Quantitative Analysis for Business

การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางธุรกิจ (1/2568)

Phaphontee Yamchote (phaphonteey@sau.ac.th)

Department of Information System for Business, Faculty of Business Administration

Southeast Asia University

September 9, 2025

Table of Contents

Appendices

Introduction

CHAPTER 1

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

โจทย์ธุรกิจ

บริษัท ABC Furniture เป็นบริษัทที่ผลิตและจำหน่ายเฟอร์นิเจอร์สำหรับบ้านและสำนักงาน โดยสินค้าหลักของบริษัทคือ โต๊ะทำงาน และ ตู้เก็บเอกสาร ซึ่งสินค้าทั้งสองชนิดนี้ได้รับความนิยมอย่างมาก จนกระทั่งฝ่ายผลิตเริ่มมีปัญหาในการจัดการวัตถุดิบและทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

ล่าสุด คุณได้รับการติดต่อจากคุณสมชาย ผู้จัดการฝ่ายการผลิตของบริษัท ABC Furniture ซึ่งให้ข้อมูลว่า:

ข้อความ

ช่วงที่ผ่านมา เราพบปัญหาด้านการผลิตที่สำคัญ คือบริษัทของเรามีทรัพยากรที่จำกัด ไม่ว่าจะเป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของแรงงาน รวมถึงปริมาณวัตถุดิบหลักที่ต้องใช้ในการผลิต แต่เรายังต้องการเพิ่มผลผลิตเพื่อให้สามารถตอบสนองความต้องการที่สูงขึ้นของตลาด

ในแต่ละสัปดาห์ โรงงานของเรามีแรงงานที่สามารถทำงานได้สูงสุด 1,000 ชั่วโมง โดยโต๊ะทำงานแต่ละตัวต้องใช้แรงงานในการประกอบ 4 ชั่วโมง ส่วนตู้เก็บเอกสารใช้ 3 ชั่วโมง

ด้านวัตถุดิบ เรามีไม้สำเร็จรูปที่ใช้ในการผลิตเพียง 800 หน่วยต่อสัปดาห์ โดยโต๊ะทำงาน 1 ตัวจะต้องใช้ไม้ 2 หน่วย และตู้เก็บเอกสารใช้ไม้ 1 หน่วย

ขณะนี้ บริษัทสามารถขายโต๊ะทำงานได้ในราคาตัวละ 2,000 บาท และตู้เก็บเอกสารราคา 1,500 บาท

ทางผู้บริหารอยากได้คำแนะนำจากคุณว่า เราควรจะผลิตโต๊ะทำงานและตู้เก็บเอกสารจำนวนอย่างละกี่ชิ้นต่อสัปดาห์ เพื่อให้บริษัทสามารถทำกำไรได้สูงสุดภายใต้ข้อจำกัดที่มีอยู่

ในฐานะนักวิเคราะห์เชิงปริมาณ คุณมีหน้าที่ช่วยเหลือบริษัท ABC Furniture

- ◇ เป้าหมายหลักของโจทย์นี้คืออะไร และวัดผลอย่างไร
- ◇ ข้อจำกัดมีอะไรบ้าง
- ◇ อะไรคือสิ่งที่เราจะต้องตอบให้แก่ลูกค้า
- ◇ ทำไมการผลิตทุกอย่างให้ได้จำนวนสูงสุด อาจไม่ใช่ทางเลือกที่ดีที่สุด?

บทนำ

ในการตัดสินใจทางธุรกิจที่มีประสิทธิภาพ การวิเคราะห์เชิงปริมาณเป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้ผู้บริหารสามารถประเมินทางเลือกต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการจัดสรรทรัพยากรอย่างเหมาะสม เช่น เวลา งบประมาณ หรือวัตถุดิบ หนึ่งในเทคนิคที่ได้รับความนิยมและใช้งานอย่างแพร่หลายในทางธุรกิจคือ “การกำหนดการเชิงเส้น” ซึ่งเป็นวิธีการเชิงคณิตศาสตร์ที่มุ่งเน้นการหาคำตอบที่ดีที่สุดภายใต้ข้อจำกัดที่กำหนดไว้ ย่อหน้าต่อไปนี้จะเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานของการกำหนดการเชิงเส้น พร้อมทั้งวิธีการสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาในโลกธุรกิจจริง

ทั้งนี้ คำว่าการโปรแกรมในที่นี้ไม่ได้หมายถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่เป็นรูปแบบปัญหาเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับแผนงานและคำสั่ง (program) ในกระบวนการงาน ดังนั้นจะไม่มีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใด ๆ เกิดขึ้นในบทนี้ อย่างมากที่สุดคือใช้เครื่องมือสำเร็จรูปใน Excel เพื่อแก้โจทย์ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้น

เนื้อหาในบทนี้จะเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจก่อนว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นคืออะไร และปัญหาที่มีลักษณะแบบใดบ้างที่จะสามารถใช้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นเข้ามาแก้ปัญหารวมไปถึงวิธีแปลงปัญหานั้นให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น หลังจากที่เราสร้างตัวแบบได้แล้วนั้น เราก็จะมาศึกษาแนวคิดเบื้องต้นของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการดูกราฟใน 2 และ 3 มิติกันก่อน เพื่อให้เห็นพฤติกรรมพื้นฐานที่จำเป็นต้องรู้เกี่ยวกับตัวปัญหากำหนดการเชิงเส้น ซึ่งในหัวข้อนี้จำเป็นจะต้องมีความรู้พื้นฐานในหัวข้อ A.1 ก่อน เพื่อที่จะได้วาดกราฟเส้นตรงเพื่อแก้ปัญหาได้ หลังจากนั้น เราจะขยายแนวคิดการแก้ปัญหาจากการใช้รูปภาพแก้ปัญหามาเป็นการแก้ด้วยขั้นตอนกระบวนการที่เรียกว่า Simplex และเมื่อเราเข้าใจแนวคิดของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นแล้ว เราจะปิดท้ายด้วยการใช้เครื่องมือสำเร็จรูปใน Excel เพื่อแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

1.1 ความหมายของการกำหนดการเชิงเส้น และการสร้างตัวแบบ

กำหนดการเชิงเส้น (linear programming) คือปัญหาทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าสุดขีด (ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด) ที่เรียกว่าการทำ optimization โดยที่มีทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และความสัมพันธ์เงื่อนไขอยู่ในรูปสมการหรืออสมการเชิงเส้น โดยองค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้นมีดังนี้

1. ฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) คือฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าของสิ่งที่เราอยากหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ที่กำหนดด้วยตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

2. เงื่อนไข (constraints) คือตัวกำหนดความเป็นไปได้ของเหล่าตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณฟังก์ชันจุดประสงค์

และเมื่อมีทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขแล้ว เราจะเขียนปัญหากำหนดการเชิงเส้นในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{objective function} \\ \text{s.t.} \quad & \text{constraint } 1 \\ & \text{constraint } 2 \\ & \quad \vdots \\ & \text{constraint } k \end{aligned}$$

สำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุด และในทำนองเดียวกันก็สามารถเขียนปัญหาการหาค่าสูงสุดได้โดยใช้

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{objective function} \\ \text{s.t.} \quad & \text{constraint } 1 \\ & \text{constraint } 2 \\ & \quad \vdots \\ & \text{constraint } k \end{aligned}$$

ทั้งนี้ สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์ และสมการหรืออสมการเงื่อนไขนั้นจะต้องอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น กล่าวคือต้องอยู่ในรูปที่ตัวแปรคูณกับค่าคงที่แล้วบวกหรือลบกันระหว่างตัวแปร

1.1.1 ลักษณะของปัญหาที่สามารถเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้

จากที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของความเป็นเชิงเส้นมาแล้วนั้น จะพบว่าคุณสมบัติหลัก ๆ ที่ช่วยตัดสินใจได้ว่าปัญหาแบบใดมีโอกาสที่จะเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

คุณสมบัติ 1.1: คุณสมบัติความเป็นอิสระเชิงเส้น (linear independence) ระหว่างตัวแปรในฟังก์ชันจุดประสงค์

กล่าวคือ การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลการเปลี่ยนแปลงที่คงที่กับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ถ้าตัวแปรอื่น ๆ ถูกกำหนดให้คงค่าเดิมไว้ ตัวอย่างเช่น เราอาจทราบว่าการเพิ่มขึ้นของของการลงทุนเพิ่มทุก ๆ 1 หน่วยเงิน จะเพิ่มกำไร (สิ่งที่เป็นค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์) ได้ 0.25 หน่วยเงิน ไม่ว่าจะลงทุนไปแล้วเท่าไหร่ก็ตาม ซึ่งในกรณีตัวอย่างนี้จะได้ว่า

$$\text{กำไร} = 0.25\text{เงินลงทุน} + \text{ค่าปัจจัยอื่น ๆ ที่คงตัวอยู่}$$

ซึ่ง “ค่าปัจจัยอื่น ๆ ที่คงตัวอยู่” หมายถึงค่าจากการคำนวณกำไรจากตัวแปรอื่น ๆ ซึ่งไม่ได้ถูกกล่าวถึงในบริบทนี้จึงถูกมองว่าไม่ได้เปลี่ยนแปลง

ทั้งนี้ จะเห็นว่าอัตราการเพิ่มขึ้นหรือลดลงที่คงตัวนั้น แท้ที่จริงแล้วก็เปรียบเสมือนเป็นความชันของการเพิ่มขึ้นตามแนวตัวแปรต้นนั้นนั่นเอง ดังนั้น ในกรณีที่มั่นใจแล้วว่าการเพิ่มหรือการลดค่าจุดประสงค์ขึ้นกับตัวแปรต้นที่เรามีในระบบเป็นการแปรผันตรงกัน ก็จะค่อนข้างมั่นใจได้ในระดับหนึ่งว่าปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น แต่ทั้งนี้ วิธีที่จะสามารถทำให้มั่นใจได้มากที่สุดว่าปัญหาที่มีเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นหรือไม่ ก็คือการเขียนตัวสมการคณิตศาสตร์ที่แสดงแทนฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไข (ที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อ A.4) ว่าอยู่ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นหรือไม่

ตัวอย่าง 1.1.1: ตัวอย่างปัญหารูปแบบกำหนดการเชิงเส้น

บริษัทประกอบชิ้นส่วนเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเวลาเหลืออยู่ในแต่ละแผนกดังนี้

- ◇ แผนกประกอบ มีเวลาเหลือ 50 ชั่วโมง (หรือ 3000 นาที)
- ◇ แผนกทดสอบ มีเวลาเหลือ 15 ชั่วโมง (หรือ 900 นาที)
- ◇ แผนกบรรจุ มีเวลาเหลือ 6 ชั่วโมง (หรือ 360 นาที)

ซึ่งทางบริษัทกำลังตัดสินใจว่าจะใช้เวลาของแต่ละแผนกที่เหลืออยู่ผลิตผลิตภัณฑ์ชิ้นใหม่ซึ่งมี 2 แบบคือแบบมาตรฐานและแบบพิเศษ ทั้งนี้แบบมาตรฐานใช้เวลาในการประกอบ 20 นาที, ทดสอบ 10 นาที และบรรจุ 3 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 250 บาทต่อชิ้น ในขณะที่แบบพิเศษใช้เวลาในการประกอบ 30 นาที, ทดสอบ 6 นาที และบรรจุ 3 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 290 บาทต่อชิ้น บริษัทต้องการหาว่าจะต้องผลิตสินค้าแต่ละชนิดเท่าไหร่ให้ได้กำไรมากที่สุด แต่ทั้งนี้เนื่องจากเรายังไม่ได้เรียนวิธีการแก้ปัญหา เราจึงทำปัญหาให้ง่ายขึ้นก่อนดังนี้

1. ถ้าผลิตแบบมาตรฐานอย่างเดียวจะผลิตได้กี่ชิ้นมากสุดและได้กำไรเท่าไหร่
2. ถ้าผลิตแบบพิเศษอย่างเดียวจะผลิตได้กี่ชิ้นมากสุดและได้กำไรเท่าไหร่
3. ถ้าเปลี่ยนไปผลิตแบบอื่นโดยมห้นักศึกษาลองสุ่มเลขมาชุดหนึ่งและยืนยันว่าผลิตได้จริงตามเงื่อนไข และหาว่าได้กำไรเท่าไหร่ และถ้ายังเหลือเวลามากพอให้ลองเพิ่มการผลิตเข้าไปอีกจนไม่เหลือเวลาให้ผลิตเพิ่มได้อีกแล้ว

1.1.2 การสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น

อย่างที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อ A.4 สิ่งที่สำคัญที่สุดที่ต้องทำให้ได้คือการระบุตัวแปรตัดสินใจ ฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขต่าง ๆ ให้ได้ และเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบภาษาคณิตศาสตร์ ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะมาฝึกทำไปตามตัวอย่างกัน

ตัวอย่าง 1.1.2

จากกรณีตัวอย่าง 1.1.1 จงเขียนตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

1. ตัวแปรตัดสินใจที่เกี่ยวข้องมีอะไรบ้าง
2. ค่าเป้าหมายที่ต้องการหาค่าสุดขีดคืออะไร และต้องการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด
3. ฟังก์ชันจุดประสงค์คืออะไร
4. มีทั้งหมดกี่เงื่อนไขและเงื่อนไขอะไรบ้าง
5. เขียนเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปของสมการ/อสมการคณิตศาสตร์
6. ปัญหาที่ได้เป็นปัญหาเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าเป็นจงเขียนให้อยู่ในรูปปัญหาการกำหนดเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1.1.3: ตัวอย่างการผลิตเพื่อให้ได้ยอดขายสูงสุด

โรงงานผลิตชิ้นส่วนรถยนต์ต้องการวางแผนการผลิตชิ้นส่วน X และชิ้นส่วน Y โดยมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 4 เครื่อง และใช้เหล็ก ไฟฟ้าและแรงงานในการผลิตดังนี้

กระบวนการ	ปริมาณที่ผลิตได้		ความต้องการ		
	X	Y	เหล็ก	ไฟฟ้า	แรงงาน
1	4	0	100 kg	800 kWh	16 hrs
2	0	1	70 kg	600 kWh	16 hrs

ในแต่ละวัน โรงงานจะมีเหล็กให้ใช้ไม่เกิน 6000 กิโลกรัม มีปริมาณไฟฟ้าที่ใช้ได้ไม่เกิน 100000 กิโลวัตต์ และใช้แรงงานคนงานรวมกันได้ไม่เกิน 1000 ชั่วโมง สมมติว่าชิ้นส่วน X ขายได้ 1000 บาทต่อชิ้น ในขณะที่ชิ้นส่วน Y ขายได้ 1800 บาทต่อชิ้น และโรงงานนี้ต้องการจัดการผลิตให้มียอดขายสูงที่สุดเท่าที่จะทำได้

วิธีทำ:

ขั้นที่ 1: กำหนดตัวแปร: เนื่องจากในโจทย์ข้อนี้ เราต้องตัดสอนใจว่าจะผลิตกระบวนการใดเป็นจำนวนเท่าไหร่บ้าง เราจึงต้องให้ตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนกระบวนการที่ใช้งาน โดยกำหนดให้

$$a = \text{จำนวนหน่วยการใช้งานกระบวนการที่ 1}$$
$$b = \text{จำนวนหน่วยการใช้งานกระบวนการที่ 2}$$

ขั้นที่ 2: เขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยสิ่งที่เป็นเป้าหมายของโจทย์ธุรกิจนี้คืออยาก maximize ยอดขายให้สูงที่สุด แต่การจะรู้ยอดขายได้นั้น เราต้องรู้ก่อนว่าเราผลิตชิ้นส่วน X และผลิตชิ้นส่วน Y ได้กี่ชิ้น และเนื่องจากชิ้นส่วน X ขายได้ชิ้นละ 1000 บาท จึงจะได้ว่ายอดขายจากชิ้นส่วน X คือ

$$\text{ยอดขาย} = 1000\left(\text{จำนวนชิ้น X ที่ขายได้}\right) + 1800\left(\text{จำนวนชิ้น Y ที่ขายได้}\right)$$

แต่เนื่องจากจำนวนชิ้นที่จะผลิตได้ขึ้นกับการตัดสินใจว่าเราจะผลิตกระบวนการใดกี่กระบวนการบ้าง ตัวอย่างเช่นถ้าเราผลิตด้วยกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน 1 หน่วย เราจะผลิต X ออกมาได้ 4 ชิ้นภายในคราวเดียว ดังนั้นถ้าเราสั่งทำกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน a หน่วย เราจะได้ชิ้นส่วน X ออกมา $4a$ ชิ้น ทำนองเดียวกัน ผลผลิตที่ได้จากกระบวนการที่ 2 คือ ชิ้นส่วน Y เป็นจำนวน b ชิ้น จึงได้ว่า

$$\text{ยอดขาย} = 1000\,(4a) + 1800\,(b) = 4000a + 1800b \qquad [1]$$

ขั้นที่ 3: เขียนอสมการเงื่อนไข โดยจากโจทย์จะได้ว่ามีเงื่อนไขอยู่ 3 เงื่อนไข คือเงื่อนไขการใช้เหล็ก เงื่อนไขการใช้

ไฟฟ้า และเงื่อนไขแรงงาน

$$\text{เหล็ก:} \quad 100a + 70b \leq 6000 \quad [2]$$

$$\text{ไฟฟ้า:} \quad 800a + 600b \leq 100000 \quad [3]$$

$$\text{แรงงาน:} \quad 16a + 16b \leq 1000 \quad [4]$$

จึงได้กำหนดการเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4000a + 1800b \\ \text{s.t.} \quad & 100a + 70b \leq 6000 \\ & 800a + 600b \leq 100000 \\ & 16a + 16b \leq 1000 \\ & a, b \geq 0 \end{aligned}$$

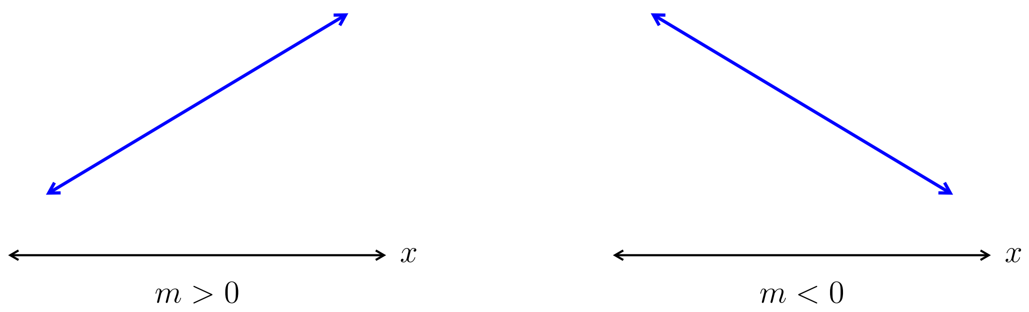
□

1.2 แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

หลังจากที่เราสามารถสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นได้แล้ว สิ่งที่จะต้องทำต่อมาก็คือการหาผลเฉลยของปัญหานั้น ซึ่งแนวคิดหลักของการทำกำหนดการเชิงเส้นเป็นสิ่งที่ไม่ได้ซับซ้อนมากนัก ถ้าพิจารณาในกรณี 1 ตัวแปรหรือ 2 ตัวแปร เพราะเป็นกรณีที่ยังคงวาดกราฟได้ และการศึกษาจากกรณีเล็ก ๆ นี้ก็จะสามารถนำพาเราไปสู่แนวคิดที่ทั่วไปมากขึ้นได้

1.2.1 กรณี 1 ตัวแปรตัดสินใจ

ขอเริ่มจากกรณีที่ชัดเจนและตรงไปตรงมามากที่สุดก่อน ซึ่งก็คือกรณี 1 ตัวแปร ซึ่งจะสามารถวาดทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และความสัมพันธ์เงื่อนไขได้โดยง่ายในกราฟ 2 มิติ องค์ประกอบแรกสุดคือฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x)$ โดยที่ x เป็นตัวแปรตัดสินใจ ดังนั้น หน้าตาของสมการจะอยู่ในรูป $f(x) = mx + c$ และแน่นอนว่ามีความเป็นไปได้หลัก ๆ อยู่ 2 แบบคือเส้นตรงความชันบวก กับเส้นตรงความชันลบดังรูป



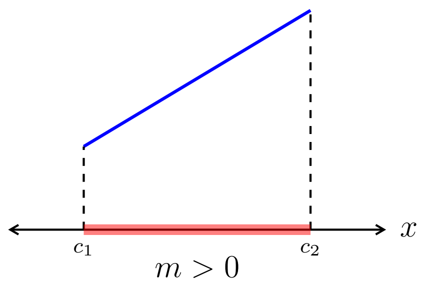
จากรูป จะพบว่าการแก้ปัญหาหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของจะง่ายอย่างมาก เพราะการเดินทางมีแค่ซ้ายและขวา โดยด้านใดด้านหนึ่งจะให้ค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ และอีกด้านหนึ่งจะให้ค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ดังนั้น เพียงแค่เราทราบว่าต้องเดินไปทางไหนเพื่อให้เป็นไปตามที่เราต้องการ เราก็จะได้คำตอบมาได้โดยง่าย

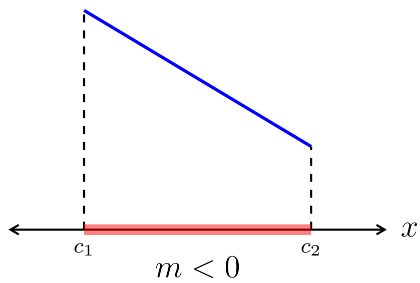
แต่ทว่าในปัญหากำหนดการเชิงเส้น จะต้องมีเงื่อนไขเข้ามาพิจารณาด้วย เพราะถ้าไม่มีเงื่อนไขมาพิจารณา เราจะสามารถลดค่าหรือเพิ่มค่าเส้นตรงได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุด เพราะเราก็สามารถเดินทางไปทางขวาได้ไม่มีที่สุด และเดินทางไปทางซ้ายได้ไม่มีที่สิ้นสุดเช่นกัน ซึ่งเราเรียกรูปแบบการไม่มีผลเฉลยแบบนี้ว่ากรณีไม่มีขอบเขต (unbounded) กล่าวคือ เป็นกรณีที่มีค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (ถ้ามี) แต่ไม่มีผลเฉลยที่ทำให้ต่ำที่สุด หรือสูงที่สุดได้เพราะยังหาค่าที่สูงกว่าได้เรื่อย ๆ หรือหาค่าที่ต่ำกว่าได้เรื่อย ๆ เนื่องจากขอบเขตการเพิ่มหรือการลดไม่มีขีดจำกัด

แต่เนื่องจากเงื่อนไขของ 1 ตัวแปรเป็นเพียงได้แค่ 3 แบบเท่านั้นดังนี้

- ◇ สมการจุดเดียว $x = c$ (ในที่นี้ c คือค่าคงที่) ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีอะไรน่าสนใจ เพราะมีเพียงผลเฉลยเดียว ไม่ต้องทำการหาค่าสุดขีดใด ๆ
- ◇ แบบอสมการ และได้เป็นขอบเขต ซึ่งมีได้ 3 แบบย่อย ได้แก่
  - $x \leq c$
  - $x \geq c$
  - $c_1 \leq x \leq c_2$

แต่ในที่นี้ขอให้พิจารณาแค่เฉพาะกรณีที่การันตีการมีผลเฉลยสุดขีดแน่ ๆ ก็คือกรณีที่ขอบเขตเงื่อนไขการพิจารณาตัวแปรมีขอบเขตทั้งซ้ายและขวา $c_1 \leq x \leq c_2$





ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่า**ค่าสุดขีดจะเกิดขึ้นที่ตรงขอบเสมอ** (แต่จะเป็นด้านซ้ายหรือด้านขวานั้น จะขึ้นอยู่กับรูปแบบการเพิ่มหรือการลดของฟังก์ชัน)

1.2.2 กรณี 2 ตัวแปรตัดสินใจ: ฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นระนาบ 3 มิติบนบริเวณผลเฉลย 2 มิติ

ขอขยับเพิ่มขึ้นมาอีก 1 มิติ นั่นคือฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปร $z = f(x, y)$ ซึ่งฟังก์ชันเชิงเส้น 2 ตัวแปร จะวาดกราฟใน 3 มิติได้เป็นแผ่นระนาบที่ได้เรียนไปในหัวข้อ A.1.1.2 ทว่า สิ่งที่ทำให้กรณีนี้ยากกว่ากรณี 1 ตัวแปรคือบริเวณการตัดสินใจจะเป็นพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม 2 มิติ ซึ่งไม่ได้มีการเดินแค่ซ้ายหรือขวาเหมือนกรณีที่ผ่านมา จึงทำให้ตัดสินใจได้ยากขึ้นอีกระดับว่าการเดินไปทางใดจะให้ค่าที่มากขึ้น

คำเตือน: สำหรับหัวข้อนี้ อาจจะต้องใช้ความรู้เรขาคณิตวิเคราะห์ 3 มิติและแคลคูลัสสำหรับเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติเพื่อทำความเข้าใจ แต่ถ้านักศึกษาไม่เคยเรียนมาก่อนสามารถข้ามส่วนอธิบายที่มา แล้วเชื่อคุณสมบัติต่าง ๆ ดังนี้ได้เลย

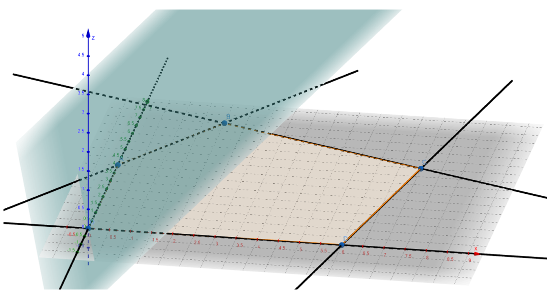
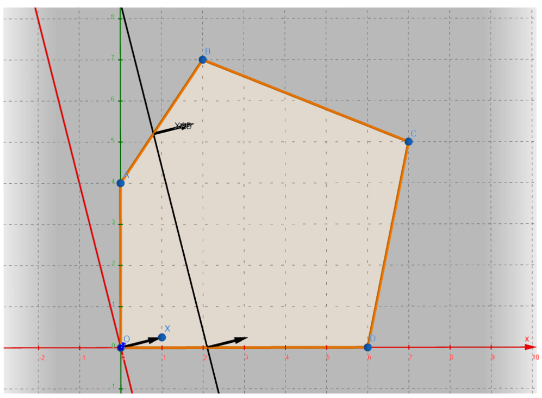
คุณสมบัติ 1.2: คุณสมบัติของระนาบ 3 มิติบนพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม

กำหนดสมการแผ่นระนาบ $P : z = Ax + By + k$ ซึ่งมีจะมีเวกเตอร์ $\langle A, B\rangle$ เป็นเวกเตอร์ทิศการไต่ระดับ

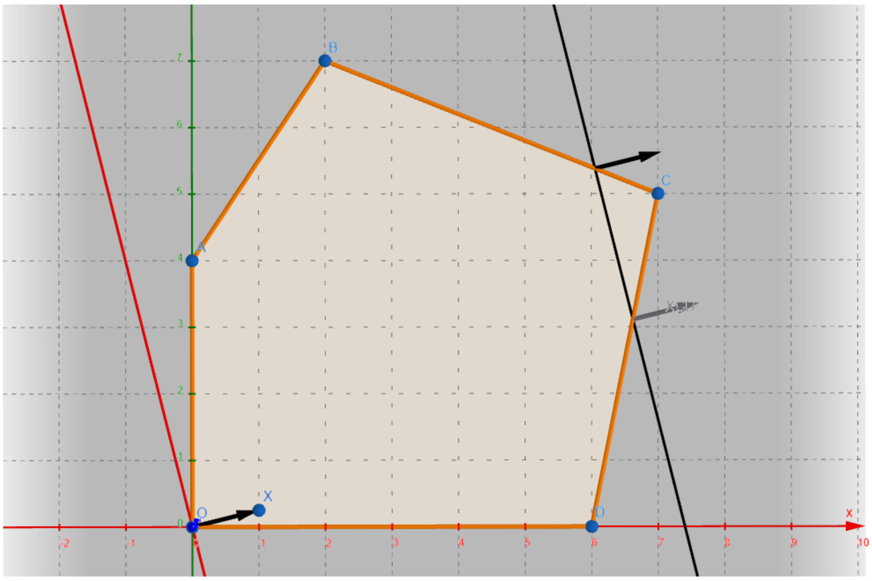
1. แนวสันของระนาบ P (แนวการเดินบนระนาบที่ไม่มีการเปลี่ยนความสูง) คือแนวเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle A, B\rangle$ กล่าวคือ ถ้าเดินไปตามทิศของเวกเตอร์ $\langle A, B\rangle$ จะเป็นทิศที่มีการเปลี่ยนค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุด แล้วลดทอนลงไปตามมุมที่หันออกจากแนวดังกล่าว จนจะไม่มีการเพิ่มค่าหรือลดค่าลงเมื่อหันตั้งฉากไปทางซ้ายและทางขวา
2. เมื่อยืนอยู่บนเส้นขอบของบริเวณตัดสินใจหนึ่ง จะมีทิศที่ลากเวกเตอร์จากจุดที่ยืนหนึ่งทำมุมแหลมกับเวกเตอร์ทิศการไต่ระดับ ในขณะที่อีกด้านจะทำมุมป้านกับทิศการไต่ระดับ ซึ่งค่า z จะมากขึ้นถ้าเราเดินไปตามทิศที่ทำมุมแหลม กล่าวคือ จะต้องมีทิศหนึ่งที่ให้ค่า z มากขึ้น และในขณะที่อีกทิศหนึ่งให้ค่า z ที่น้อยลง
3. เพราะฉะนั้น ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีผลเฉลยสุดขีดแล้วจุดผลเฉลยดังกล่าวจะอยู่ที่จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งเสมอ

ตัวอย่างเช่นปัญหากำหนดการเชิงเส้น

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x + 0.25y \\
\text{s.t.} \quad & x \geq 0 \\
& y \geq 0 \\
& y \leq 1.5x + 4 \\
& y \leq -0.4x + 7.8 \\
& y \geq 5x - 30
\end{aligned}
$$

ซึ่งถ้าใช้แนวคิดการไต่เขาตามให้ขนานกับแนวการไต่ระดับ จะพบว่าจุดสุดท้ายที่จะไต่ขึ้นไปได้คือจุด C ด้วยการลากเส้นไต่ระดับขึ้นไปเรื่อย ๆ ดังรูป และนอกจากวิธีการเลื่อนเส้นไต่ระดับแล้ว อีกวิธีที่ง่ายคือการลองแทนค่าทุกจุดยอดเพื่อคำนวณค่าจุดประสงค์แล้วเปรียบเทียบว่าค่าใดมากที่สุดหรือน้อยที่สุด



ตัวอย่าง 1.2.1: โจทย์สำรวจคุณสมบัติ 1.2

พิจารณาโจทย์กำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x + 0.25y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & y \leq 1.5x + 4 \\ & y \leq -0.4x + 7.8 \\ & y \geq 5x - 30 \end{aligned}$$

1. จงแสดงว่าสมการเส้นตรงที่ระบุแนวหน้ากระดานการไต่ระดับ (เส้นที่เลื่อนตามรูปด้านบน) ที่ตัดแกน y ที่ $y = c$ มีสมการเป็น $y = -4x + c$ กล่าวคือ แนวเส้นตรงที่มีความชัน -4 จะเป็นแนวที่ระนามมีค่าคงที่
2. เมื่อพิจารณาบนแนวเส้นที่ทำให้ระนาบมีค่าคงที่ $y = -4x + 8$ เป็นตัวอย่าง จงหาจุดตัดของเส้นดังกล่าวกับเส้นตรง $y = 1.5x + 4$ กับเส้นตรง $y = 0$
3. จากจุดตัดที่ได้ในข้อที่ผ่านมา (ซึ่งมี 2 จุด) จงแสดงว่าทั้งสองจุดดังกล่าวให้ค่า $z = x + 0.25y$ เป็น $z = 2$
4. เมื่อ พิจารณา บน แนว เส้น ที่ ทำให้ ระนาบ มี ค่า คงที่ $y = -4x + c$ จง แสดง ว่า ค่าคงที่ของระนาบคือ $z = 0.25c$

ตัวอย่าง 1.2.2: แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 ตัวแปรด้วยการวาดภาพ

จงแก้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.1.1 ด้วยวิธีวาดภาพ โดยพิจารณาค่าสูงสุดทั้งวิธีการไต่ระดับ และวิธีการลองแทนค่าทุกจุดยอด

ตัวอย่าง 1.2.3: แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 ตัวแปรด้วยการวาดภาพ

จงแก้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.1.3 ด้วยวิธีวาดภาพ โดยพิจารณาค่าสูงสุดทั้งวิธีการไต่ระดับ และวิธีการลองแทนค่าทุกจุดยอด

วิธีทำ: จากข้อที่ผ่านมา เราได้มาแล้วว่ากำหนดการเชิงเส้นคือ

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4000a + 1800b \\ \text{s.t.} \quad & 100a + 70b \le 6000 \\ & 800a + 600b \le 100000 \\ & 16a + 16b \le 1000 \\ & a, b \ge 0 \end{aligned}$$

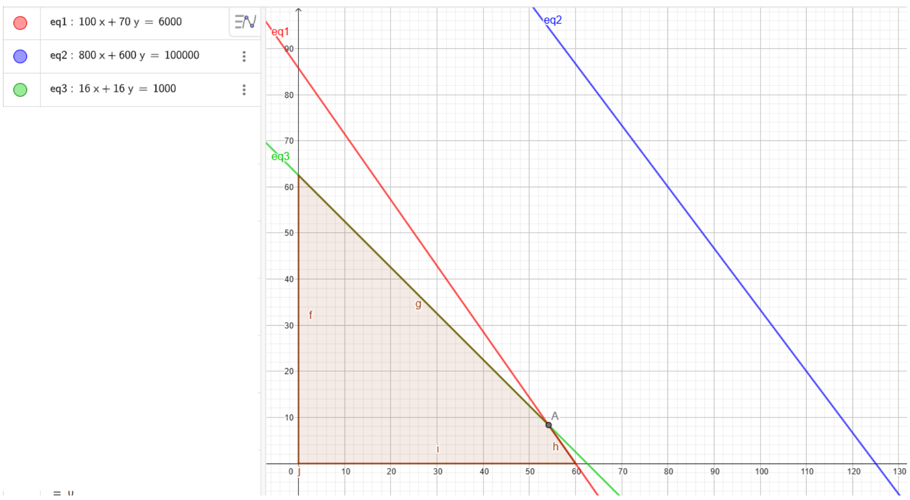
ขั้นที่ 1: วาดรูปภาพเงื่อนไข โดยเรามี 3 เงื่อนไขดังนี้

- $100a + 70b = 6000$
- $800a + 600b = 100000$
- $16a + 16b = 1000$

ซึ่งทำได้โดยการหาจุดตัดแกน ซึ่งจะได้ดังนี้

สมการ	จุดตัดแกน x (a)	จุดตัดแกน y (b)
$100a + 70b = 6000$	60	600/7 $\approx$ 85.71
$800a + 600b = 100000$	125	$\approx$ 166.67
$16a + 16b = 1000$	62.5	62.5

และถ้าหาจุดตัดจากสมการที่



1 และสมการที่ 3 ที่ตัดกันจะได้จุด $\approx (54.17, 8.33)$

ขั้นที่ 2: แทนค่าจุดมุมลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์มากที่สุด

(a, b)	ยอดขาย $= 4000a + 1800b$
$(0, 62.5) \approx (0, 62)$	111600
$(54.17, 8.33) \approx (54, 8)$	230400
$(60, 0)$	240000
$(0, 0)$	0

ขั้นที่ 3: สรุปคำตอบ จะได้ค่ายอดขายมากสุดเท่ากับ 240000 เกิดขึ้นที่จุด $(60, 0)$ กล่าวคือผลิตกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน 60 เครื่อง และไม่ผลิตกระบวนการที่ 2 เลย

หมายเหตุ 1: โจทย์เพิ่ม

จะเห็นว่ากระบวนการที่ 2 ไม่ถูกใช้งานเลย ซึ่งอาจไม่เป็นที่พึงพอใจกับฝ่ายจัดซื้อที่ลงทุนไปกับการซื้อเครื่องมือสำหรับกระบวนการที่ 2 ไปแล้ว (เช่นกรณีกระบวนการที่ 2 เป็นเรื่องของเครื่องจักร) แต่เมื่อฝ่ายการตลาดทำการสำรวจเพิ่มเติม พบว่าเรายังสามารถทำสินค้า Y ให้มีภาพลักษณ์ที่พรีเมียมมากขึ้นเพื่อเปลี่ยนกลุ่มลูกค้าไปกลุ่มที่กำลังจ่ายสูงขึ้นได้ (เนื่องจากผลิตได้น้อยเมื่อเทียบกับ X ที่ผลิตได้ 4 ชิ้นต่อครั้งของกระบวนการที่ 1) ดังนั้นฝ่ายการตลาดจึงมาถามเราที่เป็นที่ปรึกษาทางธุรกิจว่าควรตั้งราคาขายสินค้า Y ให้อยู่ในช่วงราคาเท่าไหร่เพื่อให้ผลเฉลยที่ให้ยอดขายสูงสุดมาจากการใช้ทั้งเครื่องจักรของกระบวนการที่ 1 และเครื่องจักรของกระบวนการที่ 2

นอกจากการปรับราคาแล้ว ยังมีทางเลือกอื่นใดบ้างในการปรับปรุงแบบจำลองให้ยังคงใช้ทั้ง 2 กระบวนการ โดยที่ไม่ต้องปรับราคา (แต่อาจจะได้ยอดขายรวมน้อยลงบ้างก็ยังยอมรับได้)

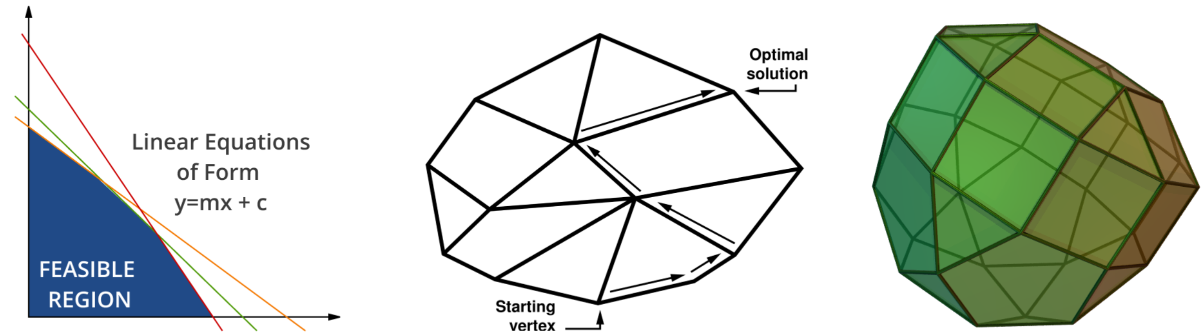
□

1.3 แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

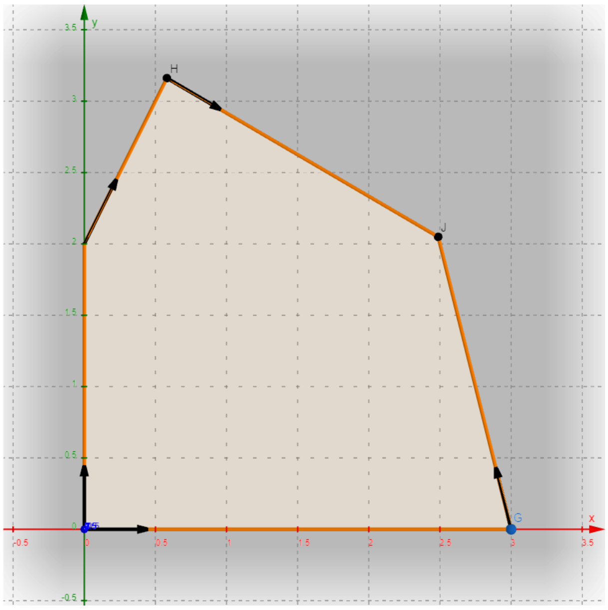
ในหัวข้อที่แล้ว เราศึกษาวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการรูปภาพ ซึ่งข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวคือเราจะสามารถแก้ปัญหาได้แค่กรณี 2 ตัวแปร และจริง ๆ แล้ว เราสามารถทำกับปัญหา 3 ตัวแปรก็ได้เช่นกันแต่จะวาดภาพยากกว่า เพราะต้องดูขอบเขตผลเฉลยใน 3 มิติ แต่ว่าถ้า 4 ตัวแปรเป็นต้นไปเราจะไม่สามารถวาดภาพได้อีกแล้ว ทำให้วิธีการดังกล่าวใช้ไม่ได้อีกต่อไป

เครื่องมือที่จะใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นสำหรับกรณีใด ๆ ก็ตามที่จะศึกษาในหัวข้อนี้คือวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) ซึ่งเป็นกระบวนการในการใช้การดำเนินการทางเมทริกซ์เพื่อการเปลี่ยน pivot ที่จะให้ค่าสูงขึ้นเรื่อย ๆ ไล่ไปตามขอบของรูป โดยอาศัยคุณสมบัติตามที่เราได้ศึกษามาในกรณี 2 มิติว่าการเดินตามขอบบนบริเวณที่เป็นรูปนูน (convex) จะพาเราไปจุดผลเฉลยค่าสุดขีดได้แน่ ๆ

ทั้งนี้ สิ่งหนึ่งที่ต้องเน้นย้ำสำหรับขั้นตอนกระบวนการนี้คือสมมติฐานการเป็นรูปนูน เพราะอัลกอริทึมที่กำลังจะได้ศึกษาอาศัยการเดินตามเส้นขอบตามทิศทางที่มีค่าเพิ่มได้ ซึ่งเงื่อนไขที่การันตีการไปจุดผลเฉลยสุดขีดได้คือการเป็นรูปนูนที่ทำให้



2D Visualization 3D Visualization

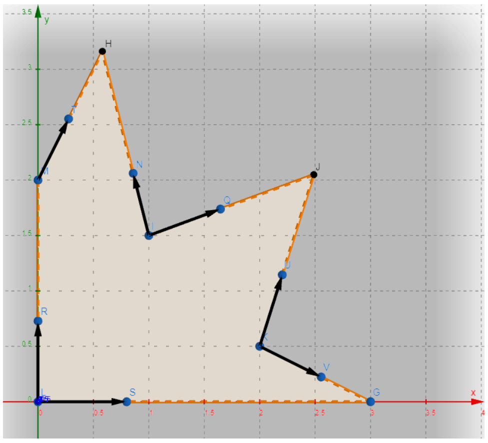


เราไต่ระนาบขึ้นได้เรื่อย ๆ เสมอตามรูปด้านบนที่เราสามารถเดินทางจากจุด O ไปที่จุด J ที่เป็นผลเฉลยได้ แต่ถ้ารูปพื้นที่เป็นไปได้ไม่ใช่รูปนูน อาจทำให้เกิดปัญหาที่เรียกว่าการติดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (local extrema) ตามรูปด้านล่าง ซึ่งถ้าเริ่มที่จุด O จะเดินไปได้ไกลสุดแค่จุด H หรือจุด G เท่านั้นตามแนวคิดเบื้องต้นของ simplex แต่ในวิชานี้ เราจะโฟกัสไปแค่ที่โจทย์ที่พื้นที่ผลเฉลยเป็นรูปนูนอยู่แล้ว ดังนั้นนักศึกษาจึงไม่ต้องกังวลเรื่องสมมติฐานดังกล่าว

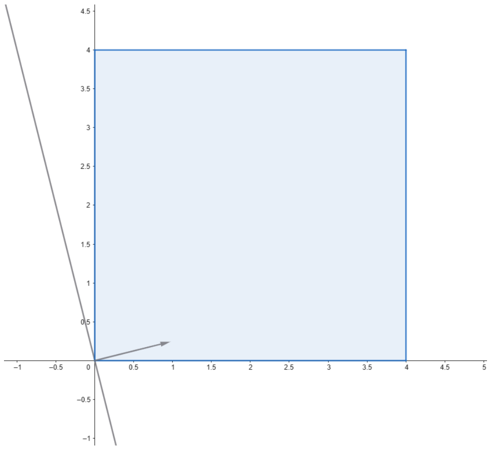
แนวคิดเชิงการคำนวณ (อ่านนอกเวลาเพิ่มเติม): wait revise again

จะขอเริ่มจากตัวอย่างที่ง่ายเพื่อพาไปดูหลักการคิดทีละขั้น (สำหรับนักศึกษาที่สนใจ simplex method เลยสามารถข้ามหัวข้อนี้ได้) โดยปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่จะพิจารณาคือ

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 4 \\ & y \leq 4 \end{aligned}$$



และมีบริเวณการพิจารณาตามรูปด้านล่างนี้ ในรูปจะมีเวกเตอร์แนวการไต่ระดับของระนาบอยู่ และจะเห็นว่าจุด $(4, 4)$ ควรเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดแน่นอน



แต่รูปแบบอสมการนั้นเป็นรูปแบบที่ไม่เหมาะกับการแก้ปัญหาในเชิงการคำนวณ ทำให้เราต้องเปลี่ยนรูปแบบการเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการเท่ากับ ซึ่งอาศัยคุณสมบัติของระบบจำนวนว่า

คุณสมบัติ 1.3: เปลี่ยนอสมการเป็นสมการ

$x \leq a$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง s ที่เป็นบวกหรือศูนย์ที่ทำให้ $x + s = a$

ซึ่งตัวแปร s ในที่นี้มีชื่อเรียกว่าตัวแปรส่วนเกิน (slack variable)

ซึ่งแน่นอนว่าตัวแปรส่วนเกินนี้จะเป็นเพียงแค่ตัวแปรที่เพิ่มเข้ามาในเงื่อนไข ไม่มีผลต่อค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ ดังนั้น

เหล่าบรรดาเงื่อนไขอสมการจะต้องมีการเติมตัวแปรส่วนเกินเพื่อทำให้เป็นเงื่อนไขสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + y + 0s_1 + 0s_2 \\ \text{subject to} \quad & x, y, s_1, s_2 \geq 0 \\ & x + s_1 = 4 \\ & y + s_2 = 4 \end{aligned}$$

หมายเหตุสำคัญตัวแปรทุกตัวจะต้องไม่ต่ำกว่า 0 เป็นเงื่อนไขบังคับ

ทีนี้ จะขอกล่าวถึงความหมายของตัวแปรส่วนเกินเชิงรูปภาพกันก่อนว่าคืออะไรในรูปภาพ ทั้งนี้อย่าลืมว่า simplex method คือการเดินตามขอบจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่ง เพราะฉะนั้น เราจะพิจารณาแค่จุดตามขอบเท่านั้น รูปภาพด้านล่างนี้เป็นตัวอย่างค่าตัวแปรของจุดตามตำแหน่งขอบต่าง ๆ ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร s_1 ที่เป็นตัวแปรส่วนเกินของตัวแปร x คือตัวแปรที่จะเติมเต็มให้ x เดินไปถึงจุดยอดได้ และถ้าพิจารณาตามจุดยอดต่าง ๆ ก็จะพบว่าระหว่างตัวแปรของปัญหาและตัวแปรส่วนเกินที่คู่กันนั้นจะต้องมีอย่างน้อย 1 ตัวที่แปรที่มีค่าเป็น 0 ตัวอย่างเช่นการเดินตามขอบด้านล่างของรูปภาพในตัวอย่างนี้คือการแลกค่ากันระหว่าง x และ s_1 โดยสมการ $x + s_1 = 4$ ที่จุดยอดซ้ายคือจุดที่ $x = 0, s_1 = 4$ ในขณะที่จุดด้านขวาคือจุดที่ $x = 4, s_1 = 0$ กล่าวคือ การเดินตามขอบของบริเวณที่เป็นไปได้จากจุดยอดไปอีกจุดยอดก็คือการพยายามแลกเปลี่ยนค่าของตัวแปรส่วนเกินให้เป็น 0 นั่นเอง

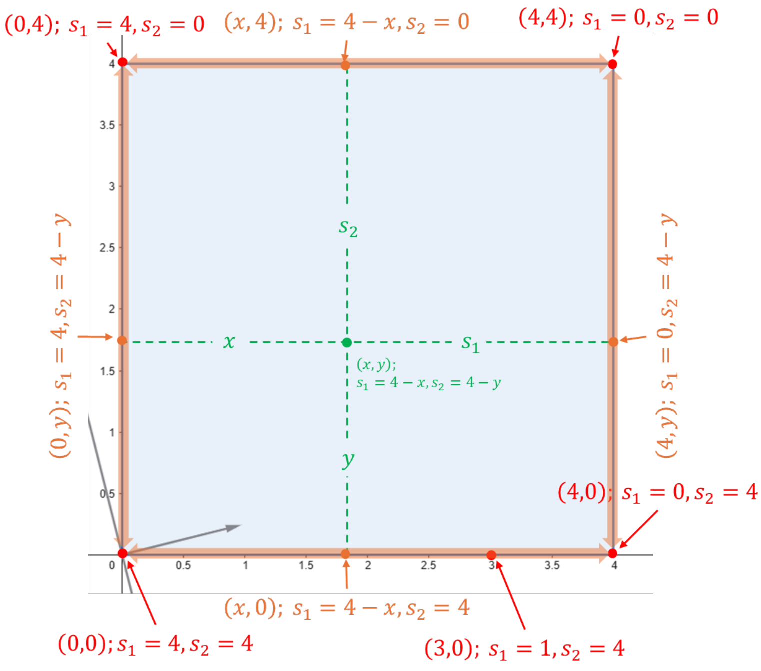


Figure 1.1. Enter Caption

จากที่กล่าวไปสักครู่ คือวิธีการเดินทางกรณีที่รู้แล้วว่าจะเดินตามขอบใด คำถามต่อมาคือ เมื่อเรายืนอยู่ที่จุดยอดหนึ่งจะรู้ได้อย่างไรว่าต้องเดินไปทางไหน ตัวอย่างเช่นถ้าเรากำลังยืนอยู่ที่จุด $(0, 0)$ จะรู้ได้อย่างไรว่าต้องเดินตามขอบแนวตั้งไปที่ $(0, 4)$ หรือตามขอบแนวนอนไปที่ $(4, 0)$ ซึ่งถ้าอาศัยความรู้ในวิชาแคลคูลัสในแง่ของการดูอัตราการเปลี่ยนแปลง จะทราบได้ทันทีว่าต้องเดินตามแนวแกน x เพราะแนวการเดินใกล้กับเวกเตอร์ระบุทิศทางของระนาบมากที่สุด ซึ่งจริง ๆ แล้ว

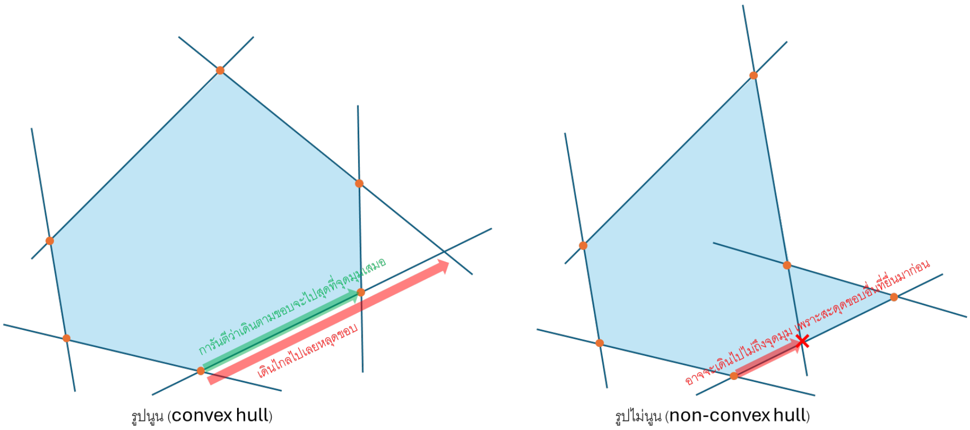


Figure 1.2. Enter Caption

ก็สามารถดูได้โดยง่ายจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการ $z = 4x + y + 0s_1 + 0s_2$ ที่หมายความว่าการเดินตาม x จะเปลี่ยนค่า z เป็นระยะ 4 หน่วยเมื่อเพิ่ม x ไป 1 หน่วย ในขณะที่ถ้าเดินตาม y จะเปลี่ยนค่าแค่ 1 หน่วยเท่านั้น

ดังนั้น เราจึงสามารถตัดสินใจได้ว่าเราจะเดินตาม x โดยจากเดิมที่ตรึง $x = 0, y = 0$ เราจะเปลี่ยนไปตรึง $s_1 = 0, y = 0$ ซึ่งลักษณะการพิจารณาชุดตัวแปรในลักษณะนี้เราจะเรียกว่าชุดตัวแปรพื้นฐาน (basic variables) ซึ่งคือชุดตัวแปรที่จะถูกมองให้มีค่าเป็น 0 เพื่อใช้คำนวณค่าตัวแปรที่ไม่ใช่ตัวแปรพื้นฐาน (non-basic variables) กล่าวคือ จากเดิมที่เรากำหนดระบบเป็น $s_1 = 4 - x$ และ $s_2 = 4 - y$ โดยที่ $x = 0, y = 0$ จะโดนเปลี่ยนการพิจารณาระบบเป็น $x = 4 - s_1$ และ $s_2 = 4 - y$ โดยที่ $s_1 = 0, y = 0$ ซึ่งเรียกการดำเนินการนี้ว่าการหมุนตัวแปรหลัก (pivot change) จากเดิมที่ s_1, s_2 เป็นตัวแปรหลัก (pivot variable) เราจะเปลี่ยนระบบให้ x, s_2 เป็นตัวแปรหลักแทน

สำหรับการดำเนินการหมุนตัวแปรหลัก ตัวแปรหลักจะไม่สามารถมีเพิ่มได้ ในตัวอย่างจะมีได้แค่ 2 ตัวแปร ดังนั้น การจะนำตัวแปรใหม่เข้ามาเป็นตัวแปรหลัก จึงต้องมีการนำ pivot ตัวเก่าออกหนึ่งตัว ซึ่งจะตามมาด้วยคำถามว่ารู้ได้อย่างไรว่าต้องเอา s_1 ออกจากการเป็นตัวแปรหลักแล้วนำ x มาแทนที่ ซึ่งแนวคิดที่ใช้ในการเดินทางจริง ๆ เป็นเรื่องการเดินตามแนวตัวแปรหลักใหม่อย่างไรให้ไม่หลุดออกจากขอบ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าถ้าเดินให้สั้นที่สุดเท่าที่จำเป็นเพื่อจะไปเจอขอบหนึ่งจะการันตีได้ว่าเราจะไม่เดินหลุดขอบแน่นอน ซึ่งคุณสมบัติของการเป็นรูปนูนคือจะไม่มีเส้นขอบใดที่ลากต่อแล้วตัดภายในพื้นที่เสมอดังรูปด้านล่างนี้ เพราะฉะนั้น ในทางปฏิบัติที่เราอาจไม่เห็นรูปภาพ เราจึงต้องเลือกการเดินที่สั้นที่สุดเอาไว้ก่อนเพื่อให้ไม่หลุดขอบถึงแม้จะไม่ใช่ทางที่เร็วที่สุดก็ตาม และเมื่อทราบแล้วว่าต้องเดินไปชนขอบใด จึงค่อยพิจารณาว่าขอบนั้นเป็นขอบประชิดของตัวแปรส่วนเกินตัวไหน

จากตัวอย่างที่เรากำลังพิจารณาอยู่นั้น เราทราบแล้วว่าเราต้องเดินจาก $(0, 0)$ ตามแนวตัวแปร x แต่เนื่องจากรูปนี้ยังเป็นรูปอย่างง่ายจึงเห็นชัดว่ามีเส้นทางเดียวเท่านั้นที่ไปได้เมื่อบังคับให้เปลี่ยน x คือเดินตามขอบแนวด้านล่าง และจะไปประชิดที่ขอบ $x = 4$ ซึ่งคือขอบที่ตัวแปรส่วนเกิน $s_1 = 0$ จึงทำให้ทราบว่าเราต้องนำ x ไปเป็นตัวแปรหลักแทน s_1 และให้ s_1 ทำหน้าที่ตัวแปรพื้นฐาน กล่าวคือ ตั้งให้ $s_1 = 0$ และ $y = 0$ เป็นตัวแปรพื้นฐานและได้ว่า $x = 4, y = 0$ เพราะฉะนั้น จาก $z = 4 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 4 + 0 \times 4 = 0$ ที่จุด $(0, 0)$ จะได้ว่าค่าจุดประสงค์ ณ ปัจจุบันเปลี่ยนไปเป็น $z = 4 \times 4 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 4 = 16$ และเราจะไม่เดินตาม x อีกแล้ว

กล่าวคือตอนนี้ระบบเหลือแค่ปัญหา

$$\begin{aligned} \max \quad & y + 0s_2 + 16 \\ \text{subject to} \quad & y, s_2 \geq 0 \\ & y + s_2 = 4 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่าเปรียบเสมือนการเดินตามแนว y โดยที่จะเอา y ไปเป็นตัวแปรหลักแทน s_2 จึงไปจบที่ขอบที่ $s_2 = 0$ ทำให้ได้ $y = 4$ และจบด้วยการไม่สามารถปรับค่าตัวแปรไหนเพิ่มเติมได้อีกแล้ว จึงได้ว่า $(x, y) = (4, 4)$ เป็นผลเฉลยที่ทำให้ได้ฟังก์ชันค่าจุดประสงค์มากที่สุด และเท่ากับ $z = 4 \times 4 + 1 \times 4 = 20$

ทั้งนี้ ขอสรุปขั้นตอนสำคัญของการทำ simplex method ดังนี้

1. หา pivot ตัวใหม่: พิจารณาหาทิศทางที่ทำให้เปลี่ยนค่าได้เร็วสุดก่อน
2. หา pivot ตัวที่จะถูกแทนที่: เมื่อทราบแนวการเปลี่ยนแล้ว ให้ดูว่าจุดที่ยืนอยู่ปัจจุบันมีเส้นทางไหนที่เดินแล้วถึงขอบเร็วสุดเพื่อป้องกันการหลุดนอกขอบ แล้วตัวแปรส่วนเกินของขอบนั้นจะโดนแทนที่กลายไปเป็นตัวแปรพื้นฐาน (ตัวแปรที่ถูกตั้งค่าให้เป็น 0)
3. กำจัดตัวแปร pivot ใหม่ออกจากระบบ
4. ทำวนไปเรื่อย ๆ จนไม่สามารถเปลี่ยนตัวแปรใด ๆ เพื่อเพิ่มค่าจุดประสงค์ได้อีกแล้ว

1.3.1 Simplex Method Algorithm

ในการทำ simplex นั้นจะนิยมเขียนการคำนวณอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ที่เรียกว่า simplex tableau ดังนี้

Pivot	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	s_1	$\cdots$	RHS
x_{B_1}	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	c_{1s_1}	$\cdots$	b_1
x_{B_2}	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	c_{2s_1}	$\cdots$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	c_{ms_1}	$\cdots$	b_m
Z	z_1	z_2	$\cdots$	z_n	z_{s_1}	$\cdots$	z

โดยจะกล่าวละเอียดทีละขั้น โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอน 1.1: Simplex Method

ก่อนอื่น ตัวแปรทุกตัวต้องไม่ติดลบ ($x_i \geq 0$) และเงื่อนไขอยู่ในรูปแบบซึ่งก้อนตัวแปรอยู่ฝั่งซ้ายและค่าคงที่อยู่ฝั่งขวาโดยที่ค่าคงที่ต้องไม่ติดลบ

ขั้นที่ 1. แปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Standard Form)

- ◇ เป้าหมายต้องอยู่ในรูปแบบ **Maximize** $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
- ◇ ข้อจำกัดต้องอยู่ในรูป **สมการ** โดยการเพิ่มตัวแปรประเภท *slack, surplus, artificial* ตามความเหมาะสม

ขั้นที่ 2. เขียน Simplex Tableau แรก

- ◇ สร้างตารางแสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในแต่ละ constraint
- ◇ เพิ่มแถวของสมการ Z และค่าคงที่ (RHS)

ขั้นที่ 3. เลือกตัวแปรที่จะเข้าสู่ฐาน (Entering Variable)

- ◇ เลือกตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ในแถว Z น้อยที่สุด (ติดลบมากที่สุด)
- ◇ ถ้าไม่มีค่าสัมประสิทธิ์ใดติดลบในแถว Z: หยุดได้เลยเพราะได้คำตอบที่เหมาะสมแล้ว

ขั้นที่ 4. ทำ Minimum Ratio Test เพื่อเลือกตัวแปรที่จะออกจากฐาน (Leaving Variable)

- ◇ สำหรับแต่ละแถวที่ตัวแปรเข้ามามีสัมประสิทธิ์เป็นบวก ให้คำนวณ:

$$\text{Ratio} = \frac{\text{RHS}}{\text{ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าใหม่}}$$

- ◇ เลือกแถวที่ให้ค่า Ratio ต่ำสุด
- ◇ ถ้าไม่มี Ratio ใดสามารถคำนวณได้ (ทุกสัมประสิทธิ์ ≤ 0) □ ปัญหา **ไม่จำกัดคำตอบ** (Unbounded)

ขั้นที่ 5. ทำ Pivot เพื่ออัปเดต Tableau

- ◇ ทำให้ตำแหน่ง Pivot (จุดตัดระหว่างแถวเข้าและออก) มีค่าเป็น 1
- ◇ ปรับแถวอื่นให้ค่าของตัวแปรเข้ามาในคอลัมน์นั้นเป็น 0

ขั้นที่ 6. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3–5 จนกว่าจะไม่มีสัมประสิทธิ์ติดลบในแถว Z

ขั้นที่ 7. อ่านคำตอบจาก Tableau สุดท้าย

- ◇ ตัวแปรในฐานจะมีค่าตรงกับ RHS
- ◇ ตัวแปรที่ไม่อยู่ในฐานจะมีค่าเป็น 0
- ◇ ค่า Z ที่เหมาะสมที่สุดอยู่ในมุมขวาล่างของแถว Z

1.3.1.1 กรณีที่ 1: เงื่อนไขมีแต่ $\leq$ (จุดกำเนิดเป็น basic feasible solution)

กรณีนี้เป็นกรณีที่ง่ายที่สุด เพราะเป็นกรณีที่เริ่มกระบวน simplex ได้ทันทีที่จุดกำเนิดโดยไม่ต้องมีการปรับแต่งอะไรก่อนหน้า ในการอธิบายวิธีการของกรณีนี้ จะขอใช้ตัวอย่างดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 4 \\ & y \leq 6 \\ & 3x + 2y \leq 18 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 1: แปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Standard Form)

- เป้าหมาย $\max 3x + 5y$ อยู่ในรูป **การเพิ่มค่า (Maximization)** อยู่แล้ว
- แต่ถ้าเป้าหมายเป็น **Minimization**, ต้องแปลงเป็น **Maximization** โดยเปลี่ยนเครื่องหมาย:

$$\text{Minimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximize } -Z = -c_1x_1 - c_2x_2$$

- ทุกตัวแปรต้องมีเงื่อนไข **ไม่ติดลบ**:

$$x_i, s_i, a_i \geq 0$$

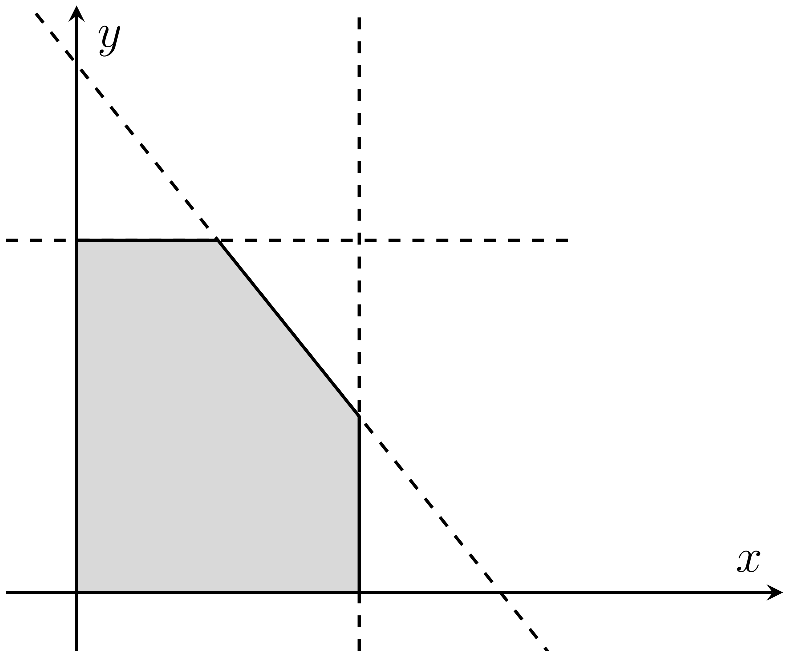
  ถ้าติดลบ ให้เปลี่ยนเป็นตัวแปรใหม่ $x_{new} = -x$ (แต่ในกรณีนี้ยังไม่มี)
- ข้อจำกัดทั้งหมดต้องเขียนในรูปสมการ (equalities) โดยข้อจำกัดแบบ $\leq$, ให้เพิ่ม **ตัวแปรส่วนเกิน (Slack Variable)** s_i: $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + s_i = b$

ตัวอย่าง 1.3.1: เปลี่ยนรูปมาตรฐานกรณี 1

จงเปลี่ยนปัญหา

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 4 \\ & y \leq 6 \\ & 3x + 2y \leq 18 \end{aligned}$$

ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน



ขั้นที่ 2: เขียน Simplex Tableau แรก

โดยให้กลุ่มตัวแปรส่วนขาดเป็นตัวแปร pivot ของระบบก่อน และให้ตัวแปรตัดสินใจเป็นตัวแปรพื้นฐาน กล่าวคือเราให้จุดกำเนิดเป็นผลเฉลยตั้งต้น และนอกจากนั้น เราจะให้แถวสุดท้ายมีค่าเป็นค่าติดลบของสัมประสิทธิ์แต่ละตัวแปรในฟังก์ชันจุดประสงค์ z และ RHS มีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง 1.3.2: Initial Simplex Tableau

จากรูปมาตรฐานที่ได้จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะเขียน Simplex tableau เริ่มต้นได้ดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
z						

หมายเหตุ: จริง ๆ แล้วเรายังมีอีกคอลัมน์นึงที่ถูกซ่อนไว้คือคอลัมน์ของตัวแปรจุดประสงค์ z ซึ่งจะสามารถเขียนได้เป็น

Pivot	z	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
	0						
	0						
	0						
z	1						

แต่เนื่องจากไม่ว่าจะดำเนินการในขั้นอื่น ๆ ต่อไปอย่างไร คอลัมน์นี้จะไม่มีทางเปลี่ยนแปลงแน่นอน ดังนั้นจึงละการเขียนคอลัมน์นี้ไว้

คุณสมบัติ 1.4: คำถาม

1. ทำไมแถวของฟังก์ชันจุดประสงค์ถึงต้องใช้ค่าติดลบของสัมประสิทธิ์ และทำไมฝั่ง RHS ถึงต้องมีค่าเป็น 0
2. การเป็น Pivot ของตัวแปรหมายถึงอะไร
3. อะไรในตารางที่บอกเราว่าปัจจุบันเรายืนอยู่ที่จุด $(0, 0)$

ขั้นที่ 3: เลือกตัวแปรที่จะเข้าสู่ฐาน (Entering Variable)

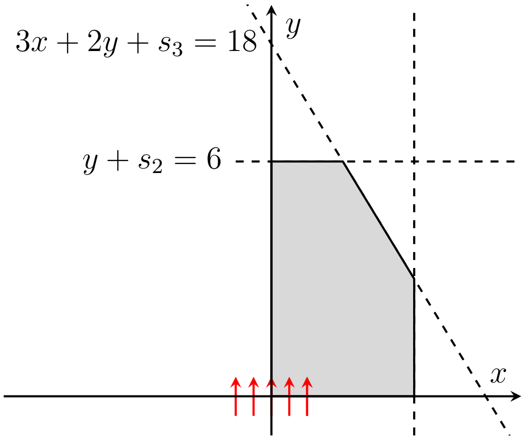
จากตำแหน่งที่ยืนอยู่ ณ ปัจจุบัน สิ่งที่เราต้องหาในขั้นตอนถัดไปคือควรจะเดินไปตามทางไหน ซึ่งแน่นอนว่าเราไม่ได้ระบุการเดินแบบบอกทิศการเดินชัดเจน (ถึงแม้ในกรณีนี้เราจะทราบว่าการเดินไปตามเวกเตอร์ $(3, 5)$ จะเป็นทิศที่ไต่ขึ้นได้เร็วสุดก็ตาม) เพราะหลักการของ simplex คือการเดินตามขอบ เพราะฉะนั้นเราจึงบอกทิศการเดินแบบคร่าว ๆ ว่าจะเดินไปตามแนวแกนของตัวแปรใดก็เพียงพอแล้ว (ในที่นี้คือแนวแกน x หรือแนวแกน y)

วิธีการที่จะเลือกว่าเราควรเดินไปทิศทางใด คือการดูสัมประสิทธิ์ของตัวแปรนั้นที่อยู่ในฟังก์ชันจุดประสงค์

ตัวอย่าง 1.3.3: การเลือกตัวแปรฐานใหม่

จากฟังก์ชันจุดประสงค์ (ในปัจจุบัน) $z = 3x + 5y + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ ถ้า แต่ละตัวแปรมีค่าเปลี่ยนไป +1 แล้วค่า z จะมีค่าเปลี่ยนไปเท่าไหร่บ้าง และการเปลี่ยนตัวแปรใดทำให้เพิ่มค่า z ได้มากที่สุด

ขั้นที่ 4: เลือกตัวแปรที่จะออกจากฐาน (Leaving Variable)



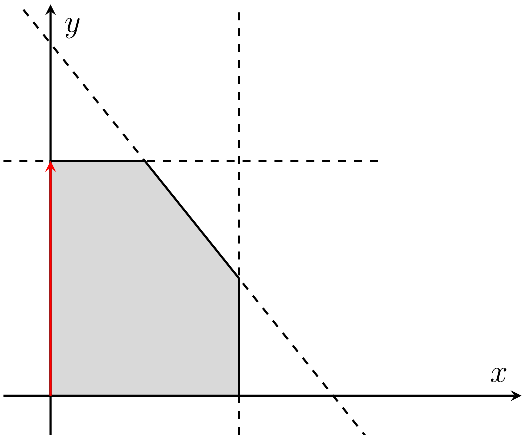
ณ ขั้นตอนนี้ เราทราบแล้วว่าเรากำลังจะเอาตัวแปร y เข้ามาเป็นตัวแปรฐานใหม่ เพราะการเดินตามแนวแกน y ให้การเปลี่ยนค่า z ได้มากที่สุด ซึ่งจากรูปภาพเราจะเห็นว่าจะมีเพียงขอบด้านซ้าย (เดินไปตามแกน y) เท่านั้นที่เป็นเส้นทางการเดินเดียวจากจุด $(0, 0)$

คำถามต่อมาคือเดินควรไกลแค่ไหนถึงจะมั่นใจได้ว่าเดินไปถึงจุดมุมของบริเวณแน่ ๆ ซึ่งถ้าเดินสั้นไปจะเดินไม่ถึงจุดมุม แต่ถ้าเดินไกลไปก็จะเลยจุดมุม เพราะฉะนั้น เราจึงใช้ตัวแปรส่วนขาดเป็นตัวบอกว่าขอบของตัวแปรส่วนขาดใดอยู่ใกล้ที่สุด (ในกรณีอื่นอาจมีได้หลายเส้นทาง แต่เราก็จะเลือกอันที่ใกล้ที่สุดอยู่) หรือกล่าวคือ เรากำลังจำลองว่าจะต้องเปลี่ยนค่า y เท่าไหร่เพื่อให้ตัวแปรส่วนขาดของเส้นดังกล่าวมีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง 1.3.4: การเลือกตัวแปรเพื่อออกจากฐาน

จากรูปจะเห็นว่าถ้าเราเดิน จะไปพบได้ 2 เส้นเท่านั้นคือเส้นของ s_2 และเส้นของ s_3 จงหาค่า y ของแต่ละเส้นที่ทำให้ตัวแปรส่วนขาดของเส้นดังกล่าวมีค่าเป็น 0 (สุดท้ายจะได้ว่าต้องเดินไปเส้นของ s_2) และเราจะสามารถเขียนแสดงผลลัพธ์ดังกล่าวในรูปแบบ simplex tableau ได้อย่างไร

ขั้นที่ 5: ทำ Pivot Row Operation เพื่ออัปเดต Tableau



ตามความหมายในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้นนั้น pivot หมายถึงคอลัมน์ในเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีสมาชิกเป็น 1 อยู่ตัวเดียว (เรียกว่า pivot element) และที่เหลือเป็น 0 ล้วน โดยในแต่ละแถวจะมี pivot element ได้ไม่เกิน 1 ตัว ซึ่งจากการที่เราบังคับให้ s_2 ออกจากการเป็นฐาน และนำ y เข้ามาเป็นฐานแทน s_2 จึงต้องการให้ตาราง simplex อันใหม่มีหน้าตาดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	$*$	$*$	1	0	0	$*$
s_2	$*$	$*$	0	1	0	$*$
s_3	$*$	$*$	0	0	1	$*$
z	$*$	$*$	0	0	0	$*$

$\Longrightarrow$

Pivot	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	$*$	0	1	$*$	0	$*$
y	$*$	1	0	$*$	0	$*$
s_3	$*$	0	0	$*$	1	$*$
z	$*$	0	0	$*$	0	$*$

ตัวอย่าง 1.3.5: การเปลี่ยน pivot ของระบบ

แปลง simplex tableau ให้เป็นของระบบ pivot s_1, y และ s_3 และให้เหตุผลว่าทำไมระบบปัจจุบันถึงแสดงสถานะว่ากำลังยืนอยู่ที่จุด $(0, 6)$

ขั้นที่ 6: วนซ้ำขั้นที่ 3-5 จนกว่าจะไม่มีสัมประสิทธิ์ติดลบในแถวของ z

ตัวอย่าง 1.3.6: ทำต่อ

ทำขั้นตอนที่ 3-5 วนจนกว่าจะจบกระบวนการ และแปลผลตารางสุดท้าย (ขั้นที่ 7)

ตัวอย่าง 1.3.7

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + 2y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \qquad y \geq 0 \\ & x \leq 2 \\ & y \leq 3 \\ & x - y \leq 1 \\ & x + y \leq 4 \end{aligned}$$

1.3.1.2 กรณีที่ 2: เงื่อนไขมี $\geq$ ที่อาจจะทำให้จุดกำเนิดไม่เป็น basic feasible solution

ในบางกรณี เราอาจพบเงื่อนไขที่ทำให้จุดกำเนิดไม่ใช่ feasible solution เลยทำให้ไม่สามารถดำเนินการ simplex ได้ทันทีเหมือนกรณีที่ 1 ซึ่งกรณีดังกล่าวคือกรณีที่อสมการเงื่อนไขเขียนในรูป $ax + by \geq c$ โดยที่ $c \geq 0$ ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่าจุด $(0, 0)$ ไม่เป็น feasible solution สำหรับเงื่อนไขนี้ แต่ถึงแม้เราจะใช้วิธีการการเพิ่มตัวแปรส่วนขาดเข้าไป ตัวอย่างเช่น สมการ $-3x + 5y \geq 4$ เมื่อเราทำการเพิ่มตัวแปรส่วนขาดเข้าไป จะได้สมการเป็น $-3x + 5y = 4 + s$ เมื่อ $s \geq 0$ หรือก็คือสมการ $-3x + 5y - s = 4$[1] ซึ่งจะเห็นว่าถ้าให้ $x = 0$ และ $y = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$4 = -3x + 5y - s = -s \Longrightarrow s = -4 \ngeq 0$$

กล่าวคือ เราไม่สามารถให้ x และ y เป็นตัวแปร non-basic ได้เหมือนกรณีที่ 1

วิธีแก้ปัญหาคือเราจะเพิ่มตัวแปรเข้าระบบไปอีกตัว เพื่อปรับดุลสมการให้สามารถเริ่ม basic feasible solution ที่จุดกำเนิดได้ ซึ่งตัวแปรที่ถูกเพิ่มเข้ามานี้ถูกเรียกว่า **ตัวแปรจำลอง** (artificial variable) โดยจะได้สมการตัวอย่างเป็น

$$-3x + 5y - s + A = 4 \text{ โดยที่ } A \geq 0$$

และจะให้ตัวแปรจำลองเป็นตัวแปรพื้นฐาน และ x, y, s มีค่าเป็น 0 โดยในขั้นตอนนี้ เราได้ basic feasible solution เริ่มต้นเป็นตัวแปรจำลอง (A) ซึ่งมีค่าเป็นบวก (ในที่นี้คือ $A = 4$) แต่เป้าหมายของเราในการทำ Simplex method คือการกำจัดตัวแปรจำลองออกไปจากระบบในที่สุด เพราะตัวแปรจำลองนี้ไม่ได้มีความหมายในทางปฏิบัติ แต่เป็นเพียงตัวช่วยชั่วคราวในการเริ่มต้นหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของระบบสมการ

การดำเนินการจากนี้เรียกกันโดยทั่วไปว่า **Simplex Method ระยะที่หนึ่ง (Phase I Simplex Method)** ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินงานดังต่อไปนี้:

1. หลังจากเพิ่มตัวแปรจำลองในแต่ละสมการที่มีเงื่อนไข $\geq$ เรียบร้อยแล้ว เราจะกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราว (Phase I Objective) ให้เป็นการหาผลรวมของตัวแปรจำลองทั้งหมดที่ถูกเพิ่มเข้าไป และเป้าหมายของขั้นตอนนี้คือการทำให้ผลรวมของตัวแปรจำลองมีค่าเท่ากับศูนย์ให้ได้ กล่าวคือเราสร้างฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราว (Phase I Objective) ดังนี้:

$$\text{Minimize} \quad W = \sum \left(\text{ตัวแปรจำลองทั้งหมด}\right)$$

   สำหรับตัวอย่างนี้จะได้เป็น

$$\text{Minimize} \quad W = A$$

2. ใช้วิธี Simplex กับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราวนี้ (Minimize W) และดำเนินการแปลงแถว (Pivot) ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ตัวแปรจำลองจะออกจากฐานทั้งหมด

   ◇ หากสามารถทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราว $W = 0$ ได้สำเร็จ แสดงว่าปัญหานี้มี feasible solution

[1] หนังสือบางเล่มจะเรียกว่า**ตัวแปรส่วนเกิน** เพราะมองในลักษณะ $-3x + 5y - s = 4$ โดยที่ s เป็นส่วนเกินของฝั่งที่มีค่ามากกว่า ทำให้เราต้องลบออกเพื่อให้ได้สมการ แต่ในมุมของผู้เขียนจะขอมองในลักษณะของตัวแปรส่วนขาดทั้งหมด แล้วใช้การย้ายข้างสมการแทน

เดิมจริง และสามารถไปสู่ขั้นตอน Phase II ได้

- หากไม่สามารถทำให้ $W = 0$ ได้ (เช่น $W > 0$ เสมอ) แสดงว่าปัญหานี้ไม่มี feasible solution (infeasible problem) ไม่จำเป็นต้องดำเนินการต่อ

3. เมื่อได้ $W = 0$ แล้ว (กำจัดตัวแปรจำลองหมดแล้ว) เราจะดำเนินการต่อในขั้นที่สอง (**Phase II**) โดยกลับไปใช้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จริงของปัญหาเดิม และเริ่มทำ Simplex method ตามปกติจนได้คำตอบสุดท้าย

สรุปได้ว่าในกรณีที่ 2 นี้ การใช้ตัวแปรจำลอง (Artificial variable) และวิธีการ Simplex Phase I จะช่วยให้เราสามารถเริ่มต้นแก้ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นได้ แม้ว่าเงื่อนไขของปัญหาจะทำให้จุดกำเนิดไม่สามารถเป็น basic feasible solution ตั้งต้นได้ก็ตาม

ตัวอย่าง 1.3.8

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & -3x + 5y \geq 4 \\ & x + 2y \leq 8 \end{aligned}$$

วิธีทำ:

ขั้นที่ 1: ปรับสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

- เนื่องจาก $(0, 0)$ **ไม่**สอดคล้องเงื่อนไข $-3x + 5y \geq 4$ (แทนค่าแล้วได้ $0 \geq 4$ ซึ่งเป็นเท็จ) เป็นจริง ดังนั้นจึงต้องเติมตัวแปรส่วนเกินและตัวแปรจำลอง ได้เป็น $-3x + 5y - s_1 + a_1 = 4$ โดยที่ $s_1, a_1 \geq 0$ โดยที่ให้ a_1 เป็นตัวแปรฐาน และ $x, y, s_1 = 0$ ในขั้นตั้งต้น
- เนื่องจาก $(0, 0)$ สอดคล้องเงื่อนไข $3x + 2y \leq 8$ (แทนค่าแล้วได้ $0 \leq 8$ ซึ่งเป็นจริง) ดังนั้นจึงเติมตัวแปรส่วนขาดเข้าไปเท่านั้น ได้เป็น $x + 2y + s_2 = 8$ โดยที่ให้ s_2 เป็นตัวแปรฐานและ $x, y = 0$

และเนื่องจากว่ามีตัวแปรจำลอง จึงต้องตั้งฟังก์ชันจุดประสงค์ชั่วคราวให้เป็นการหาค่าต่ำสุดของผลรวมตัวแปรจำลอง กล่าวคือ $\min a_1$ แต่เนื่องจากเรากำลังจะทำ simplex จึงต้องปรับปัญหาให้เป็นการหาค่าสูงสุดด้วยการคูณ -1 เข้าไปได้เป็น $\max W = -a_1$ จึงได้ปัญหา Phase 1 ออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \max \quad & W = -a_1 \\ \text{subject to} \quad & x, y, s_1, s_2, a_1 \geq 0 \\ & -3x + 5y - s_1 + a_1 = 4 \\ & x + 2y + s_2 = 8 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2: ตั้งตารางซิมเพล็กซ์ของตัวแปรจำลอง ได้เป็น

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS
a_1	-3	5	-1	0	1	4
s_2	1	2	0	1	0	8
W	0	0	0	0	1	0

และทำการกำจัดตัวแปรจำลองออกจากจุดประสงค์ (การเอาตัวแปรอื่นมาพิจารณา) เพื่อให้คอลัมน์ a_1 มีแถวของ a_1 เป็น 1 เพียงคนเดียว (เป็น pivot element ที่ตำแหน่งอื่นเป็น 0 ล้วน) ซึ่งทำได้โดยดำเนินการตามแถว $(-1)\,R_1 + R_3 \to R_3$ จะได้สมาชิกในแถวที่ R_3 ใหม่คำนวณได้ดังนี้

- ◇ คอลัมน์ x: $(-1)\,(-3) + 0 = 3$
- ◇ คอลัมน์ y: $(-1)\,(5) + 0 = -5$
- ◇ คอลัมน์ s_1: $(-1)\,(-1) + 0 = 1$
- ◇ คอลัมน์ s_2: $(-1)\,(0) + 0 = 0$
- ◇ คอลัมน์ a_1: $(-1)\,(1) + 1 = 0$
- ◇ คอลัมน์ RHS: $(-1)\,(4) + 0 = -4$

จึงได้ตารางซิมเพล็กซ์ตั้งต้นดังนี้ **(ถ้าในข้อสอบถามหาตารางตั้งต้น ต้องตอบตารางนี้ เพราะำคอลัมน์ a_1 ในตารางก่อนหน้ายังไม่อยู่ในรูปแบบ Pivot column)**

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS
a_1	-3	5	-1	0	1	4
s_2	1	2	0	1	0	8
W	3	-5	1	0	0	-4

หมายเหตุ 2: การหาแถว W อีกแบบ

เราสามารถหาแถว W ได้แบบเร็วๆ โดยการนำสมการเงื่อนไขที่มีตัวแปรจำลองมาจัดรูปให้ตัวแปรจำลองอยู่ฝั่งหนึ่ง และตัวแปรที่เหลืออยู่อีกฝั่ง แล้วนำไปแทนค่าใน W เช่นในเงื่อนไขที่ 1 ของตัวอย่างนี้คือ $-3x + 5y - s_1 + a_1 = 4$ และจัดรูปได้เป็น $a_1 = 3x - 5y + s_1 + 4$ แล้วนำไปแทนใน W จะได้

$$W = -a_1 = -(3x - 5y + s_1 + 4) = -3x + 5y - s_1 - 4$$

และย้ายข้างได้รูปแบบ $W + 3x - 5y + s_1 = -4$ ทำให้เขียนสัมประสิทธิ์ได้เป็น

$$3 \quad -5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -4$$

และทำกระบวนการ simplex ไปจนกว่าตัวแปรจำลองจะออกจากตัวแปรฐานทั้งหมด โดยจากตารางจะได้ว่าต้องให้ y เป็นตัวแปรเข้าฐาน และเมื่อหาอัตราส่วนเพื่อเลือกตัวแปรขาออกจากฐานตามตารางด้านล่างจะได้ว่าต้องใช้ a_2 ออกจากฐาน

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS	อัตราส่วน
a_1	-3	5	-1	0	1	4	$4/5 = 0.8$
s_2	1	2	0	1	0	8	$8/2 = 4$
W	3	-5	1	0	0	-4	

ดำเนินการตามแถวเพื่อเปลี่ยน pivot โดยใช้ $R_1/5, (-2/5)\,R_1+R_2 \to R_2$ และ $(1)\,R_1+R_3 \to R_3$ จะได้

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS
y	$-3/5$	1	$-1/5$	0	$1/5$	$4/5$
s_2	$11/5$	0	$2/5$	1	$-2/5$	$32/5$
W	0	0	0	0	1	0

ซึ่งตารางใหม่ไม่สามารถอัพเดตเพิ่มเติมได้อีกแล้ว และตัวแปรจำลองถูกกำจัดออกจากตัวแปรฐานได้ทั้งหมด และได้ $W = 0$ จึงได้ว่าสามารถทำ simplex phase 2 ต่อได้โดยใช้ชุดสัมประสิทธิ์ที่ได้จาก phase 1

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
y	$-3/5$	1	$-1/5$	0	$4/5$
s_2	$11/5$	0	$2/5$	1	$32/5$
z	-4	-5	0	0	0

หมายเหตุ 3: ความหมายของผลที่ได้จาก Phase 1

ผลที่ได้จากการทำ simplex phase 1 คือการพยายามหาจุดผลเฉลยตั้งต้น (basic feasible solution) ซึ่งจากเดิมเราสามารถเริ่มได้โดยง่ายที่จุด $x = 0, y = 0$ แต่ว่าในกรณีที่มีเงื่อนไขที่ทำให้จุดดังกล่าวไม่สอดคล้อง (เช่นเงื่อนไข $-3x + 5y \geq 4$) เราจึงจำเป็นต้องเพิ่มตัวแปรจำลองเพื่อจำลองการเดินทางจากจุด $(0, 0)$ ไปที่จุดมุมตั้งต้นที่ใกล้ที่สุด ซึ่งจากตารางสุดท้ายที่ได้มาจาก phase 1 เราได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{5}s_1 &= \frac{4}{5} \\ \frac{11}{5}x + \frac{2}{5}s_1 + s_2 &= \frac{32}{5} \end{aligned}$$

โดยที่ $x = 0, s_1 = 0$ (เพราะไม่ใช่ฐาน) ซึ่งเมื่อแก้ระบบสมการหาค่าตัวแปรฐาน จะได้ $y = 4/5$ และ $s_2 = 32/5$ ซึ่งหมายถึง เราหาจุดผลเฉลยตั้งต้นได้เป็นจุด $(x, y) = (0, 4/5)$ และใช้ระบบของจุดนี้เพื่อไปแก้หาค่าสูงสุดของ Z ต่อได้

ขั้นที่ 3: ดำเนินการ simplex ได้ตามปกติ (ทิ้งไว้ให้เป็นแบบฝึกหัดเพิ่มเติมเพื่อทบทวนการดำเนินการ simplex)

□

1.3.1.3 กรณีที่ 3: เงื่อนไขมี $=$ ซึ่งทำให้ feasible ไม่เป็น region เต็มมิติ

ตัวอย่าง 1.3.9

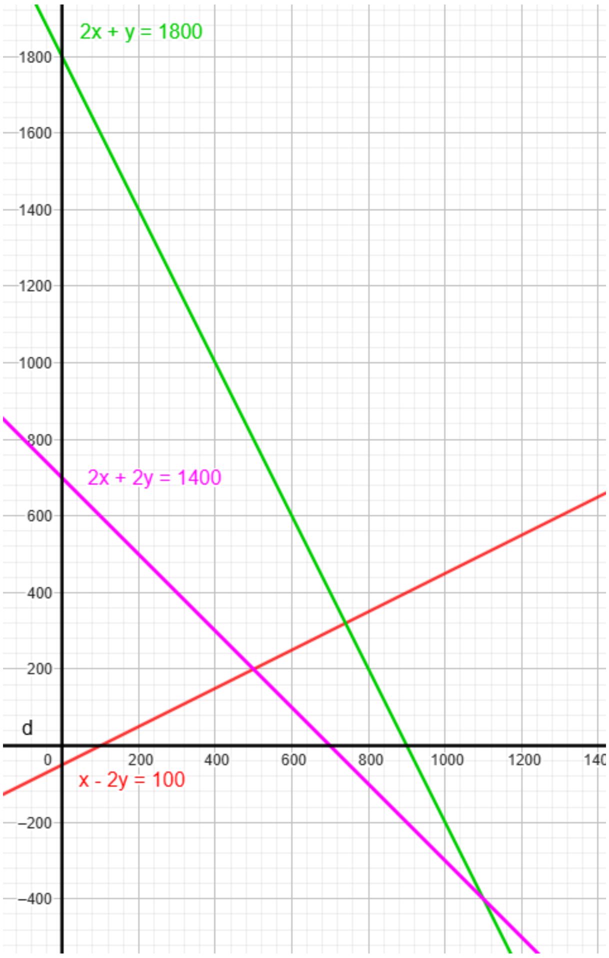
ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x + 15y \\
\text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\
& -3x + 5y \leq 15 \\
& 2x + 5y \leq 40 \\
& 4x - 5y = 20
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 1.3.10: โจทย์ผสม

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \min \quad & -1840x - 1720y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & 2x + y \leq 1800 \\ & 2x + 2y \geq 1400 \\ & x - 2y = 100 \end{aligned}$$



1.4 การแก้ปัญหาด้วย Excel Solver

สถานการณ์จำลอง

โรงงานผลิตน้ำผลไม้แห่งหนึ่งมีผลิตภัณฑ์ 4 ชนิด ได้แก่ น้ำส้ม (A), น้ำแอปเปิ้ล (B), น้ำองุ่น (C) และน้ำเสาวรส (D) โดยการผลิตแต่ละชนิดต้องใช้วัตถุดิบและเวลาที่แตกต่างกัน โรงงานมีข้อจำกัดด้านวัตถุดิบ วัตถุบรรจุ และแรงงานต่อวันตามตารางด้านล่าง

ทรัพยากร / ผลิตภัณฑ์	A (น้ำส้ม)	B (น้ำแอปเปิ้ล)	C (น้ำองุ่น)	D (น้ำเสาวรส)
วัตถุดิบ (ลิตร)	2.0	1.5	2.2	1.0
วัตถุบรรจุ (หน่วย)	1.0	1.0	0.8	1.2
แรงงาน (ชม.)	0.5	0.7	0.6	0.4
กำไรต่อหน่วย (บาท)	10	8	12	9

ข้อจำกัดต่อวัน:

- ◇ วัตถุดิบไม่เกิน 500 ลิตร
- ◇ วัตถุบรรจุไม่เกิน 250 หน่วย
- ◇ ชั่วโมงแรงงานไม่เกิน 120 ชั่วโมง

คำสั่งในการทำงาน

1. กำหนดให้ตัวแปร x_1, x_2, x_3, x_4 แทนจำนวนหน่วยของ A, B, C, D ตามลำดับ
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบ LP โดยกำหนด

   - ◇ **ฟังก์ชันวัตถุประสงค์:** Maximize กำไรรวม
   - ◇ **ข้อจำกัด:** ทรัพยากรไม่เกินที่กำหนด
   - ◇ **เงื่อนไข:** $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
3. เปิด Excel และสร้างตารางการคำนวณ (Decision Variables, Total Usage, Constraints)
4. ใช้ **Solver** เพื่อหาคำตอบที่ให้กำไรสูงสุด โดยกำหนดเงื่อนไขที่เหมาะสม
5. บันทึกผลลัพธ์ที่ได้

คำถามท้ายแล็บ

a. ผลลัพธ์ที่ได้คือ: $x_1 =$ ___, $x_2 =$ ___, $x_3 =$ ___, $x_4 =$ ___ และกำไรสูงสุดคือ ___ บาท

b. ข้อจำกัดใดที่ใช้เต็มความสามารถ? และข้อจำกัดใดที่ยังมีทรัพยากรเหลือ?

c. หากโรงงานสามารถเพิ่มแรงงานได้อีก 10 ชั่วโมง จะส่งผลต่อกำไรหรือไม่?

d. หากบริษัทต้องการผลิตแบบจำนวนเต็ม จะต้องเปลี่ยนการตั้งค่า Solver อย่างไร?

Assignment

จากสถานการณ์ของบริษัท ABC Furniture ที่ต้องการวางแผนการผลิต “โต๊ะทำงาน” และ “ตู้เก็บเอกสาร” เพื่อให้ได้ยอดสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดของแรงงานและวัตถุดิบ (ตามสถานการณ์ในต้นบท)

Part A: การสร้างโมเดลคณิตศาสตร์

1. จากสถานการณ์ของบริษัท ABC Furniture
   (a) กำหนดตัวแปรให้ชัดเจน
   (b) เขียนสมการจุดประสงค์ (Objective Function)
   (c) เขียนข้อจำกัดทั้งหมด (Constraints)
   (d) ระบุ Domain ของตัวแปร

วิธีทำ: เนื่องจากเราต้องวางแผนจำนวนการผลิตโต๊ะทำงานและตู้เก็บเอกสาร ดังนั้นเราจึงต้องกำหนดตัวแปรเป็นจำนวนโต๊ะและจำนวนตู้ โดยในที่นี้ กำหนดให้

$$x = \text{จำนวนโต๊ะทำงานที่จะผลิต}$$
$$y = \text{จำนวนตู้เก็บเอกสารที่จะผลิต}$$

เป้าหมายของการผลิตคือเพื่อที่ทำให้ได้ยอดขายสูงที่สุด ดังนั้นจึงต้องวางฟังก์ชันจุดประสงค์คือยอดขาย และเนื่องจากยอดขายคิดได้จากจำนวนโต๊ะและจำนวนตู้ที่ผลิตคูณด้วยราคาที่ขายตรง ๆ จึงได้ว่า สมการจุดประสงค์คือยอดขาย

$$2000x + 1500y$$

ในส่วนของเงื่อนไขที่เป็นข้อจำกัดของโจทย์นี้จะมีเรื่องของเวลาแรงงานและปริมาณวัตถุดิบที่มี

- การผลิตโต๊ะ x ตัวซึ่งต้องใช้เวลาผลิตตัวละ 4 ชั่วโมง จึงต้องใช้เวลาผลิตโต๊ะทั้งหมด $4x$ ชั่วโมง
- การผลิตตู้ y ตัวซึ่งต้องใช้เวลาผลิตตัวละ 3 ชั่วโมง จึงต้องใช้เวลาผลิตโต๊ะทั้งหมด $3y$ ชั่วโมง

ดังนั้นเราจึงใช้เวลาแรงงานในการผลิตทั้งหมด $4x + 3y$ และเพราะเรามีเวลาจำกัดสูงสุดที่ 1000 ชั่วโมง จึงได้เงื่อนไขด้านเวลาเป็น

$$4x + 3y \leq 1000$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้เงื่อนไขเรื่องวัตถุดิบเป็น

$$2x + y \leq 800$$

ทั้งนี้ เนื่องจากตัวแปรที่เราตั้งไว้เป็นเรื่องของจำนวนการผลิต ดังนั้น Domain ของจำนวนแปรจึงคือจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (ถึงแม้ตอนเราแก้ปัญหาเราจะสนใจแค่ไม่ติดลบอย่างเดียวก็ตาม: $x \geq 0, y \geq 0$)

สรุปแล้ว โจทย์นี้เราจะได้แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1500y \\ \texttt{subject to} \quad & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

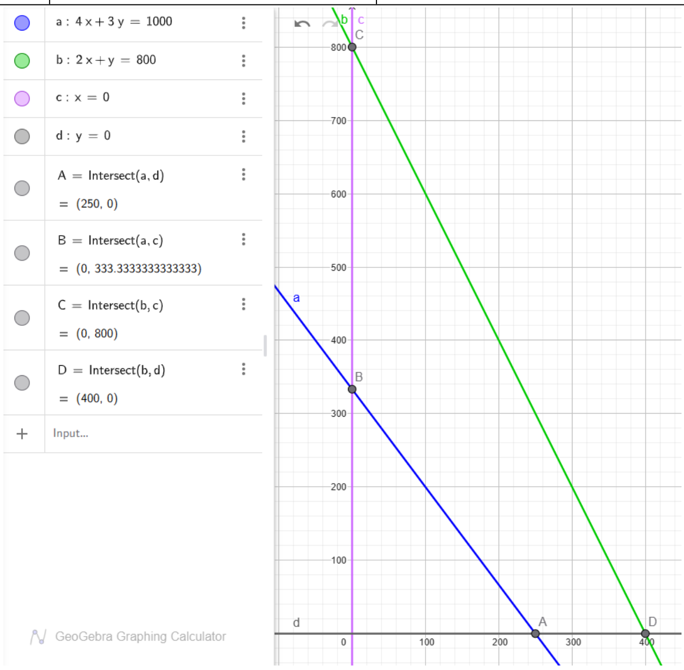
□

Part B: การวิเคราะห์และคำนวณผลลัพธ์

1. หาผลเฉลยด้วยวิธีการวาดกราฟ

วิธีทำ: เริ่มจากการหาจุดตัดแกนของแต่ละเส้นสมการเงื่อนไข

สมการ	จุดตัดแกน x (แทน $y = 0$)	จุดตัดแกน y (แทน $x = 0$)
$4x + 3y = 1000$	$4x = 1000 \Rightarrow x = 250$	$3y = 1000 \Rightarrow y = 1000/3 \approx 333.33$
$2x + y = 800$	$2x = 800 \Rightarrow x = 400$	$y = 800$



จะได้ว่าบริเวณความเป็นไปได้ (feasible region) คือรูปสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยแกน x, แกน y และเส้นตรงสมการ $4x + 3y = 1000$ ซึ่งมีจุดยอด 3 จุดได้แก่ $(0, 0)$, $(0, 1000/3)$, $(250, 0)$ (เนื่องจากในข้อนี้ไม่มีการตัดกันของเส้นสมการเงื่อนไขในบริเวณที่สนใจ จึงไม่มีการแก้ระบบสมการเพื่อหาจุดตัด)

สุดท้ายคือแทนค่าจุดมุมลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์มากที่สุด

(x, y)	ยอดขาย $= 2000x + 1500y$
$(0, 0)$	0
$(0, 1000/3) \approx (0, 333)$	499500
$(250, 0)$	500000

ซึ่งทำให้ได้ว่าค่ายอดขายสูงสุดที่จะทำได้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดมาคือ $500,000$ บาท ที่จะผลิตโต๊ะอย่างเดียว 250 ตัว

หมายเหตุ 4

ถ้าไม่นับเรื่องการปัดให้เป็นจำนวนเต็มนั้น จริงๆ แล้วที่จุด $(0, 1000/3)$ ก็ให้ค่ายอดขายสูงสุดเป็น 500000 บาทเช่นกัน แต่ว่าเนื่องจากเราต้องปัดให้เป็นจำนวนเต็ม และไม่สามารถปัดขึ้นได้เนื่องจากจะเกินเงื่อนไขที่กำหนดมา ทำให้เราสามารถผลิตได้ยอดขายแค่ 499500 ที่จุดที่จะผลิตตู้อย่างเดียว

นอกจากนั้น ทุกจุดบนเส้นสมการเงื่อนไข $4x + 3y = 1000$ นั้นต่างให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น 500000 เหมือนกันทุกจุด (เป็นโจทย์ทิ้งไว้ให้นักศึกษาลองคิดว่าทำไมถึงเป็นเช่นนั้น) ดังนั้น เราอาจจะเลือกตัวเลือกอื่นที่ไม่ใช่จุดมุมก็ได้ ตราบใดที่ยังเป็นจุดที่ทั้ง x และ y ต่างเป็นจำนวนเต็มและยังอยู่บนเงื่อนไขดังกล่าว (ตัวอย่างเช่น $x = 100, y = 250$ ก็เป็นอีกจุดที่ยังสอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์และให้ค่ายอดขายรวมเป็น 500000 เช่นเดียวกัน)

โจทย์ Challenge

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1500y \\ \texttt{subject to} \quad & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

(a) ทำไมทุกจุดบนเส้นเงื่อนไข $4x + 3y = 1000$ ถึงทำให้ค่ายอดขายรวมได้ราคา $500,000$ บาท เหมือนกันทั้งหมด

(b) ถ้าเกิดทางบริษัท ABC Furniture ไม่ต้องการตัวเลือกที่ผลิตแค่อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น แต่ให้ช่วยลิสต์รายการทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่ทำให้ยอดขายรวมได้ $500,000$ บาทเหมือนกัน เราจะมีวิธีการหาตัวเลือกทั้งหมดนั้นอย่างไร
(คำใบ้ $x = 250 - \frac{3}{4}y$)

□

2. หาผลเฉลยด้วยวิธี Simplex method
3. จงอธิบายความหมายทางเรขาคณิตของแต่ละ simplex tableau ที่ได้ในข้อที่ผ่านมา
4. หาผลเฉลยด้วย Excel Solver
5. ถ้าบริษัทเพิ่มแรงงานได้เป็น 1,200 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ข้อจำกัดเปลี่ยนแปลงอย่างไร และคำตอบใหม่คืออะไร?
6. ถ้าราคาขายตู้เก็บเอกสารเพิ่มเป็น 1,800 บาท จะมีผลต่อคำตอบอย่างไร? ควรผลิตเปลี่ยนไปหรือไม่?

Part C: Sensitivity Analysis

เราสามารถลด (หรือเพิ่ม) ทรัพยากรได้แค่ไหน โดยที่คำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) ยังไม่เปลี่ยน?

1. อธิบายเงื่อนไขเชิงเรขาคณิตที่ทำให้คำตอบที่เหมาะสมที่สุดยังคงอยู่ที่เดิม เมื่อเปลี่ยนค่าด้านขวาของข้อจำกัด (RHS)
2. พิจารณาว่าเราสามารถลดค่าของ RHS ของข้อจำกัดแรงงาน (1000) และวัตถุดิบ (800) ลงอย่างละเท่าไร โดยที่จุดคำตอบเดิมยัง feasible และยังเป็นคำตอบที่ให้ค่า Z มากที่สุด

CHAPTER **2**

ทฤษฎีการตัดสินใจ (Decision Theory)

โจทย์ธุรกิจ

ข้อความ

"ขอบคุณสำหรับแผนการผลิตที่คุณแนะนำครับ แต่เรายังมีปัญหาใหม่เกิดขึ้น... ฝ่ายบริหารกำลังลังเลว่าจะใช้กลยุทธ์ไหนต่อในไตรมาสหน้า เพราะสถานการณ์ตลาดมีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา บางสัปดาห์โต๊ะทำงานขายดี บางสัปดาห์กลับเป็นตู้เอกสารที่มาแรง บางทีก็มีปัญหาขนส่งวัตถุดิบจากซัพพลายเออร์อีก ถ้าจะวางกลยุทธ์ที่เหมาะสม เราควรเลือกแนวทางการผลิตแบบใด?"

คุณสมชายกลับมาอีกครั้ง หลังจากบริษัท ABC Furniture ใช้แบบจำลองเชิงเส้นเพื่อตัดสินใจจำนวนการผลิตโต๊ะทำงานและตู้เก็บเอกสารในแต่ละสัปดาห์ได้แล้ว ซึ่งทำให้ได้ผลดีในช่วงแรก ๆ ที่ใช้งาน แต่ผ่านไปสักพักฝ่ายการตลาดพบว่ามีปัจจัยภายนอกมากระทบทำให้ไม่สามารถใช้แค่เกณฑ์ภายในด้านกำไรมาพิจารณาได้อย่างเดียว และสถานการณ์ตลาดเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว — ทำให้ฝ่ายการผลิตต้องเผชิญกับความไม่แน่นอนหลายด้าน เช่น

- ◇ ราคาขายเปลี่ยนแปลง
- ◇ ความต้องการของลูกค้าเปลี่ยนไป
- ◇ มีปัญหาการขนส่งวัตถุดิบ
- ◇ คู่แข่งออกรุ่นใหม่ที่มีราคาถูกกว่า

เพื่อช่วยในการวางแผน บริษัทจึงอยากรู้ว่า หากมีสถานการณ์ที่ไม่แน่นอน (uncertain states of nature) เกิดขึ้น บริษัทควรเลือกแนวทางการผลิตแบบใดเพื่อรับมือ

คำถามชวนคิด:

- ◇ คุณคิดว่าบริษัท ABC Furniture กำลังเผชิญกับปัญหาแบบใด? ทำไม LP ไม่ตอบโจทย์?
- ◇ คุณต้องการข้อมูลอะไรเพิ่มเติมก่อนจะตอบคำถามของคุณสมชายได้?
- ◇ คุณจะเริ่มต้นจัดกลุ่มหรือจำแนกทางเลือกในการตัดสินใจอย่างไร?
- ◇ หากไม่สามารถรู้อนาคตได้แน่ชัด คุณจะวิเคราะห์หรือวางแผนอย่างไร?
- ◇ ลองจินตนาการว่าบริษัทอาจมี "หลายสถานการณ์ตลาด" ที่อาจเกิดขึ้น คุณจะจัดโครงสร้างปัญหาเพื่อเปรียบเทียบตัวเลือกได้อย่างไร?
- ◇ คุณคาดหวังว่าข้อมูลลักษณะใดจะช่วยให้การตัดสินใจแม่นยำมากขึ้น?

บทนำ

(Draft Version)[1]

- ในบางครั้ง ก็มีทางเลือกที่จะต้องตัดสินใจเลือก
- เป้าหมายคือทางเลือกที่ดีที่สุด
- แต่ก็มีรูปแบบของสถานการณ์ได้หลากหลาย ขึ้นกับการเกิดขึ้นของทางเลือกที่มี: (1) ภายใต้ความแน่นอน (2) ภายใต้ความเสี่ยง และ (3) ภายใต้ความไม่แน่นอน
- ซึ่งการตัดสินใจภายใต้ความเสี่ยงและความไม่แน่นอนนั้นจะใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็นเข้ามาช่วย: ค่าคาดหวัง (expected value)

2.1 ลักษณะการแสดงข้อมูล

เราสามารถแสดงข้อมูลเพื่อความง่ายในการอ่านได้ 2 รูปดังนี้

1. เมทริกซ์การตัดสินใจ (decision matrix) เป็นการแสดงผลจากลัพธ์ (เช่น กำไร) ระหว่างตัวเลือก (option) และเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ที่อาจจะเกิดขึ้น

	เหตุการณ์ 1	เหตุการณ์ 2	$\cdots$	เหตุการณ์ n
ทางเลือก 1				
ทางเลือก 2				
$\vdots$				
ทางเลือก m				

2. ต้นไม้การตัดสินใจ (decision tree) เป็นลักษณะของการแสดงความต่อเนื่องของเหตุการณ์การเลือกโดยอาศัยจุดยอด (node) เชื่อมต่อกัน และปลายกิ่งสุดท้ายจะแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

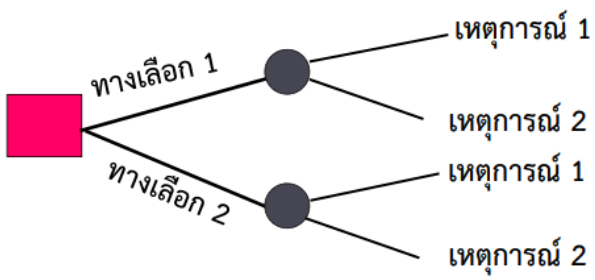


Figure 2.1. Enter Caption

[1] draft for teaching in class, not for text book this semester

ตัวอย่าง 2.1.1: ตัวอย่างการสร้างเมทริกซ์การตัดสินใจ และต้นไม้การตัดสินใจ

ณ บริษัทสมมติแห่งหนึ่ง ต้องการตัดสินใจว่าจะจัดนิทรรศการขนาดเล็ก หรือขนาดกลาง หรือขนาดใหญ่ โดยจากการประเมินเบื้องต้นพบว่าถ้าขายบัตรเข้างานได้หมด จะได้กำไร 8 ล้านบาท, 15 ล้านบาท และ 25 ล้านบาทเรียงตามขนาดของงาน ในขณะที่ถ้าขายได้ 50% ของบัตรทั้งหมดจะได้กำไร 4 ล้านบาท, 15 ล้านบาท และ 10 ล้านบาทตามลำดับ และถ้าขายได้เพียงแค่ 10% ของบัตรทั้งหมดจะได้กำไร 3 บาท และขาดทุน 1 ล้านบาทและ 10 ล้านบาทตามลำดับขนาดของงาน จากเหตุการณ์ดังกล่าว จะสร้างเมทริกซ์การตัดสินใจและต้นไม้การตัดสินใจได้ดังนี้

2.2 การตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอน

- เมื่อทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์ใดขึ้น
- ถึงจะไม่ realistic ในหลาย ๆ กรณี แต่บางครั้งเราก็ต้องพิจารณาในรูปแบบนี้
- เพราะง่ายและตรงไปตรงมา

ตัวอย่าง 2.2.1: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอน

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 จะตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอนของแต่ละเหตุการณ์ได้อย่างไรบ้าง

2.3 การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง

- ไม่ทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์ใด
- แต่พอมีข้อมูลเพื่อคาดการณ์ความน่าจะเป็นของการเกิดแต่ละเหตุการณ์ได้
- ใช้แนวคิดเรื่องของความน่าจะเป็นเข้ามาช่วย

2.3.1 ค่าคาดหวัง (Expected Value)

นิยาม 2.3.1: ค่าคาดหวัง

ภายใต้การทดลองเชิงการสุ่มหนึ่ง ถ้าผลจอบแทนทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $X = X_1, X_2, X_3, \ldots$ (อาจจะมีจำกัด หรือไม่จำกัดเหตุการณ์ก็ได้) โดยที่มีความน่าจะเป็นการได้ผลตอบแทนเป็น $P(X) = P(X_1), P(X_2), P(X_3), \ldots$ ตามลำดับ แล้ว**ค่าคาดหวัง**ของผลตอบแทนจะคำนวณโดย

$$E(X) := X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + X_3P(X_3) + \cdots$$

ซึ่งค่าคาดหวังในเชิงความน่าจะเป็นเปรียบเสมือนค่าเฉลี่ยในเชิงสถิติที่จะบอกแนวโน้มการได้ว่ามักจะได้ค่าไหนเป็นส่วนใหญ่

ตัวอย่าง 2.3.1: ค่าคาดหวังของเหตุการณ์อย่างง่าย

สมมติว่าพนันด้วยการโยนเหรียญไม่เที่ยงตรงอันหนึ่งโดยมีโอกาสออกหัว 0.3 และออกก้อย 0.7 ในการพนันนี้มีกฎว่าถ้าออกหัวผู้เล่นจะได้เงิน 5 บาท ในขณะที่ถ้าออกก้อยผู้เล่นจะเสียเงิน 3 บาท ในการเล่นพนันครั้งนี้ผู้เล่นจะเสียเปรียบหรือว่าได้เปรียบอยู่กี่บาท

2.3.2 เกณฑ์ผลตอบแทน

ตัวอย่าง 2.3.2: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง:ค่าคาดหวังของผลตอบแทน

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขนาดเล็ก	8	4	3
ขนาดกลาง	15	15	-1
ขนาดใหญ่	25	10	-10

และจากการสำรวจสถิติเก่า ๆ พบว่า โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 เนื่องจากเราไม่ทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์แบบไหนขึ้น แต่เราทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิด เราจึงต้องใช้ค่าคาดหวังเข้ามาช่วย

1. เราต้องหาค่าคาดหวังของอะไร (ระบุตัวแปรสุ่ม) โดยที่แยกคิดตามอะไร (ตามขนาดงานหรือตามปริมาณการขายบัตรได้)
2. จงหาค่าคาดหวังตามที่ตั้งไว้
3. และจากค่าคาดหวังที่ได้ ควรเลือกจัดงานขนาดใด
4. ข้อมูลเรื่องความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ นักศึกษาคิดว่าหาได้จากไหนบ้าง (ยกตัวอย่างแหล่งข้อมูล หรือสิ่งที่ขอเพิ่มจากลูกค้า)

2.3.3 เกณฑ์ค่าเสียโอกาส (opportunity loss)

- นอกจากคำนวณจากผลตอบแทนแล้ว เรายังสามารถคำนวณโดยอาศัยเกณฑ์ค่าเสียโอกาส
- ค่าเสียโอกาส = ผลตอบแทนที่ควรได้สูงสุด - ผลตอบแทนกรณีเลือกตัวเลือกดังกล่าว
- และใช้ค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส (Expected Opportunity Loss: EOL) เป็นตัวตัดสินใจ

ตัวอย่าง 2.3.3: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง:ค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขนาดเล็ก	8	4	3
ขนาดกลาง	15	15	-1
ขนาดใหญ่	25	10	-10

และจากการสำรวจสถิติเก่า ๆ พบว่า โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 เนื่องจากเราไม่ทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์แบบไหนขึ้น แต่เราทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิด เราจึงต้องใช้ค่าคาดหวังเข้ามาช่วย

1. จงคำนวณค่าเสียโอกาสที่จะเกิดขึ้นในแต่ละเหตุการณ์
2. จงหาค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส
3. และจากค่าคาดหวังที่ได้ ควรเลือกจัดงานขนาดใด

2.3.4 ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์

- ถ้าเราทราบเหตุการณ์ที่จะเกิดได้ จะทำให้เลือกตัวเลือกที่ทำกำไรได้สูงสุดแน่นอน (มีข่าวสารสมบูรณ์)

$$\text{ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์} = E\,(\text{ผลตอบแทนสูงสุดของแต่ละเหตุการณ์})$$

- แต่ถ้าเราไม่มีข่าวสารอะไรเลย เราจะตัดสินใจได้เพียงแค่ค่าคาดหวังของผลตอบแทนในแต่ละตัวเลือก และเลือกตัวเลือกที่ให้ค่าคาดหวังมากที่สุด

$$\text{ค่าคาดหวังที่สูงที่สุดเมื่อไม่มีข่าวสาร} = \max_{\text{ตัวเลือก}} E\,(\text{ผลตอบแทนตามเหตุการณ์})$$

- เราจึงวัดผลความต่างระหว่างค่าคาดหวังที่จะทำผลตอบแทนได้สูงสุดเมื่อมีข่าวสารสมบูรณ์เทียบกับค่าคาดหวังที่สูงที่สุดเมื่อไม่มีข่าวสาร
- เรียกว่า **ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์** (Expected Value of Perfect Information: EVPI)

$$EVPI = \text{ค่าคาดหวังเมื่อมีข่าวสารสมบูรณ์} - \text{ค่าคาดหวังที่สูงที่สุดเมื่อไม่มีข่าวสาร}$$

ตัวอย่าง 2.3.4: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง:ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขนาดเล็ก	8	4	3
ขนาดกลาง	15	15	-1
ขนาดใหญ่	25	10	-10

และจากการสำรวจสถิติเก่า ๆ พบว่า โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 จงคำนวณหา EVPI และอภิปรายค่าที่ได้ในแง่ของการลงทุนทำ R&D เพิ่มเติม

ผลพลอยได้อย่างหนึ่งที่น่าสนใจคือไม่ว่าเราจะใช้เกณฑ์ใดก็ตาม เราจะได้วิธีการตัดสินใจเดียวกันเสมอ

ทฤษฎีบท 2.3.1: ปัญหาคู่กันของเกณฑ์ผลตอบแทนและเกณฑ์ค่าเสียโอกาส

ผลการตัดสินใจที่ได้จากค่าคาดหวังของผลตอบแทนจะเหมือนกับผลการตัดสินใจจากค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส

$$\arg\max_{\text{ตัวเลือก}} E\left(\text{ผลตอบแทน}\right) = \arg\min_{\text{ตัวเลือก}} E\left(\text{ค่าเสียโอกาส}\right)$$

และทำให้เราได้ผลตามมาว่า

บทตาม 2.3.1: EVPI กับ EOL

$$EVPI = \min_{\text{ตัวเลือก}} E\left(\text{ค่าเสียโอกาส}\right)$$

(ข้ามได้) เพื่อความง่ายสำหรับนักศึกษาที่ไม่คุ้นเคยกับการคิดคณิตศาสตร์แบบนามธรรม ขอกำหนดให้เรามีทางเลือก 3 ทางเลือก และเหตุการณ์ 4 เหตุการณ์

Exercise 2.3.1: คำถามช่วยไกด์

1. กำหนดให้เมทริกซ์ผลตอบแทนคือ $D = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ความน่าจะเป็นคือ $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$ แล้วเราจะสามารถใช้ D และ $\vec{p}$ เขียนแสดงค่าคาดหวังของผลตอบแทนได้อย่างไร
   (Ans: $\vec{E}\left(\text{ผลตอบแทน}\right) = D\vec{p}$)
2. เพื่อที่จะเขียนเมทริกซ์ที่แสดงถึงค่าเสียโอกาส ขอสมมติว่าให้ในเหตุการณ์ที่ 1, 2, 3 และ 4 มีผลตอบแทนที่ได้มากที่สุดเป็น $x_{11}, x_{32}, x_{23}, x_{24}$ ตามลำดับ กล่าวคือในเหตุการณ์ที่ 1, 2, 3 และ 4 นั้นทางเลือกที่ 1, 3, 2 และ 2 จะให้ผลตอบแทนเยอะสุดตามลำดับ จงเขียนค่าเสียโอกาสรายตัวเลือกให้อยู่ในรูปเมทริกซ์
3. ถ้าไม่กำหนดแบบเจาะจงว่าตัวเลือกใดให้ผลตอบแทนมากที่สุดในแต่ละเหตุการณ์ แต่สมมติว่าให้ผลตอบแทนที่มากที่สุดของเหตุการณ์ที่ 1, 2, 3 และ 4 มีผลตอบแทนที่ได้มากที่สุดเป็น M_1, M_2, M_3, M_4 ตามลำดับ จงเขียนค่าเสียโอกาสรายตัวเลือกให้อยู่ในรูปเมทริกซ์
   (Ans: $M - D$ โดยที่ทุกแถวของ M คือ M_1, M_2, M_3, M_4)
4. จงหาค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส
   (Ans: $\vec{E}\left(\text{ค่าเสียโอกาส}\right) = M\vec{p} - D\vec{p}$)
5. คราวนี้เราจะสามารถพิสูจน์ผลใน 2.3.1 โดยใช้ผลจากข้อ 1 และข้อ 4

2.4 การตัดสินใจภายใต้สภาวะที่ไม่แน่นอน

maximax criterion

เหมาะกับผู้ตัดสินใจที่มีนิสัยกล้าได้กล้าเสีย โดยเลือกค่าผลลัพธ์สูงสุด (Maximum payoff) ของแต่ละทางเลือก แล้วเลือกค่าที่มากที่สุดในบรรดานั้น

$$\text{Maximax} = \max_i \left(\max_j \; a_{ij} \right)$$

โดยที่ a_{ij} คือค่าผลลัพธ์ของกลยุทธ์ i เมื่อเกิดเหตุการณ์ j

maximin criterion

เหมาะกับผู้ตัดสินใจที่ระมัดระวัง โดยเลือกค่าผลลัพธ์ต่ำสุด (Minimum payoff) ของแต่ละทางเลือก แล้วเลือกค่าที่มากที่สุดในบรรดานั้น

$$\text{Maximin} = \max_i \left(\min_j \; a_{ij} \right)$$

minimax regret criterion

คำนวณ “ความเสียใจ” (regret) โดยการหาผลต่างระหว่างผลลัพธ์ที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์ กับค่าของแต่ละกลยุทธ์ แล้วเลือกกลยุทธ์ที่มี regret สูงสุดน้อยที่สุด

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}, \qquad \text{Minimax Regret} = \min_i \left(\max_j \; r_{ij} \right)$$

Laplace criterion

ถือว่าทุกสถานการณ์มีโอกาสเกิดเท่ากัน แล้วคำนวณค่าเฉลี่ยของแต่ละกลยุทธ์ จากนั้นเลือกค่าที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

$$\text{Laplace} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$$

โดยที่ n คือจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้

Hurwicz criterion

ประนีประนอมระหว่าง maximax และ maximin โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์ α ที่สะท้อนระดับความมองโลกในแง่ดี

$$\text{Hurwicz}_i = \alpha \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \min_j a_{ij}$$

โดย $0 \leq \alpha \leq 1$ และเลือกกลยุทธ์ที่ให้ค่าดังกล่าวสูงสุด

ตัวอย่าง 2.4.1: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความไม่แน่นอน

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขนาดเล็ก	8	4	3
ขนาดกลาง	15	15	-1
ขนาดใหญ่	25	10	-10

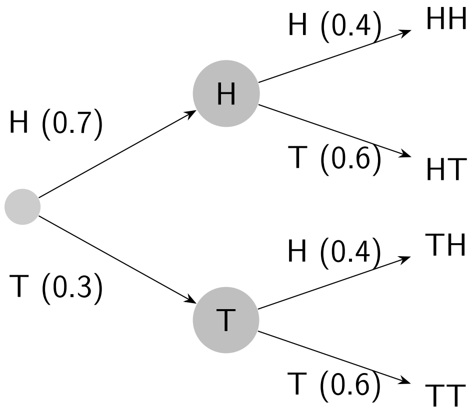
จงคำนวณค่าตามเกณฑ์ต่าง ๆ และเปรียบเทียบผลการตัดสินใจที่ได้

2.5 การใช้ต้นไม้การตัดสินใจ

ไม่ใช่การคำนวณใหม่ แต่เป็นวิธีการคิดสิ่งเดิมโดยใช้แผนภาพเข้ามาช่วย

2.5.1 การคิดค่าคาดหวังด้วยแผนภาพต้นไม้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

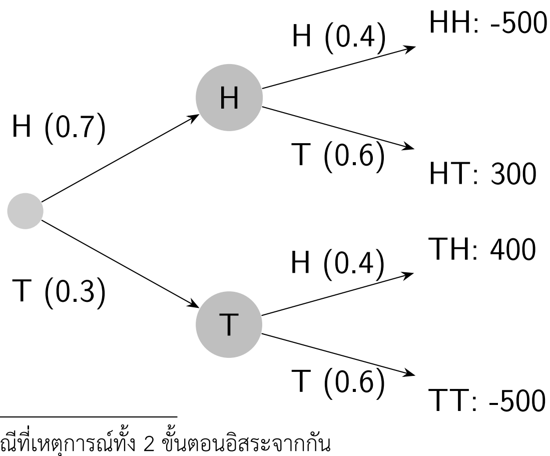
การคิดเกี่ยวกับเหตุการณ์ความน่าจะเป็นนั้นสามารถเขียนในรูปแบบการวาดแผนภาพต้นไม้เพื่อพิจารณาเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่อเนื่องกัน ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 2 เหรียญต่อเนื่องกัน โดยเหรียญแรกเป็นเหรียญไม่เที่ยงตรงที่มีโอกาสออกหัว 0.7 และออกก้อย 0.3 ในขณะที่เหรียญที่สองเป็นเหรียญที่มีโอกาสออกหัว 0.4 และออกก้อย 0.6 ถ้าเราพิจารณาความน่าจะเป็นที่จะได้ เราสามารถวาดแผนภาพได้ดังนี้



ซึ่งสามารถนำมาช่วยคิดค่าความน่าจะเป็นได้โดยอาศัยลักษณะการคูณของสายต่อเนื่อง เช่น[2]

$$P(HT) = P(H)\,P(T) = 0.7 \times 0.6 = 0.42$$

และในกรณีที่มีเรื่องของผลลัพท์เพื่อนำมาคิดค่าคาดหวังของผลลัพธ์นั้น เราอาจจะเขียนแผนภาพต้นไม้เพิ่มเติมได้ดังนี้



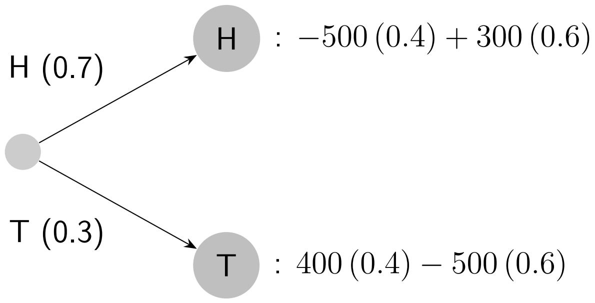
[2]เราพิจารณากรณีง่าย ซึ่งคือกรณีที่เหตุการณ์ทั้ง 2 ขั้นตอนอิสระจากกัน

ซึ่งเราสามารถคิดค่าคาดหวังของผลลัพธ์ได้ตามแบบนิยามของค่าคาดหวังได้เป็น

$$\begin{aligned} E\left(\text{ผลลัพธ์}\right) &= -500P\left(HH\right)+300P\left(HT\right)+400P\left(TH\right)-500P\left(TT\right) \\ &= -500\left(0.7\right)\left(0.4\right)+300\left(0.7\right)\left(0.6\right)+400\left(0.3\right)\left(0.4\right)-500\left(0.3\right)\left(0.6\right) \end{aligned}$$

แต่ถ้าพิจารณาตามลำดับขั้นการคำนวณตามแผนภาพต้นไม้ เราสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\begin{aligned} E\left(\text{ผลลัพธ์}\right) &= -500\left(0.7\right)\left(0.4\right)+300\left(0.7\right)\left(0.6\right)+400\left(0.3\right)\left(0.4\right)-500\left(0.3\right)\left(0.6\right) \\ &= \left(-500\left(0.4\right)+300\left(0.6\right)\right)\left(0.7\right)+\left(400\left(0.4\right)-500\left(0.6\right)\right)\left(0.3\right) \\ &= \text{ค่าคาดหวังที่ต้นไม่ย่อยที่เหรียญแรกออกหัว}\left(0.7\right)+\text{ค่าคาดหวังที่ต้นไม่ย่อยที่เหรียญแรกออกก้อย}\left(0.3\right) \end{aligned}$$



$: \left(-500\left(0.4\right)+300\left(0.6\right)\right)\left(0.7\right)+\left(400\left(0.4\right)-500\left(0.6\right)\right)\left(0.3\right)$

กล่าวคือ ในกรณีที่เรามีแผนภาพลำดับของการเกิดเหตุกาเมี่รณ์ในรูปแบบของแผนภาพต้นไม้ เราสามารถคิดค่าคาดหวังของทั้งต้นไม้นั้นได้โดยคิดจาดค่าคาดหวังของต้นไม้ย่อยก่อน หรือก็คือคิดไต่ขึ้นมาจากปลายกิ่งไล่ไปหาจุดรากของแผนภาพ

2.5.2 เมื่อมีตัวเลือกเข้ามาเกี่ยวข้อง

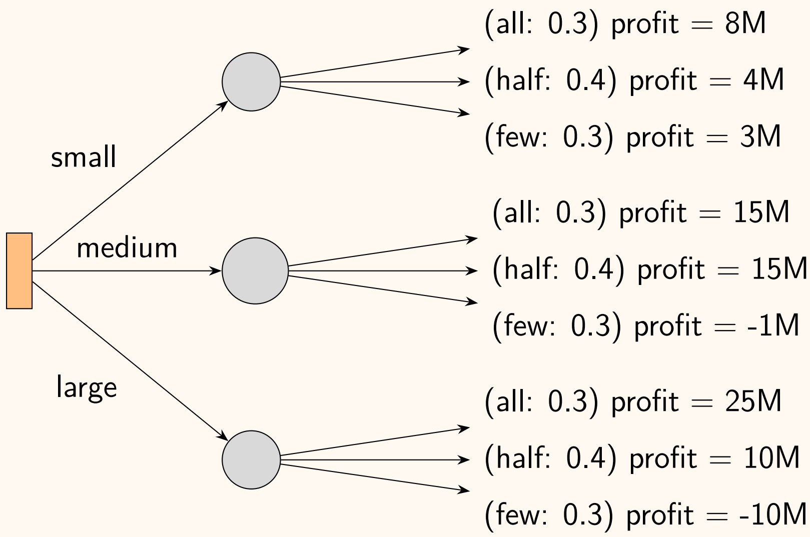
ความแตกต่างสำคัญระหว่างตัวเลือกและเหตุการณ์คือ ตัวเลือกเป็นสิ่งที่เรากำหนดให้เป็นขึ้นกับข้อมูลที่มี ในขณะที่เหตุการณ์คือสิ่งที่เราควบคุมไม่ได้ ยิ่งเฉพาะในการตัดสินใจภายใต้ความเสี่ยงนั้น เหตุการณ์จะเป็นสิ่งที่มีค่าความน่าจะเป็นมาเป็นตัวควบคุมโอกาสที่จะเกิด

ในหัวข้อที่ผ่านมา เป็นพื้นฐานการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและค่าคาดหวังโดยใช้แผนภาพต้นไม้เป็นเครื่องมือช่วยให้เราคำนวยณได้อย่างเป็นระบบมากขึ้น ซึ่งมีเพียงแค่ลำดับของเหตุการณ์ที่เข้ามาพิจารณาเท่านั้น ยังไม่มีตัวเลือกอยู่ในแผนภาพต้นไม้

เมื่อมีตัวเลือกเข้ามาเกี่ยวข้อง แผนภาพต้นไม้จะไม่สามารถคิดด้วยหลักความน่าจะเป็นของทั้งแผนภาพได้ แต่จะใช้วิธีการตัดสินใจเลือกตัวเลือกไล่ลำดับไปจากปลายกิ่งไปราก (ขวาไปซ้าย) โดยการเลือกทางเลือกที่ให้ค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่มากที่สุด

ตัวอย่าง 2.5.1: การตัดสินใจโดยใช้ต้นไม้การตัดสินใจ

จากเหตุการณ์ในตัวอย่าง 2.1.1 เราจะสามารถวาดแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



โดยที่โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 จงเขียนขั้นตอนการตัดสินใจโดยใช้แผนภาพต้นไม้การตัดสินนี้ (แบ่งส่วนแผนภาพต้นไม้ความน่าจะเป็นขึ้นมาก่อนเพื่อหาค่าคาดหวัง แล้วค่อยตัดสินใจด้วยค่าคาดหวังของแต่ละต้นไม้ย่อย)

ตัวอย่าง 2.5.2: การตัดสินใจโดยใช้ต้นไม้การตัดสินใจ 2

บริษัท ABC กำลังพิจารณาว่าควรจะเปิดตัวผลิตภัณฑ์ใหม่เข้าสู่ตลาดหรือไม่ โดยมีทางเลือกหลายขั้นตอนซับซ้อนที่ต้องประเมินต้นทุน ความไม่แน่นอน และผลตอบแทนที่อาจเกิดขึ้น ดังนี้:

- **ขั้นตอนที่ 1: การทดสอบผลิตภัณฑ์**
  - บริษัทสามารถเลือกที่จะทำการทดสอบผลิตภัณฑ์ก่อน โดยมีโอกาส:
    - 80% ที่ผลิตภัณฑ์ **ผ่าน** การทดสอบ
    - 20% ที่ผลิตภัณฑ์ **ไม่ผ่าน** การทดสอบ และบริษัทจะขาดทุนทันที 100,000 บาท
  - หากผ่านการทดสอบ จะเข้าสู่ขั้นตอนถัดไป คือการทดสอบตลาด
- **ขั้นตอนที่ 2: การทดสอบตลาด**
  - ผลิตภัณฑ์ที่ผ่านการทดสอบ จะถูกนำไปทดสอบตลาดกับกลุ่มลูกค้าตัวอย่าง โดยมีโอกาส:
    - 90% ที่ตลาด **ยอมรับผลิตภัณฑ์ใหม่**
    - 10% ที่ตลาด **ไม่ยอมรับ** และบริษัทจะขาดทุน 250,000 บาท
  - หากตลาดยอมรับ จะเข้าสู่การตัดสินใจว่าจะนำผลิตภัณฑ์เข้าสู่ตลาดหรือไม่
- **ขั้นตอนที่ 3: การตัดสินใจเปิดตัวผลิตภัณฑ์**
  1. **หากเปิดตัวผลิตภัณฑ์** ความสำเร็จในตลาดมีระดับและผลตอบแทนต่างกัน:
     - ยอดขายสูง $(40\%) \to$ กำไร 1,450,000 บาท
     - ยอดขายปานกลาง $(40\%) \to$ กำไร 450,000 บาท
     - ยอดขายต่ำ $(20\%) \to$ ขาดทุน 150,000 บาท
  2. **หากไม่เปิดตัว** จะยอมขาดทุนค่าทดสอบตลาด 250,000 บาท
- **ทางเลือกทางลัด: ข้ามการทดสอบผลิตภัณฑ์และเข้าสู่ตลาดทันที**
  - หากบริษัทเลือกข้ามขั้นตอนและนำผลิตภัณฑ์เข้าสู่ตลาดทันที:
    - ยอดขายสูง $(10\%) \to$ กำไร 1,700,000 บาท
    - ยอดขายปานกลาง $(40\%) \to$ กำไร 700,000 บาท
    - ยอดขายต่ำ $(50\%) \to$ กำไร 100,000 บาท

บริษัทควรดำเนินการตามทางเลือกใด เพื่อให้ได้ **ผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด** ภายใต้ต้นทุนและความไม่แน่นอนในแต่ละขั้นตอน?

2.6 การใช้โปรแกรม QM for Windows

Assignment (need revise)

PART A:

หลังจากบริษัท ABC Furniture ได้ใช้การวิเคราะห์เชิงเส้นในการวางแผนการผลิตช่วงไตรมาสก่อนหน้า บริษัทได้รับผลลัพธ์ที่ดีในช่วงแรก แต่ปัจจุบันกลับพบว่าไม่สามารถพึ่งพาแบบจำลองเดิมได้ตลอดเวลา เนื่องจากมีความไม่แน่นอนในตลาดสูงขึ้นเรื่อย ๆ เช่น ราคาวัตถุดิบผันผวน การแข่งขันสูง และความต้องการของลูกค้าที่แปรเปลี่ยนตลอด

สถานการณ์ทางเลือก: สำหรับไตรมาสถัดไป ฝ่ายผลิตเสนอ 3 กลยุทธ์ให้ฝ่ายบริหารพิจารณา:

- ◇ **กลยุทธ์ A:** เพิ่มกำลังผลิต "โต๊ะทำงาน" ให้มากที่สุด โดยลดสัดส่วนตู้เก็บเอกสารลง
- ◇ **กลยุทธ์ B:** เพิ่มกำลังผลิต "ตู้เก็บเอกสาร" ให้มากที่สุด โดยลดสัดส่วนโต๊ะทำงานลง
- ◇ **กลยุทธ์ C:** กระจายการผลิตแบบสมดุลระหว่างทั้งสองประเภท

สถานการณ์ตลาด (States of Nature): ฝ่ายการตลาดระบุว่าสถานการณ์ตลาดอาจเป็นไปได้ 3 แบบในไตรมาสหน้า:

- ◇ **สถานการณ์ 1 (S1) — โต๊ะบูม:** โต๊ะทำงานขายดีมาก ตู้ขายได้น้อย
- ◇ **สถานการณ์ 2 (S2) — ตลาดสมดุล:** สินค้าทั้งสองขายได้ใกล้เคียงกัน
- ◇ **สถานการณ์ 3 (S3) — ตู้บูม:** ตู้เอกสารขายดีมาก โต๊ะขายได้น้อย

ฝ่ายบริหารต้องการทราบว่า ภายใต้แต่ละกลยุทธ์นั้น ถ้าเกิดสถานการณ์ตลาดแต่ละแบบ จะได้กำไรเท่าไร โดยฝ่ายวิเคราะห์ประเมินกำไร (หน่วย: พันบาท) ดังตาราง:

กลยุทธ์การผลิต	S1: โต๊ะบูม	S2: สมดุล	S3: ตู้บูม
A (เน้นโต๊ะ)	1,500	900	100
B (เน้นตู้)	200	800	1,400
C (สมดุล)	800	850	700

คำสั่ง:

1. วิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน โดยใช้เกณฑ์ต่อไปนี้:

    - ◇ Maximax Criterion
    - ◇ Maximin Criterion
    - ◇ Laplace Criterion
    - ◇ Hurwicz Criterion (ใช้ $\alpha = 0.6$)
    - ◇ Minimax Regret Criterion

2. แต่ละเกณฑ์แนะนำกลยุทธ์ใด? อธิบายว่าแต่ละเกณฑ์สะท้อนทัศนคติความเสี่ยงแบบใด?
3. ใช้โปรแกรม **QM for Windows** เพื่อคำนวณและตรวจสอบผลลัพธ์ พร้อมแนบภาพประกอบผลลัพธ์

PART B:

หลังจากฝ่ายบริหารบริษัท ABC Furniture ได้พิจารณาตารางผลตอบแทนจากกลยุทธ์ต่าง ๆ แล้ว ยังคงมีความลังเล เนื่องจากบริษัทไม่สามารถคาดการณ์สถานการณ์ตลาดล่วงหน้าได้อย่างแม่นยำ

คุณสมชายจึงเสนอแนวคิดว่า *“หากบริษัทจ้างนักวิเคราะห์ตลาดมืออาชีพมาช่วยประเมินแนวโน้มตลาดก่อนได้หรือไม่?”* ซึ่งจะมีค่าใช้จ่ายในการจ้างทีมวิเคราะห์ภายนอกอยู่ที่ 150,000 บาท ทีมวิเคราะห์จะให้ผลลัพธ์เป็น **สัญญาณตลาดล่วงหน้า** (Market Signal) ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบคือ:

- **สัญญาณบวก (Positive Signal):** แสดงว่าตลาดมีแนวโน้มดี
- **สัญญาณลบ (Negative Signal):** แสดงว่าตลาดมีแนวโน้มผันผวนหรือถดถอย

บริษัทสามารถเลือกที่จะ “เปิดกลยุทธ์ A, B หรือ C” หลังจากได้รับสัญญาณจากนักวิเคราะห์ก็ได้ หรือจะตัดสินใจ “ไม่เปลี่ยนแผน” ก็ได้เช่นกัน

ข้อมูลความแม่นยำของนักวิเคราะห์ตลาด จากประวัติ:

- หากสถานการณ์ตลาดเป็น **S1 (โต๊ะบูม)** → ให้สัญญาณบวก 80%, สัญญาณลบ 20%
- หากสถานการณ์ตลาดเป็น **S2 (สมดุล)** → ให้สัญญาณบวก 50%, สัญญาณลบ 50%
- หากสถานการณ์ตลาดเป็น **S3 (ตู้บูม)** → ให้สัญญาณบวก 30%, สัญญาณลบ 70%

ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานการณ์ตลาด (ตามฝ่ายการตลาดประเมิน): S1: 25%, S2: 50%, S3: 25%

คำสั่ง:

1. วาดแผนภาพ Decision Tree ที่เริ่มจากทางเลือก “จ้างนักวิเคราะห์” หรือ “ไม่จ้าง”
2. แสดงการแตกเหตุการณ์ตามลำดับ: สัญญาณ □ สถานการณ์ตลาด □ กลยุทธ์การผลิต □ ผลตอบแทนสุทธิ (หักค่าจ้าง)
3. คำนวณ **Expected Monetary Value (EMV)** ของแต่ละทางเลือก (รวมต้นทุน 150,000 กรณีที่จ้าง)
4. สร้างโมเดลนี้ใน **QM for Windows** เพื่อยืนยันผลลัพธ์ พร้อมแนบภาพผลลัพธ์
5. คุณคิดว่าการจ้างนักวิเคราะห์มีความคุ้มค่าหรือไม่?

CHAPTER 3

ทฤษฎีการจำลองสถานการณ์ (Simulation)

โจทย์ธุรกิจ: ความไม่แน่นอนในกระบวนการผลิตของ ABC Furniture

ข้อความจากคุณสมชาย

"หลังจากที่เราได้วางแผนการผลิตและกลยุทธ์รับมือกับตลาดที่ไม่แน่นอนผ่านแบบจำลองเชิงเส้นและทฤษฎีการตัดสินใจเรียบร้อยแล้ว แต่สิ่งที่เรายังไม่สามารถคาดการณ์ได้แน่นอน คือเวลาที่ต้องใช้ในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการผลิตจริง ๆ บางครั้งแรงงานลาป่วย บางครั้งเครื่องจักรเสีย หรือบางสัปดาห์มีคำสั่งซื้อเร่งด่วนแทรกเข้ามา เราจึงอยากจำลองสถานการณ์เหล่านี้ เพื่อดูว่าจะกระทบต่อการผลิตและการจัดส่งอย่างไร และควรจะปรับการจัดการโรงงานอย่างไรดี"

บริษัท ABC Furniture กำลังเผชิญกับความไม่แน่นอนใน **ระยะเวลาการผลิตแต่ละชิ้นงาน** และ **ปริมาณคำสั่งซื้อที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลา** โดยเฉพาะในช่วงโปรโมชั่นและเทศกาลยอดนิยม ซึ่งอาจทำให้กระบวนการผลิตไม่สามารถดำเนินไปตามแผนได้

เพื่อรองรับเหตุการณ์ที่คาดเดาไม่ได้เหล่านี้ ผู้จัดการฝ่ายผลิตต้องการเครื่องมือในการ "ทดลอง" และ "คาดการณ์ผลลัพธ์" ของทางเลือกที่เป็นไปได้ โดยไม่ต้องเสี่ยงจริงในโลกธุรกิจจริง ซึ่งนำไปสู่แนวคิดของ **การจำลองสถานการณ์ (Simulation)** ที่จะช่วยให้บริษัทสามารถวิเคราะห์ผลกระทบจากตัวแปรสุ่มต่าง ๆ ต่อกระบวนการผลิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำถามชวนคิด:

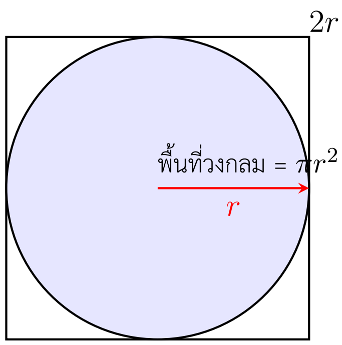
- ในสถานการณ์แบบนี้ คุณคิดว่า "สูตรคำนวณตายตัว" ที่เคยใช้ในบทก่อน ๆ ยังเหมาะสมอยู่หรือไม่?
- คุณจะเก็บข้อมูลอะไรเพื่อใช้ในการจำลองเหตุการณ์ในกระบวนการผลิต?
- คุณจะจำลองขั้นตอนใดในกระบวนการผลิตก่อน เช่น เวลาในการประกอบสินค้า การขนส่ง หรือการเตรียมวัตถุดิบ?
- ถ้าคุณลอง "สุ่มเหตุการณ์" ต่าง ๆ แล้วพบว่าเกิดความล่าช้าเป็นประจำ คุณจะวางแผนการผลิตใหม่อย่างไร?
- ถ้าต้องเขียนโปรแกรมจำลองขั้นตอนการผลิต คุณจะออกแบบลำดับเหตุการณ์หรือเงื่อนไขไว้อย่างไร?
- ผลลัพธ์ของการจำลองแบบใดที่จะช่วยให้ฝ่ายผลิตวางแผนจัดกำลังคนและเครื่องจักรได้ดีขึ้น?

3.1 แนวคิดเบื้องต้นของการจำลอง

- บางสถานการณ์อาจไม่สามารถเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ตัวแบบเพื่ออธิบายสถานการณ์ได้เพราะระบบมีความซับซ้อนมากเกินไปหรือมีเงื่อนไขบางประการที่ทำให้ไม่สามารถใช้ตัวแบบที่มีอยู่แล้วได้
- ทำให้ต้องสุ่มภายใต้ข้อมูลที่มีเพื่อประมาณค่าจากการทำการทดลองสุ่มหลาย ๆ การทดลอง
- ในหัวข้อกรณีตัวอย่างที่จะกล่าวถึงถัดไป เป็นตัวอย่างพื้นฐานที่แสดงให้เห็นว่าการทำการทดลองสุ่มโดยที่จำลองสถานการณ์ให้เหมือน (หรือคล้าย) เหตุการณ์จริงจะสามารถประมาณค่าผลเฉลยให้ใกล้เคียงค่าจริงได้

3.1.1 กรณีตัวอย่าง: การหาค่า π

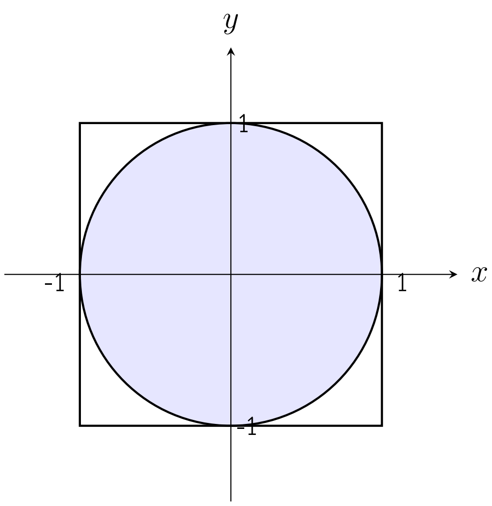
จากชุดความรู้เบื้องต้นที่เรามีคือ $\pi = \frac{\pi r^2}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{(2r)^2} = 4\left(\frac{\text{พื้นที่วงกลม}}{\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมจตุรัสที่แนบวงกลม}}\right)$



พื้นที่สี่เหลี่ยม = $(2r)^2 = 4r^2$

แต่เราไม่รู้ว่าค่า π คือเท่าไหร่ เราจึงออกแบบการทดลองที่ถูกออกแบบให้อธิบายชุดความรู้ที่เรามีได้ ซึ่งก็คือการสุ่มโยนจุดเข้าไปในรูปสี่เหลี่ยม แล้วหาอัตราส่วนของจำนวนจุดที่อยู่ภายในวงกลม (แสดงถึงพื้นที่วงกลม) ต่อจำนวนจุดทั้งหมดที่โยนเข้าไป (แสดงถึงพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส) แล้วนำอัตราส่วนที่ได้มาคูณกับ 4 จะได้ค่าประมาณของ π

เพื่อให้การสุ่มสามารถถูกควบคุมและวัดผลได้ เราจึงต้องใช้ระบบพิกัดฉากเข้ามาช่วยในการแสดงผล โดยที่เราจะให้จุดศูนย์กลางของวงกลมวางที่จุดกำเนิด และรัศมีของวงกลมมีค่าเท่ากับ $r = 1$



และเงื่อนไขการสุ่มจุด (x, y) เป็นไปดังนี้

- การสุ่มเป็นแบบ uniform กล่าวคือทุกตำแหน่งมีโอกาสเท่ากัน
- สุ่ม x และ y อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ เพื่อให้มั่นใจว่าอยู่ภายในสี่เหลี่ยมจตุรัส

ทั้งนี้ การตรวจสอบว่าจุด (x, y) อยู่ในวงกลมหรือไม่ เราสามารถเช็คได้ด้วยเงื่อนไขว่า

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

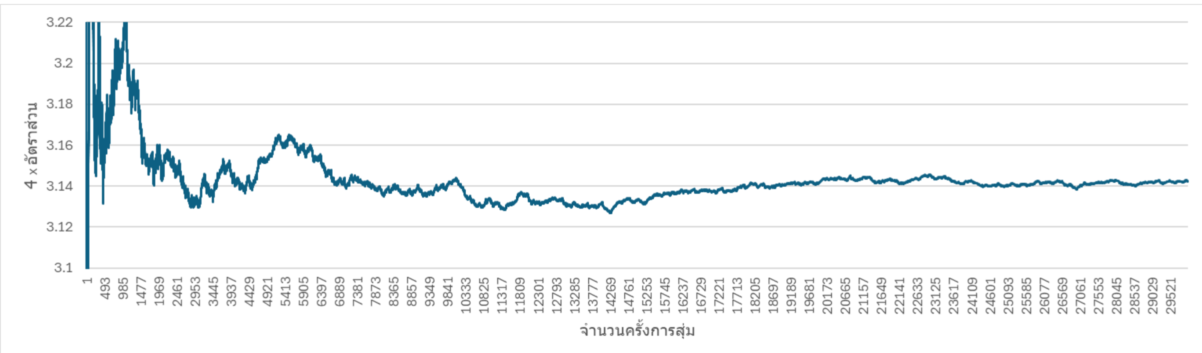
ซึ่งเราสามารถใช้ Excel ช่วยในการสุ่มได้ดังนี้

- Column A: ครั้งที่ทดลอง
- Column B-C: สุ่ม x และ y ด้วยคำสั่ง =RANDARRAY(จำนวนครั้งที่ทดลอง,2,-1,1,FALSE)
- Column D: เช็คว่าจุดอยู่ในวงกลมหรือไม่โดยใช้ ColumnB^2 + ColumnC^2 <= 1
- Column E: นับจำนวนจุดที่อยู่ในวงกลมตั้งแต่การทดลองที่ 1 จนถึงการทดลองปัจจุบัน
- Column F: หาค่า 4*อัตราส่วน

ตัวอย่าง 5 แถวแรกและ 5 แถวสุดท้ายของตารางกรณีสุ่ม 30000 ครั้ง:

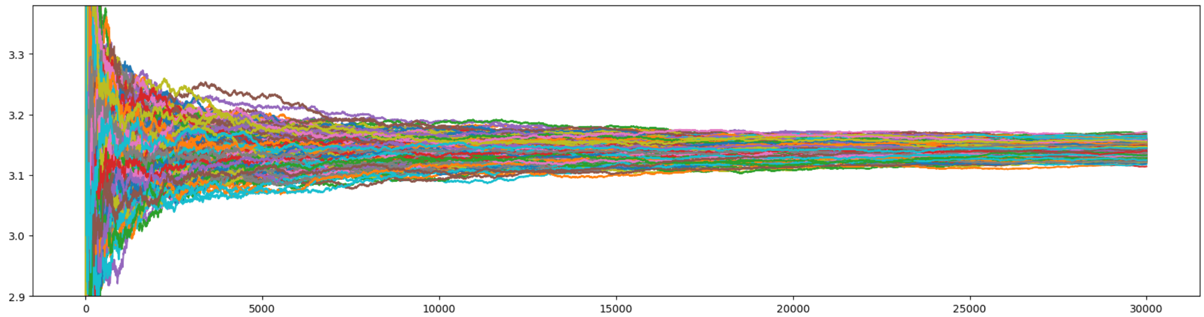
A	B	C	D	E	F
ครั้งที่สุ่ม	สุ่ม x	สุ่ม y	x^2+y^2<=1	num in circle	4*ratio
1	-0.10709	-0.4236	TRUE	1	4
2	-0.49781	0.11569	TRUE	2	4
3	0.56874	-0.82837	FALSE	2	2.66667
4	-0.79338	-0.63925	FALSE	2	2
5	0.32044	-0.98582	FALSE	2	1.6
A	B	C	D	E	F
29996	-0.80188	-0.40379	TRUE	23565	3.14242
29997	0.93949	0.58746	FALSE	23565	3.14231
29998	-0.37564	0.87125	TRUE	23566	3.14234
29999	-0.41641	-0.6536	TRUE	23567	3.14237
30000	-0.27141	-0.63152	TRUE	23568	3.1424

และเมื่อลองทำการพล็อตกราฟของค่าที่เราสนใจ (Column F) จะได้ดังรูป

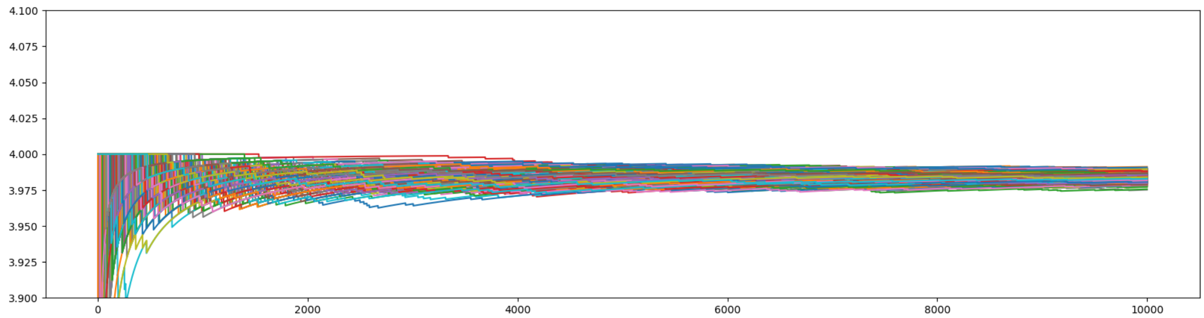


ซึ่งจะเห็นว่ายิ่งเราทำการสุ่มมากขึ้นเท่าไหร่ ค่าที่เราตั้งไว้ (4 เท่าของอัตราส่วน) เพื่อวัดสิ่งที่เราอยากค้นหา (ค่า π) จะยิ่งเข้าใกล้ค่าที่เราอยากค้นหาดังกล่าวมากขึ้นเรื่อยๆ

สามารถออกแบบการทดลองในทำนองเดียวกันคือทำการทดลองสุ่ม 30000 จุดหลาย ๆ รอบแล้วหาค่าเฉลี่ยค่าของรอบสุ่มที่ 30000 ของทุกชุดการทดลองก็ได้เช่นกันโดยรูปด้านล่างคือตัวอย่างการทดลองที่ทำการทดลอง 500 รอบ ซึ่งได้ค่าเฉลี่ยของค่าอัตราส่วนรอบที่ 30000 อยู่ที่ 3.141638 จากค่าประมาณจริง ๆ ของ $\pi \approx 3.1415926$ (ถ้าทำใน Excel อาจจะเจอปัญหาเรื่อง memory ไม่พอ แต่จะมีความแม่นยำกว่าการทดลองรอบเดียว เลยอาจต้องใช้เครื่องมือเช่นเขียน Python)



ทั้งนี้ จะเห็นว่าเรามีการกำหนดเงื่อนไขการสุ่ม ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญที่สุดของการจะจำลองสถานการณ์ ตัวอย่างเช่นกรณีนี้ก็คือต้องสุ่มแบบ Uniform เนื่องจากลักษณะการคำนวณอัตราส่วนของพื้นที่นั้นมีสมมติฐานว่าทุกจุดพื้นที่จะต้องมีความสำคัญเท่ากัน ไม่มีจุดใดจุดหนึ่งที่มีโอกาสมากกว่าจุดอื่นเพื่อไม่ให้เกิดอคติ (bias) ในการสุ่ม เช่นในตัวอย่างเดิม ถ้าเราเปลี่ยนสมมติฐานตั้งต้นให้สุ่มแบบ Normal Distribution ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ 0.3 ที่จะมีโอกาสสุ่มได้บริเวณจุดกำเนิดมากกว่าจุดขอบ ๆ ซึ่งจะแสดงพฤติกรรมว่าจุดนอกวงกลมมีโอกาสน้อยกว่าจุดในวงกลม จะได้ว่าผลการประมาณค่าเปลี่ยนเป็น 3.9844 แทนที่จะเข้าใกล้ค่า π ตามรูป



หมายเหตุ (สำหรับอ่านเพิ่มเติม)

ตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างที่มีทฤษฎีเบื้องหลังและสามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันว่าผลที่ได้จากการทดลองเป็นไปตามทฤษฎี (อาจมีคลาดเคลื่อนเล็กน้อย) เนื่องจากเป็นสถานการณ์ที่สามารถอธิบายได้ด้วยการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ไม่ซับซ้อน (ซึ่งไม่ค่อยพบในโลกจริงที่มักจะเป็นระบบที่ซับซ้อน)

กรณีที่ X, Y แจกแจงแบบคงที่

Proof. กำหนดให้ X, Y เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ ซึ่งแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform) บนช่วง $[-1, 1]$ ดังนั้นคู่ (X, Y) จะกระจายอยู่ทั่วพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว 2 หน่วย และมีพื้นที่รวมเท่ากับ 4 หน่วยตาราง
นิยามเหตุการณ์ A ว่าเป็นเหตุการณ์ที่จุด (X, Y) ตกอยู่ภายในวงกลมรัศมี 1 ซึ่งมีสมการคือ $X^2 + Y^2 \leq 1$ จะได้ว่า

$$P\left((X, Y) \in A\right) = \frac{\text{พื้นที่ของวงกลม}}{\text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

เมื่อสุ่มจุด N จุดจากการแจกแจงนี้ ให้ S เป็นจำนวนจุดที่ตกในวงกลม จะได้ว่า $S = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{(X_i, Y_i) \in A}$
ดังนั้นสัดส่วนของจุดที่อยู่ในวงกลมคือ $Z = \frac{S}{N}$ ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม และค่าคาดหมายคือ:

$$\mathbb{E}\left[Z\right] = \mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(X_i, Y_i) \in A}\right] = P\left((X, Y) \in A\right) = \frac{\pi}{4}$$

นั่นคือ ค่าคาดหวังของสัดส่วนของจุดที่อยู่ในวงกลมจะมีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ เสมอ โดยไม่ขึ้นกับจำนวนจุด N □

กรณีที่ $X, Y \sim \mathcal{N}\left(0, 0.09\right)$ (ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma = 0.3$)

Proof. เนื่องจากบทพิสูจน์ในส่วนของตัวแปรสุ่ม Z ไม่ขึ้นกับการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X, Y ดังนั้น เราจึงยังสามารถได้ผลว่า

$$\mathbb{E}\left[Z\right] = \mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] = P\left((X, Y) \in A\right)$$

เหลือแค่หาค่าความน่าจะเป็น $P\left((X, Y) \in A\right) = P\left(X^2 + Y^2 \leq 1\right)$ พิจารณาตัวแปรสุ่ม $R^2 = X^2 + Y^2$ ซึ่งจากนิยามของการแจกแจง Chi-square (ผลรวมกำลังสองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน) จะได้ว่า

$$\frac{R^2}{0.09} = \frac{X^2 + Y^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2\left(2\right)$$

ดังนั้น $P\left(R^2 \leq 1\right) = P\left(\chi^2\left(2\right) \leq \frac{1}{0.09}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2 \times 0.09}\right)$
เพราะฉะนั้น $E[4Z] = 4P\left(R^2 \leq 1\right) = 4\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2 \times 0.09}\right)\right) \approx 3.9845$ □

3.2 ตัวแบบและขั้นตอนการจำลองสถานการณ์ (Simulation Process)

จากตัวอย่างที่แล้ว เราได้เห็นกระบวนการที่สำคัญของการจำลองสถานการณ์ (Simulation) ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนหลัก ๆ ตั้งแต่การกำหนดวัตถุประสงค์, การเก็บข้อมูล, การเลือกตัวแบบ, การสุ่มตัวอย่าง และการวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง ในหัวข้อนี้เราจะสรุปขั้นตอนที่จำเป็นทั้งหมดในการจำลองสถานการณ์ทั่วไป ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ทางธุรกิจต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบ

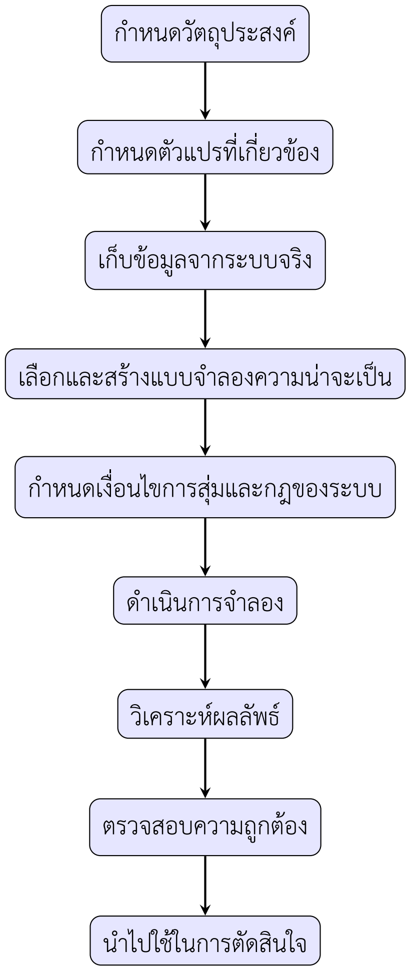
กระบวนการในการจำลองสถานการณ์ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้:

1. **กำหนดวัตถุประสงค์ของการจำลอง (Define Simulation Objective)**
   ขั้นตอนแรกคือการระบุให้ชัดเจนว่าการจำลองครั้งนี้มีเป้าหมายอะไร เช่น บริษัท ABC Furniture ต้องการจำลองระยะเวลาในการผลิตสินค้าเพื่อดูว่าจะส่งผลต่อการส่งมอบสินค้าได้ทันตามกำหนดหรือไม่
2. **กำหนดตัวแบบและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง (Identify the Model and Relevant Variables)**
   หลังจากรู้วัตถุประสงค์แล้ว เราต้องกำหนดว่าอะไรคือสิ่งที่เราจะจำลอง ในทางธุรกิจอาจมีตัวแปรเช่น เวลามาถึงของลูกค้า, ระยะเวลาการผลิตสินค้า, ระยะเวลาการให้บริการ, หรือแม้กระทั่งปริมาณความต้องการของตลาดในแต่ละช่วงเวลา เป็นต้น
3. **เก็บรวบรวมข้อมูลจากระบบจริง (Data Collection)**
   เมื่อระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องแล้ว ขั้นตอนถัดไปคือการเก็บข้อมูลเพื่อระบุลักษณะทางสถิติของตัวแปรนั้น ๆ เช่น การเก็บข้อมูลเวลาการผลิตจริงย้อนหลังหลายสัปดาห์ หรือข้อมูลพฤติกรรมของลูกค้าที่เกิดขึ้นจริงในอดีต
4. **เลือกและสร้างแบบจำลองความน่าจะเป็น (Select and Build Probability Models)**
   หลังจากเก็บข้อมูล เราจึงนำข้อมูลนั้นมาวิเคราะห์เพื่อระบุการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสม เช่น เวลาการผลิตอาจเป็นแบบ Normal หรือ Exponential, จำนวนลูกค้าที่เข้าร้านอาจมีการแจกแจงแบบ Poisson หรือแบบ Uniform ดังในตัวอย่างที่ผ่านมาที่เราใช้ Uniform ในการประมาณค่า π
5. **กำหนดเงื่อนไขการสุ่มและกฎของระบบ (Define Randomness Conditions and System Rules)**
   ขั้นตอนนี้คือการออกแบบกลไกของการจำลอง เช่น จะสุ่มตัวแปรต่าง ๆ อย่างไร ต้องใช้เครื่องมืออะไร มีเงื่อนไขและข้อจำกัดของระบบอย่างไรบ้าง เช่น บริษัท ABC Furniture อาจตั้งเงื่อนไขว่าหากการผลิตล่าช้ากว่าเวลาที่กำหนดจะส่งผลต่อกำหนดการจัดส่งสินค้าอย่างไร เป็นต้น
6. **ดำเนินการจำลองสถานการณ์ (Perform Simulation Runs)**
   เมื่อโมเดลพร้อมแล้ว จะต้องดำเนินการจำลองซ้ำหลายครั้ง (replications) เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่สะท้อนพฤติกรรมระบบจริงอย่างถูกต้องชัดเจน โดยอาจดำเนินการซ้ำหลายร้อยหรือหลายพันครั้งขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา
7. **วิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลอง (Analyze Simulation Results)**
   หลังจากที่ทำการทดลองจำลองซ้ำหลาย ๆ รอบแล้ว เราจะนำผลลัพธ์ที่ได้มาวิเคราะห์เชิงสถิติ เช่น การหาค่าเฉลี่ย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจ เช่น โอกาสที่สินค้าไม่สามารถส่งมอบทันเวลา หรือเวลารอคอยเฉลี่ยของลูกค้า เป็นต้น
8. **ตรวจสอบความถูกต้องและความแม่นยำของตัวแบบ (Validate and Verify the Model)**
   ก่อนนำไปใช้งานจริง เราต้องตรวจสอบว่าผลลัพธ์จากแบบจำลองนั้นตรงกับสิ่งที่เกิดขึ้นในระบบจริงมากแค่ไหน หาก

ผลที่ได้จากตัวแบบมีความคลาดเคลื่อนสูง เราต้องกลับไปตรวจสอบข้อมูลหรือโมเดลที่ใช้ใหม่

9. **การนำผลลัพธ์ไปประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ (Implementation and Decision Making)**
ขั้นตอนสุดท้ายคือการนำผลที่ได้จาก Simulation ไปใช้ในการตัดสินใจจริงในธุรกิจ เช่น บริษัท ABC Furniture อาจนำผลการจำลองไปกำหนดแผนการผลิตและจัดการทรัพยากรใหม่เพื่อลดความเสี่ยงในการผลิตและเพิ่มประสิทธิภาพของระบบ

กระบวนการทั้งหมดนี้สามารถสรุปออกมาในลักษณะของแผนภาพดังนี้



โดยในหัวข้อถัดไป เราจะศึกษาและเจาะลึกเทคนิคการสุ่มแบบ Monte Carlo ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของกระบวนการจำลองสถานการณ์ในธุรกิจ เพื่อให้เห็นภาพการประยุกต์ใช้กระบวนการจำลองได้อย่างเป็นระบบยิ่งขึ้น

3.3 การสุ่มตัวอย่างแบบ Monte Carlo ในการจำลองสถานการณ์ในธุรกิจ

การจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) เป็นเทคนิคที่ใช้วิธีการสุ่มตัวแปรเข้ามาช่วยในการประเมินผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นภายใต้สภาวะที่ไม่แน่นอน เทคนิคนี้มีรากฐานจากแนวคิดในทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อปัญหาที่ต้องการศึกษามีความซับซ้อนเกินกว่าจะหาคำตอบได้ด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงพีชคณิตแบบตรง

แก่นของมอนติคาร์โลคือการ “สุ่มค่าตัวแปรตามการแจกแจงที่กำหนด” เพื่อนำไปแทนค่าในโมเดล แล้วคำนวณผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น จากนั้นทำซ้ำการสุ่มจำนวนมากเพื่อดูพฤติกรรมรวมของผลลัพธ์ เช่น ค่าคาดหมาย ค่ามากสุด ค่าน้อยสุด หรือค่าที่อยู่ในช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยตัวอย่างการแจกแจงที่นิยมใช้งานกันอยู่แล้วมีดังนี้

- ถ้าค่าใช้จ่ายในอนาคตมีความไม่แน่นอน อาจสุ่มค่าใช้จ่ายจากการแจกแจง Normal หรือ Triangular
- ถ้าความต้องการสินค้าในอนาคตขึ้นอยู่กับพฤติกรรมผู้บริโภค อาจสุ่มจำนวนจากการแจกแจง Poisson
- ถ้าความสำเร็จของกระบวนการหรือขั้นตอนมีแค่ 2 ผลลัพธ์ (สำเร็จ/ล้มเหลว ในภาษาของการแจกแจงความน่าจะเป็น) อาจใช้การแจกแจงแบบ Bernoulli หรือ Binomial
- ถ้าจำนวนลูกค้าในช่วงเวลาหนึ่งมีความแปรผัน อาจใช้การแจกแจง Poisson เพื่อสุ่มจำนวนลูกค้า
- ถ้าเวลาระหว่างลูกค้ารายถัดไปมีลักษณะสุ่มและต่อเนื่อง อาจใช้การแจกแจง Exponential เพื่อสุ่มระยะเวลาการรอลูกค้าเข้าร้าน

ซึ่งเป็นขั้นตอนที่สำคัญมาก ๆ และการเก็บข้อมูลและลายละเอียดพฤติกรรมทางธุรกิจให้ละเอียดพอจะช่วยทำให้เราเลือกการแจกแจงของตัวแปรได้แม่นยำและใกล้เคียงความเป็นจริงได้ (อาจจะใช้เรื่องการทำ goodness of fit test มาช่วยตรวจสอบในขั้นตอนการตรวจสอบได้)

5 ขั้นตอนการทำ Monte Carol Simulation

1. **กำหนดการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสำคัญ**
   ระบุ *ตัวแปรสำคัญ* ที่ต้องการจำลอง เช่น ความต้องการสินค้า เวลารอ จำนวนลูกค้าในแต่ละวัน ฯลฯ จากนั้นคำนวณ *ความน่าจะเป็น* โดยใช้ข้อมูลในอดีต เช่น ความถี่ของแต่ละเหตุการณ์หารด้วยความถี่รวมทั้งหมด
2. **สร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Probability)**
   สร้างคอลัมน์ความน่าจะเป็นสะสม โดยการบวกค่าความน่าจะเป็นในข้อก่อนหน้าแบบสะสมต่อเนื่อง เพื่อใช้เป็นขอบเขตในการแมปกับช่วงของเลขสุ่ม
3. **กำหนดช่วงของเลขสุ่ม (Random Number Interval)**
   แปลงความน่าจะเป็นสะสมให้เป็นช่วงของเลขสุ่ม เช่น 00–99 หรือ 000–999 โดยการจับคู่ค่าที่เป็นไปได้กับช่วงของตัวเลข เช่น ความน่าจะเป็น 0.2 อาจแทนด้วยเลขสุ่ม 00–19
4. **สร้างเลขสุ่ม (Generate Random Numbers)**
   สร้างเลขสุ่มจำนวนหนึ่งโดยใช้เครื่องมือ เช่น ตารางเลขสุ่ม Excel หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อสุ่มค่าที่จะนำไปใช้ในการทดลองจำลองแต่ละรอบ
5. **จำลองการทดลองหลายรอบ (Simulate a Series of Trials)**
   ทำการจำลองสถานการณ์โดยใช้เลขสุ่มในแต่ละรอบ เพื่อระบุค่าที่เกิดขึ้น แล้วนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองไปวิเคราะห์ เช่น หาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน หรือพฤติกรรมของระบบในระยะยาว

ตัวอย่าง 3.3.1: การจำลองความต้องการยางรถยนต์

บริษัท ไทยไทร์ จำกัด เป็นผู้จัดจำหน่ายยางรถยนต์หลายประเภทในประเทศไทย โดยมียางรถยนต์รุ่นยอดนิยมรุ่นหนึ่งที่มียอดขายสูงเป็นพิเศษ ฝ่ายคลังสินค้าสังเกตว่าต้นทุนจากการเก็บรักษาสินค้าคงคลัง (Inventory Cost) ของยางรุ่นนี้เริ่มสูงขึ้น และต้องการนโยบายการบริหารจัดการสินค้าคงคลังที่เหมาะสม เพื่อดูแนวโน้มความต้องการยางในแต่ละวัน ผู้จัดการจึงตัดสินใจใช้การจำลองสถานการณ์ (Simulation) เพื่อดูความต้องการรายวันเป็นเวลา 10 วัน

1. จงหาค่าความต้องการยางเฉลี่ยต่อวัน (จากการแจกแจงความน่าจะเป็นดั้งเดิม)
2. จงหาค่าความต้องการยางเฉลี่ยต่อวันจากการจำลองสถานการณ์

จำนวนที่ต้องการต่อวัน (เส้น)	ความถี่ (วัน)
0	10
1	20
2	40
3	60
4	40
5	30
รวม	**200**

ตัวอย่าง 3.3.2: Inventory Analysis Usecase

คุณภูวเดชเป็นเจ้าของร้านเครื่องมือช่างชื่อ **เจริญวัสดุภัณฑ์** ซึ่งจำหน่ายเครื่องมือช่างหลากหลายประเภท และสินค้าที่ขายดีและทำกำไรสูงคือ **สว่านไฟฟ้ารุ่น Ace** คุณภูวเดชต้องการหานโยบายการจัดเก็บสินค้าคงคลังที่ต้นทุนต่ำที่สุดสำหรับสินค้ารุ่นนี้ แต่เนื่องจากว่าไม่สามารถควบคุมปัจจัยภายนอกบางประการได้ จึงตัดสินใจใช้วิธีการ **การจำลองสถานการณ์ (Simulation)** เพื่อช่วยในการตัดสินใจ
ในปัญหานี้ ตัวแปรที่ควบคุมได้ (Controllable Inputs) คือ

- **จำนวนที่สั่งแต่ละครั้ง (Order Quantity)** และ
- **จุดสั่งซื้อใหม่ (Reorder Point)**

ส่วนตัวแปรที่ควบคุมไม่ได้ (Uncontrollable Inputs) คือ

- **ความต้องการต่อวัน (Daily Demand)** ซึ่งมีความผันแปร
- **ระยะเวลาในการจัดส่ง (Lead Time)** ซึ่งมีความไม่แน่นอนเช่นกัน

คุณภูวเดชได้เก็บข้อมูลยอดขายจริงของสว่านรุ่น Ace ตลอด 300 วัน โดยสรุปไว้ในตารางดังนี้:

ความต้องการต่อวัน (ตัว)	ความถี่ (วัน)
0	15
1	30
2	60
3	120
4	45
5	30
รวม	**300**

เมื่อมีการสั่งซื้อสินค้า จะต้องรอสินค้าจัดส่งภายใน 1 ถึง 3 วัน โดยมีข้อมูลสรุปจากคำสั่งซื้อ 50 รายการที่ผ่านมาตามตารางต่อไปนี้:

ระยะเวลาในการส่งสินค้า (วัน)	ความถี่ (ครั้ง)
1	10
2	25
3	15
รวม	**50**

คุณภูวเดชต้องการทดลองใช้นโยบาย **สั่งซื้อเมื่อสินค้าคงเหลือน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 ชิ้น โดยสั่งครั้งละ 10 ชิ้น** และกำหนดให้ในวันแรกมีสินค้าในสต็อก 10 ชิ้น

ข้อมูลต้นทุนประกอบด้วย:

- ค่าดำเนินการสั่งซื้อสินค้าแต่ละครั้ง = 10 บาท
- ค่าถือครองสินค้าต่อปี = 6 บาทต่อชิ้น หรือเท่ากับ 0.03 บาทต่อชิ้นต่อวัน (คิดจากปีละ 200 วัน)
- ค่าขาดแคลนสินค้าหรือลูกค้าไม่ได้สินค้า = 8 บาทต่อครั้ง

กำหนดให้ร้านเปิดบริการ 200 วันต่อปี และใช้ตัวเลขสุ่มต่อไปนี้ในการทดลอง:

06 63 57 94 52 69 32 30 48 88

คำถาม

a) จงคำนวณ **ตารางแจกแจงความน่าจะเป็น, ความน่าจะเป็นสะสม และช่วงตัวเลขสุ่ม (Random Number Interval)** สำหรับทั้งสองตาราง

b) จากนโยบายการสั่งซื้อที่กำหนดไว้ ($Q = 10, ROP = 5$) จงคำนวณ **ต้นทุนเฉลี่ยต่อวัน** ของร้านในช่วง 10 วันแรก จากการจำลองสถานการณ์

คำใบ้: ต้นทุนรวมต่อวัน = ค่าสั่งซื้อเฉลี่ยต่อวัน + ค่าถือครองเฉลี่ยต่อวัน + ค่าขาดแคลนเฉลี่ยต่อวัน

Assignment

...

CHAPTER **4**

การวิเคราะห์เชิงมาร์คอฟ (Markov Analysis)

โจทย์ธุรกิจ

สถานการณ์ต้นบท: ความภักดีของลูกค้า (Customer Loyalty)

หลังจากผ่านสถานการณ์ความไม่แน่นอนของตลาดและการตัดสินใจเรื่องกลยุทธ์การผลิตแล้ว ฝ่ายการตลาดของบริษัท ABC Furniture สังเกตเห็นปรากฏการณ์สำคัญที่กำลังส่งผลต่อผลประกอบการของบริษัท นั่นคือเรื่องของ **"การรักษาฐานลูกค้าจากบริการหลังการขาย"**

คุณสมชายและฝ่ายการตลาดพบข้อมูลที่น่าสนใจว่า ในแต่ละไตรมาส ลูกค้าของบริษัทมีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในการใช้บริการหลังการขายดังนี้:

- ◇ ลูกค้าบางส่วนเป็น **ลูกค้าประจำ (Loyal Customers)** ที่ใช้บริการต่อเนื่องทุกไตรมาส
- ◇ ลูกค้าบางส่วนเป็น **ลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย (Occasional Customers)** ที่ใช้บริการบ้างไม่ใช้บริการบ้าง
- ◇ ลูกค้าบางส่วนเป็น **ลูกค้าที่หายไป (Lost Customers)** ซึ่งหยุดใช้บริการจากบริษัท

ฝ่ายการตลาดต้องการวิเคราะห์ว่า ในแต่ละไตรมาสนั้น ลูกค้าจะเปลี่ยนแปลงสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งอย่างไร เพื่อที่จะได้วางแผนกลยุทธ์การตลาดและการบริหารความสัมพันธ์กับลูกค้า (CRM) ให้เหมาะสม

อีเมลจากคุณสมชาย:

ข้อความ

"ในช่วงไตรมาสที่ผ่านมา เราเริ่มสังเกตเห็นว่าฐานลูกค้าของเราเปลี่ยนแปลงเร็วมาก มีลูกค้าประจำหลายรายที่กลายเป็นลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย และลูกค้ากลุ่มเปลี่ยนใจง่ายจำนวนไม่น้อยที่หยุดใช้บริการเราไปเลย แต่ในทางกลับกัน ก็ยังมีลูกค้าใหม่ๆ ที่เปลี่ยนจากลูกค้าเปลี่ยนใจง่ายมาเป็นลูกค้าประจำได้ด้วย เราอยากวิเคราะห์ให้ลึกกว่านี้ว่าการเปลี่ยนสถานะของลูกค้าเกิดขึ้นในลักษณะไหน เพื่อช่วยให้เราออกแบบกลยุทธ์รักษาฐานลูกค้าได้ดีขึ้นครับ"

คำถามชวนคิดก่อนเรียน:

1. จากสถานการณ์ที่คุณสมชายเล่าให้ฟัง บริษัท ABC Furniture กำลังเจอกับปัญหาลักษณะใด?
2. คุณคิดว่าการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของลูกค้าในแต่ละไตรมาสเป็นเรื่องที่วิเคราะห์ได้อย่างไร?
3. หากคุณจะสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมลูกค้า คุณควรเก็บข้อมูลลักษณะใดบ้าง?

4. สถานการณ์เช่นนี้ เหตุใดบริษัทจึงควรสนใจเรื่อง “การรักษาฐานลูกค้า” มากกว่าการหาลูกค้าใหม่เพียงอย่างเดียว?
5. คุณคิดว่าการเปลี่ยนจากลูกค้าประจำไปเป็นลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย หรือไปเป็นลูกค้าหายไป มีความสำคัญต่างกันหรือไม่ อย่างไร?

4.1 ลักษณะของปัญหาที่ใช้ตัวแบบมาร์คอฟแก้ปัญหา

- ตัวแบบมาร์คอฟจะพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของการเปลี่ยนสถานะในอนาคตโดยอ้างอิงจากสถานะในปัจจุบัน
- เพราะฉะนั้นปัญหาที่จะใช้ตัวแบบมาร์คอฟต้องสามารถแจกจางสถานะ (state) ขาดออกจากกันได้ โดยแต่ละตัวอย่างจะต้องอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งและเพียงสถานะเดียวเท่านั้น
- ต้องมีข้อมูลเกี่ยวกับการแจกแจงความน่าจะเป็นหรืออัตราส่วนของแต่ละสถานะในปัจจุบัน
- ต้องทราบข้อมูลเรื่องความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ (transition probability)

ตัวอย่าง 4.1.1: Warm-up ความน่าจะเป็นสำหรับ Markov (ต้องใช้ความรู้เรื่อง conditional probability)

ในเหตุการณ์สมมติที่มีสถานะ 3 สถานะ สมมติเป็น s_1, s_2, s_3 โดยเราทราบความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะ s_1, s_2, s_3 มาเป็นสถานะ s_1 ในระยะเวลา 1 เดือนมีค่าเป็น $0.10, 0.90, 0.05$ ตามลำดับ โดยในปัจจุบันเราทราบว่ามีจำนวนคนที่มีสถานะเป็น s_1, s_2, s_3 อยู่เป็น $30, 75, 40$ คนตามลำดับ

- ทำไมความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะ s_1, s_2, s_3 มาเป็นสถานะ s_1 ถึงรวมกันได้ไม่เท่ากับ 1
- จงหาจำนวนคนในสถานะ s_1 ใน 1 เดือนข้างหน้า

4.2 คณิตศาสตร์สำหรับตัวแบบมาร์คอฟ

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้น เป็นตัวอย่างที่ได้ทำให้เห็นแนวคิดการคิดแบบความน่าจะเป็นว่าการวิเคราะห์การเปลี่ยนสถานะนั้น จริงๆ แล้วก็คือการหาความน่าจะเป็นของ 2 เหตุการณ์ต่อเนื่องกันในรูปแบบของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) และคุณสมบัติความน่าจะเป็นรวม (Total probability)

จำนวนคนในสถานะ s_1 ในเวลาถัดมา

$$
\begin{aligned}
&= \text{จำนวนคนทั้งหมด} \times P\,(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_1 \text{ ในเวลาถัดมา}) \\
&= N \cdot P\left(X^{(2)} = s_1\right) \\
&= N \cdot \left(P\left(X^{(1)} = s_1 \wedge X^{(2)} = s_1\right) + P\left(X^{(1)} = s_2 \wedge X^{(2)} = s_1\right) + P\left(X^{(1)} = s_3 \wedge X^{(2)} = s_1\right)\right) \\
&= N \cdot \Big[P\left(X^{(1)} = s_1\right) P\left(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_1\right) \\
&\qquad\quad + P\left(X^{(1)} = s_2\right) P\left(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_2\right) \\
&\qquad\quad + P\left(X^{(1)} = s_3\right) P\left(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_3\right)\Big] \\
&= N \cdot \Big[P\left(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + P\left(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + P\left(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1\right)\Big] \\
&= \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1\right) \\
&\qquad\quad + \left(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\right) P\left(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1\right)
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\text{จำนวนคนในสถานะ } s_1 \text{ ในเวลาถัดมา} &= \Big(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1\Big) \\
&\quad + \Big(\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1\Big) \\
&\quad + \Big(\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จำนวนคนในสถานะ } s_2 \text{ ในเวลาถัดมา} &= \Big(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_2\Big) \\
&\quad + \Big(\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_2\Big) \\
&\quad + \Big(\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_2\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จำนวนคนในสถานะ } s_3 \text{ ในเวลาถัดมา} &= \Big(\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_3\Big) \\
&\quad + \Big(\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_3\Big) \\
&\quad + \Big(\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}\Big)\, P\,\Big(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_3\Big)
\end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนเป็นสัญลักษณ์เมทริกซ์ในส่วนถัดไป ขอกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
N_i &= \text{จำนวนคนในสถานะ } s_i \text{ ในเวลาเริ่ม} \\
N_i' &= \text{จำนวนคนในสถานะ } s_i \text{ ในเวลาถัดมา} \\
P_{ij} &= \text{ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะจาก } s_j \text{ มาเป็น } s_i
\end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
N_1' &= N_1P_{11} + N_2P_{12} + N_3P_{13} \\
N_2' &= N_1P_{21} + N_2P_{22} + N_3P_{23} \\
N_3' &= N_1P_{31} + N_2P_{32} + N_3P_{33}
\end{aligned}$$

และเมื่อนำมาลองเขียนในรูปแบบเวกเตอร์แจกแจงจำนวนคน จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\vec{N}' &= \begin{pmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_1P_{11} + N_2P_{12} + N_3P_{13} \\ N_1P_{21} + N_2P_{22} + N_3P_{23} \\ N_1P_{31} + N_2P_{32} + N_3P_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \\
\vec{N}' &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \vec{N}
\end{aligned}
$$

นิยาม 4.2.1: Transition Matrix

เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ (transition matrix) คือเมทริกซ์ที่ลำดับของแถวและหลักของเมทริกซ์สอดคล้องกับลำดับสถานะ $s_1, \ldots, s_n$ โดยที่สมาชิกในตำแหน่งที่ ij คือค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากสถานะ j มาเป็นสถานะ i

คุณสมบัติ 4.1: การหาจำนวนคนในแต่ละสถานะในช่วงเวลาถัดไป

กำหนดให้ N_t แทนเวกเตอร์ของจำนวนคนในแต่ละสถานะ โดยที่ลำดับของสถานะเป็น $s_1, \ldots, s_n$ และให้ P คือเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะที่มีลำดับของสถานะเดียวกันกับลำดับสถานะของเวกเตอร์ N_t จะได้ว่า

$$N_{t+1} = PN_t$$

เพราะฉะนั้น จะได้โดยง่ายว่า

$$N_{t+k} = P^k N_t$$

ทั้งนี้ เราอาจจะเปลี่ยนไปใช้เวกเตอร์ที่แสดงความน่าจะเป็นแทนเวกเตอร์จำนวนคนจริง ๆ ก็ได้

ตัวอย่าง 4.2.1: การคำนวณมาร์คอฟของโรงอาหาร

โรงอาหารในบริษัทแห่งหนึ่งมีเมนูประจำร้าน 3 เมนู สมมติชื่อชุด A, B และ C โดยแต่ละเมนูมีการเตรียมวัตถุดิบที่แตกต่างกันออกไป ทางร้านจึงต้องการวางแผนอัตราส่วนของปริมาณของวัตถุดิบของอาหารแต่ละประเภทที่ต้องเก็บเข้าคลังไว้เป็นรายเดือน ดังนั้น ทางร้านจึงได้ทำการสำรวจพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงประเภทอาหารที่จะทานของพนักงานในบริษัทแห่งนั้น และได้ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงประเภทอาหารที่อยากทานใน 1 เดือนดังตารางด้านล่างนี้ (ให้สมมติว่าบริษัทไม่ได้มีการสมัครเข้าหรือลาออกบ่อย และในบริษัทมีร้านอาหารผูกขาดอยู่ร้านเดียว)

		เมนูที่ทานเดือนนี้		
		A	B	C
เมนูที่ทานเดือนถัดไป	A	0.6	0.6	0.2
	B	0.3	0.1	0.2
	C	0.1	0.3	0.6

สมมติว่าในเดือนนี้มีปริมาณการทานอาหารเมนู A, B, C เป็นจำนวน 60 ครั้ง, 100 ครั้ง, 40 ครั้ง ตามลำดับ

1. จงหาว่าในเดือนถัดไปจะมีการทานอาหารในแต่ละเมนูกี่ครั้ง
2. จงหาว่าในอีก 2 เดือนถัดไปจะมีการทานอาหารในแต่ละเมนูกี่ครั้ง

4.3 การวิเคราะห์สถานะคงที่

นิยาม 4.3.1: สถานะคงที่ (Steady State)

สถานะคงที่ของกระบวนการมาร์คอฟคือเวกเตอร์สถานะที่เมื่อผ่านขั้นตอนถัดไปแล้วมีสถานะคงเดิม (อัตราส่วนเท่าเดิม) กล่าวคือเวกเตอร์ $\vec{s}$ จะเป็นสถานะคงที่ของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ P ก็ต่อเมื่อ

$$P\vec{s} = \vec{s}$$

[a]ทั้งนี้เวกเตอร์ที่เป็นสเกลของเวกเตอร์สถานะคลที่ก็ยังคงเป็นสถานะคงที่เช่นกัน ดังนั้นในบางครั้งเราอาจจะระบุเพียงแค่เวกเตอร์ความน่าจะเป็น ณ สถานะคงที่ ซึ่งคือทุกสมาชิกในเวกเตอร์รวมกันได้ 1

[a]ในคณิตศาสตร์จะเรียกว่า $\vec{s}$ เป็น eigenvector ที่สอดคล้องกับ eigenvalue = 1 ของเมทริกซ์ P

ตัวอย่าง 4.3.1: เวกเตอร์สถานะคงที่

จงหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็น ณ สถานะคงที่ของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะของผู้รับบริการ $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ และถ้าสมมติว่า ณ เวลานั้นมีผู้รับบริการทั้งหมดอยู่ 500 คน จะมีคนอยู่ในแต่ละสถานะกี่คน

ตัวอย่าง 4.3.2: มาร์คอฟของโรงอาหาร (ต่อ)

จากตัวอย่างสถานะการโรงอาหารในบริษัทในตัวอย่าง 4.2.1 จงหาว่าต้องมีอัตราส่วนของคนชอบเมนูอาหารใดเท่าไหร่บ้างถึงจะอยู่ในสภาวะที่ไม่ต้องเปลี่ยนแปลงปริมาณการเก็บวัตถุดิบในเดือนถัดไป

4.4 การคำนวณ Markov โดยใช้ Excel

4.5 หัวข้อพิเศษ: การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ในมุมมองของมาร์คอฟ

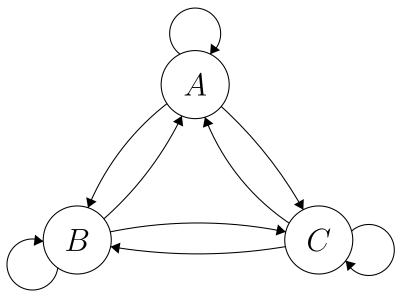
อย่างที่ได้กล่าวไปในหัวข้อที่ผ่าน ๆ มาว่าเราสามารถหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะ

Exercise 4.5.1: หาผลกำลังสองของเมทริกซ์ความน่าจะเปลี่ยนของการเปลี่ยนสถานะ

จงหาผลคูณของเมทริกซ์ได้ผลลัพธ์ดังนี้ (โจทย์ให้ผลลัพธ์การคูณมาแล้ว ดังนั้นไม่ต้องนั่งคูณด้วยตัวเอง แต่เราจะลองใช้ความรู้ Markov ช่วยหาผลคูณ และในข้อนี้เราจะไม่ได้หาผลคูณของทั้ง 9 ตัว เราจะยกตัวอย่างการหาผลคูณของแค่ 3 ตัวเท่านั้น)

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.48 & 0.36 \\ 0.23 & 0.25 & 0.20 \\ 0.21 & 0.27 & 0.44 \end{bmatrix}$$

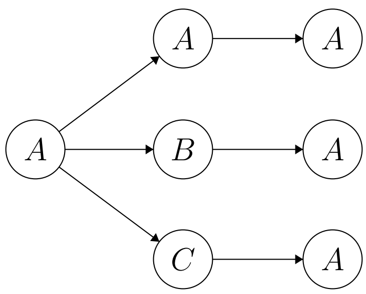
เริ่มจากเขียนแผนภาพการเปลี่ยนสถานะกันก่อน โดยโจทย์คือให้<u>**เขียนค่าความน่าจะเป็นลงไปบนเส้นการเปลี่ยนสถานะ**</u>



จากที่เรียนมาในห้อง เราทราบกันอยู่แล้วว่าความหมายของการนำเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้นมาคูณกัน จะได้ผลออกมาเป็นเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะข้าม 2 ขั้น (เช่นเปลี่ยนจากขั้นที่ 1 ไปขั้นที่ 3) ดังนั้น ถ้าเราอยากหาผลคูณของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ สิ่งที่ต้องทำคือหาความน่าจะเป็นในการเดินข้าม 2 ขั้นทุกรูปแบบที่เป็นไปได้

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป A ในขั้นที่ 3

วาดแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ <u>**จงเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)**</u>



ด้วยความรู้ในเรื่องความน่าจะเป็น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นรวมของการย้ายสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นถัดไปหาได้จากกฎการคูณและการบวกจากแผนภาพต้นไม้ดังกล่าว โดยที่

- ◇ เส้นต่อกัน ให้นำค่าความน่าจะเป็นของเส้นมาคูณกัน
- ◇ หลังจากคิดผลคูณค่าความน่าจะเป็นของแต่ละกิ่งเรียบร้อยแล้ว ให้นำมาบวกกัน

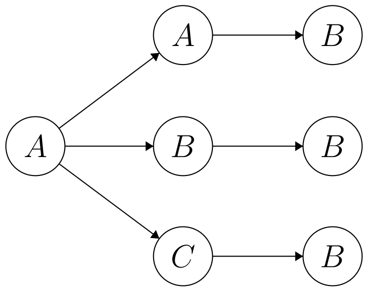
เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นถัดไปมีค่าเท่ากับ

$$P\left(A \rightarrow_2 A\right) = \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) = 0.56$$

ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ที่แทนความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจาก A ไป A ในเมทริกซ์ผลลัพธ์

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป B ในขั้นที่ 3

วาดแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ **<u>จงเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)</u>**



เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป B ใน 2 ขั้นถัดไปมีค่าเท่ากับ

$$P\left(A \rightarrow_2 B\right) = \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) = \boxed{}$$

CHAPTER 5

การพยากรณ์ (Forecasting)

การพยากรณ์ (Forecasting) คือการใช้ข้อมูลของสิ่งที่สนใจที่เกิดขึ้นในอดีตเพื่อสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณสิ่งที่สนใจนั้นในอนาคต และในบางตำราจะยังรวมถึงการใช้สภาวะการณ์ที่สำรวจได้ในปัจจุบันรวมไปถึงในอดีตเพื่อทำนาย (Prediction) ค่าที่สนใจ ตัวอย่างเช่น

- ฝ่ายขายใช้ยอดขายย้อนหลัง 12 เดือนเพื่อทำนายยอดขายในเดือนถัดไป
- ทีมการตลาดต้องการทำนายความต้องการซื้อสินค้าบางอย่างของลูกค้าโดยอาศัยคุณลักษณะต่าง ๆ เช่นเพศ อายุ ฐานเงินเดือน สินค้าที่ซื้อในเดือนที่แล้ว เป็นต้น

ในรายวิชานี้ เราจะศึกษา 2 รูปแบบการทำนายหลัก ๆ ดังนี้

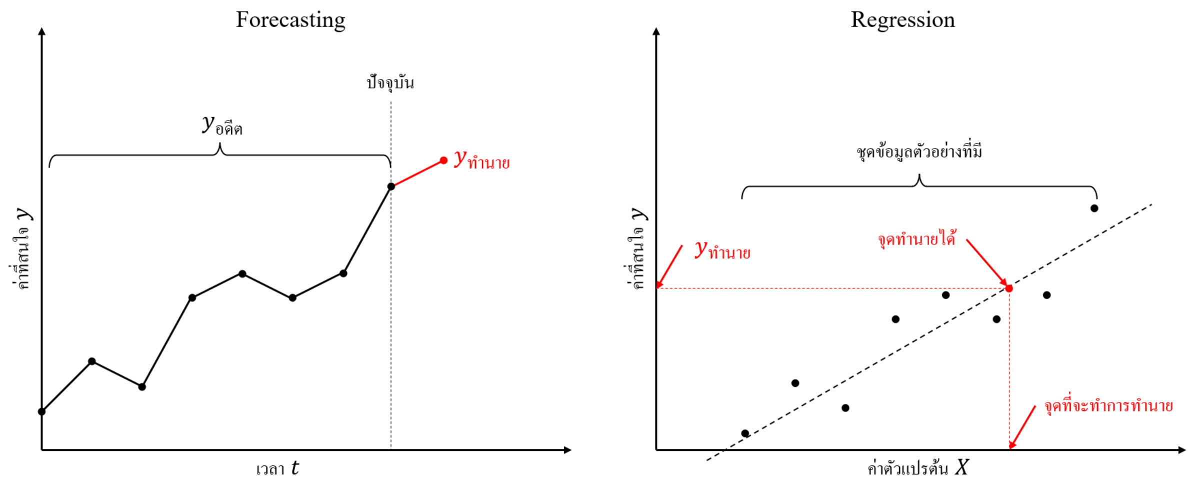


Figure 5.1. ความ แตก ต่าง ระหว่าง ตัว แบบ อนุกรม เวลา และ ตัว แบบ ถดถอย

1. **ตัวแบบอนุกรมเวลา** (time series forecasting): เป็นตัวแบบที่อยู่บนสมมติฐานว่าตัวแปรที่เราสนใจมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรเดียวกันที่เกิดขึ้นในอดีต

$$\hat{y}_t \sim y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k}$$

2. **ตัวแบบการถอดถอย** (regression model): เป็นตัวแบบที่อยู่บนสมมติฐานว่าตัวแปรที่เราสนใจมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรอื่น ๆ ที่เกิดขึ้นพร้อมกัน (หรือเป็นอยู่)

$$\hat{y}_t \sim x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}$$

ทั้งนี้ เราไม่สามารถบอกได้ว่าวิธีการใดเป็นวิธีการที่ดีที่สุด เพราะแต่ละวิธีการ (ที่กำลังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป) มีสมมติฐานตั้งต้นที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลว่าจะเหมาะสมกับตัวแบบไหน แต่ในทางปฏิบัติ ถ้าไม่มีได้ติดขัดเรื่องปัญหาด้านทรัพยากรในการทำการคำนวณ เรามักจะลองทุกวิธีการและวัดผลเพื่อตรวจสอบเปรียบเทียบความสามารถของแต่ละตัวแบบ (เรียนในหัวข้อสุดท้าย)

5.1 ตัวแบบอนุกรมเวลา

5.1.1 วิธีการค่าเฉลี่ยรวม

- เหมาะกับข้อมูลที่มีลักษณะที่ค่อนข้างคงที่ในภาพรวม (ไม่ได้มีแนวโน้มที่เปลี่ยนแปลงไปเช่นตลาดโตขึ้นเรื่อย ๆ)
- วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^{t} y_i}{t} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_t}{t}$$

ตัวอย่าง 5.1.1: วิธีการค่าเฉลี่ยรวม

บริษัทหนึ่งมีความต้องการทำนายยอดขายในเดือนที่ 7 โดยที่มียอดขาย 6 เดือนที่ผ่านมาตามตารางด้านล่างนี้ ทั้งนี้ลองหาค่าทำนายของแต่ละเดือนก่อนหน้าด้วย

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

5.1.2 วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average)

- ถ้าข้อมูลระยะยาวไม่คงที่ วิธีการหาค่าเฉลี่ยทั้งหมดอาจจะเอาผลที่ไกลเกินไปมารวม
- แต่ถ้าพบว่ามีความคงที่ในระยะสั้น ๆ เช่น ในช่วง 6 เดือนไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงมากนัก เราก็ควรนำแค่ 6 เดือนย้อนหลังมาคิด ซึ่งจะเรียกว่าการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ย้อนหลัง 6 เดือน
- วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-n+1}^{t} y_i}{n} = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \cdots + y_t}{n}$$

ตัวอย่าง 5.1.2: วิธีการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

จากตารางเดิม จงหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 3 เดือน และค่าเฉลี่นเคลื่อนที่ 4 เดือนของเดือนทั้งหมดที่เป็นไปได้จนถึงเดือนที่ 7

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

5.1.3 วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Weighted Moving Average)

- เป็นวิธีการที่ต่อยอดมาจากการทำค่าเฉลี่ยนเคลื่อนที่ แต่มีแนวคิดว่าผลกระทบที่ยิ่งห่างออกไปยิ่งควรมีความสำคัญน้อยลง แต่ในขณะที่เหตุการณ์ล่าสุดควรมีผลกระทบมากที่สุด
- วิธีการถ่วงน้ำหนักที่ง่ายที่สุดคือไล่ 1, 2, 3, ... จากอดีตสุดมาปัจจุบันสุด
- เรียกอีกชื่อว่า **วิธีปรับเรียบแบบเชิงเส้น**
- วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-n+1}^{t} (i-t+n)\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{1 \cdot y_{t-n+1} + 2 \cdot y_{t-n+2} + \cdots + n \cdot y_t}{1+2+\cdots+n}$$

ตัวอย่าง 5.1.3: วิธีการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก

จากตารางเดิม จงหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก 3 เดือน และค่าเฉลี่นเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก 4 เดือนของเดือนทั้งหมดที่เป็นไปได้จนถึงเดือนที่ 7

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

5.1.4 วิธีปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนเชียล (exponential smoothing)

- เป็นอีกวิธีในการถ่วงน้ำหนัก โดยให้ความสำคัญของค่าล่าสุดเริ่มที่ 1 และลดค่าความสำคัญลงไปแบบ exponential โดยที่ยังมีการนำค่าตั้งแต่จุดเริ่มต้นมาพิจารณา
- แต่สูตรการคำนวณถูกจัดให้อยู่ในรูปที่คำนวณได้ง่าย (แค่ต้องคำนวณไต่ลำดับขึ้นมาเรื่อย ๆ) รูปแบบ exponential จึงไม่เห็นอยู่ในสูตร
- วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha\left(y_t - \hat{y}_t\right)$$

หรือ

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\,\hat{y}_t$$

โดยที่ $0 \leq \alpha \leq 1$

- ค่า α เป็นค่าที่ต้องกำหนดขึ้นมาตั้งแต่เริ่มตัดสินใจ (เหมือนกับที่เราต้องเลือกว่าจะ moving average หรือ weighted moving average ของกี่เดือน)

ตัวอย่าง 5.1.4: วิธีปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล

จากตารางเดิม จงหาค่าทำนายจากวิธีการปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล โดยใช้ $\alpha = 0.3$ และ $\alpha = 0.8$

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

หมายเหตุ 5: สาเหตุที่เรียกว่าการปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล

รูปแบบสมการที่นิยามมาในด้านบนเรียกว่าการนิยามแบบเวียนเกิด คือการจะหาพจน์ที่ใด ๆ ได้ จะต้องคำนวณให้ทราบค่าพจน์ก่อนหน้าก่อน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องคำนวณไล่จากขั้นที่ 1 ขึ้นมาจนถึงขั้นที่ต้องการ แต่ทั้งนี้ เรายังสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปที่ไม่ขึ้นกับพจน์ก่อนหน้าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+1} &= \alpha y_t + (1-\alpha)\,\hat{y}_t \\
&= \alpha y_t + (1-\alpha)\left(\alpha y_{t-1} + (1-\alpha)\,\hat{y}_{t-1}\right) \\
&= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)\,y_{t-1} + (1-\alpha)^2\,\hat{y}_{t-1} \\
&= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)\,y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\,y_{t-2} + (1-\alpha)^3\,\hat{y}_{t-3} \\
&= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)\,y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\,y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3\,y_{t-3} + (1-\alpha)^4\,\hat{y}_{t-4} \\
&\ \ \vdots \\
&= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)\,y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\,y_{t-2} + \cdots + \alpha(1-\alpha)^{t-2}\,y_2 + (1-\alpha)^{t-1}\,y_1
\end{aligned}$$

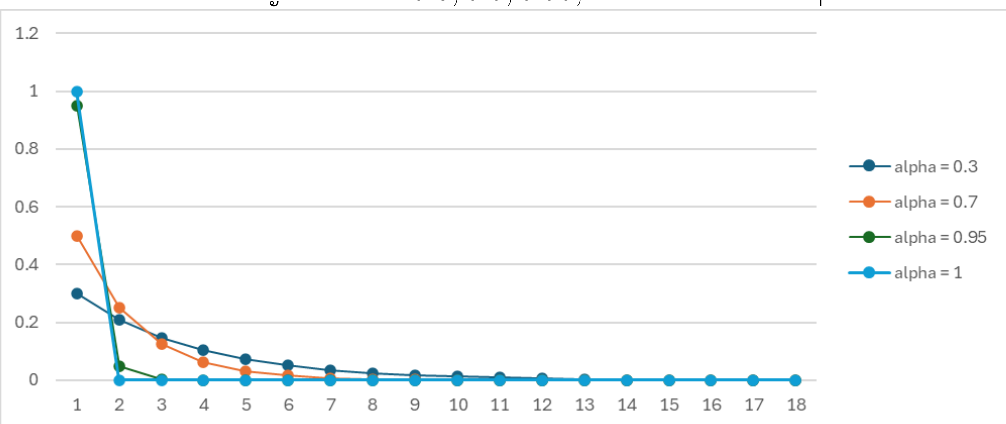
หรือถ้าเขียนเป็นตัวอย่างแบบตัวเลขชัดเจน จะมีดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= y_1 \\
\hat{y}_2 &= (1-\alpha)^0\,y_1 = y_1 \\
\hat{y}_3 &= \alpha y_2 + (1-\alpha)\,y_1 \\
\hat{y}_4 &= \alpha y_3 + \alpha(1-\alpha)\,y_2 + (1-\alpha)^2\,y_1 \\
\hat{y}_5 &= \alpha y_4 + \alpha(1-\alpha)\,y_3 + \alpha(1-\alpha)^2\,y_2 + (1-\alpha)^3\,y_1
\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า

1. จำนวนพจน์ของค่าจริงที่มาใช้คำนวณจะไม่ถูกกำหนดตายตัวเหมือนวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบอื่นๆ
2. แต่ความสำคัญก็จะถูกลดทอนลงเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ 0

ตัวอย่างกราฟค่าความสำคัญเมื่อใช้ $\alpha = 0.3, 0.5, 0.95, 1$ แสดงการลดแบบ exponential



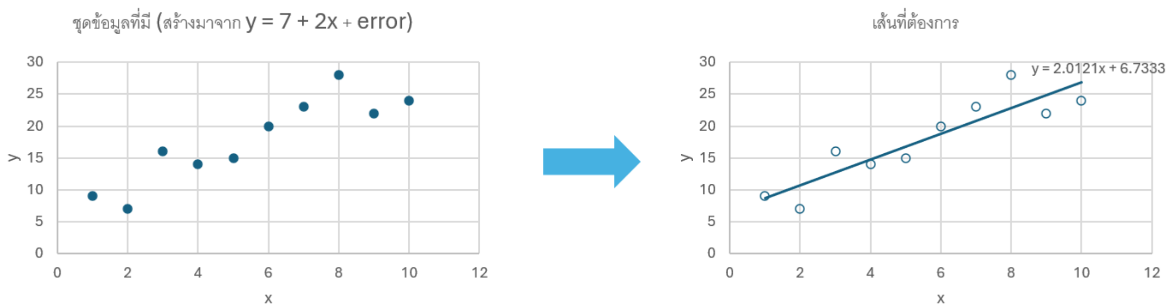
5.2 ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น

- ตัวแบบการถดถอย (regression) เป็นการสร้างตัวแบบการทำนายโดยอยู่บนสมมติฐานว่าตัวแปรต้นตัวหนึ่ง (x) มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับค่าตัวแปรที่เราสนใจ (y)
- ในวิชานี้เราสนใจแค่การถดถอยเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ มีชุดข้อมูล $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ที่มีความสัมพันธ์

$$Y = a_0 + a_1 X + \epsilon$$

  โดย a_0, a_1 เป็นค่าคงที่ และ ϵ คือพจน์ค่าคาดเคลื่อน
- เป้าหมายคือเราต้องการประมาณค่า $a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1$ ที่

$$Y \approx \hat{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 X$$



ขั้นตอน 5.1

ค่า a_0, a_1 ของตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น $Y = a_0 + a_1 X + \epsilon$ ของชุดข้อมูล $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ สามารถประมาณค่าได้ด้วย α_0, α_1 (ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าวิธีกำลังสองต่ำสุด (Least Squared Error)) ตามสูตร

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \qquad \alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x}$$

และจะได้ว่า $\hat{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 X$ เป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นของ $Y = a_0 + a_1 X + \epsilon$
โดยขั้นตอนการคำนวณตามสูตรดังกล่าวคือ

1. คำนวณหาค่าเฉลี่ย $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x/n$ และค่าเฉลี่ย $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y/n$
2. $(x_i - \bar{x})$: คำนวณหาผลต่างระหว่างค่า x และค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ ของทุกข้อมูล
3. $(y_i - \bar{y})$: คำนวณหาผลต่างระหว่างค่า y และค่าเฉลี่ย $\bar{y}$ ของทุกข้อมูล
4. $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$: นำค่าผลต่างจาก 2 ข้อก่อนหน้ามาคูณกัน

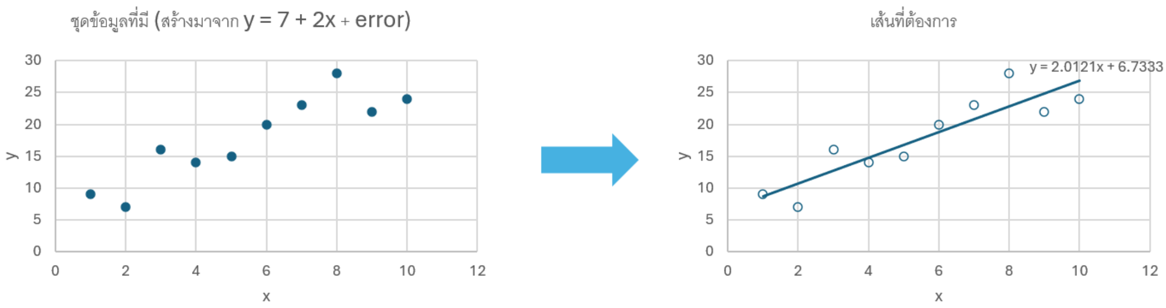
5. $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$: นำค่าผลคูณของทุกข้อมูลจากขั้นที่ผ่านมามาบวกกัน
6. $(x_i-\bar{x})^2$: นำค่าผลต่างที่คำนวณไว้ในขั้นที่ 2 มายกกำลังสอง
7. $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$: นำค่ากำลังสองของผลต่างในขั้นตอนที่ผ่านมามาบวกกัน
8. $\alpha_1 =$ ค่าผลบวกจากขั้นตอนที่ 5 หารด้วยค่าผลบวกจากขั้นตอนที่ 7
9. $\alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1\bar{x}$

นักศึกษาสามารถสร้างตารางการคำนวณตามตัวอย่างด้านล่างเพื่อใช้ประกอบการคำนวณได้

x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$
x_1	y_1				
x_2	y_2				
x_n	y_n				
$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$	$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$			$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

ตัวอย่าง 5.2.1: การถดถอยเชิงเส้น 1 ตัวแปร

จงประมาณตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นของชุดข้อมูลดังตารางด้านล่าง (ข้อมูลเดียวกับรูปตัวอย่าง)

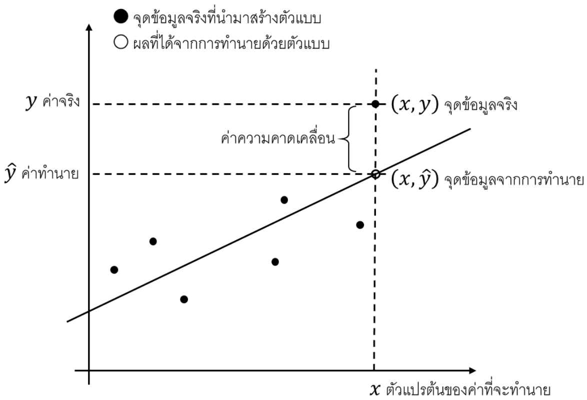


x	y
1	9
2	7
3	16
4	14
5	15
6	20
7	23
8	28
9	22
10	24

5.3 การประเมิณผลความแม่นยำในการทำนาย

อย่างที่ได้กล่าวไปก่อนหน้านี้ว่าเราไม่สามารถระบุได้ว่าตัวแบบใดเป็นตัวแบบที่ดีที่สุด เพราะตัวแบบในการทำนายที่ดีขึ้นอยู่กับข้อมูลที่มีว่ามีลักษณะข้อมูลเป็นอย่างไร ตัวแบบเดียวกันอาจจะทำงานได้ดีในชุดข้อมูลหนึ่ง แต่อาจจะทำได้ไม่ดีในอีกชุดข้อมูลหนึ่ง เพราะฉะนั้น ในกระบวนการทำงานจริง จึงต้องมีการวัดผลเพื่อประเมิณความแม่นยำของตัวแบบเพื่อที่จะเปรียบเทียบความสามารถในการทำนายของแต่ละตัวแบบได้ ซึ่งแนวคิดหลักของการวัดผลคือการใช้ค่า**ความคลาดเคลื่อน** (error) เพื่อเป็นตัวบอกว่าสิ่งที่ตัวแบบทำนายออกมาได้คลาดเคลื่อนออกไปจากค่าจริงเท่าใด

$$\text{ค่าความคลาดเคลื่อนดิบ} = \left|\text{ค่าที่ตัวแบบทำนายได้} - \text{ค่าจริงจากชุดข้อมูล}\right|$$



ในหนังสือเล่มนี้ จะแบ่งการวัดผลออกเป็น 2 รูปแบบหลักได้แก่

1. **การวัดผลด้วยมาตรวัดของข้อมูล**: เป็นการวัดผลที่มีหน่วยออกมาเป็นหน่วยเดียวกันกับข้อมูลที่เราต้องการจะทำนาย โดยต้องการวัดระยะห่าง มีข้อดีในแง่การแสกงค่าคาดเคลื่อนจริง ๆ เช่นทำนายคลาดเคลื่อนไปกี่บาท มักถูกใช้ในการเปรียบเทียบระหว่างตัวแบบต่าง ๆ บนข้อมูลชุดเดียวกัน โดยจะกล่าวถึง

   ◇ ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดสัมบูรณ์ (mean absolute error: MAE)
   ◇ ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดกำลังสอง (root mean squared error: RMSE)

2. **การวัดผลเชิงสัมพัทธ์**: เป็นการวัดผลในเชิงการหาร้อยละเทียบเคียงกับค่าจริงว่าคลาดเคลื่อนไปกี่เปอร์เซนต์ ซึ่งวิธีการนี้มักใช้กับชุดข้อมูลที่ความรุนแรงของการคลาดเคลื่อนขึ้นอยู่กับขนาดของค่าจริง กล่าวคือการคาดเคลื่อนด้วยปริมาณหนึ่งตอนที่ค่าจริงมีค่าน้อย ๆ จะรุนแรงกว่าการคาดเคลื่อนขนาดเดียวกันเมื่อค่าจริงมีค่ามาก ๆ (ตัวอย่างเช่น เงินหาย 9 บาทจาก 10 บาท กับเงินหายไป 9 บาทจาก 1 ล้านบาท) อีกทั้งยังเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ใช้เพื่อการเปรียบเทียบการทำงานของตัวแบบในต่างชุดข้อมูลที่อาจจะมีค่าที่ต้องการทำนายอยู่ในคนละมาตรวัดกัน โดยจะกล่าวถึง

   ◇ ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดสัมพัทธ์ (mean absolute percentage error: MAPE)
   ◇ ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดสัมบูรณ์ที่ปรับมาตราส่วน (mean absolute scaled error: MASE)

นิยาม 5.3.1: mean absolute error

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\hat{y}_i - y_i|$$

นิยาม 5.3.2: root mean squared error

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

และในบางครั้ง อาจมีการใช้ MSE ซึ่งคือ

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2$$

แต่สิ่งที่ต้องระวังตอนอ่านค่าคือค่าที่ได้จะอยู่ในหน่วยกำลังสองของหน่วยเดิม (เช่นหน่วย บาท^2) ซึ่งไม่ได้มีความหมายในโลกจริง

นิยาม 5.3.3: mean absolute percentage error

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}\right| \times 100\%$$

นิยาม 5.3.4: mean absolute scaled error

สำหรับการทำการถดถอยเชิงเส้นเมื่อเทียบกับการทำนายด้วยการหยิบแต่ค่าเฉลี่ยมาเป็นค่าทำนาย

$$MASE = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\hat{y}_i - y_i|}{\sum_{i=1}^{n} |\bar{y} - y_i|}$$

สำหรับอนุกรมเวลาเมื่อเทียบกับการทำนายด้วยการหยิบค่าของครั้งก่อนหน้ามาเป็นค่าทำนายของครั้งปัจจุบัน

$$MASE = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\hat{y}_i - y_i|}{\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} |y_t - y_{t-1}|}$$

สำหรับการวัดผลด้วย MASE นั้น เราสามารถปรับเปลี่ยนวิธีการประมาณค่าตัวเทียบ (ตัวส่วน) เป็นตัวแบบแบบอื่นได้เช่นกัน เพียงแต่ 2 สูตรด้านบนเป็นการเทียบจากตัวแบบที่ง่ายที่สุดที่มักจะนึกถึงกันเป็นอันดับแรกตอนทำนาย

ตัวอย่าง 5.3.1: การวัดผลอนุกรมเวลา

จากตารางการทำตัวแบบอนุกรมเวลาแบบต่าง ๆ ที่ทำมาในตัวอย่างที่ผ่าน ๆ มา จงวัดผลค่าความคลาดเคลื่อน MAE, RMSE, MAPE, MASE ของแต่ละตัวแบบ โดยสมมติเพิ่มว่าค่าจริงของเดือนที่ 7 มีค่าเท่ากับ 1200 (และเพื่อความสะดวกในการคำนวณ จึงขอปัดค่าทำนายให้เป็นจำนวนเต็ม)

วิธีค่าเฉลี่ย

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	800
3	800	850
4	1000	833
5	1000	875
6	1300	900
7	1200	967

วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ 3 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	833
5	1000	900
6	1300	933
7	1200	1100

วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ 4 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	-
5	1000	875
6	1300	925
7	1200	1025

วิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก 3 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	833
5	1000	917
6	1300	967
7	1200	1150

วิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก 4 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	-
5	1000	900
6	1300	950
7	1200	1100

วิธีปรับเรียบแบบเอ็กโพเนนเชียล โดย $\alpha = 0.3$

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	800
2	900	800
3	800	830
4	1000	821
5	1000	875
6	1300	912
7	1200	1029

วิธีปรับเรียบแบบเอ็กโพเนนเชียล โดย $\alpha = 0.8$

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	800
2	900	800
3	800	880
4	1000	806
5	1000	964
6	1300	975
7	1200	1222

ตัวอย่าง 5.3.2: การวัดผลการถดถอยเชิงเส้น

จากตัวอย่างการหาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นในตัวอย่าง 5.2.1 จงวัดผลความคลาดเคลื่อน MAE, RMSE, MAPE, MASE (ในทำนองเดียวกัน ถ้าเป็นการคำนวณมือให้ปัดเป็นจำนวนเต็มเพื่อคิดเลขได้ จะได้คำนวณได้สะดวก)

x	y	$\hat{y}$ ....
1	9	
2	7	
3	16	
4	14	
5	15	
6	20	
7	23	
8	28	
9	22	
10	24	

5.4 การใช้ Excel เพื่อช่วยคำนวณหาตัวแบบต่าง ๆ

CHAPTER 6

ทฤษฎีเกม (Game Theory)

6.1 บทนำ

6.1.1 ความหมายของเกม

6.1.2 จุดแตกต่างจากหัวข้อทฤษฎีการตัดสินใจ

6.2 การวิเคราะห์กลยุทธ์ในเกม

6.2.1 แนวคิดพื้นฐาน: maximin vs. minimax

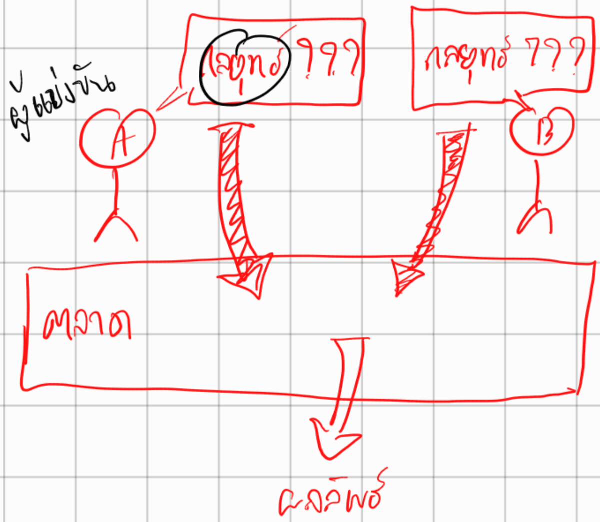
6.2.2 กลยุทธ์แท้และค่าของเกม

6.3 การวิเคราะห์กลยุทธ์ผสม

ทฤษฎีเกม (การแข่งขัน)

ถ้า 2 ฝ่ายเป็นคนฉลาด สามารถเล่น Perfect game ได้ทั้งคู่

- การแข่งกันของอย่างน้อย 2 ฝ่าย
- และมีส่วนได้ส่วนเสียจากการตัดสินใจ
  - ต่างฝ่ายต่างตัดสินใจกลยุทธ์ของตัวเอง
- ไม่รู้กลยุทธ์ของฝ่ายตรงข้าม



"Zero-sum game" (เกมที่มีผลรวมเป็นศูนย์)

ผลรวมของค่าได้ และค่าเสียของทั้ง 2 ฝ่ายต้องเป็น 0

ฝ่ายได้ = - ฝ่ายเสีย

ฝ่ายได้ + ฝ่ายเสีย = 0

ทฤษฎีการตัดสินใจ (บทที่ 2)

เลือกไม่ได้ (ไม่รู้จะเกิดอะไรขึ้น)

เหตุการณ์ / ทางเลือกการตัดสินใจ	เหตุการณ์ 1	เหตุการณ์ 2	...	เหตุการณ์ n
ทางเลือก 1	(กำไร)		...	
ทางเลือก 2			...	
⋮	⋮	⋮	⋮	
ทางเลือก m			...	

เลือกได้

ทฤษฎีเกม (บทที่ 6)

(เพราะเราไม่รู้ว่าฝ่ายตรงข้ามจะใช้กลยุทธ์ไหน)

ทางเลือกตรงข้าม / ทางเลือกฝ่ายเรา	กลยุทธ์ 1	กลยุทธ์ 2	...	กลยุทธ์ n
กลยุทธ์ 1			...	
กลยุทธ์ 2			⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
กลยุทธ์ m			...	

ค่าตอบแทนของฝ่ายเรา

เกมที่เราใช้กลยุทธ์ที่ 1 ในขณะที่ฝ่ายตรงข้ามใช้กลยุทธ์ที่ 2

กลยุทธ์ A \ กลยุทธ์ B	1	2
1	4	-3
2	3	-2
3	6	7

Zero-sum game

กลยุทธ์ B \ กลยุทธ์ A	1	2	3
1	$\boxed{-4}$	$\boxed{-3}$	-6
2	3	2	7

ตารางผลตอบแทนของ B

เป็นตารางผลตอบแทนของ A"

ต่างกันแค่เครื่องหมาย +, -

ฝ่าย A ได้ผลตอบแทน 4 หน่วย

ฝ่าย B จะเสียไป 4 หน่วย

(*** ตารางกำไรของเรา)

กลยุทธ์เรา \ กลยุทธ์ B	1	2		Maximin ของเรา
1	4	-3	min	-3
2	3	-2	min	-2
3	6	7	min	6***
minimax ของ B	6***	7		

เราแก้เกมให้ได้กำไรกลับมามากที่สุด

ฝ่ายตรงข้ามก็จะเลือกกลยุทธ์ที่เรากำไรน้อยสุดไป

? ไม่รู้ความน่าจะเป็นของการเล่นของฝ่ายตรงข้าม

- ~~Maximax~~ ไม่สามารถใช้ได้ เพราะฝ่ายตรงข้ามก็จะแก้เกมเรา ให้เสียน้อยที่สุด
- Maximin

(ควรใช้ Maximax หรือ Maximin)
(5 นาที)

ในแต่ละกลยุทธ์ของเรา อีกฝ่ายจะพยายามแก้เกมเรา ให้ได้น้อยที่สุด

เหตุการณ์ที่ maximin เรา = minimax ตรงข้าม (กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของแต่ละฝ่าย)

เรียกว่า "กลยุทธ์แท้"

และค่า maximin ของเรา เรียกว่า "ค่าของเกม"

→ ค่าของเกม = 6 "เราจะได้ผลตอบแทน 6 หน่วย จากการใช้กลยุทธ์แท้"

แสดงตารางผลตอบแทนของบริษัทสร้อยฟ้า

กลยุทธ์ของ (เรา) สร้อยฟ้า	กลยุทธ์ของสร้อยดาว				min
	1	2	3	4	
1	18	25	-4	15	-4
2	24	32	29	18***	18*
3	-10	-8	17	12	-10
(max)	24	32	29	18*	

maximin = 18

minimax = 18

สร้อยฟ้ามีกลยุทธ์ที่ 2 เป็นกลยุทธ์แท้

สร้อยดาวมีกลยุทธ์ที่ 4 เป็นกลยุทธ์แท้

และเกมมีค่าของเกม = 18

ตารางที่ 7.20 ค่าของเกมของร้านขาว (ล้านบาท)

ร้านขาว	ร้านดำ			
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม	min
แบบสี	20	30	60	20
แบบขาวดำ	40	45	30	30*
max	40*	45	60	

maximin = 30

minimax = 40

$\neq$

กลยุทธ์ผสม มีอัตราส่วนของการผสมกลยุทธ์กัน เราต้องหาอัตราส่วนที่ดีที่สุดออกมาให้ได้

!สามารถใช้กำหนดการเชิงเส้นได้

(ร้านขาว) กำหนด อัตราส่วนการใช้กลยุทธ์

p = อัตราส่วนการใช้กลยุทธ์แบบสี

$\therefore 1-p$ = อัตราส่วนการใช้กลยุทธ์แบบขาวดำ

ความน่าจะเป็น

} ผลรวมอัตราส่วน = 1

ตอนทำกลยุทธ์แท้ เราใช้ $p = 1$ หรือ 0 ; $0 < p < 1$

ร้านขาวต้องพยายามแก้เกมของแต่ละกลยุทธ์ของร้านดำ โดยการหาค่าคาดหมายของร้านขาว

Expected Value

(ขาวแก้เกมดำ)

ร้านขาว	ร้านดำ		
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม
(p) แบบสี	20	30	60
(1-p) แบบขาวดำ	40	45	30

ถ้าร้านดำเลือกกลยุทธ์แบบสี (ถ้าร้านขาวใช้แบบสี → ร้านขาวได้ 20, แบบขาวดำ → ได้ 40)

$$EV_{\text{ดำ:แบบสี}} = p \times 20 + (1-p) \times 40 = \boxed{40 - 20p}$$

Note ถ้า $p=1 \Leftrightarrow$ เล่นแบบสีอย่างเดียว

$40 - 20p = 40 - 20(1) = 20$

ถ้า $p=0 \Leftrightarrow$ เล่นแบบขาวดำอย่างเดียว

$40 - 20p = 40 - 20(0) = 40$

ทำนองเดียวกัน

$$EV_{\text{ดำ:ขาวดำ}} = p \times 30 + (1-p) \times 45 = \boxed{45 - 15p}$$

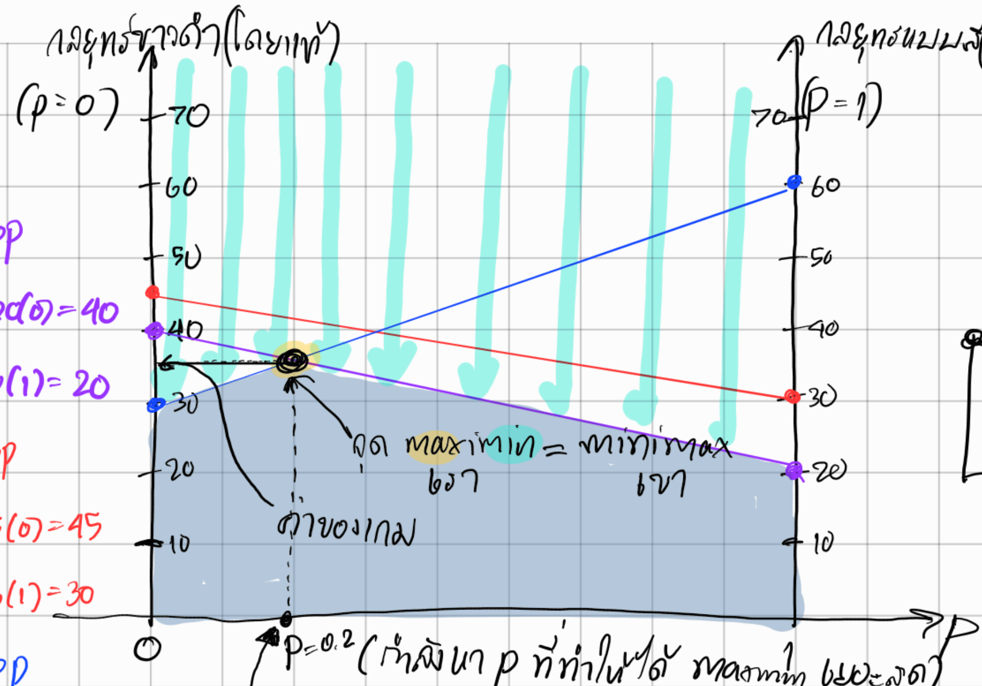
$$EV_{\text{ดำ:แบบผสม}} = p \times 60 + (1-p) \times 30 = \boxed{30 + 30p}$$

(p) แบบสี
(1-p) แบบขาวดำ

$EV_{\text{ดำ:แบบสี}} = 40-20p$
- $p=0 \rightarrow 40-20(0)=40$
- $p=1 \rightarrow 40-20(1)=20$

$EV_{\text{ดำ:ขาวดำ}} = 45-15p$
- $p=0 \rightarrow 45-15(0)=45$
- $p=1 \rightarrow 45-15(1)=30$

$EV_{\text{ดำ:แบบผสม}} = 30+30p$
- $p=0 \rightarrow 30+30(0)=30$
- $p=1 \rightarrow 30+30(1)=60$



(กำลังหา p ที่ทำให้ได้ maximin เยอะสุด)

จุดที่ ค่า $30+30p$ กับ ค่า $40-20p$ มีค่าเท่ากัน

หาค่า p ที่ $30+30p = 40-20p$

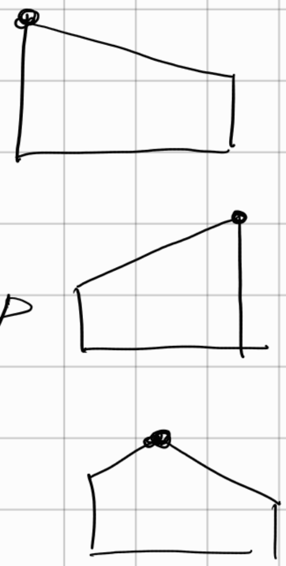
$$30p+20p = 40-30$$
$$50p = 10$$
$$p = \frac{10}{50} = 0.2 \quad (20\%)$$

เขาต้องผสมด้วยอัตราส่วน แบบสี 20% และ แบบขาวดำ 80%

เพื่อที่จะได้ค่าของเกม $30+30p = 30+30(0.2) = \underline{36}$

ผลตอบแทนของร้านขาว

(p) แบบสี
(1-p) แบบขาวดำ



(ต้องได้ค่าของเกมเท่ากับ 36 เหมือนกัน)

ร้านขาว	ร้านดำ		
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม
แบบสี	20	30	60
แบบขาวดำ	40	45	30

วิเคราะห์กลยุทธ์ร้านดำ

(ดำแก้เกมขาว)

อย่าลืมว่าเป็นการดูความสูญเสียของร้านดำ

q = อัตราส่วนของกลยุทธ์แบบสีของร้านดำ

1-q = อัตราส่วนของกลยุทธ์แบบผสมของร้านดำ

โจทย์: ลองใช้การคิดค่าคาดหวังการแก้เกมของร้านดำด้วยการผสม 2 กลยุทธ์ดังกล่าว

ร้านขาว	ร้านดำ		
	แบบสี (q)	~~แบบขาวดำ~~ (0)	แบบผสม (1-q)
แบบสี	20	30	60
แบบขาวดำ	40	45	30

Expected Loss

$EL_{สี} = 20q + (1-q)\times 60 = 60 - 40q$

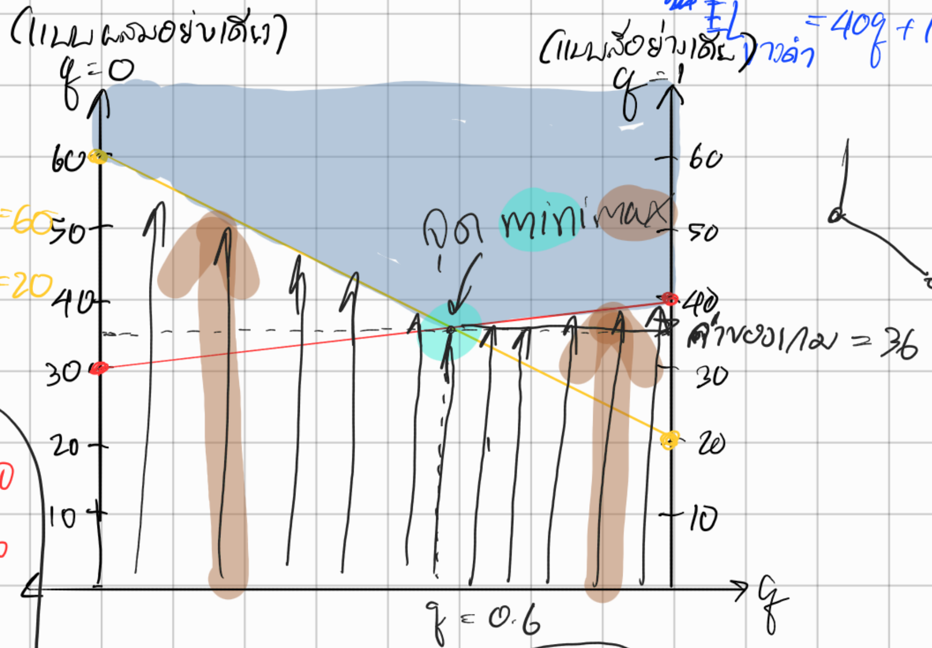
$EL_{ขาวดำ} = 40q + (1-q)\times 30 = 30 + 10q$

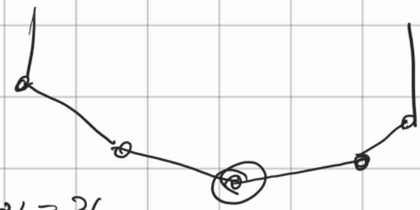
$EL_{สี} = 60 - 40q$

- $q = 0 \rightarrow 60 - 40(0) = 60$
- $q = 1 \rightarrow 60 - 40(1) = 20$

$EL_{ขาวดำ} = 30 + 10q$

- $q = 0 \rightarrow 30 + 10(0) = 30$
- $q = 1 \rightarrow 30 + 10(1) = 40$





$$60 - 40q = 30 + 10q$$
$$60 - 30 = 10q + 40q$$
$$30 = 50q$$
$$q = \frac{30}{50} = 0.60 \quad (60\%)$$

ค่าของเกม $= 30 + 10(0.6) = 36$ ✓✓

(ซึ่งเท่ากันกับค่าเกมโดยร้านขาว)

6.4 การจัดรูปปัญหาเกมผลรวมเป็นศูนย์ให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น

CHAPTER 7

ตัวแบบแถวคอย (Queuing Theory)

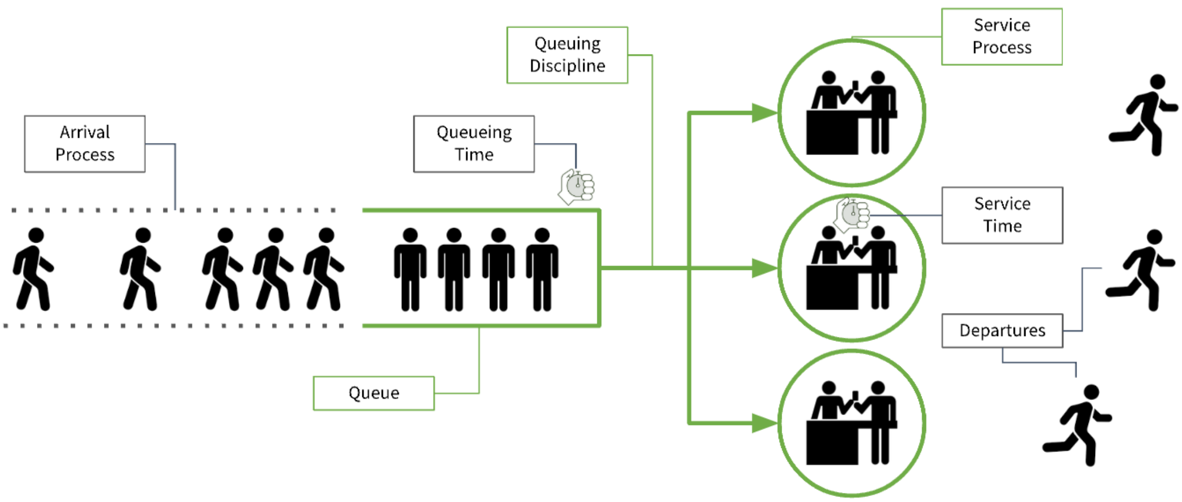
7.1 บทนำ

- ระบบแถวคอย (การเข้าคิว) คือระบบที่มีผู้ให้บริการและมีผู้มารับบริการ โดยที่ผู้รับบริการอาจจะได้รับบริการทันที หรืออาจจะต้องรอเพื่อรับบริการตามลำดับ
- เป้าหมายของบทนี้คือวิเคราะห์และอธิบายระบบการเข้าแถวแบบต่าง ๆ ในแง่ของต้นทุนและแรงงาน

7.2 โครงสร้างของระบบแถวคอย

โครงสร้างสำคัญของระบบแถวคอยประกอบด้วย

1. ลูกค้า (ผู้มาใช้บริการ): ลักษณะการมาเป็นอย่างไร (อัตราการมา)
2. รูปแบบของระบบบริการ: มีกี่แถว มีกี่หน่วยบริการ และกระบวนต่อจากการให้บริการของหน่วยบริการเป็นอย่างไร
3. หน่วยให้บริการ: อัตราการให้บริการเป็นอย่างไร



7.2.1 ลักษณะของลูกค้า

จำนวนผู้เข้ารับบริการ:

- มีผู้เข้ารับบริการได้ไม่จำกัด
- มีผู้เข้ารับบริการได้จำกัด

นอกจากประเดินเรื่องความจำกัดของผู้เข้าคิวแล้ว ยังมีประเด็นเรื่องอัตราการมาเข้ารับบริการ (arrival rate) ซึ่งมักสมมติเป็น 2 รูปแบบ

- ผู้เข้ารับบริการมาแบบอัตราคงที่
- ผู้เข้ารับบริการมาแบบสุ่ม ซึ่งมักถูกสมมติให้สุ่มด้วยการแจกแจงแบบปัวซง (Poisson distribution)

ทั้งนี้การแจกแจงความน่าจะเป็นของการมาเข้ารับบริการอาจจะมีการแจกแจงแบบอื่นได้เช่นกันขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมของแต่ละธุรกิจ

Arrival Rate: Poisson distribution

คุณสมบัติ 7.1: การแจกแจงปัวซงของอัตราการเข้ารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนผู้เข้ารับบริการในช่วงระยะเวลาที่กำหนด เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบปัวซงที่อัตราเฉลี่ยของการเข้ารับบริการมีค่าเท่ากับ λ กล่าวคือ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการ x คนมีค่าเท่ากับ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

ตัวอย่าง 7.2.1: Warm-up Poisson

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้จำนวนผู้ใช้บริการห้างสรรพสินค้าแห่งนี้มีการแจกแจงแบบปัวซง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการ 15 คน
2. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการไม่เกิน 5 คน
3. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการเกิน 5 คน

Arrival Time Interval: Exponential distribution

นอกจากการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้เข้าใช้บริการที่มีการแจกแจงแบบปัวซงแล้วนั้น ยังมีการแจกแจงอีกแบบที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้อกันคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ (arrival time interval)

คุณสมบัติ 7.2: การแจกแจงเอกซ์โพเนเชียลของระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่...

7.2.2 ลักษณะของแถวคอย

7.2.3 ลักษณะของหน่วยให้บริการ

7.3 ตัวแบบแถวคอย

7.3.1 ตัวแบบ M/M/1

7.3.2 ตัวแบบ M/M/s

7.3.3 ตัวแบบ M/G/1

7.3.4 ตัวแบบ M/D/1

7.4 การวิเคราะห์ระบบแถวคอยเพื่อการตัดสินใจทางธุรกิจ

7.4.1 การกำหนดจำนวนหน่วยบริการ

7.4.2 การตัดสินใจจัดรูปแบบแถวคอย

CHAPTER 8

ปัญหาการหาค่าเหมาะสุดต่าง ๆ ในเชิงธุรกิจ (Optimization Problem in Business)

8.1 Transportation Problem

8.2 Scheduling Problem

8.3 Matching Problem

Appendices

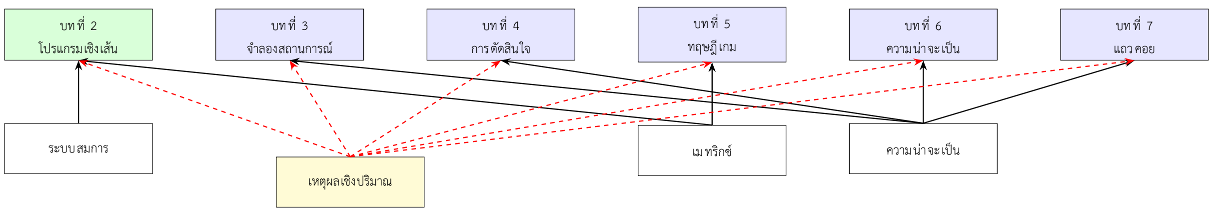
APPENDIX A

คณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เชิงปริมาณ

ในบทแรก เราจะเริ่มจากการปูพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่จำเป็นจะต้องใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาวิชาการวิเคราะห์เชิงปริมาณกันก่อน ทั้งนี้นักศึกษาไม่จำเป็นจะต้องศึกษาทั้งบทภายในครั้งเดียว เนื่องจากแต่ละบทนั้นจะมีคณิตศาสตร์ที่ต้องใช้แตกต่างกันไป นักศึกษาสามารถใช้บทนี้เป็นนบททบทวนก่อนขึ้นเนื้อหาหลักในแต่ละบทได้

สำหรับทางอาจารย์ผู้สอนนั้น ไม่ควรที่จะใช้บทนี้เป็นบทเรียนหลักที่สอนทั้งหมดภายในคราวเดียว เนื่องจากจนกว่าจะถึงตอนที่นักศึกษาจะต้องใช้จริงนั้น นักศึกษาเองก็อาจจะจำรายละเอียดไม่ได้แล้ว ดังนั้น ทางผู้เขียนจึงขอแนะนำว่าให้หยิบไปบางส่วนขึ้นกับเนื้อหาหลักที่กำลังจะสอน และไม่ควรมีการออกสอบเก็บคะแนนสำหรับบทนี้ เนื่องจากเป็นความรู้พื้นฐานของเนื้อหาหลัก

อาจารย์ผู้สอนหรือนักศึกษาที่ศึกษาด้วยตัวเองสามารถใช้แผนภาพด้านล่างนี้เป็นแนวทางในการศึกษาในแต่ละหัวข้อ:



จากแผนภาพจะเห็นว่าหัวข้อการให้เหตุผลเชิงปริมาณเป็นเนื้อหาสำคัญของบทนี้ที่จะข้ามไม่ได้ เนื่องจากเป็นบทที่ว่าด้วยทักษะการแปลปัญหาโลกจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ หรือกล่าวได้ว่าเป็นหัวข้อเกี่ยวกับ mathematical literacy ซึ่งจากประสบการณ์ของผู้เขียนนั้น พบว่านักเรียนนักศึกษาส่วนใหญ่ที่เรียนหัวข้อทางคณิตศาสตร์ หรือหัวข้อประยุกต์ทางคณิตศาสตร์ไม่เข้าใจ ไม่ได้เกิดจากการเรียนดนื้อหาในหัวข้อไม่เข้าใจ แต่เกิดจากการที่ไม่เข้าใจตั้งแต่แนวคิดตั้งต้นที่จะเชื่อมปัญหาในโลกจริงให้กลายเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์และใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เข้าไปช่วยแก้ปัญหา ซึ่งทางผู้เขียนค่อนข้างมีความเชื่อว่าสิ่งที่ยากไม่ใช่การเรียนเครื่องมือคณิตศาสตร์ เพราะอยากน้อยก็ใช้วิธีจำไปสอบ หรือตอนทำงานจริงก็เปิดคู่มือทำตามได้ แต่สิ่งที่ยากจริง ๆ คือการที่จะนำคณิตศาสตร์และปัญหาจริงมาเชื่อมโยงกันอย่างไร ดังนั้นจึงขอเน้นย้ำว่าหัวข้อการให้เหตุผลเชิงปริมาณนั้น ถึงแม้จะอยู่หัวข้อสุดท้ายของบท แต่ก็ไม่ควรละเลย

A.1 ระบบสมการเชิงเส้น

ในบทที่ 1 เราจะเรียนเกี่ยวกับการหาค่ามากสุดหรือน้อยสุด (เรียกว่าการทำ optimization) กับปัญหาที่ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขอยู่ในรูปแบบที่เรียกว่า **รูปแบบเชิงเส้น** (linear form) กล่าวคือ เป็นรูปแบบที่ตัวแปรจะไม่มีการดำเนินการอื่นเลยนอกจากการบวกหรือลบ (ยกเว้นการคูณด้วยค่าคงที่ เพราะค่าคงที่ไม่ใช่ตัวแปร) ดังนั้นเราจะมาศึกษาเกี่ยวกับพื้นฐานของระบบเชิงเส้นเบื้องต้นกันในหัวข้อนี้ ซึ่งเราจะเริ่มด้วยการทำความเข้าใจสิ่งที่เรียกว่าเชิงเส้นกันในหัวข้อย่อย A.1.1 และต่อด้วยระบบสมการเชิงเส้นในรูปแบบของความหมายเชิงเรขาคณิตรวมถึงการแก้สมการเบื้องต้นสำหรับผู้ที่ไม่มีพื้นฐานการแก้ระบบสมการข

ทั้งนี้ ก่อนที่จะเริ่มเนื้อหาจริง ๆ จะมี 2 คำสำคัญที่ต้องแยกความหมายให้ได้ นั่นคือ**ค่าคงที่** (constant) และ**ตัวแปร** (variable) โดยที่ค่าคงที่คือสิ่งที่ถูกกำหนดค่าตายตัวมาแล้วตั้งแต่แรก ถึงแม้ในการเขียนบางครั้งจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษก็ตาม แต่ตัวแปรคือสิ่งที่สามารถเปลี่ยนค่าได้ทำให้ระบบได้ผลลัพธ์ที่เปลี่ยนไป โดยถ้าเปรียบเทียบกับระบบการทำงานเครื่องจักรแปลสภาพวัตถุดิบ ค่าคงที่อาจเทียบได้กับรุ่นของอะไหล่ส่วนต่าง ๆ ซึ่งในบางครั้ง ถ้าเราเปลี่ยนค่าคงที่ไปก็คือเป็นการกล่าวถึงคนละระบบหรือคนละเครื่องจักรทันที แต่เมื่อเรามีเครื่องจักรแล้ว วัตถุดิบที่ใส่เข้าไปเปรียบเสมือนเป็นตัวแปรที่ในเครื่องจักรเครื่องนั้นจะให้ผลผลิตเป็นอะไรออกมาขึ้นกับว่าเราใส่วัตถุดิบหรือตัวแปรอะไรเข้า

ไม่ว่าจะค่าคงที่หรือตัวแปรก็ตาม ถ้าเราอธิบายคณิตศาสตร์ในเลเวลของการอธิบายเชิงนามธรรม ก็มักจะใช่ตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้งคู่ ดังนั้นจงพึงละลึกไว้เสมอว่าตัวอักษรภาษาอังกฤษไม่ใช่ตัวแปรเสมอไป จะเป็นค่าคงที่หรือตัวแปร ขึ้นอยู่กับบริบทหรือหน้าที่ของสิ่งที่เรากำลังอธิบาย

A.1.1 ฟังก์ชันเชิงเส้นและสมการเชิงเส้น

ก่อนอื่น เราจะมาเริ่มกันที่นิยามของสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อนี้กันก่อน

นิยาม A.1.1: Linear Expression, Linear Equation and Linear Function

นิพจน์เชิงเส้น (Linear Expression) ของตัวแปร $x_1, \ldots, x_n$ คือรูปแบบนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปแบบ

$$c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

โดยที่ c_i คือค่าคงที่ กล่าวคือไม่มี 2 ตัวแปรใด ๆ ที่ดำเนินการอื่นนอกจากการบวกหรือลบ ยกเว้นการคูณกันระหว่างค่าคงที่กับตัวแปร (ทั้งนี้เรายังคงจัดให้นิพจน์ที่มีแต่ค่าคงที่เป็นนิพจน์เชิงเส้นเช่นกัน)
สมการเชิงเส้น (Linear Equation) คือสมการ (การเท่ากัน) ที่ทั้งสองฝั่งของสมการอยู่ในรูปแบบนิพจน์เชิงเส้น
ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือฟังก์ชันที่กำหนดกฎการคำนวณด้วยนิพจน์เชิงเส้น กล่าวคือ ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร $x_1, \ldots, x_n$ ถ้า

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

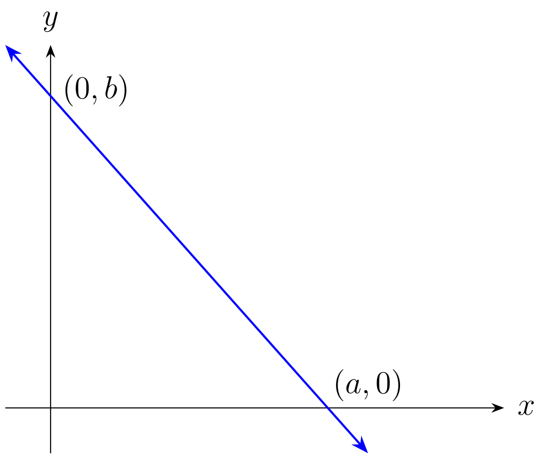
สาเหตุที่เรียกว่าเชิงเส้น ก็มีที่มาจากเส้นตรงในเรขาคณิต ซึ่งคือแนวทางการเดินทางที่มีพฤติกรรมว่าอัตราการเปลี่ยนค่ามีค่าคงที่และไม่ขึ้นกับค่าคงตัวแปรอื่น โดยจะได้นำตัวอย่างมาอธิบายในหัวข้อถัดไป

A.1.1.1 ตัวอย่างความสัมพันธ์เชิงเส้น 2 มิติ: กราฟเส้นตรง

A.1.1.1.1 สมการสู่เส้นตรง

ขอเริ่มจากสิ่งที่ง่ายกว่า ซึ่งคือเมื่อมีสมการแล้วอยากได้กราฟเส้นตรงของสมการ

1. **กรณีไม่ได้ผ่านจุดกำเนิด**: สามารถทำได้โดยการหาจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y



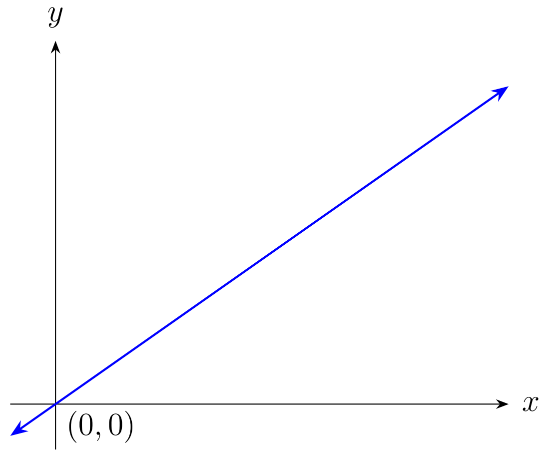
◇ **จุดตัดแกน** x คือจุดที่มีค่า $y = 0$ ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบ $(a, 0)$ และสามารถหาได้จากการแทนค่า $y = 0$ ลงในสมการแล้วแก้สมการหาค่า x

◇ ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถหา**จุดตัดแกน** y ในรูป $(0, b)$ ได้ด้วยการแทนค่า $x = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า y

ตัวอย่าง A.1.1: วาดกราฟเส้นตรงที่ไม่ผ่านจุดกำเนิด

จงวาดกราฟของเส้นตรงของสมการ $3x + 4y = 24$

2. **กรณีผ่านจุดกำเนิด**: กรณีสมการอยู่ในรูป $Ax + By = 0$ ในกรณีนี้ทั้งระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ต่างก็เป็น 0 ทั้งคู่ จึงทำให้จุดทั้ง 2 คือจุดเดียวกันคือจุด $(0, 0)$ เพราะฉะนั้น จึงไม่มี 2 จุดให้ลากเชื่อมได้โดยง่ายเหมือนกรณีที่ผ่านมา

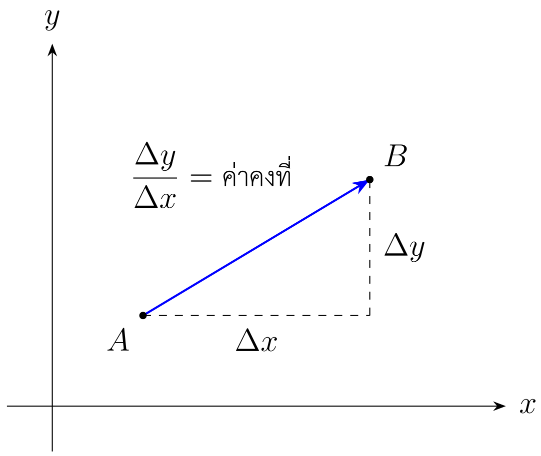


ในกรณีนี้เราสามารถแก้ปัญหาได้โดยการหาจุดที่อื่นที่ไม่จำเป็นต้องอยู่บนแกนก็ได้ เช่นอาจจะแทนค่า $x = 1$ (หรือค่าอื่น ๆ แล้วแต่ความสะดวก) แล้วแก้สมการหาค่า y ได้จุด $(1, y)$ แล้วลากเชื่อมกับจุด $(0, 0)$

ตัวอย่าง A.1.2: วาดกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

จงวาดกราฟของเส้นตรงของสมการ $3x + 4y = 0$

A.1.1.1.2 เส้นตรงสู่สมการ



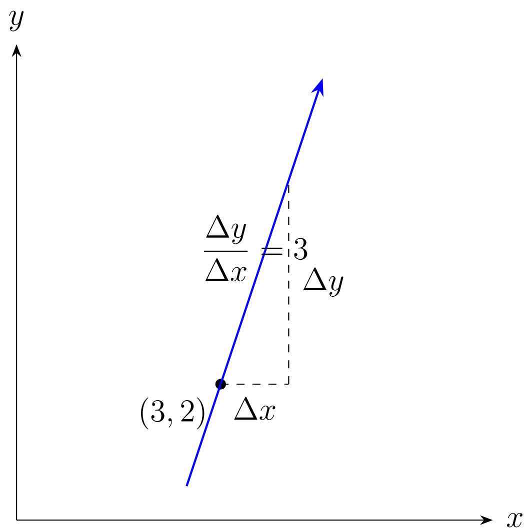
ซึ่งเมื่อลองกำหนดให้มีจุดตั้งต้น $A\,(x_0, y_0)$ เป็นจุดคงที่ และสมมติว่า $B\,(x, y)$ คือจุดตัวแปรใด ๆ ที่อยู่ในแนวเส้นตรงนั้น และสมมติว่าอัตราคงที่ดังกล่าวคือ m จะได้สมการว่า

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

และท้ายที่สุด จะได้สมการออกมาในรูปแบบ $y = (y_0 - kx_0) + mx$ ซึ่งจะเห็นว่ารูปสมการที่ได้จะอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น โดยที่มี $c_0 = y_0 - kx_0$ เป็นพจน์ค่าคงที่ และถ้าพิจารณาในรูปแบบของเส้นตรงทางเรขาคณิต ค่า m ที่เป็นค่าคงที่ที่คูณอยู่หน้าตัวแปร x จะเรียกว่า **ความชัน** (slope)

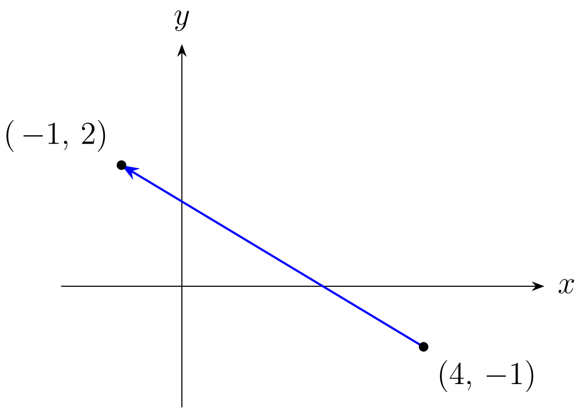
ตัวอย่าง A.1.3: การหาสมการของเส้นตรง (x, y)

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3,2) และมีความชันเท่ากับ 3



ตัวอย่าง A.1.4: การหาสมการของเส้นตรง (x, y)

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (4,-1) และจุด (-1,2)



A.1.1.2 ตัวอย่างความสัมพันธ์เชิงเส้น 3 มิติ: กราฟระนาบ x, y, z

เส้นตรงและสมการเส้นตรงที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อที่แล้วนั้นเป็นตัวอย่างอย่างง่ายในระนาบพิกัด 2 มิติ (และตัวเส้นตรงเองเป็นวัตถุ 1 มิติ) กล่าวคือเรากำลังศึกษาวัตถุ 1 มิติในมุมมอง 2 มิติ ในหัวข้อย่อยนี้เราจะศึกษาของที่มิติสูงขึ้นอีกขั้นหนึ่งในมุมมอง 3 มิติ (พิกัด x, y, z) โดยวัตถุเชิงเส้นในระบบ 3 มิติดังกล่าวสามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$0 = Ax + By + Cz + K$$

(เส้นตรงใน 2 มิติก็สามารถเขียนได้ในทำนองเดียวกันคือ $0 = Ax + By + K$) หรือเขียนในรูปแบบฟังก์ชันของค่า z คือ

$$z = ax + by + k$$

คุณสมบัติ A.1: เชิงเส้นในเชิงเส้น: กรณีตัวอย่าง 3 ตัวแปร

กำหนดความสัมพันธ์เชิงเส้น 3 ตัวแปร

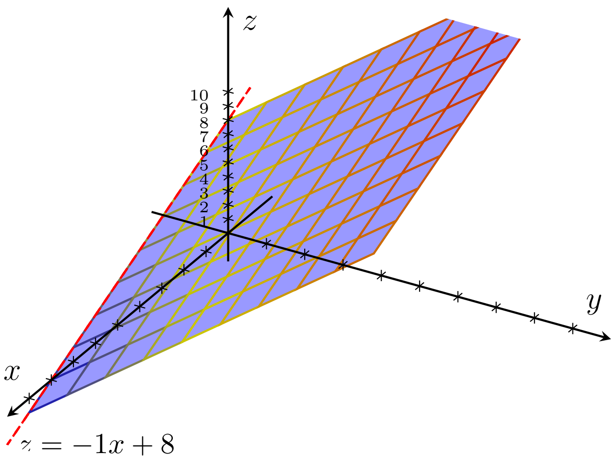
$$z = f(x, y) = ax + by + k$$

ถ้าสมมติให้ตัวแปรตัวหนึ่งเป็นค่าคงที่ (สมมติว่าเป็น $x = x_0$) จะได้สมการที่เหลือ 2 ตัวแปรเป็น

$$z = by + (ax_0 + k)$$

กล่าวคือ เราจะได้สมการเส้นตรงของตัวแปร y, z ซึ่งจะพบว่าไม่ว่าเราจะกำหนดตัวแปร x ให้เป็นค่าคงที่ใด ๆ ก็ตาม เราจะยังคงได้เส้นตรงความชัน b เท่าเดิม เปลี่ยนแค่พจน์ในวงเล็บซึ่งคือจุดตัดระนาบ $x - z$ (แนว $y = 0$) ซึ่งจะมีแนวทางเดินรอยตัดคือ $z = ax + k$

ตัวอย่างเช่นเราอยากวาดกราฟของสมการ $z = -1x + 2y + 8$

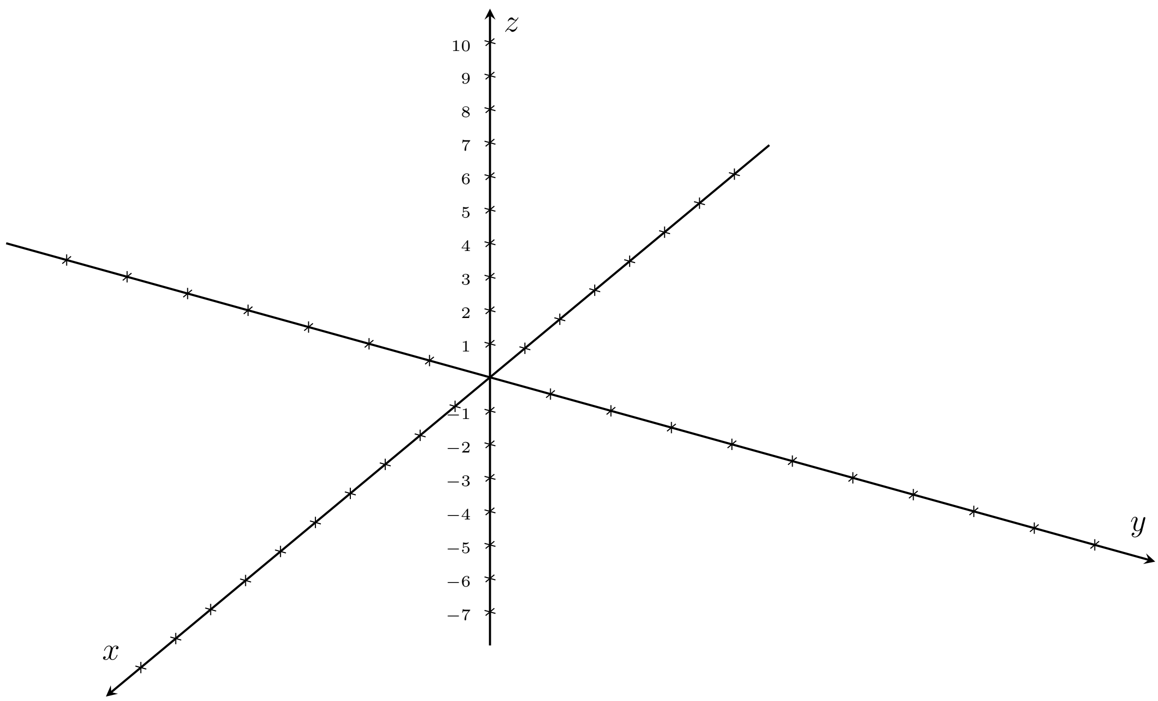


หลังจากที่ได้ลองพิจารณากราฟของสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรด้วยวิธีการกำหนดให้ตัวแปรหนึ่งเป็นค่าคงที่แล้วลองวาดเส้นตรงของสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรที่เหลือ จะพบว่ารูปที่ได้ เปรียบเสมือนการเลื่อนเส้นตรงไปตามแนวของเส้นตรงเส้นอีกเส้นหนึ่ง ทำให้ได้ออกมาในลักษณะแผ่นเรียบที่เรียกว่า “ระนาบ” (plane) ซึ่งคือวัตถุเชิงเส้นในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ (ถึงแม้จะไม่ได้มีรูปร่างเป็นเส้นตรงก็ตาม)

ตัวอย่าง A.1.5: การหาสมการของเส้นตรง (x, y)

จงวาดกราฟของสมการระนาบ $3x + 5y - z = 5$

(challenge: ถ้าต้องการเดินไต่ตามระนาบ เสมือนว่าระนาบคือส่วนหนึ่งของภูเขา จงหาว่าต้องหันหัวไปทางทิศไหนถึงจะขึ้นได้เร็วที่สุด – ปัญหานี้จะเกี่ยวข้องกับหัวข้อการโปรแกรมเชิงเส้นที่อยู่ในบทที่ 1)



A.1.2 ระบบสมการเชิงเส้น: ความหมายเชิงรูปภาพของการแก้สมการ

เมื่อพูดถึงสมการเชิงเส้นเพียงหนึ่งสมการ ผลเฉลยก็คือสิ่งที่แทนค่าตัวแปรเข้าไปแล้วเป็นจริง ตัวอย่างเช่นเรามีสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร $y = 3x + 5$ ก็จะได้ว่า $(0, 5), (-2, -1)$ หรือ $(5, 20)$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว และยังมีอีกมากมายหลายจุดที่ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการนั้น ซึ่งถ้ามองในรูปแบบการวาดกราฟ ผลเฉลยก็คือจุดในพิกัดฉากที่กราฟของสมการนั้นลากผ่านนั่นเอง

และเมื่อเรามีสมการเชิงเส้นมากกว่า 1 สมการมาพิจารณาพร้อมกัน สิ่งนั้นจะถูกเรียกว่า "**ระบบสมการเชิงเส้น**" หรือก็คือระบบที่มีสมการเชิงเส้นหลายสมการ และผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นก็คือจุดที่สอดคล้องทุกสมการในระบบ หรือก็คือเมื่อวาดรูปแล้ว ทุกกราฟจะลากผ่านจุดนั้นหรือก็คือ จุดตัดร่วมของทุกกราฟนั่นเอง

A.1.2.1 ตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร: เส้นตรงตัดกัน

เส้นตรง 2 เส้นที่แตกต่างในระบบพิกัดฉาก 2 มิติสามารถวางตัวกันได้ 2 แบบคือ (1) ตัดกัน 1 จุด และ (2) ขนานกัน

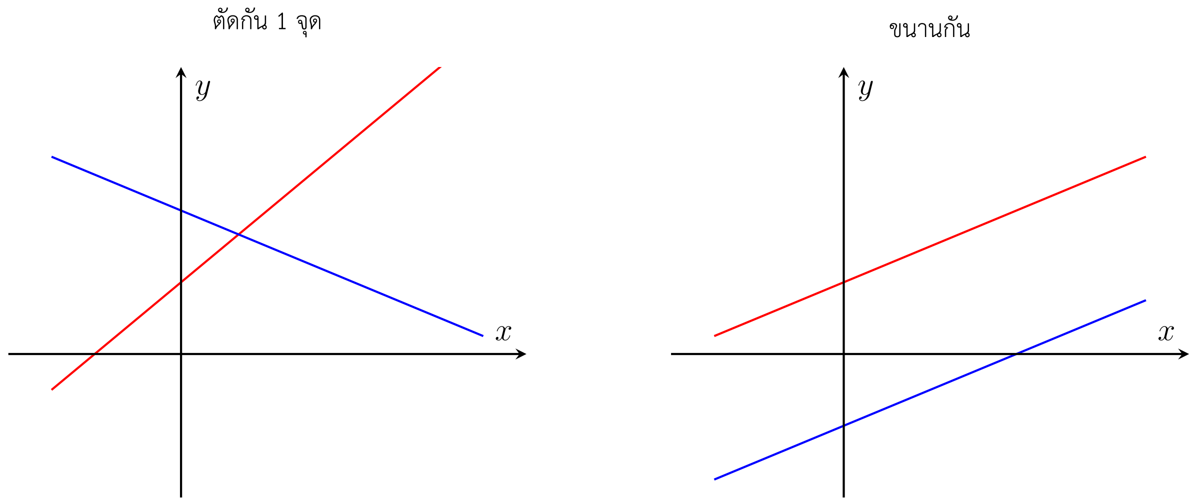


Figure A.1. เส้นตรง 2 เส้นสามารถวางตัวได้ 2 แบบ: ตัดกัน (ซ้าย) และขนานกัน (ขวา)

คำถามสำคัญที่ตามมาจะมีดังนี้

1. จะรู้ได้อย่างไรว่าสมการของเส้นตรง 2 เส้นนั้นเป็นเส้นที่แตกต่างกัน
2. และเมื่อทราบว่าแตกต่างกันแล้วนั้น จะรู้ได้อย่างไรว่าขนานหรือตัดกัน
3. และสุดท้าย เมื่อทราบแล้วว่าตัดกัน 1 จุด จะหาผลเฉลยดังกล่าวได้อย่างไร

สำหรับคำถามที่ 1 นั้น ต้องพึงระวังไว้เสมอว่าถึงแม้สมการเชิงเส้น 2 สมการจะใช้สัมประสิทธิ์ไม่เหมือนกันก็อาจจะเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกันได้ ตัวอย่างเช่น

$$0 = 3x + 5y - 7$$
$$0 = 15x + 25y - 35$$

สมการทั้งสองนี้มีกราฟเส้นตรงรูปเดียวกัน (ทำไม?)

ในขณะที่ระบบสมการนี้

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x + 5y - 7 \\
0 &= 15x + 25y - 3
\end{aligned}
$$

เป็นกราฟเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกัน

ตัวอย่าง A.1.6: การแก้ระบบสมการ 2 ตัวแปร

จงแก้ระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x + 5y - 7 \\
0 &= -2x + 3y - 3
\end{aligned}
$$

พร้อมทั้งวาดรูปประกอบ

A.1.2.2 ตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร: ระนาบตัดกัน

คำถามแรกที่ค่อนข้างง่ายคือ “ถ้าระนาบ 2 แผ่นตัดกัน จะได้รอยตัดรูปอะไร?” ทว่าการหาผลเฉลยของรอยตัดดังกล่าวกลับเป็นเรื่องยาก และคำถามในทำนองเดียวกันคือ “ถ้าเรามีระนาบ 2 แผ่น จะรู้ได้อย่างไรว่าระนาบตัดหรือไม่ตัดกัน”

จากรูปแบบการตัดแบบต่าง ๆ จะพบว่าการที่จะได้ผลเฉลยแบบออกมา 1 จุดนั้น ต้องอาศัยระนาบตัดกัน 3 แผ่นเพื่อให้ได้จุดตัดร่วมออกมาเป็น 1 จุด

ตัวอย่าง A.1.7: การแก้ระบบสมการ 3 ตัวแปร

จงแก้ระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x + 5y - 9z - 7 \\
0 &= -2x + 3y + 2z - 3 \\
0 &= x + 6y + 3z + 5
\end{aligned}
$$

A.1.3 อสมการเชิงเส้น และการวาดกราฟของอสมการเชิงเส้น

A.2 การดำเนินการบนเมทริกซ์

A.2.1 เมทริกซ์

A.2.2 การคูณเมทริกซ์

A.2.3 การใช้เมทริกซ์สำหรับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

A.3 ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

A.3.1 แนวคิดตั้งต้นสำหรับความน่าจะเป็น

A.3.2 ตัวแปรสุ่ม ค่าคาดหวัง ความอิสระ

A.3.3 กฎของเบย์

A.3.4 การแจกแจงความน่าจะเป็น

A.4 พื้นฐานการให้เหตุผลเชิงปริมาณ

A.4.1 ทักษะการแปรคำพูดเป็นนิพจน์ทางคณิตศาสตร์

A.4.2 การเข้าใจจุดประสงค์และเงื่อนไขของปัญหา

APPENDIX B

Homework

Homework 1

phaphonteey@sau.ac.th

Homework 2

วันสั่ง: 10 สิงหาคม 2568

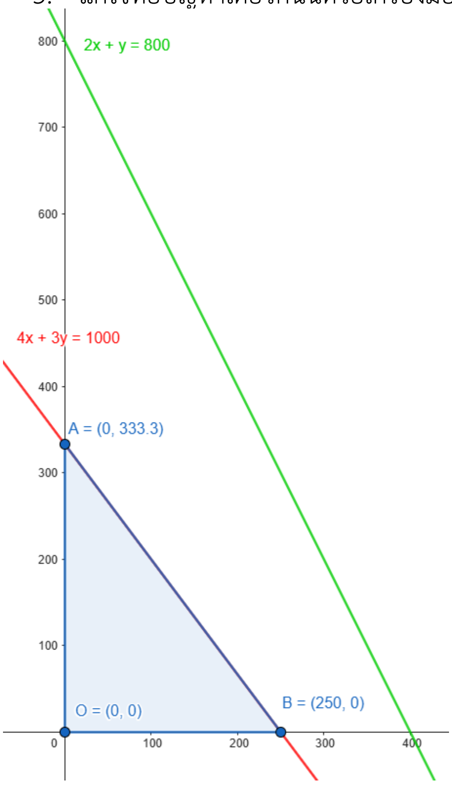
กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 16 สิงหาคม 15:00 น.

โจทย์ ABC Furniture ที่ได้ทำไปในการบ้านที่ 1 แล้ว ได้กำหนดการเชิงเส้นออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1500y \\ \texttt{subject to} \quad & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

และมีพื้นที่ของผลเฉลยตามพื้นที่สีน้ำเงินดังรูปด้านล่าง

1. จงแปลงรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานด้วยการเติมตัวแปรส่วนขาด (slack variable)
2. จงสร้างตาราง simplex ตั้งต้นของกำหนดการเชิงเส้นนี้
3. และดำเนินการ pivot เพื่อเปลี่ยนตัวแปรฐาน 1 ครั้ง (ระบุตัวแปรฐานขาเข้า กับตัวแปรฐานขาออกด้วย) พร้อมกับอธิบายผลที่ได้เกี่ยวกับการย้ายจุดมุมในรูป
4. อธิบายว่าจำเป็นต้องทำการดำเนินการ pivot อีกหรือไม่เพราะเหตุใด
5. แก้โจทย์ปัญหาเดียวกันนี้ด้วยเครื่องมือ Solver ใน Excel



Homework 3

วันสั่ง: 17 สิงหาคม 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 23 สิงหาคม 15:00 น.

โจทย์ 1

จากโจทย์ ABC Furniture ในเรื่องการกำหนดการเชิงเส้นตามเงื่อนไขที่กำหนดมาให้เราทราบกันมาแล้วว่าตราบใดที่เราสร้างเรากำหนดเงื่อนไขการผลิตโต๊ะ x ตัวและผลิตตู้ y ตัวที่สอดคล้องเงื่อนไขสมการ $4x + 3y = 1000$ ต่างก็จะได้กำไรสูงสุดเช่นกันเสมอ แต่ทั้งนี้สมมติฐานทางธุรกิจของการจะได้กำไรสูงสุดของกำหนดการเชิงเส้นคือต้องสมมติว่าเราจะขายสินค้าที่ผลิตออกมาได้ทั้งหมด ซึ่งอาจจะเป็นไปไม่ได้จริงในสภาวะตลาดที่แตกต่างกัน เพราะบางเวลาโต๊ะก็อาจจะขายได้ดี แต่ในขณะที่บางเวลาตู้ก็อาจจะขายได้ดีกว่า

สถานการณ์ทางเลือก: สำหรับไตรมาสถัดไป ฝ่ายผลิตเสนอ 3 กลยุทธ์ให้ฝ่ายบริหารพิจารณา:

- **กลยุทธ์ A:** ผลิตโต๊ะ 80% ของการผลิตทั้งหมด
- **กลยุทธ์ B:** ผลิตตู้ 80% ของการผลิตทั้งหมด
- **กลยุทธ์ C:** ผลิตในอัตราส่วนเท่าๆ กัน

สถานการณ์ตลาด (States of Nature): ฝ่ายการตลาดระบุว่าสถานการณ์ตลาดอาจเป็นไปได้ 3 แบบในไตรมาสหน้า:

- **สถานการณ์ 1 (S1) — โต๊ะบูม:** โต๊ะทำงานขายดีมาก ตู้ขายได้น้อย
- **สถานการณ์ 2 (S2) — ตลาดสมดุล:** สินค้าทั้งสองขายได้ใกล้เคียงกัน
- **สถานการณ์ 3 (S3) — ตู้บูม:** ตู้เอกสารขายดีมาก โต๊ะขายได้น้อย

ฝ่ายบริหารต้องการทราบว่า ภายใต้แต่ละกลยุทธ์นั้น ถ้าเกิดสถานการณ์ตลาดแต่ละแบบ จะได้กำไรเท่าไร โดยฝ่ายวิเคราะห์ประเมินกำไร (หน่วย: พันบาท) ดังตาราง:

กลยุทธ์การผลิต	S1: โต๊ะบูม	S2: สมดุล	S3: ตู้บูม
A (เน้นโต๊ะ)	422	182	78
B (เน้นตู้)	122	213	378
C (สมดุล)	284	497	213

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. วิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนด้วยวิธี maximax
2. วิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนด้วยวิธี maximin
3. ถ้าฝ่ายการตลาดประเมินมาให้ว่าโอกาสที่จะเกิดตลาดแบบโต๊ะบูม, สมดุล และ ตู้บูมเป็น $25\%, 50\%, 25\%$ ตามลำดับ จงวิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความเสี่ยงดังกล่าว ด้วยวิธีค่าคาดหวังของกำไร หรือค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาสอย่างใดอย่างหนึ่ง

โจทย์ 2

สถาบันการศึกษาแห่งหนึ่งได้จัดเจ้าหน้าที่เพื่อให้คำปรึกษาวิชาการไว้ 1 คนเพื่อให้คำปรึกษาด้านปัญหาการเรียนแก่นักศึกษา ทว่าได้รับการร้องมาว่าไม่เพียงพอทำให้บางครั้งต้องรอคิวนานจึงกำลังวางแผนจะจ้างเจ้าหน้าที่มาเพิ่มเพราะที่มีอยู่ไม่เพียงพอต่อความต้องการ จึงได้ทำการสำรวจปริมาณการใช้งานในช่วง 1 ชั่วโมง ได้ข้อมูลดังนี้เพื่อจะสุ่มจำลองสถานการณ์โดยใช้เลข 00-99

ข้อมูลการเข้ามารับบริการ

ระยะเวลาที่ห่างกันของการเข้ามา (นาที)	**จำนวนนักศึกษา (คน)**	ความน่าจะเป็น	ความน่าจะเป็นสะสม	ช่วงเลขในการสุ่ม
1	11			
2	29			
3	35			
4	25			

ข้อมูลเวลาในการรับบริการ

เวลาที่ใช้	**จำนวนนักศึกษา (คน)**	ความน่าจะเป็น	ความน่าจะเป็นสะสม	ช่วงเลขในการสุ่ม
2	15			
3	35			
4	30			
5	20			

ได้ทำการจำลองสถานการณ์สำหรับนักศึกษา 10 คน โดยการสุ่มเลขได้ดังตารางด้านล่าง สมมติว่าเริ่มสำรวจตอน 13:00 น.

นิสิต คนที่	เลขสุ่ม ระยะห่างเวลา	ระยะห่างเวลา ระหว่างนักศึกษา	เวลาที่ นศ มาถึง	เวลารอ	เวลาเริ่ม ใช้บริการ	เลขสุ่ม เวลาใช้บริการ	รยะเวลา ใช้บริการ	เวลาแล้วเสร็จ
1	53					37		
2	74					60		
3	05					79		
4	71					21		
5	06					85		
6	49					71		
7	11					48		
8	13					39		
9	62					31		
10	69					35		

จากตารางการสุ่มที่ได้ จงวิเคราะห์ว่าจำนวนผู้ให้บริการที่มีอยู่เพียงพอหรือไม่

Homework 4

วันสั่ง: 24 สิงหาคม 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 30 สิงหาคม 15:00 น.

จากข้อโรงอาหารที่จะได้เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะดังนี้

		เมนูที่ทานเดือนนี้		
		A	B	C
เมนูที่ทานเดือนถัดไป	A	0.6	0.6	0.2
	B	0.3	0.1	0.2
	C	0.1	0.3	0.6

1. จงหาว่าต้องมีอัตราส่วนของคนชอบเมนูอาหารใดเท่าไหร่บ้างถึงจะอยู่ในสภาวะที่ไม่ต้องเปลี่ยนแปลงปริมาณการเก็บวัตถุดิบในเดือนถัดไป (จงหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็นที่อยู่ในสถานะคงที่) โดยใช้วิธีการตั้งสมการและแก้ระบบสมการ
2. ใช้ Excel เพื่อหาเวกเตอร์สถานะคงที่โดยใช้เวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 1 + \text{เลขหลักร้อยของรหัสนักศึกษา} \\ 1 + \text{เลขหลักสิบของรหัสนักศึกษา} \\ 1 + \text{เลขหลักหน่วยของรหัสนักศึกษา} \end{pmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เริ่มต้น (พิจารณาจำนวนครั้งการคูณกันด้วยตัวเองที่มั่นใจพอว่าเวกเตอร์นิ่งแล้ว) และทำเวกเตอร์สุดท้ายให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ความน่าจะเป็น ทำส่งเป็นไฟล์ Excel แนบมาพร้อมกับไฟล์ pdf ของข้อ 1

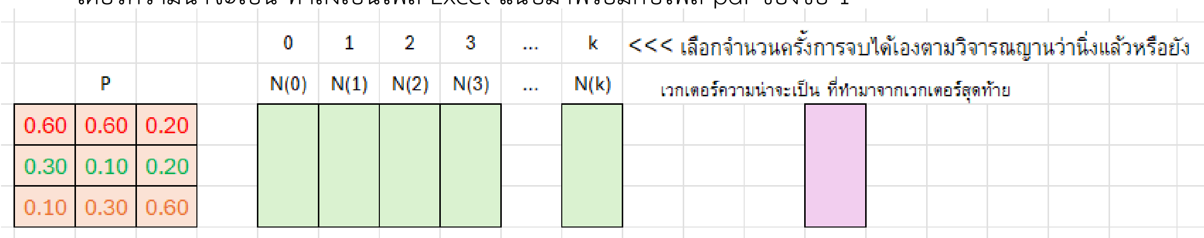


Figure B.1. ตัวอย่างตาราง Excel (สามารถออกแบบได้ด้วยตัวเอง)

Homework 5

วันสั่ง: 31 สิงหาคม 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 6 กันยายน 15:00 น.

วัตถุประสงค์

1. คำนวณตัวชี้วัดความคลาดเคลื่อน MAE และ RMSE ด้วยมือจากตาราง
2. เปรียบเทียบความไวต่อ outlier ของ RMSE (ที่ยกกำลังสอง) กับ MAE
3. ฝึกตีความผลเมื่อมี/ไม่มี outlier ทั้งในชุดฝึกสอนและชุดทดสอบ

หาตัวแบบ

Exercise B.0.1: หาตัวแบบ

กำหนดชุดข้อมูลมาให้ 6 จุดดังนี้

$$(1,5)\,,\ (2,7)\,,\ (3,9)\,,\ (4,11)\,,\ (5,13)\,,\ (\mathbf{6},\mathbf{50})$$

โดยที่จุด $(6,50)$ เป็นค่าผิดปกติ (outlier) ให้ทำการหาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น 2 อันด้วยการคำนวณด้วยตาราง โดยที่

1. ใช้ข้อมูลครบทั้ง 6 ตัว จะได้ $\hat{y}_{(1)} = \boxed{} + \boxed{}x$
2. ใช้แค่ข้อมูล 5 ตัวปกติ จะได้ $\hat{y}_{(2)} = \boxed{} + \boxed{}x$

Exercise B.0.2: วัดผลบนชุดข้อมูลที่ใช้สร้างตัวแบบ

จากตัวแบบที่ได้ในข้อที่ผ่านมา ให้วัดผลด้วย MAE และ RMSE ด้วยชุดข้อมูลที่ใช้

Exercise B.0.3: วัดผลบนชุดข้อมูลใหม่

จากตัวแบบที่ได้ในข้อที่ผ่านมา ให้วัดผลด้วย MAE และ RMSE ด้วยชุดข้อมูลใหม่ 3 ตัวดังนี้

$$(1.5,6)\,,\ (4.5,12)\,,\ (\mathbf{6.5},\mathbf{55})$$

Homework 6

วันสั่ง: 8 กันยายน 2568

กำหนดส่ง: อาทิตย์ที่ 14 กันยายน 21:00 น.

PART A: ลองคิดกรณีผสมกลยุทธ์ในกรณีที่มีกลยุทธ์แท้

ตารางค่าผลตอบแทนจากการแข่งขันด้านล่างนี้เป็นตารางของกรณีที่มีกลยุทธ์แท้ กล่าวคือ maximin ของฝ่ายโจมตีมีค่าเท่ากับ minimax การแก้เกมได้ของฝ่ายตั้งรับ

	กลยุทธ์ฝ่ายตรงข้าม	
กลยุทธ์ฝ่ายเรา	1	2
1	4	3
2	-3	-2

โจทย์:

1. จงหากลยุทธ์แท้ของแต่ละฝ่าย พร้อมทั้งหาค่าของเกม
2. จงใช้วิธีผสมกลยุทธ์จากฝ่ายเราและวาดแผนภาพแสดงอัตราส่วนของการผสมกลยุทธ์

PART B: กลยุทธ์ผสม

ตารางด้านล่างนี้เป็นตารางที่เราได้ดูกันไปในห้องแล้ว และได้ว่าค่าของเกมคือ 36 โดยในห้องเรียนได้พิจารณาการผสมกลยุทธ์ของร้านขาว และการผสมกลยุทธ์แบบสีและแบบผสมของร้านดำไปแล้ว

	กลยุทธ์ร้านดำ		
กลยุทธ์ร้านขาว	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม
แบบสี	20	30	60
แบบขาวดำ	40	45	30

ในการบ้านนี้ให้นักศึกษาลองพิจารณาการผสมกลยุทธ์ของแบบสีและแบบขาวดำ (คำเตือน: ต้องพิจารณาแบบ minimax เพราะเป็นตารางผลตอบแทนของร้านขาว)

APPENDIX C

Quiz

Quiz 1

Exercise C.0.1: เขียนแบบจำลองและแก้ปัญหาด้วยการวาดรูป

บริษัทผลิตอัญมณีแห่งหนึ่งผลิตแหวนและต่างหูจากแร่เงินและแร่ทองคำ โดยที่

- ในการผลิตแหวน จะต้องใช้แร่งทองคำ 3 หน่วย และแร่เงิน 3 หน่วย และจะขายได้กำไร 2 พันบาท
- ในการผลิตต่างหู จะต้องใช้แร่งทองคำ 1 หน่วย และแร่เงิน 5 หน่วย และจะขายได้กำไร 1 พันบาท

ในรอบการผลิตปัจจุบัน บริษัทนี้ได้รับแร่ทองคำมา 18 หน่วย และแร่เงินมา 30 หน่วย โดยที่บริษัทอยากผลิตแหวนและต่างหูให้ได้กำไรมากที่สุด

ขั้นที่ 1: กำหนดตัวแปร โดยกำหนดให้ $x =$ จำนวนแหวนที่จะผลิต และ $y =$ จำนวนต่างหูที่จะผลิต

ขั้นที่ 2: เขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยสิ่งที่เป็นเป้าหมายของโจทย์ธุรกิจนี้คืออยาก $\boxed{\text{(1)}}$ (max ตอบ 0 / min ตอบ 1) ค่ากำไรที่ได้จากการขาย โดยที่

$$\text{กำไร} = \boxed{\text{(2)}}\, x + \boxed{\text{(3)}}\, y \qquad [1]$$

ขั้นที่ 3: เขียนอสมการเงื่อนไข โดยจากโจทย์จะได้ว่ามีเงื่อนไขอยู่ 2 เงื่อนไข คือเงื่อนไขการใช้แร่ทองคำ และเงื่อนไขการใช้แร่เงิน

$$\text{แร่ทองคำ:} \quad \boxed{\text{(4)}}\, x + \boxed{\text{(5)}}\, y \leq \boxed{\text{(6)}} \qquad [2]$$

$$\text{แร่เงิน:} \quad \boxed{\text{(7)}}\, x + \boxed{\text{(8)}}\, y \leq \boxed{\text{(9)}} \qquad [3]$$

ขั้นที่ 4: วาดรูปภาพเงื่อนไขจะได้ดังรูปด้านล่างสุด แต่เราจะแบ่งเป็นขั้นตอนการคิดดังนี้

ขั้นที่ 4.1: วาดเส้นเงื่อนไขการใช้แร่ทองคำ (สมการ [2]) โดยการหาจุดตัดแกนทั้ง 2:

- หาระยะตัดแกน x โดยการแทน $y = 0$ จะได้สมการ $\boxed{\text{(4)}}\, x = \boxed{\text{(6)}}$

  ทำให้ได้ว่า $x = \dfrac{\boxed{\text{(6)}}}{\boxed{\text{(4)}}} = \boxed{\text{(10)}}$

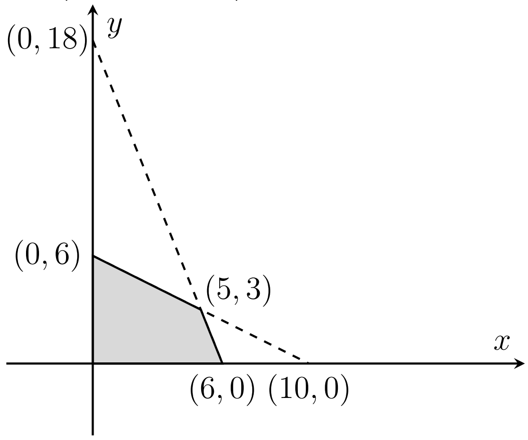
  จึงได้ว่าจุดตัดแกน x คือจุด $(6, 0)$

- และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าจุดตัดแกน y คือจุด $(0, 18)$

ขั้นที่ 4.2: ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาเงื่อนไขการใช้แร่เงิน (สมการ [3])
จะได้ว่าตัดแกน x ที่จุด $(10, 0)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, 6)$

ขั้นที่ 4.3: หาจุดตัดระหว่างสมการเส้นขอบของ [2] และสมการเส้นขอบของ [3] จะได้ว่าตัดกันที่จุด $(5,3)$ (+1 คะแนนพิเศษสำหรับคนที่สามารถแก้ระบบสมการเพื่อหาจุดตัดด้วยตัวเองได้: เขียนกระดาษแนบรูปหรือไฟล์ pdf มา)

ขั้นที่ 5: แทนค่าจุดมุมลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์ $\boxed{(11)}$ (มากสุด ตอบ 0/ น้อยสุด ตอบ 1)



(x,y)	กำไร (จากสมการ [1])
$(0,6)$	(14)
$(6,0)$	(15)
$(5,3)$	(16)
((12), (13))	(17)

ขั้นที่ 6: สรุปคำตอบ จะได้ค่า $\boxed{(11)}$ (มากสุด ตอบ 0/ น้อยสุด ตอบ 1) เท่ากับ $\boxed{(18)}$ เกิดขึ้นที่จุด $\left(\boxed{(19)}, \boxed{(20)}\right)$

โบนัสพิเศษ +1 คะแนน

จงแสดงวิธีการระบบสมการในขั้นที่ **ขั้นที่ 4.3:** ว่าได้จุดตัดเป็น $(5,3)$

Quiz 2

เราจะยังคงใช้โจทย์ปัญหาเดิมกับ quiz 1 อยู่

Exercise C.0.2: simplex method

บริษัทผลิตอัญมณีแห่งหนึ่งผลิตแหวนและต่างหูจากแร่เงินและแร่ทองคำ โดยที่

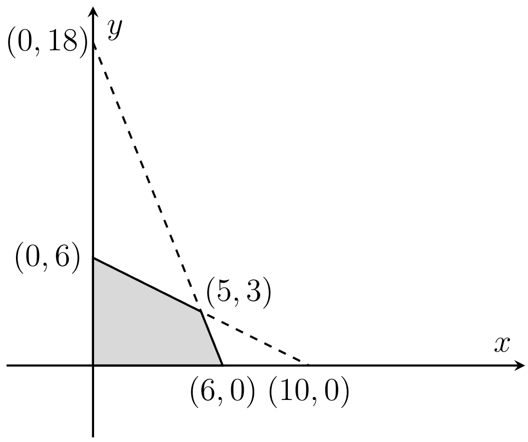
- ◇ ในการผลิตแหวน จะต้องใช้แร่ทองคำ 3 หน่วย และแร่เงิน 3 หน่วย และจะขายได้กำไร 2 พันบาท
- ◇ ในการผลิตต่างหู จะต้องใช้แร่ทองคำ 1 หน่วย และแร่เงิน 5 หน่วย และจะขายได้กำไร 1 พันบาท

ในรอบการผลิตปัจจุบัน บริษัทนี้ได้รับแร่ทองคำมา 18 หน่วย และแร่เงินมา 30 หน่วย โดยที่บริษัทอยากผลิตแหวนและต่างหูให้ได้กำไรมากที่สุด

กำหนดให้ $x =$ จำนวนแหวนที่จะผลิต และ $y =$ จำนวนต่างหูที่จะผลิต และจาก quiz 1 เราได้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นออกมาให้รูป

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1000y \\ \texttt{subject to} \quad & 3x + y \le 18 \\ & 3x + 5y \le 30 \\ & x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{aligned}$$

และ ได้ บริเวณ การ ตัดสิน ใจ เป็น ตาม รูป ด้าน ขวา



และจะแปลงเป็นรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1000y + \boxed{}\, s_1 + \boxed{}\, s_2 \\ \texttt{s.t.} \quad & 3x + y + s_1 = 18 \\ & 3x + 5y + s_2 = 30 \\ & x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad s_1 \ge 0, \quad s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

และเมื่อนำมาเขียนตารางซิมเพลกซ์ตั้งต้นจะได้ดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
s_1	3	1	1	0	$\boxed{}$
s_2	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
z	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

ต่อมาเป็นขั้นตอนการเปลี่ยนตัวแปรฐาน โดย

- ◇ **ตัวแปรขาเข้า** โดยเลือกใช้ตัวแปรของคอลัมน์ที่มีค่าตัวเลขในแถว z ติดลบมากที่สุด ซึ่งคือตัวแปร $\boxed{}$
- ◇ **ตัวแปรขาออก** โดยเลือกใช้ตัวแปรที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าด้านขวามือ (RHS) กับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรขาเข้าค่าบวกที่น้อยที่สุด

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS	อัตราส่วน
s_1	3	1	1	0	$\square$	$\square / \square = 6$
s_2	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square / \square = 10$
z	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	

ดังนั้น จึงได้ว่าตัวแปรขาออกคือ $\square$

และเมื่อทำการดำเนินการตามแถวเพื่อเปลี่ยน pivot ตามขั้นตอนด้านล่างจะได้ตารางซิมเพลกซ์ใหม่ดังนี้

1. หารแถวของตัวแปรฐานใหม่ด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานดังกล่าวในแถวนั้น
2. ดำเนินการตามแถวเพื่อให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานในแถวอื่นเป็น 0

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	$1/3$	$1/3$	0	6
s_2	0	4	-1	1	12
z	0	$-1000/3$	$2000/3$	0	12000

และถ้าทำซิมเพลกซ์ขั้นถัดไปจะได้ว่าต้องใช้ y เป็นตัวแปรฐานขาเข้า และใช้ s_2 เป็นตัวแปรขาออก จะได้ตารางซิมเพลกซ์เป็น

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	0	$5/12$	$-1/12$	5
y	0	1	$-1/4$	$1/4$	3
z	0	0	$1750/3$	$250/3$	13000

ซึ่งไม่มีสมาชิกในแถว z ติดลบแล้วจึงได้ว่ากระบวนการจบสิ้น ซึ่งจะได้ว่าผลเฉลยที่ทำให้ค่ามากสุดคือ $x = 5$ และ $y = 3$ (ที่ได้จากคอลัมน์ RHS ในตารางสุดท้าย) และได้ $z =$ $\square$ เป็นค่ามากสุด

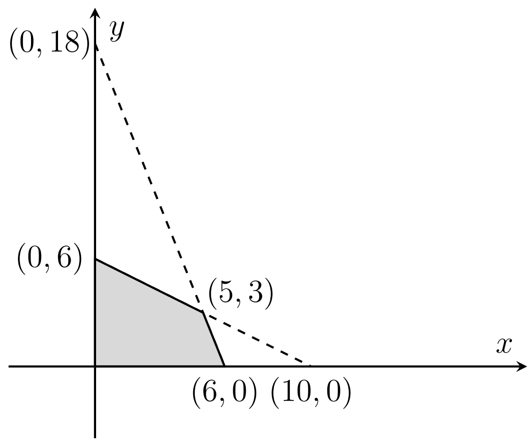
โบนัสพิเศษ +1 คะแนน

จงใช้ตาราง simplex สุดท้ายแปลงให้เป็นระบบสมการของตัวแปร x, y, s_1, s_2 และระบุเหตุผลว่าทำไม $x = 5$ และ $y = 3$ โดยอาศัยตัวระบบสมการที่ได้ (คำใบ้: ตัวแปรที่ไม่ใช่ฐานคือตัวแปรที่โดนกำหนดให้ค่าเป็น 0 ดังนั้นต้องระบุให้ได้ก่อนว่าในตารางสุดท้ายใครถูกตั้งบทบาทให้เป็นตัวแปรฐาน)

วิธีทำ: กำหนดให้ $x =$ จำนวนแหวนที่จะผลิต และ $y =$ จำนวนต่างหูที่จะผลิต และจาก quiz 1 เราได้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นออกมาให้รูป

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2000x + 1000y \\
\texttt{subject to} \quad & 3x + y \leq 18 \\
& 3x + 5y \leq 30 \\
& x \geq 0, \quad y \geq 0
\end{aligned}
$$

และ ได้ บริเวณ การ ตัดสิน ใจ เป็น ตาม รูป ด้าน ขวา



และจะแปลงเป็นรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2000x + 1000y + \boxed{(0)}s_1 + \boxed{(0)}s_2 \\
\texttt{s.t.} \quad & 3x + y + s_1 = 18 \\
& 3x + 5y + s_2 = 30 \\
& x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

และเมื่อนำมาเขียนตารางซิมเพลกซ์ตั้งต้นจะได้ดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
s_1	3	1	1	0	(18)
s_2	(3)	(5)	(0)	(1)	(30)
z	(-2000)	(-1000)	(0)	(0)	(0)

ต่อมาเป็นขั้นตอนการเปลี่ยนตัวแปรฐาน โดย

- ◇ **ตัวแปรขาเข้า** โดยเลือกใช้ตัวแปรของคอลัมน์ที่มีค่าตัวเลขในแถว z ติดลบมากที่สุด ซึ่งคือตัวแปร $\boxed{(x)}$
- ◇ **ตัวแปรขาออก** โดยเลือกใช้ตัวแปรที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าด้านขวามือ (RHS) กับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรขาเข้าค่าบวกที่น้อยที่สุด

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS	อัตราส่วน
s_1	3	1	1	0	(18)	(18) / (3) $= 6$
s_2	(3)	(5)	(0)	(1)	(30)	(30) / (3) $= 10$
z	(-2000)	(-1000)	(0)	(0)	(0)	

ดังนั้น จึงได้ว่าตัวแปรขาออกคือ $\boxed{(s_1)}$

และเมื่อทำการดำเนินการตามแถวเพื่อเปลี่ยน pivot ตามขั้นตอนด้านล่างจะได้ตารางซิมเพลกซ์ใหม่ดังนี้

1. หารแถวของตัวแปรฐานใหม่ด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานดังกล่าวในแถวนั้น
2. ดำเนินการตามแถวเพื่อให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานในแถวอื่นเป็น 0

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	$1/3$	$1/3$	0	6
s_2	0	4	-1	1	12
z	0	$-1000/3$	$2000/3$	0	12000

และถ้าทำซิมเพลกซ์ขั้นถัดไปจะได้ว่าต้องใช้ y เป็นตัวแปรฐานขาเข้า และใช้ s_2 เป็นตัวแปรขาออก จะได้ตารางซิมเพลกซ์เป็น

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	0	$5/12$	$-1/12$	5
y	0	1	$-1/4$	$1/4$	3
z	0	0	$1750/3$	$250/3$	13000

ซึ่งไม่มีสมาชิกในแถว z ติดลบแล้วจึงได้ว่ากระบวนการจบสิ้น ซึ่งจะได้ว่าผลเฉลยที่ทำให้ค่ามากสุดคือ $x = 5$ และ $y = 3$ (ที่ได้จากคอลัมน์ RHS ในตารางสุดท้าย) และได้ $z = \boxed{\text{(13000)}}$ เป็นค่ามากสุด

โบนัสพิเศษ +1 คะแนน

จงใช้ตาราง simplex สุดท้ายแปลงให้เป็นระบบสมการของตัวแปร x, y, s_1, s_2 และระบุเหตุผลว่าทำไม $x = 5$ และ $y = 3$ โดยอาศัยตัวระบบสมการที่ได้ (คำใบ้: ตัวแปรที่ไม่ใช่ฐานคือตัวแปรที่โดนกำหนดให้ค่าเป็น 0 ดังนั้นต้องระบุให้ได้ก่อนว่าในตารางสุดท้ายใครถูกตั้งบทบาทให้เป็นตัวแปรฐาน)

$$
\begin{aligned}
x + \frac{5}{12}s_1 + \frac{-1}{12}s_2 &= 5 \\
y + \frac{-1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 &= 3 \\
z + \frac{1750}{3}s_1 + \frac{250}{3}s_2 &= 13000
\end{aligned}
$$

โดยที่มี x, y เป็นตัวแแปรฐาน ดังนั้น s_1, s_2 ที่ไม่ใช่ตัวแปรฐานจึงมีค่าเท่ากับ 0 จึงได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x + \frac{5}{12}(0) + \frac{-1}{12}(0) &= 5 && \Rightarrow x = 5 \\
y + \frac{-1}{4}(0) + \frac{1}{4}(0) &= 3 && \Rightarrow y = 3 \\
z + \frac{1750}{3}(0) + \frac{250}{3}(0) &= 13000 && \Rightarrow z = 13000
\end{aligned}
$$

□

Quiz 3

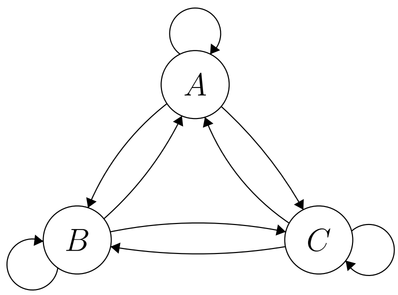
ในการสอบย่อยครั้งนี้ เราจะมาฝึกคูณเมทริกซ์กับเทริกซ์โดยอาศัยรูปภาพของการเปลี่ยนสถานะแบบมาร์คอฟกัน

Exercise C.0.3: หาผลกำลังสองของเมทริกซ์ความน่าจะเปลี่ยนของการเปลี่ยนสถานะ

จงหาผลคูณของเมทริกซ์ได้ผลลัพธ์ดังนี้ (โจทย์ให้ผลลัพธ์การคูณมาแล้ว ดังนั้นไม่ต้องนั่งคูณด้วยตัวเอง แต่เราจะลองใช้ความรู้ Markov ช่วยหาผลคูณ และในข้อนี้เราจะไม่ได้หาผลคูณของทั้ง 9 ตัว เราจะยกตัวอย่างการหาผลคูณของแค่ 3 ตัวเท่านั้น)

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.48 & 0.36 \\ 0.23 & 0.25 & 0.20 \\ 0.21 & 0.27 & 0.44 \end{bmatrix}$$

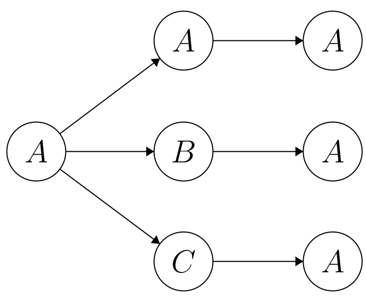
เริ่มจากเขียนแผนภาพการเปลี่ยนสถานะกันก่อน โดยโจทย์คือให้<u>**เขียนค่าความน่าจะเป็นลงไปบนเส้นการเปลี่ยนสถานะ**</u>



จากที่เรียนมาในห้อง เราทราบกันอยู่แล้วว่าความหมายของการนำเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้นมาคูณกัน จะได้ผลออกมาเป็นเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะข้าม 2 ขั้น (เช่นเปลี่ยนจากขั้นที่ 1 ไปขั้นที่ 3) ดังนั้น ถ้าเราอยากหาผลคูณของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ สิ่งที่ต้องทำคือหาความน่าจะเป็นในการเดินข้าม 2 ขั้นทุกรูปแบบที่เป็นไปได้

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป A ในขั้นที่ 3

วาดแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ <u>**จงเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)**</u>



ด้วยความรู้ในเรื่องความน่าจะเป็น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นรวมของการย้ายสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นถัดไป หาได้จากกฎการคูณและการบวกจากแผนภาพต้นไม้ดังกล่าว โดยที่

◇ เส้นต่อกัน ให้นำค่าความน่าจะเป็นของเส้นมาคูณกัน

- ◇ หลังจากคิดผลคูณค่าความน่าจะเป็นของแต่ละกิ่งเรียบร้อยแล้ว ให้นำมาบวกกัน

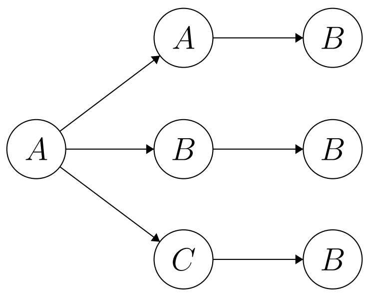
เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นถัดไปมีค่าเท่ากับ

$$P(A \to_2 A) = \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) = 0.56$$

ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ที่แทนความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจาก A ไป A ในเมทริกซ์ผลลัพธ์

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป B ในขั้นที่ 3

วาดแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ **<u>จงเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)</u>**



เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป B ใน 2 ขั้นถัดไปมีค่าเท่ากับ

$$P(A \to_2 B) = \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) + \left(\boxed{} \times \boxed{}\right) = \boxed{}$$

โบนัสพิเศษ +1 คะแนน (แบบไม่หาร)

จาก 2 ตัวอย่างที่ผ่านมา น่าจะพอสังเกตลักษณะการนำตัวเลขในเมทริกซ์มาคูณไขว้กันได้ จงอธิบายวิธีการคิดการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์จากข้อสังเกตที่ได้ พร้อมทั้งแสดงวิธีคำนวณการคูณเพื่อหาสมาชิกอีก 7 ตัวที่เหลือ

Bibliography

[1] Mattia Puddu, *Title*.

[2] ________ , *Title*, Publisher, 2025.

[3] ________ , *Title*, Journal (2025), 1–100.