ชันประกอบ	51
5.4	ทฤษฎีเซตเชิงการนับ	51

5.4.1	การสมมูลกันเชิงการนับของเซต และคาร์ดินอลของเซต	51
5.4.2	Cantor's Theorem	51
6	Number Theory	53
6.1	การหารลงตัว	54
6.2	ขั้นตอนวิธีการหาร: Division Algorithm	58
6.3	Theory Exercise	61
6.4	programming: การหารลงตัวที่เขียนกันเองด้วยนิยาม	62
6.4.1	วิธีเบื้องต้น	64
6.4.2	พิจารณาแค่จำนวนบวกก็พอ	65
6.4.3	เปลี่ยนจากปัญหาการคูณเป็นปัญหาการบวก	66
6.4.4	เขียนแบบฟังก์ชันเวียนเกิด	67
6.5	programming: ตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะ	69
6.5.1	วิธีเบื้องต้น	69
6.5.2	วิธีที่ไม่ใช้ลิสต์ หรือการจำตัวประกอบทั้งหมดของ n	72
6.5.3	ลดจำนวนครั้งการคำนวณได้มากกว่านี้อีก	73
6.6	programming: แยกตัวประกอบในรูปผลคูณจำนวนเฉพาะ	74
6.6.1	วิธีวนซ้ำตามจำนวนเฉพาะ	75
6.6.2	วิธีเวียนเกิด	78
6.7	programming: ขั้นตอนวิธีการหารหาเศษและผลหาร	79
6.8	Programming Exercise	80
7	Combinations	81
7.1	หลักการบวกและหลักการคูณ	81
7.1.1	หลักการบวก	82
7.1.2	หลักการคูณ	84
7.2	การเรียงสับเปลี่ยน	88

7.2.1	การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของไม้ซี้	88
7.2.2	การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม	91
7.2.3	การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของซี้	93
7.3	การจัดกลุ่ม	94
7.4	สัมประสิทธิ์ทวินาม	96
7.4.1	ทฤษฎีบททวินาม	97
7.4.2	การใช้ทฤษฎีบททวินามในการพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงการจัด	97
7.4.3	โจทย์ปัญหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจัดกลุ่ม	98
7.5	หลักการนำเข้า-ตัดออก	98
7.6	กฎรังนกพิราบ	98
7.7	Programming about Combinatorics	99
8	Recurrence Relation	101
9	Graph Theory	103
III	Basic Algorithm Design based upon Discrete Mathematics	105
10	Recursive Algorithm - an approach to functional programming	107

Prologue

819605 Discrete Mathematics (2/2568)

สำหรับการสอนรายวิชา 819605 Discrete Mathematics ของหลักสูตรวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ออนไลน์มหาวิทยาลัยเอเชียอาคเนย์ ในภาคการศึกษาปลาย ประจำปีการศึกษา 2568 นี้ ถือเป็นครั้งแรกที่ผู้เขียนได้สอนวิชา Discrete Mathematics อย่างเป็นทางการในฐานะอาจารย์มหาวิทยาลัย หลังจากที่เคยสอนวิชานี้ในรูปแบบตัวเตอรืมานับครั้งไม่ถ้วน การสอนในฐานะตัวเตอรืนั้นมักเป็นเพียงการถ่ายทอดเนื้อหาตามที่สถาบันตัวได้จัดเตรียมไว้ให้ ซึ่งหลายครั้งก็ทำให้ผู้สอนรู้สึกสงสัยว่าทำไมเนื้อหาบางส่วนถูกจัดมาโดยข้ามหัวข้อสำคัญ หรือไม่เรียงตามตรรกะของการเรียนรู้ที่ควรจะเป็น

ในฐานะอาจารย์ ผู้เขียนจึงมีโอกาสดำเนินการปรับรูปแบบการสอนใหม่ทั้งหมด ตั้งแต่แนวคิด วิธีการอธิบาย ไปจนถึงแบบฝึกหัด โดยพยายามรักษาสมดุลระหว่าง “ความเป็นคณิตศาสตร์” ที่เข้มงวด กับ “ความเป็นวิทยาการคอมพิวเตอร์” ที่มุ่งใช้งานจริง โดยเฉพาะในส่วนของการสอนเรื่องการพิสูจน์ (Method of Proof) ซึ่งแม้จะเป็นหัวใจของวิชานี้ แต่ก็จำเป็นต้องแยกสอนเป็นบท ๆ แบบที่นักศึกษาคณะคณิตศาสตร์เรียนกัน หากแต่สามารถบูรณาการเข้าไปในหัวข้อต่าง ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเห็นการประยุกต์ของแต่ละวิธีพิสูจน์อย่างเป็นธรรมชาติและต่อเนื่อง

ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงจัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนและเป็นคู่มือให้กับผู้เรียน โดยเนื้อหาการสอนจริงในห้องเรียนอาจไม่ได้เรียงตรงตามหนังสือทั้งหมด แต่จะมีโครงสร้างหลักตามแผนการสอน 16 สัปดาห์ดังต่อไปนี้ ซึ่งระบุหัวข้อการสอน วิธีพิสูจน์ที่เรียนรู้ และบทที่สอดคล้องกับหนังสือ

Week	Main Topic	Method of Proof	Book Chapter
1	Mathematical Language & Sets; Recursive Definitions	Direct Proof, Counterexample	Ch.1
2	Propositional Logic & Inference Rules	Direct, Contrapositive, Contradiction	Ch.2
3	Predicate Logic & Quantifiers	Contradiction, Countermodel	Ch.2
4	Induction I: Basic Induction on \mathbb{N}	Weak Induction, Base & Step Structure	Ch.3
5	Induction II: Strong & Structural Induction	Structural Induction, Minimal Counterexample	Ch.3
6	Functions & Relations	Proof from Definitions, Counterexample	Ch.4
7	Equivalence Relations & Partial Orders	Proof from Properties, Diagram Reasoning	Ch.4
8	Midterm Exam	—	—
9	Counting I: Basic Rules & Bijections	Combinatorial Proof, Bijection	Ch.5
10	Counting II: Inclusion–Exclusion & Pigeonhole	Inductive Combinatorial Proof	Ch.5
11	Recursive Problem Solving	Inductive Reasoning in Algorithms	Ch.6
12	Recurrences I: Linear Homogeneous	Inductive Verification of Closed Forms	Ch.6
13	Recurrences II: Non-homogeneous & OGFs	Induction + Generating Function Sketch	Ch.6
14	Graphs I: Fundamentals & Connectivity	Parity / Invariant Proofs	Ch.7
15	Trees & Spanning Trees	Induction on Graph Size, Cut/Cycle Property	Ch.7
16	Final Exam	—	—

วิชานี้จึงมิได้มีเป้าหมายเพียงให้ผู้เรียนสามารถคำนวณผลลัพธ์ได้ถูกต้องตามสูตรหรืออัลกอริทึมเท่านั้น หากแต่ต้องการให้ผู้เรียนเข้าใจ “เหตุผลเบื้องหลัง” ว่าทำไมวิธีการนั้นจึงถูกต้อง และเงื่อนไขใดที่ทำให้คำตอบสมบูรณ์ การเรียนรู้ในรายวิชา Discrete Mathematics จึงเปรียบได้กับการฝึกคิดอย่างเป็นระบบ ฝึกตั้งคำถาม ฝึกแยกแยะระหว่างสิ่งที่ “เชื่อได้” กับสิ่งที่ “ควรพิสูจน์ให้ได้” การให้เหตุผล (reasoning) จึงเป็นหัวใจสำคัญเหนือการคำนวณ เพราะคณิตศาสตร์ที่แท้จริงไม่ใช่เรื่องของตัวเลข แต่คือศิลปะแห่งความเข้าใจ — ความสามารถในการอธิบาย “ว่าทำไม” สิ่งหนึ่งจึงจริง ไม่ใช่เพียง “ว่าอะไร” เป็นคำตอบที่ถูกต้อง

ด้วยเหตุนี้ ผู้เขียนหวังว่าผู้เรียนจะไม่มองว่าวิชานี้เป็นวิชาแก้โจทย์คณิตศาสตร์เท่านั้น แต่จะเป็นวิชาที่เป็นเหมือนสนามฝึกคิด ฝึกให้เหตุผล และฝึกมองเห็นความงามของตรรกะที่อยู่เบื้องหลังทุกหลักฐาน ทุกสูตร และทุกอัลกอริทึมที่เราจะได้พบตลอดทั้งภาคการศึกษา

Part I

Basic Thinking: Mathematical Thinking, Reasoning, and Proving

Chapter 1

Fundamental of Problem Solving

เราจะเริ่มบทแรกของหนังสือเล่มนี้ด้วยทักษะที่สำคัญที่สุดไม่ว่าจะในการเรียนคณิตศาสตร์ หรือจะคอมพิวเตอร์ก็ตาม นั่นคือทักษะการแก้ปัญหา (problem solving) เพราะแก่นแท้ของตัววิชาเหล่านี้คือการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นปัญหาในตัววิชาเองในรูปแบบปัญหาเชิงการคำนวณ (computational problem) หรือปัญหาในโลกจริง กล่าวคือ ปัญหาคือสิ่งที่เราจะต้องพบเจอเป็นเรื่องปกติในการเรียนวิชานี้

ในบทนี้เราจะเริ่มจากมาดูก่อนว่าปัญหาคืออะไร และการแก้ปัญหาคืออะไร เพราะก่อนจะลงมือแก้ปัญหา เราก็ต้องเข้าใจก่อนว่าสิ่งเหล่านี้คืออะไร หลังจากที่เราเข้าใจเกี่ยวกับสิ่งที่เรียกว่าปัญหาแล้ว เราจะมาต่อกันว่าทักษะหรือแนวคิดอะไรบ้างที่สำคัญในการแก้ปัญหา โดยจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดปลีกย่อยของเทคนิคการแก้ปัญหา เพราะในแต่ละรูปแบบปัญหาที่ต่างกัน ก็จะมีรายละเอียดในเรื่องวิธีการแก้ปัญหาหรือเทคนิคการแก้ปัญหาก็แตกต่างกันออกไป เหมือนการทำโจทย์คณิตศาสตร์ที่รูปแบบโจทย์ที่ต่างออกมาก็อาจจะมีเทคนิคที่ต่างกัน แต่ว่าสิ่งที่ทำให้เรารู้ว่าต้องใช้เทคนิคหรือวิธีการอะไรในการแก้ปัญหาก็คือการแก้ก็คือประสบการณ์ที่เราจะได้ฝึกกันในแต่ละบท ๆ ต่อจากนี้นั่นเอง

1.1 Problem Solving คืออะไร

ก่อนจะถามว่าการแก้ปัญหาคืออะไร ก็คงไม่เสียเวลาอะไรนักถ้าเราจะมาพูดคุยตกลงกันให้เข้าใจก่อนว่า อะไรคือปัญหา ซึ่งถ้าเราเปิดดูความหมายตามราชบัณฑิต คำนี้จะมีความหมายว่า

น. ข้อสงสัย, ข้อขัดข้อง, เช่น ทำได้โดยไม่มีปัญหา, คำถาม, ข้อที่ควรถาม, เช่น ตอบปัญหา, ข้อที่ต้องพิจารณา
แก้ไข เช่น ปัญหาเฉพาะหน้า ปัญหาทางการเมือง.

ซึ่งบางความหมาย อาจจะรู้สึกว่าเป็นปัญหาที่คืออะไรที่รู้สึกไม่ดี เพราะจะทำให้สิ่งต่าง ๆ ดำเนินไปไม่เป็นไปตาม
ที่ควรจะเป็น เช่น ข้อขัดข้อง หรือข้อที่ต้องพิจารณาแก้ไข ทว่ายังมีความหมายอีกกลุ่มหนึ่งที่ดูน่าสนใจคือ ข้อ
สงสัย ข้อควรถาม ที่เรามักพูดกันว่า “ตอบปัญหา”

ในหนังสือเล่มนี้ (และในคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์) เราจะให้ความหมายของ
ปัญหา คือ โจทย์ที่ถามหรือกล่าวขึ้นมาเพื่อต้องการคำตอบโดยอาจจะมีความหมายบางอย่างหรือไม่ก็ได้ โดยจะ
เป็นการกล่าวถึงสถานการณ์ที่มีสิ่งตั้งต้นอะไรสักอย่าง แล้วสุดท้าย(หลังจากผ่านกระบวนการอะไรสักอย่าง)จะ
ได้สิ่งที่ต้องการออกมา

ตัวอย่างเช่น “บริษัทจัดสรรแม่บ้านทำความสะอาดสำนักงานแห่งหนึ่งได้รับการจองคิวใช้บริการแม่บ้านเข้า
มาจำนวนหนึ่งจากลูกค้าหลายราย โดยที่ลูกค้าแต่ละคนก็มีจำนวนวันที่ต้องการใช้บริการแม่บ้านไม่เหมือนกัน
ทางบริษัทเลยอยากทราบว่าต้องเตรียมแม่บ้านไว้กี่คน” ซึ่งเราจะพบว่าปัญหานี้เราต้องการรู้ว่าต้องเตรียมแม่บ้านไว้
กี่คน โดยเรามีรายการการจองคิวเป็นตัวตั้งของการตอบปัญหานี้

จากตัวอย่างที่กล่าวมา จะเรียกสิ่งตั้งต้น (เช่นรายการการจองคิวที่บริษัทได้รับ) ว่า**ข้อมูลขาเข้า (input)**
และเราจะเรียกสิ่งที่ได้ออกมา (เช่นจำนวนแม่บ้านที่ต้องเตรียมไว้) ว่า**ข้อมูลขาออก (output)** ดังนั้น เราอาจ
จะกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่าปัญหาก็คือการมีข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออกที่ต้องการ และสิ่งที่เราต้องลงแรงหา
ก็คือ วิธีการที่จะแปลงเปลี่ยนข้อมูลขาเข้าดังกล่าวให้ได้ข้อมูลขาออกตามที่ต้องการ ซึ่งเราจะเรียกกระบวนการ
การหาวิธีการดังกล่าวว่า**การแก้ปัญหา (problem solving)** และจะเห็นว่าสิ่งสำคัญอันดับแรกสุดไม่ว่าเรา
จะแก้ปัญหอะไรก็ตามคือการทำความเข้าใจภาพรวมของโจทย์ (**problem statement**) ว่าตัวปัญหาคืออะไร
และระบุให้ได้ว่าอะไรคือข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออก โดยถ้าเทียบกับตัวอย่างบริษัทแม่บ้านทำความสะอาด
ก่อนหน้านี้ จะมีรายละเอียดดังนี้

- **โจทย์:** หาวิธีการในการคำนวณจำนวนแม่บ้านที่ต้องเตรียมไว้เมื่อได้รับรายการการจองคิวใช้บริการ
จากลูกค้า
- **ข้อมูลขาเข้า:** รายการการจองคิวใช้บริการ
- **ข้อมูลขาออก:** จำนวนแม่บ้านที่ต้องเตรียมไว้

ทั้งนี้ ตัวปัญหาเองก็อาจจะถูกแบ่งกลุ่มออกเป็นประเภทต่าง ๆ ได้หลายประเภท แต่ปัญหาที่เราจะสนใจกันในหนังสือเล่มนี้นั้นจะเป็นปัญหาในกลุ่ม**ปัญหาเชิงการคำนวณ** (computational problem) หรือหนังสือบางเล่มจะเรียกว่า**ปัญหาเชิงการประมวลผล** ซึ่งคำว่าคำนวณในที่นี้ไม่ได้หมายถึงเพียงแค่การบวก ลบ คูณ หาร หรือการหาโจทย์คณิตศาสตร์ (calculation) แต่ยังรวมไปถึงการวางแผนเชิงกระบวนการ เชิงตรรกะ เชิงเหตุผล หรือรวมไปถึงการคิดเชิงสัญลักษณ์เองก็ด้วย ไม่จำเป็นว่าจะต้องเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับตัวเลขเพียงเท่านั้น ซึ่งกระบวนการการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณถือว่าเป็นทักษะที่สำคัญที่สุดในการเขียนโปรแกรม รวมไปถึงการศึกษาคณิตศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ โดยเราจะได้กล่าวถึงรายละเอียดของกระบวนการดังกล่าวในหัวข้อถัดไป

1.2 การแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ

จากหัวข้อที่แล้ว เราอาจกล่าวโดยสรุปได้ว่าปัญหาเชิงการคำนวณก็คือปัญหาที่จะสามารถแก้ได้ด้วยคอมพิวเตอร์ โดยการออกแบบอัลกอริทึมที่เหมาะสม และในการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณนั้น จะมีทักษะที่สำคัญที่จะช่วยให้เราแก้ปัญหาเชิงการคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพอยู่ 4 ทักษะได้แก่

1. การแบ่งย่อยปัญหา (decomposition)
2. การเข้าใจรูปแบบ (pattern recognition)
3. การคิดเชิงนามธรรม (abstraction)
4. การออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm design)

1.2.1 การแบ่งย่อยปัญหา (decomposition)

ในการแก้ปัญหาหนึ่งที่เราได้รับมานั้น อาจเป็นการยากถ้าเราจะหาวิธีที่แปลงข้อมูลขาเข้าให้กลายเป็นข้อมูลขาออกได้ภายในขั้นเดียว อาจจะเนื่องมาจากการแก้ปัญหาดังกล่าวต้องการขั้นตอนย่อย ๆ หรือเครื่องมือย่อย ๆ ในการแก้ปัญหานั้น ดังนั้นเราจึงควรย่อยปัญหาใหญ่ที่ซับซ้อนให้ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่จะสามารถแก้ได้ง่าย ๆ ไม่ซับซ้อนก่อน

ตัวอย่างเช่นเราอยากจะต่อจิกซอร์สักรูปหนึ่ง คงเป็นการยากถ้าเราจะเทจิกซอร์ทั้งหมดลงมาในแผ่นเดียว แล้วต่อขึ้นมาด้วยการมองภาพทั้งภาพในเวลาเดียวกัน แต่คงจะดีขึ้นถ้าเรารู้ว่าในภาพมีองค์ประกอบย่อย ๆ ที่เห็นความแตกต่างเรื่องสีอย่างชัดเจน เช่นมีบริเวณหนึ่งที่มีแต่สีแดง และมีอีกบริเวณหนึ่งที่มีแต่สีเขียว หรืออีกบริเวณหนึ่งเป็นลายผ้าสีเหลืองลายจุดสีส้ม เราก็เลยจะแบ่งปัญหาการต่อจิกซอร์ทั้งหมดนี้เป็นปัญหาการต่อจิกซอร์กลุ่มย่อย ๆ ที่เป็นสีแดง, ปัญหาการต่อจิกซอร์กลุ่มย่อย ๆ ที่เป็นสีเขียว และ ปัญหาการต่อจิกซอร์กลุ่มย่อย ๆ ที่เป็นสีเหลืองลายจุดสีส้ม ซึ่งจะทำให้เกิดปัญหาที่เล็กลงและอาจจะซับซ้อนน้อยลงเพราะเรากำจัดตัวเลือกจิกซอร์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับริเวณดังกล่าวออกไปได้เยอะ

ขออีกสักตัวอย่างที่ดูเป็นปัญหาเชิงการคิดเลขมากขึ้น เช่นปัญหาการแก้สมการจำนวนเต็ม $x + y + 12z = 30$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกสามจำนวนที่ต่างกัน โดยโจทย์ต้องการว่ามีผลเฉลย (x, y, z) ดังกล่าวทั้งหมดกี่รูปแบบ ซึ่งแน่นอนว่าถ้าเราไล่ไปเรื่อย ๆ ก็อาจจะเสร็จได้ไม่ได้ยากมาก เพราะเลขเราต้องการผลบวกแค่ 30 ถ้าต้องไล่ 0 ถึง 30 ก็มีอยู่ไม่เกิน $31 \times 31 \times 31 = 29791$ รูปแบบ ซึ่งถ้าให้คอมพิวเตอร์ช่วยรันให้ก็คงใช้เวลาไม่นาน แต่ถ้าใช้คนก็อาจจะเหนื่อยก่อนและมีคิดผิดบ้างได้ แต่เราจะเห็นว่า การเพิ่มขึ้นของค่า z นั้นกลับมีประโยชน์อย่างมาก เพราะเพิ่มขึ้น 1 ค่าในด้านซ้ายจะเพิ่มขึ้นไปถึง 12 ดังนั้น เราจึงอาจจะสังเกตได้ไม่ยากว่าแยกพิจารณาตามค่า z ไปเลยก็ได้ โดยที่ $z = 0, 1, 2$ (เพราะถ้ามากกว่านี้ ผลบวกจะเกิน 30) กล่าวคือ เราจะแยกปัญหาหลักเราออกเป็นปัญหาย่อย 3 ปัญหาย่อยคือ

1. เมื่อ $z = 0$: แก้สมการ $x + y = 30$
2. เมื่อ $z = 1$: แก้สมการ $x + y = 18$
3. เมื่อ $z = 2$: แก้สมการ $x + y = 6$

ซึ่งแต่ละปัญหาย่อย จะสามารถแก้ได้ด้วยการนับง่าย ๆ

ในการแยกปัญหาย่อยนั้น อาจจะได้ปัญหาย่อยมาในรูปแบบที่แยกกันทำ ต่างคนต่างอิสระจากกัน ทำเสร็จแล้วค่อยนำคำตอบของแต่ละปัญหามาผนวกรวมร่างกันให้กลายเป็นปัญหาใหญ่ เช่นตัวอย่างสมการข้างต้นที่เราสามารถแก้ปัญหาไหนก่อนก็ได้ไม่มีผลต่อกัน หรือเราอาจจะได้ปัญหาย่อยที่มาในรูปแบบที่ต้องทำงานต่อเนื่องกันโดยที่เมื่อทำปัญหาย่อยที่ 1 เสร็จให้นำผลของปัญหาย่อยที่ 1 ไปใช้ต่อเป็นข้อมูลขาเข้าของปัญหาย่อยที่ 2 ก็ได้ ทั้งนี้ ไม่มีกฎตายตัวในการตั้งปัญหาย่อย ขึ้นอยู่กับมุมมองต่อปัญหาตรงหน้าของเรา ณ เวลานั้น

อีกตัวอย่างที่อาจจะใกล้ตัวมากขึ้น เช่นเรากำลังจะพัฒนาระบบ **web application** การจัดการคะแนน

นักเรียนในรายวิชา ซึ่งถ้ามองแต่ปัญหาภาพใหญ่ เราอาจจะวางแผนไม่ได้หรือไม่ตรงเป้าหมาย หรือภาษาชาวบ้านจะเรียกว่า คิดอะไรจนฟุ้งมากเกินไป เราจึงต้องเริ่มจากการมาดูก่อนว่าระบบของเราควรมีระบบย่อยอะไรบ้าง เช่นต้องมี (1) ส่วนคำนวณเกรดเฉลี่ย (2) ส่วนตรวจสอบเกรด และ (3) ส่วนแสดงผลรายงาน ซึ่งทำให้เราสามารถโฟกัสไปที่ละส่วนได้ หรืออาจจะแบ่งงานกันทำคนละส่วนไปพร้อม ๆ กัน และเมื่อแก้ปัญหาเสร็จทุกส่วน เราก็จะสามารถนำมาประกอบเข้าด้วยกันจนเป็นระบบสมบูรณ์ได้

1.2.2 การเข้าใจรูปแบบ (pattern recognition)

อีกทักษะคือการสังเกตรูปแบบของสิ่งที่เกิดขึ้นในปัญหานั้น การเข้าใจรูปแบบหมายถึงความสามารถในการมองเห็นความคล้ายคลึง ความซ้ำ หรือความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ ในปัญหาที่เรากำลังเผชิญ ซึ่งจะช่วยให้เรามองเห็นแนวทางแก้ไขที่ง่ายขึ้นหรือสามารถนำแนวทางเดิมมาใช้ซ้ำได้กับปัญหาใหม่ที่มีโครงสร้างใกล้เคียงกัน

ลองนึกภาพว่าเรากำลังหัดเล่นหมากรุก ในตอนแรกเราอาจจะเดินหมากไปเรื่อย ๆ ตามสัญชาตญาณ แต่เมื่อเล่นไปหลายตา เราจะเริ่มสังเกตเห็นรูปแบบบางอย่าง เช่น ถ้าเราเคยใช้หมากับเรือบิบบมจนอีกฝ่ายหนีไม่ได้ รูปแบบนั้นอาจจะเกิดซ้ำได้อีกในเกมถัดไป การเข้าใจรูปแบบนี้ทำให้เราสามารถวางแผนล่วงหน้าได้ และลดการคิดซ้ำในสถานการณ์ที่คล้ายกัน — นั่นคือหัวใจของการเข้าใจรูปแบบในเชิงการคำนวณ

ในโลกของคณิตศาสตร์ เราเองก็ใช้ทักษะนี้อยู่เสมอ เช่น เมื่อเราเห็นลำดับตัวเลข 2, 4, 6, 8, ... เราอาจสังเกตได้ทันทีว่าเป็นลำดับเลขคู่อย่างง่าย หรือหากเราเห็น 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... เราก็รู้ว่าเป็นลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) ซึ่งการรู้จักรูปแบบนี้ช่วยให้เราทำนายพฤติกรรมหรือค่าต่อไปได้โดยไม่ต้องเริ่มจากศูนย์ทุกครั้ง นี่เองคือแก่นของการคิดเชิงแบบแผน (pattern thinking)

ในเชิงการเขียนโปรแกรม เรามักเจอปัญหาที่มีรูปแบบซ้ำ เช่น การวนลูป (loop) การตรวจสอบเงื่อนไข (if-else) หรือการคำนวณผลรวมของข้อมูลหลายค่า ปัญหา “หาผลรวมของจำนวนคู่ทั้งหมดในรายการ” และ “หาผลรวมของจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว” ดูเหมือนต่างกัน แต่จริง ๆ แล้วมีรูปแบบเดียวกันคือ “การวนลูปและตรวจสอบเงื่อนไขก่อนบวกผลรวม” ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนโปรแกรมเดียวกันใช้แก้ปัญหาทั้งสองได้ เพียงแค่เปลี่ยนเงื่อนไขภายในเล็กน้อย

เพื่อให้เห็นภาพเชิงคณิตศาสตร์ ลองพิจารณาปัญหาง่าย ๆ ดังนี้: “หาจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 50 ทั้งหมดที่เป็นผลคูณของ 3 หรือ 5” ถ้าเราไล่ไปที่ละจำนวนจะยุ่งยากมาก แต่ถ้าเราสังเกตเห็นรูปแบบว่า “ทุกจำนวน

ที่เป็น 3, 6, 9, 12, ...” และ “ทุกจำนวนที่เป็น 5, 10, 15, 20, ...” เราก็สามารถหาคำตอบได้โดยการหาลำดับเลขคูณของ 3 และ 5 แล้วนำมารวมกัน โดยไม่ต้องตรวจสอบทีละจำนวน ซึ่งนี่คือการใช้ pattern recognition ช่วยลดภาระการคำนวณอย่างชัดเจน

ทักษะนี้ยังสำคัญอย่างยิ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง (discrete mathematics) เพราะเราจะพบกับรูปแบบในโครงสร้างข้อมูล เช่น กราฟ (graph) ที่มีลักษณะซ้ำกัน หรือรูปแบบของฟังก์ชันบูลีน (boolean function) ที่มีโครงสร้างเหมือนกันบางส่วน การมองเห็นรูปแบบเหล่านี้ทำให้เราสามารถพิสูจน์ทั่วไปได้ง่ายขึ้น เช่น การพิสูจน์โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (mathematical induction) ก็ถือเป็นการมองหาความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบในแต่ละขั้นของปัญหานั้นเอง

กล่าวโดยสรุป การเข้าใจรูปแบบคือการฝึก “สายตาเชิงคำนวณ” ให้เห็นสิ่งที่ซ่อนอยู่ในความซับซ้อนของข้อมูล เมื่อเรามองเห็น pattern ได้ดี เราก็สามารถสร้างอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพและยืดหยุ่น ใช้แก้ปัญหาได้หลากหลายโดยไม่ต้องเริ่มใหม่ทุกครั้ง และนั่นคือสิ่งที่ทำให้นักคณิตศาสตร์และนักคอมพิวเตอร์สามารถสร้างสรรค์สิ่งใหม่ได้จากสิ่งที่มีอยู่เดิม

1.2.3 การคิดเชิงนามธรรม (abstraction)

ในชีวิตประจำวันของเรา เรามักจะต้องจัดการกับข้อมูลหรือสิ่งต่าง ๆ ที่มีรายละเอียดมากมาย เช่น ถ้าเราจะขับรถไปทำงาน เราไม่จำเป็นต้องคิดถึงแรงเสียดทานระหว่างยางกับถนน หรือการระเหยของน้ำมันในถัง เราเพียงแค่วางใจถึง “รถ” ในฐานะสิ่งหนึ่งที่เมื่อบิดกุญแจแล้วสามารถพาเราไปถึงจุดหมายได้ ซึ่งในทางหนึ่งก็คือการ “คิดเชิงนามธรรม” — การละรายละเอียดปลีกย่อยที่ไม่จำเป็นออก แล้วมองภาพรวมของสิ่งที่เราสนใจเท่านั้น

ในทางคอมพิวเตอร์และคณิตศาสตร์ การคิดเชิงนามธรรม (abstraction) หมายถึงการลดความซับซ้อนของปัญหาหรือข้อมูล โดยมองเฉพาะ “คุณลักษณะสำคัญ” ที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหา นั้น ตัวอย่างเช่น เมื่อเรากำลังออกแบบโปรแกรมจัดการ “บัญชีผู้ใช้” เราไม่จำเป็นต้องรู้ว่าข้อมูลจริงถูกเก็บอยู่ในฐานข้อมูลแบบใด (เช่น SQL หรือ NoSQL) แต่เราสามารถมองว่า “ผู้ใช้” (user) คือวัตถุหนึ่งที่มีคุณสมบัติพื้นฐาน เช่น ชื่อผู้ใช้ รหัสผ่าน และสิทธิ์การใช้งาน การคิดเชิงนามธรรมในกรณีนี้ช่วยให้เราโฟกัสไปที่โครงสร้างและความสัมพันธ์ของข้อมูล มากกว่าการลงรายละเอียดในเชิงเทคนิค

ในแง่ของคณิตศาสตร์ เราก็ใช้การนามธรรมอยู่เสมอ เช่น เมื่อเราศึกษา “จำนวนจริง” เราไม่ได้สนใจว่าจะเขียนเลขนั้นในรูปทศนิยมหรือเศษส่วน แต่เรามองมันในฐานะ “วัตถุเชิงนามธรรม” ที่มีสมบัติพื้นฐาน เช่น การ

บวก การลบ การคูณ การหาร หรือเมื่อเราศึกษา “กราฟ (graph)” ในคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง เราไม่ได้สนใจว่าจุดยอดเหล่านั้นแทนคน เมือง หรือคอมพิวเตอร์ แต่เรามองเฉพาะ “ความสัมพันธ์” ระหว่างจุดยอดและเส้นเชื่อม เพื่อให้เราสามารถวิเคราะห์โครงสร้างเชิงนามธรรมได้โดยไม่ต้องผูกกับบริบทใดบริบทหนึ่ง

เพื่อให้เห็นภาพที่ชัดเจน ลองดูปัญหาต่อไปนี้: “เราต้องการออกแบบโปรแกรมคำนวณผลรวมของราคาสินค้าในตะกร้าออนไลน์” หากเราเก็บข้อมูลสินค้าในลิสต์ เช่น `[('ดินสอ', 10), ('ปากกา', 15), ('สมุด', 20)]` เราไม่จำเป็นต้องสนใจว่าราคามาจากแบรนด์ไหนหรือผลิตที่ไหน เราสนใจเพียงว่ามี “ชื่อ” และ “ราคา” เท่านั้น ดังนั้นเราสามารถเขียนโปรแกรมแบบนามธรรมได้ว่า

```
total = 0
for item in cart:
    total += item.price
```

ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้ได้กับสินค้าทุกประเภท — จะเป็นของกิน ของใช้ หรือบริการ ก็สามารถใส่โครงสร้างเดียวกันได้ทั้งหมด เพราะเรานามธรรม “สินค้า” ให้เหลือเพียงแค่ “สิ่งที่มีราคา”

การคิดเชิงนามธรรมจึงเป็นทักษะที่สำคัญอย่างยิ่งในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการออกแบบโปรแกรม เพราะมันทำให้เราเห็น “แบบจำลองของปัญหา” (model) ที่สามารถนำกลับมาใช้ซ้ำได้โดยไม่ต้องออกแบบใหม่ทุกครั้ง ทั้งยังเป็นรากฐานของแนวคิดการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (object-oriented programming) และการออกแบบระบบเชิงโมดูลาร์ (modular design) อีกด้วย

1.2.4 การออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm design)

เมื่อเรามีการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วนย่อย เข้าใจรูปแบบ และนามธรรมสิ่งต่าง ๆ ให้อยู่ในระดับโครงสร้างแล้ว ขั้นตอนสุดท้ายของการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณก็คือการ “ออกแบบขั้นตอนวิธี” หรือที่เราเรียกกันว่า *algorithm design* ซึ่งหมายถึงการกำหนดลำดับขั้นตอนอย่างชัดเจนในการแก้ปัญหาให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

ในทางคณิตศาสตร์ เราอาจคุ้นเคยกับการเขียนลำดับของการคิด เช่น “เริ่มจากสมมติว่า..., จากนั้น..., ดังนั้น...” ซึ่งก็ไม่ต่างอะไรกับอัลกอริทึมในคอมพิวเตอร์เลย เพียงแต่ในโลกของการเขียนโปรแกรม เราต้องทำให้ทุกขั้นตอนนั้นสามารถสั่งให้คอมพิวเตอร์ทำงานได้โดยไม่คลุมเครือ ตัวอย่างเช่น ถ้าโจทย์คือ “หาค่ามากที่สุดในลิสต์ของตัวเลข” เราอาจออกแบบขั้นตอนวิธีดังนี้

1. กำหนดให้ตัวแปร **max** เท่ากับค่าตัวแรกของลิสต์
2. วนลูปตรวจสอบค่าทุกตัวในลิสต์
3. ถ้าค่าปัจจุบันมากกว่า **max** ให้แทนที่ค่า **max** ด้วยค่านี้
4. เมื่อจบลูป ค่าของ **max** จะเป็นค่าที่มากที่สุด

และเราสามารถแปลงขั้นตอนนี้เป็นโค้ดภาษา Python ได้ตรงไปตรงมา

```
def find_max(numbers):
    max_val = numbers[0]
    for n in numbers:
        if n > max_val:
            max_val = n
    return max_val
```

อัลกอริทึมนี้แม้จะดูเรียบง่าย แต่สะท้อนให้เห็นการคิดเชิงตรรกะและการวางลำดับขั้นตอนอย่างเป็นระบบ ซึ่งเป็นพื้นฐานของทุกกระบวนการคำนวณ — ตั้งแต่การเรียงข้อมูล (sorting) ไปจนถึงการค้นหาเส้นทางสั้นที่สุดในกราฟ (shortest path in a graph)

ในทางคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง การออกแบบอัลกอริทึมมักเชื่อมโยงกับการใช้หลักตรรกศาสตร์เชิงนิรนัย เช่น การพิสูจน์ว่าขั้นตอนดังกล่าว “ถูกต้องทุกกรณี” หรือ “ให้คำตอบที่ดีที่สุด” ตัวอย่างเช่น อัลกอริทึม Dijkstra สำหรับหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟนั้นอาศัยแนวคิดของการเลือกโหนดที่มีระยะทางต่ำที่สุดที่ยังไม่ถูกเยี่ยมชม ซึ่งเป็นการใช้ตรรกะคณิตศาสตร์ควบคู่กับการออกแบบเชิงลำดับ

เพื่อเห็นภาพในชีวิตจริง สมมติว่าเราต้องการ “จัดลำดับการทำงานของเครื่องจักรในโรงงานให้ใช้เวลาน้อยที่สุด” เราอาจเริ่มจากการนามธรรม “งานแต่ละชิ้น” ให้เป็น “ข้อมูล” ที่มีค่าเวลา และ “เครื่องจักร” ให้เป็น “ตัวประมวลผล” จากนั้นจึงออกแบบขั้นตอนวิธี เช่น “เลือกงานที่ใช้เวลาน้อยที่สุดก่อน” (shortest job first) ซึ่งเป็นหนึ่งในอัลกอริทึมที่ใช้ในระบบปฏิบัติการจริง ๆ ของคอมพิวเตอร์

ดังนั้น การออกแบบขั้นตอนวิธีไม่ใช่เพียงการเขียนโค้ดตามลำดับ แต่คือการแปลงความคิดเชิงตรรกะให้กลายเป็น “ภาษาที่เครื่องเข้าใจได้” และยังต้องพิจารณาประสิทธิภาพของมันในแง่เวลาและทรัพยากร เช่น ถ้า

อัลกอริทึมหนึ่งทำงานในเวลา $O(n^2)$ แต่อีกอันทำงานในเวลา $O(n \log n)$ เราสามารถใช้คณิตศาสตร์ช่วยพิสูจน์ได้ว่าอันหลังมีประสิทธิภาพดีกว่าในกรณีข้อมูลขนาดใหญ่

กล่าวโดยสรุป การออกแบบขั้นตอนวิธีคือจุดเชื่อมระหว่าง “การคิดเชิงคณิตศาสตร์” กับ “การเขียนโปรแกรมเชิงคอมพิวเตอร์” — เป็นศิลปะแห่งการทำให้ความคิดกลายเป็นสิ่งที่คอมพิวเตอร์ทำได้จริง

บทสรุปและความเชื่อมโยงสู่ Discrete Mathematics

จากทั้งสี่ทักษะของการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ — *decomposition, pattern recognition, abstraction* และ *algorithm design* — เราจะเห็นภาพเดียวกันคือ การทำให้ปัญหาซับซ้อนกลายเป็นสิ่งที่คิดได้เป็นขั้นเป็นตอน ตรวจสอบได้ และพิสูจน์ได้ นี่เองคือเหตุผลว่าทำไมการเริ่มต้นวิชานี้ด้วย “ทักษะการแก้ปัญหา” จึงสำคัญ เพราะสิ่งที่เราจะเรียนต่อไปใน **Discrete Mathematics** คือภาษากลางและกรอบคิดทางคณิตศาสตร์ที่รองรับทักษะทั้งสี่ให้แข็งแกร่งและนำไปใช้ได้จริง

- **Decomposition** เชื่อมโดยตรงกับแนวคิด โมดูลาร์ และ การนิยามแบบเกิดซ้ำ (recursion): เมื่อเราแตกโจทย์เป็นส่วนย่อย เราจะอธิบายส่วนย่อยเหล่านั้นด้วยนิยามและคุณสมบัติที่ชัดเจน ซึ่งในวิชาคณิตศาสตร์จะรองรับด้วย ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์/เชิงภาคินิพจน์ สำหรับระบุเงื่อนไขอย่างเป็นทางการ และใช้ อุปนัยทางคณิตศาสตร์ พิสูจน์ความถูกต้องของการประกอบส่วนย่อยกลับเป็นคำตอบทั้งก้อน
- **Pattern Recognition** ทำให้เราเห็นโครงสร้างซ้ำ เช่น ลำดับ ความสัมพันธ์ซ้ำ และรูปแบบบนกราฟ สิ่งเหล่านี้สอดคล้องกับหัวข้อ ลำดับและความสัมพันธ์เกิดซ้ำ (recurrences), การนับแบบจัดวิธี (combinatorics), และ ทฤษฎีกราฟ ซึ่งให้ทั้งเครื่องมือคาดคะเนพฤติกรรม (เช่น สูตรปิด) และวิธีวิเคราะห์โครงสร้างที่ซ่อนอยู่ในปัญหา
- **Abstraction** คือหัวใจของคณิตศาสตร์: เราแทนโลกจริงด้วย เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน กราฟ ต้นไม้ และโครงสร้างเชิงพีชคณิตอย่างง่าย เพื่อตัดรายละเอียดที่ไม่จำเป็นและเก็บเฉพาะสมบัติสำคัญ การนามธรรมเช่นนี้ทำให้แบบจำลองหนึ่งนำไปใช้ซ้ำในหลายบริบท และเปิดทางให้เราใช้เครื่องมือพิสูจน์เชิงตรรกะได้ตรงไปตรงมา

- **Algorithm Design** ต้องการทั้ง *ความถูกต้อง* และ *ประสิทธิภาพ*: ดิสคัสให้เครื่องมือพิสูจน์ความถูกต้องด้วย *ตรรกะ, อินวาเรียนต์, อุปนัย* และช่วยวิเคราะห์ประสิทธิภาพด้วย *การเติบโตของฟังก์ชัน, บิ๊กโอ, การแก้สมการเวียนเกิด (recurrence)* ตลอดจนแบบจำลองข้อมูลเชิงโครงสร้าง (เช่น กราฟ/ทรี) ที่อัลกอริทึมทำงานอยู่บนนั้น

กล่าวโดยสรุป **Discrete Mathematics** ทำหน้าที่เป็น “ไวยากรณ์และกฎหมายของการคิดเชิงคำนวณ”:

1. ให้ *ภาษาอย่างเป็นทางการ* (ตรรกะ สัญลักษณ์ นิยาม) เพื่อระบุปัญหา เงื่อนไข และเป้าหมายให้ไม่คลุมเครือ
2. ให้ *แบบจำลองเชิงนามธรรม* (เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน กราฟ ต้นไม้) เพื่อยกระดับปัญหาให้อยู่ในโครงสร้างที่วิเคราะห์ได้
3. ให้ *วิธีพิสูจน์* (อินดักชัน อินวาเรียนต์ การโต้แย้งแบบหักล้าง ฯลฯ) เพื่อรับรองความถูกต้องของวิธีแก้
4. ให้ *เครื่องมือวิเคราะห์ประสิทธิภาพ* (การนับ บิ๊กโอ รีเคอร์เรนซ์ ความน่าจะเป็นพื้นฐาน) เพื่อประเมินความคุ้มค่าของอัลกอริทึม

ดังนั้น บทถัดไปของหนังสือนี้จะค่อย ๆ วางรากฐานองค์ประกอบเหล่านั้นอย่างเป็นลำดับ เริ่มจากภาษาตรรกะและวิธีพิสูจน์ ไปสู่เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การนับ ทฤษฎีกราฟ และการวิเคราะห์อัลกอริทึม เพื่อให้ นักศึกษาสามารถ *นิยามปัญหาให้ชัดเจน, สร้างแบบจำลองที่เหมาะสม, ออกแบบวิธีแก้, พิสูจน์ความถูกต้อง, และประเมินประสิทธิภาพ* ได้ครบถ้วน อันเป็นหัวใจของทั้งการเรียนคณิตศาสตร์เชิงไม่ต่อเนื่องและการพัฒนาซอฟต์แวร์เชิงวิทยาการคอมพิวเตอร์อย่างแท้จริง

1.3 แบบฝึกหัด: การวิเคราะห์ปัญหาเชิงการคำนวณ

วัตถุประสงค์ของใบงาน: ให้นักศึกษาได้ฝึกคิดและลงมือแก้ปัญหาจริง โดยใช้ทั้ง 4 ทักษะของการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ ได้แก่ (1) การแบ่งย่อยปัญหา (Decomposition) (2) การเข้าใจรูปแบบ (Pattern Recognition) (3) การคิดเชิงนามธรรม (Abstraction) และ (4) การออกแบบขั้นตอนวิธี (Algorithm Design)

แบบฝึกหัดที่ 1: ปัญหาการจัดตารางรถรับส่งนักเรียน

สถานการณ์: โรงเรียนแห่งหนึ่งมีบริการรถรับส่งนักเรียน โดยมีนักเรียนทั้งหมด 50 คนที่พักอยู่ในละแวกต่าง ๆ รอบโรงเรียน รถแต่ละคันสามารถรับนักเรียนได้ไม่เกิน 10 คนต่อรอบ และโรงเรียนต้องการให้รถแต่ละคันรับส่งนักเรียนที่อยู่ใกล้กันเพื่อลดระยะทางรวมของการเดินทางลงให้มากที่สุด โรงเรียนมีข้อมูลที่อยู่ของนักเรียนทุกคนในรูปแบบพิกัด (x, y) โดยโรงเรียนอยู่ที่จุด $(0, 0)$

จงวิเคราะห์และเขียนแนวทางการแก้ปัญหานี้ โดยอาศัยทั้ง 4 ทักษะต่อไปนี้:

1. การแบ่งย่อยปัญหา (Decomposition)

คำถามชี้แนะ:

- ปัญหานี้สามารถแยกออกเป็นปัญหาย่อยอะไรได้บ้าง?
- แต่ละส่วนต้องแก้ไขอะไร และผลของแต่ละส่วนจะนำมารวมกันอย่างไร?

2. การเข้าใจรูปแบบ (Pattern Recognition)

คำถามชี้แนะ: - จากข้อมูลนักเรียน 50 คน มีรูปแบบหรือความสัมพันธ์อะไรบ้างที่เราสามารถใช้ประโยชน์ได้? - มีเงื่อนไขที่ซ้ำ ๆ หรือโครงสร้างที่คล้ายกันในทุกกลุ่มหรือไม่?

3. การคิดเชิงนามธรรม (Abstraction)

คำถามชี้แนะ: - ถ้าจะนามธรรมปัญหานี้ให้อยู่ในรูปของคณิตศาสตร์หรือคอมพิวเตอร์ จะมองว่าอะไรคือ “วัตถุ (object)” และอะไรคือ “ความสัมพันธ์ (relation)” ? - ปัญหานี้คล้ายกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ใดที่เคยรู้จัก (เช่น กราฟ, การจัดกลุ่ม, เส้นทางสั้นที่สุด เป็นต้น)?

4. การออกแบบขั้นตอนวิธี (Algorithm Design)

คำถามชี้แนะ: - หากต้องให้คอมพิวเตอร์ช่วยแก้ปัญหานี้ ควรกำหนดขั้นตอนการทำงานอย่างไร (ลำดับของการคำนวณหรือการตัดสินใจ)? - จะใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์หรือโครงสร้างข้อมูลใดในการคำนวณ เช่น การจัดกลุ่ม (clustering) หรือการหาทางสั้นที่สุด (shortest path)?

แบบฝึกหัดที่ 2: ปัญหาการเรียงเหรียญ (Coin Arrangement Problem)

สถานการณ์: ให้เหรียญ 3 ชนิดคือ เหรียญ 1 บาท, 2 บาท, และ 5 บาท อย่างละไม่จำกัดจำนวน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเรียงเหรียญเหล่านี้ให้ได้ผลรวมของมูลค่าเท่ากับ 20 บาท โดยลำดับของเหรียญถือว่ามีความสำคัญ (เช่น (5,5,10) และ (10,5,5) ถือเป็นวิธีต่างกัน)

ให้นักศึกษาวิเคราะห์ปัญหานี้ โดยใช้แนวทางของ 4 ทักษะการแก้ปัญหาเชิงการคำนวณ:

1. การแบ่งย่อยปัญหา (Decomposition)

คำถามชี้แนะ: - สามารถแยกปัญหานี้เป็นกรณีย่อย ๆ ได้อย่างไร? - การแบ่งย่อยช่วยให้เราสามารถนิยามฟังก์ชันหรือสมการใดได้บ้าง?

2. การเข้าใจรูปแบบ (Pattern Recognition)

คำถามชี้แนะ: - เมื่อคำนวณจำนวนวิธีในกรณีเล็ก ๆ เช่น 5 บาท, 10 บาท, 15 บาท เห็นรูปแบบใดเกิดขึ้นบ้าง? - รูปแบบนั้นช่วยให้เราคาดเดาสู่ตรหรือความสัมพันธ์ทั่วไปได้อย่างไร?

3. การคิดเชิงนามธรรม (Abstraction)

คำถามชี้แนะ: - จะเขียนปัญหานี้ให้อยู่ในรูปของสมการเวียนเกิด (recurrence relation) ได้หรือไม่? - ถ้ามองในเชิง combinatorics หรือ discrete structure ปัญหานี้อยู่ในหมวดใด?

4. การออกแบบขั้นตอนวิธี (Algorithm Design)

คำถามชี้แนะ: - สามารถออกแบบอัลกอริทึมเพื่อคำนวณจำนวนวิธีได้อย่างไร? - จะเลือกใช้แนวทางใดระหว่าง recursive กับ dynamic programming เพราะเหตุใด?

คำถามสะท้อนท้ายใบงาน:

- เมื่อเพิ่มเหรียญชนิดใหม่มูลค่า 10 บาท จะต้องปรับสมการเวียนเกิดอย่างไร?

Chapter 2

Mathematics as a Language

บทนี้จะเป็บบทสั้น ๆ เน้นที่การเล่าให้เห็นภาพรวมของคณิตศาสตร์ในรูปแบบการเรียนรู้เพื่อหาเหตุผล เป้าหมายของบทนี้เพียงเพื่อต้องการเปลี่ยนทัศนคติของผู้่านบางท่านเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ก่อนที่เราจะลงลึกไปสู่คณิตศาสตร์จริง ๆ ในบทถัด ๆ ไป อย่างน้อยก็อยากให้หลังจากที่อ่านบทนี้จบ ผู้อ่านจะมองว่าคณิตศาสตร์คือวิชาของการอธิบายสิ่งต่าง ๆ ในโลก และการให้เหตุผลของความเป็นไปในสิ่งต่าง ๆ ไม่ใช่แค่การคิดเลข

หลายท่าน (รวมถึงเด็ก ๆ จากประสบการณ์การสอนพิเศษมาหลายปีของผู้เขียน) อาจจะจำความรู้สึกมาจากตอนเรียนระดับมัธยมต้นว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการคิดเลข จำสูตรไปแทนค่าหาคำตอบ ขอแค่จำสูตรได้โยะ ๆ อ่านโจทย์แล้วรู้ว่าใช้สูตรไหน คิดเลขให้ไว ๆ ก็น่าจะทำข้อสอบได้คะแนนดีกันแล้ว ผู้เขียนเคยเจอถึงขั้นว่ามีนักเรียนใช้วิธีดูว่าข้อนี้ต้องหยิบสูตรไหนมาคิดโดยการดูว่าเจอคีย์เวิร์ดอะไรในโจทย์ และบอกคนอื่นได้ว่าเราเรียนคณิตศาสตร์รู้เรื่อง แต่ทว่า พอขึ้นมาเรียนในระดับมัธยมปลาย กลับพบว่าคณิตศาสตร์เปลี่ยนไปอย่างมาก เราได้เรียนเรื่องเซต เรื่องตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์และฟังก์ชันในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กันเป็นครั้งแรก ๆ ที่ตัวเนื้อหาตามหนังสือเรียนนั้น แทบไม่ใช้การคิดเลขเลย แต่เป็นเรื่องของการเรียนรู้การใช้สัญลักษณ์ เรียนรู้การให้เหตุผล เพื่อใช้สื่อสารกันในโลกของคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจจะต้องโทษวิธีการสอนของครูมัธยมไทยหลาย ๆ ท่านที่ทำให้เนื้อหาพวกนี้หนีไม่พ้นสอนการคิดเลขเหมือนเดิม เช่น **จัดรูป**อย่างง่ายของประพจน์ **คำนวณ**หาผลคูณ **คำนวณ**หาผลอินเตอร์เซกชัน หรือแม้กระทั่ง**คำนวณ**หาผลค่าความจริงในวิชาตรรกศาสตร์

ในบทนี้จะขอยกบทเรียนที่เป็นตัวละครสำคัญที่ทำให้เรามองคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของภาษา แทนที่จะ

มองว่าเป็นเครื่องมือในการคิดเลขได้แก่ (1) เซต (2) ตรรกศาสตร์ (3) ความสัมพันธ์ และ (4) ฟังก์ชัน ซึ่งเปรียบได้กับเป็น 4 เสาหลักของคณิตศาสตร์เลยทีเดียว (จะมีกล่าวถึงในตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง)

2.1 เซต

อย่างเช่นเรื่องเซต เป้าหมายของบทนี้คือการต้องการใช้คณิตศาสตร์อธิบายความเป็นกลุ่ม ความเป็นสมาชิกของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง เช่นเราบอกว่านาย “a เป็นนักเรียน” เราก็จะมองในรูปแบบคณิตศาสตร์ว่าเรามีเซตของนักเรียน ในที่นี้สมมติให้เป็น S ที่ใครก็ตามที่อยู่ในเซต S จะถูกอธิบายความเป็นนักเรียน และนาย a ก็เป็นสมาชิกในเซตนักเรียน จึงเขียนเป็นสัญลักษณ์แทนประโยคดังกล่าวได้ว่า $a \in S$ ที่แทนการกล่าวว่า “a เป็นนักเรียน”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราล่าว่านักเรียนก็เป็นบุคลากรของโรงเรียน ก็เปรียบเสมือนเรามีเซตที่เป็นกลุ่มของบุคลากรของโรงเรียน สมมติให้เป็น X และมีเซตของนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยในนั้น หรือกล่าวว่า เซตของนักเรียนเป็นเซตย่อยของเซตบุคลากร โดยเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $S \subseteq X$

อีกทั้ง ถ้าเรานำนิยามทางคณิตศาสตร์ของการเป็นเซตย่อยมาจับกับประโยคทั้งสอง

นิยาม 2.1.1: เซตย่อย

ให้ A และ B เป็นเซต เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยของ B หรือเขียนว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก x ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

ซึ่งเรามีประโยค (1) $a \in S$ และ (2) $S \subseteq X$ จากนิยามของเซตย่อย 2.1.1 เราจะเห็นความสอดคล้องระหว่างสิ่งที่เรามีกับเครื่องมือที่เรารู้อยู่ดังนี้

- S เปรียบเสมือน A ในนิยาม และ X เปรียบเสมือน B ในนิยาม
- $a \in S$ สอดคล้องกับประโยค $x \in A$
- $S \subseteq X$ สอดคล้องกับประโยค $A \subseteq B$

จากนิยามดังกล่าวทำให้เราสรุปได้ว่า $x \in B$ (ในนิยาม) ซึ่งสอดคล้องกับประโยค $a \in X$ หรือกล่าวคือ a เป็นบุคลากรของโรงเรียนเช่นกัน

ในบางครั้งนั้น เราต้องการอธิบายเชื่อมโยงกันระหว่าง 2 กลุ่ม (หรือมากกว่า) เช่นเราต้องการอธิบายว่า นาย a เป็นนักเรียนที่ลงเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดีสคริตและวิชาโครงสร้างข้อมูล ซึ่งเป็นการกล่าวถึงกลุ่มของนักเรียน 2 กลุ่ม คือกลุ่มของนักเรียนที่ลงเรียนวิชาดีสคริต (สมมติให้เป็น C) และกลุ่มของนักเรียนที่ลงเรียนวิชาโครงสร้างข้อมูล (สมมติให้เป็น D) และชัดเจนว่า $C \subseteq S$ และ $D \subseteq S$ เพราะมีเพียงนักเรียนเท่านั้นที่ลงทะเบียนเรียนได้ กล่าวคือทุกคนที่จะลงทะเบียนเรียนวิชาดังกล่าวได้ต้องเป็นนักเรียน (ลองคิดทิศทางให้ดีว่าเป็น (1) ถ้าลงทะเบียนเรียนแล้วต้องเป็นนักเรียน หรือ (2) ถ้าเป็นนักเรียนแล้วต้องลงทะเบียนเรียน) แต่ทั้งนี้เราจะพูดอธิบายตลอดว่า “ $a \in C$ และ $a \in D$ ” เพื่อเป็นตัวแทนประโยคดังกล่าวก็คงไม่กระชับมากนัก และคงต้องเขียนเป็นประโยค 2 ประโยคมาเชื่อมกัน ไม่ใช่การเขียนประโยคของเซตเลย จึงได้นิยามการเชื่อมการอยู่ร่วมกันทั้ง 2 กลุ่มด้วยการอินเตอร์เซกชัน (intersection) กล่าวคือ $a \in C \cap D$ ซึ่งจะเห็นว่าจากประโยคที่ตัวหลักคือคำเชื่อม “และ” จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของเซตล้วนและตัวหลักของประโยคคือ “การเป็นสมาชิก” แทน

เราจะเห็นว่าคำศัพท์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเซตนั้น ก็เกิดมาเพื่อใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการเป็นสมาชิกในกลุ่มนั่นเอง ทว่าสิ่งที่อธิบายในเรื่องของวิธีการสรุปผลในข้างต้นนั้นก็ไม่ใช่วิธีการที่ของเรื่องเซต เพราะเซตเป็นเพียงการบอกว่ามีใครเป็นสมาชิกบ้าง แต่การสรุปผลต่างๆ เป็นบทบาทหน้าที่ของสิ่งที่เรียกว่า “ตรรกศาสตร์”

2.2 ตรรกศาสตร์

หรืออย่างในเรื่องตรรกศาสตร์เอง ก็เป็นการเรียนรู้โครงสร้างประโยคในภาษาคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการเชื่อมโยงระดับประโยค พร้อมทั้งมีการพิจารณาความเป็นจริงหรือไม่จริงหรือที่เรียกกันว่า ค่าความจริง¹ เป็นเบื้องหลังของการนิยามอยู่ เพราะตรรกศาสตร์ก็เกิดมาเพื่อต้องการใช้คณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจระบบความคิดของมนุษย์ในรูปแบบที่มาตรฐานขึ้น เลยถูกสร้างเลียนแบบการสื่อสารของมนุษย์ นำภาษามนุษย์มาทำให้เป็นรูปแบบเชิงสัญลักษณ์ พร้อมกับมีการนำไปใช้เพื่อวิเคราะห์ความเป็นเหตุเป็นผลเชิงค่าความจริง

ไม่เพียงแค่ว่าพิจารณาค่าความจริงของตัวประโยคเท่านั้น การศึกษาเชิงตรรกศาสตร์เองก็ยังรวมไปถึงการ

¹จริง ๆ แล้วยังมีการศึกษาตรรกศาสตร์ในรูปแบบที่เราไม่สนใจเรื่องค่าความจริงด้วย แต่จะสนใจในเรื่องของความถูกต้องของรูปแบบโครงสร้างการเขียน และสรุปผลด้วยโครงสร้างของประโยค ซึ่งเรียกว่าตรรกศาสตร์เชิงวากยสัมพันธ์

สร้างประโยคเพื่ออธิบายความเป็นตัวตนของสิ่งของในคณิตศาสตร์เช่นกัน เช่น ประโยค “ x เป็นนักเรียน” (สมมติแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(x)$) จะถูกใช้เพื่อการอธิบายการเป็นนักเรียนของสิ่งของที่เราสนใจอยู่² ซึ่งแน่นอนว่าเราไม่สามารถที่จะบอกค่าความจริงของตัวประโยคนี้ด้วยตัวมันเองได้ เพราะเราไม่รู้ว่เราหมายถึง x คนไหน (หรืออาจจะไม่ใช่คนตั้งแต่แรกเสียด้วยซ้ำ) เราจะเรียกประโยคประเภทนี้ว่าประโยคเปิด

แต่ก่อนจะลงลึกในเรื่องของประโยคเปิด (ซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัดไป) จะขอกล่าวถึงแค่เฉพาะข้อความที่ระบุค่าความจริงได้ก่อน (ที่เรียกว่าประพจน์) ซึ่งในตรรกศาสตร์ เราจะนำประพจน์เหล่านี้มาเป็นตัวแทนของข้อความที่พูดกัน และนำมาเชื่อมประโยคเข้าด้วยกันด้วยตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ (1) และ (2) หรือ (3) ถ้า...แล้ว... (4) ก็ต่อเมื่อ และ (5) ไม่... ซึ่งแน่นอนว่าการดูค่าความจริงของตัวเชื่อมเหล่านี้ก็เป็นการนิยามมาจากวิธีคิดของมนุษย์ที่ตกลงกันได้และใช้กันเป็นสามัญสำนึก ดังนี้

- “และ” จะมีบริบทการใช้งานที่เป็นการระบุการเกิดทั้งสองอย่างพร้อมกัน
- “หรือ” จะมีบริบทการใช้งานที่เป็นการระบุการเกิดอย่างน้อย 1 อย่าง (ซึ่งอาจจะต่างกับการใช้ “หรือ” ในภาษาไทยที่มีการใช้ในแง่คำถามให้เลือกเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง)
- “ถ้า...แล้ว...” จะให้ความรู้สึกของการกำหนดเงื่อนไขหรือกฎกติกาไว้ว่าเมื่อไหร่ก็ตามที่เกิดสิ่งหนึ่งขึ้น แล้วอีกสิ่งจะถูกบังคับว่าต้องเกิด มิฉะนั้นจะถือว่าเป็นการแหกกฎ
- “ก็ต่อเมื่อ” จะแทนความเป็นสิ่งเดียวกัน ใช้แทนกันได้

ซึ่งบริบทของคำเชื่อมเหล่านี้ไม่ใช่สิ่งที่แปรเปลี่ยนไปตามความเข้าใจของบุคคล แต่เป็นข้อตกลงในการตีความที่มีความรัดกุมอยู่แล้ว

และสิ่งที่เกิดตามมาจากแนวคิดของการดูค่าความจริงของคำเชื่อมทางตรรกศาสตร์ก็คือ “วิธีการให้เหตุผล” ที่เปรียบเสมือนเป็นการโน้มน้าวผู้ฟังให้เชื่อในสิ่งที่เรากำลังโต้แย้ง แต่เป็นการโต้แย้งแบบมีหลักการและตรรกะทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่นการที่เราจะบอกเพื่อนว่าเรามีของ 2 สิ่งคือ A และ B กล่าวคือ เรากำลังจะอ้างประโยค “มี A และ มี B” ก็เป็นเรื่องที่ค่อนข้างชัดเจนที่เราจะพิสูจน์ให้คนฟังเชื่อว่าประโยคนี้เป็นจริงด้วยการทำให้เขาเห็นว่าเรามี A อยู่ และทำให้เขาเห็นว่าเราก็มีย B อยู่เช่นกัน

²ในเรื่องเซตจะเรียกเซตที่ระบุขอบเขตของสิ่งของที่เราสนใจว่า “เอกภพสัมพัทธ์”

หรืออีกตัวอย่างคือประโยค “ถ้า...แล้ว...”³ เช่นประโยค “ถ้าเขามาฉันจะไป” จะมีความหมายทางตรรกะว่าการที่เขามาจะเป็นการบังคับว่าฉันจะต้องไป ห้ามเกิดเหตุการณ์ว่าเขามาแล้วแต่ฉันยังฝืนอยู่ต่อ กล่าวคือจะเกิดข้อพิพาทหรือข้อขัดแย้งได้เฉพาะกรณีที่เขามาแล้วเท่านั้น ในกรณีที่เขายังไม่มาจะถือเป็นสถานการณ์ที่ยังคงปกติอยู่ ฉันจะไปหรือไม่ไปก็ได้ไม่มีข้อบังคับอะไรเกิดขึ้น ดังนั้นในการจะยืนยันว่าประโยคดังกล่าวจะเป็นจริงหรือไม่นั้น เราจะต้องทำการสมมติเหตุการณ์ว่าเขามาแล้วก่อน แล้วค่อยมาดูกันว่าฉันจะไปหรือไม่ไป ถ้าฉันไปก็ถือว่าจบการพิสูจน์

จะเห็นว่าตรรกศาสตร์นั้นก็คือเครื่องมือที่ควบคุมขั้นตอนและวิธีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เมื่อเราทราบโครงสร้างการเป็นจริงเป็นเท็จของประโยค ก็จะทำให้เราทราบวิธีการที่จะให้เหตุผลหรือโต้แย้งได้แบบมีหลักการนั่นเอง

2.3 ความสัมพันธ์

2.4 ฟังก์ชัน

2.5 โครงสร้างของตรรกศาสตร์อันดับหนึ่ง: บริบทและการตีความ

³จากประสบการณ์ ผู้เขียนพบว่าเด็ก ๆ เข้าใจตรรกะของสิ่งนี้ผิดกันเยอะมาก

Chapter 3

Logic, Reasoning and Proof

หลังจากที่ผู้เขียนได้เกริ่นนำบทบาทหน้าที่ของตรรกศาสตร์ในแง่ของเครื่องมือในการสร้างประโยคและการให้เหตุผลไปในบทที่ 2 แบบคร่าว ๆ ไปแล้ว คราวนี้ ถึงเวลาที่ผู้อ่านจะได้ลงสู่รายละเอียดของตรรกศาสตร์กันบ้าง ตามข้อบท ผู้อ่านจะพบว่ามีความ 3 อยู่ในข้อบท ได้แก่ (1) Logic (ตรรกศาสตร์) (2) Reasoning (การให้เหตุผล) (3) Proof (การเขียนพิสูจน์) ซึ่งจะเป็น 3 ส่วนหลักที่จะอธิบายในบทนี้ ซึ่ง 3 สิ่งนี้เป็นสิ่งที่แยกขาดออกจากกันไม่ได้ เพราะเมื่อเราอยากจะเขียนพิสูจน์อะไรสักอย่าง (เหมือนเขียนรายงานเพื่อโน้มน้าวผู้อ่าน) เราก็ต้องผ่านขั้นตอนการหาเหตุผลเพื่อสรุปผลในสิ่งที่อยากพิสูจน์ ซึ่งเหตุผลที่ใช้ก็ต้องเป็นเหตุผลที่ถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์ และใช้ตรรกศาสตร์เป็นความรู้พื้นฐานประกอบการให้เหตุผลให้สมเหตุสมผลในเชิงคณิตศาสตร์นั่นเอง

จากที่กล่าวไป จะเห็นว่าตรรกศาสตร์เปรียบเสมือนเป็นชุดความรู้ (knowledge) เพื่อนำมาฝึกทักษะ (skill) การให้เหตุผล และเมื่อให้เหตุผลแล้ว เราต้องมีระเบียบวิธีขั้นตอน (methodology) ที่จะสามารถสื่อสารกระบวนการดังกล่าวให้ผู้อื่นเข้าใจด้วยการเขียนพิสูจน์นั่นเอง

ทั้งนี้ สำหรับผู้อ่านท่านใดที่เคยผ่านวิชาที่เกี่ยวกับการเขียนพิสูจน์มาแล้ว อาจจะข้ามบทนี้ไปได้ เพราะบทนี้เป็นการปูพื้นฐานการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์สำหรับผู้ที่ยังไม่เคยเรียนคณิตศาสตร์แนวนี้มาก่อน แต่สำหรับผู้อ่านที่ยังไม่มีประสบการณ์ในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ขอให้อยู่กับบทนี้มากพอก่อนที่จะเริ่มบทถัดไป เพราะเป้าหมายหลักของหนังสือนี้คือฝึกทักษะการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์และพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์ ไม่ใช่หนังสือเตรียมสอบวิชาคณิตศาสตร์ และไม่ใช่หนังสือที่รวมเอาเนื้อหาของแต่ละบทมานำเสนอให้ท่องจำ

(เช่นอ่านบทตรรกศาสตร์ของหนังสือเล่มนี้เข้าใจก็ไม่ได้หมายความว่าจะทำข้อสอบบทตรรกศาสตร์ของวิชา ม.4 ได้¹) แต่เป็นหนังสือที่จะพาผู้อ่านคิดไปด้วยกันทีละขั้นตอน ว่ากำลังจะเกิดอะไรขึ้น แล้วเกิดอะไรขึ้นมา แล้วจะไปต่ออย่างไร และควรไปทางไหนต่อดี

3.1 ตรรกศาสตร์คืออะไร

ตรรกศาสตร์ ถ้าแปลตามตัวคำจะแปลว่า ศาสตร์แห่งการศึกษาตรรกะ กล่าวคือ การศึกษาเกี่ยวกับข้อความ ค่าความจริง และการให้เหตุผล

3.2 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์

หัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ไม่ใช่การหาคำตอบที่ถูกต้อง แต่คือการอธิบายอย่างมีเหตุผลว่า “ทำไม” คำตอบนั้นจึงถูกต้อง การพิสูจน์ (proof) จึงเป็นกระบวนการที่ทำให้คณิตศาสตร์แตกต่างจากศาสตร์อื่น ๆ เพราะไม่ใช่เพียงการสังเกตจากตัวอย่างหรือการคำนวณเชิงประสบการณ์ แต่คือการสร้างหลักฐานเชิงตรรกะที่ยืนยันความจริงได้ในทุกกรณี การเรียนรู้วิธีการพิสูจน์จึงเปรียบได้กับการฝึกให้คิดอย่างเป็นระบบ สื่อสารอย่างมีเหตุผล และตรวจสอบความถูกต้องของแนวคิดของตนเองได้อย่างอิสระ

ในทางปฏิบัติ “การพิสูจน์” ไม่ได้หมายถึงการเขียนข้อความยาว ๆ ด้วยถ้อยคำซับซ้อน แต่หมายถึงการรู้จักวิเคราะห์โครงสร้างของประโยคทางคณิตศาสตร์ ว่ามีตัวบ่งปริมาณ (quantifier) ประเภทใด มีรูปแบบเงื่อนไขอย่างไร และควรใช้วิธีการใดในการเชื่อมโยงสมมติฐานไปยังข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง การพิสูจน์บางประเภทใช้ตรรกะตรงไปตรงมา (direct proof) ขณะที่บางประเภทอาศัยการแปลงรูปแบบของข้อความ (contrapositive proof) หรือแม้กระทั่งการสมมติสิ่งตรงข้ามขึ้นมาเพื่อนำไปสู่ความขัดแย้ง (proof by contradiction)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา “วิธีการพิสูจน์” ที่เป็นรากฐานของคณิตศาสตร์เชิงตรรกะ ซึ่งปรากฏอยู่ในแทบทุกแขนงของคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ โดยเนื้อหาจะค่อย ๆ พาผู้อ่านเข้าใจจากระดับของประโยคพื้นฐานไปสู่ระดับที่ซับซ้อนขึ้น เริ่มจากการวิเคราะห์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณสากล (for all) และข้อความเชิงเงื่อนไข (if-then) ไปจนถึงข้อความที่มีการมีอยู่ (there exists) และปิดท้ายด้วยเทคนิคการพิสูจน์ด้วยข้อ

¹ผู้เขียนยังทำข้อสอบเรื่องตรรกศาสตร์ในข้อสอบสอบเข้ามหาวิทยาลัยไม่ค่อยได้เช่นกันครับ

ขัดแย้ง (contradiction) รวมถึงส่วนเสริมเกี่ยวกับองค์ประกอบย่อยของประโยคเชิงตรรกะ เช่น “และ” (and) และ “หรือ” (or) ซึ่งมักปรากฏอยู่ในการพิสูจน์แทบทุกแบบ

จุดมุ่งหมายของบทนี้ไม่ใช่ให้อ่านจํารูปแบบการพิสูจน์ได้ แต่เพื่อให้สามารถ “เลือกใช้วิธีที่เหมาะสม” ในการอธิบายความจริงทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง เมื่อเข้าใจหลักการพิสูจน์แล้ว ผู้อ่านจะสามารถนำแนวคิดนี้ไปใช้ตรวจสอบความถูกต้องของนิพจน์ สมบัติของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ หรือแม้แต่ความถูกต้องของอัลกอริทึมที่ตนเขียนได้ในรายวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ในลำดับถัดไป

Key Takeaway:

- “การพิสูจน์” คือการเชื่อมสมมติฐานไปยังข้อสรุปผ่านตรรกะที่ถูกต้อง
- ฝึกวิเคราะห์สมมติฐานและข้อสรุปจากนิยาม
- บางครั้งต้องพิสูจน์กรณีทั่วไป บางครั้งต้องหาหลักฐานพยานยืนยัน

3.2.1 องค์ประกอบพื้นฐานของข้อความตรรกะ

ก่อนอื่น ควรทำความเข้าใจโครงสร้างย่อยของประโยคเชิงตรรกะที่มักปรากฏในการพิสูจน์ เช่น ข้อความที่เชื่อมด้วยคำว่า “และ” (and) หรือ “หรือ” (or) ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อวิธีการวิเคราะห์และการแยกกรณีในการให้เหตุผล การเข้าใจการใช้คำเชื่อมเหล่านี้ยังถูกต้องช่วยให้สามารถเขียนและอ่านพิสูจน์ได้แม่นยำขึ้น โดยเฉพาะเมื่อข้อความหนึ่งมีเงื่อนไขหลายส่วนที่ต้องพิสูจน์พร้อมกัน หรือมีหลายกรณีที่ต้องตรวจสอบแยกต่างหาก

ในแต่ละหัวข้อย่อย จะขอกล่าวถึง 2 รูปแบบที่จำเป็นคือ (1) การนำไปใช้งาน และ (2) การแสดงให้เห็นจริง

ข้อความ “และ”

อย่างที่ทราบกันอยู่แล้วว่าตารางค่าความจริงของข้อความ “และ” คือ

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

กล่าวคือ กรณีเดียวที่จะเป็นจริง คือกรณีที่ทั้งสองประพจน์ย่อยต้องเป็นจริง ดังนั้นการนำไปใช้งานเมื่อจะอ้างถึง (หรือสมมติมาแล้วว่าเป็นจริง) คือการนำแต่ละส่วนไปใช้งานแยกกันได้อิสระโดยไม่จำเป็นต้องอ้างถึงทั้งคู่ในเวลาเดียวกัน

ในขณะที่การจะแสดงให้เห็นจริงของประโยค “และ” คือการพิสูจน์ประพจน์ย่อยทั้งสองให้เห็นจริงทีละตัว

ข้อความ “หรือ”

การปฏิเสธ

3.2.2 การพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ *for all*

ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณแบบ “for all” หรือ \forall มักเป็นข้อความที่กล่าวถึงความจริงสากล เช่น “สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะเป็นจริงว่า ...” การพิสูจน์ข้อความลักษณะนี้มักเป็นการเลือกวัตถุทั่วไปหนึ่งตัว (arbitrary element) แล้วแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริงในกรณีทั่วไป ซึ่งถือเป็นรากฐานของการพิสูจน์แบบตรง (direct proof) นักศึกษาจึงต้องเข้าใจทั้งนิยามของคำสำคัญที่ปรากฏในข้อความ และวิธีเชื่อมโยงสมมติฐานไปยังข้อสรุปโดยไม่อาศัยการคาดเดาจากตัวอย่างเฉพาะ

3.2.3 การพิสูจน์ข้อความเงื่อนไขผลสรุป

ข้อความเชิงเงื่อนไข (conditional statement) มีรูปทั่วไปว่า “ถ้า P แล้ว Q ” ซึ่งในทางตรรกะหมายถึงว่าเมื่อสมมติว่าข้อความ P เป็นจริง ข้อความ Q จะต้องเป็นจริงด้วย การพิสูจน์ข้อความลักษณะนี้จึงเป็นการแสดงให้เห็นว่าความจริงของ P เพียงพอที่จะนำไปสู่ความจริงของ Q ได้ วิธีการที่ใช้มีหลายแบบ เช่น การพิสูจน์ตรง (direct proof), การพิสูจน์โดยรูปกลับ (contrapositive proof) หรือการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

(contradiction proof) ซึ่งแต่ละวิธีจะมีแนวคิดและโครงสร้างการให้เหตุผลต่างกันไป

Direct Proof

การพิสูจน์แบบตรง (Direct Proof) เป็นวิธีพื้นฐานที่สุดของการพิสูจน์ข้อความเชิงเงื่อนไข โดยเริ่มจากสมมติว่าข้อความ P เป็นจริง แล้วใช้ข้อเท็จจริง นิยาม หรือทฤษฎีที่ทราบอยู่เดิม เพื่ออนุมานไปที่ละขั้นจนได้ข้อสรุป Q วิธีนี้เป็นรูปแบบของการให้เหตุผลเชิงตรรกะที่ตรงไปตรงมา และช่วยฝึกการอธิบายอย่างมีลำดับชัดเจน เช่น การพิสูจน์ว่า “ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่” ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้เพียงนิยามของจำนวนคู่และการคำนวณทางพีชคณิตอย่างง่าย

Contrapositive Proof

การพิสูจน์โดยรูปกลับ (Contrapositive Proof) อาศัยสมบัติที่ว่า ข้อความ “ถ้า P แล้ว Q ” สมมูลกับ “ถ้าไม่ใช่ Q แล้วไม่ใช่ P ” (If $P \Rightarrow Q$, then $\neg Q \Rightarrow \neg P$) วิธีนี้มักใช้เมื่อการพิสูจน์ตรงทำได้ยาก แต่การพิสูจน์รูปกลับง่ายกว่า เพราะสามารถใช้การปฏิเสธของข้อสรุปมาช่วยวิเคราะห์เงื่อนไขที่จำเป็นได้ วิธีนี้พบได้บ่อยในทฤษฎีจำนวนและโครงสร้างข้อมูล เช่น การพิสูจน์ว่าถ้า n^2 หารด้วย 3 ลงตัวแล้ว n ต้องหารด้วย 3 ลงตัวด้วย

Proof by Contradiction

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction) เป็นเทคนิคที่ทรงพลังและใช้ได้กับข้อความทุกชนิด หลักการคือสมมติว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วใช้เหตุผลเชิงตรรกะต่อเนื่องจนได้ผลลัพธ์ที่ขัดแย้งกับข้อเท็จจริงที่ทราบอยู่ หรือแม้แต่ขัดแย้งกับสมมติฐานของตนเอง เมื่อเกิดความขัดแย้งขึ้น แสดงว่าสมมติฐานเดิมต้องผิด ดังนั้นข้อความที่ต้องการพิสูจน์จึงเป็นจริง วิธีนี้มักใช้เมื่อการพิสูจน์โดยตรงซับซ้อนเกินไป ตัวอย่างที่คลาสสิกคือการพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

3.2.4 การพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ *there exist*

ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณแบบ “there exists” หรือ \exists เป็นข้อความที่ยืนยันการมีอยู่ของวัตถุใดวัตถุหนึ่งซึ่งทำให้เงื่อนไขเป็นจริง การพิสูจน์ข้อความประเภทนี้จึงมีสองแนวทางหลัก ได้แก่ (1) การพิสูจน์แบบสร้างสรรค์ (constructive proof) ซึ่งแสดงวัตถุที่ต้องการโดยตรง และ (2) การพิสูจน์แบบไม่สร้างสรรค์ (non-constructive proof) ซึ่งพิสูจน์ว่าการไม่มีวัตถุดังกล่าวจะนำไปสู่ความขัดแย้ง แม้ไม่สามารถระบุวัตถุนั้นได้อย่างชัดเจนก็ตาม การแยกแยะระหว่างสองแนวทางนี้ช่วยให้เข้าใจมิติของ “การมีอยู่” ในคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น

3.2.5 การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (ทั่วไป)

แม้ว่าการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction) จะถูกใช้เป็นเทคนิคย่อยในหลายบริบท แต่ก็สามารถมองว่าเป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของข้ออ้างใด ๆ ได้เช่นกัน หลักคิดสำคัญคือ “สิ่งที่ขัดแย้งกับความจริงย่อมเป็นเท็จ” ดังนั้น หากเราสมมติว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วการให้เหตุผลของเรานำไปสู่ความขัดแย้ง เช่น ได้ผลลัพธ์ที่ขัดกับนิยาม หรือขัดกับหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ก็จะสามารถสรุปได้ว่าข้อความนั้นต้องเป็นจริง วิธีนี้มีพลังมากในกรณีที่ข้อความเกี่ยวข้องกับการมีอยู่ (existence) หรือความเป็นไปไม่ได้ (impossibility)

3.3 ข้อควรคำนึงในการเขียนพิสูจน์

การเริ่มต้นโดยไม่ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ให้ชัดเจน

ในบทพิสูจน์ที่ดี ผู้อ่านควรรู้ทันทีว่าผู้เขียนต้องการพิสูจน์อะไร เช่น ต้องการแสดงว่า “ทุกจำนวนคู่มีรูป $2k$ ” หรือ “ไม่มีจำนวนเฉพาะคู่ใดนอกจาก 2”

Example 3.3.1. ผิด: “สมมติว่า n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $n = 2k$.” (ไม่มีการระบุว่าต้องการพิสูจน์อะไร)

ถูก: “เราต้องการพิสูจน์ว่า ผลคูณของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่ เริ่มจากให้ $n = 2a$ และ $m = 2b$ จากนั้น $nm = 4ab = 2(2ab)$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่.”

การใช้ตัวแปรโดยไม่ระบุขอบเขต

หลายครั้งนักศึกษาจะเขียนตัวแปรขึ้นมาโดยไม่บอกว่ามันเป็นจำนวนเต็ม จำนวนจริง หรือจำนวนบวก ซึ่งทำให้ความหมายของพิสูจน์ไม่ชัดเจน

Example 3.3.2. ผิด: “ให้ n^2 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่.”

ถูก: “ให้ $n \in \mathbb{Z}$ และสมมติว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ เราต้องการพิสูจน์ว่า n เป็นจำนวนคู่.”

การใช้ตัวอย่างแทนการพิสูจน์

การยกตัวอย่างเพียงบางกรณีไม่ถือว่าการพิสูจน์ เพราะคณิตศาสตร์ต้องการความจริงที่ใช้ได้กับทุกกรณี

Example 3.3.3. ผิด: “เพราะ $2 + 4 = 6$ และ $4 + 6 = 10$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่ ดังนั้นผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่.”

ถูก: “ให้ $a = 2m$ และ $b = 2n$ จากนั้น $a + b = 2(m + n)$ ซึ่งหารด้วย 2 ลงตัว ดังนั้นผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่เสมอ.”

การเริ่มจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ (ย้อนเหตุผล)

การพิสูจน์ต้องเริ่มจากสมมติฐาน ไม่ใช่จากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เพราะจะกลายเป็นการสมมติว่าคำตอบถูกอยู่แล้ว

Example 3.3.4. ผิด: “สมมติว่า n^2 เป็นคู่ ดังนั้น n ต้องเป็นคู่ เพราะเราอยากให้เป็นอย่างนั้น.”

ถูก: “สมมติว่า n เป็นคี่ เขียนได้เป็น $n = 2k + 1$ จากนั้น $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ซึ่งเป็นคี่ ดังนั้นหาก n^2 เป็นคู่ n ต้องไม่เป็นคี่.”

การละขั้นตอนสำคัญโดยไม่อธิบาย

การพิสูจน์ที่ดีต้องให้เหตุผลต่อเนื่อง ไม่กระโดดจากสมมติฐานไปสู่ข้อสรุปทันที

Example 3.3.5. ผิด: “เพราะ $a|b$ ดังนั้น $a|bc$.”

ถูก: “เพราะ $a|b$ จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $b = ak$ ดังนั้น $bc = a(kc)$ ซึ่งแสดงว่า $a|bc$.”

การสลับทิศทางของสมมูล

นักศึกษามักสับสนระหว่างการพิสูจน์แบบ “ถ้า-แล้ว” (\Rightarrow) กับแบบ “ถ้าและเฉพาะถ้า” (\Leftrightarrow)

Example 3.3.6. ผิด: “เพราะ n เป็นคู่ ดังนั้น n^2 เป็นคู่ ดังนั้นกลับกัน n^2 เป็นคู่ $\Rightarrow n$ เป็นคู่.”

ถูก: “เราได้พิสูจน์แล้วว่า n เป็นคู่ $\Rightarrow n^2$ เป็นคู่ ส่วนกลับพิสูจน์ได้โดย contrapositive ว่า ถ้า n^2 เป็นคู่ $\Rightarrow n$ เป็นคู่.”

การใช้สัญลักษณ์โดยไม่สอดคล้องกับภาษา

ข้อความคณิตศาสตร์ที่ดีควรเชื่อมโยงระหว่างภาษากับสัญลักษณ์อย่างเหมาะสม หากใช้แต่สัญลักษณ์หรือแต่ภาษาอย่างเดียวจะอ่านยากและเสี่ยงต่อความคลาดเคลื่อน

Example 3.3.7. ผิด: “เพราะเท่ากับเลยหารได้ลงตัว.” (ไม่ระบุว่าสิ่งใดเท่ากับสิ่งใด)

ถูก: “จาก $n = 2k$ จะได้ว่า n หารด้วย 2 ลงตัว เนื่องจากสามารถเขียนเป็นผลคูณของ 2 กับจำนวนเต็ม k .”

การปฏิเสธข้อความผิดรูป

เมื่อปฏิเสธข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ มักผิดเพราะลืมสลับชนิดของตัวบ่งปริมาณ

Example 3.3.8. ผิด: ปฏิเสธ “ทุกคนรักคณิตศาสตร์” ด้วย “ไม่มีใครรักคณิตศาสตร์.”

ถูก: ปฏิเสธคือ “มีบางคนที่ไม่รักคณิตศาสตร์.” ซึ่งสอดคล้องกับสมการตรรกะ $\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$

การไม่แยกกรณีเมื่อต้อง

บางข้อความต้องแยกกรณีเพื่อให้ครบถ้วน โดยเฉพาะเมื่อค่าตัวแปรมีหลายลักษณะ

Example 3.3.9. ผิด: “ผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนเป็นบวกเสมอ.”

ถูก: “ถ้าทั้งคู่เป็นบวก ผลคูณเป็นบวก และถ้าทั้งคู่เป็นลบ ผลคูณก็เป็นบวก แต่ถ้าเครื่องหมายต่างกัน ผลคูณจะเป็นลบ.”

การไม่ตรวจสอบเงื่อนไขที่ซ่อนอยู่ในนิยาม

นิยามบางอย่างมีข้อจำกัดที่มักถูกมองข้าม เช่น ห้ามหารด้วยศูนย์ หรือฟังก์ชันต้องมีโดเมนที่ชัดเจน

Example 3.3.10. ผิด: “เพราะ $\frac{a}{b} = c$ ดังนั้น $a = bc$.” (ไม่ระบุว่า $b \neq 0$)

ถูก: “สมมติว่า $b \neq 0$ และ $\frac{a}{b} = c$ จะได้ว่า $a = bc$.”

การเรียนรู้วิธีการพิสูจน์ไม่ได้เป็นเพียงการจดจำรูปแบบของการให้เหตุผล แต่คือการฝึกฝนวิธีคิดที่เป็นระบบ มีเหตุผล และสามารถอธิบายความจริงได้อย่างมั่นใจ ในตอนต้นของบทนี้ เราได้เริ่มจากโครงสร้างพื้นฐานของประโยคตรรกะ เช่น การเชื่อมด้วย “และ” หรือ “หรือ” จากนั้นจึงขยายไปสู่ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ “สำหรับทุกค่า” และ “มีอยู่ค่าใดค่าหนึ่ง” ก่อนจะเรียนรู้วิธีการพิสูจน์รูปแบบต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นการพิสูจน์ตรง การพิสูจน์โดยรูปกลับ หรือการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง ซึ่งล้วนสะท้อนแนวทางของการให้เหตุผลที่มีตรรกะเป็นแกนกลาง

อย่างไรก็ตาม สิ่งที่สำคัญไม่แพ้เทคนิคคือ “การสื่อสารทางคณิตศาสตร์” — การเขียนให้ผู้อ่านเข้าใจว่าคุณกำลังคิดอะไร อยู่บนสมมติฐานใด และสรุปผลอย่างไร หลายครั้งที่พิสูจน์ผิดไม่ได้เพราะตรรกะผิด แต่เพราะไม่ระบุขอบเขตของตัวแปร ไม่แยกกรณี หรือเขียนโดยไม่ระบุว่ากำลังพิสูจน์อะไร ดังนั้น การเขียนพิสูจน์ที่ดีจึงต้องทั้งถูกต้องในเชิงตรรกะและชัดเจนในเชิงภาษา

ท้ายที่สุด การฝึกเขียนพิสูจน์คือการฝึกตั้งคำถามกับสิ่งที่เราคิดว่าจริง — “เรารู้ได้อย่างไรว่ามันจริง?” เมื่อผู้เรียนเริ่มตั้งคำถามเช่นนี้ นั่นคือจุดเริ่มต้นของการคิดเชิงคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง ซึ่งจะกลายเป็นรากฐานของการทำงานด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ การออกแบบอัลกอริทึม และการให้เหตุผลในชีวิตจริงต่อไป

Chapter 4

Recursion and Mathematical Induction

Part II

Discrete Mathematics with Programming

Chapter 5

Set Theory and Its Family

ในบทที่ 2 เราได้เกริ่นถึงบทบาทของสิ่งต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ที่สคริปต์เพื่อที่จะใช้ในการอธิบายสรรพสิ่งต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมเพื่อนำไปสู่การให้เหตุผล เช่นเราใช้เซตในการอธิบายสถานภาพหรือการเป็นสมาชิกของสิ่งต่าง ๆ และเราอธิบายหลักการคิดเชิงความจริงหรือเท็จ รวมถึงวิธีการแปลภาษาด้วยตรรกศาสตร์ เราสามารถพูดถึงการใช้สมาชิกต่าง ๆ มาคำนวณหรือสร้างเป็นสมาชิกตัวอื่นโดยใช้ฟังก์ชัน และสามารถพูดถึงการเชื่อมโยงกันด้วยสิ่งที่เรียกว่าความสัมพันธ์

ทั้งนี้ ในบทดังกล่าวจะยังไม่ได้พูดถึงรายละเอียดเชิงเทคนิค(ทางคณิตศาสตร์)ของสิ่งต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นนิยาม หรือการพิสูจน์คุณสมบัติต่าง ๆ ซึ่งเราจะมากล่าวถึงกันในบทนี้ โดยเราจะเริ่มจากเซต ซึ่งแท้ที่จริงแล้วสิ่งต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ก็ถูกสร้างขึ้นมาจากเซตทั้งสิ้น จึงมีศาสตร์เฉพาะทางที่ศึกษาเฉพาะการใช้เซตเพื่ออธิบายคณิตศาสตร์ เรียกว่า **ทฤษฎีเซต (set theory)** รวมไปถึงนิยามความสัมพันธ์และฟังก์ชันตามมา

จริง ๆ แล้ว เนื้อหาในบทนี้อาจไม่ใช่ส่วนที่ผู้เรียนจะเห็นประโยชน์เชิงประยุกต์ได้โดยตรงเหมือนบทอื่น ๆ ที่จะได้เรียนต่อไป เช่น ทฤษฎีจำนวน ทฤษฎีกราฟ หรือการเวียนเกิด ซึ่งสามารถเชื่อมโยงกับปัญหาในวิทยาการคอมพิวเตอร์ได้อย่างชัดเจน อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจในเซตและโครงสร้างของมันเป็นสิ่งที่เปรียบเสมือนรากฐานของคณิตศาสตร์ทั้งหมด เพราะแนวคิดเรื่อง “การเป็นสมาชิก” และ “การสร้างวัตถุใหม่จากวัตถุที่มีอยู่เดิม” ปรากฏอยู่ในทุกแขนงของคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์

ดังนั้น บทนี้จึงควรถูกมองว่าเป็นการฝึกสร้างกรอบความคิดเชิงโครงสร้าง (structural thinking) มากกว่าการเรียนรู้เพื่อนำไปคำนวณโดยตรง อีกทั้งยังเป็นบทที่เหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับการฝึกฝนทักษะการให้เหตุผล

และการเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ดีสคริต และจะกลายเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับบทต่อ ๆ ไปของรายวิชานี้

5.1 เซต

ในเบื้องต้น เราจะมองว่าเซตคือสิ่งที่เราเอาไว้ใช้อธิบายกลุ่มของสิ่งของเพื่อที่จะบอกว่าใครอยู่หรือไม่อยู่ในกลุ่มดังกล่าว โดยจะกล่าวว่าการอยู่ในกลุ่มคือการเป็นสมาชิกของเซต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \in A$ แทนการบอกว่า a เป็นสมาชิกของเซต A และเราสามารถบรรยายเซตของสิ่งที่สนใจได้ในลักษณะ

$$\{x \in \mathcal{U} \mid \text{คุณลักษณะเกี่ยวกับ } x\}$$

เพื่อระบุว่าเราสนใจสมาชิก x จากเซตที่ตั้งต้นไว้ \mathcal{U} (ซึ่งเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์) และสอดคล้องเงื่อนไขเกี่ยวกับคุณสมบัติที่ระบุไว้ โดยที่เราอาจจะไม่ระบุเอกภพสัมพัทธ์ก็ได้ในกรณีที่ทราบข้อตกลงกันไว้เรียบร้อยแล้วในบริบทที่กำลังกล่าวถึงแล้ว และเซตสองเซตเท่ากัน $A = B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกเหมือนกันทุกตัว กล่าวคือ

$$A = B \iff \underline{\hspace{10cm}}$$

อย่างไรก็ตาม ในทางทฤษฎีเซต (set theory) เราไม่ได้เริ่มต้นด้วย “นิยามของคำว่าเซต” อย่างที่ทำกับคำอื่น ๆ ในคณิตศาสตร์ เหตุผลก็เพราะว่า หากเราพยายามนิยามว่า “เซตคือสิ่งที่มีคุณสมบัติแบบใดแบบหนึ่ง” เราจะตกอยู่ในข้อขัดแย้งในตัวเองได้ เช่น ข้อขัดแย้งของรัสเซลล์ (Russell’s paradox) ดังนั้น แทนที่จะนิยามว่าอะไรคือเซต เราจึงเริ่มต้นด้วยการยอมรับสัจพจน์ (axioms) ชุดหนึ่งที่บอกเพียงว่า “อะไรบ้างถือเป็นเซตเบื้องต้น” และ “เราสามารถสร้างเซตใหม่จากเซตที่มีอยู่ได้อย่างไร” เช่น สัจพจน์ของเซอร์เมโล-แฟรงเคิล (Zermelo–Fraenkel Axioms, ZF) ที่เป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ในปัจจุบัน เราจึงพูดได้เพียงว่าเซตคือสิ่งที่ทำงานอยู่ภายใต้กฎเหล่านี้ ไม่ใช่สิ่งที่เรานิยามขึ้นโดยตรง แต่เป็นสิ่งที่เรายอมรับให้ “มีอยู่” ตามสัจพจน์ที่ใช้สร้างจักรวาลทางคณิตศาสตร์ของเรา

ในเมื่อได้กล่าวถึง Russell’s paradox มาแล้ว ก็อยากขอพามาช่วยกันขบคิดซักหน่อยว่าจะเกิดอะไรขึ้นถ้าเรายอมรับว่าอะไรก็ตามที่เป็นกลุ่มของสิ่งของถือว่าเป็นเซตเสมอ

คุณสมบัติ 5.1.1: Russell's paradox

ระบบเซตที่ให้นิยามของเซตว่า “เซตคือกลุ่มของสิ่งของใด ๆ” (ซึ่งระบบดังกล่าวเรียกว่าระบบ naive set theory) เกิดข้อขัดแย้ง

ก่อนจะไปบทพิสูจน์ของคุณสมบัติดังกล่าวจะพามาคิดผ่านคำถามดังต่อไปนี้

1. ลองพิจารณาประโยค “ร้านที่โกนหนวดให้เฉพาะคนที่ไม่โกนหนวดตัวเอง” ใครจะโกนหนวดให้ช่างโกนหนวด?
2. ถ้าสมมติให้มองว่าเอกภพสัมพันธ์ที่เรากำลังสนใจคือเซตของคนทั้งหมดในหมู่บ้าน และสมมติว่ากำลังพิจารณาช่างโกนหนวดคนหนึ่ง จงเขียนอธิบายเซตของคนที่ช่างโกนหนวดโกนหนวดให้ (ซึ่งเป็นเซตภายใต้ระบบ naive set theory) ในลักษณะภาษาคณิตศาสตร์
3. เซตที่ได้จากข้อที่ผ่านมานี้เป็นสมาชิกของตัวเองหรือไม่?
4. จะได้ในท้ายที่สุดว่าเซตดังกล่าวทำให้เกิดความขัดแย้ง เรายังสามารถนิยาม “เซตของทุกสิ่งที่มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน” ได้หรือไม่? ถ้าไม่ เราควรมีหลักเกณฑ์แบบใดมาควบคุมการสร้างเซตแทน?

บทพิสูจน์.[Proof of Russell's Paradox]

Hint: พิจารณาเซตที่นิยามได้จากคำถามชวนคิดข้อ 2

□

หลังจากเราพบว่าการนิยามเซตอย่างอิสระอาจนำไปสู่ความขัดแย้ง เช่น ในกรณีของข้อขัดแย้งของรัสเซลล์ คำถามสำคัญจึงเกิดขึ้นว่า “แล้วเราจะนิยามเซตอย่างปลอดภัยได้อย่างไร?” นักคณิตศาสตร์จึงหันกลับมาทบทวนวิธีคิดพื้นฐานของตนเองใหม่ทั้งหมด แทนที่จะเริ่มจากแนวคิดที่ว่า “เซตคือสิ่งที่มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน” ซึ่งเปิดช่องให้เกิดความย้อนแย้ง พวกเขาเลือกที่จะเริ่มจาก “สิ่งที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์” หรือที่เรียกว่า *สัจพจน์* (axioms)

แนวทางนี้นำไปสู่การสร้างระบบที่เรียกว่า *ทฤษฎีเซตของเซอร์เมโล-แฟรงเคิล* (Zermelo–Fraenkel Set Theory) ซึ่งเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ในปัจจุบัน แทนที่จะบอกว่าอะไรคือเซต ระบบนี้กำหนดกฎเกณฑ์ว่าหากเรามีเซตอยู่บางเซตแล้ว เราสามารถสร้างเซตใหม่ได้อย่างไรบ้าง เช่น สัจพจน์ของการเป็นสมาชิกของเซตว่าง สัจพจน์ของเซตเพาเวอร์ (power set) หรือสัจพจน์ของการรวม (union) เป็นต้น ภายใต้ระบบนี้ เราจะไม่สามารถนิยาม “เซตของทุกเซต” ได้อีกต่อไป เพราะนั่นจะละเมิดขอบเขตของสัจพจน์และนำไปสู่ความขัดแย้งแบบเดิม

แนวคิดนี้อาจดูเป็นเพียงการจำกัดเสรีภาพของการนิยาม แต่แท้จริงแล้วคือจุดเริ่มต้นของ “ความมั่นคงเชิงตรรกะ” ของคณิตศาสตร์ยุคใหม่ เพราะมันทำให้เรามั่นใจได้ว่าทุกสิ่งที่เราพิสูจน์ต่อจากนี้ ล้วนตั้งอยู่บนระบบที่ไม่ขัดแย้งในตัวเองและนี่คือเหตุผลว่าทำไมในการศึกษาวิชาเซต เราจึงไม่เริ่มต้นด้วยนิยามของคำว่าเซต แต่เริ่มต้นจากสัจพจน์ที่กำหนดขอบเขตของสิ่งที่เราจะเรียกว่าเซตแทน

5.1.1 เซตว่าง

แต่ก่อนอื่น จะขอเริ่มจากเซตที่เป็นเซตตั้งต้นและมั่นใจว่าเป็นเซตแน่นอนซึ่งคือ เซตว่าง (empty set) ที่มีสัจพจน์ของเซตว่างกล่าวว่าไม่มีเซตหนึ่งเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย โดยให้สัญลักษณ์ของเซตว่างคือ \emptyset กล่าวคือ ประโยค $x \in \emptyset$ จะเป็นเท็จเสมอไม่ว่าจะกล่าวถึงสมาชิก x ใด ๆ ก็ตาม (จะสังเกตว่าเราไม่ได้นิยามว่าเซตว่างคืออะไร แต่เป็นเซตที่ถูกอธิบายปากเปล่าว่าคืออะไร และมีตัวตนโดยอาศัยสัจพจน์ไม่ใช่การนิยามทางคณิตศาสตร์ขึ้นมา)

คุณสมบัติ 5.1.2: ความเป็นเอกลักษณ์ของเซตว่าง

ถ้า E เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย (คือ ไม่มี x ใดที่ $x \in E$) แล้วจะได้ว่า $E = \emptyset$

5.1.2 เซตย่อยและเซตกำลัง

นิยาม 5.1.3: เซตย่อย

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยของ B ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ A จะต้องเป็นสมาชิกของ B ด้วย กล่าวคือ

$$A \subseteq B \iff \underline{\hspace{10em}}$$

Example 5.1.4. กำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงยกตัวอย่างเซตที่เป็นเซตย่อยของ A และเซตที่ไม่ใช่เซตย่อยของ A มาอย่างละ 1 เซต พร้อมทั้งพิสูจน์ให้เห็นจากนิยาม

Exercise 5.1.5. ให้ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ and $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 49\}$ จงพิสูจน์ว่า $B \subseteq A$ และพิสูจน์ว่า $A \not\subseteq B$

Exercise 5.1.6. สมบัติถ่ายทอดของเซตย่อย กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

Exercise 5.1.7. เซตว่างเป็นเซตย่อยของทุก ๆ เซต กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\emptyset \subseteq A$

นิยาม 5.1.8: เซตกำลัง

กำหนดให้ A เป็นเซต เราจะนิยามเซตกำลัง (power set) ของ A ว่าเป็นเซตของเซตย่อยทั้งหมดของเซต A

$$\mathcal{P}(A) := \{ \text{_____} \}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า

$$\mathcal{P}(A) := \{ \text{_____} \}$$

Exercise 5.1.9. ถ้าให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จงพิสูจน์ว่า $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(A)$ และพิสูจน์ว่า $\{0, 3\} \notin \mathcal{P}(A)$

Exercise 5.1.10. จำนวนเซตย่อยทั้งหมด สำหรับเซต A ใด ๆ จงพิสูจน์ว่าจำนวนเซตย่อยทั้งหมด

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

คำไป้: ลองตั้งข้อสังเกตการสร้างแบบเวียนเกิด เพื่อพิสูจน์อุปนัย

5.1.3 การดำเนินการของเซต

นิยาม 5.1.11: เซตกำลัง

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต การดำเนินการของเซตต่าง ๆ นิยามเป็นภาษาพูดดังนี้

- Complement: A' คือเซตของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่ไม่อยู่ใน A
- Union: $A \cup B$ คือเซตที่มีสมาชิกจาก A หรือ B หรือทั้งคู่
- Intersection: $A \cap B$ คือเซตที่ของสมาชิกร่วมกันระหว่างเซต A และเซต B

ซึ่งสามารถเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$A' = \{ \text{_____} \}$$

$$A \cup B = \{ \text{_____} \}$$

$$A \cap B = \{ \text{_____} \}$$

Example 5.1.12. ตัวอย่างคำนวณ กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ และ $D = \{7, 8, 9\}$ โดยที่เอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$ จงหา

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $B \cap C$
4. $A \cap D$
5. $(B \cup C)'$
6. $(D \cap C') \cup (A \cap B)'$
7. $\emptyset \cup C$
8. $\emptyset \cap C$

Exercise 5.1.13. Prove that if $A \subseteq B$, then $A \cup B = B$ and $A \cap B = A$.

Exercise 5.1.14. Prove that $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Exercise 5.1.15. Prove that $\emptyset \cup C = C$ and $\emptyset \cap C = \emptyset$.

Exercise 5.1.16. Prove that $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5.2 ความสัมพันธ์

5.2.1 คู่อันดับ ผลคูณคาร์ทีเซียน และความสัมพันธ์

5.2.2 ความสัมพันธ์ประเภทต่าง ๆ

5.2.3 ความสัมพันธ์สมมูล และชั้นสมมูล

5.3 ฟังก์ชัน

5.3.1 ฟังก์ชัน โดเมน และเรนจ์

5.3.2 ประเภทของฟังก์ชัน

5.3.3 ฟังก์ชันประกอบ

5.4 ทฤษฎีเซตเชิงการนับ

5.4.1 การสมมูลกันเชิงการนับของเซต และคาร์ดินอลของเซต

5.4.2 Cantor's Theorem

Chapter 6

Number Theory

ทฤษฎีจำนวนเป็นหัวข้อที่จะได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวนเต็มที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัวและตัวประกอบ โดยจะเริ่มศึกษาจากการหารลงตัวก่อน แล้วจึงนำไปนิยามจำนวนประกอบและจำนวนเฉพาะ และนำไปสู่ทฤษฎีสำคัญที่เรียกว่า Fundamental Theorem of Arithmetic ซึ่งพูดถึงการแยกตัวประกอบของจำนวนประกอบด้วยจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นทฤษฎีสำคัญที่ทำให้เราสามารถศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนประกอบได้ เช่นจำนวนของตัวประกอบ และการตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะ

และหลังจากที่ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจำนวน เราจะพูดถึงความสัมพันธ์ของสองจำนวน โดยเริ่มที่การนิยามการหารของจำนวนเต็ม แล้วนำไปสู่เรื่องตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อยเพื่อศึกษาการมีตัวประกอบร่วมกันของจำนวนตั้งแต่สองจำนวนเป็นต้นไป และจบด้วยเรื่องการสมภาคที่เกี่ยวข้องกับระบบของเศษเหลือรวมไปถึงการนำไปประยุกต์ใช้ในวิทยาการการเข้ารหัส (cryptography)

โดยทั่วไปแล้ว หัวข้อนี้มักจะถูกใช้เป็นหัวข้อเพื่อฝึกเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรายวิชาที่เรียนเกี่ยวกับพื้นฐานการเขียนพิสูจน์หรือการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์¹ เพราะเป็นหัวข้อที่ทำความเข้าใจนิยามหรือคุณสมบัติได้ง่าย อีกทั้งเป็นสิ่งที่ผู้เรียนคุ้นเคยกันมาตั้งแต่สมัยเด็ก (อย่างน้อยทุกคนที่เปิดอ่านหนังสือเล่มนี้น่าจะเคยเรียนวิธีการตั้งหารยาวเพื่อหาผลหารและเศษมาก่อน) เลยทำให้ผู้เรียนสามารถมุ่งความสนใจไปที่วิธี

¹เช่นเด็กหลักสูตรคณิตศาสตร์จะมีเรียนวิชา Principle of Mathematics หรือเด็กหลักสูตรวิทยาการคอมพิวเตอร์ก็จะมีวิชา Discrete Mathematics เป็นรายวิชาดังกล่าว

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้มากกว่า แทนที่จะต้องมาทั้งทำความเข้าใจยามที่บางครั้งก็ซับซ้อน และต้องฝึกให้เหตุผลไปพร้อมกัน จึงเป็นการดีที่ผู้อ่านที่ยังไม่คุ้นเคยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะใช้บทนี้เป็นแบบฝึกหัดในการเขียนพิสูจน์

6.1 การหารลงตัว

เราจะเริ่มจากแนวคิดพื้นฐานที่สุดของทฤษฎีจำนวนซึ่งคือ **การหารลงตัว** ซึ่งถ้าย้อนกลับไปในวัยเด็ก เราจะเริ่มจากการเรียนรู้การหารจำนวนเต็มโดยจดจำวิธีการตั้งหารทั้งวิธีหารสั้นและหารยาวเพื่อให้เราหาผลหารและเศษการหารกันได้เป็น โดยที่เราไม่ได้สนใจว่าจริง ๆ แล้วการหารคืออะไรกันแน่ เพียงแต่มองในมุมมองเชิงการคำนวณว่าคือการแบ่งของ

ทั้งนี้ ถ้าจะต้องการศึกษาเกี่ยวกับการหารลงตัวในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ก็คงไม่สะดวกนักถ้าจะบอกว่าเราหารลงตัวถ้าตั้งหารยาวหรือหารสั้นออกมาแล้วได้เศษเป็น 0 เราจึงจำเป็นที่จะต้องนิยามการหารลงตัวในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้พิสูจน์คุณสมบัติต่าง ๆ ต่อได้ง่าย โดยเราจะเห็นว่าเพียงแค่มองมุกกลับกัน จากการถามว่ามีส้ม 10 ผล แบ่งให้คน 5 คนจะได้คนละกี่ผล (มองแบบการหาร) เป็นการมองว่า ถ้าเรามีคน 5 คน และแต่ละคนได้รับส้มไป x ผล แล้วต้องใช้ส้ม 10 ผล ซึ่งเราเปลี่ยนรูปแบบประโยคได้เป็น $5x = 10$ ซึ่งถ้ามีจำนวนส้ม x ผลดังกล่าวที่ทำให้เราสามารถแบ่งส้มกันได้อย่างพอดี เราก็มักจะกล่าวว่า 10 หารด้วย 5 ลงตัวนั่นเอง ทั้งนี้ จะพบว่าหลักสำคัญของการพิจารณาการหารลงตัวก็คือการหา x ดังกล่าวนั่นเอง

ในทำนองเดียวกัน เพียงแต่พิจารณาในกรณีทั่วไป เราจะนิยามการหารลงตัวได้ดังนี้

นิยาม 6.1.1: Divisibility

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า m หารด้วย n ลงตัวก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = nk$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n|m$

จากตัวอย่างด้านบน เราจะกล่าวได้ว่า $5|10$ เพราะเราสามารถให้ส้มคนละ 2 ผลได้ เพื่อแบ่งส้ม 10 ผลให้ 5 คนได้พอดี นั่นคือ $k = 2$ นั่นเองที่ทำให้ $10 = 5 \times 2$

คำเตือน

ในครั้งนี้จะยังคงขอเตือนเรื่องตัวบ่งปริมาณการมีอีกสักรอบ ว่าการที่เราทราบว่า $n|m$ นั้น เราเพียงแค่ว่าเรามี k สักตัวหนึ่งที่ทำให้สมการ $m = nk$ เป็นจริง เพียงแต่ในการเขียนพิสูจน์ที่หลาย ๆ อย่างเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า เราจะสามารถระบุค่าของตัวแปร k ที่เกิดขึ้นมาจากการอ้างเหตุผลของการหารลงตัวได้ เราทราบเพียงแค่ว่า $m = nk$ (หรือทดไว้ในหัวเท่านั้นว่าจริง ๆ มันก็คือ $\frac{m}{n}$ แต่เขียนไม่ได้ในทฤษฎีจำนวน) แล้วนำค่า k นี้ไปใช้งานต่อในส่วนอื่น ๆ ของบทพิสูจน์

ในทางกลับกัน แต่ถ้าจะต้องการให้เหตุผลเพื่อสรุปการหารลงตัว สิ่งที่เราต้องทำคือการหาจำนวนเต็มสักตัวหนึ่ง (อาจจะเป็นตัวเลขหรือกลุ่มของตัวแปรก็ได้) ที่เมื่อนำมาแทนที่ไว้ในตำแหน่งของ k เพื่อคูณกับ n แล้วได้ผลคูณออกมาเป็น m

Example 6.1.2. จงพิสูจน์ว่า $25|300$

Solution. จากนิยาม จะเห็นว่าสิ่งที่เราต้องการคือจำนวนเต็มสักจำนวนหนึ่งที่เมื่อนำไปคูณกับ 25 แล้วได้ 300 ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยการทดเลขแบบเด็ก ๆ $300/25 = 12$ นั่นคือเราทราบแล้วว่าจำนวนดังกล่าวคือ 25 จะเหลือเพียงแค่นำไปเขียนพิสูจน์

บทพิสูจน์. เพราะ $300 = 25 \times 12$ จึงได้ว่า $25|300$ \square

Example 6.1.3. จงพิสูจน์ว่า $25 \nmid 310$

Solution. ในทำนองเดียวกัน เราต้องหาจำนวนเต็มสักจำนวนหนึ่งที่เมื่อนำไปคูณกับ 25 แล้วได้ 310 ซึ่งถ้าลองทดเลขคำนวณดูจะพบว่า $310/25 = 12.4$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนนับ ดังนั้นเราก็พอจะเดาได้(ถึงแม้จะชัด)ว่าควรที่จะหารไม่ลงตัว ทว่าเหตุผลการหารแล้วไม่เป็นจำนวนเต็มนี้ใช้ในการเขียนพิสูจน์ไม่ได้ เพราะการเขียนพิสูจน์ว่าหารไม่ลงตัว ต้องแสดงว่าไม่ว่าหยิบจำนวนเต็มใดมาคูณกับตัวหารจะไม่ได้ตัวตั้ง

บทพิสูจน์. สมมติให้มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $310 = 25n$ (เรากำลังจะพิสูจน์ด้วยการหาข้อขัดแย้ง)

ซึ่งเราจะเห็นว่า $310 = 25 \times 12 + 10$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$25n = 25 \times 12 + 10$$

$$25n - 25 \times 12 = 10$$

$$25(n - 12) = 10$$

จากข้อสังเกตว่าถ้า x เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq 25x < 25$ จะได้ว่า $x = 0$

และเพราะ $0 \leq 10 = 25(n - 12) < 25$ จึงได้ว่า $n - 12 = 0$

ดังนั้น จะได้ว่า $10 = 25(n - 12) = 25 \times 0 = 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

จึงได้ข้อสรุปว่า ไม่มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $310 = 25n$ \square

หลังจากที่เรานิยามการหารลงตัวให้สามารถนำไปใช้ในการให้เหตุผลและเขียนพิสูจน์ได้แล้วนั้น(แทนที่จะบอกวิธีการหาผลหารและเศษแบบตั้งหารแล้วดูว่าเศษเป็นศูนย์หรือไม่) เราจะมาเริ่มศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของการหารลงตัวกันบ้าง ซึ่งการหารลงตัวเป็นความสัมพันธ์บนจำนวนเต็ม ดังนั้นเราจะเริ่มจากพิจารณากันก่อนว่า คุณสมบัติใดของความสัมพันธ์ที่ความสัมพันธ์การหารลงตัวสอดคล้องบ้าง

Exercise 6.1.4. จงเขียนประโยคที่กล่าวถึงคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ของการหารลงตัวตารางนี้ และพิจารณาว่าจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ (ดูเฉลยได้ใน Proof Part) แต่ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

คุณสมบัติ	นิยาม	เขียนโดยใช้การหารลงตัว	จริง	ไม่จริง
สะท้อน	$\forall x, xRx$			
ถ่ายทอด	$\forall x \forall y \forall z, xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$			
สมมาตร	$\forall x \forall y, xRy \rightarrow yRx$			
อสมมาตร	$\forall x \forall y, xRy \rightarrow \neg yRx$			
ปฏิสมมาตร	$\forall x \forall y, xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$			

Solution. ...

นอกจากนั้น เรายังได้คุณสมบัติต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

คุณสมบัติ 6.1.5: คุณสมบัติการหารลงตัว

กำหนดให้ m, n, p เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่า

1. $1|m$ และ $m|m$
2. ถ้า $m \neq 0$ แล้ว $m|0$
3. ถ้า $m|n$ แล้ว $m|np$
4. ถ้า $p \neq 0$ และ $m|n$ แล้ว $pm|pn$
5. ถ้า $m|n$ และ $m|p$ แล้ว $m|(n + p)$
6. ถ้า $m|n$ และ $m|p$ แล้ว $m|(xn + yp)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม x, y
7. ถ้า $m|n$ แล้ว $|m| \leq |n|$

แนวคิดของทฤษฎีและแนวคิดการเขียนพิสูจน์: ²

1. ในข้อนี้ค่อนข้างตรงไปตรงมาเหมือนที่เคยท่องกันตอนเด็ก ๆ ว่า 1 หารทุกจำนวนลงตัว เพราะ 1 คูณอะไรก็ได้ตัวมันเอง กล่าวแบบรัดกุมคือ $1 \cdot n = n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n
2. และในทำนองเดียวกัน เมื่อเราใช้ 0 เป็นตัวตั้ง เราน่าจะตอบกันได้ทันทีว่า 0 คูณอะไรก็ได้ 0
3. ในข้อนี้นั้น แนวคิดตั้งต้นมาจากการที่เปรียบเทียบเรามีเศษส่วนที่ตัดกันได้หมดอยู่แล้ว ($\frac{n}{m}$ ตัดกันได้หมด) ต่อให้เราคูณตัวตั้งเพิ่มเข้าไปด้วยอะไร (p) ก็ตาม เราก็ควรที่จะยังคงตัดได้ $\frac{np}{m}$ ลงตัวเช่นเดิมด้วยการตัดคู่เดิม ซึ่งถ้าเรามองในแง่การเขียนพิสูจน์ เปรียบเสมือนเรามีจำนวนหนึ่งที่คูณตัวหารได้ตัวตั้งอยู่แล้ว ถ้าสนใจกับตัวตั้งที่เพิ่มขึ้น p เท่า ผลหารก็ควรที่จะเพิ่มขึ้น p เท่าเช่นกัน ซึ่งเรากล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่าการหารลงตัวถูกรักษาไว้ภายใต้การคูณตัวตั้ง (divisibility is preserved under numerator multiplication)
4. เหมือนการคูณทั้งเศษและส่วนของเศษส่วนที่ยังคงให้ค่าผลหารเท่าเดิมอยู่ $\frac{n}{m} = \frac{pn}{pm}$

²ไม่ใช้การเขียนพิสูจน์ เป็นแค่แนวคิด

5. เปรียบเสมือน $\frac{n+p}{m} = \frac{n}{m} + \frac{p}{m}$ โดยความหมายของคุณสมบัตินี้คือการหารลงตัวยังคงถูกรักษาไว้ภายใต้การบวกของตัวตั้ง
6. เราเรียกพจน์ $xn + yp$ ว่าผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ซึ่งเป็นผลขยายมาจากข้อ 3 และข้อ 5

สิ่งที่อธิบายในแต่ละข้อ เป็นเพียงแนวคิดเชิงที่มา (การตั้งข้อสังเกต) และแนวคิดเชิงการให้เหตุผล (แนวทางการเขียนพิสูจน์) ไม่ใช่การเขียนพิสูจน์ โดยประเด็นสำคัญที่สุดคือในการเขียนพิสูจน์เราไม่สามารถใช้เศษส่วนในแง่การคำนวณได้ (เช่น $\frac{n}{m} = \frac{pn}{pm}$ เป็นต้น)

6.2 ขั้นตอนวิธีการหาร: Division Algorithm

หัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการหารลงตัว หรือการเป็นตัวประกอบของจำนวนเต็มไป แต่ก็พบว่าในบางครั้งเราอยากจะอธิบายการหารได้กับทุกคู่ของจำนวนเต็ม กล่าวคือ เราอยากขยายโอเดียการหารให้ทั่วไปมากขึ้น ไม่ได้สนใจเพียงแค่การหารลงตัวหรือไม่ลงตัวที่เป็นคุณสมบัติที่ขึ้นกับจำนวนเต็มที่เป็นตัวตั้งเท่านั้น

และถ้านึกย้อนไปในวัยเด็ก (อีกครั้ง) หลายคนน่าจะจำกันได้ดีว่าพวกเราเริ่มเรียนการหารกันด้วยการตอบผลหารและเศษเหลือจากการหาร แต่สิ่งที่พวกเราได้เรียนกันในวัยเด็ก เป็นเพียงแค่วิธีการเขียนเพื่อให้เราในวัยเด็กที่ยังไม่มีแนวคิดแบบนามธรรมสามารถทำตามได้ กล่าวคือเราถูกคาดหวังเพียงแค่หาคำตอบที่ถูกต้องให้ได้ก่อน แต่ไม่ได้เรียนว่าทำไมทำแบบนั้นถึงทำได้ หรืออะไรคือที่มาของแนวคิด

นอกจากนั้น จะสังเกตว่าวิธีการที่พวกเราได้เรียนโดนจำกัดอยู่แค่จำนวนเต็มบวก กล่าวคือ ถ้าตัวตั้งหรือตัวหารเป็นจำนวนเต็มลบ เราจะยังคำนวณหาผลหารและเศษกันไม่เป็นอยู่ดี (ตัวอย่างเช่นจงหาผลหารของ -21 หารด้วย 5) ในครั้งนี้ เราจึงจะนำแนวคิดเรื่องผลหารและเศษเหลือที่คำนวณกันได้เก่งมากกับจำนวนบวก มาเขียนนิยามกันในรูปแบบคณิตศาสตร์ เพื่อให้เราสามารถศึกษาประเด็นที่เกี่ยวกับผลหารและเศษเหลือได้ทั่วไป และเป็นคณิตศาสตร์มากขึ้น

แต่โชคดี! ที่อย่างน้อย พวกเราก็ได้เรียนสิ่งที่เรียกว่าการตรวจสอบผลหารด้วยวิธีการ

$$\text{ตัวตั้ง} = \text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร} + \text{เศษ}$$

ซึ่งจริง ๆ แล้ว สิ่งนี้ก็คือนิยามของการหารที่ทำให้พวกเราสามารถนิยามการหารของจำนวนเต็มได้ทั่วไปมากขึ้นด้วยการหาผลหาร และเศษเหลือมาเติมในสมการ แต่ทั้งนี้ ก่อนนิยามสิ่งใด ๆ ก็ตามในคณิตศาสตร์ (เช่น ในที่นี้เรากำลังจะนิยามสิ่งที่เรียกว่า ผลหาร และเศษเหลือ) สิ่งหนึ่งที่เราต้องพิจารณากันก่อนก็คือการมีค่าได้จริง (ไม่ใช่พูดได้บ้างไม่ได้บ้าง) กับการมีเพียงหนึ่งเดียว (เพราะกำลังจะตั้งชื่อ: well-defined)

บทตั้ง 6.2.1: การมีผลหารและเศษเหลือ

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $n \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $m = nq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |n|$

นิยาม 6.2.2: Division Algorithm

กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $n \neq 0$ แล้ว q และ r จากบทตั้ง 6.2.1 ว่าผลหาร (quotient) และเศษเหลือ (remainder) ตามลำดับ

บทพิสูจน์ของ Exercise 6.1.4

บทพิสูจน์. content... \square

บทพิสูจน์ของคุณสมบัติ 6.1.5

บทพิสูจน์. content... \square

บทพิสูจน์ของบทตั้ง 6.2.1

บทพิสูจน์. เราจะพิสูจน์การมี q และ r ด้วยการทำอุปนัยบนตัวแปรจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ $n > 0$ (ทำไม?:แบบฝึกหัด 1) และหลังจากที่พิสูจน์การมีแล้ว เราจะพิสูจน์การมีหนึ่งเดียวในลำดับต่อไป

พิสูจน์การมี เมื่อกำหนดให้ $m = 0$ (ขั้นฐานของ m) ซึ่งกรณีนี้เป็นกรณีที่ง่ายสำหรับทุก ๆ n เพราะ $0 = n \times 0 + 0$ นั่นคือเราสามารถพิสูจน์ขั้นฐานของ m ได้แล้ว ต่อไปเราจะพิสูจน์ขั้นอุปนัยของ m กัน

พิจารณากรณีที่ $m > 0$ สมมติให้สิ่งที่เราพิจารณากันอยู่ เป็นจริงสำหรับ m กล่าวคือสำหรับทุก ๆ $n > 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r โดยที่ $0 \leq r < n$ ที่ทำให้ $m = nq + r$ และเรากำลังจะพิสูจน์สำหรับกรณี $m + 1$ โดยที่เราจะแยกพิจารณาตามเศษการหารเป็น 2 กรณี³ ดังนี้ (1) ถ้า $0 \leq r \leq n - 2$ และ (2) ถ้า $r = n - 1$

กรณีที่ 1) $0 \leq r \leq n - 2$: จะได้ว่า $m + 1 = nq + r + 1 = nq + (r + 1)$ โดยที่ $0 < 0 + 1 \leq r + 1 \leq n - 2 + 1 = n - 1$ กล่าวคือ มีผลหาร q เดิม และมี $r + 1$ เป็นเศษการหาร

กรณีที่ 2) $r = n - 1$: จะได้ว่า $m + 1 = nq + r + 1 = nq + n - 1 + 1 = nq + n = n(q + 1) + 0$ กล่าวคือ มี $q + 1$ เป็นผลหาร และเหลือเศษการหารเป็น 0 ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขการหารแน่นอน

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่าสำหรับจำนวนนับ m ใด ๆ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะมี q และ r ที่ทำให้ $m = nq + r$ โดยที่ $0 \leq r < n$ และในลำดับถัดไป เราจะพิสูจน์การมีหนึ่งเดียวกัน

พิสูจน์การมีเพียงหนึ่งเดียว กำหนดให้มีจำนวนเต็ม q' และ r' อีกชุดที่ทำให้ $m = nq' + r'$ โดยที่

³เพราะการบวก 1 ให้ m กลายเป็น $m + 1$ จะกระทบกับเศษ $n - 1$ ที่จะกลายเป็น n ซึ่งเป็นเศษการหารของตัวหาร n ไม่ได้

$0 \leq r' < n$ กล่าวคือ $nq + r = nq' + r'$ ซึ่งจะได้ว่า $n(q - q') = r' - r$ แต่เนื่องจาก $r, r' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า $0 \leq |r' - r| < n$ ทำให้ได้ว่า $0 \leq n|q' - q| < n$ จึงสรุปได้ว่า $|q' - q| = 0$ กล่าวคือ $q = q'$ และยังทำให้ได้ตามมาว่า $r' - r = n(q - q') = n \times 0 = 0$ จึงได้ว่า $r = r' \square$

6.3 Theory Exercise

1. (คำถามต่อเนื่องจากพิสูจน์ของบทตั้ง 6.2.1) สำหรับจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ $n > 0$ ซึ่ง $m = nq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |n|$ จงพิสูจน์ว่าจะมีจำนวนเต็ม q' และ r' โดยที่ $0 \leq r' < |n|$ ที่ทำให้ $-m = nq' + r'$ (และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ $m = (-n)q' + r'$ และ $-m = (-n)q' + r'$)
2. จงพิสูจน์บทตั้ง 6.2.1 ส่วนการมีโดยใช้หลักการการจัดอันดับดี

6.4 programming: การหารลงตัวที่เขียนกันเองด้วยนิยาม

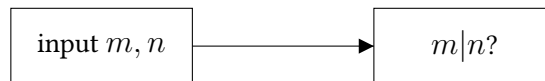


Figure 6.1: ภาพใหญ่ของปัญหาซึ่ง input คือจำนวนนับ m, n และ output คือบอกว่าหารลงตัวหรือไม่

เราจะเริ่มจากนิยามแรกสุดของทฤษฎีจำนวน นั่นคือการหารลงตัวของจำนวนเต็ม ซึ่งจริง ๆ แล้วนั้นเราสามารถตรวจสอบว่าจำนวน 2 จำนวนเช่น m และ n ที่ให้นั้นหารลงตัวกันหรือไม่ได้โดยง่ายผ่านตัวดำเนินการ “%” ซึ่งเป็นตัวดำเนินการ built-in ของ Python เพื่อหาเศษเหลือจากการหาร โดยตรวจสอบว่าเศษเหลือเป็น 0 หรือไม่ด้วย code ดังนี้

```
m%n == 0
```

โดยที่ code ดังกล่าวจะคืนค่า True ถ้าหารลงตัว และคืนค่า False ถ้าหารไม่ลงตัว

แต่ในที่นี้เราจะเริ่มเขียนฟังก์ชันเพื่อตรวจสอบการหารลงตัวกันด้วยตัวเองก่อนโดยอาศัยนิยามในการออกแบบ โดยสมมติว่าเราจะให้พารามิเตอร์แรกเป็นตัวตั้งและพารามิเตอร์ตัวที่สองเป็นตัวหาร และชื่อฟังก์ชันคือ `isDivisible` แต่ก่อนจะเริ่มลงมือเขียน code เราจะมาทบทวนนิยามของการหารลงตัวกันอีกรอบ

ทบทวนนิยามการหารลงตัว

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม เราจะกล่าวว่า m หารด้วย n ลงตัว ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = nk$

จากนิยาม จะเห็นว่าเป้าหมายหลักของฟังก์ชันหลังจากที่รับ m และ n เข้ามาแล้วคือต้องหาว่ามีจำนวนเต็ม k ที่เป็นผลหารดังกล่าวหรือไม่ โดยถ้าดูตามนิยามแล้วจะดูเหมือนว่าเราต้องตรวจสอบหาผลหาร k ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะพบ k ที่ทำให้ $m = nk$ ดังนี้

Not complete divisibility checking

```

k = 1
while m != n*k:
    k += 1

# after exiting from while-loop, k should be an integer such
↪ that m = nk,
# i.e. n is a factor of m

```

ทว่า วิธีดังกล่าวจะทำงานไม่รู้จบถ้าค่าที่ได้รับเข้ามาเป็นคู่ที่หารกันไม่ลงตัว เพราะเหตุผลของการหารไม่ลงตัวคือ

$$m \nmid n \iff \text{ทุก } k \in \mathbb{Z} \text{ จะได้ } m \neq nk$$

กล่าวคือ เราต้องตรวจสอบทุกจำนวนเต็ม k ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในการเขียนโปรแกรม อีกทั้ง ถึงแม้ว่าจะหารลงตัวก็ตาม ก็ยังคงมีคำถามว่าแล้วเราจะเริ่มหา k จากไหนและไปทางไหน เพราะถ้าหาผิดทางอาจจะทำงานไม่รู้จบได้เหมือนกัน ตัวอย่างเช่นเราอยากตรวจสอบว่า -10 หารด้วย 5 หรือไม่ ถ้าเราใช้ loop เริ่มจาก $k = 1$ และบวก 1 ไปเรื่อย ๆ ดังตัวอย่างข้างบน จะพบว่าโปรแกรมจะทำงานไม่รู้จบเพราะ k ตัวที่ต้องการคือ $k = -2$ ซึ่งไม่อยู่นับขอบเขตการหาที่กำหนดไว้

แต่ถ้าเรามีคุณสมบัติหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัวที่สามารถจำกัดขอบเขตการหาผลหาร k ได้ ซึ่งกล่าวว่า

คุณสมบัติเพื่อจำกัดขอบเขตของการหารลงตัว

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $m|n$ แล้ว $|n| \leq |m|$

ซึ่งในทำนองเดียวกัน เราสามารถมองผลหารเป็นตัวประกอบอีกตัวหนึ่งของ m ได้เช่นเดียวกัน จึงได้ว่า $|k| \leq |m|$ กล่าวคือถ้าจะมีผลหารของการหารลงตัวได้นั้น ผลหารดังกล่าวก็จะอยู่ได้แคในกลุ่ม $k \in \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m\}$ เพราะฉะนั้น เราจึงจำกัดขอบเขตการหาผลหาร k ได้ไม่ว่าจะหารลงตัว

หรือหารไม่ลงตัวก็ตาม กล่าวคือ

$$m|n \iff \text{มี } k \in \{-m, -m+1, \dots, m-1, m\} \text{ ที่ทำให้ } m = nk$$

6.4.1 วิธีเบื้องต้น

จากนิยามที่ได้กล่าวมานั้น เราสามารถเขียนโปรแกรมเพื่อตรวจสอบการหารลงตัวได้ด้วยการตรวจสอบว่าเจอผลหารหรือไม่ด้วยโปรแกรมดังนี้

Check divisibility

```
def isDivisible_ver1(m,n):
    qoutList = range(-m,m+1)
    for k in qoutList:
        if m == n*k:
            return True
    return False
```

ซึ่งโปรแกรมหาดังกล่าวจะรันลูปไปเรื่อย ๆ และเมื่อไหร่ก็ตามที่เจอผลหาร ฟังก์ชัน isDivisible จะคืนค่า True มาให้ แต่ถ้ารันจนครบลูปแล้วแต่ไม่เจอผลหาร จะคืนค่า False มาให้ เพราะไม่มีตัวประกอบ

ลองทำดู

ออกแบบให้จำนวนครั้งการค้นหาลดลงได้หรือไม่ ถ้าทำได้แล้วความซับซ้อนของจำนวนครั้งการค้นหาลดลงหรือไม่

6.4.2 พิจารณาแค่จำนวนบวกก็พอ

ถ้าลองสังเกตนิยามการหารลงตัวดีๆ จะพบว่าการเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบของตัวตั้งและตัวหารไม่ส่งผลต่อการคิด เพราะเราสามารถเปลี่ยนรูปแบบปัญหาให้พิจารณาแค่กรณีที่ทั้งตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวกอย่างเดียวได้ เนื่องจากถ้า $m = nk$ แล้วจะได้ว่า

$$(-m) = nk \iff m = n(-k)$$

$$m = (-n)k \iff m = n(-k)$$

$$(-m) = (-n)k \iff m = nk$$

กล่าวคือ เราทราบการเป็นบวกหรือลบของผลหาร k ได้โดยพิจารณาก่อนว่าตัวตั้งและตัวหารมีเครื่องหมายเหมือนกันหรือแตกต่างกัน และใช้การตรวจสอบการหารลงตัวโดยอาศัยแค่ค่าบวกของ m และ n ที่เป็นตัวตั้งและตัวหาร

แต่เนื่องจากเราต้องการผลลัพธ์ในแง่การหารลงตัวว่าหารลงตัวหรือไม่ ไม่ได้ต้องการค่าผลหาร จึงไม่จำเป็นต้องแบ่งกรณีการคำนวณของโปรแกรมออกตามความเหมือนหรือความต่างของเครื่องหมายของตัวตั้งและตัวหาร กล่าวคือเราสามารถพิจารณาแค่ค่าบวกของทั้งคู่และตัดขอบเขตการหาผลลัพธ์การหารเป็นแค่ $k \in \{1, 2, \dots, m-1, m\}$ ซึ่งจะได้โปรแกรมดังนี้

Check divisibility by positive

```
def isDivisible_ver2(m,n):
    if m < 0:
        m = -m
    if n < 0:
        n = -n
    qoutList = range(1,m+1)
    for k in qoutList:
        if m == n*k:
```

```

        return True
    return False

```

และโปรแกรมสำหรับการตรวจสอบการหารลงตัวที่จะพัฒนาต่อจากนี้จะขอสมมติว่าเรารับแค่จำนวนเต็มบวกมาตรวจสอบ ซึ่งถ้าจะทำให้รับจำนวนเต็มใด ๆ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับ `isDivisible_ver2`

6.4.3 เปลี่ยนจากปัญหาการคูณเป็นปัญหาการบวก

จากนิยามการคูณที่กล่าวว่า $k \cdot n := n + n + \dots + n$ (k พจน์) จะพบว่าเราสามารถเปลี่ยนจากปัญหาการหาผลหาร k เป็นการลองลู่เพื่อเพิ่มพจน์การบวก n ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมากกว่าหรือเท่ากับ m โดยถ้าสามารถเท่ากับ m ได้จะได้ว่าหารลงตัว แต่ถ้าเกิน m เมื่อไหร่จะได้ว่าหารไม่ลงตัว

Check divisibility addition version

```

def isDivisible_ver3(m,n):
    product = 0
    while product < m:
        product += n
    if product == m:
        return True
    else:
        return False

```

เราสามารถทำได้ในทางกลับกันคือการลบตัวหารออกด้วย n ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้เศษการหาร (ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ในการหาเศษการหารได้ด้วย)

Check divisibility subtraction version

```

def isDivisible_ver4(m,n):
    while m >= n:

```



```

    m -= n
    if m == 0:
        return True
    else:
        return False

```

6.4.4 เขียนแบบฟังก์ชันเวียนเกิด

จาก `isDivisible_ver4` จะเห็นแนวคิดของการทำปัญหาเดิมซ้ำกัน โดยถ้าเริ่มจากตัวตั้ง m และตัวหาร n เมื่อทำเสร็จไป 1 รอบของลูป จะได้ว่าตัวตั้งจะเปลี่ยนกลายเป็น $m - n$ โดยที่ตัวหารยังคง n เหมือนเดิม ซึ่งจะเห็นว่าแนวคิดดังกล่าวสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันเวียนเกิดเป็น

$$\text{isDivisible_recur}(m,n) = \text{isDivisible_recur}(m - n,n)$$

และตามรูปแบบการเขียนอัลกอริทึมเวียนเกิด สิ่งสำคัญคือต้องเขียนขั้นฐานของการคำนวณ ซึ่งคือขั้นที่เราสามารถกำหนดการคำนวณได้ง่าย ๆ โดยจะพบว่า ขั้นฐานของการคำนวณคือขั้นตอนหลังจากหลุดออกจาก `while-loop` ของ `isDivisible_ver4` กล่าวคือ เมื่อตัวตั้ง m ไม่ค่าน้อยกว่าตัวหาร n โดยที่ถ้าตัวตั้งมีค่าเท่ากับ 0 จะหมายความว่าเราสามารถลดค่าตัวตั้งมาเรื่อย ๆ จนหมดได้พอดี หรือก็คือมีเศษเหลือเป็น 0 นั่นคือการหารลงตัว ในทางกลับกัน ถ้าตัวตั้งมีค่ามากกว่า 0 จะหมายถึงการหารไม่ลงตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็นเงื่อนไขขั้นฐานได้ดังนี้

$$\text{isDivisible_recur}(m,n) = \begin{cases} \text{True} & \text{if } m = 0 \\ \text{False} & \text{if } 0 < m < n \end{cases}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังนี้

Check divisibility recursion

```
def isDivisible_recur(m,n):  
    if m < n:  
        if m == 0:  
            return True  
        else:  
            return False  
    else:  
        return isDivisible_recur(m-n,n)
```

6.5 programming: ตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะ

6.5.1 วิธีเบื้องต้น

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้เขียนฟังก์ชันเพื่อตรวจสอบการหารลงตัวไป ในหัวข้อนี้เราจะใช้ประโยชน์จากฟังก์ชันดังกล่าวนำมาตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะกันบ้าง โดยลักษณะของปัญหายังคงตรงไปตรงมาคือรับจำนวนนับ n เข้ามาแล้วคืนค่าว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ดังแผนภาพใน Figure ??

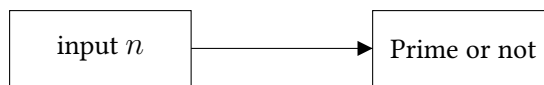


Figure 6.2: ภาพใหญ่ของปัญหาซึ่ง input คือจำนวนนับ n และ output คือบอกว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

เริ่มจากทบทวนนิยามของจำนวนเฉพาะ ซึ่งคือ

ทบทวนนิยามจำนวนเฉพาะ

จำนวนนับ n จะเป็นจำนวนเฉพาะ ถ้ามีเพียงแค่ 1 และ n เท่านั้นที่หาร n ลงตัว

ซึ่งจากนิยามจะพบว่าเราสามารถตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะได้จากการตรวจสอบการหารลงตัวว่าในช่วงตั้งแต่ 1 ถึงจำนวนดังกล่าวมีเพียงแค่ 1 และตัวมันเองเท่านั้นที่หารจำนวนดังกล่าวลงตัว กล่าวคือถ้าเราหาตัวประกอบทั้งหมดของ n ได้ แล้วทำการตรวจสอบว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ก็จะสามารถตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะของ n ได้ทันทีตามแผนภาพใน Figure ?? ซึ่งถ้าเรามีลิสต์ของตัวประกอบของ n แล้วเราจะ

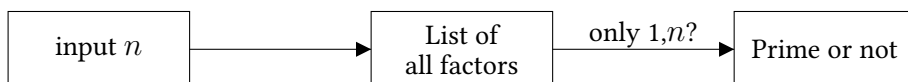


Figure 6.3: text

สามารถเขียนโค้ดเพื่อตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะได้ดังนี้

Check if it is prime

```
# assume we have a list `factorList` which is a list of all
↪ factors of n
factorList == [1,n]
```

ซึ่งโค้ดดังกล่าวจะให้ค่า True ออกมาถ้า n มีตัวประกอบเพียงแค่ 2 ตัวคือ 1 และ n กล่าวคือ n เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ในทางกลับกัน ถ้ามีตัวประกอบอื่นหลงอยู่ในลิสต์ดังกล่าวซึ่งก็คือ n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะนั้นจะได้ False ออกมาเป็นผลลัพธ์

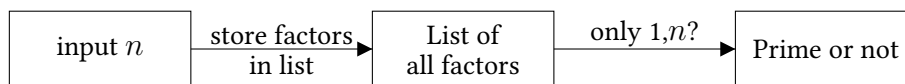


Figure 6.4: text

ในตอนนี้นี้เราจะเหลือเพียงแค่ปัญหาของการสร้างลิสต์ของตัวประกอบของ n ซึ่งทำได้โดยง่าย (ใน Python) โดยการรันลูปตั้งแต่ 1 ถึง n และตรวจสอบการเป็นตัวประกอบของ n เพื่อนำไปเก็บใน factorList ทีละตัว ซึ่งทำได้ดังนี้

Create factorList

```
factorList = []
for m in range(1,n+1):
    if isDivisible(n,m):
        factorList.append(m)
```

เมื่อนำโค้ดทั้งสองส่วนมารวมกันและเขียนเป็นฟังก์ชันของ n จะได้

Check prime

```
def isPrime(n):

    factorList = []
```

```
for m in range(1,n+1):
    if isDivisible(n,m):
        factorList.append(m)

prime = (factorList == [1,n])

return prime
```

ทั้งนี้ ยังคงมีคำถามชวนคิดเกี่ยวกับโปรแกรมเช็คจำนวนเฉพาะที่เขียนขึ้นมาว่า

คำถาม

เพราะเหตุใดเราจึงเขียนลูปแค่บน 1 ถึง n ก็เพียงพอที่จะเช็คการเป็นจำนวนเฉพาะของ n ได้

จากโปรแกรมที่เขียนมา จะเห็นว่าเราใช้พลังของการมี memory กล่าวคือเราเก็บไว้ก่อนว่ามีใครบ้างเป็นตัวประกอบ แล้วสุดท้ายนำมาตรวจสอบอีกทีว่ามีแค่ 1 และตัวมันเองเท่านั้นที่เป็นตัวประกอบ ซึ่งเราทำการเก็บตัวประกอบไว้ในลิสต์ ซึ่งเป็นเรื่องที่โชคดีที่ลิสต์เป็น built-in data structure ของ Python จึงทำให้เราสามารถ implement วิธีนี้ได้โดยง่าย ทว่า ในบางภาษานั้นกลับไม่มีลิสต์ให้ใช้ และการตรวจสอบเรื่องการมีใครเป็นสมาชิกบ้างก็ไม่ใช่ว่าจะง่ายกับ array ที่เป็นโครงสร้างข้อมูลพื้นฐานในหลาย ๆ ภาษา ดังนั้น จะแก้ปัญหาอย่างไรถ้าเราอยาก implement โจทย์นี้ในภาษาอื่น ๆ หรือแม้กระทั่งในวิชา Python เองแต่ยังเรียนไม่ถึงการใช้ลิสต์

6.5.2 วิธีที่ไม่ใช้ลิสต์ หรือการจำตัวประกอบทั้งหมดของ n

ก่อนอื่น เราจะต้องเปลี่ยนรูปแบบปัญหาให้เป็นปัญหาทางตรรกศาสตร์กันก่อน โดยเริ่มจากนิยามกัน

$n > 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ \iff มีเพียงแค่ 1 และ n ที่เป็นตัวประกอบของ n

\iff ถ้า $k \notin \{1, n\}$ แล้ว k จะไม่เป็นตัวประกอบของ n

\iff ทุก $k = 2, \dots, n-1$ จะได้ว่า k ไม่เป็นตัวประกอบของ n

หรือในทำนองเดียวกัน เพียงแต่ใช้ความสมมูลเชิงนิเสธ จะได้ว่า

$n > 1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ \iff มี $k = 2, \dots, n-1$ ที่ k เป็นตัวประกอบของ n

กล่าวคือ ถ้าเราจะตรวจสอบว่า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เราสามารถทำได้โดยลูปตั้งแต่ 2 ถึง $n-1$ และเมื่อใดก็ตามที่เจอตัวประกอบเพียงสักตัว เราก็จะสามารถหยุดลูปและบอกได้ทันทีว่า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ (มาจากการให้เหตุผลว่าประพจน์ $\exists x, P(x)$ เป็นจริง) ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนโค้ดได้ดังนี้

Check prime version2

```
def isPrime_ver2(n):

    prime = True                #set as default to be prime
    for k in range(2,n):
        if isDivisible(n,k):    #check if factor
            prime = False       #if k is a factor, set it to be
                                ↪ not prime
            break               #stop for loop

    return prime
```

แบบฝึกหัดเพิ่ม

ลองเขียน `isPrime_ver3` โดยใช้ `while-loop`

6.5.3 ลดจำนวนครั้งการคำนวณได้มากกว่านี้อีก

จากโปรแกรมที่ได้ทำมาแล้วนั้นเราจะพบว่า `isPrime` มีความซับซ้อนเชิงคำนวณอยู่ที่ $O(n)$ และ `isPrime_ver2` มีความซับซ้อนเชิงการคำนวณไม่เกิน $O(n)$ ซึ่งกรณีแย่ที่สุดคือ n ที่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะต้องตรวจสอบทุกจำนวนตั้งแต่ 2 ถึง $n - 1$ ว่าเป็นตัวประกอบหรือไม่

ทว่า เราสามารถอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะที่กล่าวว่า

การตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะโดยตรวจสอบไม่เกิน \sqrt{n} ครั้ง

ให้ n เป็นจำนวนนับ ถ้า p ไม่เป็นตัวประกอบของ n สำหรับทุก ๆ จำนวนเฉพาะ $p \leq \sqrt{n}$ แล้ว n จะเป็นจำนวนเฉพาะ

ถึงแม้ทฤษฎีบทจะบอกว่าเพียงพอที่จะตรวจสอบแค่ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าไม่เกิน \sqrt{n} แต่ในการพิจารณาแค่จำนวน n เพียงจำนวนเดียว เราจะยังคงไม่มีข้อมูลเก่าว่าจำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นวิธีที่ง่ายที่สุดคือตรวจสอบกับทุกจำนวนตั้งแต่ 2 ถึง $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ว่ามีใครบ้างที่เป็นตัวประกอบของ n ซึ่งทำให้เราสามารถแก้ไขโค้ด `isPrime_ver2` ให้ตรวจสอบน้อยลงได้ดังนี้

Check prime version2.1

```
import math
def isPrime_ver2_1(n):
    prime = True                #set as default to be prime
    upper = int(math.sqrt(n))
```

```

for k in range(2,upper):
    if isDivisible(n,k):      #check if factor
        prime = False       #if k is a factor, set it to be
                               ↪ not prime
        break                #stop for loop
return prime

```

6.6 programming: แยกตัวประกอบในรูปผลคูณจำนวนเฉพาะ

หนึ่งในทฤษฎีบทสำคัญของการแยกตัวประกอบของจำนวนเต็มคือ Fundamental Theorem of Arithmetic ซึ่งกล่าวว่า

Fundamental Theorem of Arithmetic

ทุก ๆ จำนวนเต็ม n จะมีจำนวนเฉพาะ $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ และจำนวนเต็มบวก a_1, a_2, \dots, a_n เพียงชุดเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$$

ซึ่งเราได้ศึกษาและพิสูจน์ไปแล้วในหัวข้อ ??

ในหัวข้อนี้ เราจะเขียนโปรแกรมเพื่อหารูปแบบนี้กัน โดยสมมติว่าเราอยากให้โปรแกรมคืนค่าออกมาเป็น dictionary ที่มี keys ระบุจำนวนเฉพาะ และ values ระบุเลขชี้กำลัง ตัวอย่างเช่น $1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$ จะให้ผลลัพธ์ออกมาเป็น $\{2:3, 5:2, 7:1\}$



Figure 6.5: ภาพใหญ่ของปัญหาซึ่ง input คือจำนวนนับ n และ output คือการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่คืนค่าออกมาเป็น dictionary

6.6.1 วิธีวนซ้ำตามจำนวนเฉพาะ

ขั้นตอนทำความเข้าใจปัญหา

จากรูปแบบปัญหา จะเห็นได้โดยง่ายว่าวิธีที่พื้นฐานที่สุดที่ทำได้คือการวนซ้ำไปตามตัวประกอบจำนวนเฉพาะ เพื่อหาว่าจะสามารถแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะนั้นออกมาได้กี่รอบ กล่าวคือเราสามารถแยกย่อยปัญหาดังกล่าวออกมาเป็นปัญหาย่อยของทีละจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบ โดยเป็นโจทย์ย่อยว่า

กำหนดจำนวนนับ n และจำนวนเฉพาะ p

เขียนโปรแกรมเพื่อหาว่าสามารถแยกตัวประกอบ p นั้นออกมาได้กี่ตัว

พูดอีกนัยหนึ่งคือ จงหาจำนวนนับ k ที่ทำให้ $n = p^k \cdot A$ โดยที่ $p \nmid A$

และเขียนแผนภาพการแก้ปัญหาได้แบบแผนภาพ 6.6

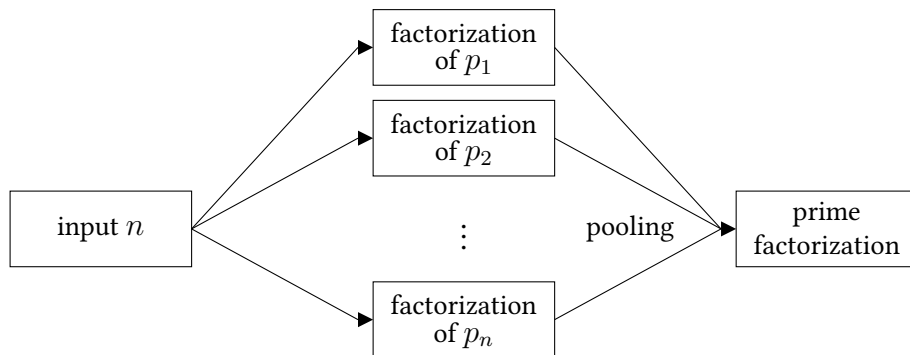


Figure 6.6: ...

ทว่า จะพบว่ายังเหลือปัญหาย่อยที่ว่าจำนวนเฉพาะใดบ้างที่เป็นตัวประกอบของ n เพื่อที่จะระบุขอบเขตการแก้ปัญหาย่อย p_1, \dots, p_n ดังนั้นก่อนที่จะแก้ปัญหาย่อยการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่กำหนดตัวประกอบจำนวนเฉพาะมาแล้วนั้น เราจะต้องแก้ปัญหาค้นหาตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมดของ n ก่อน จึงได้แผนภาพการแก้ปัญหาดังแผนภาพ 6.7

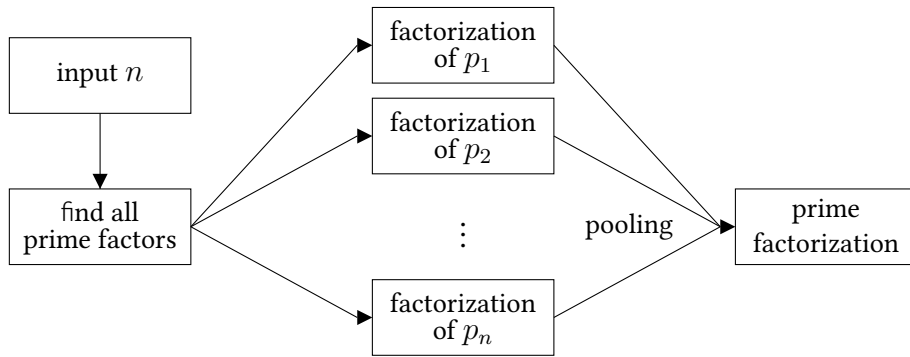


Figure 6.7: ...

ซึ่งปัญหาย่อยของการแยกตัวประกอบของแต่ละตัวประกอบเฉพาะนั้น เราสามารถใช้ for-loop เพื่ออุปการแก้ปัญหตามตัวประกอบเฉพาะทั้งหมดที่หามาได้และเก็บผลลัพธ์มาสะสมไว้ ซึ่งจะได้ดังแผนภาพ 6.8

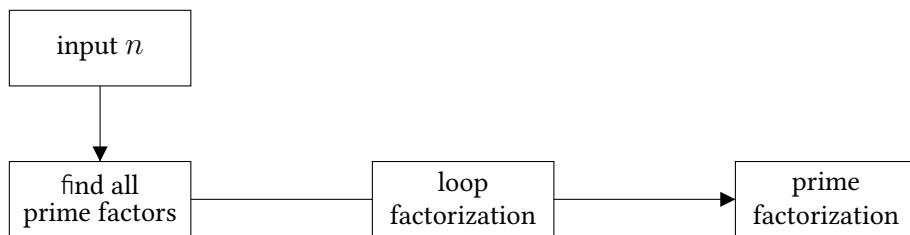


Figure 6.8: ...

ทั้งนี้ โจทย์ปัญหาของการหาตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมดของ n จะทิ้งไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัดในแบบฝึกหัด 6 แต่เราจะมาแก้ปัญหาเรื่องจำนวนครั้งการเป็นตัวประกอบของตัวประกอบเฉพาะที่กำหนดมาให้กัน

แก้ปัญหาย่อยจำนวนครั้งการหารลงตัว

ก่อนลงรายละเอียด จะขอทบทวนปัญหาอีกสักครั้ง

กำหนดจำนวนนับ n และจำนวนเฉพาะ p

เขียนโปรแกรมเพื่อหาว่าสามารถแยกตัวประกอบ p นั้นออกมาได้กี่ตัว

พูดอีกนัยหนึ่งคือ จงหาจำนวนนับ k ที่ทำให้ $n = p^k \cdot A$ โดยที่ $p \nmid A$

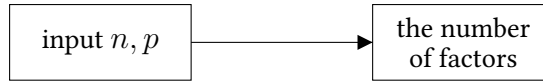


Figure 6.9: ภาพใหญ่ของปัญหาย่อยซึ่ง input คือจำนวนนับ n และจำนวนเฉพาะ p และ output คือจำนวนครั้งที่หาร n ลงตัวของ p

ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ค่อนข้างง่าย เราสามารถทำได้ด้วยการวนลูปหารซ้ำไปเรื่อย ๆ ด้วยเงื่อนไขว่า “หารได้ที่ยังหารลงตัวอยู่ ($n\%p == 0$) ให้หารต่อ” และทุกครั้งที่หารเราจะมีตัวแปรเพื่อเก็บจำนวนครั้งที่หารไว้ ($\text{counter} += 1$) และอัปเดตตัวตั้งการหารเป็นผลหารล่าสุด $n = n/p$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นโค้ดได้ดังนี้

factorization of given prime p

```
def countFactor(n, p):
    count = 0
    while n%p == 0:
        count += 1
        n = n//p
    return count
```

รวบรวมวิธีแก้ปัญหาย่อยเพื่อแก้ปัญหหลัก

ตอนนี้เรามีฟังก์ชัน `countFactor` เพื่อช่วยในการนับจำนวนตัวประกอบเฉพาะ p ของ n และ(สมมติ)มีฟังก์ชัน `findAllPrimeFactor` เพื่อช่วยในการหาตัวประกอบเฉพาะทั้งหมดของ n หรือพูดอีกนัยหนึ่งคือ เราสามารถหาได้แล้วว่าเมื่อทำการแยกตัวประกอบเฉพาะของ n จะมีจำนวนเฉพาะใดคูณกันอยู่บ้าง และแต่ละจำนวนเฉพาะดังกล่าวมีเลขชี้กำลังเป็นอะไร ตอนนี้เหลือเพียงแค่นำ 2 ฟังก์ชันดังกล่าวมาทำงานร่วมกันตามแผนที่วางไว้ในแผนภาพ 6.8 ซึ่งเราจะสามารถเขียนโค้ดได้ดังนี้

Prime Factorization

```
def primeFactorize(n):
    primeList = findAllPrimeFactor(n)
    resultDict = {}
    for p in primeList:
        resultDict[p] = countFactor(n,p)
    return resultDict
```

6.6.2 วิธีเวียนเกิด

ถ้าลองสังเกตวิธีคำนวณของฟังก์ชัน `countFactor` ดี ๆ จะพบว่ามีความคิดของการเรียกฟังก์ชันแบบเวียนเกิดที่สำคัญอยู่อย่างหนึ่ง ซึ่งคือการทำที่เราไม่ได้พิจารณาตัวตั้งของการหารว่ามีค่า n ที่รับมาตลอดเวลา แต่ n ในการพิจารณารอบถัดไปก็เกิดจากการที่เราตัดทอนตัวประกอบที่หาพบมาแล้วหนึ่งตัว (n/p) ซึ่งถึงแม้ว่าในฟังก์ชันดังกล่าวจะทำอยู่กับแค่ p ตัวเดียว แต่เราก็สามารถขยายแนวคิดนี้มาสู่กรณีใด ๆ ที่ไม่ได้กำหนดตัวประกอบเฉพาะตายตัวไว้ได้เช่นกัน

จากประเด็นดังกล่าว จึงนำมาสู่แนวคิดการออกแบบในรูปแบบเวียนเกิดว่าเราให้ฟังก์ชันนั้นหยาบตัวประกอบเฉพาะที่เล็กที่สุดออกมาก่อนหนึ่งตัว (p_1) แล้วปล่อยให้ฟังก์ชันเดิมคำนวณกับกรณี n/p_1 จนกว่าจะได้ว่าหารแล้วเหลือแค่ 1 ซึ่งมาจากแนวคิด

$$n = \underbrace{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}}_{\text{algor}(n)} = p_1 \times \underbrace{(p_1^{a_1-1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n})}_{\text{algor}(n/p_1)} = p_1 \times (n/p_1)$$

ทว่า สิ่งที่เราต้องการทำคือการเก็บจำนวนครั้งการหารลงตัวไว้ใน dictionary ดังนั้นเราจึงต้องให้อัลกอริทึมที่เรา กำลังจะสร้างคืนค่าเป็น dictionary ของจำนวนครั้งการหารลงตัวของ n/p_1 และทำการอัปเดต p_1 เพิ่มเข้าไปอีก 1 ครั้ง ซึ่งสามารถทำได้ง่ายผ่านคำสั่ง `dict[key] = dict.get(key,0) + 1` (ถ้าไม่มี key นั้นให้คืนค่า 0 แล้วเพิ่มไป 1 จึงได้ 1 แต่ถ้ามี key นั้นอยู่แล้วให้คืนค่าเดิมออกมาก่อนแล้วบวกเพิ่มไปอีก 1 แล้วบันทึกกลับลงไปใน key เดิม)

นอกจากนั้น ยังพบว่าเครื่องมืออีกชิ้นที่สำคัญของแนวคิดนี้คือการหาตัวประกอบเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุดก่อน ซึ่งสามารถปรับปรุงจากฟังก์ชันที่เขียนเป็นแบบฝึกหัดข้อ 6 โดยให้คำนวณจากน้อยไปมาก และเมื่อเจอตัวประกอบเฉพาะตัวแรกก็ให้คืนค่าทันที โดยในที่นี้ขอสมมติชื่อฟังก์ชันเป็น `minPrimeFactor`

สุดท้าย จะสามารถเขียนโค้ดได้ดังนี้

Recursive Prime Factorization

```
def primeFactorize_recur(n):
    if n == 1:
        return {}
    else:
        min_p = minPrimeFactor(n)
        result_dic_recur = primeFactorize_recur(n//min_p)
        result_dic_recur[min_p] = result_dic_recur.get(min_p,0)
        ↪ + 1
    return result_dic_recur
```

6.7 programming: ขั้นตอนวิธีการหารหาเศษและผลหาร

6.8 Programming Exercise

1. จงวิเคราะห์ความซับซ้อนของอัลกอริทึมต่าง ๆ ในการตรวจสอบการหารลงตัว ทั้งรูปแบบเชิงทฤษฎี และเชิงการทดลองเพื่อเปรียบเทียบ โดยที่สมมติว่าทุก operation (บวก ลบ คูณ การเปรียบเทียบ) มีต้นทุนเท่ากับ 1 หน่วย
2. โปรแกรม `isDivisible_recur` ที่ให้เป็นตัวอย่างในหัวข้อ 6.4.4 ยังคงอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่า ใส่ได้แค่จำนวนเต็มบวก จงพิจารณาว่าเราสามารถแก้ไขให้รับกับจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยวิธีเดียวกับ `isDivisible_ver2` ได้หรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าไม่ได้จงหาวิธีแก้ไขวิธีอื่น
3. จงเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลหารและเศษเหลือจากขั้นตอนวิธีการหาร
4. จงเขียนโปรแกรมตรวจสอบการเป็นจำนวนเฉพาะโดยใช้รูปแบบเวียนเกิด
5. จงเขียนโปรแกรมที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าลิสต์ของทุกจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 1 ถึง n โดยที่แย่ที่สุดไม่เกิน $O(n^{\frac{3}{2}})$
(เราสามารถทำได้ง่ายที่สุดคือ $O(n^2)$ ด้วยการตรวจสอบทีละจำนวนว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ด้วยวิธี `ver2` และ `print` เมื่อเป็นจำนวนเฉพาะ)
6. จงเขียนโปรแกรมที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าเป็นลิสต์ของจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวประกอบของ n
7. จงเขียนฟังก์ชันนับจำนวนครั้งการหาร n ด้วย p ลงตัว (ฟังก์ชัน `countFactor`) แบบเวียนเกิด
8. จงเขียนโปรแกรมที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าจำนวนของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n
9. จงเขียนฟังก์ชันที่รับจำนวนนับ n และคืนค่าออกมาเป็น dictionary ของการแยกตัวประกอบเฉพาะของ $n!$ (caution: จะพบว่าเราสามารถแก้ปัญหาโดยอาศัยฟังก์ชัน `primeFactorize` ในหัวข้อ 6.6 ได้โดยง่าย แต่ว่าจะมีปัญหาเมื่อ n มีค่าใหญ่ ๆ จนทำให้การเก็บ $n!$ ใช้หน่วยความจำเกิน)
10. อาศัยฟังก์ชันที่เขียนขึ้นมาในแบบฝึกหัดข้อ 9 เพื่อเขียนฟังก์ชันที่รับจำนวนนับ n แล้วคืนค่าเป็นจำนวนของเลข 0 ที่ลงท้ายของผลลัพธ์ของ $n!$

Chapter 7

Combinations

ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคต่าง ๆ เกี่ยวกับการนับจำนวนเหตุการณ์ โดยเริ่มจากเทคนิคเบื้องต้นที่สุดซึ่งคือหลักการบวกและหลักการคูณที่เป็นพื้นฐานของสูตรการนับอื่น ๆ ที่จะกล่าวถึงต่อไปในบทนี้ กล่าวคือถึงแม้เราจะไม่รู้สูตรในการคำนวณการนับแบบยาก ๆ แต่ถ้าเราใช้ทักษะด้านการวางแผนช่วยในการนับ ทุกปัญหาจะสามารถถูกแก้ปัญหามาได้โดยใช้เพียงแค่หลักการบวกและหลักการคูณได้ หลังจากทำความเข้าใจเกี่ยวกับการวางแผนการนับเหตุการณ์เบื้องต้นด้วยหลักการบวกและหลักการคูณแล้ว จะเริ่มกล่าวถึงสูตรของรูปแบบการนับต่าง ๆ ที่เฉพาะเจาะจงมากขึ้น ได้แก่ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดกลุ่ม ทั้งในรูปแบบไม่มีของซ้ำกันและมีของซ้ำกันหรือเลือกซ้ำได้

7.1 หลักการบวกและหลักการคูณ

อย่างที่ได้อธิบายไปตอนต้นว่าทุกสูตรที่จะถูกกล่าวถึงในบทนี้นั้นมีแนวคิดตั้งต้นมาจากหลักการบวกและหลักการคูณทั้งสิ้น เพียงแต่ต้องอาศัยทักษะในการวางแผนการนับให้เป็นขั้นเป็นตอน ดังนั้นจุดประสงค์ของหัวข้อนี้คือการทำความเข้าใจเกี่ยวกับการวางแผนการนับผ่านโจทย์ที่อยู่ในระดับง่ายถึงปานกลาง โดยที่เครื่องมือการนับในเวลานี้มีเพียงแค่หลักการบวกและหลักการคูณ

7.1.1 หลักการบวก

หลักการบวก

ในการทำงานอย่างหนึ่งมีทางเลือกการทำอยู่ 2 ทางเลือก โดยที่ทางเลือกแรกมีวิธีทำได้ p วิธีแตกต่างกัน และทางเลือกที่สองมีวิธีทำได้ q วิธีแตกต่างกัน โดยที่ทางเลือกทั้งสองไม่มีวิธีการทำร่วมกัน และเลือกทำได้แค่ทางเลือกใดทางเลือกหนึ่งเท่านั้น ถ้าต้องการเลือกวิธีการทำงานชิ้นนี้จะสามารถเลือกทำได้ $p + q$ วิธีที่แตกต่างกัน

สิ่งแรกที่ต้องนึกถึงเมื่อจะเลือกใช้หลักการบวกคือกระบวนการนับของเราเป็นการแยกกรณี กล่าวคือเป็นทางเลือกให้ทำเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยที่ไม่ว่าจะเลือกทำทางไหนก็ถือว่าจบกระบวนการทำงานชิ้นนั้น และอย่างที่สองที่ต้องระวังคือทางเลือกที่แยกออกไปต้องไม่มีวิธีการที่ซ้ำกัน กล่าวคือไม่มีการนับซ้ำเกิดขึ้นในกระบวนการนับ

ในส่วนของโจทย์ด้านล่างนั้น ผู้อ่านคงทราบดีว่าเราต้องใช้หลักการบวกในการนับเพราะเป็นโจทย์ในหัวข้อหลักการบวก แต่สิ่งที่ผมอยากให้ผู้่านนึกหลังจากอ่านโจทย์เสร็จคืออะไรเป็นคีย์เวิร์ดสำคัญที่บอกเราว่าขั้นตอนนี้ต้องใช้หลักการบวก

Example 7.1.1. มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ 33 คน และมีนิสิตวิชาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์ 40 คน ถ้าต้องการเลือกนักศึกษาหนึ่งคนเพื่อเป็นคณะกรรมการของสโมสรนิสิต จะมีวิธีเลือกนิสิตดังกล่าวได้แตกต่างกันกี่วิธี

Solution. ...

Example 7.1.2. ให้เซต $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ถ้าต้องการเลือกตัวอักษรหนึ่งตัวจากเซต A หรือเซต B จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

Solution. ...

นอกจากที่เรากล่าวถึงหลักการบวกในแง่เปรียบเทียบกับทางเลือกวิธีการทำงานในรูปแบบภาษามนุษย์แล้วนั้น จากตัวอย่างที่ 7.1.2 เราจะพบว่าเราสามารถนิยามหลักการบวกได้โดยใช้เซตเข้ามาช่วยในการพูดให้เป็นภาษาคณิตศาสตร์มากขึ้นได้ดังนี้

หลักการบวกแบบภาษาเซต

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตที่มีสมาชิกแตกต่างกัน กล่าวคือ $A \cap B = \emptyset$ จะได้ว่า

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

และนอกจากที่เรานิยามหลักการบวกโดยใช้แค่ 2 ทางเลือก เรายังสามารถขยายแนวคิดออกไปให้มีมากกว่า 2 ทางเลือกได้ในทำนองเดียวกันคือ

หลักการบวกกรณีทั่วไป

ถ้ามีทางเลือก m ทางเลือก ซึ่งไม่มีทางเลือกใดที่มีวิธีการซ้ำกับทางเลือกอื่น ๆ สมมติว่าทางเลือกที่หนึ่ง มีวิธีทำได้ r_1 วิธี ทางเลือกที่สองมีวิธีทำได้ r_2 วิธี ... และทางเลือกที่ m มีวิธีทำได้ r_m วิธี ดังนั้น จะมีวิธีเลือกทำงานชิ้นนี้เพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งได้แตกต่างกัน $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ วิธี

หรือกล่าวแบบภาษาเซตคือ ถ้า A_1, \dots, A_m เป็นเซตที่ไม่มีสองเซตใด ๆ ที่มีสมาชิกร่วมกัน กล่าวคือ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับทุก ๆ $i \neq j$ จะได้ว่า

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + \cdots + |A_m|$$

Example 7.1.3. จงหา $|\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x^2 + y^2 \leq 4\}|$

Solution. ...

7.1.2 หลักการคูณ

หลักการคูณ

กระบวนการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยขั้นตอนย่อยๆ สองขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกมีวิธีทำได้แตกต่างกัน p วิธี และไม่ว่าจะเลือกวิธีใดก็ตามในขั้นตอนแรกจะสามารถทำขั้นตอนที่สองได้แตกต่างกัน q วิธี และขั้นตอนทั้งสองนี้ไม่สามารถทำงานร่วมกันได้ ดังนั้นจะมีวิธีทำงานชิ้นนี้ได้แตกต่างกัน pq วิธี

ประเด็นสำคัญของหลักการคูณคือการทำงานชิ้นนั้นมีความเป็นขั้นตอนทำอย่างต่อเนื่องกัน และต้องทำทุกขั้นตอนถึงจะเสร็จงานชิ้นนั้น ถ้าในการวางแผนการนั้นมีแบ่งการนับออกเป็นขั้นและมั่นใจว่าเมื่อทำจบ

ทุกชั้นแล้วจะได้ผลลัพธ์ของการจัดเรียงออกมาตามที่เรต้องการก็เป็นการยืนยันได้ในระดับหนึ่งว่าเราจะต้องใช้หลักการคูณเข้ามานับ นอกจากนั้น ข้อระวังของกฎการคูณที่ต้องพึงระวังไว้เสมอคือจำนวนวิธีการเลือกทำในขั้นตอนถัดไปจะต้องเท่ากันทั้งหมดไม่ว่าจะเลือกทำวิธีการใดในขั้นตอนปัจจุบันก็ตาม กล่าวเทียบกับนิยามด้านบนคือ ไม่ว่าเราจะเลือกวิธีใดใน p วิธีของขั้นตอนที่หนึ่ง เราจะต้องสามารถทำขั้นตอนที่สองได้ q วิธีทั้งหมด

คำถาม

จริง ๆ แล้วเราสามารถมองหลักการคูณจากมุมมองของหลักการบวกได้ ซึ่งจะพบเหตุผลว่าทำไมเงื่อนไขของการที่จำนวนวิธีที่เลือกทำได้ในขั้นตอนถัดไปต้องเท่ากันไม่ว่าเลือกทำวิธีใดมาเป็นเงื่อนไขที่สำคัญ จงพิจารณาหลักการคูณโดยใช้การอธิบายในรูปแบบของหลักการบวก

Example 7.1.4. มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ 33 คน และมีนิสิตวิชาเอกวิทยาการคอมพิวเตอร์ 40 คน ถ้าต้องการเลือกนักศึกษาสองคนจากวิชาเอกละหนึ่งคนเพื่อเป็นคณะกรรมการของสโมสรนักศึกษา จะมีวิธีเลือกนักศึกษาได้แตกต่างกันกี่วิธี

Solution. ...

Example 7.1.5. ให้เซต $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ถ้าต้องการเลือกตัวอักษร 2 ตัวจากเซต A และเซต B เซตละหนึ่งตัว จะมีวิธีเลือกที่แตกต่างกันกี่วิธี

Solution. ...

ในทำนองเดียวกัน หลักการคูณก็สามารถเขียนได้ในรูปแบบของเซตดังนี้

หลักการคูณแบบภาษาเซต

กำหนดให้ A และ B เป็นเซต และ $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ แล้วจะได้ว่า

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Example 7.1.6. จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกันมีทั้งหมดกี่จำนวน

Solution. ...

หลักการคูณกรณีทั่วไป

ถ้างานชิ้นหนึ่งประกอบด้วย m ขั้นตอน สมมติว่าขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีทำได้ r_1 วิธี ขั้นตอนที่สองมีวิธีทำได้ r_2 วิธีไม่ว่าจะเลือกวิธีการใดในขั้นตอนที่หนึ่งก็ตาม ... และขั้นตอนที่ m มีวิธีทำได้ r_m วิธีไม่ว่าจะเลือกวิธีการใดในขั้นตอนก่อนหน้าก็ตาม ดังนั้นจะมีวิธีเลือกทำงานชิ้นนี้ได้แตกต่างกัน

$$r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_m \text{ วิธี}$$

หรือกล่าวแบบภาษาเซตคือ ถ้า A_1, \dots, A_m เป็นเซตใด ๆ แล้วจะได้ว่า

$$|A_1 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \times \cdots \times |A_m|$$

Example 7.1.7. จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 1000 และ 10000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกันมีทั้งหมดกี่จำนวน

Solution. ...

Example 7.1.8. จงแสดงว่าเซตที่มีสมาชิก n ตัวมีเซตย่อย 2^n เซต

Solution. ...

Example 7.1.9. มีคู่สามีภรรยา 15 คู่ในงานปาร์ตี้แห่งหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีการเลือกผู้หญิงหนึ่งคนและผู้ชายอีกหนึ่งคนโดยที่ (1) ต้องเป็นคู่สามีภรรยา (2) ต้องไม่เป็นคู่สามีภรรยา

Solution. ...

Example 7.1.10. พาสเวิร์ดของระบบความปลอดภัยแห่งหนึ่งเป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษยาว 3 หรือ 4 ตำแหน่ง จงหา (1) จำนวนของพาสเวิร์ดที่เป็นไปได้ทั้งหมด (2) จำนวนของพาสเวิร์ดที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ใช้ตัวอักษรไม่ซ้ำกัน

Solution. ...

Example 7.1.11. จงหาจำนวนของตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $441,000 (= 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2)$

Solution. ...

Example 7.1.12. จงหาจำนวนวิธีในการเขียน 441,000 ในรูปผลคูณของจำนวนเต็มบวก 2 จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน (เช่น $1 \times 441,000$ หรือ 441×1000)

Solution. ...

Example 7.1.13. กำหนดให้ $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $S = \{(a, b, c) : a, b, c \in X, a < b \text{ และ } a < c\}$ จงหาจำนวนสมาชิกทั้งหมดของ S

Solution. ...

7.2 การเรียงสับเปลี่ยน

7.2.1 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของไม้เท้า

กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นเซตของ n สิ่งของที่แตกต่างกัน และให้ $0 \leq r \leq n$ แล้ว การเรียงสับเปลี่ยน r ชั้นของเซต A (r -permutation) คือรูปแบบในการจัดเรียงลำดับเป็นแถวตรงของสมาชิก r ตัวใดๆ จากเซต A และเขียนแทนจำนวนของรูปแบบดังกล่าวที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วย $P(n, r)$

Example 7.2.1. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงเขียนรูปแบบการเรียงสับเปลี่ยนของ 3 ชั้นจากเซต A ทั้งหมด

Solution. ...

ในกรณีที่ n มีค่าน้อย ๆ ก็เป็นการง่ายที่จะไล่ทุกรูปแบบเพื่อนับ แต่ในกรณีที่ n มีค่ามาก ๆ คงไม่เป็นเรื่องง่ายที่จะเขียนไล่ให้ครบแน่ ๆ จึงต้องมาพิจารณากันว่าแล้วเราจะคำนวณหาค่า $P(n, r)$ กันอย่างไร

อย่างที่ได้อธิบายไปแล้วว่าเบื้องหลังของสูตรการนับต่าง ๆ นั้นมีพื้นฐานมาจากหลักการบวกและหลักการคูณทั้งสิ้น เพียงแค่ต้องวางแผนขั้นตอนการนับให้ถูกต้อง ดังนั้น สิ่งแรกที่ต้องทำคือวางแผนว่าเราจะวางแผนขั้นตอนของการเรียงสับเปลี่ยน r ชั้นจากของ n ชิ้นอย่างไร

แนวคิดหนึ่งที่น่าจะเป็นแนวคิดที่ผู้อ่านทุกคนคิดถึงเป็นอย่างแรกคือ เลือกของจากกองตัวเลือกที่มีมาใส่ทีละตำแหน่งไล่ไปตั้งแต่ตำแหน่งแรกจนถึงตำแหน่งสุดท้าย

จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน

$P(n, r)$ คือ จำนวน สมาชิก ของ เซต

$\{(x_1, x_2, \dots, x_r) | x_i \in \{a_1, \dots, a_n\} \text{ และ } x_i \neq x_j \text{ สำหรับทุกๆ } i \neq j\}$ และจะ
ได้ว่า

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Note

$$P(n, 0) = 1 \text{ และ } P(n, 1) = n \text{ และ } P(n, n) = n!$$

คำเตือน

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นเพียงแค่เครื่องมือหนึ่งในการนับ ไม่ใช่รูปแบบของโจทย์ อาจมีการใช้พร้อมกับหลัก
การบวก และหลักการคูณ และการเรียงสับเปลี่ยนอาจเป็นเพียงการนับในขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งของหลัก
การคูณก็ได้

Example 7.2.2. จงหาจำนวนคำซึ่งมีความยาว 4 ตัวอักษร โดยที่ตัวอักษรทั้ง 4 ตัวมาจากเซต $\{a, b, c, d, e\}$

Solution. ...

Example 7.2.3. จัดคน 6 คนเข้านั่งเรียงในแนวเส้นตรงได้กี่วิธี

Solution. ...

Example 7.2.4. จัดสามีภรรยา 3 คู่เข้านั่งเรียงแถวได้ที่วิธีถ้า (1) หัวแถวและท้ายแถวต้องเป็นผู้ชาย (2) ภรรยาต้องนั่งติดกับสามี

Solution. ...

Example 7.2.5. จงหาจำนวนของจำนวนเต็มซึ่งมีความยาว 7 หลัก แต่ละหลักแตกต่างกันและไม่เป็น 0 โดยที่เลข 5 และเลข 6 ต้องไม่ปรากฏในตำแหน่งติดกัน

Solution. ...

Example 7.2.6. จงอธิบายเหตุผลเชิงการจัดเรียงว่า

$$P(n, n) = P(n, k) \times P(n - k, n - k)$$

Solution. ...

Note

เรียกการพิสูจน์แบบตัวอย่างที่ 7.2.6 ว่า **combinatorial proof** หรือเรียกว่า **เทคนิค double counting**

Example 7.2.7. จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 20000 และ 70000 ซึ่งมีเลขในแต่ละหลักแตกต่างกันทั้งหมดมีกี่จำนวน

Solution. ...

Example 7.2.8. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนนับที่สร้างมาจากเลขโดด $\{1, 3, 5, 7\}$ ที่เลขในแต่ละหลักแตกต่างกันทั้งหมด จงหา

1. $|S|$

2. $\sum_{n \in S} n$

Solution. ...

7.2.2 การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

- มีข้อแตกต่างจากการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นอย่างไร (มองว่าสองรูปแบบการจัดเรียงแตกต่างกันอย่างไร)
- ออกแบบกระบวนการนับอย่างไร

Example 7.2.9. จงเขียนรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้น 4 สิ่งจากเซต $A = \{a, b, c, d\}$ ซึ่งมี $4! = 24$ แบบ และจงเขียนแยกว่าแบบใดบ้างที่เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมจะได้รูปแบบเดียวกัน (และสังเกตรูปแบบเพื่อนับ)

Solution. ...

การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม คือ รูปแบบการจัดเรียงที่นำรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้นมาล้อมเป็นวงกลม ซึ่งจะได้ว่าสองรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้นที่ต่างกันที่เมื่อนำมาล้อมเป็นวงกลมแล้วจะมองว่าเป็นรูปแบบเดียวกันเกิดจาก

และจะได้ว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของสิ่งของ n สิ่งทั้งหมดเท่ากับ

Example 7.2.10. นำเด็กผู้ชาย 5 คนและเด็กผู้หญิง 3 คนมานั่งล้อมโต๊ะกลม จะนั่งได้กี่วิธีถ้า

1. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. เด็กชาย B_1 และเด็กหญิง G_1 ไม่นั่งติดกัน
3. ไม่มีเด็กผู้หญิงสองคนใด ๆ นั่งติดกัน

Solution. ...

Example 7.2.11. จงหาจำนวนวิธีการนั่งที่แตกต่างกันของคู่สามีภรรยา n คู่รอบโต๊ะวงกลม โดยที่

1. ผู้ชายและผู้หญิงนั่งสลับกัน
2. คู่สามีภรรยาต้องนั่งติดกัน

Solution. ...

Example 7.2.12. จากตัวอย่างที่ 7.3.1 ที่เราได้เขียนรูปแบบการจัดเรียงเชิงเส้น 3 สิ่งจากเซต $A = \{a, b, c, d\}$ ซึ่งมี $P(4, 3) = 24$ แบบ จงเขียนแยกว่าแบบใดบ้างที่เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมจะได้รูปแบบเดียวกัน (และสังเกตรูปแบบเพื่อนับ)

Solution. ...

การเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมแบบทั่วไป

ถ้ามีของ n สิ่งแตกต่างกัน จะนำมาจัดเรียงเป็นวงกลม r สิ่งได้แตกต่างกัน $Q(n, r)$ วิธี โดยที่

$$Q(n, r) = \frac{P(n, r)}{r}$$

7.2.3 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของซ้ำ

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นแบบของซ้ำ

ถ้ามีของ n สิ่ง ซึ่งแบ่งออกเป็น k ประเภท โดยของในประเภทเดียวกันจะมองเป็นสิ่งเดียวกัน โดยที่มีของประเภทที่หนึ่งอยู่ n_1 ชิ้น ของประเภทที่สองมีอยู่ n_2 ชิ้น ... ของประเภทที่ k มีอยู่ n_k ชิ้น โดยที่ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ แล้วจะได้ว่าจำนวนวิธีการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่งนี้เท่ากับ

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) =$$

Example 7.2.13. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงคำว่า MISSISSIPPI ที่แตกต่างกันทั้งหมด

Solution. ...

7.3 การจัดกลุ่ม

กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นเซตของ n สิ่งของที่แตกต่างกัน และให้ $0 \leq r \leq n$ แล้ว การจัดกลุ่ม r ชิ้นของเซต A (r -combination) คือรูปแบบในการจัดสมาชิก r ตัวใดๆ จากเซต A เข้ากลุ่มเดียวกัน โดยที่ในกลุ่มเราไม่สนใจลำดับของสมาชิก แต่สนใจเพียงแค่ว่ามีใครอยู่บ้าง และเขียนแทนจำนวนของรูปแบบดังกล่าวที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วย $C(n, r)$ หรือ $\binom{n}{r}$

Example 7.3.1. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงเขียนรูปแบบการเรียงจัดกลุ่มของ 3 ชิ้นจากเซต A ทั้งหมด

Solution. ...

จำนวนวิธีในการจัดกลุ่ม

$C(n, r)$ คือจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของเซตที่มีสมาชิก n ตัว กล่าวคือ

$$C(n, r) = \{ \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \mid x_i \in \{a_1, \dots, a_n\} \text{ และ } x_i \neq x_j \text{ สำหรับทุกๆ } i \neq j \}$$

และจะได้ว่า

$$C(n, r) =$$

Example 7.3.2. จงหาจำนวนทั้งหมดของบิตสตริงโดยมีความยาวเท่ากับ 9 ซึ่งมีเลขโดด 1 อยู่สี่ตำแหน่ง

Solution. ...

Example 7.3.3. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงคำว่า MISSISSIPPI ที่แตกต่างกันทั้งหมด (โจทย์เดิม แต่ใช้เทคนิคการจัดกลุ่มมาช่วยนับ)

Solution. ...

Example 7.3.4. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดแบ่งนักเรียน 7 คน ออกเป็นสามกลุ่ม โดยให้มีกลุ่มละ สามคน 1 กลุ่ม และกลุ่มละสองคน 2 กลุ่ม

Solution. ...

Example 7.3.5. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการที่สุกใจเชิญเพื่อนเพียง 6 คนจากเพื่อนสนิททั้งหมด 10 คนมารับประทานอาหารเย็นด้วยกัน ซึ่งใน 10 คนนี้มี 2 คนเป็นพี่น้องกัน ถ้าจะเชิญมาต้องเชิญทั้ง พี่และน้องไปด้วย

Solution. ...

Example 7.3.6. จงใช้เหตุผลเชิงการนับเพื่อพิสูจน์ว่า

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Solution. ...

Example 7.3.7. จงใช้เหตุผลเชิงการนับเพื่อพิสูจน์ว่า

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Solution. ...

7.4 สัมประสิทธิ์ทวินาม

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้นิยามจำนวน $\binom{n}{r}$ หรือ $C(n, r)$ ไปแล้วด้วยปัญหาของการสร้างเซตย่อยขนาด r สมาชิกจากเซตที่มี n สมาชิก แต่ทั้งนี้ เรายังสามารถนิยามเพิ่มเติมในกรณีของ $r < 0$ หรือกรณี $r > n$ ได้เป็น

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n!}{r!(n-r)!} & \text{ถ้า } 0 \leq r \leq n \\ 0 & \text{ถ้า } r > n \text{ หรือ } r < 0 \end{cases}$$

และเรายังสามารถพิสูจน์เอกลักษณ์ต่างๆ ของค่าเชิงการจัดกลุ่มได้โดยใช้หลักการนับเข้ามาช่วย

แต่ว่าเรายังสามารถนิยามค่าของสัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ ได้ในอีกรูปแบบหนึ่งผ่านการพิจารณารูปแบบการกระจายของพหุนามทวินาม $(x+y)^n$ โดยเราจะพบว่าค่าเชิงการจัดกลุ่ม $\binom{n}{r}$ นั้นจะเป็นส่วนของค่าสัมประสิทธิ์

ของพหุนามที่ได้มาจากการกระจายพหุนามทวินามดังกล่าว ทำให้บ่อยครั้งสัญลักษณ์เชิงการจัดกลุ่มดังกล่าว อาจจะถูกเรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)

7.4.1 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินาม

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะได้ว่า

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

พิสูจน์โดยใช้หลักการนับ!

Example 7.4.1. (easy exercise)

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^2y^6 ที่ได้จากการกระจาย $(2x + y^2)^5$
2. จงใช้ทฤษฎีบททวินามหา $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$

Solution. ...

7.4.2 การใช้ทฤษฎีบททวินามในการพิสูจน์เอกลักษณ์เชิงการจัด

Example 7.4.2. จงแสดงว่า

1. $\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0$
2. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^{n-1}$
3. $\sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1}$
4. $*** \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$

Solution. ...

7.4.3 โจทย์ปัญหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจัดกลุ่ม

- Example 7.4.3.** 1. มีกี่วิธีในการเดินตามจุดพิกัดจำนวนเต็มจากจุด $(0, 0)$ ไปจุด $(11, 5)$ ใดๆ โดยที่เดินได้แค่ทิศขึ้นและทางขวาเท่านั้น
2. จากโจทย์ข้อที่ 1 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าต้องผ่านจุด $(4, 3)$ ก่อน จะเดินได้กี่วิธี
3. จากโจทย์ข้อที่ 1 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าต้องผ่านเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด $(2, 3)$ และ $(3, 3)$ ก่อน จะเดินได้กี่วิธี

Solution. ...

7.5 หลักการนำเข้า-ตัดออก

7.6 กฎเรียงนกพิราบ

7.7 Programming about Combinatorics

Chapter 8

Recurrence Relation

Chapter 9

Graph Theory

Part III

Basic Algorithm Design based upon Discrete Mathematics

Chapter 10

Recursive Algorithm - an approach to functional programming

Index

additive rule, 82

binomial coefficient, 97

combination, 94

multiplicative rule, 84

permutation, 88

การจัดกลุ่ม, 94

การเรียงสับเปลี่ยน, 88

จัดกลุ่ม, 94

สัมประสิทธิ์ทวินาม, 97

หลักการคูณ, 84

หลักการบวก, 82

เรียงสับเปลี่ยน, 88