

Quantitative Analysis for Business

การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางธุรกิจ (1/2568)

Phaphontee Yamchote (phaphonteeey@sau.ac.th)

Department of Information System for Business, Faculty of Business Administration
Southeast Asia University

September 16, 2025

Table of Contents

Introduction	v
1 กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)	1
1.1 ความหมายของการกำหนดการเชิงเส้น และการสร้างตัวแบบ	2
1.1.1 ลักษณะของปัญหาที่สามารถเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้	3
1.1.2 การสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น	5
1.2 แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ	7
1.2.1 กรณี 1 ตัวแปรตัดสินใจ	7
1.2.2 กรณี 2 ตัวแปรตัดสินใจ: พังก์ชันจุดประสงค์เป็นระนาบ 3 มิติบนบริเวณผลเฉลย 2 มิติ	8
1.3 แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)	13
1.3.1 Simplex Method Algorithm	18
1.4 การแก้ปัญหาด้วย Excel Solver	34
2 ทฤษฎีการตัดสินใจ (Decision Theory)	39
2.1 ลักษณะการแสดงข้อมูล	40
2.2 การตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอน	42
2.3 การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง	43
2.3.1 ค่าคาดหวัง (Expected Value)	43
2.3.2 เกณฑ์ผลตอบแทน	44
2.3.3 เกณฑ์ค่าเสียโอกาส (opportunity loss)	45
2.3.4 ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์	46
2.4 การตัดสินใจภายใต้สภาวะที่ไม่แน่นอน	48

2.5 การใช้ต้นไม้การตัดสินใจ	50
2.5.1 การคิดค่าคาดหวังด้วยแผนภาพต้นไม้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	50
2.5.2 เมื่อมีตัวเลือกเข้ามาเกี่ยวข้อง	51
2.6 การใช้โปรแกรม QM for Windows	55
3 ทฤษฎีการจำลองสถานการณ์ (Simulation)	59
3.1 แนวคิดเบื้องต้นของการจำลอง	60
3.1.1 กรณีตัวอย่าง: การหาค่า π	60
3.2 ตัวแบบและขั้นตอนการจำลองสถานการณ์ (Simulation Process)	64
3.3 การสุ่มตัวอย่างแบบ Monte Carlo ในการจำลองสถานการณ์ในธุรกิจ	65
4 การวิเคราะห์เชิงมาร์คอฟ (Markov Analysis)	71
4.1 ลักษณะของปัญหาที่ใช้ตัวแบบมาร์คอฟแก้ปัญหา	73
4.2 คณิตศาสตร์สำหรับตัวแบบมาร์คอฟ	74
4.3 การวิเคราะห์สถานะคงที่	78
4.4 การคำนวณ Markov โดยใช้ Excel	80
4.5 หัวข้อพิเศษ: การคุณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ในมุมมองของมาร์คอฟ	81
5 การพยากรณ์ (Forecasting)	83
5.1 ตัวแบบอนุกรมเวลา	84
5.1.1 วิธีการค่าเฉลี่ยรวม	84
5.1.2 วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average)	85
5.1.3 วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Weighted Moving Average)	86
5.1.4 วิธีปรับเรียงแบบเอกซ์โพเนนเชียล (exponential smoothing)	87
5.2 ตัวแบบการทดสอบเชิงเส้น	89
5.3 การประเมินผลความแม่นยำในการทำนาย	92
5.4 การใช้ Excel เพื่อช่วยคำนวณหาตัวแบบต่าง ๆ	98
6 ทฤษฎีเกม (Game Theory)	99
6.1 บทนำ	99
6.1.1 ความหมายของเกม	99
6.1.2 จุดแตกต่างจากหัวข้อทฤษฎีการตัดสินใจ	99

6.2 การวิเคราะห์กลยุทธ์ในเกม	99
6.2.1 แนวคิดพื้นฐาน: maximin vs. minimax	99
6.2.2 กลยุทธ์แท้และค่าของเกม	99
6.3 การวิเคราะห์กลยุทธ์สม	99
6.4 การจัดรูปปัญหาเกมผลรวมเป็นศูนย์ให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น	106
7 ตัวแบบแควคอย (Queuing Theory)	107
7.1 บทนำ	107
7.2 โครงสร้างของระบบแควคอย	107
7.2.1 ลักษณะของลูกค้า	107
7.2.2 ลักษณะของแควคอย	110
7.2.3 ลักษณะของหน่วยให้บริการ	110
7.3 ตัวแบบแควคอย (เบื้องต้น)	111
7.3.1 ตัวแบบ M/M/1	112
7.3.2 ตัวแบบ M/M/s	115
7.3.3 ตัวแบบ M/G/1	116
7.3.4 ตัวแบบ M/D/1	116
7.4 ตัวแบบแควคอย (ทฤษฎี)	116
7.5 การวิเคราะห์ระบบแควคอยเพื่อการตัดสินใจทางธุรกิจ	116
7.5.1 การกำหนดจำนวนหน่วยบริการ	117
7.5.2 การตัดสินใจจัดรูปแบบแควคอย	118
7.5.3 การตัดสินใจในลักษณะอื่น ๆ	119
8 ปัญหาการหาค่าเหมาะสมสุดต่าง ๆ ในเชิงธุรกิจ (Optimization Problem in Business)	121
8.1 Zero-sum game as Linear Programming	121
8.2 Transportation Problem	121
8.3 Scheduling Problem	121
8.4 Matching Problem	121

Appendices

A คณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เชิงปริมาณ	1
A.1 ระบบสมการเชิงเส้น	2
A.1.1 พังก์ชันเชิงเส้นและสมการเชิงเส้น	2
A.1.2 ระบบสมการเชิงเส้น: ความหมายเชิงรูปภาพของการแก้สมการ	9
A.1.3 อสมการเชิงเส้น และการวัดกราฟของอสมการเชิงเส้น	12
A.2 การดำเนินการบนเมตริกซ์	12
A.2.1 เมตริกซ์	12
A.2.2 การคูณเมตริกซ์	12
A.2.3 การใช้เมตริกซ์สำหรับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น	12
A.3 ความน่าจะเป็นเบื้องต้น	12
A.3.1 แนวคิดตั้งต้นสำหรับความน่าจะเป็น	12
A.3.2 ตัวแปรสุ่ม ค่าคาดหวัง ความอิสระ	12
A.3.3 กฎของเบร์	12
A.3.4 การแจกแจงความน่าจะเป็น	12
A.4 พื้นฐานการให้เหตุผลเชิงปริมาณ	12
A.4.1 ทักษะการประคำพูดเป็นนิพจน์ทางคณิตศาสตร์	12
A.4.2 การเข้าใจดุประสงค์และเงื่อนไขของปัญหา	12
B Homework	13
C Quiz	25
Bibliography	35
Analytic Index	37

Introduction

CHAPTER 1

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

โจทย์ธุรกิจ

บริษัท ABC Furniture เป็นบริษัทที่ผลิตและจำหน่ายเฟอร์นิเจอร์สำหรับบ้านและสำนักงาน โดยสินค้าหลักของบริษัทคือ โต๊ะทำงาน และ ตู้เก็บเอกสาร ซึ่งสินค้าทั้งสองชนิดนี้ได้รับความนิยมอย่างมาก จนกระทั่งฝ่ายผลิตเริ่มมีปัญหาในการจัดการวัสดุดิบและทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

ล่าสุด คุณได้รับการติดต่อจากคุณสมชาย ผู้จัดการฝ่ายการผลิตของบริษัท ABC Furniture ซึ่งให้ข้อมูลว่า:

ข้อความ

ช่วงที่ผ่านมา เราพบปัญหาด้านการผลิตที่สำคัญ คือบริษัทของเรามีทรัพยากรที่จำกัด ไม่ว่าจะเป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของแรงงาน รวมถึงปริมาณวัสดุดิบหลักที่ต้องใช้ในการผลิต แต่เรายังต้องการเพิ่มผลผลิตเพื่อให้สามารถตอบสนองความต้องการที่สูงขึ้นของตลาด

ในแต่ละสัปดาห์ โรงงานของเราสามารถทำงานได้สูงสุด 1,000 ชั่วโมง โดยโดยทำงานแต่ละตัวต้องใช้แรงงานในการประกอบ 4 ชั่วโมง ส่วนตู้เก็บเอกสารใช้ 3 ชั่วโมง

ด้านวัสดุดิบ เราไม่สามารถจูงที่ใช้ในการผลิตเพียง 800 หน่วยต่อสัปดาห์ โดยโดยทำงาน 1 ตัวจะต้องใช้มี 2 หน่วย และตู้เก็บเอกสารใช้มี 1 หน่วย

ขณะนี้ บริษัทสามารถขายโดยทำงานได้ในราคាតัวละ 2,000 บาท และตู้เก็บเอกสารราคา 1,500 บาท

ทางผู้บริหารอยากรู้ว่า ควรจะผลิตโดยทำงานและตู้เก็บเอกสารจำนวนอย่างละเอียดเท่าใดที่สุด เพื่อให้บริษัทสามารถทำกำไรได้สูงสุดภายใต้ข้อจำกัดที่มีอยู่

ในฐานะนักวิเคราะห์เชิงปริมาณ คุณมีหน้าที่ช่วยเหลือบริษัท ABC Furniture

- เป้าหมายหลักของโจทย์นี้คืออะไร และวัดผลอย่างไร
- ข้อจำกัดมีอะไรบ้าง
- อะไรคือสิ่งที่เราจะต้องตอบให้แก่ลูกค้า
- ทำไมการผลิตทุกอย่างให้ได้จำนวนสูงสุด อาจไม่ใช่ทางเลือกที่ดีที่สุด?

บทนำ

ในการตัดสินใจทางธุรกิจที่มีประสิทธิภาพ การวิเคราะห์เชิงปริมาณเป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้ผู้บริหารสามารถประเมินทางเลือกต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการจัดสรรทรัพยากรอย่างเหมาะสม เช่น เวลา งบประมาณ หรือ วัสดุต่าง ๆ หนึ่งในเทคนิคที่ได้รับความนิยมและใช้งานอย่างแพร่หลายในทางธุรกิจคือ “การกำหนดการเชิงเส้น” ซึ่งเป็นวิธีการเชิงคณิตศาสตร์ที่มุ่งเน้นการหาคำตอบที่ดีที่สุดภายใต้ข้อจำกัดที่กำหนดไว้ ย่อหน้าต่อไปนี้จะเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานของการกำหนดการเชิงเส้น พร้อมทั้งวิธีการสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาในโลกธุรกิจจริง

ทั้งนี้ คำว่าการโปรแกรมในที่นี้ไม่ได้หมายถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่เป็นรูปแบบปัญหาเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับแผนงานและคำสั่ง (program) ในกระบวนการงาน ดังนั้นจะไม่มีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใด ๆ เกิดขึ้นในบทนี้อย่างมากที่สุดคือใช้เครื่องมือสำเร็จรูปใน Excel เพื่อแก้โจทย์ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้น

เนื้อหาในบทนี้จะเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจก่อนว่าตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นคืออะไร และปัญหาที่มีลักษณะแบบใดบ้างที่จะสามารถใช้ตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นเข้ามาแก้ปัญหาร่วมไปถึงวิธีแปลงปัญหานั้นให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น หลังจากที่เราสร้างตัวแบบได้แล้วนั้น เราจะจะมาศึกษาแนวคิดเบื้องต้นของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการดูกราฟใน 2 และ 3 มิติกันก่อน เพื่อให้เห็นพัฒนารูปแบบที่จำเป็นต้องรู้เกี่ยวกับตัวปัญหากำหนดการเชิงเส้น ซึ่งในหัวข้อนี้จะเป็นจะต้องมีความรู้พื้นฐานในหัวข้อ A.1 ก่อน เพื่อที่จะได้คาดการณ์เส้นตรงเพื่อแก้ปัญหาได้ หลังจากนั้น เราจะขยายแนวคิดการแก้ปัญหาจากการใช้รูปภาพแก้ปัญหามาเป็นการแก้ด้วยขั้นตอนกระบวนการที่เรียกว่า Simplex และเมื่อเราเข้าใจแนวคิดของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นแล้ว เราจะปิดท้ายด้วยการใช้เครื่องมือสำเร็จรูปใน Excel เพื่อแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

1.1 ความหมายของการกำหนดการเชิงเส้น และการสร้างตัวแบบ

กำหนดการเชิงเส้น (linear programming) คือปัญหาทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าสุดยอด (ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด) ที่เรียกว่าการทำ optimization โดยที่มีทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และความสัมพันธ์เงื่อนไขอยู่ในรูปสมการหรืออสมการเชิงเส้น โดยองค์ประกอบของกำหนดการเชิงเส้นมีดังนี้

1. ฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function) คือฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าของสิ่งที่เราอยากหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ที่กำหนดด้วยตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
2. เงื่อนไข (constraints) คือตัวกำหนดความเป็นไปได้ของเหล่าตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณฟังก์ชันจุดประสงค์ และเมื่อมีทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขแล้ว เราจะเขียนปัญหากำหนดการเชิงเส้นในรูปแบบดังนี้

$$\min \quad \text{objective function}$$

$$\text{s.t.} \quad \text{constraint 1}$$

$$\text{constraint 2}$$

⋮

$$\text{constraint } k$$

สำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุด และในทำนองเดียวกันก็สามารถเขียนปัญหาการหาค่าสูงสุดได้โดยใช้

$$\begin{aligned} \max & \quad \text{objective function} \\ \text{s.t.} & \quad \text{constraint 1} \\ & \quad \text{constraint 2} \\ & \quad \vdots \\ & \quad \text{constraint } k \end{aligned}$$

ทั้งนี้ สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์ และสมการหรือสมการเงื่อนไขนั้นจะต้องอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น กล่าวคือต้อง

อยู่ในรูปที่ตัวแปรคูณกับค่าคงที่แล้วบวกหรือลบกันระหว่างตัวแปร

1.1.1 ลักษณะของปัญหาที่สามารถเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้

จากที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของความเป็นเชิงเส้นมาแล้วนั้น จะพบว่าคุณสมบัติหลัก ๆ ที่ช่วยตัดสินใจได้ว่าปัญหาแบบ
ใดมีโอกาสที่จะเขียนอยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

**คุณสมบัติ 1.1: คุณสมบัติ ความเป็นอิสระ เชิงเส้น (linear independence) ระหว่างตัวแปรในฟังก์ชันจุด
ประสงค์**

กล่าวคือ การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลการเปลี่ยนแปลงที่คงที่กับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ถ้า
ตัวแปรอื่น ๆ ถูกกำหนดให้คงค่าเดิมไว้ ตัวอย่างเช่น เราอาจทราบว่าการเพิ่มขึ้นของของลงทุนเพิ่มทุก ๆ 1
หน่วยเงิน จะเพิ่มกำไร (สิ่งที่เป็นค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์) ได้ 0.25 หน่วยเงิน ไม่ว่าจะลงทุนไปแล้วเท่าไหร่ก็ตาม
ซึ่งในกรณีตัวอย่างนี้จะได้ว่า

$$\text{กำไร} = 0.25\text{เงินลงทุน} + \text{ค่าปัจจัยอื่น ๆ } \text{ที่คงตัวอยู่}$$

ซึ่ง “ค่าปัจจัยอื่น ๆ ที่คงตัวอยู่” หมายถึงค่าจากการคำนวณกำไรจากตัวแปรอื่น ๆ ซึ่งไม่ได้ถูกกล่าวถึงในบริบทนี้
จึงถูกมองว่าไม่ได้เปลี่ยนแปลง

ทั้งนี้ จะเห็นว่าอัตราการเพิ่มขึ้นหรือลดลงที่คงตัวนั้น แท้ที่จริงแล้วก็เปรียบเสมือนเป็นความชันของการเพิ่มขึ้นตามแนว
ตัวแปรตันนั้นเอง ดังนั้น ในกรณีที่มีนั้นใจแล้วว่าการเพิ่มหรือการลดค่าจุดประสงค์ขึ้นกับตัวแปรตันที่เรามีในระบบเป็นการ
แปรผันตรงกัน ก็จะค่อนข้างมั่นใจได้ในระดับหนึ่งว่าปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น แต่ทั้งนี้ วิธีที่จะสามารถ
ทำให้มั่นใจได้มากที่สุดว่าปัญหาที่มีเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นหรือไม่ ก็คือการเขียนตัวสมการคณิตศาสตร์ที่แสดงแทน
ฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไข (ที่เดี๋ยวก็เป็นหัวข้อ A.4) ว่าอยู่ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นหรือไม่

ตัวอย่าง 1.1.1: ตัวอย่างปัญหารูปแบบกำหนดการเชิงเส้น

บริษัทประกอบชิ้นส่วนเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเวลาเหลืออยู่ในแต่ละแผนกดังนี้

- ◊ แผนกประกอบ มีเวลาเหลือ 50 ชั่วโมง (หรือ 3000 นาที)
- ◊ แผนกทดสอบ มีเวลาเหลือ 15 ชั่วโมง (หรือ 900 นาที)
- ◊ แผนกรรจุ มีเวลาเหลือ 6 ชั่วโมง (หรือ 360 นาที)

ซึ่งทางบริษัทกำลังตัดสินใจว่าจะใช้เวลาของแต่ละแผนกที่เหลืออยู่ผลิตผลิตภัณฑ์ชิ้นใหม่ซึ่งมี 2 แบบคือแบบมาตรฐานและแบบพิเศษ ทั้งนี้แบบมาตรฐานใช้เวลาในการประกอบ 20 นาที, ทดสอบ 10 นาที และบรรจุ 3 นาที ต่อชิ้น และขายได้กำไร 250 บาทต่อชิ้น ในขณะที่แบบพิเศษใช้เวลาในการประกอบ 30 นาที, ทดสอบ 6 นาที และบรรจุ 3 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 290 บาทต่อชิ้น บริษัทต้องการทราบว่าจะต้องผลิตสินค้าแต่ละชนิดเท่าไหร่ให้ได้กำไรมากที่สุด แต่ทั้งนี้เนื่องจากเรายังไม่ได้เรียนวิธีการแก้ปัญหา เราจึงทำปัญหาให้ง่ายขึ้นก่อนดังนี้

1. ถ้าผลิตแบบมาตรฐานอย่างเดียวจะผลิตได้กี่ชิ้นมากสุดและได้กำไรเท่าไหร่
2. ถ้าผลิตแบบพิเศษอย่างเดียวจะผลิตได้กี่ชิ้นมากสุดและได้กำไรเท่าไหร่
3. ถ้าเปลี่ยนไปผลิตแบบอื่นโดยมหันกศึกษาลงสูตรเลขมาชุดหนึ่งและยืนยันว่าผลิตได้จริงตามเงื่อนไข และหากได้กำไรเท่าไหร่ และถ้ายังเหลือเวลามากพอให้ลองเพิ่มการผลิตเข้าไปอีกจนไม่เหลือเวลาให้ผลิตเพิ่มได้อีกแล้ว

1.1.2 การสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น

อย่างที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อ [A.4](#) สิ่งที่สำคัญที่สุดที่ต้องทำให้ได้คือการระบุตัวแปรตัดสินใจ พังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไข ต่าง ๆ ให้เด็ และเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบภาษาคณิตศาสตร์ ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะมาฝึกทำไปตามตัวอย่างกัน

ตัวอย่าง 1.1.2

จากรณีตัวอย่าง [1.1.1](#) จงเขียนตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

1. ตัวแปรตัดสินใจที่เกี่ยวข้องมีอะไรบ้าง
2. ค่าเป้าหมายที่ต้องการหาค่าสุดขีดคืออะไร และต้องการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด
3. พังก์ชันจุดประสงค์คืออะไร
4. มีตั้งหมัดกี่เงื่อนไขและเงื่อนไขของไรบ้าง
5. เวียนเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปของสมการ/อสมการคณิตศาสตร์
6. ปัญหาที่ได้เป็นปัญหาเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าเป็นจะเวียนให้อยู่ในรูปปัญหาการกำหนดเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1.1.3: ตัวอย่างการผลิตเพื่อให้ได้ยอดขายสูงสุด

โรงงานผลิตชิ้นส่วนรถยนต์ต้องการวางแผนการผลิตชิ้นส่วน X และชิ้นส่วน Y โดยมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 4 เครื่อง และใช้เหล็ก ไฟฟ้าและแรงงานในการผลิตดังนี้

กระบวนการ	ปริมาณที่ผลิตได้		ความต้องการ		
	X	Y	เหล็ก	ไฟฟ้า	แรงงาน
1	4	0	100 kg	800 kWh	16 hrs
2	0	1	70 kg	600 kWh	16 hrs

ในแต่ละวัน โรงงานจะมีเหล็กให้ใช้ไม่เกิน 6000 กิโลกรัม มีปริมาณไฟฟ้าที่ใช้ได้ไม่เกิน 100000 กิโลวัตต์ และใช้แรงงานคนงานรวมกันได้ไม่เกิน 1000 ชั่วโมง สมมติว่าชิ้นส่วน X ขายได้ 1000 บาทต่อชิ้น ในขณะที่ชิ้นส่วน Y ขายได้ 1800 บาทต่อชิ้น และโรงงานนี้ต้องการจัดการผลิตให้มียอดขายสูงที่สุดเท่าที่จะทำได้

วิธีทำ:

ขั้นที่ 1: กำหนดตัวแปร: เนื่องจากในโจทย์ข้อนี้ เราต้องตัดสินใจว่าจะผลิตกระบวนการใดเป็นจำนวนเท่าไหร่บ้าง เราจึงต้องให้ตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนกระบวนการที่ใช้งาน โดยกำหนดให้

$$a = \text{จำนวนหน่วยการใช้งานกระบวนการที่ } 1$$

$$b = \text{จำนวนหน่วยการใช้งานกระบวนการที่ } 2$$

ขั้นที่ 2: เขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยสิ่งที่เป็นเป้าหมายของโจทย์ธุรกิจนี้คืออยาก maximize ยอดขายให้สูงที่สุด แต่การจะรู้ยอดขายได้นั้น เราต้องรู้ก่อนว่าเราผลิตชิ้นส่วน X และชิ้นส่วน Y ได้กี่ชิ้น และเนื่องจากชิ้นส่วน X ขายได้ชิ้นละ 1000 บาท จึงจะได้ว่ายอดขายจากชิ้นส่วน X คือ

$$\text{ยอดขาย} = 1000 (\text{จำนวนชิ้น } X \text{ ที่ขายได้}) + 1800 (\text{จำนวนชิ้น } Y \text{ ที่ขายได้})$$

แต่เนื่องจากจำนวนชิ้นที่จะผลิตได้ขึ้นกับการตัดสินใจว่าเราจะผลิตกระบวนการใดกี่กระบวนการบ้าง ตัวอย่างเช่นถ้าเราผลิตด้วยกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน 1 หน่วย เราจะผลิต X ออกมากได้ 4 ชิ้นภายในคราวเดียว ดังนั้นถ้าเราสั่งทำการกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน a หน่วย เราจะได้ชิ้นส่วน X ออกมาก $4a$ ชิ้น ทำนองเดียวกัน ผลผลิตที่ได้จากการกระบวนการที่ 2 คือ ชิ้นส่วน Y เป็นจำนวน b ชิ้น จึงได้ว่า

$$\text{ยอดขาย} = 1000 (4a) + 1800 (b) = 4000a + 1800b \quad [1]$$

ขั้นที่ 3: เขียนอสมการเงื่อนไข โดยจากโจทย์จะได้ว่ามีเงื่อนไขอยู่ 3 เงื่อนไข คือเงื่อนไขการใช้เหล็ก เงื่อนไขการใช้

1.2. แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

ไฟฟ้า และเงื่อนไขแรงงาน

$$\text{เหล็ก:} \quad 100a + 70b \leq 6000 \quad [2]$$

$$\text{ไฟฟ้า:} \quad 800a + 600b \leq 100000 \quad [3]$$

$$\text{แรงงาน:} \quad 16a + 16b \leq 1000 \quad [4]$$

จึงได้กำหนดการเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4000a + 1800b \\ \text{s.t.} \quad & 100a + 70b \leq 6000 \\ & 800a + 600b \leq 100000 \\ & 16a + 16b \leq 1000 \\ & a, b \geq 0 \end{aligned}$$

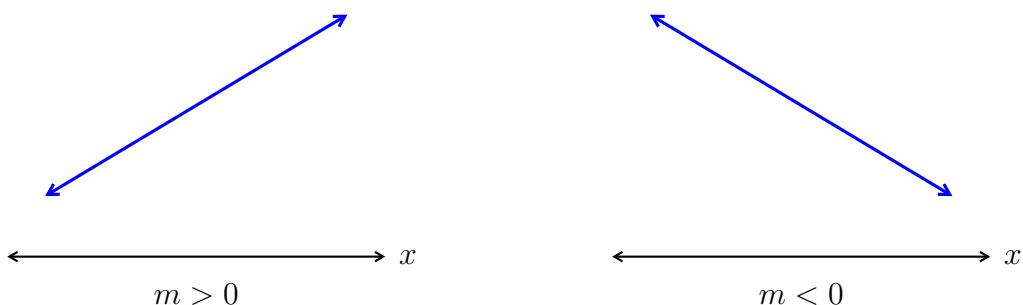
□

1.2 แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

หลังจากที่เราสามารถสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นได้แล้ว สิ่งที่จะต้องทำต่อมา ก็คือการหาผลเฉลยของปัญหานั้น ซึ่งแนวคิดหลักของการทำกำหนดการเชิงเส้นเป็นสิ่งที่ไม่ได้ซับซ้อนมากนัก ถ้าพิจารณาในกรณี 1 ตัวแปรหรือ 2 ตัวแปร เพราะเป็นกรณีที่ยังคงวาดกราฟได้ และการศึกษาจากการนีลึก ๆ นี้ก็จะสามารถนำพาเราไปสู่แนวคิดที่ทั่วไปมากขึ้นได้

1.2.1 กรณี 1 ตัวแปรตัดสินใจ

ขอเริ่มจากกรณีที่ขัดเจนและตรงไปตรงมากที่สุดก่อน ซึ่งก็คือกรณี 1 ตัวแปร ซึ่งจะสามารถวัดทั้งพังก์ชันจุดประสงค์ และความสัมพันธ์เงื่อนไขได้โดยง่ายในกราฟ 2 มิติ องค์ประกอบของสุดคือฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x)$ โดยที่ x เป็นตัวแปรตัดสินใจ ดังนั้น หน้าตาของสมการจะอยู่ในรูป $f(x) = mx + c$ และแน่นอนว่ามีความเป็นไปได้หลัก ๆ อยู่ 2 แบบคือเส้นตรงความชันบวก กับเส้นตรงความชันลบดังรูป



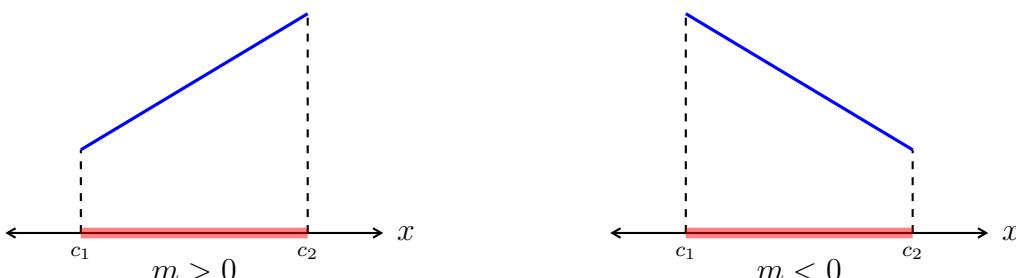
จากรูป จะพบว่าการแก้ปัญหาหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของจะง่ายอย่างมาก เพราะการเดินทางมีแค่ซ้ายและขวา โดยด้านใดด้านหนึ่งจะให้ค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ และอีกด้านหนึ่งจะให้ค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ดังนั้น เพียงแค่เราทราบว่าต้องเดินไปทางไหนเพื่อให้เป็นไปตามที่เราต้องการ เรา ก็จะได้คำตอบมาได้โดยง่าย

แต่ว่าในปัญหากำหนดการเชิงเส้น จะต้องมีเงื่อนไขเข้ามาพิจารณาด้วย เพราะถ้าไม่มีเงื่อนไขพิจารณา เราจะสามารถลดค่าหรือเพิ่มค่าเส้นตรงได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุด เพราะเราก็สามารถเดินทางไปทางขวาได้ไม่มีที่สุด และเดินทางไปทางซ้ายได้ไม่มีที่สิ้นสุดเช่นกัน ซึ่งเราเรียกว่ารูปแบบการไม่มีผลเฉลยแบบนี้ว่ากรณีไม่มีขอบเขต (unbounded) กล่าวคือ เป็นกรณีที่มีค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (ถ้ามี) แต่ไม่มีผลเฉลยที่ทำให้ต่ำที่สุด หรือสูงที่สุดได้ เพราะยังหาค่าที่สูงกว่าได้เรื่อย ๆ หรือหาค่าที่ต่ำกว่าได้เรื่อย ๆ เนื่องจากขอบเขตการเพิ่มหรือการลดไม่มีจุดจำกัด

แต่เนื่องจากเงื่อนไขของ 1 ตัวแปรเป็นเพียงได้แค่ 3 แบบเท่านั้นดังนี้

- สมการจุดเดียว $x = c$ (ในที่นี้ c คือค่าคงที่) ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีขอบเขตใจ เพราะมีเพียงผลเฉลยเดียว ไม่ต้องทำการหาค่าสุดขีดได้ ๆ
- แบบสมการ และได้เป็นขอบเขต ซึ่งมีได้ 3 แบบย่อย ได้แก่
 - $x \leq c$
 - $x \geq c$
 - $c_1 \leq x \leq c_2$

แต่ในที่นี้ขอให้พิจารณาแค่เฉพาะกรณีที่การันตีการมีผลเฉลยสุดขีดแน่ ๆ ก็คือกรณีที่ขอบเขตเงื่อนไขการพิจารณาตัวแปรมีขอบเขตทั้งซ้ายและขวา $c_1 \leq x \leq c_2$



ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่าค่าสุดขีดจะเกิดขึ้นที่ตรงขอบเสมอ (แต่จะเป็นด้านซ้ายหรือด้านขวาบ้าง ซึ่งขึ้นอยู่กับรูปแบบการเพิ่มหรือการลดของพังก์ชัน)

1.2.2 กรณี 2 ตัวแปรตัดสินใจ: พังก์ชันจุดประสงค์เป็นรูปแบบ 3 มิติบนบริเวณผลเฉลย 2 มิติ

ข้อขยับเพิ่มขึ้นมาอีก 1 มิติ นั่นคือพังก์ชันจุดประสงค์เป็นพังก์ชัน 2 ตัวแปร $z = f(x, y)$ ซึ่งพังก์ชันเชิงเส้น 2 ตัวแปร จะวาดรูปใน 3 มิติได้เป็นแผ่นรูปแบบที่ได้เรียนไปในหัวข้อ A.1.1.2 ทว่า สิ่งที่ทำให้กรณีนี้ยากกว่ากรณี 1 ตัวแปรคือบริเวณการตัดสินใจจะเป็นพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม 2 มิติ ซึ่งไม่ได้มีการเดินแค่ซ้ายหรือขวาเหมือนกรณีที่ผ่านมา จึงทำให้ตัดสินใจได้ยากขึ้นอีกระดับว่าการเดินไปทางใดจะให้ค่าที่มากขึ้น

คำเตือน: สำหรับหัวข้อนี้ อาจจะต้องใช้ความรู้เรขาคณิตวิเคราะห์ 3 มิติและแคลคูลัสสำหรับเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติเพื่อทำความเข้าใจ แต่ถ้านักศึกษาไม่เคยเรียนมาก่อนสามารถข้ามส่วนอธิบายที่มา แล้วเข้าสู่คุณสมบัติต่าง ๆ ดังนี้ได้เลย

1.2. แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

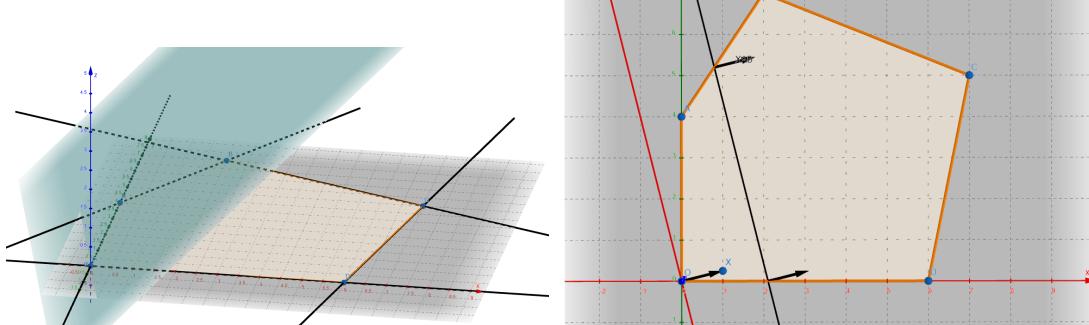
คุณสมบัติ 1.2: คุณสมบัติของรูปแบบ 3 มิติบนพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม

กำหนดสมการแผ่นรูปแบบ $P : z = Ax + By + k$ ซึ่งมีจมูกเวกเตอร์ $\langle A, B \rangle$ เป็นเวกเตอร์ทิศการได้ระดับ

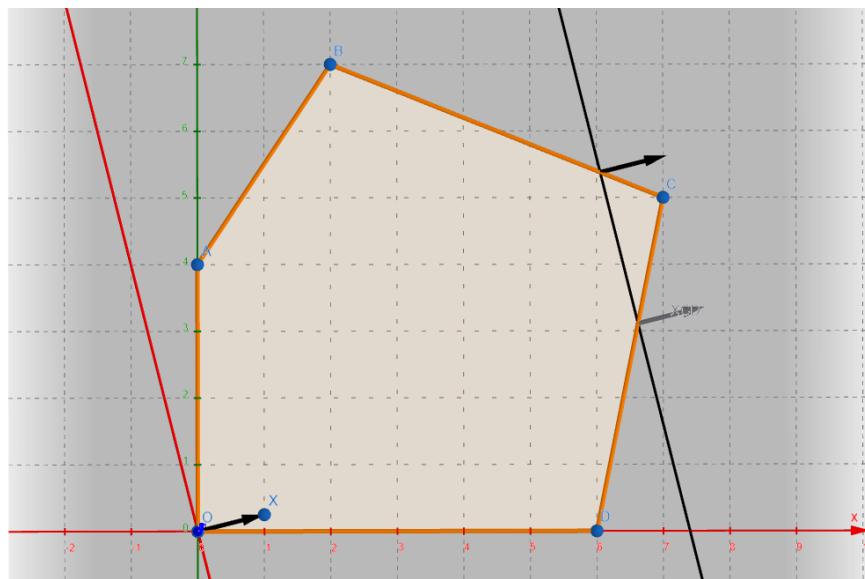
- แนวเส้นของรูปแบบ P (แนวการเดินบนรูปแบบที่ไม่มีการเปลี่ยนความสูง) คือแนวเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle A, B \rangle$ กล่าวคือ ถ้าเดินไปตามทิศของเวกเตอร์ $\langle A, B \rangle$ จะเป็นทิศที่มีการเปลี่ยนค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุด แล้วลดลงตามมุ่งที่หันออกจากแนวดังกล่าว จนจะไม่มีการเพิ่มค่าหรือลดค่าลงเมื่อหันตั้งฉากไปทางซ้ายและทางขวา
- เมื่อยืนอยู่บนเส้นขอบของบริเวณตัดสินใจหนึ่ง จะมีทิศที่ลากเวกเตอร์จากจุดที่ยืนหนึ่งทำมุมแหลมกับเวกเตอร์ทิศการได้ระดับ ในขณะที่อีกด้านจะทำมุมป้านกับทิศการได้ระดับ ซึ่งค่า z จะมากขึ้นถ้าเราเดินไปตามทิศที่ทำมุมแหลม กล่าวคือ จะต้องมีทิศหนึ่งที่ให้ค่า z มากขึ้น และในขณะที่อีกทิศหนึ่งให้ค่า z ที่น้อยลง
- เพราะฉะนั้น ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีผลเฉลยสุดขีดแล้วจุดผลเฉลยดังกล่าวจะอยู่ที่จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งเสมอ

ตัวอย่างเช่นปัญหากำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x + 0.25y \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & y \leq 1.5x + 4 \\ & y \leq -0.4x + 7.8 \\ & y \geq 5x - 30 \end{aligned}$$



ซึ่งถ้าใช้แนวคิดการได้เข้าตามให้ขานกับแนวการได้ระดับ จะพบว่าจุดสุดท้ายที่จะได้ขึ้นไปได้คือจุด C ด้วยการลากเส้นได้ระดับขึ้นไปเรื่อย ๆ ดังรูป และนอกจากวิธีการเลื่อนเส้นได้ระดับแล้ว อีกวิธีที่ง่ายคือการลองแทนค่าทุกจุดยอดเพื่อคำนวณค่าจุดประสงค์แล้วเปรียบเทียบว่าค่าได้มากที่สุดหรือน้อยที่สุด



ตัวอย่าง 1.2.1: โจทย์สำrage คุณสมบัติ 1.2

พิจารณาโจทย์กำหนดการเชิงเส้น

$$\max z = x + 0.25y$$

$$\text{subject to } x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$y \leq 1.5x + 4$$

$$y \leq -0.4x + 7.8$$

$$y \geq 5x - 30$$

1. จงแสดงว่าสมการเส้นตรงที่ระบุแนวหน้ากระดาษการตีระดับ (เส้นที่เลื่อนตามรูปด้านบน) ที่ตัดแกน y ที่ $y = c$ มีสมการเป็น $y = -4x + c$ กล่าวคือ แนวเส้นตรงที่มีความชัน -4 จะเป็นแนวที่ระนาบมีค่าคงที่
2. เมื่อพิจารณาบนแนวเส้นที่ทำให้ระนาบมีค่าคงที่ $y = -4x + 8$ เป็นตัวอย่าง จงหาจุดตัดของเส้นดังกล่าวกับเส้นตรง $y = 1.5x + 4$ กับเส้นตรง $y = 0$
3. จากจุดตัดที่ได้ในข้อที่ผ่านมา (ซึ่งมี 2 จุด) จงแสดงว่าทั้งสองจุดดังกล่าวให้ค่า $z = x + 0.25y$ เป็น $z = 2$
4. เมื่อ พิจารณา บน แนว เส้น ที่ ทำให้ ระนาบ มี ค่า คงที่ $y = -4x + c$ จง แสดง ว่า ค่าคงที่ของระนาบคือ $z = 0.25c$

1.2. แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

ตัวอย่าง 1.2.2: แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 ตัวแปรด้วยการวาดภาพ

จะแก้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.1.1 ด้วยวิธีวาดภาพ โดยพิจารณาค่าสูงสุดทั้งวิธีการไต่ระดับ และวิธีการลองแทนค่าทุกจุดยอด

ตัวอย่าง 1.2.3: แก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 ตัวแปรด้วยการวาดภาพ

จะแก้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.1.3 ด้วยวิธีวัดภาพ โดยพิจารณาค่าสูงสุดที่วิธีการไตรัษฎ์ และวิธีการลองแทนค่าทุกจุดยอด

วิธีทำ: จากข้อที่ผ่านมา เราได้มานแล้วว่ากำหนดการเชิงเส้นคือ

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4000a + 1800b \\ \text{s.t.} \quad & 100a + 70b \leq 6000 \\ & 800a + 600b \leq 100000 \\ & 16a + 16b \leq 1000 \\ & a, b \geq 0 \end{aligned}$$

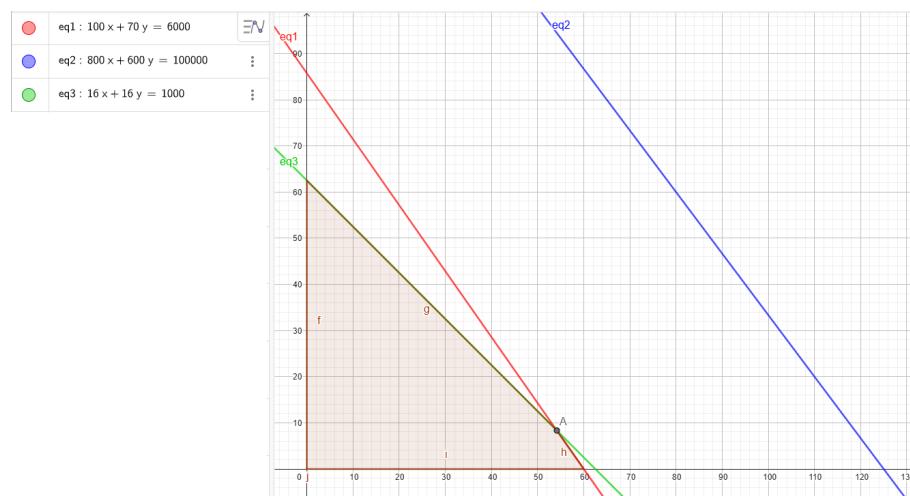
ขั้นที่ 1: วาดรูปภาพเงื่อนไข โดยเรามี 3 เงื่อนไขดังนี้

- ◊ $100a + 70b = 6000$
- ◊ $800a + 600b = 100000$
- ◊ $16a + 16b = 1000$

ซึ่งทำได้โดยการหาจุดตัดแกน ซึ่งจะได้ดังนี้

สมการ	จุดตัดแกน $x (a)$	จุดตัดแกน $y (b)$
$100a + 70b = 6000$	60	$600/7 \approx 85.71$
$800a + 600b = 100000$	125	≈ 166.67
$16a + 16b = 1000$	62.5	62.5

และถ้าหาจุดตัดจากสมการที่



1 และสมการที่ 3 ที่ตัดกันจะได้จุด $\approx (54.17, 8.33)$

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

ข้อที่ 2: แทนค่าจุดมุลลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์มากที่สุด

(a, b)	ยอดขาย = $4000a + 1800b$
$(0, 62.5) \approx (0, 62)$	111600
$(54.17, 8.33) \approx (54, 8)$	230400
$(60, 0)$	240000
$(0, 0)$	0

ข้อที่ 3: สรุปคำตอบ จะได้ค่ายอดขายมากสุดเท่ากับ 240000 เกิดขึ้นที่จุด $(60, 0)$ กล่าวคือผลิตกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน 60 เครื่อง และไม่ผลิตกระบวนการที่ 2 เลย

หมายเหตุ 1: โจทย์เพิ่ม

จะเห็นว่ากระบวนการที่ 2 ไม่ถูกใช้งานเลย ซึ่งอาจไม่เป็นที่พึงพอใจกับฝ่ายจัดซื้อที่ลงทุนไปกับการซื้อเครื่องมือสำหรับกระบวนการที่ 2 ไปแล้ว (เช่นกรณีกระบวนการที่ 2 เป็นเรื่องของเครื่องจักร) แต่เมื่อฝ่ายการตลาดทำการสำรวจเพิ่มเติม พบว่าเรายังสามารถทำสินค้า Y ให้มีภาพลักษณ์ที่พรีเมียมมากขึ้นเพื่อเปลี่ยนกลุ่มลูกค้าไปกลุ่มที่กำลังจ่ายสูงขึ้นได้ (เนื่องจากผลิตได้น้อยเมื่อเทียบกับ X ที่ผลิตได้ 4 ชิ้นต่อครั้งของกระบวนการที่ 1) ดังนั้นฝ่ายการตลาดจึงมาถามเราที่เป็นที่ปรึกษาทางธุรกิจว่าควรตั้งราคาขายสินค้า Y ให้อยู่ในช่วงราคาเท่าไหร่เพื่อให้ผลเฉลยที่ให้ยอดขายสูงสุดมาจากการใช้ห้องเครื่องจักรของกระบวนการที่ 1 และเครื่องจักรของกระบวนการที่ 2

นอกจากการปรับราคาแล้ว ยังมีทางเลือกอื่นใดบ้างในการปรับปรุงแบบจำลองให้ยังคงใช้ห้อง 2 กระบวนการ โดยที่ไม่ต้องปรับราคา (แต่อาจจะได้ยอดขายรวมน้อยลงบ้างก็ยังยอมรับได้)

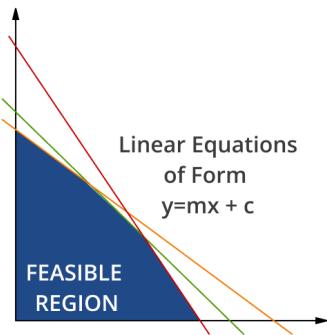


1.3 แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

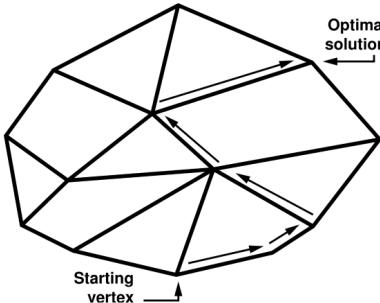
ในหัวข้อที่แล้ว เราศึกษาวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการรูปภาพ ซึ่งข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวคือเราจะสามารถแก้ปัญหาได้แค่กรณี 2 ตัวแปร และจริง ๆ แล้ว เราสามารถทำกับปัญหา 3 ตัวแปรก็ได้เช่นกันแต่จะวัดภาพยากกว่า เพราะต้องดูขอบเขตผลเฉลยใน 3 มิติ แต่ว่าถ้า 4 ตัวแปรเป็นต้นไปเราจะไม่สามารถวาดภาพได้อีกแล้ว ทำให้วิธีการดังกล่าวใช้ไม่ได้อีกต่อไป

เครื่องมือที่จะใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นสำหรับกรณี 4 ก็ตามที่จะศึกษาในหัวข้อนี้คือวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) ซึ่งเป็นกระบวนการในการใช้การดำเนินการทางเมตริกซ์เพื่อการเปลี่ยน pivot ที่จะให้ค่าสูงขึ้นเรื่อย ๆ ໄสไปตามขอบของรูป โดยอาศัยคุณสมบัติตามที่เราได้ศึกษามาในกรณี 2 มิติว่าการเดินตามขอบนบริเวณที่เป็นรูปปุ่น (convex) จะพาระไปจุดผลเฉลยค่าสุดขีดได้แน่ ๆ

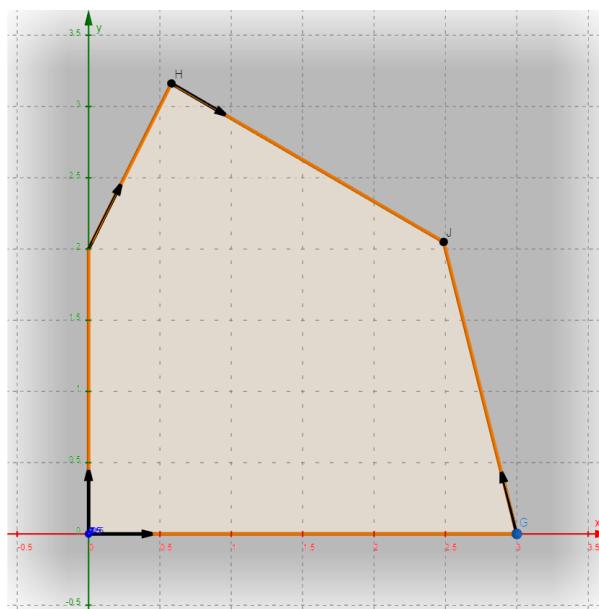
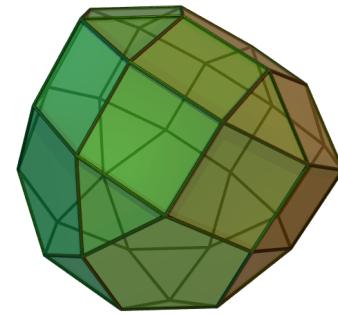
ทั้งนี้ สิ่งหนึ่งที่ต้องเน้นย้ำสำหรับขั้นตอนกระบวนการนี้คือสมมติฐานการเป็นรูปปุ่น เพราะอัลกอริทึมที่กำลังจะได้ศึกษา อาศัยการเดินตามเส้นขอบตามทิศทางที่มีค่าเพิ่มได้ ซึ่งเงื่อนไขที่การันตีการไปจุดผลเฉลยสุดขีดได้คือการเป็นรูปปุ่นที่ทำให้



2D Visualization



3D Visualization



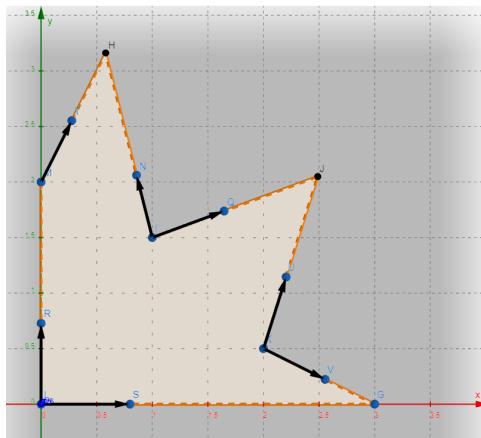
เราได้รับข้อมูลข้างต้นแล้ว ตามรูปด้านบนที่เราสามารถเดินทางจากจุด O ไปที่จุด J ที่เป็นผลเฉลยได้ แต่ถ้ารูปพื้นที่ เป็นไปได้ไม่ใช่รูปบัน อาจทำให้เกิดปัญหาที่เรียกว่าการติดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (local extrema) ตามรูปด้านล่าง ซึ่งถ้าเริ่มที่จุด O จะเดินไปได้ไกลสุดแค่จุด H หรือจุด G เท่านั้นตามแนวคิดเบื้องต้นของ simplex แต่ในวิชานี้ เราจะโฟกัสไปแค่ที่จุดที่พื้นที่ผลเฉลยเป็นรูปบันอยู่แล้ว ดังนั้นนักศึกษาจึงไม่ต้องกังวลเรื่องสมมติฐานดังกล่าว

แนวคิดเชิงการคำนวณ (อ่านนอกเวลาเพิ่มเติม): wait revise again

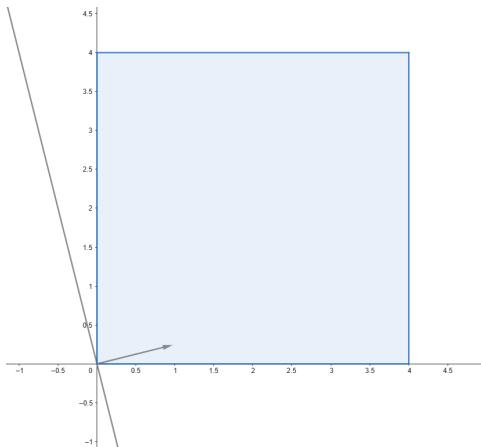
จะขอเริ่มจากตัวอย่างที่ง่ายเพื่อพาไปดูหลักการคิดทีละขั้น (สำหรับนักศึกษาที่สนใจ simplex method เลยสามารถข้ามหัวข้อนี้ได้) โดยปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่จะพิจารณาคือ

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 4 \\ & y \leq 4 \end{aligned}$$

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)



และมีบริเวณการพิจารณาตามรูปด้านล่างนี้ ในรูปจะมีเวกเตอร์แนวการไต่ระดับของระนาบอยู่ และจะเห็นว่าจุด $(4, 4)$ ควรเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดแน่นอน



แต่รูปแบบสมการนี้เป็นรูปแบบที่ไม่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาในเชิงการคำนวณ ทำให้เราต้องเปลี่ยนรูปแบบการเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการเท่ากับ ซึ่งอาศัยคุณสมบัติของระบบจำนวนว่า

คุณสมบัติ 1.3: เปลี่ยนอสมการเป็นสมการ

$$x \leq a \text{ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง } s \text{ ที่เป็นบวกหรือศูนย์ที่ทำให้ } x + s = a$$

ซึ่งตัวแปร s ในนี้มีชื่อเรียกว่าตัวแปรส่วนเกิน (slack variable)

ซึ่งແນ່ນອນว่าตัวแปรส่วนเกินนี้จะเป็นเพียงแค่ตัวแปรที่เพิ่มเข้ามาในเงื่อนไข ไม่มีผลต่อค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ ดังนั้น

เหล่าบรรดาเงื่อนไขสมการจะต้องมีการเติมตัวแปรส่วนเกินเพื่อทำให้เป็นเงื่อนไขสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + y + 0s_1 + 0s_2 \\ \text{subject to} \quad & x, y, s_1, s_2 \geq 0 \\ & x + s_1 = 4 \\ & y + s_2 = 4 \end{aligned}$$

หมายเหตุสำคัญตัวแปรทุกตัวจะต้องไม่ต่ำกว่า 0 เป็นเงื่อนไขบังคับ

ที่นี่ จะยกล่าวถึงความหมายของตัวแปรส่วนเกินเชิงรูปภาพกันก่อนว่าคืออะไรในรูปภาพ ทั้งนี้อย่าลืมว่า simplex method คือการเดินตามขอบจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่ง เพราะฉะนั้น เราจะพิจารณาแค่จุดตามขอบเท่านั้น รูปภาพด้านล่างนี้เป็นตัวอย่างค่าตัวแปรของจุดตามตำแหน่งของขอบต่าง ๆ ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร s_1 ที่เป็นตัวแปรส่วนเกินของตัวแปร x คือตัวแปรที่จะเติมเต็มให้ x เดินไปถึงจุดยอดได้ และถ้าพิจารณาตามจุดยอดต่าง ๆ ก็จะพบว่าระหว่างตัวแปรของปัญหาและตัวแปรส่วนเกินที่คู่กันนั้นจะต้องมีอย่างน้อย 1 ตัวที่แปรที่มีค่าเป็น 0 ตัวอย่างเช่นการเดินตามขอบด้านล่างของรูปภาพในตัวอย่างนี้คือการแลกค่ากันระหว่าง x และ s_1 โดยสมการ $x + s_1 = 4$ ที่จุดยอดซ้ายคือจุดที่ $x = 0, s_1 = 4$ ในขณะที่จุดด้านขวาคือจุดที่ $x = 4, s_1 = 0$ กล่าวคือ การเดินตามขอบของบริเวณที่เป็นไปได้จากจุดยอดไปอีกจุดยอดก็คือการพยายามแลกเปลี่ยนค่าของตัวแปรส่วนเกินให้เป็น 0 นั่นเอง

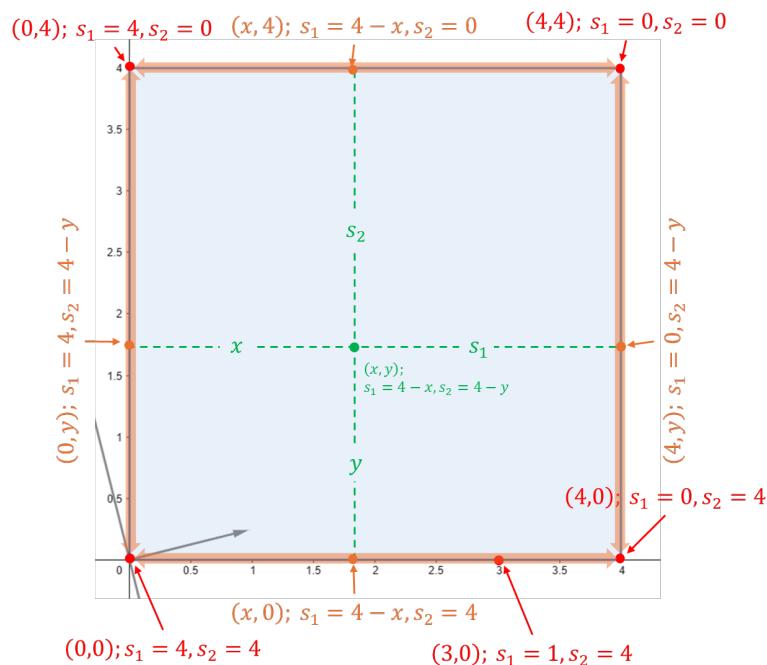


Figure 1.1. Enter Caption

จากที่กล่าวไปสักครู่ คือวิธีการเดินทางกรณีที่รู้แล้วว่าจะเดินตามขอบใด คำถามต่อมาคือ เมื่อเรายืนอยู่ที่จุดยอดหนึ่ง จะรู้ได้อย่างไรว่าต้องเดินไปทางไหน ตัวอย่างเช่นถ้าเรากำลังยืนอยู่ที่จุด $(0, 0)$ จะรู้ได้อย่างไรว่าต้องเดินตามขอบแนวตั้งไปที่ $(0, 4)$ หรือตามขอบแนวนอนไปที่ $(4, 0)$ ซึ่งถ้าอาศัยความรู้ในวิชาแคลคูลัสในการดูอัตราการเปลี่ยนแปลง จะทราบได้ทันทีว่าต้องเดินตามแนวแกน x เพราะแนวการเดินใกล้กับแกน x เทอร์รับที่ศูนย์กลางของระบบมากที่สุด ซึ่งจริง ๆ แล้ว

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

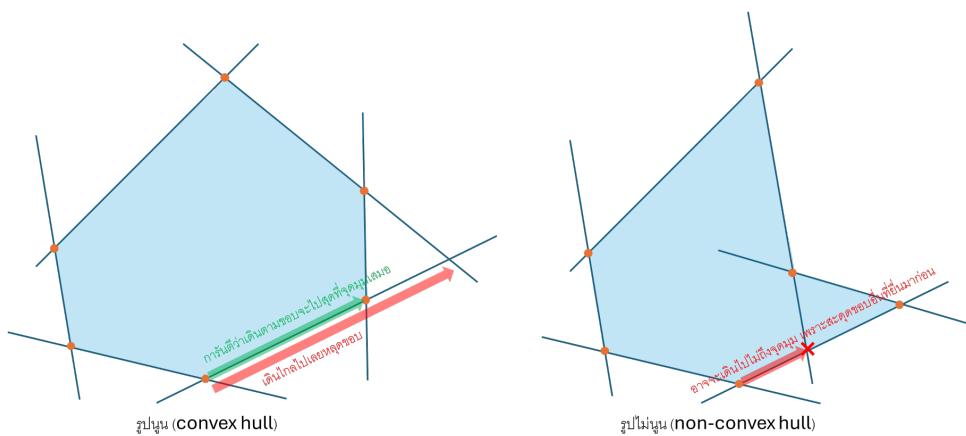


Figure 1.2. Enter Caption

ก็สามารถถูกได้โดยง่ายจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการ $z = 4x + y + 0s_1 + 0s_2$ ที่หมายความว่าการเดินตาม x จะเปลี่ยนค่า z เป็นระยะ 4 หน่วยเมื่อเพิ่ม x ไป 1 หน่วย ในขณะที่ถ้าเดินตาม y จะเปลี่ยนค่าแค่ 1 หน่วยเท่านั้น

ดังนั้น เราจึงสามารถตัดสินใจได้ว่าเราจะเดินตาม x โดยจากเดิมที่ตั้ง $x = 0, y = 0$ เราจะเปลี่ยนไปตั้ง $s_1 = 0, y = 0$ ซึ่งลักษณะการพิจารณาชุดตัวแปรในลักษณะนี้เราจะเรียกว่าชุดตัวแปรพื้นฐาน (basic variables) ซึ่งคือชุดตัวแปรที่จะถูกมองให้มีค่าเป็น 0 เพื่อใช้คำนวนค่าตัวแปรที่ไม่ใช่ตัวแปรพื้นฐาน (non-basic variables) กล่าวคือ จากเดิมที่เรากำหนดระบบเป็น $s_1 = 4 - x$ และ $s_2 = 4 - y$ โดยที่ $x = 0, y = 0$ จะโอนเปลี่ยนการพิจารณาระบบที่ $x = 4 - s_1$ และ $s_2 = 4 - y$ โดยที่ $s_1 = 0, y = 0$ ซึ่งเรียกการดำเนินการนี้ว่าการหมุนตัวแปรหลัก (pivot change) จากเดิมที่ s_1, s_2 เป็นตัวแปรหลัก (pivot variable) เราจะเปลี่ยนระบบให้ x, s_2 เป็นตัวแปรหลักแทน

สำหรับการดำเนินการหมุนตัวแปรหลัก ตัวแปรหลักจะไม่สามารถมีเพิ่มได้ ในตัวอย่างจะมีได้แค่ 2 ตัวแปร ดังนั้น การจะนำตัวแปรใหม่เข้ามาเป็นตัวแปรหลัก จึงต้องมีการนำ pivot ตัวเก่าออกหนึ่งตัว ซึ่งจะตามมาด้วยคำถามว่าซึ่งได้อย่างไรว่าต้องเอา s_1 ออกจาก การเป็นตัวแปรหลักแล้วนำ x มาแทนที่ ซึ่งแนวคิดที่ใช้ในการเดินทางจริง ๆ เป็นเรื่องการเดินตามแนวตัวแปรหลักใหม่อย่างไรให้ไม่หลุดออกจากขอบ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าถ้าเดินให้สัมภ์ที่สุดเท่าที่จำเป็นเพื่อจะไปเจอกับหนึ่งจุดรันตีได้ว่าเราจะไม่เดินหลุดขอบแน่นอน ซึ่งคุณสมบัติของการเป็นรูปปูนคือจะไม่เส้นขอบใดที่ลากต่อแล้วตัดภายในพื้นที่เสมอ ดังรูปด้านล่างนี้ เพราะฉะนั้น ในทางปฏิบัติที่เราอาจไม่เห็นรูปภาพ เราจึงต้องเลือกการเดินที่สัมภ์ที่สุดเอาไว้ก่อนเพื่อให้ไม่หลุดขอบถึงแม้จะไม่ใช่ทางที่เร็วที่สุดก็ตาม และเมื่อทราบแล้วว่าต้องเดินไปชนขอบใด จึงค่อยพิจารณาว่าขอบนั้นเป็นขอบประชิดของตัวแปรส่วนเกินตัวไหน

จากตัวอย่างที่เรากำลังพิจารณาอยู่นั้น เราทราบแล้วว่าเราต้องเดินจาก $(0, 0)$ ตามแนวตัวแปร x แต่เนื่องจากรูปนี้ยังเป็นรูปอย่างง่ายจึงเห็นชัดว่ามีเส้นทางเดียวเท่านั้นที่ไปได้เมื่อบังคับให้เปลี่ยน x คือเดินตามขอบแนวด้านล่าง และจะไปประชิดที่ขอบ $x = 4$ ซึ่งคือขอบที่ตัวแปรส่วนเกิน $s_1 = 0$ จึงทำให้ทราบว่าเราต้องนำ x ไปเป็นตัวแปรหลักแทน s_1 และให้ s_1 ทำหน้าที่ตัวแปรพื้นฐาน กล่าวคือ ตั้งให้ $s_1 = 0$ และ $y = 0$ เป็นตัวแปรพื้นฐานและได้ว่า $x = 4, y = 0$ เพราะฉะนั้น จาก $z = 4 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 4 + 0 \times 4 = 0$ ที่จุด $(0, 0)$ จะได้ว่าค่าจุดประสงค์ ณ ปัจจุบันเปลี่ยนไปเป็น $z = 4 \times 4 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 4 = 16$ และเราจะเมื่อเดินตาม x อีกแล้ว

กล่าวคือตอนนี้ระบบเหลือแค่ปัญหา

$$\begin{aligned} \max \quad & y + 0s_2 + 16 \\ \text{subject to} \quad & y, s_2 \geq 0 \\ & y + s_2 = 4 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่าเปรียบเสมือนการเดินตามแนว y โดยที่จะเอา y ไปเป็นตัวแปรหลักแทน s_2 จึงไปจบที่ขอบที่ $s_2 = 0$ ทำให้ได้ $y = 4$ และจดด้วยการไม่สามารถปรับค่าตัวแปรไหนเพิ่มเติมได้อีกแล้ว จึงได้ว่า $(x, y) = (4, 4)$ เป็นผลเฉลยที่ทำให้ได้ฟังก์ชันค่าจุดประสงค์มากที่สุด และเท่ากับ $z = 4 \times 4 + 1 \times 4 = 20$

ทั้งนี้ ขอสรุปขั้นตอนสำคัญของการทำ simplex method ดังนี้

1. หาก pivot ตัวใหม่: พิจารณาหาทิศทางที่ทำให้เปลี่ยนค่าได้เร็วสุดก่อน
2. หาก pivot ตัวที่จะถูกแทนที่: เมื่อทราบแนวการเปลี่ยนแล้ว ให้ดูว่าจุดที่ยืนอยู่ปัจจุบันมีเส้นทางไหนที่เดินแล้วถึงขอบเร็วสุดเพื่อป้องกันการหลุดนอกขอบ แล้วตัวแปรส่วนเกินของขอบนั้นจะถอนแทนที่กลایไปเป็นตัวแปรพื้นฐาน (ตัวแปรที่ถูกตั้งค่าให้เป็น 0)
3. กำจัดตัวแปร pivot ใหม่ออกจากระบบ
4. ทำงานไปเรื่อย ๆ จนไม่สามารถเปลี่ยนตัวแปรใด ๆ เพื่อเพิ่มค่าจุดประสงค์ได้อีกแล้ว

1.3.1 Simplex Method Algorithm

ในการทำ simplex นั้นจะนิยมเขียนการคำนวนอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ที่เรียกว่า simplex tableau ดังนี้

Pivot	x_1	x_2	\cdots	x_n	s_1	\cdots	RHS
x_{B_1}	c_{11}	c_{12}	\cdots	c_{1n}	c_{1s_1}	\cdots	b_1
x_{B_2}	c_{21}	c_{22}	\cdots	c_{2n}	c_{2s_1}	\cdots	b_2
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
x_{B_m}	c_{m1}	c_{m2}	\cdots	c_{mn}	c_{ms_1}	\cdots	b_m
Z	z_1	z_2	\cdots	z_n	z_{s_1}	\cdots	z

โดยจะกล่าวละเอียดทีละขั้น โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอน 1.1: Simplex Method

ก่อนอื่น ตัวแปรทุกตัวต้องไม่ติดลบ ($x_i \geq 0$) และเนื่องจากในรูปแบบซึ่งก้อนตัวแปรอยู่ฝั่งซ้ายและค่าคงที่อยู่ฝั่งขวาโดยที่ค่าคงที่ต้องไม่ติดลบ

ขั้นที่ 1. แปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Standard Form)

- ◊ เป้าหมายต้องอยู่ในรูปแบบ $\text{Maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
- ◊ ข้อจำกัดต้องอยู่ในรูป สมการ โดยการเพิ่มตัวแปรประเภท *slack, surplus, artificial* ตามความเหมาะสม

ขั้นที่ 2. เขียน Simplex Tableau แรก

- ◊ สร้างตารางแสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในแต่ละ constraint
- ◊ เพิ่มแถวของสมการ Z และค่าคงที่ (RHS)

ขั้นที่ 3. เลือกตัวแปรที่จะเข้าสู่ฐาน (Entering Variable)

- ◊ เลือกตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ในแถว Z น้อยที่สุด (ติดลบมากที่สุด)
- ◊ ถ้าไม่มีค่าสัมประสิทธิ์เด็ดขาดในแถว Z : หยุดได้เลย เพราะได้คำตอบที่เหมาะสมแล้ว

ขั้นที่ 4. ทำ Minimum Ratio Test เพื่อเลือกตัวแปรที่จะออกจากรากฐาน (Leaving Variable)

- ◊ สำหรับแต่ละแถวที่ตัวแปรเข้ามามีสัมประสิทธิ์เป็นบวก ให้คำนวณ:

$$\text{Ratio} = \frac{\text{RHS}}{\text{ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าใหม่}}$$

- ◊ เลือกแถวที่ให้ค่า Ratio ต่ำสุด
- ◊ ถ้าไม่มี Ratio ได้สามารถคำนวณได้ (ทุกสัมประสิทธิ์ ≤ 0) \square ปัญหา ไม่จำกัดคำตอบ (Unbounded)

ขั้นที่ 5. ทำ Pivot เพื่ออัปเดต Tableau

- ◊ ทำให้ตำแหน่ง Pivot (จุดตัดระหว่างแถวเข้าและออก) มีค่าเป็น 1
- ◊ ปรับแถวอื่นให้ค่าของตัวแปรเข้ามาในคอลัมน์นั้นเป็น 0

ขั้นที่ 6. ทำขั้นตอนที่ 3-5 จนกว่าจะไม่มีสัมประสิทธิ์ติดลบในแถว Z

ขั้นที่ 7. อ่านคำตอบจาก Tableau ล้วนๆ

- ◊ ตัวแปรในฐานจะมีค่าตรงกับ RHS
- ◊ ตัวแปรที่ไม่อยู่ในฐานจะมีค่าเป็น 0
- ◊ ค่า Z ที่เหมาะสมที่สุดอยู่ในมุมขวาล่างของแถว Z

1.3.1.1 กรณีที่ 1: เงื่อนไขมีแต่ \leq (จุดกำหนดเป็น basic feasible solution)

กรณีนี้เป็นกรณีที่ง่ายที่สุด เพราะเป็นกรณีที่เริ่มกระบวนการ simplex ได้ทันทีที่จุดกำหนดโดยไม่ต้องมีการปรับแต่งอะไกรก่อน หน้า ในการอธิบายวิธีการของกรณีนี้ จะขอใช้ตัวอย่างดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 4 \\ & y \leq 6 \\ & 3x + 2y \leq 18 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 1: แปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน (Standard Form)

- ◊ เป้าหมาย $\max 3x + 5y$ อยู่ในรูป การเพิ่มค่า (Maximization) อยู่แล้ว
- ◊ แต่ถ้าเป้าหมายเป็น Minimization, ต้องแปลงเป็น Maximization โดยเปลี่ยนเครื่องหมาย:

$$\text{Minimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximize } -Z = -c_1x_1 - c_2x_2$$

- ◊ ทุกตัวแปรต้องมีเงื่อนไข ไม่ติดลบ:

$$x_i, s_i, a_i \geq 0$$

- ◊ ถ้าติดลบ ให้เปลี่ยนเป็นตัวแปรใหม่ $x_{new} = -x$ (แต่ในกรณีนี้ยังไม่มี)
- ◊ ข้อจำกัดทั้งหมดต้องเขียนในรูปสมการ (equalities) โดยข้อจำกัดแบบ \leq , ให้เพิ่ม ตัวแปรส่วนเกิน (Slack Variable) s_i : $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + s_i = b$

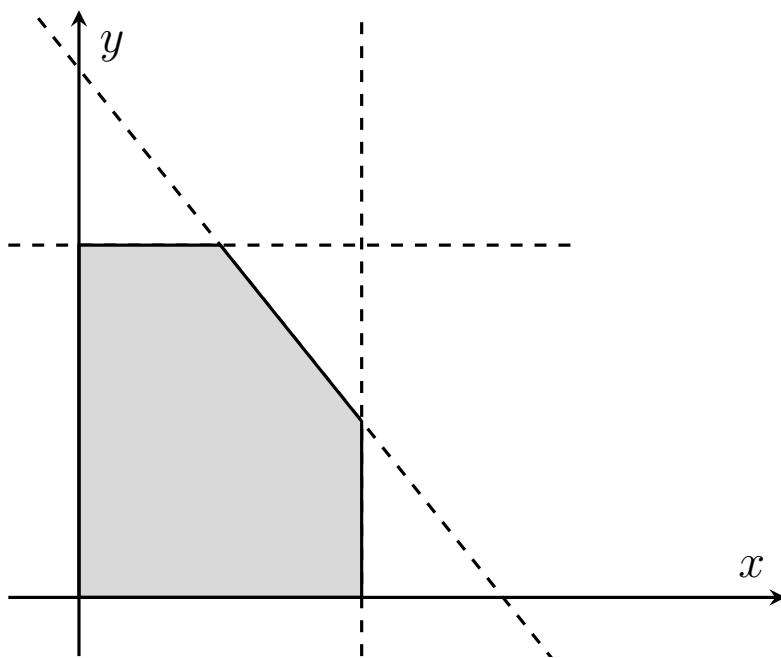
ตัวอย่าง 1.3.1: เปลี่ยนรูปมาตรฐานกรณี 1

จะเปลี่ยนปัญหา

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 4 \\ & y \leq 6 \\ & 3x + 2y \leq 18 \end{aligned}$$

ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)



ขั้นที่ 2: เขียน Simplex Tableau แรก

โดยให้กู้มตัวแปรส่วนขาดเป็นตัวแปร pivot ของระบบก่อน และให้ตัวแปรตัดสินใจเป็นตัวแปรพื้นฐาน กล่าวคือเราให้จุดกำเนิดเป็นผลเฉลยตั้งต้น และนอกจากนั้น เราจะให้แควรสูดท้ายมีค่าเป็นค่าติดลบของสัมประสิทธิ์แต่ละตัวแปรในฟังก์ชันจุดประสงค์ z และ RHS มีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง 1.3.2: Initial Simplex Tableau

จากรูปมาตราฐานที่ได้จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะเขียน Simplex tableau เริ่มต้นได้ดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
z						

หมายเหตุ: จริง ๆ แล้วรายึมีอีก colummn นึงที่ถูกซ่อนไว้คือ colummn ของตัวแปรจุดประสงค์ z ซึ่งจะสามารถเขียนได้เป็น

Pivot	z	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
	0						
	0						
	0						
z	1						

แต่เนื่องจากไม่ว่าจะดำเนินการในขั้นอื่น ๆ ต่อไปอย่างไร colummn นี้จะไม่มีทางเปลี่ยนแปลงแน่นอน ดังนั้นจึงทำการเขียน colummn นี้ไว้

คุณสมบัติ 1.4: คำถ้า

1. ทำไมและของฟังก์ชันจุดประสงค์ถึงต้องใช้ค่าติดลบของสัมประสิทธิ์ และทำไม่ผิด RHS ถึงต้องมีค่าเป็น 0
2. การเป็น Pivot ของตัวแปรหมายถึงอะไร
3. อะไรในตารางที่บอกเราว่าปัจจุบันเรายืนอยู่ที่จุด $(0, 0)$

ขั้นที่ 3: เลือกตัวแปรที่จะเข้าสู่ฐาน (Entering Variable)

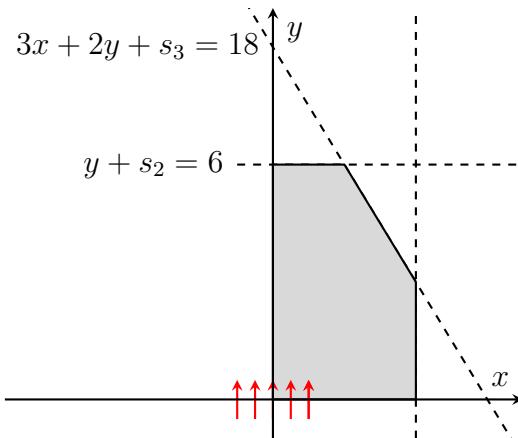
จากตำแหน่งที่ยืนอยู่ ณ ปัจจุบัน สิ่งที่เราต้องหาในขั้นตอนถัดไปคือควรจะเดินไปตามทางไหน ซึ่งแน่นอนว่าเรามีได้ระบุการเดินแบบบอกทิศการเดินชัดเจน (ถึงแม้ในกรณีนี้เราจะทราบว่าการเดินไปตามเกกเตอร์ $(3, 5)$ จะเป็นทิศที่ได้ขึ้นได้เร็วสุด ก็ตาม) เพราะหลักการของ simplex คือการเดินตามขอบ เพราะฉะนั้นเราจึงบอกทิศการเดินแบบคร่าว ๆ ว่าจะเดินไปตามแนวแกนของตัวแปรได้ก็เพียงพอแล้ว (ในที่นี้คือแนวแกน x หรือแนวแกน y)

วิธีการที่จะเลือกว่าเราควรเดินไปทิศทางใด คือการดูสัมประสิทธิ์ของตัวแปรนั้นที่อยู่ในฟังก์ชันจุดประสงค์

ตัวอย่าง 1.3.3: การเลือกตัวแปรฐานใหม่

จากฟังก์ชันจุดประสงค์ (ในปัจจุบัน) $z = 3x + 5y + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ ถ้า แต่ละตัวแปรมีค่าเปลี่ยนไป +1 แล้วค่า z จะมีค่าเปลี่ยนไปเท่าไหร่บ้าง และการเปลี่ยนตัวแปรใดทำให้เพิ่มค่า z ได้มากที่สุด

ขั้นที่ 4: เลือกตัวแปรที่จะออกจากรูป (Leaving Variable)



ณ ขั้นตอนนี้ เราทราบแล้วว่า เรากำลังจะเอาตัวแปร y เข้ามาเป็นตัวแปรฐานใหม่ เพราะการเดินตามแนวแกน y ให้การเปลี่ยนค่า z ได้มากที่สุด ซึ่งจากรูปภาพเราจะเห็นว่าจะมีเพียงขอบด้านซ้าย (เดินไปตามแกน y) เท่านั้นที่เป็นเส้นทางการเดินเดียวจากจุด $(0, 0)$

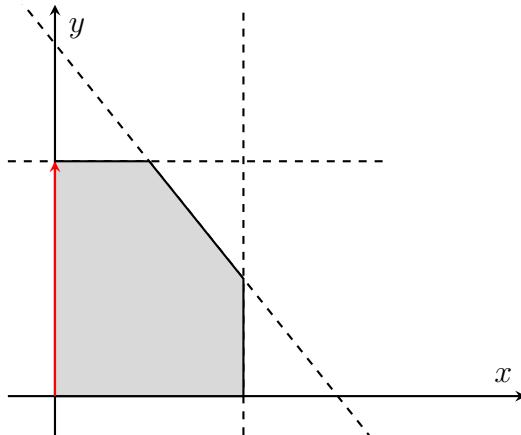
คำถามต่อมาคือเดินคร่าวก็ไหนถึงจะมั่นใจได้ว่าเดินไปถึงจุดมุขของบริเวณนั่น ๆ ซึ่งถ้าเดินสั้นไปจะเดินไม่ถึงจุดมุขแต่ถ้าเดินไกลไปก็จะเลยจุดมุข เพราะฉะนั้น เราจึงใช้ตัวแปรส่วนขาดเป็นตัวบวกกว่าของตัวแปรส่วนขาดโดยอยู่ใกล้ที่สุด (ในกรณีอื่นอาจมีได้หลายเส้นทาง แต่เราเก็บจะเลือกอันที่ใกล้ที่สุดอยู่) หรือกล่าวคือ เรากำลังจำลองว่าจะต้องเปลี่ยนค่า y เท่าไหร่เพื่อให้ตัวแปรส่วนขาดของเส้นตั้งกล่าวมีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง 1.3.4: การเลือกตัวแปรเพื่อออกจากรูป

จากรูปจะเห็นว่าถ้าเราเดิน จะไปพบได้ 2 เส้นเท่านั้นคือเส้นของ s_2 และเส้นของ s_3 จงหาค่า y ของแต่ละเส้นที่ทำให้ตัวแปรส่วนขาดของเส้นดังกล่าวมีค่าเป็น 0 (สุดท้ายจะได้ว่าต้องเดินไปเส้นของ s_2) และเราจะสามารถเขียนแสดงผลลัพธ์ดังกล่าวในรูปแบบ simplex tableau ได้อย่างไร

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

ขั้นที่ 5: ทำ Pivot Row Operation เพื่ออัปเดต Tableau



ตามความหมายในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้นนั้น pivot หมายถึงคอลัมน์ในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีสมาชิกเป็น 1 อยู่ตัวเดียว (เรียกว่า pivot element) และที่เหลือเป็น 0 ล้วน โดยในแต่ละแถวจะมี pivot element ได้ไม่เกิน 1 ตัว ซึ่งจากการที่เราบังคับให้ s_2 ออกจาก การเป็นฐาน และนำ y เข้ามาเป็นฐานแทน s_2 จึงต้องการให้ตาราง simplex อันใหม่มีหน้าตาดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	*	*	1	0	0	*
s_2	*	*	0	1	0	*
s_3	*	*	0	0	1	*
z	*	*	0	0	0	*

⇒

Pivot	x	y	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	*	0	1	*	0	*
y	*	1	0	*	0	*
s_3	*	0	0	*	1	*
z	*	0	0	*	0	*

ตัวอย่าง 1.3.5: การเปลี่ยน pivot ของระบบ

แปลง simplex tableau ให้เป็นของระบบ pivot s_1 , y และ s_3 และให้เหตุผลว่าทำไมระบบปัจจุบันถึงแสดงสถานะว่ากำลังยืนอยู่ที่จุด $(0, 6)$

ข้อที่ 6: วนซ้ำข้อที่ 3-5 จนกว่าจะไม่มีสัมประสิทธิ์ติดลบในแผลของ z

ตัวอย่าง 1.3.6: ทำต่อ

ทำขั้นตอนที่ 3-5 วนจนกว่าจะจบกระบวนการ และแปลผลตารางสุดท้าย (ข้อที่ 7)

ตัวอย่าง 1.3.7

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + 2y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & x \leq 2 \\ & y \leq 3 \\ & x - y \leq 1 \\ & x + y \leq 4 \end{aligned}$$

1.3.1.2 กรณีที่ 2: เงื่อนไข $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ ทำให้จุดกำหนดไม่เป็น basic feasible solution

ในบางกรณี เราอาจพบเงื่อนไขที่ทำให้จุดกำหนดไม่ใช่ feasible solution เลยทำให้ไม่สามารถดำเนินการ simplex ได้ทันที เมื่อมีกรณีที่ 1 ซึ่งกรณีดังกล่าวคือกรณีที่สมการเงื่อนไขเขียนในรูป $ax + by \geq c$ โดยที่ $c \geq 0$ ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่า จุด $(0, 0)$ ไม่เป็น feasible solution สำหรับเงื่อนไขนี้ แต่ถึงแม้เราจะใช้วิธีการเพิ่มตัวแปรส่วนขาดเข้าไป ตัวอย่างเช่น สมการ $-3x + 5y \geq 4$ เมื่อเราทำการเพิ่มตัวแปรส่วนขาดเข้าไป จะได้สมการเป็น $-3x + 5y = 4 + s$ เมื่อ $s \geq 0$ หรือก็คือสมการ $-3x + 5y - s = 4$ ¹ ซึ่งจะเห็นว่าถ้าให้ $x = 0$ และ $y = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$4 = -3x + 5y - s = -s \Rightarrow s = -4 \not\geq 0$$

กล่าวคือ เราไม่สามารถให้ x และ y เป็นตัวแปร non-basic ได้เมื่อมีกรณีที่ 1

วิธีแก้ปัญหาคือเราจะเพิ่มตัวแปรเข้าระบบไปอีกตัว เพื่อปรับดุลสมการให้สามารถเริ่ม basic feasible solution ที่จุดกำหนดได้ ซึ่งตัวแปรที่ถูกเพิ่มเข้ามาเรียกว่า ตัวแปรจำลอง (artificial variable) โดยจะได้สมการตัวอย่างเป็น

$$-3x + 5y - s + A = 4 \text{ โดยที่ } A \geq 0$$

และจะให้ตัวแปรจำลองเป็นตัวแปรพื้นฐาน และ x, y, s มีค่าเป็น 0 โดยในขั้นตอนนี้ เราได้ basic feasible solution เริ่มต้นเป็นตัวแปรจำลอง (A) ซึ่งมีค่าเป็นบวก (ในที่นี้คือ $A = 4$) แต่เป้าหมายของเราในการทำ Simplex method คือ การกำจัดตัวแปรจำลองออกไปจากระบบในที่สุด เพราะตัวแปรจำลองนี้ไม่ได้มีความหมายในทางปฏิบัติ แต่เป็นเพียงตัวช่วยชั่วคราวในการเริ่มต้นหากำตออบที่เหมาะสมที่สุดของระบบสมการ

การดำเนินการจากนี้เรียกว่า Phase I Simplex Method ระยะที่หนึ่ง (Phase I Simplex Method) ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินงานดังต่อไปนี้:

- หลังจากเพิ่มตัวแปรจำลองในแต่ละสมการที่มีเงื่อนไข \geq เรียบร้อยแล้ว เราจะกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราว (Phase I Objective) ให้เป็นการหาผลรวมของตัวแปรจำลองทั้งหมดที่ถูกเพิ่มเข้าไป และเป้าหมายของขั้นตอนนี้คือการทำให้ผลรวมของตัวแปรจำลองมีค่าเท่ากับศูนย์ให้ได้ กล่าวคือเราสร้างฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราว (Phase I Objective) ดังนี้:

$$\text{Minimize } W = \sum (\text{ตัวแปรจำลองทั้งหมด})$$

สำหรับตัวอย่างนี้จะได้เป็น

$$\text{Minimize } W = A$$

- ใช้วิธี Simplex กับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราวนี้ (Minimize W) และดำเนินการแปลงแท่ง (Pivot) ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ตัวแปรจำลองจะออกจากฐานทั้งหมด

◇ หากสามารถทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ชั่วคราว $W = 0$ ได้สำเร็จ แสดงว่าปัญหานี้มี feasible solution

¹หนังสือบางเล่มจะเรียกว่าตัวแปรส่วนเกิน เพราะมองในลักษณะ $-3x + 5y - s = 4$ โดยที่ s เป็นส่วนเกินของฟังก์ชันที่มีค่ามากกว่า ทำให้เราต้องลบออกเพื่อให้ได้สมการ แต่ในมุมของผู้เขียนจะมองในลักษณะของตัวแปรส่วนขาดทั้งหมด แล้วใช้การยกข้างสมการแทน

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

เดิมจริง และสามารถไปสู่ขั้นตอน Phase II ได้

- ◊ หากไม่สามารถทำให้ $W = 0$ ได้ (เช่น $W > 0$ เสมอ) แสดงว่าปัญหานี้ไม่มี feasible solution (infeasible problem) ไม่จำเป็นต้องดำเนินการต่อ

3. เมื่อได้ $W = 0$ และ (กำจัดตัวแปรจำลองหมดแล้ว) เราจะดำเนินการต่อในขั้นที่สอง (Phase II) โดยกลับไปใช้

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จริงของปัญหาเดิม และเริ่มทำ Simplex method ตามปกติจนได้คำตอบสุดท้าย สรุปได้ว่าในกรณีที่ 2 นี้ การใช้ตัวแปรจำลอง (Artificial variable) และวิธีการ Simplex Phase I จะช่วยให้เราสามารถเริ่มต้นแก้ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นได้ เมื่อว่าเงื่อนไขของปัญหาจะทำให้จุดกำหนดไม่สามารถเป็น basic feasible solution ตั้งต้นได้ก็ตาม

ตัวอย่าง 1.3.8

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + 5y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & -3x + 5y \geq 4 \\ & x + 2y \leq 8 \end{aligned}$$

วิธีทำ:

ขั้นที่ 1: ปรับสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

- ◊ เนื่องจาก $(0, 0)$ ไม่ 속落在เส้น $-3x + 5y \geq 4$ (แทนค่าแล้วได้ $0 \geq 4$ ซึ่งเป็นเท็จ) เป็นจริง ดังนั้นจึงต้องเติมตัวแปรส่วนเกินและตัวแปรจำลอง ให้เป็น $-3x + 5y - s_1 + a_1 = 4$ โดยที่ $s_1, a_1 \geq 0$ โดยที่ให้ a_1 เป็นตัวแปรฐาน และ $x, y, s_1 = 0$ ในขั้นตั้งต้น
- ◊ เนื่องจาก $(0, 0)$ 속落在เส้น $3x + 2y \leq 8$ (แทนค่าแล้วได้ $0 \leq 8$ ซึ่งเป็นจริง) ดังนั้นจึงเติมตัวแปรส่วนขาดเข้าไปแทนนั้น ให้เป็น $x + 2y + s_2 = 8$ โดยที่ให้ s_2 เป็นตัวแปรฐาน และ $x, y = 0$

และเนื่องจากว่ามีตัวแปรจำลอง จึงต้องตั้งฟังก์ชันจุดประสงค์ขึ้นรวมให้เป็นการหาค่าต่ำสุดของผลรวมตัวแปรจำลอง กล่าวคือ $\min a_1$ แต่เนื่องจากเรากำลังจะทำ simplex จึงต้องปรับปัญหาให้เป็นการหาค่าสูงสุดด้วยการคูณ -1 เข้าไปได้เป็น $\max W = -a_1$ จึงได้ปัญหา Phase 1 ออกมานี้เป็น

$$\begin{aligned} \max \quad & W = -a_1 \\ \text{subject to} \quad & x, y, s_1, s_2, a_1 \geq 0 \\ & -3x + 5y - s_1 + a_1 = 4 \\ & x + 2y + s_2 = 8 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2: ตั้งตารางซิมเพล็กซ์ของตัวแปรจำลอง ได้เป็น

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS
a_1	-3	5	-1	0	1	4
s_2	1	2	0	1	0	8
W	0	0	0	0	1	0

และทำการกำจัดตัวแปรจำลองออกจากจุดประสงค์ (การเอาตัวแปรอื่นมาพิจารณา) เพื่อให้คอลัมน์ a_1 มี แค่ของ a_1 เป็น 1 เพียงคนเดียว (เป็น pivot element ที่ตำแหน่งอื่นเป็น 0 ล้วน) ซึ่งทำได้โดยดำเนินการ ตามๆ $(-1)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ จะได้สมາชิกใน霎ที่ R_3 ใหม่คำนวณได้ดังนี้

- ◊ คอลัมน์ x : $(-1)(-3) + 0 = 3$
- ◊ คอลัมน์ y : $(-1)(5) + 0 = -5$
- ◊ คอลัมน์ s_1 : $(-1)(-1) + 0 = 1$
- ◊ คอลัมน์ s_2 : $(-1)(0) + 0 = 0$
- ◊ คอลัมน์ a_1 : $(-1)(1) + 1 = 0$
- ◊ คอลัมน์ RHS : $(-1)(4) + 0 = -4$

จึงได้ตารางซิมเพล็กซ์ตั้งต้นดังนี้ (ถ้าในข้อสอบถามหาตารางตั้งต้น ต้องตอบตารางนี้ เพราะคำคอลัมน์ a_1 ในตารางก่อนหน้ายังไม่มีอยู่ในรูปแบบ Pivot column)

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS
a_1	-3	5	-1	0	1	4
s_2	1	2	0	1	0	8
W	3	-5	1	0	0	-4

หมายเหตุ 2: การหาผลลัพธ์ W อีกแบบ

เราสามารถหาผลลัพธ์ W ได้แบบเร็วๆ โดยการนำสมการเงื่อนไขที่มีตัวแปรจำลองมาจัดรูปให้ตัวแปร จำลองอยู่ฝั่งหนึ่ง และตัวแปรที่เหลืออยู่อีกฝั่ง แล้วนำไปแทนค่าใน W เช่นในเงื่อนไขที่ 1 ของ ตัวอย่างนี้คือ $-3x + 5y - s_1 + a_1 = 4$ และจัดรูปได้เป็น $a_1 = 3x - 5y + s_1 + 4$ แล้วนำไปแทนใน W จะได้

$$W = -a_1 = -(3x - 5y + s_1 + 4) = -3x + 5y - s_1 - 4$$

และย้ายข้างได้รูปแบบ $W + 3x - 5y + s_1 = -4$ ทำให้เขียนสัมประสิทธิ์ได้เป็น

$$3 \quad -5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -4$$

และทำการวนการ simplex ไปจนกว่าตัวแปรจำลองจะออกจากตัวแปรฐานทั้งหมด โดยจากตารางจะได้ ว่าต้องให้ y เป็นตัวแปรเข้าฐาน และเมื่อหาอัตราส่วนเพื่อเลือกตัวแปรออกจากฐานตามตารางด้านล่าง จะได้ว่าต้องใช้ a_2 ออกจากฐาน

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS	อัตราส่วน
a_1	-3	5	-1	0	1	4	$4/5 = 0.8$
s_2	1	2	0	1	0	8	$8/2 = 4$
W	3	-5	1	0	0	-4	

ดำเนินการตามแຄอเพื่อเปลี่ยน pivot โดยใช้ $R_1/5$, $(-2/5)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ และ $(1)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ จะได้

Pivot	x	y	s_1	s_2	a_1	RHS
y	$-3/5$	1	$-1/5$	0	$1/5$	$4/5$
s_2	$11/5$	0	$2/5$	1	$-2/5$	$32/5$
W	0	0	0	0	1	0

ซึ่งตารางใหม่ไม่สามารถอัพเดตเพิ่มเติมได้อีกแล้ว และตัวแปรจำลองถูกกำจัดออกจากตัวแปรฐานได้ทั้งหมด และได้ $W = 0$ จึงได้ว่าสามารถทำ simplex phase 2 ต่อได้โดยใช้ชุดส้มประสิทธิ์ที่ได้จาก phase 1

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
y	$-3/5$	1	$-1/5$	0	$4/5$
s_2	$11/5$	0	$2/5$	1	$32/5$
z	-4	-5	0	0	0

หมายเหตุ 3: ความหมายของผลที่ได้จาก Phase 1

ผลที่ได้จากการทำ simplex phase 1 คือการพยายามหาจุดผลเฉลยตั้งต้น (basic feasible solution) ซึ่งจากเดิมเราสามารถเริ่มได้โดยง่ายที่จุด $x = 0, y = 0$ แต่ว่าในกรณีที่มีเงื่อนไขที่ทำให้จุดตั้งกล่าวไม่สอดคล้อง (เช่นเงื่อนไข $-3x + 5y \geq 4$) เราจึงจำเป็นต้องเพิ่มตัวแปรจำลองเพื่อจำลองการเดินทางจากจุด $(0, 0)$ ไปที่จุดมุ่งตั้งต้นที่ใกล้ที่สุด ซึ่งจากตารางสุดท้ายที่ได้มาจากการ phase 1 เราได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{5}s_1 &= \frac{4}{5} \\ \frac{11}{5}x + \frac{2}{5}s_1 + s_2 &= \frac{32}{5} \end{aligned}$$

โดยที่ $x = 0, s_1 = 0$ (เพราะไม่ใช่ฐาน) ซึ่งเมื่อแก้ระบบสมการหาค่าตัวแปรฐาน จะได้ $y = 4/5$ และ $s_2 = 32/5$ ซึ่งหมายถึง เราหาจุดผลเฉลยตั้งต้นได้เป็นจุด $(x, y) = (0, 4/5)$ และใช้ระบบของจุดนี้เพื่อไปแก้หาค่าสูงสุดของ Z ต่อได้

ขั้นที่ 3: ดำเนินการ simplex ได้ตามปกติ (ทึ่งไว้ให้เป็นแบบฝึกหัดเพิ่มเติมเพื่อทบทวนการดำเนินการ simplex)



1.3.1.3 กรณีที่ 3: เงื่อนไขมี = ซึ่งทำให้ feasible ไม่เป็น region เต็มมิติ

ตัวอย่าง 1.3.9

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

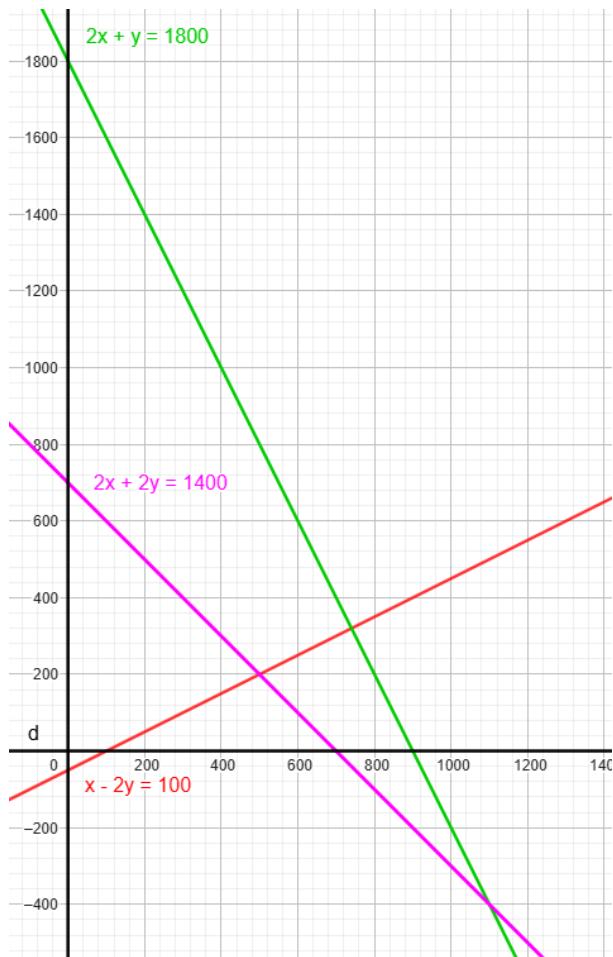
$$\begin{aligned} \max \quad & 2x + 15y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & -3x + 5y \leq 15 \\ & 2x + 5y \leq 40 \\ & 4x - 5y = 20 \end{aligned}$$

1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

ตัวอย่าง 1.3.10: โจทย์สม

ใช้วิธี simplex หาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \min \quad & -1840x - 1720y \\ \text{subject to} \quad & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ & 2x + y \leq 1800 \\ & 2x + 2y \geq 1400 \\ & x - 2y = 100 \end{aligned}$$



1.4 การแก้ปัญหาด้วย Excel Solver

สถานการณ์จำลอง

โรงงานผลิตน้ำผลไม้แห่งหนึ่งมีผลิตภัณฑ์ 4 ชนิด ได้แก่ น้ำส้ม (A), น้ำแอปเปิล (B), น้ำอุ่น (C) และน้ำสาวรส (D) โดยการผลิตแต่ละชนิดต้องใช้วัตถุดิบและเวลาที่แตกต่างกัน โรงงานมีข้อจำกัดด้านวัตถุดิบ วัตถุบรรจุ และแรงงานต่อวันตามตารางด้านล่าง

ทรัพยากร / ผลิตภัณฑ์	A (น้ำส้ม)	B (น้ำแอปเปิล)	C (น้ำอุ่น)	D (น้ำสาวรส)
วัตถุดิบ (ลิตร)	2.0	1.5	2.2	1.0
วัตถุบรรจุ (หน่วย)	1.0	1.0	0.8	1.2
แรงงาน (ชช.)	0.5	0.7	0.6	0.4
กำไรต่อหน่วย (บาท)	10	8	12	9

ข้อจำกัดต่อวัน:

- ◊ วัตถุดิบไม่เกิน 500 ลิตร
- ◊ วัตถุบรรจุไม่เกิน 250 หน่วย
- ◊ ชั่วโมงแรงงานไม่เกิน 120 ชั่วโมง

คำสั่งในการทำงาน

1. กำหนดให้ตัวแปร x_1, x_2, x_3, x_4 แทนจำนวนหน่วยของ A, B, C, D ตามลำดับ
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบ LP โดยกำหนด
 - ◊ พึงชั้นวัตถุประสงค์: Maximize กำไรรวม
 - ◊ ข้อจำกัด: ทรัพยากรไม่เกินที่กำหนด
 - ◊ เงื่อนไข: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
3. เปิด Excel และสร้างตารางการคำนวณ (Decision Variables, Total Usage, Constraints)
4. ใช้ Solver เพื่อหาคำตอบที่ให้กำไรสูงสุด โดยกำหนดเงื่อนไขที่เหมาะสม
5. บันทึกผลลัพธ์ที่ได้

คำถามท้ายแล็บ

- a. ผลลัพธ์ที่ได้คือ: $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ และกำไรสูงสุดคือ $\underline{\hspace{2cm}}$ บาท
- b. ข้อจำกัดใดที่ใช้เต็มความสามารถ? และข้อจำกัดใดที่ยังมีทรัพยากรเหลือ?
- c. หากโรงงานสามารถเพิ่มแรงงานได้อีก 10 ชั่วโมง จะส่งผลต่อกำไรหรือไม่?
- d. หากบริษัทต้องการผลิตแบบจำนวนเต็ม จะต้องเปลี่ยนการตั้งค่า Solver อย่างไร?

Assignment

จากสถานการณ์ของบริษัท ABC Furniture ที่ต้องการวางแผนการผลิต “โต๊ะทำงาน” และ “ตู้เก็บเอกสาร” เพื่อให้ได้ยอดสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดของแรงงานและวัสดุคงคลัง (ตามสถานการณ์ในต้นบท)

Part A: การสร้างโมเดลคณิตศาสตร์

1. จากสถานการณ์ของบริษัท ABC Furniture

- (a) กำหนดตัวแปรให้ชัดเจน
- (b) เขียนสมการจุดประสงค์ (Objective Function)
- (c) เขียนข้อจำกัดทั้งหมด (Constraints)
- (d) ระบุ Domain ของตัวแปร

วิธีทำ: เนื่องจากเราต้องวางแผนจำนวนการผลิตโต๊ะทำงานและตู้เก็บเอกสาร ดังนั้นเราจึงต้องกำหนดตัวแปรเป็นจำนวนโต๊ะและจำนวนตู้ โดยในที่นี้ กำหนดให้

$$x = \text{จำนวนโต๊ะทำงานที่จะผลิต}$$

$$y = \text{จำนวนตู้เก็บเอกสารที่จะผลิต}$$

เป้าหมายของการผลิตคือเพื่อที่ทำให้ได้ยอดขายสูงที่สุด ดังนั้นจึงต้องวางแผนฟังก์ชันจุดประสงค์คือยอดขาย และเนื่องจากยอดขายคิดได้จากจำนวนโต๊ะและจำนวนตู้ที่ผลิตคูณด้วยราคากล่อง ๆ จึงได้ว่า สมการจุดประสงค์คือยอดขาย

$$2000x + 1500y$$

ในส่วนของเงื่อนไขที่เป็นข้อจำกัดของโจทย์นี้จะมีเรื่องของเวลาแรงงานและปริมาณวัสดุคงคลังที่มี

- ◊ การผลิตโต๊ะ x ตัวซึ่งต้องใช้เวลาผลิตตัวละ 4 ชั่วโมง จึงต้องใช้เวลาผลิตโต๊ะทั้งหมด $4x$ ชั่วโมง
- ◊ การผลิตตู้ y ตัวซึ่งต้องใช้เวลาผลิตตัวละ 3 ชั่วโมง จึงต้องใช้เวลาผลิตโต๊ะทั้งหมด $3y$ ชั่วโมง

ดังนั้นเราจึงใช้เวลาแรงงานในการผลิตทั้งหมด $4x + 3y$ และเพร率เรามีเวลาจำกัดสูงสุดที่ 1000 ชั่วโมง จึงได้เงื่อนไขด้านเวลาเป็น

$$4x + 3y \leq 1000$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้เงื่อนไขเรื่องวัสดุคงคลังเป็น

$$2x + y \leq 800$$

ทั้งนี้ เนื่องจากตัวแปรที่เราตั้งไว้เป็นเรื่องของจำนวนการผลิต ดังนั้น Domain ของจำนวนแปรจึงคือจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (ถึงแม้ตอนเราแก้ปัญหาเราจะสนใจแค่ไม่ติดลบอย่างเดียวก็ตาม: $x \geq 0, y \geq 0$)

สรุปแล้ว โจทย์นี้เราจะได้แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \text{max } & 2000x + 1500y \\ \text{subject to } & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

□

Part B: การวิเคราะห์และคำนวณผลลัพธ์

1. หาผลเฉลยด้วยวิธีการวาดกราฟ

วิธีทำ: เริ่มจากการหาจุดตัดแกนของแต่ละเส้นสมการเงื่อนไข

สมการ	จุดตัดแกน x (แทน $y = 0$)	จุดตัดแกน y (แทน $x = 0$)
$4x + 3y = 1000$	$4x = 1000 \Rightarrow x = 250$	$3y = 1000 \Rightarrow y = 1000/3 \approx 333.33$
$2x + y = 800$	$2x = 800 \Rightarrow x = 400$	$y = 800$



จะได้ว่าบริเวณความเป็นไปได้ (feasible region) คือรูปสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยแกน x , แกน y และเส้นตรงสมการ $4x + 3y = 1000$ ซึ่งมีจุดยอด 3 จุดได้แก่ $(0, 0)$, $(0, 1000/3)$, $(250, 0)$ (เนื่องจากในข้อนี้ไม่มีการตัดกันของเส้นสมการเงื่อนไขในบริเวณที่สนใจ จึงไม่มีการแก้ระบบสมการเพื่อหาจุดตัด)

1.4. การแก้ปัญหาด้วย Excel Solver

สุดท้ายคือแทนค่าจุดมุลลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์มากที่สุด

(x, y)	ยอดขาย = $2000x + 1500y$
(0, 0)	0
(0, $1000/3 \approx (0, 333)$)	499500
(250, 0)	500000

ซึ่งทำให้ได้ว่าค่ายอดขายสูงสุดที่จะทำได้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดมาคือ 500,000 บาท ที่จะผลิตต่ออย่างเดียว 250 ตัว

หมายเหตุ 4

ถ้าไม่นับเรื่องการปัดให้เป็นจำนวนเต็มนั้น จริงๆ แล้วที่จุด $(0, 1000/3)$ ก็ให้ค่ายอดขายสูงสุดเป็น 500000 บาทเช่นกัน แต่ว่าเนื่องจากเราต้องปัดให้เป็นจำนวนเต็ม และไม่สามารถปัดขึ้นได้เนื่องจากจะเกินเงื่อนไขที่กำหนดมา ทำให้เราสามารถผลิตได้ยอดขายแค่ 499500 ที่จุดที่จะผลิตตู้อย่างเดียว

นอกจากนั้น ทุกจุดบนเส้นสมการเงื่อนไข $4x + 3y = 1000$ นั้นต่างให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น 500000 เหมือนกันทุกจุด (เป็นโจทย์ที่ไว้ให้นักศึกษาลองคิดว่าทำไมถึงเป็นเช่นนั้น) ดังนั้น เราอาจจะเลือกตัวเลือกอื่นที่ไม่ใช่จุดมุกก็ได้ ทราบได้ที่ยังเป็นจุดที่ทั้ง x และ y ต่างเป็นจำนวนเต็มและยังอยู่บนเสื่อนไปดังกล่าว (ตัวอย่าง เช่น $x = 100, y = 250$ ก็เป็นอีกจุดที่ยังสอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์และให้ค่ายอดขายรวมเป็น 500000 เช่นเดียวกัน)

โจทย์ Challenge

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1500y \\ \text{subject to} \quad & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) ทำไม่ทุกจุดบนเส้นเงื่อนไข $4x + 3y = 1000$ ถึงทำให้ค่ายอดขายรวมได้ราคา 500,000 บาท เมื่อเทียบกับทั้งหมด
- (b) ถ้าเกิดทางบริษัท ABC Furniture ไม่ต้องการตัวเลือกที่ผลิตแค่อย่างเดียวทั้งหนึ่งเท่านั้น แต่ให้ซ่วยลิสต์รายการการทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่ทำให้ยอดขายรวมได้ 500,000 บาทเมื่อเทียบกับ เราจะมีวิธีการหาตัวเลือกทั้งหมดนั้นอย่างไร
(คำใบ้ $x = 250 - \frac{3}{4}y$)

2. หาผลเฉลยด้วยวิธี Simplex method
3. จงอธิบายความหมายทางเรขาคณิตของแต่ละ simplex tableau ที่ได้ในข้อที่ผ่านมา
4. หาผลเฉลยด้วย Excel Solver
5. ถ้าปริชัทเพิ่มแรงงานได้เป็น 1,200 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ข้อจำกัดเปลี่ยนแปลงอย่างไร และคำตอบใหม่คืออะไร?
6. ถ้าราคาขายตุ๊กเก็บเอกสารเพิ่มเป็น 1,800 บาท จะมีผลต่อคำตอบอย่างไร? ควรผลิตเปลี่ยนไปหรือไม่?

Part C: Sensitivity Analysis

เราสามารถลด (หรือเพิ่ม) ทรัพยากรได้แค่ไหน โดยที่คำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) ยังไม่เปลี่ยน?

1. อธิบายเงื่อนไขเชิงเรขาคณิตที่ทำให้คำตอบที่เหมาะสมที่สุดยังคงอยู่ที่เดิม เมื่อเปลี่ยนค่าด้านขวาของข้อจำกัด (RHS)
2. พิจารณาว่าความสามารถลดค่าของ RHS ของข้อจำกัดแรงงาน (1000) และวัตถุดิบ (800) ลงอย่างละเอียด โดยที่จะดู คำตอบเดิมยัง feasible และยังเป็นคำตอบที่ให้ค่า Z มากที่สุด

CHAPTER 2

ทฤษฎีการตัดสินใจ (Decision Theory)

โจทย์ธุรกิจ

ข้อความ

“ขอบคุณสำหรับแผนการผลิตที่คุณแนะนำครับ แต่เรายังมีปัญหาใหม่เกิดขึ้น... ฝ่ายบริหารกำลังลังเลว่าจะใช้กลยุทธ์ไหนต่อในไตรมาสหน้า เพราะสถานการณ์ตลาดมีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา บางสัปดาห์ต้องทำงานขายดี บางสัปดาห์กลับเป็นตู้เอกสารที่ไม่แรง บางทีก็มีปัญหาขนส่งวัตถุดิบจากซัพพลายเออร์อีก ถ้าจะวางแผนกลยุทธ์ที่เหมาะสม เราควรเลือกแนวทางการผลิตแบบใด?”

คุณสมชายกลับมาอีกครั้ง หลังจากบริษัท ABC Furniture ใช้แบบจำลองเชิงเส้นเพื่อตัดสินใจจำนวนการผลิต ต้องทำงานและตู้เก็บเอกสารในแต่ละสัปดาห์ได้แล้ว ซึ่งทำให้ได้ผลดีในช่วงแรก ๆ ที่ใช้งาน แต่ผ่านไปสักพักฝ่ายการตลาดพบว่ามีปัจจัยภายนอกมาระบบทามให้ไม่สามารถใช้แค่เกณฑ์ภายนอกในการกำหนดปริมาณการผลิตได้อวย่างเดียว และสถานการณ์ตลาดเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว — ทำให้ฝ่ายการผลิตต้องเผชิญกับความไม่แน่นอนหลายด้าน เช่น

- ราคาขายเปลี่ยนแปลง
- ความต้องการของลูกค้าเปลี่ยนไป
- มีปัญหาการขนส่งวัตถุดิบ
- คู่แข่งอกรุ่นใหม่ที่มีราคาถูกกว่า

เพื่อช่วยในการวางแผน บริษัทจึงอยากรู้ว่า หากมีสถานการณ์ที่ไม่แน่นอน (uncertain states of nature) เกิดขึ้น บริษัทควรเลือกแนวทางการผลิตแบบใดเพื่อรับมือ

คำถามชวนคิด:

- คุณคิดว่าบริษัท ABC Furniture กำลังเผชิญกับปัญหาแบบใด? ทำไม LP ไม่ตอบโจทย์?
- คุณต้องการข้อมูลอะไรเพิ่มเติมก่อนจะตอบคำถามของคุณสมชายได้?
- คุณจะเริ่มต้นจัดกลุ่มหรือจำแนกทางเลือกในการตัดสินใจอย่างไร?
- หากไม่สามารถรู้อนาคตได้แน่ชัด คุณจะวิเคราะห์หรือวางแผนอย่างไร?
- ลองจินตนาการว่าบริษัทอาจมี “หลายสถานการณ์ตลาด” ที่อาจเกิดขึ้น คุณจะจัดโครงสร้างปัญหาเพื่อเบรียบเทียบตัวเลือกได้อย่างไร?
- คุณคาดหวังว่าข้อมูลลักษณะใดจะช่วยให้การตัดสินใจแม่นยำมากขึ้น?

บทนำ

(Draft Version)¹

- ในบางครั้ง ก็มีทางเลือกที่จะต้องตัดสินใจเลือก
- เป้าหมายคือทางเลือกที่ดีที่สุด
- แต่ก็มีรูปแบบของสถานการณ์เดิมหลากหลาย ขึ้นกับการเกิดขึ้นของทางเลือกที่มี: (1) ภายใต้ความแน่นอน (2) ภายใต้ความเสี่ยง และ (3) ภายใต้ความไม่แน่นอน
- ซึ่งการตัดสินใจภายใต้ความเสี่ยงและความไม่แน่นอนนั้นจะใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็นเข้ามาช่วย: ค่าคาดหวัง (expected value)

2.1 ลักษณะการแสดงข้อมูล

เราสามารถแสดงข้อมูลเพื่อความง่ายในการอ่านได้ 2 รูปดังนี้

1. เมทริกซ์การตัดสินใจ (decision matrix) เป็นการแสดงผลจากลัพธ์ (เช่น กำไร) ระหว่างตัวเลือก (option) และเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ที่อาจจะเกิดขึ้น

	เหตุการณ์ 1	เหตุการณ์ 2	...	เหตุการณ์ n
ทางเลือก 1				
ทางเลือก 2				
:				
ทางเลือก m				

2. ต้นไม้การตัดสินใจ (decision tree) เป็นลักษณะของการแสดงความต่อเนื่องของเหตุการณ์การเลือกโดยอาศัยจุดยอด (node) เชื่อมต่อกัน และปลายกิ่งสุดท้ายจะแสดงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

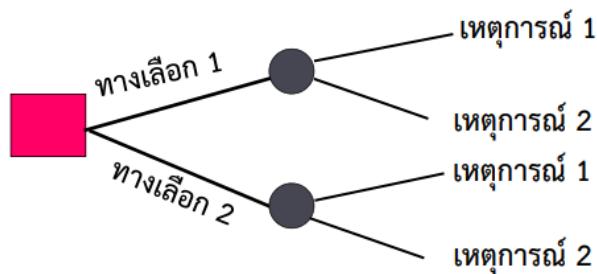


Figure 2.1. Enter Caption

¹draft for teaching in class, not for text book this semester

ตัวอย่าง 2.1.1: ตัวอย่างการสร้างเมทริกซ์การตัดสินใจ และต้นไม้การตัดสินใจ

ณ บริษัทสมมติแห่งหนึ่ง ต้องการตัดสินใจว่าจะจัดนิทรรศการขนาดเล็ก หรือขนาดกลาง หรือขนาดใหญ่ โดยจาก การประเมินเบื้องต้นพบว่าถ้าขายบัตรเข้างานได้หมด จะได้กำไร 8 ล้านบาท, 15 ล้านบาท และ 25 ล้านบาทเรียง ตามขนาดของงาน ในขณะที่ถ้าขายได้ 50% ของบัตรทั้งหมดจะได้กำไร 4 ล้านบาท, 15 ล้านบาท และ 10 ล้านบาท ตามลำดับ และถ้าขายได้เพียงแค่ 10% ของบัตรทั้งหมดจะได้กำไร 3 บาท และขาดทุน 1 ล้านบาทและ 10 ล้านบาทตามลำดับขนาดของงาน จากเหตุการณ์ดังกล่าว จะสร้างเมทริกซ์การตัดสินใจและต้นไม้การตัดสินใจได้ดังนี้

2.2 การตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอน

- ◊ เมื่อทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์ใดขึ้น
- ◊ ถึงจะไม่ realistic ในหลาย ๆ กรณี แต่บางครั้งเราต้องพิจารณาในรูปแบบนี้
- ◊ เพราะง่ายและตรงไปตรงมา

ตัวอย่าง 2.2.1: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอน

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 จะตัดสินใจภายใต้สภาวะความแน่นอนของแต่ละเหตุการณ์ได้อย่างไรบ้าง

2.3 การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง

- ◊ “ไม่ทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์ใด
- ◊ แต่พอมีข้อมูลเพื่อคาดการณ์ความน่าจะเป็นของการเกิดแต่ละเหตุการณ์ได้
- ◊ ใช้แนวคิดเรื่องของความน่าจะเป็นเข้ามาช่วย

2.3.1 ค่าคาดหวัง (Expected Value)

นิยาม 2.3.1: ค่าคาดหวัง

ภายใต้ การทดลอง เชิง การ สุ่ม หนึ่ง ถ้า ผล job แทน ทั้งหมด ที่ เป็นไปได้ คือ $X = X_1, X_2, X_3, \dots$ (อาจ จะ มี จำกัด หรือ ไม่ จำกัด เหตุการณ์ ก็ได้) โดยที่ มี ความ น่า จะ เป็น การ ได้ ผล ตอบแทน เป็น $P(X) = P(X_1), P(X_2), P(X_3), \dots$ ตาม ลำดับ และ ค่า คาด หวัง ของ ผล ตอบแทน จะ คำนวณ โดย

$$E(X) := X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + X_3P(X_3) + \dots$$

ซึ่ง ค่า คาด หวัง ใน เชิง ความ น่า จะ เป็น เปรียบ เสมือน ค่า เนลลี่ ใน เชิง สถิติ ที่ จะ บอก แนวโน้ม การ ได้ ว่า มาก จะ ได้ ค่า ไหน เป็น ส่วน ใหญ่

ตัวอย่าง 2.3.1: ค่า คาด หวัง ของ เหตุการณ์ อย่าง ง่าย

สมมติว่า พนัน ด้วย การ โยน เหรียญ ไม่ เที่ยง ตรง อัน หนึ่ง โดย มี โอกาส ออก หัว 0.3 และ ออก ก้อย 0.7 ใน การ พนัน นี้ มี กฎ ว่า ถ้า ออก หัว ผู้เล่น จะ ได้ เงิน 5 บาท ใน ขณะ ที่ ถ้า ออก ก้อย ผู้เล่น จะ เสีย เงิน 3 บาท ใน การ เล่น พนัน ครั้ง นี้ ผู้เล่น จะ เสีย เปรียบ หรือ ว่า ได้ เปรียบ อยู่ กี่ บาท

2.3.2 เกณฑ์ผลตอบแทน

ตัวอย่าง 2.3.2: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง: ค่าคาดหวังของผลตอบแทน

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขาดเล็ก	8	4	3
ขาดกลาง	15	15	-1
ขาดใหญ่	25	10	-10

แลจากการสำรวจสถิติเก่า ๆ พบร้า โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 เนื่องจากเราไม่ทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์แบบไหนขึ้น แต่เราทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิด เราจึงต้องใช้ค่าคาดหวังเข้ามาช่วย

1. เราต้องหาค่าคาดหวังของอะไร (ระบุตัวแปรสุ่ม) โดยที่แยกคิดตามอะไร (ตามขนาดงานหรือตามปริมาณการขายบัตรได้)
2. จงหาค่าคาดหวังตามที่ตั้งไว้
3. และจากค่าคาดหวังที่ได้ ควรเลือกจัดงานขนาดใด
4. ข้อมูลเรื่องความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ นักศึกษาคิดว่าหาได้จากไหนบ้าง (ยกตัวอย่างแหล่ง ข้อมูล หรือสิ่งที่ขอเพิ่มจากลูกค้า)

2.3.3 เกณฑ์ค่าเสียโอกาส (opportunity loss)

- นอกจจากคำนวนจากผลตอบแทนแล้ว เรายังสามารถคำนวนโดยอาศัยเกณฑ์ค่าเสียโอกาส
- ค่าเสียโอกาส = ผลตอบแทนที่ควรได้สูงสุด - ผลตอบแทนกรณีเลือกตัวเลือกดังกล่าว
- และใช้ค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส (Expected Opportunity Loss: EOL) เป็นตัวตัดสินใจ

ตัวอย่าง 2.3.3: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง: ค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขาดเล็ก	8	4	3
ขาดกลาง	15	15	-1
ขาดใหญ่	25	10	-10

และจากการสำรวจสถิติเก่า ๆ พบร่วม โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสออยู่ที่ 0.3 เนื่องจากเรามุ่งที่จะทราบว่าจะเกิดเหตุการณ์แบบไหนขึ้น แต่เราทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิด เราจึงต้องใช้ค่าคาดหวังเข้ามาช่วย

1. จงคำนวนค่าเสียโอกาสที่จะเกิดขึ้นในแต่ละเหตุการณ์
2. จงหาค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาส
3. และจากค่าคาดหวังที่ได้ ควรเลือกจัดงานขนาดใด

2.3.4 ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์

- ◇ ถ้าเราทราบเหตุการณ์ที่จะเกิดได้ จะทำให้เลือกตัวเลือกที่ทำกำไรได้สูงสุดแน่นอน (มีข่าวสารสมบูรณ์)

$$\text{ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์} = E \text{ (ผลตอบแทนสูงสุดของแต่ละเหตุการณ์)}$$

- ◇ แต่ถ้าเราไม่มีข่าวสารอะไรเลย เราจะตัดสินใจได้เพียงแค่ค่าคาดหวังของผลตอบแทนในแต่ละตัวเลือก และเลือกตัวเลือกที่ให้ค่าคาดหวังมากที่สุด

$$\text{ค่าคาดหวังที่สูงที่สุดเมื่อไม่มีข่าวสาร} = \max_{\text{ตัวเลือก}} E \text{ (ผลตอบแทนตามเหตุการณ์)}$$

- ◇ เราจึงวัดผลความต่างระหว่างค่าคาดหวังที่จะทำผลตอบแทนได้สูงสุดเมื่อมีข่าวสารสมบูรณ์เทียบกับค่าคาดหวังที่สูงที่สุดเมื่อไม่มีข่าวสาร
- ◇ เรียกว่า ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์ (Expected Value of Perfect Information: EVPI)

$$EVPI = \text{ค่าคาดหวังเมื่อมีข่าวสารสมบูรณ์} - \text{ค่าคาดหวังที่สูงที่สุดเมื่อไม่มีข่าวสาร}$$

ตัวอย่าง 2.3.4: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความเสี่ยง: ค่าคาดหวังของข่าวสารที่สมบูรณ์

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขนาดเล็ก	8	4	3
ขนาดกลาง	15	15	-1
ขนาดใหญ่	25	10	-10

และจากการสำรวจสถิติเก่า ๆ พบว่า โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 จึงคำนวณหา EVPI และอภิปรายค่าที่ได้ในแห่งของการลงทุนทำ R&D เพิ่มเติม

ผลลัพธ์ได้อย่างหนึ่งที่น่าสนใจคือไม่ว่าเราจะใช้เกณฑ์ใดก็ตาม เราจะได้วิธีการตัดสินใจเดียวกันเสมอ

ทฤษฎีบท 2.3.1: ปัญหาคุ้นของเกณฑ์ผลตอบแทนและเกณฑ์ค่าเสี่ยงโอกาส

ผลการตัดสินใจที่ได้จากการคำนวณของผลตอบแทนจะเหมือนกับผลการตัดสินใจจากค่าคาดหวังของค่าเสี่ยงโอกาส

$$\arg \max_{\text{ตัวเลือก}} E(\text{ผลตอบแทน}) = \arg \min_{\text{ตัวเลือก}} E(\text{ค่าเสี่ยงโอกาส})$$

และทำให้เราได้ผลตามมาว่า

บทตาม 2.3.1: EVPI กับ EOL

$$EVPI = \min_{\text{ตัวเลือก}} E(\text{ค่าเสี่ยงโอกาส})$$

(ข้ามได้) เพื่อความง่ายสำหรับนักศึกษาที่ไม่คุ้นเคยกับการคิดคณิตศาสตร์แบบนามธรรม ขอกำหนดให้เรามีทางเลือก 3 ทางเลือก และเหตุการณ์ 4 เหตุการณ์

Exercise 2.3.1: คำถากช่วยໄກด์

1. กำหนดให้เมตริกซ์ผลตอบแทนคือ $D = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ความน่าจะเป็นคือ

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \text{ และเราจะสามารถใช้ } D \text{ และ } \vec{p} \text{ เขียนแสดงค่าคาดหวังของผลตอบแทนได้อย่างไร}$$

(Ans: \vec{E} (ผลตอบแทน) = $D\vec{p}$)

2. เพื่อที่จะเขียนเมตริกซ์ที่แสดงถึงค่าเสี่ยงโอกาส ขอสมมติว่าให้ในเหตุการณ์ที่ 1, 2, 3 และ 4 มีผลตอบแทนที่ได้มากที่สุดเป็น $x_{11}, x_{32}, x_{23}, x_{24}$ ตามลำดับ กล่าวคือในเหตุการณ์ที่ 1, 2, 3 และ 4 นั้นทางเลือกที่ 1, 3, 2 และ 2 จะให้ผลตอบแทนยอดสูดตามลำดับ จงเขียนค่าเสี่ยงโอกาสรายตัวเลือกให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

3. ถ้าไม่กำหนดแบบเจาะจงว่าตัวเลือกใดให้ผลตอบแทนมากที่สุดในแต่ละเหตุการณ์ แต่สมมติว่าให้ผลตอบแทนที่มากที่สุดของเหตุการณ์ที่ 1, 2, 3 และ 4 มีผลตอบแทนที่ได้มากที่สุดเป็น M_1, M_2, M_3, M_4 ตามลำดับ จงเขียนค่าเสี่ยงโอกาสรายตัวเลือกให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

(Ans: $M - D$ โดยที่ทุกแถวของ M คือ M_1, M_2, M_3, M_4)

4. จงหาค่าคาดหวังของค่าเสี่ยงโอกาส

(Ans: \vec{E} (ค่าเสี่ยงโอกาส) = $M\vec{p} - D\vec{p}$)

5. คราวนี้เราจะสามารถพิสูจน์ผลใน 2.3.1 โดยใช้ผลจากข้อ 1 และข้อ 4

2.4 การตัดสินใจภายใต้สภาวะที่ไม่แน่นอน

maximax criterion

หมายความว่า ผู้ตัดสินใจที่มีนิสัยกล้าได้กล้าเสีย โดยเลือกค่าผลลัพธ์สูงสุด (Maximum payoff) ของแต่ละทางเลือก และเลือกค่าที่มากที่สุดในบรรดาันนี้

$$\text{Maximax} = \max_i \left(\max_j a_{ij} \right)$$

โดยที่ a_{ij} คือค่าผลลัพธ์ของกลยุทธ์ i เมื่อเกิดเหตุการณ์ j

maximin criterion

หมายความว่า ผู้ตัดสินใจที่รับมั่นคง โดยเลือกค่าผลลัพธ์ต่ำสุด (Minimum payoff) ของแต่ละทางเลือก และเลือกค่าที่มากที่สุดในบรรดาันนี้

$$\text{Maximin} = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

minimax regret criterion

คำนวน “ความเสียใจ” (regret) โดยการหาผลต่างระหว่างผลลัพธ์ที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์ กับค่าของแต่ละกลยุทธ์ และเลือกกลยุทธ์ที่มี regret สูงสุดน้อยที่สุด

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}, \quad \text{Minimax Regret} = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$$

Laplace criterion

ถือว่าทุกสถานการณ์มีโอกาสเกิดเท่ากัน และคำนวนค่าเฉลี่ยของแต่ละกลยุทธ์ จากนั้นเลือกค่าที่มีค่าเฉลี่ยสูงสุด

$$\text{Laplace} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$$

โดยที่ n คือจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้

Hurwicz criterion

ประเมินประเมินระหว่าง maximax และ maximin โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์ α ที่สะท้อนระดับความมองโลกในแง่ดี

$$\text{Hurwicz}_i = \alpha \cdot \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \min_j a_{ij}$$

โดย $0 \leq \alpha \leq 1$ และเลือกกลยุทธ์ที่ให้ค่าดังกล่าวสูงสุด

ตัวอย่าง 2.4.1: การตัดสินใจภายใต้สภาวะความไม่แน่นอน

จากเมทริกซ์การตัดสินใจที่ได้จากตัวอย่าง 2.1.1 ซึ่งคือ

(หน่วย: ล้านบาท)	ขายได้หมด	ขายได้ 50%	ขายได้ 10%
ขาดเล็ก	8	4	3
ขาดกลาง	15	15	-1
ขาดใหญ่	25	10	-10

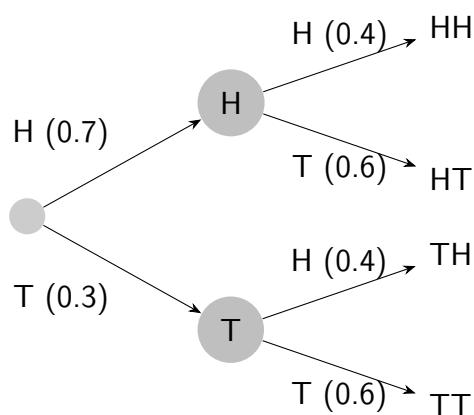
จงคำนวณค่าตามเกณฑ์ต่าง ๆ และเปรียบเทียบผลการตัดสินใจที่ได้

2.5 การใช้ต้นไม้การตัดสินใจ

ไม่ใช่การคำนวณใหม่ แต่เป็นวิธีการคิดสิ่งเดิมโดยใช้แผนภาพเข้ามาช่วย

2.5.1 การคิดค่าคาดหวังด้วยแผนภาพต้นไม้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

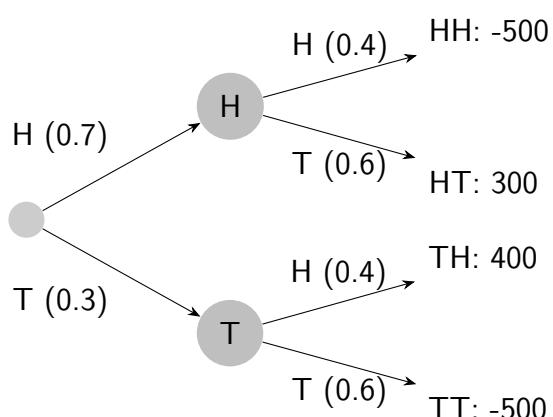
การคิดเกี่ยวกับเหตุการณ์ความน่าจะเป็นนั้นสามารถเขียนในรูปแบบการคาดแผนภาพต้นไม้เพื่อพิจารณาเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่อเนื่องกัน ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 2 เหรียญต่อเนื่องกัน โดยเหรียญแรกเป็นเหรียญไม่เที่ยงตรงที่มีโอกาสออกหัว 0.7 และออกก้อย 0.3 ในขณะที่เหรียญที่สองเป็นเหรียญที่มีโอกาสออกหัว 0.4 และออกก้อย 0.6 ถ้าเราพิจารณาความน่าจะเป็นที่จะได้ เรากำหนดแผนภาพได้ดังนี้



ซึ่งสามารถนำมาช่วยคิดค่าความน่าจะเป็นได้โดยอาศัยลักษณะการคุณของสายต่อเนื่อง เช่น²

$$P(HT) = P(H) P(T) = 0.7 \times 0.6 = 0.42$$

และในกรณีที่มีเรื่องของผลลัพธ์เพื่อนำมาคิดค่าคาดหวังของผลลัพธ์นั้น เราอาจจะเขียนแผนภาพต้นไม้เพิ่มเติมได้ดังนี้



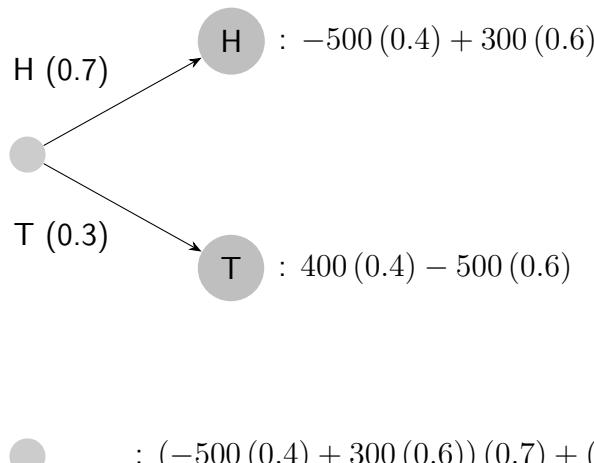
² เราพิจารณากรณีง่าย ซึ่งคือกรณีที่เหตุการณ์ทั้ง 2 ขั้นตอนอิสระจากกัน

ซึ่งเราสามารถคิดค่าคาดหวังของผลลัพธ์ได้ตามแบบนิยามของค่าคาดหวังได้เป็น

$$\begin{aligned} E(\text{ผลลัพธ์}) &= -500P(HH) + 300P(HT) + 400P(TH) - 500P(TT) \\ &= -500(0.7)(0.4) + 300(0.7)(0.6) + 400(0.3)(0.4) - 500(0.3)(0.6) \end{aligned}$$

แต่ถ้าพิจารณาตามลำดับขั้นการคำนวณตามแผนภาพต้นไม้ เราสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\begin{aligned} E(\text{ผลลัพธ์}) &= -500(0.7)(0.4) + 300(0.7)(0.6) + 400(0.3)(0.4) - 500(0.3)(0.6) \\ &= (-500(0.4) + 300(0.6))(0.7) + (400(0.4) - 500(0.6))(0.3) \\ &= \text{ค่าคาดหวังที่ต้นไม้มีอยู่ที่หรือจะรอกอุ่น }(0.7) + \text{ค่าคาดหวังที่ต้นไม้มีอยู่ที่หรือจะรอกอุ่น }(0.3) \end{aligned}$$



กล่าวคือ ในกรณีที่เรามีแผนภาพลำดับของการเกิดเหตุการณ์ในรูปแบบของแผนภาพต้นไม้ เราสามารถคิดค่าคาดหวังของทั้งต้นไม้นั้นได้โดยคิดจากค่าคาดหวังของต้นไม้อยู่ก่อน หรือคือคิดໄต่ขึ้นมาจากปลายกิ่งໄไปหาจุดรากของแผนภาพ

2.5.2 เมื่อมีตัวเลือกเข้ามาเกี่ยวข้อง

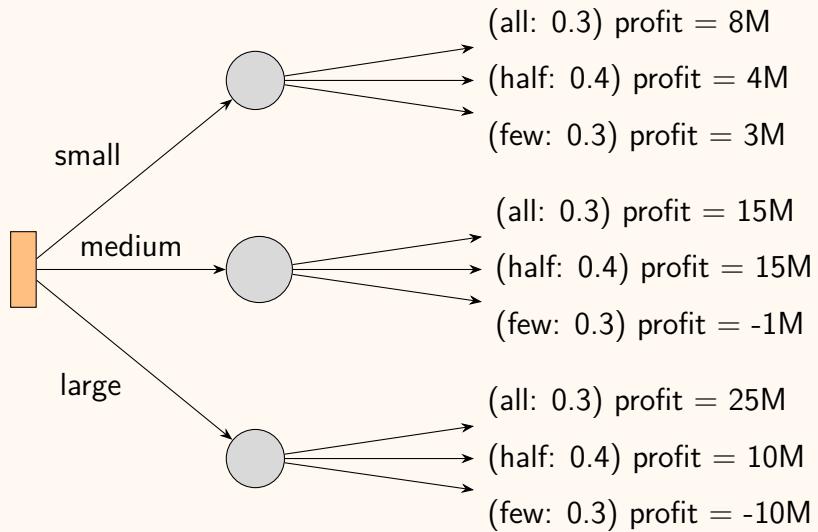
ความแตกต่างสำคัญระหว่างตัวเลือกและเหตุการณ์คือ ตัวเลือกเป็นสิ่งที่เรากำหนดให้เป็นขึ้นกับข้อมูลที่มี ในขณะที่เหตุการณ์คือสิ่งที่เราควบคุมไม่ได้ ยิ่งเฉพาะในการตัดสินใจภายในตัวเอง ความเสี่ยงนั้น เหตุการณ์จะเป็นสิ่งที่มีค่าความน่าจะเป็นมาเป็นตัวควบคุมโอกาสที่จะเกิด

ในหัวข้อที่ผ่านมา เป็นพื้นฐานการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและค่าคาดหวังโดยใช้แผนภาพต้นไม้เป็นเครื่องมือช่วยให้เราคำนวณได้อย่างเป็นระบบมากขึ้น ซึ่งมีเพียงแค่ลำดับของเหตุการณ์ที่เข้ามาพิจารณาเท่านั้น ยังไม่มีตัวเลือกอยู่ในแผนภาพต้นไม้

เมื่อมีตัวเลือกเข้ามาเกี่ยวข้อง แผนภาพต้นไม้จะไม่สามารถคิดด้วยหลักความน่าจะเป็นของทั้งแผนภาพได้ แต่จะใช้วิธีการตัดสินใจเลือกตัวเลือกໄล'ลำดับไปจากปลายกิ่งไปราก (ขวาไปซ้าย) โดยการเลือกทางเลือกที่ให้ค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่มากที่สุด

ตัวอย่าง 2.5.1: การตัดสินใจโดยใช้ต้นไม้การตัดสินใจ

จากเหตุการณ์ในตัวอย่าง 2.1.1 เราจะสามารถคาดเดาผลลัพธ์ต่อไปได้ดังนี้



โดยที่โอกาสที่จะขายได้หมดมี 0.3 ในขณะที่ขายได้ครึ่งหนึ่งของงานจะมีโอกาสที่ 0.4 และขายได้เพียง 10% ของงานจะมีโอกาสอยู่ที่ 0.3 จงเขียนขั้นตอนการตัดสินใจโดยใช้แผนภาพต้นไม้การตัดสินใจ (แบ่งส่วนแผนภาพต้นไม้ความน่าจะเป็นขึ้นมา ก่อนเพื่อหาค่าคาดหวัง และค่าอยตัดสินใจด้วยค่าคาดหวังของแต่ละต้นไม้ย่อย)

ตัวอย่าง 2.5.2: การตัดสินใจโดยใช้ต้นไม้การตัดสินใจ 2

บริษัท ABC กำลังพิจารณาว่าควรจะเปิดตัวผลิตภัณฑ์ใหม่เข้าสู่ตลาดหรือไม่ โดยมีทางเลือกหลายขั้นตอนซึ่งกันที่ต้องประเมินด้านทุน ความไม่แน่นอน และผลตอบแทนที่อาจเกิดขึ้น ดังนี้:

- ◊ **ขั้นตอนที่ 1: การทดสอบผลิตภัณฑ์**

- บริษัทสามารถเลือกที่จะทำการทดสอบผลิตภัณฑ์ก่อน โดยมีโอกาส:
 - * 80% ที่ผลิตภัณฑ์ **ผ่าน** การทดสอบ
 - * 20% ที่ผลิตภัณฑ์ **ไม่ผ่าน** การทดสอบ และบริษัทจะขาดทุนทันที 100,000 บาท
- หากผ่านการทดสอบ จะเข้าสู่ขั้นตอนถัดไป คือการทดสอบตลาด

- ◊ **ขั้นตอนที่ 2: การทดสอบตลาด**

- ผลิตภัณฑ์ที่ผ่านการทดสอบ จะถูกนำไปทดสอบตลาดกับกลุ่มลูกค้าตัวอย่าง โดยมีโอกาส:
 - * 90% ที่ตลาด **ยอมรับ** ผลิตภัณฑ์ใหม่
 - * 10% ที่ตลาด **ไม่ยอมรับ** และบริษัทจะขาดทุน 250,000 บาท
- หากตลาดยอมรับ จะเข้าสู่การตัดสินใจว่าจะนำผลิตภัณฑ์เข้าสู่ตลาดหรือไม่

- ◊ **ขั้นตอนที่ 3: การตัดสินใจเปิดตัวผลิตภัณฑ์**

1. หากเปิดตัวผลิตภัณฑ์ ความสำเร็จในตลาดมีระดับและผลตอบแทนต่างกัน:

- ยอดขายสูง (40%) → กำไร 1,450,000 บาท
- ยอดขายปานกลาง (40%) → กำไร 450,000 บาท
- ยอดขายต่ำ (20%) → ขาดทุน 150,000 บาท

2. หากไม่เปิดตัว จะยอมขาดทุนค่าทดสอบตลาด 250,000 บาท

- ◊ **ทางเลือกทางลัด: ขั้นการทดสอบผลิตภัณฑ์และเข้าสู่ตลาดทันที**

- หากบริษัทเลือกขั้นตอนและนำผลิตภัณฑ์เข้าสู่ตลาดทันที:
 - * ยอดขายสูง (10%) → กำไร 1,700,000 บาท
 - * ยอดขายปานกลาง (40%) → กำไร 700,000 บาท
 - * ยอดขายต่ำ (50%) → กำไร 100,000 บาท

บริษัทควรดำเนินการตามทางเลือกใด เพื่อให้ได้ ผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด ภายใต้ต้นทุนและความไม่แน่นอนในแต่ละขั้นตอน?

2.6 การใช้โปรแกรม QM for Windows

Assignment (need revise)

PART A:

หลังจากบริษัท ABC Furniture ได้ใช้การวิเคราะห์เชิงเส้นในการวางแผนการผลิตช่วงไตรมาสก่อนหน้า บริษัทได้รับผลลัพธ์ที่ดีในช่วงแรก แต่ปัจจุบันกลับพบว่าไม่สามารถเพิ่งพาราเบนจำลองเดิมได้ตลอดเวลา เนื่องจากมีความไม่แน่นอนในตลาดสูงขึ้นเรื่อยๆ เช่น ราคาวัสดุดิบผันผวน การแข่งขันสูง และความต้องการของลูกค้าที่แปรเปลี่ยนตลอด

สถานการณ์ทางเลือก: สำหรับไตรมาสต่อไป ฝ่ายผลิตเสนอ 3 กลยุทธ์ให้ฝ่ายบริหารพิจารณา:

- ◊ กลยุทธ์ A: เพิ่มกำลังผลิต “โต้ตอบงาน” ให้มากที่สุด โดยลดสัดส่วนตู้เก็บเอกสารลง
- ◊ กลยุทธ์ B: เพิ่มกำลังผลิต “ตู้เก็บเอกสาร” ให้มากที่สุด โดยลดสัดส่วนโต้ตอบงานลง
- ◊ กลยุทธ์ C: กระจายการผลิตแบบสมดุลระหว่างทั้งสองประเภท

สถานการณ์ตลาด (States of Nature): ฝ่ายการตลาดระบุว่าสถานการณ์ตลาดอาจเป็นไปได้ 3 แบบในไตรมาสหน้า:

- ◊ สถานการณ์ 1 (S1) — โต้ตอบ: โต้ตอบงานขายดีมาก ตู้ขายได้น้อย
- ◊ สถานการณ์ 2 (S2) — สมดุล: สินค้าทั้งสองขายได้ใกล้เคียงกัน
- ◊ สถานการณ์ 3 (S3) — ตู้บูม: ตู้เอกสารขายดีมาก โต้ตอบขายได้น้อย

ฝ่ายบริหารต้องการทราบว่า ภายใต้แต่ละกลยุทธ์นั้น ถ้าเกิดสถานการณ์ตลาดแต่ละแบบ จะได้กำไรเท่าไร โดยฝ่ายวิเคราะห์ประเมินกำไร (หน่วย: พันบาท) ดังตาราง:

กลยุทธ์การผลิต	S1: โต้ตอบ	S2: สมดุล	S3: ตู้บูม
A (เน้นโต้ตอบ)	1,500	900	100
B (เน้นตู้)	200	800	1,400
C (สมดุล)	800	850	700

คำสั่ง:

1. วิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน โดยใช้เกณฑ์ต่อไปนี้:

- ◊ Maximax Criterion
- ◊ Maximin Criterion
- ◊ Laplace Criterion
- ◊ Hurwicz Criterion ($\text{ใช้ } \alpha = 0.6$)
- ◊ Minimax Regret Criterion

2. แต่ละเกณฑ์แนะนำกลยุทธ์ใด? อธิบายว่าแต่ละเกณฑ์สะท้อนทัศนคติความเสี่ยงแบบใด?

3. ใช้โปรแกรม QM for Windows เพื่อคำนวณและตรวจสอบผลลัพธ์ พร้อมแนบภาพประกอบผลลัพธ์

PART B:

หลังจากฝ่ายบริหารบริษัท ABC Furniture ได้พิจารณาตารางผลตอบแทนจากกลยุทธ์ต่าง ๆ แล้ว ยังคงมีความลังเลเนื่องจากบริษัทไม่สามารถคาดการณ์สถานการณ์ตลาดล่วงหน้าได้อย่างแม่นยำ

คุณสมชายจึงเสนอแนวคิดว่า “หากบริษัทจ้างนักวิเคราะห์ตลาดมืออาชีพมาช่วยประเมินแนวโน้มตลาดก่อนได้หรือไม่?” ซึ่งจะมีค่าใช้จ่ายในการจ้างทีมวิเคราะห์ภายนอกอยู่ที่ 150,000 บาท ทีมวิเคราะห์จะให้ผลลัพธ์เป็น สัญญาณตลาดล่วงหน้า (Market Signal) ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบคือ:

- ◊ **สัญญาณบวก (Positive Signal):** แสดงว่าตลาดมีแนวโน้มดี
- ◊ **สัญญาณลบ (Negative Signal):** แสดงว่าตลาดมีแนวโน้มผันผวนหรืออุดถอย

บริษัทสามารถเลือกที่จะ “เปิดกลยุทธ์ A, B หรือ C” หลังจากได้รับสัญญาณจากนักวิเคราะห์ก็ได้ หรือจะตัดสินใจ “ไม่เปลี่ยนแผน” ก็ได้เช่นกัน

ข้อมูลความแม่นยำของนักวิเคราะห์ตลาด จากประวัติ:

- ◊ หากสถานการณ์ตลาดเป็น S1 (เต็ะบูม) → ให้สัญญาณบวก 80%, สัญญาณลบ 20%
- ◊ หากสถานการณ์ตลาดเป็น S2 (สมดุล) → ให้สัญญาณบวก 50%, สัญญาณลบ 50%
- ◊ หากสถานการณ์ตลาดเป็น S3 (ตื้บบูม) → ให้สัญญาณบวก 30%, สัญญาณลบ 70%

ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานการณ์ตลาด (ตามฝ่ายการตลาดประเมิน): S1: 25%, S2: 50%, S3: 25%

คำสั่ง:

1. วาดแผนภาพ Decision Tree ที่เริ่มจากทางเลือก “จ้างนักวิเคราะห์” หรือ “ไม่จ้าง”
2. แสดงการแตกเหตุการณ์ตามลำดับ: สัญญาณ สถานการณ์ตลาด กลยุทธ์การผลิต ผลตอบแทนสุทธิ (หักค่าจ้าง)
3. คำนวณ Expected Monetary Value (EMV) ของแต่ละทางเลือก (รวมต้นทุน 150,000 กรณีที่จ้าง)
4. สร้างโมเดลนี้ใน QM for Windows เพื่อยืนยันผลลัพธ์ พร้อมแนบภาพผลลัพธ์
5. คุณคิดว่าการจ้างนักวิเคราะห์มีความคุ้มค่าหรือไม่?

CHAPTER 3

ทฤษฎีการจำลองสถานการณ์ (Simulation)

โจทย์ธุรกิจ: ความไม่แน่นอนในกระบวนการผลิตของ ABC Furniture

ข้อความจากคุณสมชาย

"หลังจากที่เราได้วางแผนการผลิตและกลยุทธ์รับมือกับตลาดที่ไม่แน่นอนผ่านแบบจำลองเชิงเส้นและทฤษฎีการตัดสินใจเรียบร้อยแล้ว แต่สิ่งที่เรายังไม่สามารถคาดการณ์ได้แน่นอน คือเวลาที่ต้องใช้ในแต่ละขั้นตอนของการกระบวนการผลิตจริง ๆ บางครั้งแรงงานล้าบวัย บางครั้งเครื่องจักรเสีย หรือบางสัปดาห์มีคำสั่งซื้อเร่งด่วนแทรกเข้ามา เราจึงอยากรู้ว่า การจำลองสถานการณ์เหล่านี้ เพื่อศูนย์化 ผลกระทบต่อการผลิตและการจัดส่งอย่างไร และควรจะปรับการจัดการโรงงานอย่างไรดี"

บริษัท ABC Furniture กำลังเผชิญกับความไม่แน่นอนใน ระยะเวลาการผลิตแต่ละชิ้นงาน และ ปริมาณคำสั่งซื้อที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลา โดยเฉพาะในช่วงโภตโนมัชันและเทศกาลยอดนิยม ซึ่งอาจทำให้กระบวนการผลิตไม่สามารถดำเนินไปตามแผนได้

เพื่อรับรับเหตุการณ์ที่คาดเดาไม่ได้เหล่านี้ ผู้จัดการฝ่ายผลิตต้องการเครื่องมือในการ "ทดลอง" และ "คาดการณ์" ของทางเลือกที่เป็นไปได้โดยไม่ต้องเสียเงินในโลภธุรกิจจริง ซึ่งนำไปสู่แนวคิดของ การจำลองสถานการณ์ (Simulation) ที่จะช่วยให้บริษัทสามารถวิเคราะห์ผลกระทบจากตัวแปรสุ่มต่าง ๆ ต่อกระบวนการผลิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำถามชวนคิด:

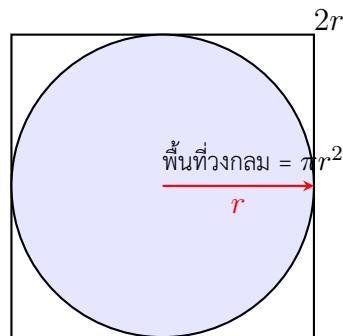
- ในสถานการณ์แบบนี้ คุณคิดว่า "สูตรคำนวนตายตัว" ที่เคยใช้ในบทก่อน ๆ ยังเหมาะสมอยู่หรือไม่?
- คุณจะเก็บข้อมูลอะไรเพื่อใช้ในการจำลองเหตุการณ์ในกระบวนการผลิต?
- คุณจะจำลองขั้นตอนใดในกระบวนการผลิตก่อน เช่น เวลาในการประกอบสินค้า การขนส่ง หรือการเตรียมวัสดุ?
- ถ้าคุณลอง "สุมเหตุการณ์" ต่าง ๆ และพบว่าเกิดความล่าช้าเป็นประจำ คุณจะวางแผนการผลิตใหม่อย่างไร?
- ถ้าต้องเขียนโปรแกรมจำลองขั้นตอนการผลิต คุณจะออกแบบแบบลำดับเหตุการณ์หรือเนื่องไปไว้อย่างไร?
- ผลลัพธ์ของการจำลองแบบใดที่จะช่วยให้ฝ่ายผลิตวางแผนจัดการลังคนและเครื่องจักรได้ดีที่สุด?

3.1 แนวคิดเบื้องต้นของการจำลอง

- ◊ บางสถานการณ์อาจไม่สามารถเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ตัวแบบเพื่ออธิบายสถานการณ์ได้ เพราะระบบมีความซับซ้อนมากเกินไปหรือมีเงื่อนไขบางประการที่ทำให้ไม่สามารถใช้ตัวแบบที่มีอยู่แล้วได้
- ◊ ทำให้ต้องสุ่มภายใต้ข้อมูลที่มีเพื่อประมาณค่าจากการทดลองสุ่มหลาย ๆ การทดลอง
- ◊ ในหัวข้อกรณีตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไป เป็นตัวอย่างพื้นฐานที่แสดงให้เห็นว่าการทำการทดลองสุ่มโดยที่จำลองสถานการณ์ให้เหมือน (หรือคล้าย) เหตุการณ์จริงจะสามารถประมาณค่าผลเฉลยให้ใกล้เคียงค่าจริงได้

3.1.1 กรณีตัวอย่าง: การหาค่า π

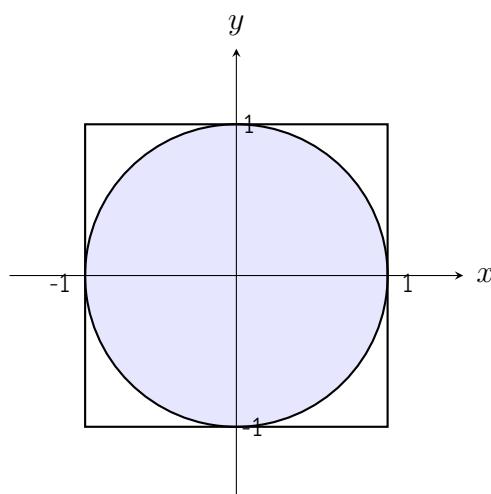
จากชุดความรู้เบื้องต้นที่เรามีคือ $\pi = \frac{\pi r^2}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{(2r)^2} = 4 \left(\frac{\text{พื้นที่วงกลม}}{\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมจตุรัสที่แบบวงกลม}} \right)$



$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยม} = (2r)^2 = 4r^2$$

แต่เราไม่รู้ว่าค่า π คือเท่าไหร่ เราจึงออกแบบการทดลองที่ถูกออกแบบให้อธิบายชุดความรู้ที่เรามีได้ ซึ่งก็คือการสุ่มโยนจุดเข้าไปในรูปสี่เหลี่ยม แล้วหาอัตราส่วนของจำนวนจุดที่อยู่ภายในวงกลม (แสดงถึงพื้นที่วงกลม) ต่อจำนวนจุดทั้งหมดที่โยนเข้าไป (แสดงถึงพื้นที่สี่เหลี่ยมจตุรัส) และนำอัตราส่วนที่ได้มาคูณกับ 4 จะได้ค่าประมาณของ π

เพื่อให้การสุ่มสามารถควบคุมและวัดผลได้ เราจึงต้องใช้ระบบพิกัดจากเข้ามาช่วยในการแสดงผล โดยที่เราจะให้จุดศูนย์กลางของวงกลมวางที่จุดกำเนิด และรัศมีของวงกลมมีค่าเท่ากับ $r = 1$



3.1. แนวคิดเบื้องต้นของการจำลอง

และเงื่อนไขการสุ่มจุด (x, y) เป็นไปดังนี้

- ◊ การสุ่มเป็นแบบ uniform ก้าวคือทุกตำแหน่งมีโอกาสเท่ากัน
- ◊ สุ่ม x และ y อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ เพื่อให้มั่นใจว่าอยู่ภายในสี่เหลี่ยมจตุรัส

ทั้งนี้ การตรวจสอบว่าจุด (x, y) อยู่ในวงกลมหรือไม่ เราสามารถเช็คได้ด้วยเงื่อนไขว่า

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

ซึ่งเราสามารถใช้ Excel ช่วยในการสุ่มได้ดังนี้

- ◊ Column A: ครั้งที่ทดลอง
- ◊ Column B-C: สุ่ม x และ y ด้วยคำสั่ง =RANDARRAY(จำนวนครั้งที่ทดลอง,2,-1,1,FALSE)
- ◊ Column D: เช็คว่าจุดอยู่ในวงกลมหรือไม่โดยใช้ ColumnB^2 + ColumnC^2 <= 1
- ◊ Column E: นับจำนวนจุดที่อยู่ในวงกลมตั้งแต่การทดลองที่ 1 จนถึงการทดลองปัจจุบัน
- ◊ Column F: หาค่า $4 * \text{oัตราส่วน}$

ตัวอย่าง 5 แฉวแรกและ 5 แฉวสุดท้ายของตารางกรณีสุ่ม 30000 ครั้ง:

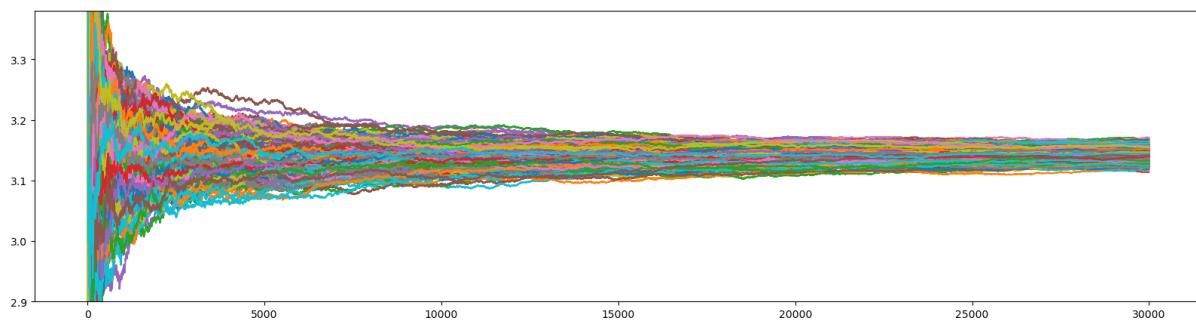
A	B	C	D	E	F
ครั้งที่สุ่ม	สุ่ม x	สุ่ม y	$x^2+y^2\leq 1$	num in circle	4*ratio
1	-0.10709	-0.4236	TRUE	1	4
2	-0.49781	0.11569	TRUE	2	4
3	0.56874	-0.82837	FALSE	2	2.66667
4	-0.79338	-0.63925	FALSE	2	2
5	0.32044	-0.98582	FALSE	2	1.6
A	B	C	D	E	F
29996	-0.80188	-0.40379	TRUE	23565	3.14242
29997	0.93949	0.58746	FALSE	23565	3.14231
29998	-0.37564	0.87125	TRUE	23566	3.14234
29999	-0.41641	-0.6536	TRUE	23567	3.14237
30000	-0.27141	-0.63152	TRUE	23568	3.1424

และเมื่อลองทำการพล็อตกราฟของค่าที่เราสนใจ (Column F) จะได้ดังรูป

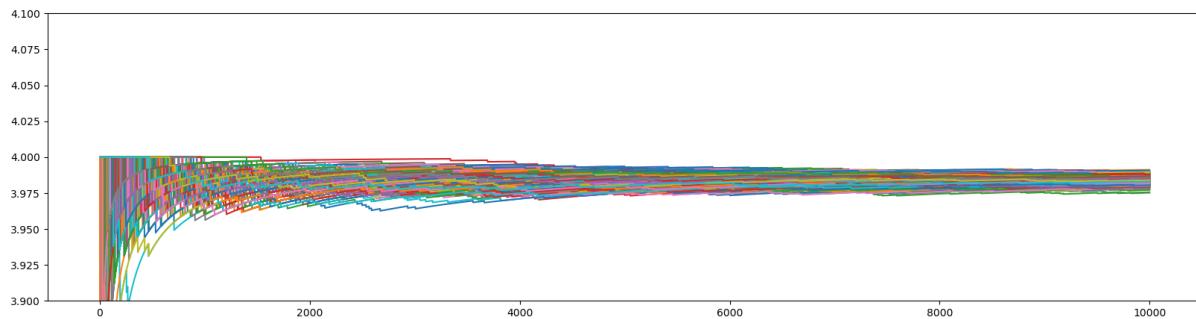


ซึ่งจะเห็นว่ามีการทำการสุ่มมากขึ้นเท่าไหร่ ค่าที่เราตั้งไว้ (4 เท่าของอัตราส่วน) เพื่อวัดสิ่งที่เรารอยากค้นหา (ค่า π) จะยิงเข้าใกล้ค่าที่เรารอยากค้นหาดังกล่าวมากขึ้นเรื่อยๆ

สามารถออกแบบการทดลองในทำนองเดียวกันคือทำการทดลองสุ่ม 30000 จุดหลาย ๆ รอบแล้วหาค่าเฉลี่ยค่าของรอบสุ่มที่ 30000 ของทุกชุดการทดลองก็ได้ เช่นกันโดยรูปด้านล่างคือตัวอย่างการทดลองที่ทำการทดลอง 500 รอบ ซึ่งได้ค่าเฉลี่ยของค่าอัตราส่วนรอบที่ 30000 อยู่ที่ 3.141638 จากค่าประมาณจริง ๆ ของ $\pi \approx 3.1415926$ (ถ้าทำใน Excel อาจจะเจอปัญหาเรื่อง memory ไม่พอ แต่จะมีความแม่นยำกว่าการทดลองรอบเดียว เลยก็ต้องใช้เครื่องมือเช่นเขียน Python)



ทั้งนี้ จะเห็นว่าเรามีการกำหนดเงื่อนไขการสุ่ม ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญที่สุดของการจำลองสถานการณ์ ตัวอย่างเช่นกรณีนี้ก็คือต้องสุ่มแบบ Uniform เนื่องจากลักษณะการคำนวณอัตราส่วนของพื้นที่นั้นมีสมมติฐานว่าทุกจุดพื้นที่จะต้องมีความสำคัญเท่ากัน ไม่มีจุดใดจุดหนึ่งที่มีโอกาสมากกว่าจุดอื่นเพื่อไม่ให้เกิดอคติ (bias) ใน การสุ่ม เช่นในตัวอย่างเดิม ถ้าเราเปลี่ยนสมมติฐานตั้งต้นให้สุ่มแบบ Normal Distribution ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ 0.3 ที่จะมีโอกาสสุ่มได้บริเวณจุดกำเนิดมากกว่าจุดขอบ ๆ ซึ่งจะแสดงพฤติกรรมว่าจุดของวงกลมมีโอกาสอยกว่าจุดในวงกลม จะได้ว่าผลการประมาณค่าเปลี่ยนเป็น 3.9844 แทนที่จะเข้าใกล้ค่า π ตามรูป



หมายเหตุ (สำหรับอ่านเพิ่มเติม)

ตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างที่มีทฤษฎีเบื้องหลังและสามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันว่าผลที่ได้จากการทดลองเป็นไปตามทฤษฎี (อาจมีคลาดเคลื่อนเล็กน้อย) เนื่องจากเป็นสถานการณ์ที่สามารถอธิบายได้ด้วยการแยกแจงความน่าจะเป็นที่ไม่ซับซ้อน (ซึ่งไม่ค่อยพบในโลกจริงที่มักจะเป็นระบบที่ซับซ้อน)

3.1. แนวคิดเบื้องต้นของการจำลอง

กรณีที่ X, Y แจกแจงแบบคงที่

Proof. กำหนดให้ X, Y เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ ซึ่งแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform) บนช่วง $[-1, 1]$ ดังนั้นคู่ (X, Y) จะกระจายอยู่ทั่วพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว 2 หน่วย และมีพื้นที่รวมเท่ากับ 4 หน่วยตาราง นิยามเหตุการณ์ A ว่าเป็นเหตุการณ์ที่จุด (X, Y) ตกอยู่ภายในวงกลมรัศมี 1 ซึ่งมีสมการคือ $X^2 + Y^2 \leq 1$ จะได้ว่า

$$P((X, Y) \in A) = \frac{\text{พื้นที่ของวงกลม}}{\text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

เมื่อสุ่มจุด N จุดจากการแจกแจงนี้ ให้ S เป็นจำนวนจุดที่ตกในวงกลม จะได้ว่า $S = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{(X_i, Y_i) \in A}$ ดังนั้นสัดส่วนของจุดที่อยู่ในวงกลมคือ $Z = \frac{S}{N}$ ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม และค่าคาดหมายคือ:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(X_i, Y_i) \in A}\right] = P((X, Y) \in A) = \frac{\pi}{4}$$

นั่นคือ ค่าคาดหวังของสัดส่วนของจุดที่อยู่ในวงกลมจะมีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ เสมอ โดยไม่ขึ้นกับจำนวนจุด N □

กรณีที่ $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 0.09)$ (ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma = 0.3$)

Proof. เนื่องจากบทพิสูจน์ในส่วนของตัวแปรสุ่ม Z ไม่ขึ้นกับการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X, Y ดังนั้น เราจึงยังสามารถได้ผลว่า

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\frac{S}{N}\right] = P((X, Y) \in A)$$

เหลือแค่หาค่าความน่าจะเป็น $P((X, Y) \in A) = P(X^2 + Y^2 \leq 1)$ พิจารณาตัวแปรสุ่ม $R^2 = X^2 + Y^2$ ซึ่งจากนิยามของการแจกแจง Chi-square (ผลรวมกำลังสองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน) จะได้ว่า

$$\frac{R^2}{0.09} = \frac{X^2 + Y^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

$$\text{ดังนั้น } P(R^2 \leq 1) = P\left(\chi^2(2) \leq \frac{1}{0.09}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2 \times 0.09}\right)$$

เพราะฉะนั้น $E[4Z] = 4P(R^2 \leq 1) = 4\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2 \times 0.09}\right)\right) \approx 3.9845$ □

3.2 ตัวแบบและขั้นตอนการจำลองสถานการณ์ (Simulation Process)

จากตัวอย่างที่แล้ว เราได้เห็นกระบวนการที่สำคัญของการจำลองสถานการณ์ (Simulation) ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้ ตั้งแต่การกำหนดวัตถุประสงค์, การเก็บข้อมูล, การเลือกตัวแบบ, การสุมตัวอย่าง และการวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง ในหัวข้อนี้เราจะสรุปขั้นตอนที่จำเป็นทั้งหมดในการจำลองสถานการณ์ทั่วไป ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ทางธุรกิจต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบ

กระบวนการในการจำลองสถานการณ์ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ ดังนี้:

1. กำหนดวัตถุประสงค์ของการจำลอง (Define Simulation Objective)

ขั้นตอนแรกคือการระบุให้ชัดเจนว่าการจำลองครั้งนี้มีเป้าหมายอะไร เช่น บริษัท ABC Furniture ต้องการจำลองระยะเวลาในการผลิตสินค้าเพื่อดูว่าจะส่งผลต่อการส่งมอบสินค้าได้ทันตามกำหนดหรือไม่

2. กำหนดตัวแบบและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง (Identify the Model and Relevant Variables)

หลังจากรู้วัตถุประสงค์แล้ว เราต้องกำหนดว่าอะไรคือสิ่งที่เราจำลอง ในทางธุรกิจอาจมีตัวแปรเช่น เวลา มาตรฐานของลูกค้า, ระยะเวลาการผลิตสินค้า, ระยะเวลาการให้บริการ, หรือแม้กระทั่งปริมาณความต้องการของตลาดในแต่ละช่วงเวลา เป็นต้น

3. เก็บรวบรวมข้อมูลจากระบบจริง (Data Collection)

เมื่อระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องแล้ว ขั้นตอนถัดไปคือการเก็บข้อมูลเพื่อระบุลักษณะทางสถิติของตัวแปรนั้น ๆ เช่น การเก็บข้อมูลเวลาการผลิตจริงย้อนหลังหลายสัปดาห์ หรือข้อมูลพฤติกรรมของลูกค้าที่เกิดขึ้นจริงในอดีต

4. เลือกและสร้างแบบจำลองความน่าจะเป็น (Select and Build Probability Models)

หลังจากเก็บข้อมูล เราจึงนำข้อมูลนั้นมาวิเคราะห์เพื่อระบุการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสม เช่น เวลาการผลิตอาจเป็นแบบ Normal หรือ Exponential, จำนวนลูกค้าที่เข้าร้านอาจมีการแจกแจงแบบ Poisson หรือแบบ Uniform ดังในตัวอย่างที่ผ่านมาที่เราใช้ Uniform ในการประมาณค่า π

5. กำหนดเงื่อนไขการสุ่มและกฎของระบบ (Define Randomness Conditions and System Rules)

ขั้นตอนนี้คือการออกแบบกลไกของการจำลอง เช่น จะสุ่มตัวแปรต่าง ๆ อย่างไร ต้องใช้เครื่องมืออะไร มีเงื่อนไขและข้อจำกัดของระบบอย่างไรบ้าง เช่น บริษัท ABC Furniture อาจตั้งเงื่อนไขว่าหากการผลิตล่าช้ากว่าเวลาที่กำหนดจะส่งผลต่อกำหนดการจัดส่งสินค้าอย่างไร เป็นต้น

6. ดำเนินการจำลองสถานการณ์ (Perform Simulation Runs)

เมื่อโมเดลพร้อมแล้ว จะต้องดำเนินการจำลองซ้ำหลายครั้ง (replications) เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่สะท้อนพฤติกรรมระบบจริงอย่างถูกต้องชัดเจน โดยอาจดำเนินการซ้ำหลายร้อยหรือหลายพันครั้งขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา

7. วิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลอง (Analyze Simulation Results)

หลังจากที่ทำการทดลองจำลองซ้ำหลาย ๆ รอบแล้ว เราจะนำผลลัพธ์ที่ได้มาวิเคราะห์เชิงสถิติ เช่น การหาค่าเฉลี่ย, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน, ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจ เช่น โอกาสที่สินค้าไม่สามารถส่งมอบทันเวลา หรือเวลารอคอยเฉลี่ยของลูกค้า เป็นต้น

8. ตรวจสอบความถูกต้องและความแม่นยำของตัวแบบ (Validate and Verify the Model)

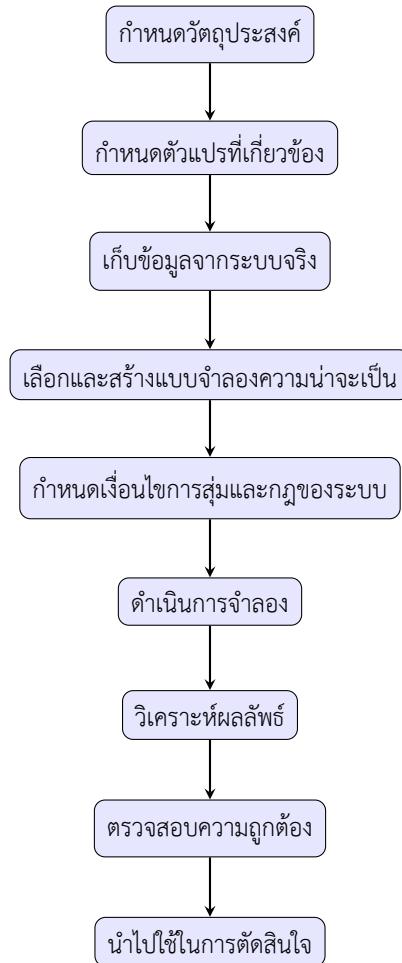
ก่อนนำไปใช้งานจริง เราต้องตรวจสอบว่าผลลัพธ์จากแบบจำลองนั้นตรงกับสิ่งที่เกิดขึ้นในระบบจริงมากแค่ไหน หาก

ผลที่ได้จากการตัวอย่างแบบ Monte Carlo มีความคลาดเคลื่อนสูง เราต้องกลับไปตรวจสอบข้อมูลหรือโมเดลที่ใช้ใหม่

9. การนำผลลัพธ์ไปประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติ (Implementation and Decision Making)

ขั้นตอนสุดท้ายคือการนำผลที่ได้จาก Simulation ไปใช้ในการตัดสินใจจริงในธุรกิจ เช่น บริษัท ABC Furniture อาจนำผลการจำลองไปกำหนดแผนการผลิตและจัดการทรัพยากรไม่เพื่อลดความเสี่ยงในการผลิตและเพิ่มประสิทธิภาพของระบบ

กระบวนการทั้งหมดนี้สามารถสรุปออกมาในลักษณะของแผนภาพดังนี้



โดยในหัวข้อถัดไป เราจะศึกษาและเจาะลึกเทคนิคการสุ่มแบบ Monte Carlo ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของการบวนการจำลองสถานการณ์ในธุรกิจ เพื่อให้เห็นภาพการประยุกต์ใช้กระบวนการจำลองได้อย่างเป็นระบบยิ่งขึ้น

3.3 การสุ่มตัวอย่างแบบ Monte Carlo ใน การจำลองสถานการณ์ในธุรกิจ

การจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) เป็นเทคนิคที่ใช้วิธีการสุ่มตัวแปรเข้ามาช่วยในการประเมินผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นภายใต้สภาวะที่ไม่แน่นอน เทคนิคนี้มีรากฐานจากแนวคิดในทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อปัญหาที่ต้องการศึกษามีความซับซ้อนเกินกว่าจะหาคำตอบได้ด้วยวิเคราะห์เชิงพีชคณิตแบบตร�

แก่นของอนติคาโรโลคือการ “สุ่มค่าตัวแปรตามการแจกแจงที่กำหนด” เพื่อนำไปแทนค่าในโมเดล แล้วคำนวณผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น จากนั้นทำซ้ำการสุ่มจำนวนมากเพื่อดูพฤติกรรมรวมของผลลัพธ์ เช่น คาดหมาย ค่ามากสุด ค่าน้อยสุด หรือค่าที่อยู่ในช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยตัวอย่างการแจกแจงที่นิยมใช้งานกันอยู่แล้วมีดังนี้

- ◊ ถ้าค่าใช้จ่ายในอนาคตมีความไม่แน่นอน อาจสุ่มค่าใช้จ่ายจากการแจกแจง Normal หรือ Triangular
- ◊ ถ้าความต้องการสินค้าในอนาคตขึ้นอยู่กับพฤติกรรมผู้บริโภค อาจสุ่มจำนวนจากการแจกแจง Poisson
- ◊ ถ้าความสำเร็จของกระบวนการหรือขั้นตอนมีแค่ 2 ผลลัพธ์ (สำเร็จ/ล้มเหลว ในภาษาของการแจกแจงความน่าจะเป็น) อาจใช้การแจกแจงแบบ Bernoulli หรือ Binomial
- ◊ ถ้าจำนวนลูกค้าในช่วงเวลาหนึ่งมีความแปรผัน อาจใช้การแจกแจง Poisson เพื่อสุ่มจำนวนลูกค้า
- ◊ ถ้าเวลาระหว่างลูกค้ารายถัดไปมีลักษณะสุ่มและต่อเนื่อง อาจใช้การแจกแจง Exponential เพื่อสุ่มระยะเวลาการรอคิวค้าเข้าร้าน

ซึ่งเป็นขั้นตอนที่สำคัญมาก ๆ และการเก็บข้อมูลและลายละเอียดพฤติกรรมทางธุรกิจให้ละเอียดพอจะช่วยทำให้เราเลือกการแจกแจงของตัวแปรได้แม่นยำและใกล้เคียงความเป็นจริงได้ (อาจจะใช้เรื่องการทำ goodness of fit test มาช่วยตรวจสอบในขั้นตอนการตรวจสอบได้)

5 ขั้นตอนการทำ Monte Carlo Simulation

1. กำหนดการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสำคัญ

ระบุ ตัวแปรสำคัญ ที่ต้องการจำลอง เช่น ความต้องการสินค้า เวลารอ จำนวนลูกค้าในแต่ละวัน ฯลฯ จากนั้นคำนวณความน่าจะเป็น โดยใช้ข้อมูลในอดีต เช่น ความถี่ของแต่ละเหตุการณ์หารด้วยความถี่รวมทั้งหมด

2. สร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Probability)

สร้างคอลัมน์ความน่าจะเป็นสะสม โดยการบวกค่าความน่าจะเป็นในขั้นก่อนหน้าแบบสะสมต่อเนื่อง เพื่อใช้เป็นขอบเขตในการแบ่งกับช่วงของเลขสุ่ม

3. กำหนดช่วงของเลขสุ่ม (Random Number Interval)

แปลงความน่าจะเป็นสะสมให้เป็นช่วงของเลขสุ่ม เช่น 00–99 หรือ 000–999 โดยการจับคู่ค่าที่เป็นไปได้กับช่วงของตัวเลข เช่น ความน่าจะเป็น 0.2 อาจแทนด้วยเลขสุ่ม 00–19

4. สร้างเลขสุ่ม (Generate Random Numbers)

สร้างเลขสุ่มจำนวนหนึ่งโดยใช้เครื่องมือ เช่น ตารางเลขสุ่ม Excel หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อสุ่มค่าที่จะนำไปใช้ในการทดลองจำลองแต่ละรอบ

5. จำลองการทดลองหลายรอบ (Simulate a Series of Trials)

ทำการจำลองสถานการณ์โดยใช้เลขสุ่มในแต่ละรอบ เพื่อรับค่าที่เกิดขึ้น แล้วนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองไปวิเคราะห์ เช่น หาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน หรือพฤติกรรมของระบบในระยะยาว

ตัวอย่าง 3.3.1: การจำลองความต้องการยางรถยนต์

บริษัท ไทยไทร์ จำกัด เป็นผู้จัดจำหน่ายยางรถยนต์หลายประเภทในประเทศไทย โดยมียางรถยนต์รุ่นยอดนิยมรุ่นหนึ่งที่มียอดขายสูงเป็นพิเศษ ฝ่ายคลังสินค้าสังเกตว่าต้นทุนจากการเก็บรักษาสินค้าคงคลัง (Inventory Cost) ของยางรุ่นนี้เพิ่มสูงขึ้น และต้องการนโยบายการบริหารจัดการสินค้าคงคลังที่เหมาะสม เพื่อลดแนวโน้มความต้องการยางในแต่ละวัน ผู้จัดการจึงตัดสินใจใช้การจำลองสถานการณ์ (Simulation) เพื่อศึกษาความต้องการรายวันเป็นเวลา 10 วัน

1. จงหาค่าความต้องการยางเฉลี่ยต่อวัน (จากการแจกแจงความน่าจะเป็นดังเดิม)
2. จงหาค่าความต้องการยางเฉลี่ยต่อวันจากการจำลองสถานการณ์

จำนวนที่ต้องการต่อวัน (ล้าน)	ความถี่ (วัน)
0	10
1	20
2	40
3	60
4	40
5	30
รวม	200

ตัวอย่าง 3.3.2: Inventory Analysis Use Case

คุณภาณุเดชเป็นเจ้าของร้านเครื่องมือช่างชื่อ เจริญวัสดุภัณฑ์ ซึ่งจำหน่ายเครื่องมือช่างหลากหลายประเภท และ สินค้าที่ขายดีและทำกำไรสูงคือ สว่านไฟฟ้ารุ่น Ace คุณภาณุเดชต้องการทราบโดยบายการจัดเก็บสินค้าคงคลังที่ ตันทุนต่าที่สุดสำหรับสินค้ารุ่มนี้ แต่เนื่องจากว่าไม่สามารถควบคุมปัจจัยภายนอกบางประการได้ จึงตัดสินใจใช้วิธี การจำลองสถานการณ์ (Simulation) เพื่อช่วยในการตัดสินใจ ในปัจจุบันนี้ ตัวแปรที่ควบคุมได้ (Controllable Inputs) คือ

- ◊ จำนวนที่สั่งแต่ละครั้ง (Order Quantity) และ
- ◊ จุดสั่งซื้อใหม่ (Reorder Point)

ส่วนตัวแปรที่ควบคุมไม่ได้ (Uncontrollable Inputs) คือ

- ◊ ความต้องการต่อวัน (Daily Demand) ซึ่งมีความผันแปร
- ◊ ระยะเวลาในการจัดส่ง (Lead Time) ซึ่งมีความไม่แน่นอน เช่น กัน

คุณภาณุเดชได้เก็บข้อมูลยอดขายจริงของสว่านรุ่น Ace ตลอด 300 วัน โดยสรุปไว้ในตารางดังนี้:

ความต้องการต่อวัน (ตัว)	ความถี่ (วัน)
0	15
1	30
2	60
3	120
4	45
5	30
รวม	300

เมื่อมีการสั่งซื้อสินค้า จะต้องรอสินค้าจัดส่งภายใน 1 ถึง 3 วัน โดยมีข้อมูลสรุปจากคำสั่งซื้อ 50 รายการที่ผ่านมา ตามตารางต่อไปนี้:

ระยะเวลาในการส่งสินค้า (วัน)	ความถี่ (ครั้ง)
1	10
2	25
3	15
รวม	50

คุณภาณุเดชต้องการทดลองใช้โดยบาย สั่งซื้อเมื่อสินค้าคงเหลือน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 ชิ้น โดยสั่งครั้งละ 10 ชิ้น และกำหนดให้ในวันแรกมีสินค้าในสต็อก 10 ชิ้น

ข้อมูลต้นทุนประกอบด้วย:

- ◊ ค่าดำเนินการสั่งซื้อสินค้าแต่ละครั้ง = 10 บาท
- ◊ ค่าถือครองสินค้าต่อปี = 6 บาทต่อชิ้น หรือเท่ากับ 0.03 บาทต่อชิ้นต่อวัน (คิดจากปีละ 200 วัน)
- ◊ ค่าขาดแคลนสินค้าหรือลูกค้าไม่ได้สินค้า = 8 บาทต่อครั้ง

กำหนดให้ร้านเปิดบริการ 200 วันต่อปี และใช้ตัวเลขสุ่มต่อไปนี้ในการทดลอง:

06 63 57 94 52 69 32 30 48 88

คำถาม

- a) จงคำนวณ ตารางแจกแจงความน่าจะเป็น, ความน่าจะเป็นสะสม และช่วงตัวเลขสุ่ม (Random Number Interval) สำหรับทั้งสองตาราง
- b) 假若 noisy การสั่งซื้อที่กำหนดไว้ ($Q = 10, ROP = 5$) จงคำนวณ ต้นทุนเฉลี่ยต่อวัน ของร้านในช่วง 10 วันแรก จากการจำลองสถานการณ์

คำให้: ต้นทุนรวมต่อวัน = ค่าสั่งซื้อเฉลี่ยต่อวัน + ค่าถือครองเฉลี่ยต่อวัน + ค่าขาดแคลนเฉลี่ยต่อวัน

Assignment

...

CHAPTER 4

การวิเคราะห์เชิงมาร์คอฟ (Markov Analysis)

โจทย์ธุรกิจ

สถานการณ์ต้นบท: ความภักดีของลูกค้า (Customer Loyalty)

หลังจากผ่านสถานการณ์ความไม่แน่นอนของตลาดและการตัดสินใจเรื่องกลยุทธ์การผลิตแล้ว ฝ่ายการตลาดของบริษัท ABC Furniture สังเกตเห็นปรากฏการณ์สำคัญที่กำลังส่งผลกระทบต่อผลประกอบการของบริษัท นั่นคือเรื่องของ “การรักษาฐานลูกค้าจากการหลั่งการขาย”

คุณสมชายและฝ่ายการตลาดพบข้อมูลที่น่าสนใจว่า ในแต่ละไตรมาส ลูกค้าของบริษัทมีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในการใช้บริการหลังการขายดังนี้:

- ลูกค้าบางส่วนเป็น ลูกค้าประจำ (Loyal Customers) ที่ใช้บริการต่อเนื่องทุกไตรมาส
- ลูกค้าบางส่วนเป็น ลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย (Occasional Customers) ที่ใช้บริการบ้างไม่ใช้บริการบ้าง
- ลูกค้าบางส่วนเป็น ลูกค้าที่หายไป (Lost Customers) ซึ่งหยุดใช้บริการจากบริษัท

ฝ่ายการตลาดต้องการวิเคราะห์ว่า ในแต่ละไตรมาสนั้น ลูกค้าจะเปลี่ยนแปลงสถานะจากกลุ่มนี้ไปอีกกลุ่มนึงอย่างไร เพื่อที่จะได้วางแผนกลยุทธ์การตลาดและการบริหารความสัมพันธ์กับลูกค้า (CRM) ให้เหมาะสม

อีเมลจากคุณสมชาย:

ข้อความ

“ในช่วงไตรมาสที่ผ่านมา เราเริ่มสังเกตเห็นว่าฐานลูกค้าของเราเปลี่ยนแปลงเร็วมาก มีลูกค้าประจำหลายรายที่กลับเป็นลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย และลูกค้ากลุ่มเปลี่ยนใจง่ายจำนวนไม่น้อยที่หยุดใช้บริการเราไปเลย แต่ในทางกลับกัน ก็ยังมีลูกค้าใหม่ๆ ที่เปลี่ยนจากลูกค้าเปลี่ยนใจง่ายมาเป็นลูกค้าประจำได้ด้วย เราอยากวิเคราะห์ให้ลึกกว่านี้ว่าการเปลี่ยนสถานะของลูกค้าเกิดขึ้นในลักษณะไหน เพื่อช่วยให้เราออกแบบกลยุทธ์รักษาฐานลูกค้าได้ดีขึ้นครับ”

คำถามชวนคิดก่อนเรียน:

- จากสถานการณ์ที่คุณสมชายเล่าให้ฟัง บริษัท ABC Furniture กำลังเจอกับปัญหาลักษณะใด?
- คุณคิดว่าการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของลูกค้าในแต่ละไตรมาสเป็นเรื่องที่วิเคราะห์ได้อย่างไร?
- หากคุณจะสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมลูกค้า คุณควรเก็บข้อมูลลักษณะใดบ้าง?

4. สถานการณ์ เช่นนี้ เหตุใดบริษัทจึงควรสนใจเรื่อง “การรักษาฐานลูกค้า”มากกว่าการหาลูกค้าใหม่เพียงอย่างเดียว?
5. คุณคิดว่าการเปลี่ยนจากลูกค้าประจำไปเป็นลูกค้าเปลี่ยนใจง่าย หรือไปเป็นลูกค้าหายไป มีความสำคัญต่างกันหรือไม่ อย่างไร?

- ◊ ตัวแบบมาร์คอฟจะพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของการเปลี่ยนสถานะในอนาคตโดยอ้างอิงจากสถานะในปัจจุบัน
- ◊ เพราะฉะนั้นปัญหาที่จะใช้ตัวแบบมาร์คอฟต้องสามารถแยกจากสถานะ (state) ขาดออกจากกันได้ โดยแต่ละตัวอย่างจะต้องอยู่ในสถานะเดียวกันนี้และเพียงสถานะเดียวเท่านั้น
- ◊ ต้องมีข้อมูลเกี่ยวกับการแจกแจงความน่าจะเป็นหรืออัตราส่วนของแต่ละสถานะในปัจจุบัน
- ◊ ต้องทราบข้อมูลเรื่องความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ (transition probability)

ตัวอย่าง 4.1.1: Warm-up ความน่าจะเป็นสำหรับ Markov (ต้องใช้ความรู้เรื่อง conditional probability)

ในเหตุการณ์สมมติที่มีสถานะ 3 สถานะ สมมติเป็น s_1, s_2, s_3 โดยเราทราบความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ จากสถานะ s_1, s_2, s_3 มาเป็นสถานะ s_1 ในระยะเวลา 1 เดือนมีค่าเป็น 0.10, 0.90, 0.05 ตามลำดับ โดยในปัจจุบันเราทราบว่ามีจำนวนคนที่มีสถานะเป็น s_1, s_2, s_3 อยู่เป็น 30, 75, 40 คนตามลำดับ

- ◊ ทำไมความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากสถานะ s_1, s_2, s_3 มาเป็นสถานะ s_1 ถึงรวมกันได้ไม่เท่ากับ 1
- ◊ จงหาจำนวนคนในสถานะ s_1 ใน 1 เดือนข้างหน้า

4.2 คณิตศาสตร์สำหรับตัวแบบมาร์คอฟ

จากตัวอย่างที่ผ่านมา นั้น เป็นตัวอย่างที่ได้ทำให้เห็นแนวคิดการคิดแบบความน่าจะเป็นว่าการวิเคราะห์การเปลี่ยนสถานะ นั้น จริงๆ แล้วก็คือการหาความน่าจะเป็นของ 2 เหตุการณ์ต่อเนื่องกันในรูปแบบของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) และคุณสมบัติความน่าจะเป็นรวม (Total probability)

จำนวนคนในสถานะ s_1 ในเวลาเดียว

$$\begin{aligned} &= \text{จำนวนคนทั้งหมด} \times P(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_1 \text{ ในเวลาเดียว}) \\ &= N \cdot P(X^{(2)} = s_1) \\ &= N \cdot (P(X^{(1)} = s_1 \wedge X^{(2)} = s_1) + P(X^{(1)} = s_2 \wedge X^{(2)} = s_1) + P(X^{(1)} = s_3 \wedge X^{(2)} = s_1)) \\ &= N \cdot [P(X^{(1)} = s_1) P(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_1) \\ &\quad + P(X^{(1)} = s_2) P(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_2) \\ &\quad + P(X^{(1)} = s_3) P(X^{(2)} = s_1 | X^{(1)} = s_3)] \\ &= N \cdot [P(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1) \\ &\quad + P(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1) \\ &\quad + P(\text{สุ่มหยิบได้คน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1)] \\ &= (\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1) \\ &\quad + (\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1) \\ &\quad + (\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{จำนวนคนในสถานะ } s_1 \text{ ในเวลาถัดมา} &= (\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_1) \\ &+ (\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_1) \\ &+ (\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จำนวนคนในสถานะ } s_2 \text{ ในเวลาถัดมา} &= (\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_2) \\ &+ (\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_2) \\ &+ (\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จำนวนคนในสถานะ } s_3 \text{ ในเวลาถัดมา} &= (\text{จำนวนคน } s_1 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_1 \text{ ไปเป็น } s_3) \\ &+ (\text{จำนวนคน } s_2 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_2 \text{ ไปเป็น } s_3) \\ &+ (\text{จำนวนคน } s_3 \text{ ในเวลาเริ่ม}) P(\text{เปลี่ยนจาก } s_3 \text{ ไปเป็น } s_3) \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนเป็นสัญลักษณ์เมทริกซ์ในส่วนต่อไป ขอกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$$N_i = \text{จำนวนคนในสถานะ } s_i \text{ ในเวลาเริ่ม}$$

$$N'_i = \text{จำนวนคนในสถานะ } s_i \text{ ในเวลาถัดมา}$$

$$P_{ij} = \text{ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนสถานะจาก } s_j \text{ มาเป็น } s_i$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$N'_1 = N_1 P_{11} + N_2 P_{12} + N_3 P_{13}$$

$$N'_2 = N_1 P_{21} + N_2 P_{22} + N_3 P_{23}$$

$$N'_3 = N_1 P_{31} + N_2 P_{32} + N_3 P_{33}$$

และเมื่อนำมาลงเขียนในรูปแบบเวกเตอร์จะง่ายดายมาก ได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{N}' &= \begin{pmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_1 P_{11} + N_2 P_{12} + N_3 P_{13} \\ N_1 P_{21} + N_2 P_{22} + N_3 P_{23} \\ N_1 P_{31} + N_2 P_{32} + N_3 P_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \\ \vec{N}' &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \vec{N}\end{aligned}$$

นิยาม 4.2.1: Transition Matrix

เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ (transition matrix) คือเมทริกซ์ที่ลำดับของแถวและหลักของเมทริกซ์สอดคล้องกับลำดับสถานะ s_1, \dots, s_n โดยที่สมาชิกในตำแหน่งที่ ij คือค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากสถานะ j มาเป็นสถานะ i

คุณสมบัติ 4.1: การหาจำนวนคนในแต่ละสถานะในช่วงเวลาถัดไป

กำหนดให้ N_t แทนเวกเตอร์ของจำนวนคนในแต่ละสถานะ ในแต่ละสถานะ โดยที่ลำดับของสถานะเป็น s_1, \dots, s_n และให้ P คือเมทริกซ์เปลี่ยนสถานะที่มีลำดับของสถานะเดียวกันกับลำดับสถานะของเวกเตอร์ N_t จะได้ว่า

$$N_{t+1} = PN_t$$

เพราะฉะนั้น จะได้โดยง่ายว่า

$$N_{t+k} = P^k N_t$$

ทั้งนี้ เราอาจจะเปลี่ยนไปใช้เวกเตอร์ที่แสดงความน่าจะเป็นแทนเวกเตอร์จำนวนคนจริง ๆ ได้

ตัวอย่าง 4.2.1: การคำนวณมาร์คอฟของโรงอาหาร

โรงอาหารในบริษัทแห่งหนึ่งมีเมนูประจำร้าน 3 เมนู สมมติชื่อชุด A, B และ C โดยแต่ละเมนูมีการเตรียมวัตถุดิบที่แตกต่างกันออกไป ทางร้านจึงต้องการวางแผนอัตราส่วนของปริมาณของวัตถุดิบของอาหารแต่ละประเภทที่ต้องเก็บเข้าคลังไว้เป็นรายเดือน ดังนั้น ทางร้านจึงได้ทำการสำรวจพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงประเภทอาหารที่จะทานของพนักงานในบริษัทแห่งนั้น และได้ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงประเภทอาหารที่อยากทานใน 1 เดือนดังตารางด้านล่างนี้ (ให้สมมติว่าบริษัทไม่ได้มีการสมัครเข้าหรือออกบ่อย และในบริษัทนี้ร้านอาหารผูกขาดอยู่ร้านเดียว)

		เมนูที่ทานเดือนนี้		
		A	B	C
เมนูที่ทานเดือนก่อนไป	A	0.6	0.6	0.2
	B	0.3	0.1	0.2
	C	0.1	0.3	0.6

สมมติว่าในเดือนนี้มีปริมาณการทานอาหารเมนู A, B, C เป็นจำนวน 60 ครั้ง, 100 ครั้ง, 40 ครั้ง ตามลำดับ

- จงหาว่าในเดือนถัดไปจะมีการทานอาหารในแต่ละเมนูกี่ครั้ง
- จงหาว่าในอีก 2 เดือนถัดไปจะมีการทานอาหารในแต่ละเมนูกี่ครั้ง

4.3 การวิเคราะห์สถานะคงที่

นิยาม 4.3.1: สถานะคงที่ (Steady State)

สถานะคงที่ของกระบวนการมาร์คอฟคือเวกเตอร์สถานะที่เมื่อผ่านขั้นตอนถัดไปแล้วมีสถานะคงเดิม (อัตราส่วนเท่าเดิม) กล่าวคือเวกเตอร์ \vec{s} จะเป็นสถานะคงที่ของเมตริกซ์การเปลี่ยนสถานะ P ก็ต่อเมื่อ

$$P\vec{s} = \vec{s}$$

a) ทั้งนี้เวกเตอร์ที่เป็นสเกลของเวกเตอร์สถานะคงที่ก็ยังคงเป็นสถานะคงที่เช่นกัน ดังนั้นในบางครั้งเราวาจจะระบุเพียงแค่เวกเตอร์ความน่าจะเป็น ณ สถานะคงที่ ซึ่งคือทุกสมาชิกในเวกเตอร์รวมกันได้ 1

b) ในคณิตศาสตร์จะเรียกว่า \vec{s} เป็น eigenvector ที่สอดคล้องกับ eigenvalue = 1 ของเมตริกซ์ P

ตัวอย่าง 4.3.1: เวกเตอร์สถานะคงที่

จงหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็น ณ สถานะคงที่ของเมตริกซ์การเปลี่ยนสถานะของผู้รับบริการ $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ และถ้า

สมมติว่า ณ เวลาหนึ่น มีผู้รับบริการทั้งหมดอยู่ 500 คน จะมีคนอยู่ในแต่ละสถานะกี่คน

4.3. การวิเคราะห์สถานะคงที่

ตัวอย่าง 4.3.2: มาร์คอฟของโรงอาหาร (ต่อ)

จากตัวอย่างสถานะการโรงอาหารในบริษัทในตัวอย่าง 4.2.1 จงหาว่าต้องมีอัตราส่วนของคนชอบเมนูอาหารใดเท่าไหร่บ้างถึงจะอยู่ในสภาวะที่ไม่ต้องเปลี่ยนแปลงปริมาณการเก็บวัตถุดิบในเดือนถัดไป

4.4 การคำนวณ Markov โดยใช้ Excel

4.5 หัวข้อพิเศษ: การคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ในมุมมองของมาร์คอฟ

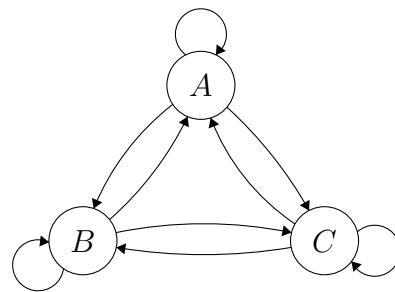
อย่างที่ได้กล่าวไปในหัวข้อที่ผ่าน ๆ มาว่า เราสามารถหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะ

Exercise 4.5.1: หากผลกำลังสองของเมทริกซ์ความน่าจะเปลี่ยนของการเปลี่ยนสถานะ

จงหาผลคูณของเมทริกซ์ได้ผลลัพธ์ดังนี้ (โจทย์ให้ผลลัพธ์การคูณมาแล้ว ดังนั้นไม่ต้องนั่งคูณด้วยตัวเอง แต่เราจะลองใช้ความรู้ Markov ช่วยหาผลคูณ และในข้อนี้เราจะไม่ได้หาผลคูณของทั้ง 9 ตัว เราจะยกตัวอย่างการหาผลคูณของแค่ 3 ตัวเท่านั้น)

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.48 & 0.36 \\ 0.23 & 0.25 & 0.20 \\ 0.21 & 0.27 & 0.44 \end{bmatrix}$$

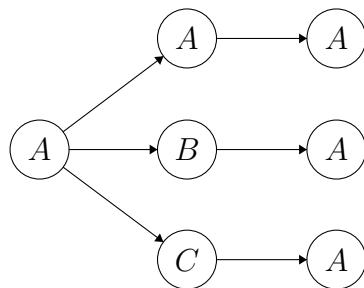
เริ่มจากเขียนแผนภาพการเปลี่ยนสถานะกันก่อน โดยโจทย์คือให้ เขียนค่าความน่าจะเป็นลงไปบนเส้นการเปลี่ยนสถานะ



จากที่เรียนมาในห้อง เราทราบกันอยู่แล้วว่าความหมายของการนำเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้นมาคูณกัน จะได้ผลลูกมาเป็นเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะข้าม 2 ขั้น (เช่นเปลี่ยนจากขั้นที่ 1 ไปขั้นที่ 3) ดังนั้น ถ้าเรารายกษาผลคูณของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ สิ่งที่ต้องทำคือหาความน่าจะเป็นในการเดินข้าม 2 ขั้นทุกรูปแบบที่เป็นไปได้

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป A ในขั้นที่ 3

วางแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ จะเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)



ด้วยความรู้ในเรื่องความน่าจะเป็น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นรวมของการย้ายสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นต่อไป หาได้จากการคูณและการบวกจากแผนภาพด้านไม้ดังกล่าว โดยที่

- ◊ เส้นต่อ กัน ให้ naïve ค่าความน่าจะเป็นของเส้นมาตรฐานกัน
- ◊ หลังจากคิดผลคูณค่าความน่าจะเป็นของแต่ละกิ่งเรียบร้อยแล้ว ให้นำมาบวกกัน

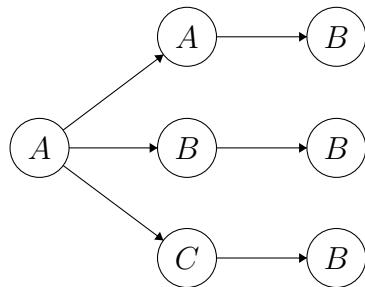
เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นตอนไปมีค่าเท่ากับ

$$P(A \rightarrow_2 A) = \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) = 0.56$$

ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับสมาชิกในແກ້ໄຂ 1 หลักທີ່ 1 ທີ່ແຕນความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจาก A ไป A ในເມທຣິກຊື່ຜລລັບຮ

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป B ในขั้นที่ 3

ວາດແພນກາພດ້ານລ່າງ ໂຈທຍົດ້ອ ຈົງເຂີຍຄ່າความນໍາຈະເປັນຂອງກາຮ້າຍສຖານຂອງແຕ່ລະເສັ້ນ (ນີ້ 6 ເສັ້ນ)



เพราະฉະນັ້ນ เราຈະໄດ້ວ່າຄວາມນໍາຈະເປັນຂອງກາຮ້າຍສຖານຂອງແຕ່ລະເສັ້ນ (ນີ້ 6 ເສັ້ນ)

$$P(A \rightarrow_2 B) = \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) = \boxed{\quad}$$

CHAPTER 5

การพยากรณ์ (Forecasting)

การพยากรณ์ (Forecasting) คือการใช้ข้อมูลของสิ่งที่สนใจที่เกิดขึ้นในอดีตเพื่อสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณสิ่งที่สนใจในอนาคต และในบาง trườngถึงการใช้สภาวะการณ์ที่สำรวจได้ในปัจจุบันรวมไปถึงในอดีตเพื่อทำนาย (Prediction) ค่าที่สนใจ ตัวอย่างเช่น

- ◊ ฝ่ายขายใช้ยอดขายย้อนหลัง 12 เดือนเพื่อทำนายยอดขายในเดือนต่อไป
- ◊ ทีมการตลาดต้องการทำนายความต้องการซื้อสินค้าบางอย่างของลูกค้าโดยอาศัยคุณลักษณะต่าง ๆ เช่น เพศ อายุ ฐานเงินเดือน สินค้าที่ซื้อในเดือนที่แล้ว เป็นต้น

ในรายวิชานี้ เราจะศึกษา 2 รูปแบบการทำนายหลัก ๆ ดังนี้

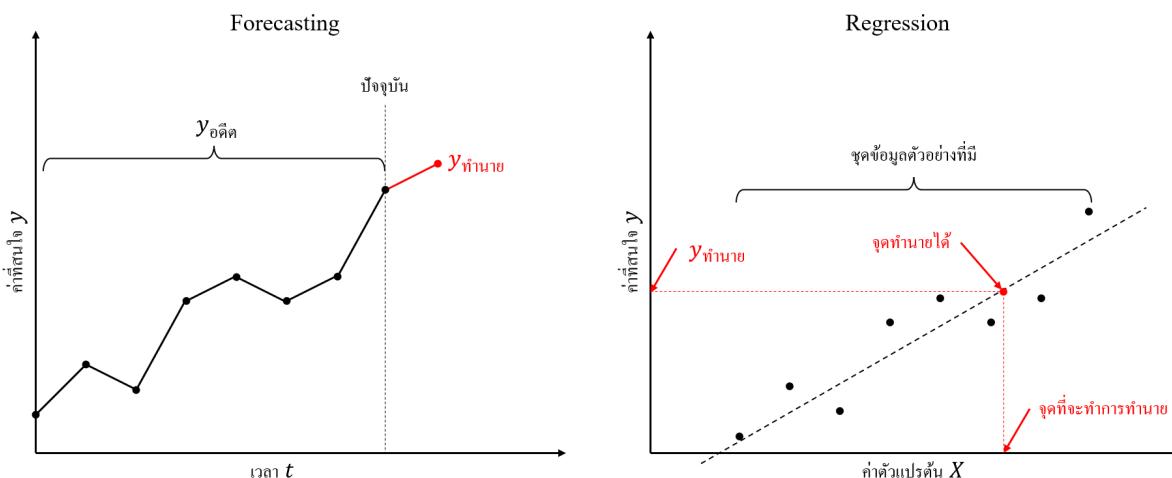


Figure 5.1. ความแตกต่างระหว่าง ตัวแบบอนุกรมเวลา และ ตัวแบบทดแทน

1. ตัวแบบอนุกรมเวลา (time series forecasting): เป็นตัวแบบที่อยู่บนสมมติฐานว่าตัวแปรที่เราสนใจมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรเดียวกันที่เกิดขึ้นในอดีต

$$\hat{y}_t \sim y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k}$$

2. ตัวแบบการถดถอย (regression model): เป็นตัวแบบที่อยู่บนสมมติฐานว่าตัวแปรที่เราสนใจมีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปรอื่น ๆ ที่เกิดขึ้นพร้อมกัน (หรือเป็นอยู่)

$$\hat{y}_t \sim x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}$$

ทั้งนี้ เราไม่สามารถบอกได้ว่าวิธีการใดเป็นวิธีการที่ดีที่สุด เพราะแต่ละวิธีการ (ที่กำลังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป) มีสมมติฐานตั้งต้นที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลว่าจะเหมาะสมกับตัวแบบไหน แต่ในทางปฏิบัติ ถ้าไม่มีไดติดขัดเรื่องปัญหาด้านทรัพยากรในการทำการคำนวณ เรามักจะลองทุกวิธีการและวัดผลเพื่อตรวจสอบเบริ่ยบเทียบความสามารถของแต่ละตัวแบบ (เรียนในหัวข้อสุดท้าย)

5.1 ตัวแบบอนุกรมเวลา

5.1.1 วิธีการค่าเฉลี่ยรวม

- ◊ เหมาะกับข้อมูลที่มีลักษณะที่ค่อนข้างคงที่ในภาพรวม (ไม่ได้มีแนวโน้มที่เปลี่ยนแปลงไป เช่นตลาดโตขึ้นเรื่อย ๆ)
- ◊ วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^t y_i}{t} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_t}{t}$$

ตัวอย่าง 5.1.1: วิธีการค่าเฉลี่ยรวม

บริษัทหนึ่งมีความต้องการทำนายยอดขายในเดือนที่ 7 โดยที่มียอดขาย 6 เดือนที่ผ่านมาตามตารางด้านล่างนี้ ทั้งนี้ ลองหาค่าทำนายของแต่ละเดือนก่อนหน้าด้วย

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

5.1.2 วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average)

- ◊ ถ้าข้อมูลระยะยาวไม่คงที่ วิธีการหาค่าเฉลี่ยทั้งหมดอาจจะเอาผลที่ใกล้เกินไปรวม
- ◊ แต่ถ้าพบว่ามีความคงที่ในระยะสั้น ๆ เช่น ในช่วง 6 เดือนไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงมากนัก เราจึงควรนำแค่ 6 เดือน ย้อนหลังมาคำนวณ ซึ่งจะเรียกว่าการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ย้อนหลัง 6 เดือน
- ◊ วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t y_i}{n} = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \dots + y_t}{n}$$

ตัวอย่าง 5.1.2: วิธีการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

จากตารางเดิม จงหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 3 เดือน และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 4 เดือนของเดือนทั้งหมดที่เป็นไปได้จนถึงเดือนที่ 7

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

5.1.3 วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Weighted Moving Average)

- ◊ เป็นวิธีการที่ต้องอดมาจากการทำค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ แต่มีแนวคิดว่าผลกราฟที่ยังห่างออกไปยิ่งคราวมีความสำคัญน้อยลง แต่ในขณะที่เหตุการณ์ล่าสุดควรมีผลผลกระทบมากที่สุด
- ◊ วิธีการถ่วงน้ำหนักที่ง่ายที่สุดคือໄล์ 1, 2, 3, ... จากอัตสุดมาปัจจุบันสุด
- ◊ เรียกอีกชื่อว่า วิธีปรับเรียบแบบเชิงเส้น
- ◊ วิธีการคำนวณ:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t (i-t+n) y_i}{\sum_{i=1}^n i} = \frac{1 \cdot y_{t-n+1} + 2 \cdot y_{t-n+2} + \dots + n \cdot y_t}{1 + 2 + \dots + n}$$

ตัวอย่าง 5.1.3: วิธีการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก

จากตารางเดิม จงหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก 3 เดือน และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก 4 เดือนของเดือนทั้งหมดที่เป็นไปได้จนถึงเดือนที่ 7

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

5.1.4 วิธีปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล (exponential smoothing)

- ◊ เป็นอีกวิธีในการถ่วงน้ำหนัก โดยให้ความสำคัญของค่าล่าสุดเริ่มที่ 1 และลดค่าความสำคัญลงไปแบบ exponential โดยที่ยังมีการนำค่าตั้งแต่จุดเริ่มต้นมาพิจารณา
- ◊ แต่สูตรการคำนวนถูกจัดให้อยู่ในรูปที่คำนวนได้ง่าย (แค่ต้องคำนวนໄต่ลำดับขึ้นมาเรื่อย ๆ) รูปแบบ exponential จึงไม่เห็นอยู่ในสูตร
- ◊ วิธีการคำนวน:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha (y_t - \hat{y}_t)$$

หรือ

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t$$

โดยที่ $0 \leq \alpha \leq 1$

- ◊ ค่า α เป็นค่าที่ต้องกำหนดขึ้นมาตั้งแต่เริ่มตัดสินใจ (เหมือนกับที่เราต้องเลือกว่าจะ moving average หรือ weighted moving average ของกี่เดือน)

ตัวอย่าง 5.1.4: วิธีปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล

จากตารางเดิม จงหาค่าทำนายจากวิธีการปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล โดยใช้ $\alpha = 0.3$ และ $\alpha = 0.8$

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

เดือน	ยอดขาย
1	800
2	900
3	800
4	1000
5	1000
6	1300

หมายเหตุ 5: สาเหตุที่เรียกว่าการปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล

รูปแบบสมการที่นิยามมาในด้านบนเรียกว่าการนิยามแบบเวียนเกิด คือการจะหาพจน์ที่ t ได้ จะต้องคำนวณให้ทราบค่าพจน์ก่อนหน้าก่อน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องคำนวณໄล่จากขั้นที่ 1 ขึ้นมาจนถึงขั้นที่ต้องการ แต่ทั้งนี้ เรายังสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปที่ไม่เข้ากับพจน์ก่อนหน้าได้ดังนี้

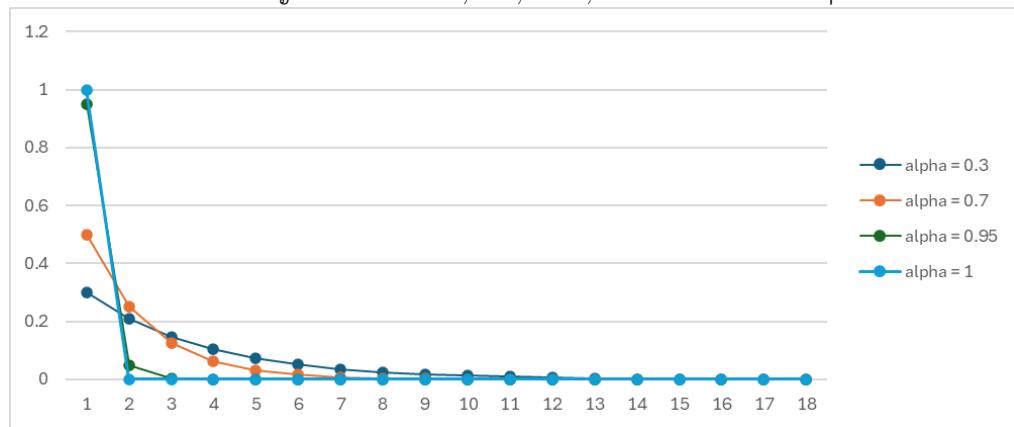
$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{t+1} &= \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t \\
 &= \alpha y_t + (1 - \alpha) (\alpha y_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1}) \\
 &= \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{y}_{t-1} \\
 &= \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 y_{t-2} + (1 - \alpha)^3 \hat{y}_{t-3} \\
 &= \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \alpha (1 - \alpha)^3 y_{t-3} + (1 - \alpha)^4 \hat{y}_{t-4} \\
 &\vdots \\
 &= \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \cdots + \alpha (1 - \alpha)^{t-2} y_2 + (1 - \alpha)^{t-1} y_1
 \end{aligned}$$

หรือถ้าเขียนเป็นตัวอย่างแบบตัวเลขชัดเจน จะมีดังนี้

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_1 &= y_1 \\
 \hat{y}_2 &= (1 - \alpha)^0 y_1 = y_1 \\
 \hat{y}_3 &= \alpha y_2 + (1 - \alpha) y_1 \\
 \hat{y}_4 &= \alpha y_3 + \alpha (1 - \alpha) y_2 + (1 - \alpha)^2 y_1 \\
 \hat{y}_5 &= \alpha y_4 + \alpha (1 - \alpha) y_3 + \alpha (1 - \alpha)^2 y_2 + (1 - \alpha)^3 y_1
 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า

- จำนวนพจน์ของค่าจริงที่มาใช้คำนวณจะไม่ถูกกำหนดตายตัวเหมือนวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบอื่นๆ
 - แต่ความสำคัญจะถูกลดTHONลงเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ 0
- ตัวอย่างกราฟค่าความสำคัญเมื่อใช้ $\alpha = 0.3, 0.5, 0.95, 1$ แสดงการลดแบบ exponential



5.2 ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น

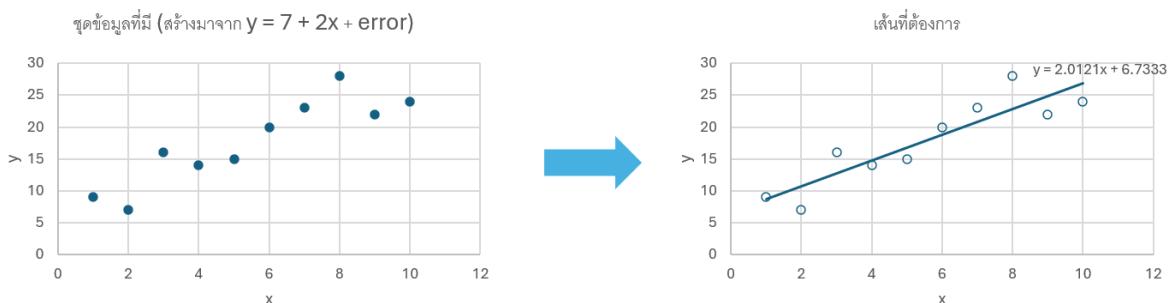
- ◊ ตัวแบบการถดถอย (regression) เป็นการสร้างตัวแบบการทำนายโดยอยู่บนสมมติฐานว่าตัวแปรต้นตัวหนึ่ง (x) มีความสัมพันธ์เชิงพองค์ขั้นกับค่าตัวแปรที่เราสนใจ (y)
- ◊ ในวิชานี้เรานำใจแค่การถดถอยเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ มีชุดข้อมูล $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ที่มีความสัมพันธ์

$$Y = a_0 + a_1 X + \epsilon$$

โดย a_0, a_1 เป็นค่าคงที่ และ ϵ คือพจน์ค่าคาดเคลื่อน

- ◊ เป้าหมายคือเราต้องการประมาณค่า $a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1$ ที่

$$Y \approx \hat{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 X$$



ขั้นตอน 5.1

ค่า a_0, a_1 ของ ตัวแบบ การถดถอย เชิงเส้น $Y = a_0 + a_1 X + \epsilon$ ของ ชุดข้อมูล $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ สามารถ ประมาณ ค่า ได้ ด้วย α_0, α_1 (ด้วย วิธี การทาง คณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า วิธีกำลังสองต่ำสุด (Least Squared Error)) ตามสูตร

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x}$$

และจะได้ว่า $\hat{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 X$ เป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นของ $Y = a_0 + a_1 X + \epsilon$

โดยขั้นตอนการคำนวณตามสูตรดังกล่าวคือ

1. คำนวนหาค่าเฉลี่ย $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x/n$ และค่าเฉลี่ย $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y/n$
2. $(x_i - \bar{x})$: คำนวนหาผลต่างระหว่างค่า x และค่าเฉลี่ย \bar{x} ของทุกข้อมูล
3. $(y_i - \bar{y})$: คำนวนหาผลต่างระหว่างค่า y และค่าเฉลี่ย \bar{y} ของทุกข้อมูล
4. $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$: นำค่าผลต่างจาก 2 ข้อก่อนหน้ามาคูณกัน

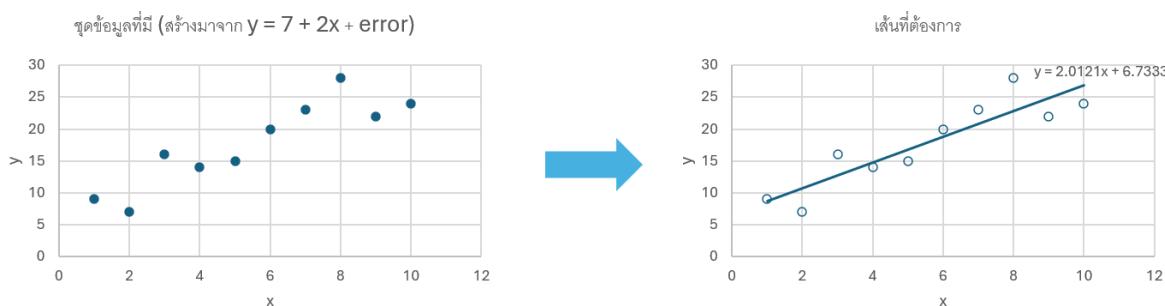
5. $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$: นำค่าผลคูณของทุกข้อมูลจากขั้นที่ผ่านมาบวกกัน
6. $(x_i - \bar{x})^2$: นำค่าผลต่างที่คำนวณไว้ในขั้นที่ 2 มายกกำลังสอง
7. $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$: นำค่ากำลังสองของผลต่างในขั้นตอนที่ผ่านมาบวกกัน
8. $\alpha_1 =$ ค่าผลบวกจากขั้นตอนที่ 5 หารด้วยค่าผลบวกจากขั้นตอนที่ 7
9. $\alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1 \bar{x}$

นักศึกษาสามารถสร้างตารางการคำนวณตามตัวอย่างด้านล่างเพื่อใช้ประกอบการคำนวณได้

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
x_1	y_1				
x_2	y_2				
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	y_n				
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$			$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

ตัวอย่าง 5.2.1: การถดถอยเชิงเส้น 1 ตัวแปร

จะประมาณตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นของชุดข้อมูลตั้งตารางด้านล่าง (ข้อมูลเดียวกับรูปตัวอย่าง)

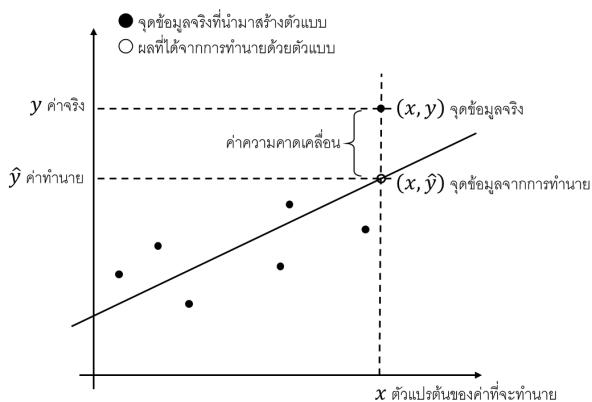


x	y
1	9
2	7
3	16
4	14
5	15
6	20
7	23
8	28
9	22
10	24

5.3 การประเมินผลความแม่นยำในการทำนาย

อย่างที่ได้กล่าวไปก่อนหน้านี้ว่าเรามีความสามารถระบุได้ว่าตัวแบบใดเป็นตัวแบบที่ดีที่สุด เพราะตัวแบบในการทำนายที่ดีขึ้นอยู่กับข้อมูลที่มีว่ามีลักษณะข้อมูลเป็นอย่างไร ตัวแบบเดียวกันอาจจะทำงานได้ดีในชุดข้อมูลหนึ่ง แต่อาจจะทำได้ไม่ดีในอีกชุดข้อมูลหนึ่ง เพราะฉะนั้น ในกระบวนการการทำงานจริง จึงต้องมีการวัดผลเพื่อประเมินความแม่นยำของตัวแบบเพื่อที่จะเปรียบเทียบความสามารถในการทำนายของแต่ละตัวแบบได้ ซึ่งแนวคิดหลักของการวัดผลคือการใช้ค่าความคลาดเคลื่อน (error) เพื่อเป็นตัวบอกว่าสิ่งที่ตัวแบบทำนายออกมายังไงจากค่าจริงเท่าใด

$$\text{ค่าความคลาดเคลื่อนดิบ} = | \text{ค่าที่ตัวแบบทำนายได้} - \text{ค่าจริงจากชุดข้อมูล} |$$



ในหนังสือเล่มนี้ จะแบ่งการวัดผลออกเป็น 2 รูปแบบหลักได้แก่

- การวัดผลด้วยมาตรฐานของข้อมูล: เป็นการวัดผลที่มีหน่วยอยู่กับข้อมูลที่เราต้องการจะทำนาย โดยต้องการวัดระยะห่าง มีข้อดีในเรื่องของการแสดงค่าคาดเคลื่อนจริง ๆ เช่นทำนายคลาดเคลื่อนไปกีบาท มักถูกใช้ในการเปรียบเทียบระหว่างตัวแบบต่าง ๆ บนข้อมูลชุดเดียวกัน โดยจะกล่าวถึง
 - ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดสัมบูรณ์ (mean absolute error: MAE)
 - ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดกำลังสอง (root mean squared error: RMSE)
- การวัดผลเชิงสัมพัทธ์: เป็นการวัดผลโดยใช้การหาร้อยละเทียบเคียงกับค่าจริงว่าคลาดเคลื่อนไปกีเปอร์เซนต์ ซึ่งวิธีการนี้มักใช้กับชุดข้อมูลที่ความรุนแรงของการคลาดเคลื่อนขึ้นอยู่กับขนาดของค่าจริง กล่าวคือการคลาดเคลื่อนด้วยปริมาณหนึ่งตอนที่ค่าจริงมีค่าน้อย ๆ จะรุนแรงกว่าการคลาดเคลื่อนขนาดเดียวกันเมื่อค่าจริงมีค่ามาก ๆ (ตัวอย่าง เช่น เงินหาย 9 บาทจาก 10 บาท กับเงินหายไป 9 บาทจาก 1 ล้านบาท) อีกทั้งยังเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ใช้เพื่อการเปรียบเทียบการทำงานของตัวแบบในต่างชุดข้อมูลที่อาจจะมีค่าที่ต้องการทำนายอยู่ในคนละมาตรฐาน โดยจะกล่าวถึง
 - ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดสัมพัทธ์ (mean absolute percentage error: MAPE)
 - ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดสัมบูรณ์ที่ปรับมาตรฐานส่วน (mean absolute scaled error: MASE)

นิยาม 5.3.1: mean absolute error

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|$$

นิยาม 5.3.2: root mean squared error

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

และในบางครั้ง อาจมีการใช้ MSE ซึ่งคือ

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$$

แต่สิ่งที่ต้องระวังตอนอ่านค่าคือค่าที่ได้จะอยู่ในหน่วยกำลังสองของหน่วยเดิม (เช่นหน่วย บาท²) ซึ่งไม่ได้มีความหมายในโลกจริง

นิยาม 5.3.3: mean absolute percentage error

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right| \times 100\%$$

นิยาม 5.3.4: mean absolute scaled error

สำหรับการทำการทดสอบโดยเชิงเส้นเมื่อเทียบกับการทำนายด้วยการหยิบแต่ค่าเฉลี่ยมาเป็นค่าทำนาย

$$MASE = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|}{\sum_{i=1}^n |\bar{y} - y_i|}$$

สำหรับอนุกรมเวลาเมื่อเทียบกับการทำนายด้วยการหยิบค่าของครั้งก่อนหน้ามาเป็นค่าทำนายของครั้งปัจจุบัน

$$MASE = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|}{\frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T |y_t - y_{t-1}|}$$

สำหรับการวัดผลด้วย MASE นั้น เราสามารถปรับเปลี่ยนวิธีการประมาณค่าตัวเทียบ (ตัวส่วน) เป็นตัวแบบแบบอื่นได้ เช่น กัน เพียงแต่ 2 สูตรด้านบนเป็นการเทียบจากตัวแบบที่ง่ายที่สุดที่มักจะนึกถึงกันเป็นอันดับแรกตอนทำนาย

ตัวอย่าง 5.3.1: การวัดผลอนุกรมเวลา

จากตารางการทำตัวแบบอนุกรมเวลาแบบต่าง ๆ ที่นำมาในตัวอย่างที่ผ่านมา จงวัดผลค่าความคลาดเคลื่อน MAE, RMSE, MAPE, MASE ของแต่ละตัวแบบ โดยสมมติเพิ่มว่าค่าจริงของเดือนที่ 7 มีค่าเท่ากับ 1200 (และเพื่อความสะดวกในการคำนวน จึงขอปัดค่าทำนายให้เป็นจำนวนเต็ม)

วิธีค่าเฉลี่ย

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	800
3	800	850
4	1000	833
5	1000	875
6	1300	900
7	1200	967

วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ 3 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	833
5	1000	900
6	1300	933
7	1200	1100

วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ 4 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	-
5	1000	875
6	1300	925
7	1200	1025

วิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก 3 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	833
5	1000	917
6	1300	967
7	1200	1150

วิธีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก 4 เดือน

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	-
2	900	-
3	800	-
4	1000	-
5	1000	900
6	1300	950
7	1200	1100

วิธีปรับเรียบแบบอ็อกโพเนนเชียล โดย $\alpha = 0.3$

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	800
2	900	800
3	800	830
4	1000	821
5	1000	875
6	1300	912
7	1200	1029

วิธีปรับเรียบแบบอ็อกโพเนนเชียล โดย $\alpha = 0.8$

เดือน	ยอดขายจริง	ค่าทำนาย
1	800	800
2	900	800
3	800	880
4	1000	806
5	1000	964
6	1300	975
7	1200	1222

ตัวอย่าง 5.3.2: การวัดผลการถดถอยเชิงเส้น

จากตัวอย่างการหาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นในตัวอย่าง 5.2.1 จะวัดผลความคลาดเคลื่อน MAE, RMSE, MAPE, MASE (ในทำนองเดียวกัน ถ้าเป็นการคำนวณมือให้ปัดเป็นจำนวนเต็มเพื่อคิดเลขได้ จะได้คำนวณได้สะดวก)

x	y	\hat{y}
1	9
2	7	
3	16	
4	14	
5	15	
6	20	
7	23	
8	28	
9	22	
10	24	

5.4 การใช้ Excel เพื่อช่วยคำนวณหาตัวแบบต่าง ๆ

CHAPTER 6

ทฤษฎีเกม (Game Theory)

6.1 บทนำ

6.1.1 ความหมายของเกม

6.1.2 จุดแตกต่างจากหัวข้อทฤษฎีการตัดสินใจ

6.2 การวิเคราะห์กลยุทธ์ในเกม

6.2.1 แนวคิดพื้นฐาน: maximin vs. minimax

6.2.2 กลยุทธ์แท้และค่าของเกม

6.3 การวิเคราะห์กลยุทธ์ผสม

ทฤษฎีゲーム (Game Theory)

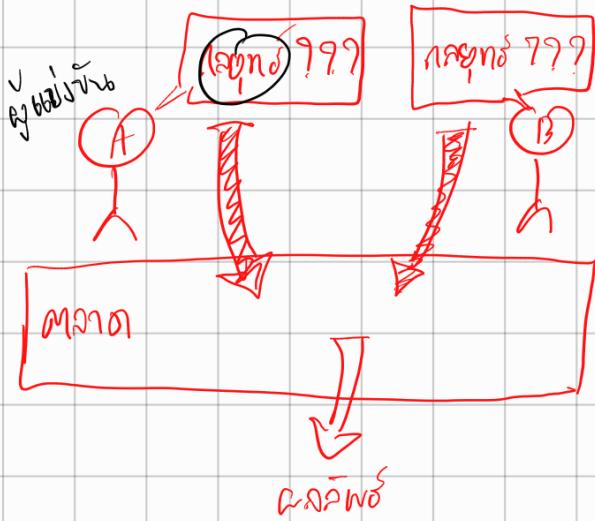
พ 2 ฝ่ายมีผลตอบแทน
การgame Perfect game ไม่ต่อ

การเดาจำนวนตัวเลข 2 ตัว

ผลลัพธ์ของแต่ละฝ่าย

ต่างฝ่ายต่อต้านกันในกลุ่มคนเดียวกัน

มุ่งมั่น ความพยายามทุกอย่างทุรุ่ม



"zero-sum game" (เกมที่มีผลรวมเป็นศูนย์)

ผลรวมของค่าได้ 같่ค่าเสียของคู่แข่งเสมอ

$$\text{ค่าได้} = -\text{ค่าเสีย}$$

$$\text{ค่าได้} + \text{ค่าเสีย} = 0$$

ทฤษฎีการตัดสินใจ
(บทที่ 2)

ทฤษฎีเกม
(บทที่ 6)

ผู้เล่น A		ผู้เล่น B
ผู้เล่น A 1	ผู้เล่น A 2	
ผู้เล่น B 1	(ก 1/r)	...
ผู้เล่น B 2
ผู้เล่น B n

ผู้เล่น A

ผู้เล่น A		ผู้เล่น B
ผู้เล่น A 1	ผู้เล่น A 2	
ผู้เล่น B 1
ผู้เล่น B 2
ผู้เล่น B n

กรณี 1 ผู้เล่น A ชนะ
กรณี 2 ผู้เล่น B ชนะ

		ผู้เล่น B			
		1	2	3	
ผู้เล่น A	1	4	-3		
	2	3	-2		
	3	6	7		

Zero-sum
game

		ผู้เล่น A			
		1	2	3	
ผู้เล่น B	1	-4	-3		
	2	3	2		
	3	7			

ทำงานเพื่อประโยชน์ของ B

ผู้เล่น A ไม่สามารถชนะผู้เล่น B

ผู้เล่น A ต้องเลือก 4 หรือ 6
ผู้เล่น B ต้องเลือก 4 หรือ 6

(*** ทำงานทำให้ขาด)

		ผู้เล่น B		Maximin	
		1	2	3	
ผู้เล่น A	1	4	-3	min	-3
	2	3	-2	min	-2
	3	6	7	min	6

ผู้เล่น A ควรเลือก 1 หรือ 3 ตามความต้องการ

Maximax

ผู้เล่น A ควรเลือก 3 ที่สูงกว่า 4 ที่ต่ำกว่า

Maximin

(ทำงาน Maximax และ Maximin)
(≤ 6 ที่)

ทำงานทำให้ขาด
ลดลงความท้าทาย

ทำงานทำให้ขาด
ลดลงความท้าทาย

การทำงานลดลง

ลดลงความท้าทาย
ลดลงความท้าทาย

การทำงานนี้ Maximin กับ minimax อยู่ด้วยกัน (ผู้เล่นที่ต้องการจะเลือก 1 หรือ 3)

เรียกว่า "กลยุทธ์ร่วม"

การทำงานนี้เรียกว่า "ค่าเฉลี่ย"

การทำงาน = 6 "ทำงานลดลงความท้าทาย 6 แม้ว่าการทำงานจะลดลงก็ตาม"

แสดงตารางผลตอบแทนของบริษัทสร้อยฟ้า

กลยุทธ์ของ สร้อยฟ้า	กลยุทธ์ของสร้อยดาว				min
	1	2	3	4	
1	18	25	-4	15	-4
2	24	32	29	18 ***	18 ***
3	-10	-8	17	12	-10

(max)

18 24 32 29 18 ***

minimax = 18

min

-4

18 ***

} maximin = -18

สร้อยฟ้ามีกลยุทธ์ 2 ที่ไม่กลยุทธ์ใน

กลยุทธ์ที่ 4 เป็นกลยุทธ์ที่

ผลลัพธ์ต่อไป = 18

ตารางที่ 7.20 ค่าของเกมของร้านขาย (ล้านบาท)

ร้านขาย	ร้านดำเนินการ			min
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม	
แบบสี	20	30	60	20
แบบขาวดำ	40	45	30	30
max	40	45	60	minimax = 40

กรณีที่ 1 มีอัตราส่วนของผลกำไรต่อรายได้คงที่
เราต้องหาอัตราส่วนที่ดีที่สุดและมีผลกำไร

!พิจารณาด้วยวิธีกำหนดกราฟขึ้นสักๆ

(ดูภาพ) กำหนดอัตราส่วนการใช้ก่อสร้าง

$$P = \text{อัตราส่วนการใช้ก่อสร้างที่ต้องการ}$$

$$\therefore 1 - P = \text{อัตราส่วนการใช้ก่อสร้างที่ต้องการแต่ไม่ใช่}$$

$$\hookrightarrow \text{ต้องการก่อสร้าง} \Rightarrow P = 1 \text{ หรือ } 0 ; 0 < P < 1$$

ร้านขาย ผลประโยชน์ที่ได้รับจากการขายห้องนอน

$$\text{ความเสี่ยง} = 12\%$$

$$\} \text{ผลรวมอัตราภัย = 1}$$

Expected Value

(ทางลัด/ความเร็ว)

ร้านขาย	ร้านดำเนินการ		
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม
(P) แบบสี	20	30	60
(1-P) แบบขาวดำ	40	45	30

ตัวตัวที่ 1 ล้วนๆ ก่อสร้างแบบสี (ตัวตัวที่ 2 ล้วนๆ ก่อสร้างแบบขาวดำ) 60% น้ำหน้า → ปีที่ 1 (20)
70% น้ำหน้า → ปีที่ 2 (40)

$$EV_{\text{ปีที่ 1}} = P \times 20 + (1 - P) \times 40 = 40 - 20P$$

Note ถ้า $P=1 \Leftrightarrow$ ใจไม่แน่ใจอย่างเดียว

$$40 - 20P = 40 - 20(1) = 20$$

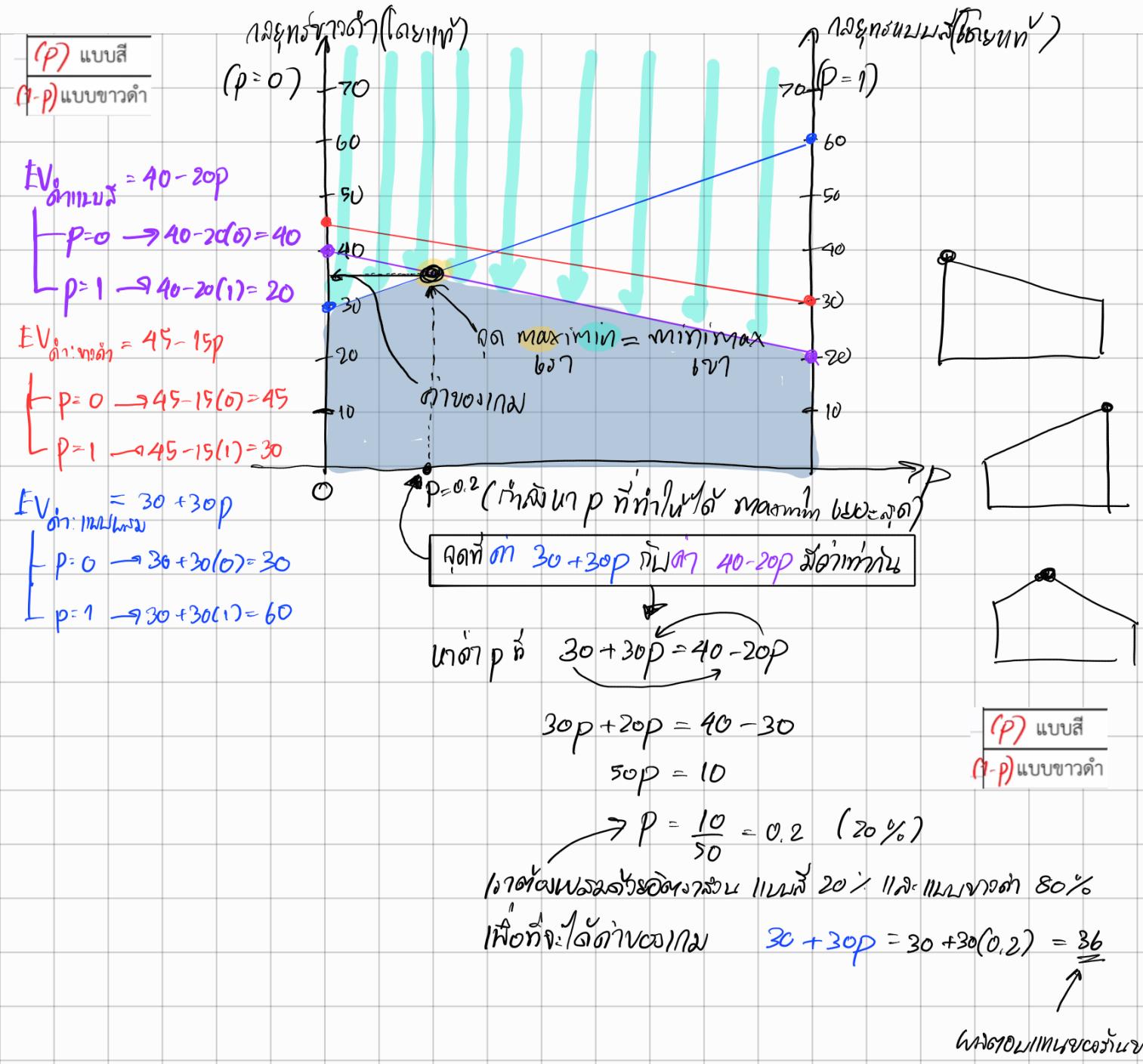
ถ้า $P=0 \Leftrightarrow$ ใจแน่นอนมากอยู่แล้ว

$$40 - 20P = 40 - 20(0) = 40$$

กำหนดอัตราส่วน

$$EV_{\text{ปีที่ 2}} = P \times 30 + (1 - P) \times 45 = 45 - 15P$$

$$EV_{\text{ปีที่ 3}} = P \times 60 + (1 - P) \times 30 = 30 + 30P$$



ร้านขาย	ร้านดำเนินการ		
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม
แบบสี	20	30	60
แบบขาวดำ	40	45	30

ទី១៣៦នៃការអប់រំ
(ជំនួយលោកស្រី)

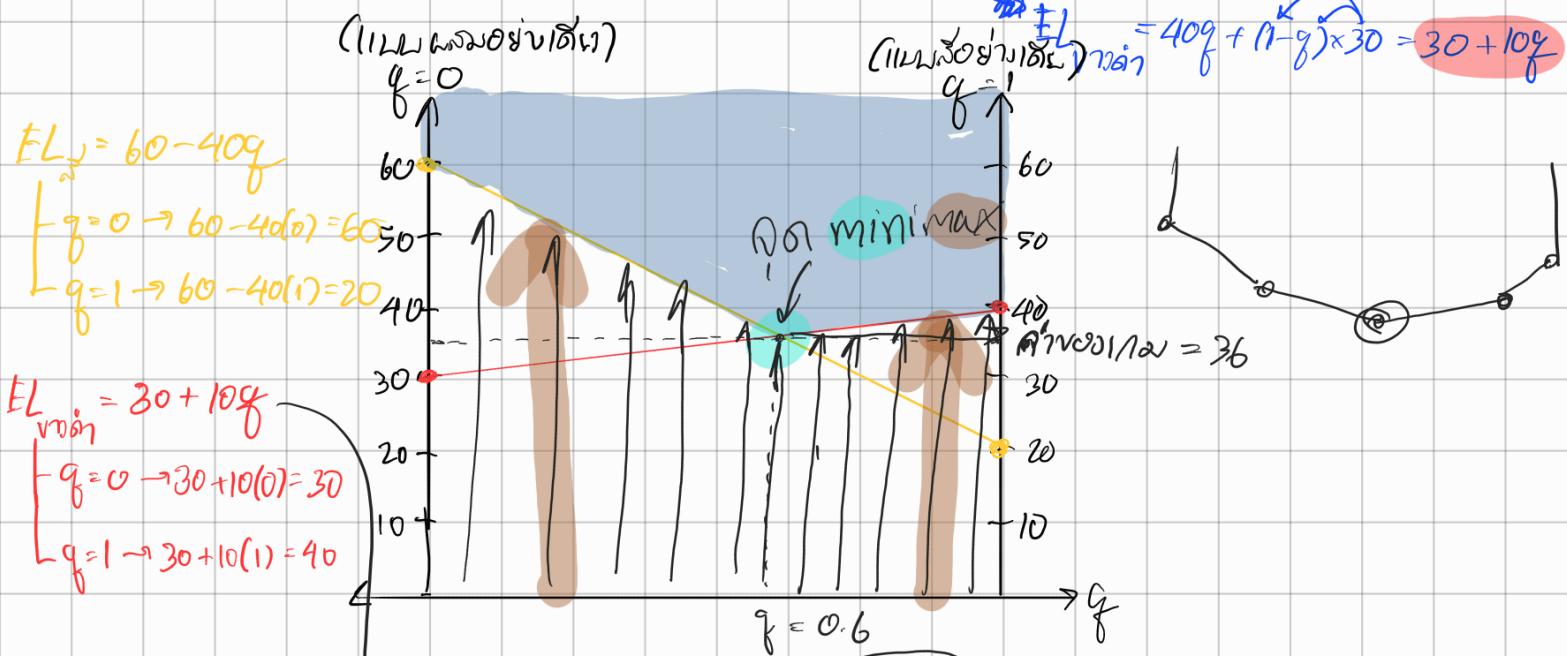
q = ດ້ວຍສົງເນດາໃຫຍ່ກົງໃຫຍ່ໄລ່ຈະກັບດ່ວຍ

$1 - q = \text{ចំនួនរលករាយការណ៍នៃសម្រាប់រាយការណ៍ទាំងអស់}$

စိတ်ချုပ်သမာမိနက်
ဂျေဘမ်ချုပ်သမာမိနက်

ร้านขาว	ร้านดำ		
	แบบสี	แบบขาวดำ	แบบผสม
แบบสี	20	30	60
แบบขาวดำ	40	45	30

Expected Loss



$$\begin{aligned} EL_{\text{vmax}} &= 30 + 10q \quad \curvearrowleft \\ q = 0 &\rightarrow 30 + 10(0) = 30 \\ q = 1 &\rightarrow 30 + 10(1) = 40 \end{aligned}$$

$$60 - 40g = 30 + 10g$$

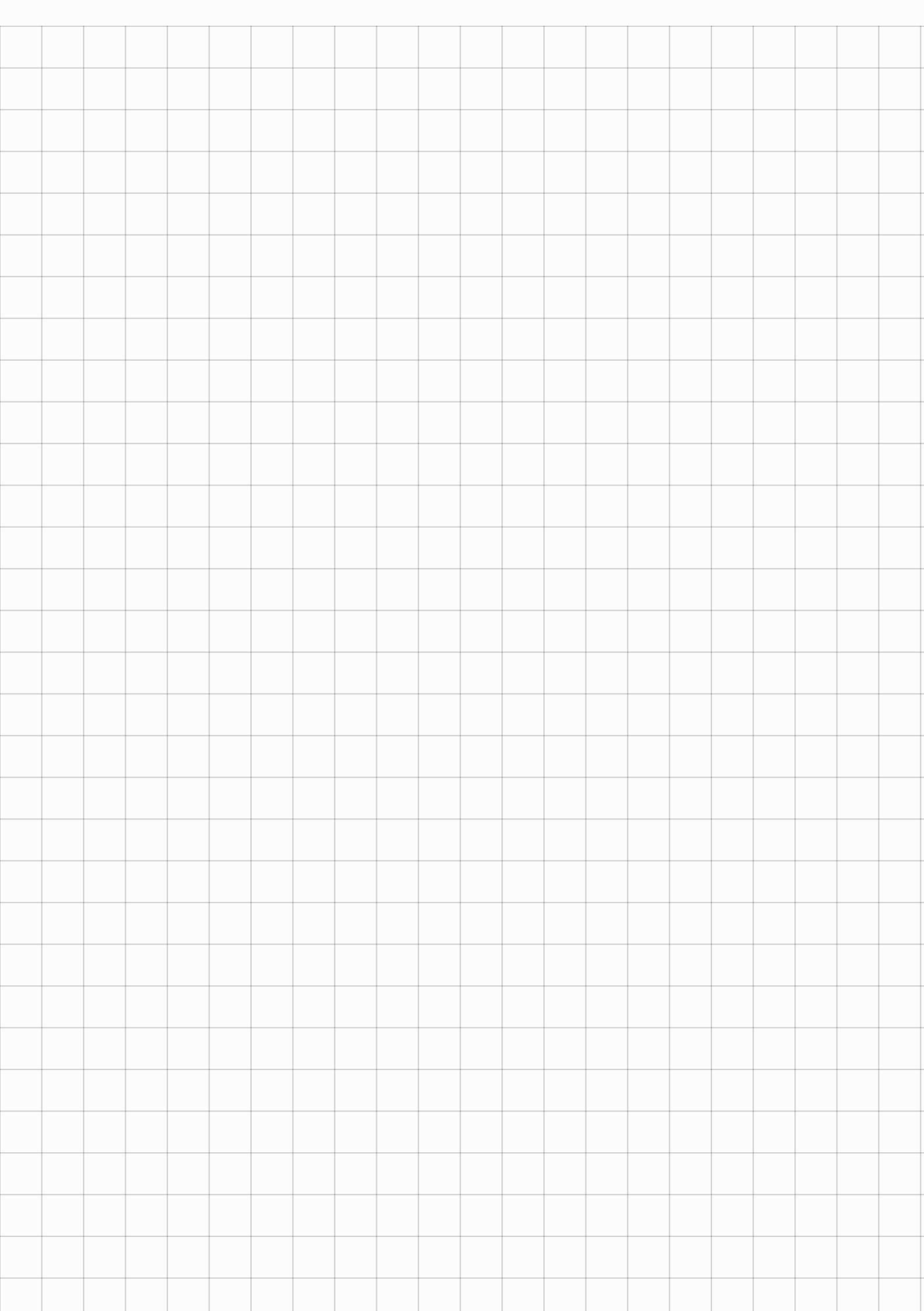
$$60 - 30 = 10g + 40g$$

$$30 = 50g$$

$$g = \frac{30}{50} = 0.60$$

$$\text{Average} = 30 + 10(0.6) = 36$$

(ព្រៃកិច្ចការណ៍នៃក្រសួងបណ្តុះបណ្តាលរាជរាជ្យ)



6.4 การจัดรูปปัญหาเกมผลรวมเป็นคุณย์ให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น

CHAPTER 7

ตัวแบบแควคอย (Queuing Theory)

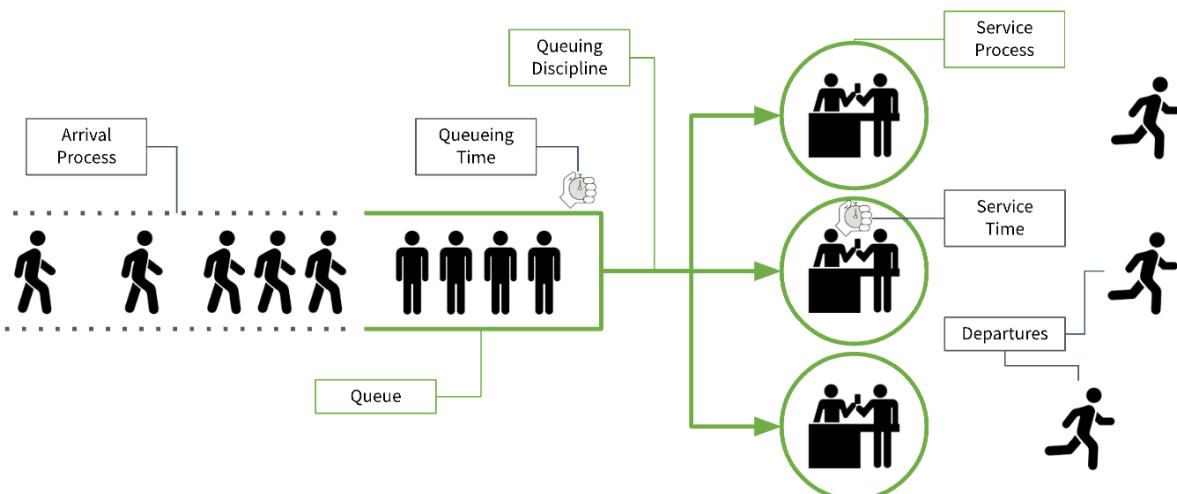
7.1 บทนำ

- ◇ ระบบแควคอย (การเข้าคิว) คือระบบที่มีผู้ให้บริการและมีผู้มารับบริการ โดยที่ผู้รับบริการอาจจะได้รับบริการทันที หรืออาจจะต้องรอเพื่อรับบริการตามลำดับ
- ◇ เป้าหมายของบทนี้คือวิเคราะห์และอธิบายระบบการเข้าแควแบบต่าง ๆ ในแง่ของต้นทุนและแรงงาน

7.2 โครงสร้างของระบบแควคอย

โครงสร้างสำคัญของระบบแควคอยประกอบด้วย

1. ลูกค้า (ผู้มาใช้บริการ): ลักษณะการมาเป็นอย่างไร (อัตราการมา)
2. รูปแบบของระบบบริการ: มีกี่แท่ง มีกี่หน่วยบริการ และกระบวนการต่อจากการให้บริการของหน่วยบริการเป็นอย่างไร
3. หน่วยให้บริการ: อัตราการให้บริการเป็นอย่างไร



7.2.1 ลักษณะของลูกค้า

จำนวนผู้เข้ารับบริการ:

- ◊ มีผู้เข้ารับบริการได้ไม่จำกัด
- ◊ มีผู้เข้ารับบริการได้จำกัด

นอกจากประดิ่นเรื่องความจำกัดของผู้เข้าคิวแล้ว ยังมีประดิ่นเรื่องอัตราการมาเข้ารับบริการ (arrival rate) ซึ่งมักสมมติเป็น 2 รูปแบบ

- ◊ ผู้เข้ารับบริการมาแบบอัตราคงที่
- ◊ ผู้เข้ารับบริการมาแบบสุ่ม ซึ่งมักถูกสมมติให้สุ่มด้วยการแจกแจงแบบปัวซง (Poisson distribution)

ทั้งนี้การแจกแจงความน่าจะเป็นของการมาเข้ารับบริการอาจมีการแจกแจงแบบอื่นได้เช่นกันขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมของแต่ละธุรกิจ

Arrival Rate: Poisson distribution

คุณสมบัติ 7.1: การแจกแจงปัวซงของอัตราการเข้ารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนผู้เข้ารับบริการในช่วงระยะเวลาที่กำหนด เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบปัวซงที่อัตราเฉลี่ยของการเข้ารับบริการมีค่าเท่ากับ λ คนต่อหน่วยเวลา กล่าวคือ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการ x คนมีค่าเท่ากับ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

ตัวอย่าง 7.2.1: Warm-up Poisson

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้จำนวนผู้ใช้บริการห้างสรรพสินค้าแห่งนี้มีการแจกแจงแบบปัวซง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการ 15 คน
2. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการไม่เกิน 5 คน
3. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้าใช้บริการเกิน 5 คน

Arrival Time Interval: Exponential distribution

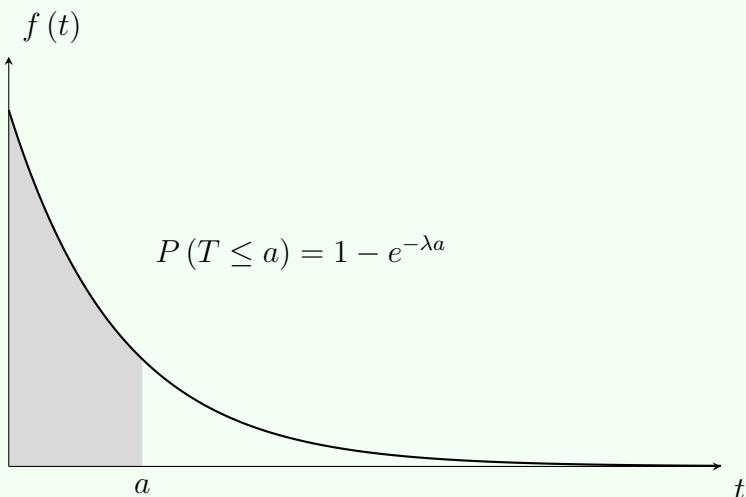
นอกจากการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้เข้าใช้บริการที่มีการแจกแจงแบบปั่วชงแล้วนั้น ยังมีการแจกแจงอีกแบบที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวกับข้อกันคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของระยะเวลาห่างเวลาระหว่างการเข้ามาขอรับบริการ (arrival time interval)

คุณสมบัติ 7.2: การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลของระยะเวลาห่างเวลาระหว่างการเข้ามาขอรับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะเวลาห่างเวลาระหว่างการเข้ามาขอรับบริการ เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่มีอัตราการเข้ามาขอรับบริการเท่ากับ λ คนต่อหน่วยเวลา กล่าวคือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเวลา T คือ

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

ซึ่งจะได้ว่าความน่าจะเป็นสะสม $F(a) = P(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$



ตัวอย่าง 7.2.2: Warm-up Exponential

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้การเข้าใช้บริการเป็นกระบวนการปั่วชง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ามาใช้บริการภายใน 30 นาที
2. ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีผู้เข้ามาใช้บริการในช่วง 20 นาที

7.2.2 ลักษณะของแอกคอด

7.2.2.1 รูปแบบของระบบ

1. ระบบช่องทางเดียว-ขั้นตอนเดียว: ตัวอย่าง เช่น ตู้เอทีเอ็ม 1 ตู้
2. ระบบช่องทางเดียว-หลายขั้นตอน: ตัวอย่าง เช่น การจ่ายยาในโรงพยาบาลขนาดเล็กที่มี 1 เคาน์เตอร์จ่ายยาและ 1 เคาน์เตอร์เก็บเงินที่ผู้ป่วยจะต้องเข้าคิวจ่ายเงินก่อนแล้วค่อยเข้าคิวรับยาในขั้นตอนถัดไป
3. ระบบหลายช่องทาง-ขั้นตอนเดียว: ตัวอย่าง เช่น ตู้ซื้อเหรียญโดยสาร MRT บางสถานีที่มีการเข้าคิว 1 ແລະเพื่อกระจายคนไปตู้หลายตู้
4. ระบบหลายช่องทาง-หลายขั้นตอน: ตัวอย่าง เช่น แผนกจ่ายยาในโรงพยาบาลใหญ่ที่แต่ละขั้นตอนมีผู้หั่งบริการมากกว่า 1 คน

7.2.2.2 ความยาวของแอกคอด

1. จำกัด: เช่น ในกรณีที่พื้นที่การเข้าแอกคอดจำกัดทำให้มีอีกคนไม่สามารถเข้ามาเพิ่มได้อีกจนกว่าจะมีที่ว่าง เช่น ปืนน้ำมัน
2. ไม่จำกัด: เช่น เอกสารที่รอการพิมพ์ หรือระบบการจองที่ไม่ต้องอาศัยพื้นที่ทางกายภาพ

7.2.3 ลักษณะของหน่วยให้บริการ

ในท่านองเดียวกันกับลักษณะการเข้ามาของลูกค้า เราจะสมมติให้เวลาของการให้เป็นบริการเป็นกระบวนการปั่วชง เช่นกัน กล่าวคือ

- ◊ การแจกแจงของเวลาให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล: กำหนดให้ μ เป็นอัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (คนต่อหน่วยเวลา) จะได้ว่า $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ เมื่อ $t > 0$ ซึ่งจะได้ตามนี้ $P(T > t) = e^{-\mu t}$
- ◊ การแจกแจงของจำนวนคนที่ให้บริการได้ในหน่วยเวลาเป็นแบบปั่วชง: กล่าวคือ $P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$

ตัวอย่าง 7.2.3: อัตราการ กับ เวลาที่ใช้

จงหาอัตราของการให้บริการของหน่วยบริการหนึ่ง เมื่อกำหนดให้หน่วยบริการนั้นมีใช้เวลาให้บริการ 3 นาทีต่อคน

7.3 ตัวแบบแควคอย (เบื้องต้น)

ทั้งนี้ลักษณะของแควคอยที่เราจะทำการศึกษาจะมีลักษณะดังต่อไปนี้

- ◊ แควคอยขั้นตอนเดียว
- ◊ หน่วยบริการมีได้ตั้งแต่ 1, 2, ..., หรือ n หน่วยบริการ
- ◊ มาก่อนได้รับบริการก่อน
- ◊ การมารับบริการและการให้บริการเป็นแบบปัวซง (จำนวนครั้งเป็นปัวซง และระยะเวลาเป็นเอกซ์โพนเนเชียล)

7.3.0.1 Kendall Notation

เราจะเขียนรูปแบบแควคอยเป็นสัญลักษณ์แบบ Kendall Notation ดังนี้

นิยาม 7.3.1: Kendall Notation

$$A/B/s$$

โดยที่

A = การแจกแจงของอัตราการมารับบริการ

B = การแจกแจงของอัตราการให้บริการ

s = จำนวนหน่วยของผู้ให้บริการ

และสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการแจกแจงมีดังนี้

M = แจกแจงแบบปัวซง

D = แจกแจงแบบคงที่

G = อัตราการให้บริการมีการแจกแจงแบบปกติ

7.3.0.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แควคอย

นิยาม 7.3.2: Notation

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แอกคอยมีดังนี้

λ = อัตราการเข้ามาขอรับบริการ (จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่เข้ามาขอรับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา)

μ = อัตราการให้บริการ (จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่หน่วยบริการสามารถให้บริการได้เสร็จในหนึ่งหน่วยเวลา)

ρ = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน (มีผู้รับบริการอยู่ในหน่วยบริการ)

P_0 = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

L = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ (ทั้งที่กำลังรับบริการและกำลังรอในแอกคอย)

L_q = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแอกคอย

W = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าเสียไปในการรับบริการในระบบตั้งแต่เข้ามานั่งเริ่ม

W_q = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าเสียไปในการรอคิวยอดอยู่ในแอกคอย

P_n = ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ามาขอรับบริการจำนวน n คนในระบบแอกคอย

7.3.1 ตัวแบบ M/M/1

แอกคอยที่มีอัตราการเข้ารับบริการแบบสุ่มแบบกระบวนการปั่วซุง, มีอัตราการให้บริการแบบปั่วซุง และมี 1 หน่วยบริการ (กล่าวคือถ้ามี 1 คนใช้บริการอยู่คนที่เหลือต้องเข้าแอกคอยจนกว่าจะใช้บริการเสร็จและออกจากหน่วยบริการ)

ทฤษฎีบท 7.3.1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณของแอกคอยแบบ M/M/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

โดยที่สมมติฐานของตัวแบบนี้คือ $\lambda < \mu$

จริง ๆ แล้วสูตรเหล่านี้มีที่มาจากการใช้การคำนวณเชิงความน่าจะเป็น (ความน่าจะเป็น, ตัวแปรสุ่ม, การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง, ค่าคาดหวัง) นักศึกษาที่แม่นในส่วนของการคำนวณเหล่านี้จะสามารถคำนวณตัวแปรต่าง ๆ ได้ด้วยตัวเองโดยที่ไม่จำเป็นต้องรู้สูตรเหล่านี้ก็ได้

ตัวอย่าง 7.3.1: M/M/1

บริการถ่ายเอกสารที่ร้านแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายเอกสาร 1 เครื่องให้บริการแบบมาก่อนได้ก่อน โดยที่ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายเอกสารจะเข้ามาแบบสุ่มปั่นในอัตรานาทีละ 2 คน ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายเอกสารให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย $1/4$ นาทีต่อลูกค้า จงวิเคราะห์ระบบแควคอยของบริการเครื่องถ่ายเอกสาร

ตัวอย่าง 7.3.2: M/M/1

ร้านค้าแห่งหนึ่งกำลังวางแผนพัฒนาเรื่องการรอคิวของลูกค้าเพื่อไม่ให้ลูกค้าต้องรอคิวนานจึงได้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมลูกค้าและพบว่าจำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 20 คนต่อชั่วโมงและมีการแจกแจงแบบปั่นของ ในส่วนของทางร้าน พนักงานของร้านสามารถให้บริการคิดชำระเงินได้เฉลี่ย 1 คนต่อ 2 นาทีและมีการแจกแจงของเวลาการให้บริการแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ปัจจุบันทางร้านมีพนักงาน 1 คน จงวิเคราะห์แควคอยของร้านค้าแห่งนี้

7.3.2 ตัวแบบ M/M/s

ทฤษฎีบท 7.3.2: การวิเคราะห์เชิงปริมาณของแควคอยแบบ M/M/s

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}, \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right]}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{เมื่อ } n \leq s \\ P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} & \text{เมื่อ } n > s \end{cases}$$

$$L_q = P_0 \left[\frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! (1 - \rho)^2} \right], \quad L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

โดยที่สมมติฐานของตัวแบบนี้คือ $\lambda < s\mu$

ตัวอย่าง 7.3.3: M/M/s

บริการถ่ายเอกสารที่ร้านแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายเอกสาร 5 เครื่องให้บริการแบบมาก่อนได้ก่อน โดยที่ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายเอกสารจะเข้ามาแบบสุ่มปั่วชิงในอัตรานาทีละ 2 คน ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายเอกสารให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 1/4 นาทีต่อลูกค้า จงวิเคราะห์ระบบแควคอยของบริการเครื่องถ่ายเอกสาร

7.3.3 ตัวแบบ M/G/1

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.3.4 ตัวแบบ M/D/1

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.4 ตัวแบบแควคอย (ทฤษฎี)

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.5 การวิเคราะห์ระบบแควคอยเพื่อการตัดสินใจทางธุรกิจ

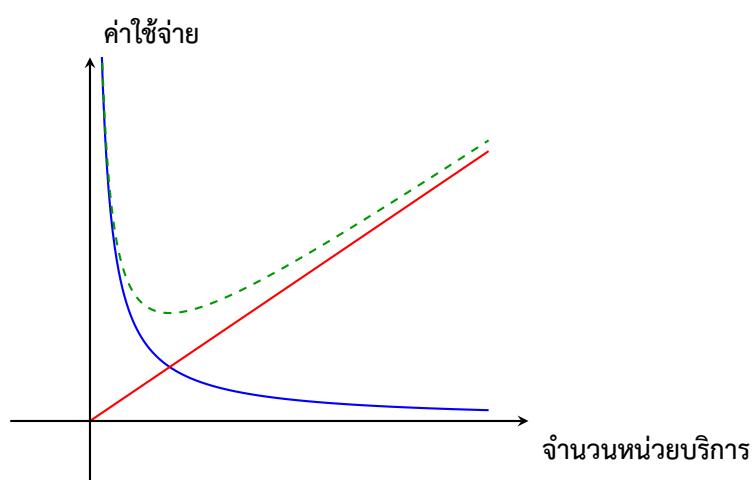
ชัดเจนว่าวิธีการหนึ่งที่จะทำให้ลูกค้าไม่ต้องรอคoyerคือการเพิ่มหน่วยบริการเข้าไปให้มากพo หรือมากกว่าลูกค้าที่เข้ามา ก็จะทำให้ลูกค้าทุกคนสามารถได้รับบริการได้ทันที ทว่าวิธีการดังกล่าวอาจจะเป็นไปไม่ได้ เพราะใช้ต้นทุนสูงหรือทรัพยากรไม่เพียงพอ (เช่นพื้นที่ร้าน) เราจึงต้องทำการ trade-off กันระหว่างจำนวนหน่วยบริการกับต้นทุนที่ใช้

ทั้งนี้ ต้นทุนที่จะนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์แควคอยมี 2 หมวดดังนี้

1. ต้นทุนการให้บริการ (service cost): เช่นค่าแรงงาน ค่าเช่าสถานที่ ที่แปรผันตรงกับจำนวนหน่วยบริการ กล่าวคือ ยิ่งเพิ่มหน่วยบริการมากขึ้น ก็จะใช้ต้นทุนมากขึ้นเรื่อย ๆ
2. ต้นทุนในการรอคoyerของลูกค้า (waiting cost): เป็นค่าเสียหายที่เกิดจากการรอคoyerที่ยิ่งลูกค้ารออยนานเท่าไหร่ ก็จะยิ่งมีค่าใช้จ่ายมากขึ้นเท่านั้น เช่นการประเมินความพึงพอใจของลูกค้า หรือต้นทุนของบริการเพิ่มเติมที่ลูกค้าได้รับขณะรอคิว (เช่นร้าน Haidilao มีบริการทำเล็บหรือขมฟรีของลูกค้าที่กำลังรอคิว)

$$\text{ค่าใช้จ่ายรวม} = \text{ต้นทุนการให้บริการ} + \text{ต้นทุนการรอคoyerของลูกค้า}$$

$$TC = s \cdot C_s + L \cdot C_w$$



7.5.1 การกำหนดจำนวนหน่วยบริการ

โจทย์ที่มักจะถูกถามเป็นอันดับแรกคือเราควรจะทำหน่วยบริการกี่หน่วยดีเพื่อให้เพียงพอที่จะทำให้ลูกค้าพอใจโดยที่ไม่ต้องใช้ต้นทุนอะจันเกินไป ซึ่งวิธีการคือการวิเคราะห์หาจุดต่ำสุดของค่าใช้จ่ายรวม แต่ในทางปฏิบัติ เนื่องจากเราต้องการหาจุดเหมาะสมสุดของตัวแปรเดียวที่เป็นจำนวนนับ จึงเป็นการง่ายที่จะทำการวิเคราะห์หาต้นทุนรวมของ $M/M/1$, $M/M/2$, ... ไปเรื่อย ๆ จนเจอกุดที่ให้ค่าต่ำสุด (ลดลงเรื่อย ๆ จนเจอกุดที่เพิ่มอีกหน่วยแล้วมีต้นทุนมากขึ้น)

ตัวอย่าง 7.5.1

จากตัวอย่าง 7.3.2 ที่จำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 20 คนต่อชั่วโมง และมีการแจกแจงแบบปั่วของ พนักงานของร้านสามารถให้บริการคิดชำระเงินได้เฉลี่ย 1 คนต่อ 2 นาที และมีการแจกแจงของเวลาการให้บริการแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล สมมติว่าปัจจุบันมีพนักงาน 3 คนอยู่แล้ว จงหาว่าร้านนี้ควรจ้างพนักงานบริการชำระเงินเพิ่มอีกกี่คนมาทำงาน

7.5.2 การตัดสินใจจัดรูปแบบแควคอย

ตัวอย่าง 7.5.2

จากตัวอย่าง 7.5.1 มีนักวิเคราะห์เสนอว่าแทนที่จะเพิ่มจำนวนพนักงานให้ลองเปลี่ยนรูปแบบเป็นแต่ละพนักงานมีแควคอยเป็นของตัวเอง และลูกค้าที่เข้ามาจะกระจายตัวกันตามแควคอยทั้ง 3 กล่าวคือลองเปลี่ยนจาก $M/M/3$ เป็น $M/M/1$ ทั้งหมด 3 ระบบอิสระจากกัน จงวิเคราะห์ต้นทุนรวมของระบบใหม่นี้

7.5.3 การตัดสินใจในลักษณะอื่น ๆ

ตัวอย่าง 7.5.3

บริษัทโลจิสติกแห่งหนึ่งให้บริการที่ไปเกี่ยวกับการขนส่งและจัดเก็บสินค้า โดยปัจจุบันมีโภดังเก็บสินค้าเพียงแห่งเดียว ซึ่งมีที่เทียบรถบรรทุกเพื่อขนส่งสินค้าขึ้นลงได้ครั้งละ 1 คัน รถเข้ามาเฉลี่ยทุก ๆ 40 นาที แจกแจงแบบอีกซ์โพเนนเชียล การขนสินค้าขึ้นลงใช้เวลาเฉลี่ยคันละ 30 นาที แจกแจงแบบอีกซ์โพเนนเชียล ถ้าบริษัทต้องการให้รถแต่ละคันใช้เวลาในระบบการขนถ่ายสินค้าไม่เกินคันละ 1 ชั่วโมง ควรใช้เวลาในการขนสินค้าคันละกี่นาที

CHAPTER 8

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมสุดต่าง ๆ ในเชิงธุรกิจ (Optimization Problem in Business)

- 8.1 Zero-sum game as Linear Programming
- 8.2 Transportation Problem
- 8.3 Scheduling Problem
- 8.4 Matching Problem

Appendices

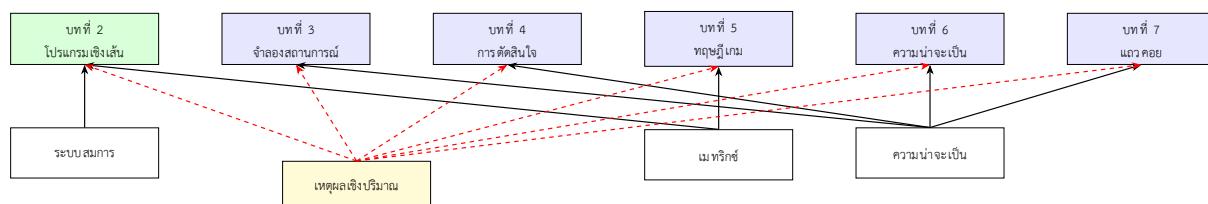
APPENDIX A

คณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์เชิงปริมาณ

ในบทแรก เราจะเริ่มจากการปูพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่จำเป็นจะต้องใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาวิเคราะห์เชิงปริมาณกัน ก่อน ทั้งนี้นักศึกษาไม่จำเป็นจะต้องศึกษาทั้งบทภายนอกครั้งเดียว เนื่องจากแต่ละบทนั้นจะมีคณิตศาสตร์ที่ต้องใช้แตกต่างกันไป นักศึกษาสามารถใช้บทนี้เป็นบททบทวนก่อนขึ้นเนื้อหาหลักในแต่ละบทได้

สำหรับทางอาจารย์ผู้สอนนั้น ไม่ควรที่จะใช้บทนี้เป็นบทเรียนหลักที่สอนทั้งหมดภายในคราวเดียว เนื่องจากจนกว่าจะถึงตอนที่นักศึกษาจะต้องใช้จริงนั้น นักศึกษาเองก็อาจจะจำรายละเอียดไม่ได้แล้ว ดังนั้น ทางผู้เขียนจึงขอแนะนำว่าให้หยิบไปบางส่วนขึ้นกับเนื้อหาหลักที่กำลังจะสอน และไม่ควรมีการอภิสูบเก็บคะแนนสำหรับบทนี้ เนื่องจากเป็นความรู้พื้นฐานของเนื้อหาหลัก

อาจารย์ผู้สอนหรือนักศึกษาที่ศึกษาด้วยตัวเองสามารถใช้แผนภาพด้านล่างนี้เป็นแนวทางในการศึกษาในแต่ละหัวข้อ:



จากแผนภาพจะเห็นว่าหัวข้อการให้เหตุผลเชิงปริมาณเป็นเนื้อหาสำคัญของบทนี้ที่จะข้ามไม่ได้ เนื่องจากเป็นบทที่ว่าด้วยทักษะการแปลปัญหาโลกจriging ให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ หรือกล่าวได้ว่าเป็นหัวข้อเกี่ยวกับ mathematical literacy ซึ่งจากประสบการณ์ของผู้เขียนนั้น พบร่วมนักเรียนนักศึกษาส่วนใหญ่ที่เรียนหัวข้อทางคณิตศาสตร์ หรือหัวข้อประยุกต์ทางคณิตศาสตร์ไม่เข้าใจ ไม่ได้เกิดจากการเรียนดันน้อหานในหัวข้อมิเข้าใจ แต่เกิดจากการที่ไม่เข้าใจตั้งแต่แนวคิดตั้งต้นที่จะเข้มปัญหาในโลกจriging ให้กลายเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์และใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เข้าไปช่วยแก้ปัญหา ซึ่งทางผู้เขียนค่อนข้างมีความเชื่อว่าสิ่งที่ยากไม่ใช่การเรียนเครื่องมือคณิตศาสตร์ เพราะอย่างน้อยก็ใช้วิธีจำไปสอบ หรือตอนทำงานจริงก็เปิดคู่มือทำตามได้ แต่สิ่งที่ยากจริง ๆ คือการที่จะนำคณิตศาสตร์และปัญหาจริงมาเชื่อมโยงกันอย่างไร ดังนั้นจึงขอเน้นย้ำว่า หัวข้อการให้เหตุผลเชิงปริมาณนั้น ถึงแม้จะอยู่หัวข้อสุดท้ายของบท แต่ก็ไม่ควรละเลย

ในบทที่ 1 เราจะเรียนเกี่ยวกับการหาค่ามากสุดหรือน้อยสุด (เรียกว่าการทำ optimization) กับปัญหาที่ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขอยู่ในรูปแบบที่เรียกว่า รูปแบบเชิงเส้น (linear form) กล่าวคือ เป็นรูปแบบที่ตัวแปรจะไม่มีการดำเนินการอื่นเลียนอกจากการบวกหรือลบ (ยกเว้นการคูณด้วยค่าคงที่ เพราะค่าคงที่ไม่ใช่ตัวแปร) ดังนั้นเราจะมาศึกษาเกี่ยวกับฟื้นฟูฐานของระบบเชิงเส้นเบื้องต้นกันในหัวข้อนี้ ซึ่งเราจะเริ่มด้วยการทำความเข้าใจสิ่งที่เรียกว่าเชิงเส้นกันในหัวข้ออย่าง A.1.1 และต่อด้วยระบบสมการเชิงเส้นในรูปแบบของความหมายเชิงเรขาคณิตรวมถึงการแก้สมการเบื้องต้นสำหรับผู้ที่ไม่พื้นฐานการแก้ระบบสมการฯ

ทั้งนี้ ก่อนที่จะเริ่มนื้อหาจริง ๆ จะมี 2 คำสำคัญที่ต้องแยกความหมายให้ได้ นั่นคือค่าคงที่ (constant) และตัวแปร (variable) โดยที่ค่าคงที่คือสิ่งที่ถูกกำหนดค่าตายตัวมาแล้วตั้งแต่แรก ถึงแม้ในการเขียนบางครั้งจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษ ก็ตาม แต่ตัวแปรคือสิ่งที่สามารถเปลี่ยนค่าได้ทำให้ระบบได้ผลลัพธ์ที่เปลี่ยนไป โดยถ้าเปรียบเทียบกับระบบการทำงานเครื่องจักรแปลงสภาพวัตถุดิบ ค่าคงที่อาจเทียบได้กับรุ่นของอะไหล่ส่วนต่าง ๆ ซึ่งในบางครั้ง ถ้าเราเปลี่ยนค่าคงที่ไป ก็คือ เป็นการกล่าวถึงคนละระบบหรือคนละเครื่องจักรทันที แต่เมื่อเรามีเครื่องจักรแล้ว วัตถุดิบที่ใส่เข้าไปเปรียบเสมือนเป็นตัวแปรที่ในเครื่องจักรเครื่องนั้นจะให้ผลลัพธ์เป็นอะไรออกมาขึ้นกับว่าเราใส่วัตถุดิบที่อยู่ตัวแปรอะไรเข้า

ไม่ว่าจะค่าคงที่หรือตัวแปรก็ตาม ถ้าเราอธิบายคณิตศาสตร์ในเวลาของการอธิบายเชิงนามธรรม ก็มักจะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้งคู่ ดังนั้นจะพึงละเอียดไว้เสมอว่าตัวอักษรภาษาอังกฤษไม่ใช่ตัวแปรเสมอไป จะเป็นค่าคงที่หรือตัวแปร ขึ้นอยู่กับบริบทหรือหน้าที่ของสิ่งที่เรากำลังอธิบาย

A.1.1 พังก์ชันเชิงเส้นและสมการเชิงเส้น

ก่อนอื่น เราจะมาเริ่มกันที่นิยามของสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อนี้กันก่อน

นิยาม A.1.1: Linear Expression, Linear Equation and Linear Function

นิพจน์เชิงเส้น (Linear Expression) ของตัวแปร x_1, \dots, x_n คือรูปแบบนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปแบบ

$$c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

โดยที่ c_i คือค่าคงที่ กล่าวคือมี 2 ตัวแปรใด ๆ ที่ดำเนินการอื่นนอกจากการบวกหรือลบ ยกเว้นการคูณกันระหว่างค่าคงที่กับตัวแปร (ทั้งนี้เรายังคงจัดให้นิพจน์ที่มีแต่ค่าคงที่เป็นนิพจน์เชิงเส้นชั้นกัน)

สมการเชิงเส้น (Linear Equation) คือสมการ (การเท่ากัน) ที่ทั้งสองฝั่งของสมการอยู่ในรูปแบบนิพจน์เชิงเส้น

พังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือพังก์ชันที่กำหนดกฎการคำนวณด้วยนิพจน์เชิงเส้น กล่าวคือ พังก์ชัน f จะเป็นพังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร x_1, \dots, x_n ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

สาเหตุที่เรียกว่าเชิงเส้น ก็มีที่มาจากการเส้นตรงในเรขาคณิต ซึ่งคือแนวทางการเดินทางที่มีพฤติกรรมว่าอัตราการเปลี่ยนค่ามีค่าคงที่และไม่ขึ้นกับค่าคงตัวแปรอื่น โดยจะได้นำตัวอย่างมาอธิบายในหัวข้อถัดไป

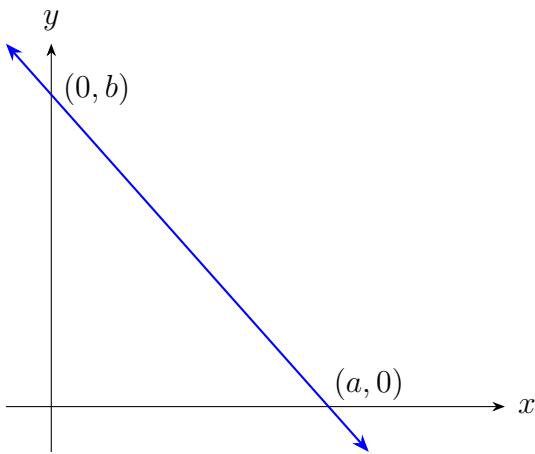
A.1. ระบบสมการเชิงเส้น

A.1.1.1 ตัวอย่างความสัมพันธ์เชิงเส้น 2 มิติ: กราฟเส้นตรง

A.1.1.1.1 สมการสูตรเส้นตรง

ขอเริ่มจากสิ่งที่ง่ายกว่า ซึ่งคือเมื่อมีสมการแล้วอยากได้กราฟเส้นตรงของสมการ

- กรณีไม่ได้ผ่านจุดกำเนิด: สามารถทำได้โดยการหาจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y

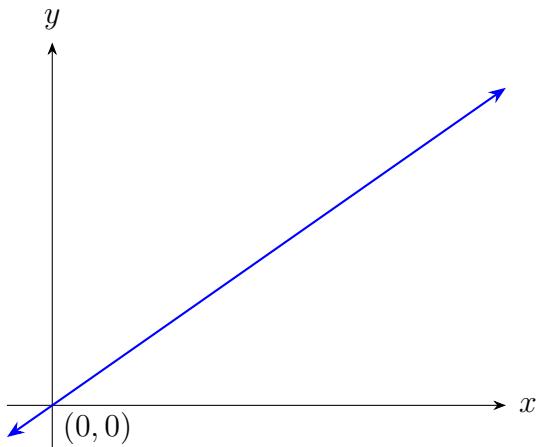


- จุดตัดแกน x คือจุดที่มีค่า $y = 0$ ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบ $(a, 0)$ และสามารถหาได้จากการแทนค่า $y = 0$ ลงในสมการแล้วแก้สมการหาค่า x
- ในทำนองเดียวกัน เราจะสามารถหาจุดตัดแกน y ในรูป $(0, b)$ ได้ด้วยการแทนค่า $x = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า y

ตัวอย่าง A.1.1: วาดกราฟเส้นตรงที่ไม่ผ่านจุดกำเนิด

จવัดกราฟของเส้นตรงของสมการ $3x + 4y = 24$

2. กรณีผ่านจุดกำเนิด: กรณีสมการอยู่ในรูป $Ax + By = 0$ ในกรณีนี้ทั้งระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ต่างก็เป็น 0 ทั้งคู่ จึงทำให้จุดทั้ง 2 คือจุดเดียวกันคือจุด $(0, 0)$ เพราะฉะนั้น จึงไม่มี 2 จุดให้ลากเชื่อมได้โดยง่ายเหมือนกรณีที่ผ่านมา



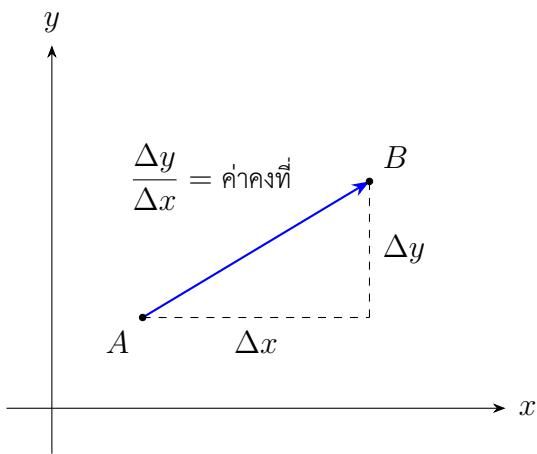
ในกรณีนี้เรารสามารถแก้ปัญหาได้โดยการหาจุดที่อื่นที่ไม่จำเป็นต้องอยู่บนแกนก็ได้ เช่นอาจจะแทนค่า $x = 1$ (หรือค่าอื่น ๆ แล้วแต่ความสะดวก) แล้วแก้สมการหาค่า y ได้จุด $(1, y)$ แล้วลากเชื่อมกับจุด $(0, 0)$

ตัวอย่าง A.1.2: วาดกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

จงวาดกราฟของเส้นตรงของสมการ $3x + 4y = 0$

A.1. ระบบสมการเชิงเส้น

A.1.1.1.2 เส้นตรงสู่สมการ



ซึ่งเมื่อลองกำหนดให้มีจุดตั้งต้น $A(x_0, y_0)$ เป็นจุดคงที่ และสมมติว่า $B(x, y)$ คือจุดตัวแปรใด ๆ ที่อยู่ในแนวเส้นตรงนี้ และสมมติว่าอัตราคงที่ดังกล่าวคือ m จะได้สมการว่า

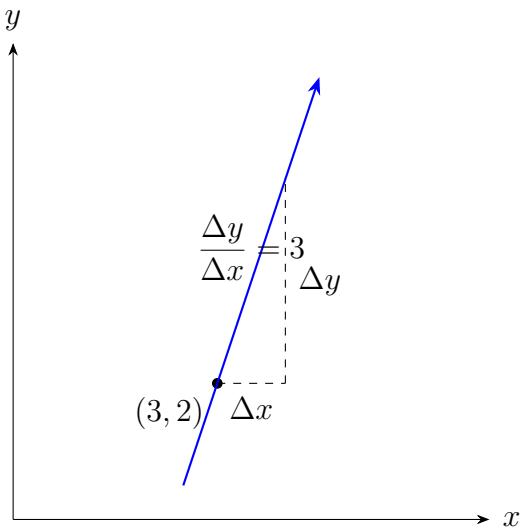
$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

และท้ายที่สุด จะได้สมการออกมาในรูปแบบ $y = (y_0 - kx_0) + mx$ ซึ่งจะเห็นว่ารูปสมการที่ได้จะอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น โดยที่มี $c_0 = y_0 - kx_0$ เป็นพจน์ค่าคงที่ และถ้าพิจารณาในรูปแบบของเส้นตรงทางเรขาคณิต

ค่า m ที่เป็นค่าคงที่คูณอยู่หน้าตัวแปร x จะเรียกว่า ความชัน (slope)

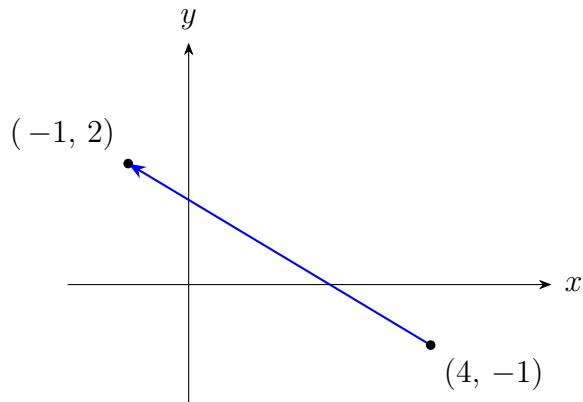
ตัวอย่าง A.1.3: การหาสมการของเส้นตรง (x, y)

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 2)$ และมีความชันเท่ากับ 3



ตัวอย่าง A.1.4: การหาสมการของเส้นตรง (x, y)

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, -1)$ และจุด $(-1, 2)$



A.1. ระบบสมการเชิงเส้น

A.1.1.2 ตัวอย่างความสัมพันธ์เชิงเส้น 3 มิติ: กราฟระนาบ x, y, z

เส้นตรงและสมการเส้นตรงที่ได้ศึกษาไปในหัวข้อที่แล้วนั้นเป็นตัวอย่างอย่างง่ายในระนาบพิกัด 2 มิติ (และตัวเส้นตรงเองเป็นวัตถุ 1 มิติ) กล่าวคือเราสามารถเขียนในรูปแบบ $0 = Ax + By + K$ หรือ $z = ax + by + k$ ได้โดยทั่วไปในระบบ 3 มิติ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนในรูปแบบ $z = ax + by + k$ ได้โดยทั่วไปในระบบ 3 มิติ

$$0 = Ax + By + Cz + K$$

(เส้นตรงใน 2 มิติก็สามารถเขียนได้ในทำนองเดียวกันคือ $0 = Ax + By + K$) หรือเขียนในรูปแบบพังก์ชันของค่า z คือ

$$z = ax + by + k$$

คุณสมบัติ A.1: เชิงเส้นในเชิงเส้น: กรณีตัวอย่าง 3 ตัวแปร

กำหนดความสัมพันธ์เชิงเส้น 3 ตัวแปร

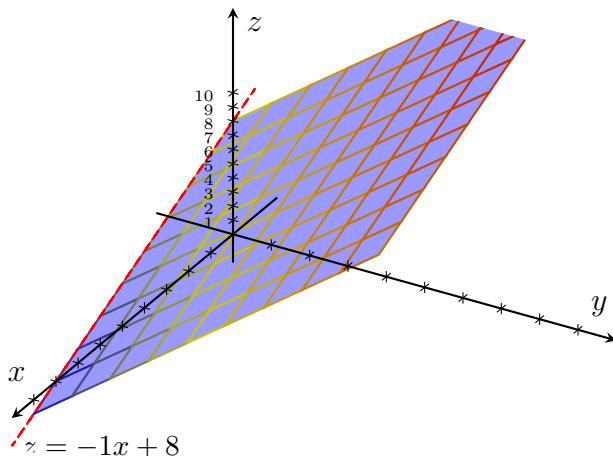
$$z = f(x, y) = ax + by + k$$

ถ้าสมมติให้ตัวแปรตัวหนึ่งเป็นค่าคงที่ (สมมติว่าเป็น $x = x_0$) จะได้สมการที่เหลือ 2 ตัวแปรเป็น

$$z = by + (ax_0 + k)$$

กล่าวคือ เราจะได้สมการเส้นตรงของตัวแปร y, z ซึ่งจะพบว่าไม่ว่าเราจะกำหนดตัวแปร x ให้เป็นค่าคงที่ใด ๆ ก็ตาม เราจะยังคงได้เส้นตรงความชัน b เท่าเดิม เปลี่ยนแค่จุดที่ตัดระนาบ $x - z$ (แนว $y = 0$) ซึ่งจะมีแนวทางเดินรอยตื้อคือ $z = ax + k$

ตัวอย่างเช่นเรารอกรากวัตกราฟของสมการ $z = -1x + 8$

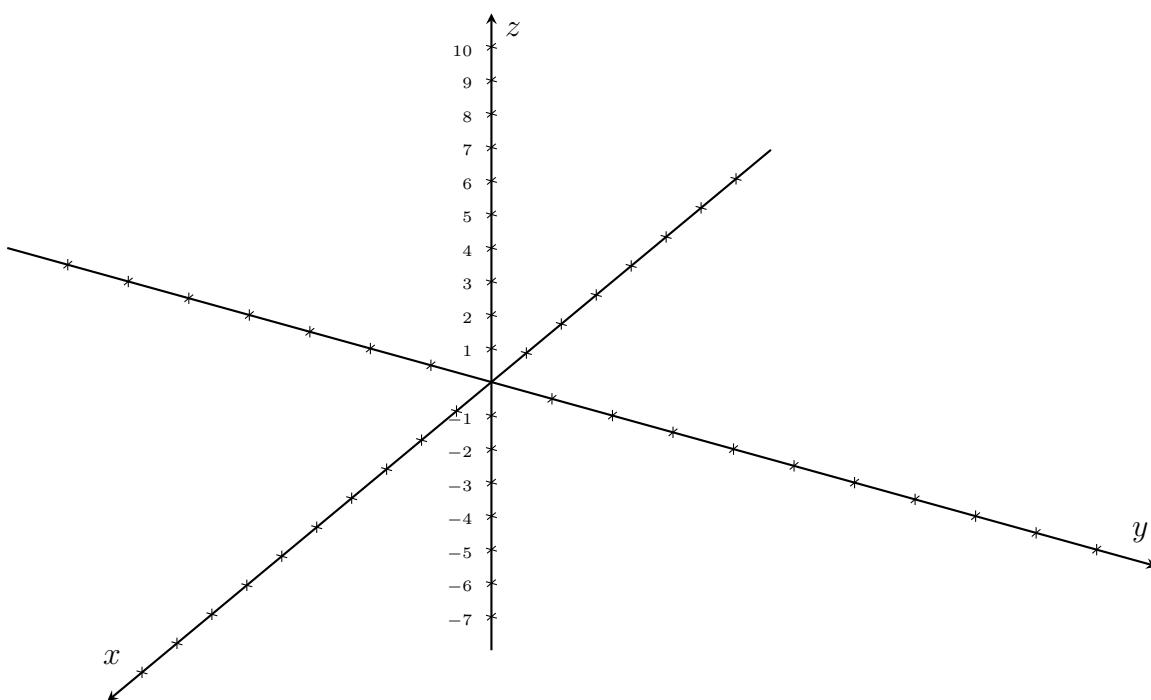


หลังจากที่ได้ลองพิจารณากราฟของสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรด้วยวิธีการกำหนดให้ตัวแปรหนึ่งเป็นค่าคงที่แล้วลองวาดเส้นตรงของสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรที่เหลือ จะพบว่ารูปที่ได้ เปรียบเสมือนการเลื่อนเส้นตรงไปตามแนวของเส้นตรงเส้นอีกเส้นหนึ่ง ทำให้ได้ออกมาในลักษณะแผ่นเรียบที่เรียกว่า “ระนาบ” (plane) ซึ่งคือวัตถุเชิงเส้นในระบบพิกัดสาม มิติ (ถึงแม้จะไม่ได้มีรูปร่างเป็นเส้นตรงก็ตาม)

ตัวอย่าง A.1.5: การหาสมการของเส้นตรง (x, y)

จงวาดกราฟของสมการระนาบ $3x + 5y - z = 5$

(challenge: ถ้าต้องการเดินໄต่ตามระนาบ เสมือนว่าระนาบคือส่วนหนึ่งของภูเขา จงหาว่าต้องหันหัวไปทางทิศไหนดีจะขึ้นได้เร็วที่สุด – ปัญหานี้จะเกี่ยวข้องกับหัวข้อการโปรแกรมเชิงเส้นที่อยู่ในบทที่ 1)



A.1.2 ระบบสมการเชิงเส้น: ความหมายเชิงรูปภาพของการแก้สมการ

เมื่อพูดถึงสมการเชิงเส้นเพียงหนึ่งสมการ ผลเฉลยก็คือสิ่งที่แทนค่าตัวแปรเข้าไปแล้วเป็นจริง ตัวอย่างเช่นเรามีสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร $y = 3x + 5$ ก็จะได้ว่า $(0, 5)$, $(-2, -1)$ หรือ $(5, 20)$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว และยังมีอีกมากมายหลายจุดที่ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการนั้น ซึ่งถ้ามองในรูปแบบการวาดกราฟ ผลเฉลยก็คือจุดในพิกัดฉากที่กราฟของสมการนั้นลากผ่านนั่นเอง

และเมื่อเรามีสมการเชิงเส้นมากกว่า 1 สมการมาพิจารณาพร้อมกัน สิ่งนี้จะถูกเรียกว่า “ระบบสมการเชิงเส้น” หรือ ก็คือระบบที่มีสมการเชิงเส้นหลายสมการ และผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นก็คือจุดที่สอดคล้องทุกสมการในระบบ หรือ ก็คือเมื่อวาดรูปแล้ว ทุกกราฟจะลากผ่านจุดนั้นหรือก็คือ จุดตัดร่วมของทุกกราฟนั่นเอง

A.1.2.1 ตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร: เส้นตรงตัดกัน

เส้นตรง 2 เส้นที่แตกต่างในระบบพิกัดฉาก 2 มิติสามารถวางตัวกันได้ 2 แบบคือ (1) ตัดกัน 1 จุด และ (2) ขนานกัน

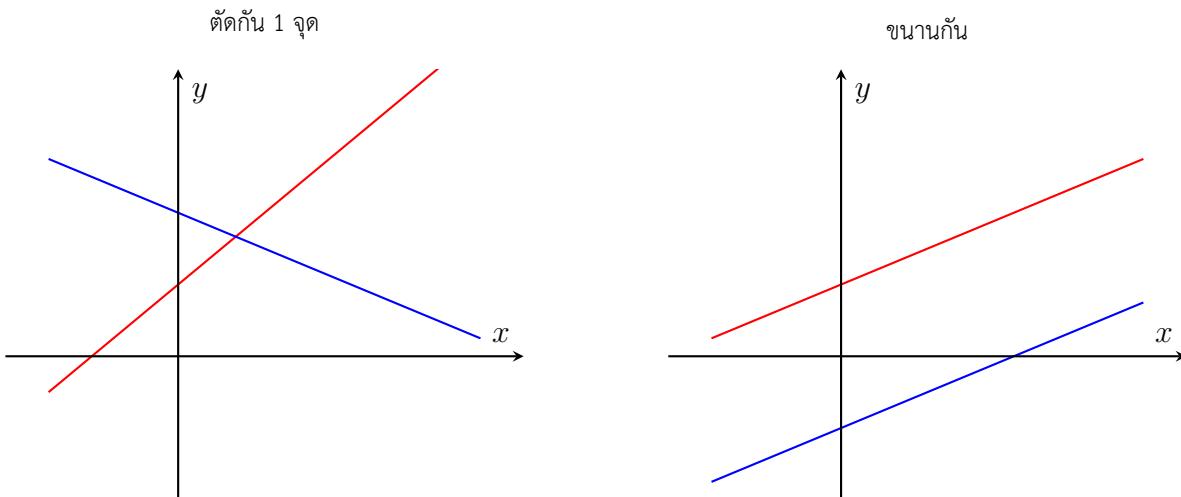


Figure A.1. เส้นตรง 2 เส้นสามารถวางตัวได้ 2 แบบ: ตัดกัน (ซ้าย) และ ขนานกัน (ขวา)

คำถามสำคัญที่ตามมาจะมีดังนี้

1. จะรู้ได้อย่างไรว่าสมการของเส้นตรง 2 เส้นนั้นเป็นเส้นที่แตกต่างกัน
2. และเมื่อทราบว่าแตกต่างกันแล้วนั้น จะรู้ได้อย่างไรว่าขนานหรือตัดกัน
3. และสุดท้าย เมื่อทราบแล้วว่าตัดกัน 1 จุด จะหาผลเฉลยตั้งกล่าวได้อย่างไร
สำหรับคำถามที่ 1 นั้น ต้องพึงระวังไว้เสมอว่าถึงแม้มีสมการเชิงเส้น 2 สมการจะใช้สัมประสิทธิ์ไม่เหมือนกันก็อาจจะเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกันได้ ตัวอย่างเช่น

$$0 = 3x + 5y - 7$$

$$0 = 15x + 25y - 35$$

สมการทั้งสองนี้มีกราฟเส้นตรงรูปเดียวกัน (ทำไม?)

ในขณะที่ระบบสมการนี้

$$0 = 3x + 5y - 7$$

$$0 = 15x + 25y - 3$$

เป็นกราฟเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกัน

ตัวอย่าง A.1.6: การแก้ระบบสมการ 2 ตัวแปร

จงแก้ระบบสมการ

$$0 = 3x + 5y - 7$$

$$0 = -2x + 3y - 3$$

พร้อมทั้งวิธีการรูปประกอบ

A.1. ระบบสมการเชิงเส้น

A.1.2.2 ตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร: ระบบตัดกัน

คำถามแรกที่ค่อนข้างง่ายคือ “ถ้าระบบ 2 แผ่นตัดกัน จะได้ร้อยตัดรูปอะไร?” ทว่าการหาผลเฉลยของรอยตัดดังกล่าวกลับเป็นเรื่องยาก และคำถามในทำนองเดียวกันคือ “ถ้าเรามีระบบ 2 แผ่น จะรู้ได้อย่างไรว่าระบบตัดหรือไม่ตัดกัน”

จากรูปแบบการตัดแบบต่าง ๆ จะพบว่าการที่จะได้ผลเฉลยแบบอ กมา 1 จุดนั้น ต้องอาศัยระบบตัดกัน 3 แผ่นเพื่อให้ได้จุดตัดร่วมกันมาเป็น 1 จุด

ตัวอย่าง A.1.7: การแก้ระบบสมการ 3 ตัวแปร

จงแก้ระบบสมการ

$$0 = 3x + 5y - 9z - 7$$

$$0 = -2x + 3y + 2z - 3$$

$$0 = x + 6y + 3z + 5$$

A.1.3 อสมการเชิงเส้น และการวาดกราฟของอสมการเชิงเส้น

A.2 การดำเนินการบนเมตริกซ์

A.2.1 เมตริกซ์

A.2.2 การคูณเมตริกซ์

A.2.3 การใช้เมตริกซ์สำหรับทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

A.3 ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

A.3.1 แนวคิดตั้งต้นสำหรับความน่าจะเป็น

A.3.2 ตัวแปรสุ่ม ค่าคาดหวัง ความอิสระ

A.3.3 กฎของเบย์

A.3.4 การแจกแจงความน่าจะเป็น

A.4 พื้นฐานการให้เหตุผลเชิงปริมาณ

A.4.1 ทักษะการประคำพูดเป็นนิพจน์ทางคณิตศาสตร์

A.4.2 การเข้าใจจุดประสงค์และเงื่อนไขของปัญหา

APPENDIX B

Homework

Homework 1

Homework 2

วันสัปดาห์: 10 สิงหาคม 2568

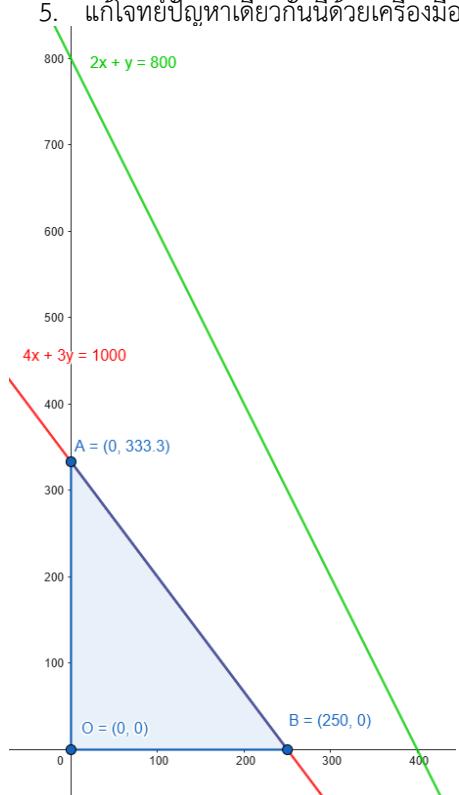
กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 16 สิงหาคม 15:00 น.

โจทย์ ABC Furniture ที่ได้ทำไปในการบ้านที่ 1 แล้ว ได้กำหนดการเชิงเส้นอกมาเป็น

$$\begin{aligned} \text{max } & 2000x + 1500y \\ \text{subject to } & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

และมีพื้นที่ของผลเฉลยตามพื้นที่สี่เหลี่ยมตั้งรูปด้านล่าง

1. จงแปลงรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานด้วยการเติมตัวแปรส่วนขาด (slack variable)
2. จงสร้างตาราง simplex ตั้งต้นของกำหนดการเชิงเส้นนี้
3. และดำเนินการ pivot เพื่อเปลี่ยนตัวแปรฐาน 1 ครั้ง (ระบุตัวแปรฐานขาเข้า กับตัวแปรฐานขาออกด้วย) พร้อมกับอธิบายผลที่ได้เกี่ยวกับการยกเว้นจุดมุ่งในรูป
4. อธิบายว่าจำเป็นต้องทำการดำเนินการ pivot อีกหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. แก้โจทย์ปัญหาเดียวกันนี้ด้วยเครื่องมือ Solver ใน Excel



Homework 3

วันสัปดาห์: 17 สิงหาคม 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 23 สิงหาคม 15:00 น.

โจทย์ 1

จากโจทย์ ABC Furniture ในเรื่องการกำหนดการเชิงเส้นตามเงื่อนไขที่กำหนดมาให้เราทราบกันมาแล้วว่าトラบได้ที่เราสร้างเรากำหนดเงื่อนไขการผลิตตัว x ตัวและผลิตตัว y ตัวที่สอดคล้องเงื่อนไขสมการ $4x + 3y = 1000$ ต่างก็จะได้กำไรสูงสุดเท่านั้นเสมอ แต่ทั้งนี้สมมติฐานทางธุรกิจของการจะได้กำไรสูงสุดของกำหนดการเชิงเส้นคือต้องสมมติว่าเราจะขายสินค้าที่ผลิตออกมากได้ทั้งหมด ซึ่งอาจจะเป็นไปไม่ได้จริงในสภาวะตลาดที่แตกต่างกัน เพราะบางเวลาตัวก็อาจจะขายได้ดี แต่ในขณะที่บางเวลาตัวก็อาจจะขายได้ต่ำกว่า

สถานการณ์ทางเลือก: สำหรับไตรมาสต่อไป ฝ่ายผลิตเสนอ 3 กลยุทธ์ให้ฝ่ายบริหารพิจารณา:

- ◊ กลยุทธ์ A: ผลิตตัว x 80% ของการผลิตทั้งหมด
- ◊ กลยุทธ์ B: ผลิตตัว y 80% ของการผลิตทั้งหมด
- ◊ กลยุทธ์ C: ผลิตในอัตราส่วนเท่าๆ กัน

สถานการณ์ตลาด (States of Nature): ฝ่ายการตลาดระบุว่าสถานการณ์ตลาดอาจเป็นไปได้ 3 แบบในไตรมาสหน้า:

- ◊ สถานการณ์ 1 (S1) — โต๊ะบูม: โต๊ะทำงานขายดีมาก ตู้ขายได้น้อย
- ◊ สถานการณ์ 2 (S2) — ตลาดสมดุล: สินค้าทั้งสองขายได้ใกล้เคียงกัน
- ◊ สถานการณ์ 3 (S3) — ตู้บูม: ตู้เอกสารขายดีมาก โต๊ะขายได้น้อย

ฝ่ายบริหารต้องการทราบว่า ภายใต้แต่ละกลยุทธ์นั้น ถ้าเกิดสถานการณ์ตลาดแต่ละแบบ จะได้กำไรเท่าไร โดยฝ่ายวิเคราะห์ประเมินกำไร (หน่วย: พันบาท) ดังตาราง:

กลยุทธ์การผลิต	S1: โต๊ะบูม	S2: สมดุล	S3: ตู้บูม
A (เน้นโต๊ะ)	422	182	78
B (เน้นตู้)	122	213	378
C (สมดุล)	284	497	213

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. วิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนด้วยวิธี maximax
2. วิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนด้วยวิธี maximin
3. ถ้าฝ่ายการตลาดประเมินมาให้ว่าโอกาสที่จะเกิดตลาดแบบโต๊ะบูม, สมดุล และ ตู้บูมเป็น 25%, 50%, 25% ตามลำดับ จงวิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความเสี่ยงดังกล่าว ด้วยวิธีค่าคาดหวังของกำไร หรือค่าคาดหวังของค่าเสียโอกาสอย่างใดอย่างหนึ่ง

โจทย์ 2

สถาบันการศึกษาแห่งหนึ่งได้จัดเจ้าหน้าที่เพื่อให้คำปรึกษาวิชาการไว้ 1 คนเพื่อให้คำปรึกษาด้านปัญหาการเรียนแก่นักศึกษา ทว่าได้รับการร้องมาว่าไม่เพียงพอทำให้บางครั้งต้องรอคิวนานจึงกำลังวางแผนจะจ้างเจ้าหน้าที่มาเพิ่ม เพราะที่มีอยู่ไม่เพียงพอต่อความต้องการ จึงได้ทำการสำรวจปริมาณการใช้งานในช่วง 1 ชั่วโมง ได้ข้อมูลดังนี้เพื่อจะสุ่มจำลองสถานการณ์โดยใช้เลข 00-99

ข้อมูลการเข้ามาขอรับบริการ

ระยะเวลาที่ห่างกันของการเข้ามา (นาที)	จำนวนนักศึกษา (คน)	ความน่าจะเป็น	ความน่าจะเป็นสะสม	ช่วงเลขในการสุ่ม
1	11			
2	29			
3	35			
4	25			

ข้อมูลเวลาในการรับบริการ

เวลาที่ใช้	จำนวนนักศึกษา (คน)	ความน่าจะเป็น	ความน่าจะเป็นสะสม	ช่วงเลขในการสุ่ม
2	15			
3	35			
4	30			
5	20			

ได้ทำการจำลองสถานการณ์สำหรับนักศึกษา 10 คน โดยการสุ่มเลขได้ดังตารางด้านล่าง สมมติว่าเริ่มสำรวจตอน 13:00

น.

นิติ คนที่	เลขสุ่ม	ระยะเวลา ระหว่างนักศึกษา	เวลาที่ นศ มาถึง	เวลาขอ รับบริการ	เวลาเริ่ม ใช้บริการ	เลขสุ่ม เวลาใช้บริการ	ระยะเวลา ใช้บริการ	เวลาแล้วเสร็จ
1	53					37		
2	74					60		
3	05					79		
4	71					21		
5	06					85		
6	49					71		
7	11					48		
8	13					39		
9	62					31		
10	69					35		

จากตารางการสุ่มที่ได้ จงวิเคราะห์ว่าจำนวนผู้ให้บริการที่มีอยู่เพียงพอหรือไม่

Homework 4

วันสัปดาห์: 24 สิงหาคม 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 30 สิงหาคม 15:00 น.

จากข้อโรงอาหารที่จะได้เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะดังนี้

		เมนูที่ทานเดือนนี้		
		A	B	C
เมนูที่ทานเดือนถัดไป	A	0.6	0.6	0.2
	B	0.3	0.1	0.2
	C	0.1	0.3	0.6

- จงหาว่าต้องมีอัตราส่วนของคนชอบเมนูอาหารใดเท่าไหร่บ้างถึงจะอยู่ในสภาวะที่ไม่ต้องเปลี่ยนแปลงปริมาณการเก็บวัตถุในเดือนถัดไป (จงหาเวกเตอร์ความน่าจะเป็นที่อยู่ในสถานะคงที่) โดยใช้วิธีการตั้งสมการและแก้ระบบสมการ

- ใช้ Excel เพื่อหาเวกเตอร์สถานะคงที่โดยใช้เวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 1 + \text{เลขหลักร้อยของรหัสนักศึกษา} \\ 1 + \text{เลขหลักสิบของรหัสนักศึกษา} \\ 1 + \text{เลขหลักหน่วยของรหัสนักศึกษา} \end{pmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เริ่มต้น (พิจารณาจำนวนครั้งการคูณกันด้วยตัวเองที่มั่นใจพอว่าเวกเตอร์นี้ถูก) และทำเวกเตอร์สุดท้ายให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ความน่าจะเป็น ทำส่งเป็นไฟล์ Excel แนบมาพร้อมกับไฟล์ pdf ของข้อ 1

P	0	1	2	3	...	k	<<< เลือกจำนวนครั้งการจบให้ตรงตามวิจารณญาณว่าfinแล้วหรือยัง
	N(0)	N(1)	N(2)	N(3)	...	N(k)	เวกเตอร์ความน่าจะเป็น ที่ก้ามจากเวกเตอร์สุดท้าย
0.60	0.60	0.20					
0.30	0.10	0.20					
0.10	0.30	0.60					

Figure B.1. ตัวอย่างตาราง Excel (สามารถออกแบบได้ด้วยตัวเอง)

Homework 5

วันสัปดาห์: 31 สิงหาคม 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 6 กันยายน 15:00 น.

วัตถุประสงค์

- คำนวณตัวชี้วัดความคลาดเคลื่อน MAE และ RMSE ด้วยมือจากตาราง
- เปรียบเทียบความไม่ต่อ outlier ของ RMSE (ที่ยกกำลังสอง) กับ MAE
- ฝึกตีความผลเมื่อมี/ไม่มี outlier ทั้งในชุดฝึกสอนและชุดทดสอบ

หาตัวแบบ

Exercise B.0.1: หาตัวแบบ

กำหนดชุดข้อมูลมาให้ 6 จุดดังนี้

$$(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13), (6, 50)$$

โดยที่จุด (6, 50) เป็นค่าผิดปกติ (outlier) ให้ทำการหาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น 2 อันด้วยการคำนวณด้วยตาราง โดยที่

- ใช้ข้อมูลครบทั้ง 6 ตัว จะได้ $\hat{y}_{(1)} = \boxed{} + \boxed{}x$
- ใช้แค่ข้อมูล 5 ตัวปกติ จะได้ $\hat{y}_{(2)} = \boxed{} + \boxed{}x$

Exercise B.0.2: วัดผลบนชุดข้อมูลที่ใช้สร้างตัวแบบ

จากตัวแบบที่ได้ในข้อที่ผ่านมา ให้วัดผลด้วย MAE และ RMSE ด้วยชุดข้อมูลที่ใช้

Exercise B.0.3: วัดผลบนชุดข้อมูลใหม่

จากตัวแบบที่ได้ในข้อที่ผ่านมา ให้วัดผลด้วย MAE และ RMSE ด้วยชุดข้อมูลใหม่ 3 ตัวดังนี้

$$(1.5, 6), (4.5, 12), (6.5, 55)$$

Homework 6

วันสัปดาห์: 8 กันยายน 2568

กำหนดส่ง: อาทิตย์ที่ 14 กันยายน 21:00 น.

PART A: ลองคิดกรณีสมการยุทธ์ในกรณีที่มีกลยุทธ์แท้

ตารางค่าผลตอบแทนจากการแข่งขันด้านล่างนี้เป็นตารางของกรณีที่มีกลยุทธ์แท้ กล่าวคือ maximin ของฝ่ายโจมตีมีค่าเท่ากับ minimax การแก้เกมได้ของฝ่ายตั้งรับ

		กลยุทธ์ฝ่ายตรงข้าม	
กลยุทธ์ฝ่ายเรา		1	2
1	4	3	
	2	-3	-2

โจทย์:

1. จงหากลยุทธ์แท้ของแต่ละฝ่าย พร้อมทั้งหาค่าของเกม
2. จงใช้วิธีสมการยุทธ์จากฝ่ายเราและวัดแผนภาพแสดงอัตราส่วนของการสมการยุทธ์

PART B: กลยุทธ์ผสม

ตารางด้านล่างนี้เป็นตารางที่เราได้ดูกันไปในห้องแล้ว และได้ว่าค่าของเกมคือ 36 โดยในห้องเรียนได้พิจารณาการสมการยุทธ์ของร้านขาว และการสมการยุทธ์แบบสีและแบบผสมของร้านดำเนาแล้ว

		กลยุทธ์ร้านดำเนา		
กลยุทธ์ร้านขาว		แบบสี	แบบขาวดำเนา	แบบผสม
แบบสี	20	30	60	
	40	45	30	

ในการบ้านนี้ให้นักศึกษาลองพิจารณาการสมการยุทธ์ของแบบสีและแบบขาวดำเนา (คำเตือน: ต้องพิจารณาแบบ minimax เพราะเป็นตารางผลตอบแทนของร้านขาว)

Homework 7: การบ้านสุดท้าย เตรียมก่อนสอบ

วันสัปดาห์: 16 กันยายน 2568

กำหนดส่ง: เสาร์ที่ 13 กันยายน 21:00 น.

การบ้านนี้จะเน้นเพื่อเตรียมตัวก่อนสอบ ที่สามารถจดโนํตเข้าห้องสอบได้ 1 แผ่นตามคำสั่งหน้าข้อสอบดังนี้

2. อนุญาต ไม่อนุญาต ให้นำเอกสารกระดาษ A4 เขียนด้วยลายมือเข้าห้องสอบ 1 แผ่น อื่นๆ (ระบุ) _____
3. ข้อสอบทั้งหมดมีทั้งหมด 1 ตอน ตอนที่ 1 มีจำนวน 4 ข้อ 40 คะแนน
4. ข้อสอบ มี ไม่มี ตัวร่าง/สูตรคำนวณ/เอกสารประกอบฯ จำนวน.....แผ่น/เล่ม
5. อนุญาต ไม่อนุญาต ให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

พระฉะนั้น ในการบ้านนี้พิจารณาจะมาทบทวนสิ่งที่จำเป็นก่อนสอบเพื่อเป็นแนวทางให้นักศึกษาสามารถจดโนํตเข้าห้องสอบได้อย่างมีประสิทธิภาพ จงตอบคำถามต่อไปนี้

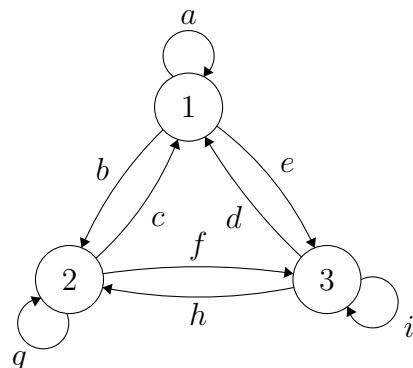
การวิเคราะห์มาร์คอฟ

สูตรในการคำนวณเกี่ยวกับมาร์คอฟมีเพียงสูตรเดียวดังนี้

$$\vec{N}^{(t+1)} = T \vec{N}^{(t)}$$

1. เมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ (T) จะต้องมีสิ่งที่คำนึงเรื่องการเขียนดังนี้

- ◇ การเรียงตัวกันของสถานะในแนวแแควรและแนวคอลัมน์ต้องเรียงตัวเหมือนกัน แต่เพราเหตุใดเราจึงเขียนการเรียงตัวกันของค่าความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะให้ค่าที่มาจากการตั้งทางเดียวกันอยู่ในคอลัมน์เดียวกัน และค่าที่มีสถานะปลายทางเดียวกันอยู่ในแแควรอนเดียวกัน
- ◇ วิธีการหนึ่งที่นักศึกษาจะสามารถตรวจสอบได้ว่าค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะมาเขียนเรียงกันในเมทริกซ์ได้ถูกต้องหรือไม่คือการดูว่าผลรวมของความน่าจะเป็นในคอลัมน์เดียวกันต้องได้ 1 ในทุก ๆ คอลัมน์ จงอธิบายว่าเพราเหตุใดถึงทำให้ผลรวมของค่าในคอลัมน์เดียวกันเป็น 1 ในทุก ๆ คอลัมน์
- ◇ เพราะฉะนั้น ถ้าหากศึกษาหาดแผนภาพการเปลี่ยนสถานะได้ดังรูป (ในข้อสอบไม่มีให้ward) จะได้เมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะเป็นอย่างไร



Appendix B. Homework

2. เวกเตอร์แสดงอัตราส่วนของแต่ละสถานะ (\vec{N}) ซึ่งจะต้องมีลำดับการเรียงตัวของสถานะในเมทริกซ์ T
 - ◊ เราสามารถเขียนแสดงผลได้ 2 แบบคือ (1) เวกเตอร์แสดงจำนวนคนจริง ๆ ในแต่ละสถานะ หรือ (2) เวกเตอร์แสดงความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะ แต่ถ้าเรามีเวกเตอร์แสดงจำนวนคนอยู่ก่อน แต่โจทย์ถามเวกเตอร์ความน่าจะเป็น (หรืออัตราส่วน) จะต้องหาอย่างไร
 - ◊ จงคำนวณหาเวกเตอร์แสดงความน่าจะเป็นของแต่ละสถานะจากเวกเตอร์แสดงจำนวนคน $\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 70 \end{pmatrix}$
3. สรุปแล้วลักษณะของปัญหาที่แก้ได้ด้วยการวิเคราะห์มาร์คอฟคือปัญหาแบบใด

การคำนวณและพยากรณ์

กระบวนการสำคัญของการหาค่าพยากรณ์คือ (1) เตรียมข้อมูล (2) เลือกตัวแบบ (3) คำนวณตัวแบบ และ (4) วัดผลความแม่นยำของการพยากรณ์

1. ในการพยากรณ์โดยใช้ตัวแบบอนุกรมเวลา ลำดับของค่าที่จะนำมาพยากรณ์ต้องเป็นอย่างไร
2. จงระบุสูตรของตัวแบบ และอธิบายวิธีการคำนวณของแต่ละสูตรของการทำตัวแบบอนุกรมเวลา
 - ◊ Simple moving average ของระยะเวลา n เดือน
 - ◊ Weighted moving average ของระยะเวลา n เดือนแบบกำหนดน้ำหนักด้วยตัวเองเป็น $w_n, w_{n-1}, \dots, w_2, w_1$ ของเดือนย้อนหลัง 1 เดือนจนถึง n เดือนตามลำดับ
 - ◊ Exponential smoothing เมื่อนกำหนด α
3. ในการวัดผล เราจะใช้วิธีที่เบสิคที่สุดในการวัดผล ซึ่งคือ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (Mean Absolute Error หรือ Mean Absolute Deviation) จงระบุสูตรและอธิบายวิธีการคำนวณ

ทฤษฎีແவគอย

แท้ที่จริงแล้ว ตัวแบบ $M/M/1$ ก็เป็นกรณีเฉพาะของตัวแบบ $M/M/s$ โดยที่ $s = 1$ จะใช้สูตรของ $M/M/s$ เพื่อคำนวณกรณีเฉพาะที่ $s = 1$ แล้วดูความแตกต่างระหว่างสูตรของ $M/M/1$ กับสูตรที่ได้จากการแทน $s = 1$ ใน $M/M/s$

ทฤษฎีเกม

ในบททฤษฎีเกม เราสนใจกรณี Zero-sum game กล่าวคือเป็นเกมที่ผู้ชนะได้เท่าไหร่ ผู้แพ้จะเสียเท่านั้น

APPENDIX C

Quiz

Quiz 1

Exercise C.0.1: เขียนแบบจำลองและแก้ปัญหาด้วยการวาระรูป

บริษัทผลิตอัญมณีแห่งหนึ่งผลิตแหวนและต่างหูจากแร่เงินและแร่ทองคำ โดยที่

- ◊ ในการผลิตแหวน จะต้องใช้แร่ทองคำ 3 หน่วย และแร่เงิน 3 หน่วย และจะขายได้กำไร 2 พันบาท
- ◊ ในการผลิตต่างหู จะต้องใช้แร่ทองคำ 1 หน่วย และแร่เงิน 5 หน่วย และจะขายได้กำไร 1 พันบาท

ในรอบการผลิตปัจจุบัน บริษัทนี้ได้รับแร่ทองคำมา 18 หน่วย และแร่เงินมา 30 หน่วย โดยที่บริษัทอยากผลิตแหวน และต่างหูให้ได้กำไรมากที่สุด

ข้อที่ 1: กำหนดตัวแปร โดยกำหนดให้ $x =$ จำนวนแหวนที่จะผลิต และ $y =$ จำนวนต่างหูที่จะผลิต

ข้อที่ 2: เขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยสิ่งที่เป็นเป้าหมายของโจทย์ธุรกิจนี้คืออย่าง (1) (max ตอบ 0 / min ตอบ 1) ค่ากำไรที่ได้จากการขาย โดยที่

$$\text{กำไร} = \boxed{(2)} x + \boxed{(3)} y \quad [1]$$

ข้อที่ 3: เขียนสมการเงื่อนไข โดยจากโจทย์จะได้ว่ามีเงื่อนไขอยู่ 2 เงื่อนไข คือเงื่อนไขการใช้แร่ทองคำ และเงื่อนไขการใช้แร่เงิน

$$\text{แร่ทองคำ: } \boxed{(4)} x + \boxed{(5)} y \leq \boxed{(6)} \quad [2]$$

$$\text{แร่เงิน: } \boxed{(7)} x + \boxed{(8)} y \leq \boxed{(9)} \quad [3]$$

ข้อที่ 4: วาระรูปภาพเงื่อนไขจะได้ตั้งรูปด้านล่างสุด แต่เราจะแบ่งเป็นขั้นตอนการคิดดังนี้

ข้อที่ 4.1: วัดเส้นเงื่อนไขการใช้แร่ทองคำ (สมการ [2]) โดยการหาจุดตัดแกนทั้ง 2:

- ◊ หากจะตัดแกน x โดยการแทน $y = 0$ จะได้สมการ (4) $x = \boxed{(6)}$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } x = \frac{\boxed{(6)}}{\boxed{(4)}} = \boxed{(10)}$$

จึงได้ว่าจุดตัดแกน x คือจุด $(6, 0)$

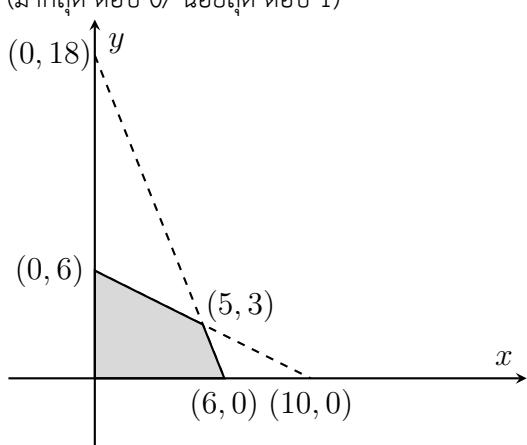
- ◊ และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าจุดตัดแกน y คือจุด $(0, 18)$

ข้อที่ 4.2: ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาเงื่อนไขการใช้แร่เงิน (สมการ [3])

จะได้ว่าตัดแกน x ที่จุด $(10, 0)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, 6)$

ข้อที่ 4.3: หากดูตัวระห่ำว่างสมการเส้นของ [2] และสมการเส้นของ [3] จะได้ว่าตัดกันที่จุด $(5, 3)$ (+1 คะแนนพิเศษสำหรับคนที่สามารถแก้ระบบสมการเพื่อหาจุดตัดด้วยตัวเองได้: เขียนกระดาษแนบรูปหรือไฟล์ pdf มา)

ข้อที่ 5: แทนค่าจุดมุลลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์ (11) (มากสุด ตอบ 0/ น้อยสุด ตอบ 1)



(x, y)	กำไร (จากสมการ [1])
$(0, 6)$	(14)
$(6, 0)$	(15)
$(5, 3)$	(16)
$\left(\begin{array}{ c c } \hline (12) & (13) \\ \hline \end{array} \right)$	(17)

ข้อที่ 6: สรุปคำตอบ จะได้ค่า (11) (มากสุด ตอบ 0/ น้อยสุด ตอบ 1) เท่ากับ (18) เกิดขึ้นที่จุด $\left(\begin{array}{|c|c|} \hline (19) & (20) \\ \hline \end{array} \right)$

ใบันสพิเศษ +1 คะแนน

จะแสดงวิธีการระบบสมการในข้อที่ **ข้อที่ 4.3:** ว่าได้จุดตัดเป็น $(5, 3)$

Quiz 2

เราจะยังคงใช้โจทย์ปัญหาเดิมกับ quiz 1 อよ'

Exercise C.0.2: simplex method

บริษัทผลิตอัญมณีแห่งหนึ่งผลิตแหวนและต่างหูจากแร่เงินและแร่ทองคำ โดยที่

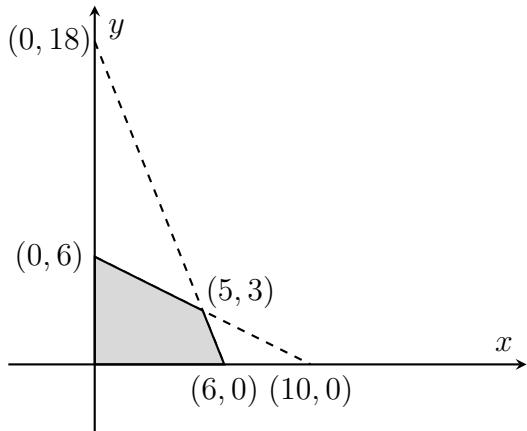
- ในการผลิตแหวน จะต้องใช้แร่ทองคำ 3 หน่วย และแร่เงิน 3 หน่วย และจะขายได้กำไร 2 พันบาท
- ในการผลิตต่างหู จะต้องใช้แร่ทองคำ 1 หน่วย และแร่เงิน 5 หน่วย และจะขายได้กำไร 1 พันบาท

ในรอบการผลิตปัจจุบัน บริษัทนี้ได้รับแร่ทองคำมา 18 หน่วย และแร่เงินมา 30 หน่วย โดยที่บริษัทอยากผลิตแหวน และต่างหูให้ได้กำไรมากที่สุด

กำหนดให้ $x =$ จำนวนแหวนที่จะผลิต และ $y =$ จำนวนต่างหูที่จะผลิต และจาก quiz 1 เราได้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นออกแบบให้ว่า

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1000y \\ \text{subject to} \quad & 3x + y \leq 18 \\ & 3x + 5y \leq 30 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

และได้บริเวณการตัดสินใจ เป็น ตาม รูป ด้าน ขวา



และจะแปลงเป็นรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1000y + \boxed{}s_1 + \boxed{}s_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x + y + s_1 = 18 \\ & 3x + 5y + s_2 = 30 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
s_1	3	1	1	0	<input type="text"/>
s_2	<input type="text"/>				
z	<input type="text"/>				

ต่อมาเป็นขั้นตอนการเปลี่ยนตัวแปรฐาน โดย

- ตัวแปรขาเข้า โดยเลือกใช้ตัวแปรของคอลัมน์ที่มีค่าตัวเลขในแถว z ติดลบมากที่สุด ซึ่งคือตัวแปร
- ตัวแปรขาออก โดยเลือกใช้ตัวแปรที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าด้านขวาเมื่อ (RHS) กับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรขาเข้าค่าบวกที่น้อยที่สุด

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS	อัตราส่วน
s_1	3	1	1	0	<input type="text"/>	<input type="text"/> / <input type="text"/> = 6
s_2	<input type="text"/> / <input type="text"/> = 10					
z	<input type="text"/>					

ดังนั้น จึงได้ว่าตัวแปรขาออกคือ

และเมื่อทำการดำเนินการตามແຄวเพื่อเปลี่ยน pivot ตามขั้นตอนด้านล่างจะได้ตารางชิมเพลกซ์ใหม่ดังนี้

- หารແຄวของตัวแปรฐานใหม่ด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานตั้งกล่าวในແຄวนี้
- ดำเนินการตามແຄวเพื่อให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานในແຄວอื่นเป็น 0

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	1/3	1/3	0	6
s_2	0	4	-1	1	12
z	0	-1000/3	2000/3	0	12000

และถ้าทำชิมเพลกซ์ขั้นถัดไปจะได้ว่าต้องใช้ y เป็นตัวแปรฐานขาเข้า และใช้ s_2 เป็นตัวแปรขาออก จะได้ตารางชิมเพลกซ์เป็น

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	0	5/12	-1/12	5
y	0	1	-1/4	1/4	3
z	0	0	1750/3	250/3	13000

ซึ่งไม่มีสมาชิกในແຄว z ติดลบແລ້ວจึงได้ว่ากระบวนการจบลง ซึ่งจะได้ว่าผลเฉลยที่ทำให้ค่ามากสุดคือ $x = 5$ และ $y = 3$ (ที่ได้จากคอลัมน์ RHS ในตารางสุดท้าย) และได้ $z = \boxed{}$ เป็นค่ามากสุด

ใบนัสพิเศษ +1 คะแนน

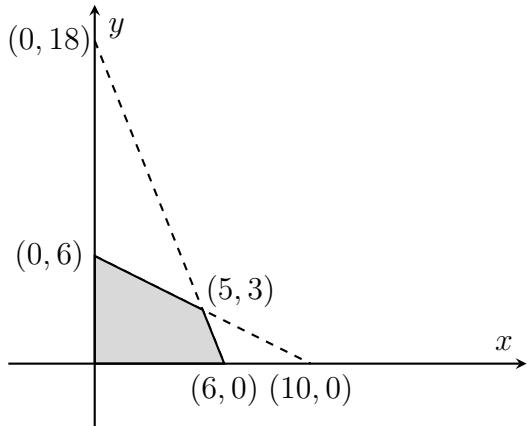
จะใช้ตาราง simplex สุดท้ายแปลงให้เป็นระบบสมการของตัวแปร x, y, s_1, s_2 และระบุเหตุผลว่าทำไม $x = 5$ และ $y = 3$ โดยอาศัยตัวระบบสมการที่ได้ (คำใบ: ตัวแปรที่ไม่ใช่ฐานคือตัวแปรที่โดนกำหนดให้ค่าเป็น 0 ดังนั้นต้องระบุให้เด็กอนว่าในตารางสุดท้ายได้รูปแบบที่เป็นตัวแปรฐาน)

Appendix C. Quiz

วิธีทำ: กำหนดให้ $x =$ จำนวนแหวนที่จะผลิต และ $y =$ จำนวนต่างหูที่จะผลิต และจาก quiz 1 เราได้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นอุปทานไปแล้ว

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1000y \\ \text{subject to} \quad & 3x + y \leq 18 \\ & 3x + 5y \leq 30 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

และได้บริเวณการตัดสินใจเป็นตามรูปด้านขวา



และจะแปลงเป็นรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1000y + \boxed{(0)}s_1 + \boxed{(0)}s_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x + y + s_1 = 18 \\ & 3x + 5y + s_2 = 30 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

และเมื่อนำมาราชีมเพลกซ์ตั้งต้นจะได้ดังนี้

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
s_1	3	1	1	0	(18)
s_2	(3)	(5)	(0)	(1)	(30)
z	(-2000)	(-1000)	(0)	(0)	(0)

ต่อมาเป็นขั้นตอนการเปลี่ยนตัวแปรฐานโดย

- ตัวแปรเข้า โดยเลือกใช้ตัวแปรของคอลัมน์ที่มีค่าตัวเลขในແລກ z ติดลบมากที่สุด ซึ่งคือตัวแปร $\boxed{(x)}$
- ตัวแปรออก โดยเลือกใช้ตัวแปรที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าด้านขวาเมื่อ (RHS) กับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเข้าค่าบวกที่น้อยที่สุด

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS	อัตราส่วน
s_1	3	1	1	0	(18)	$\frac{(18)}{(3)} / \frac{(18)}{(3)} = 6$
s_2	(3)	(5)	(0)	(1)	(30)	$\frac{(30)}{(3)} / \frac{(30)}{(3)} = 10$
z	(-2000)	(-1000)	(0)	(0)	(0)	

ดังนั้น จึงได้ว่าตัวแปรออกคือ $\boxed{(s_1)}$

และเมื่อทำการดำเนินการตามແລກเพื่อเปลี่ยน pivot ตามขั้นตอนด้านล่างจะได้ตารางชีมเพลกซ์ใหม่ดังนี้

1. หารแຄວของตัวแปรฐานใหม่ด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรฐานดังกล่าวในແກວນັ້ນ

2. ดำเนินการตามແຄວເພື່ອໃຫ້ສັນປະສິບທີ່ຂອງຕົວແປຣູານໃນແກວອື່ນເປັນ 0

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	$1/3$	$1/3$	0	6
s_2	0	4	-1	1	12
z	0	$-1000/3$	$2000/3$	0	12000

ແລະ ຄ້າທຳສິມເພລັກໜີ້ຂັ້ນຄັດໄປຈະໄດ້ວ່າຕ້ອງໃຊ້ y ເປັນຕົວແປຣູານຂາເຂົ້າ ແລະ ໃຊ້ s_2 ເປັນຕົວແປຣູາອອກ ຈະໄດ້ຕາຮຸງສິມເພລັກໜີ້ເປັນ

Pivot	x	y	s_1	s_2	RHS
x	1	0	$5/12$	$-1/12$	5
y	0	1	$-1/4$	$1/4$	3
z	0	0	$1750/3$	$250/3$	13000

ຈຶ່ງໄມ່ມີສາມາຊີກໃນແຄວ z ຕິດລົບແລ້ວຈຶ່ງໄດ້ວ່າກະບວນກາຈບັນ ຈຶ່ງຈະໄດ້ວ່າຜລເນລຍທີ່ທຳໄຫ້ຄ່າມາກສຸດຄື່ອງ $x = 5$ ແລະ $y = 3$ (ທີ່ໄດ້ຈາກຄອລັມນ໌ R.H.S ໃນຕາຮຸງສຸດທ້າຍ) ແລະ ໄດ້ $z = \boxed{(13000)}$ ເປັນຄ່າມາກສຸດ

ໂບນໍສົມເປົ້າ +1 ຄະແນນ

ຈຶ່ງໃຊ້ຕາຮຸງ simplex ສຸດທ້າຍແປ່ງໄທ້ເປັນຮະບບສມກາຮຂອງຕົວແປຣ x, y, s_1, s_2 ແລະ ຮະບຸເຫດຜລວ່າທຳໄໝ $x = 5$ ແລະ $y = 3$ ໂດຍອາຍຕໍ່ຮະບບສມກາຮທີ່ໄດ້ (ຄຳໄປ: ຕົວແປຣທີ່ໄມ່ໃຫ້ຮານຄື່ອງຕົວແປຣທີ່ໂດນກຳຫັດໄຫ້ຄ່າເປັນ 0 ດັ່ງນັ້ນຕ້ອງຮະບຸເຫັດກ່ອນວ່າໃນຕາຮຸງສຸດທ້າຍໄຄຣຖຸກຕັ້ງບທບາທໃຫ້ເປັນຕົວແປຣູານ)

$$\begin{aligned} x + \frac{5}{12}s_1 + \frac{-1}{12}s_2 &= 5 \\ y + \frac{-1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 &= 3 \\ z + \frac{1750}{3}s_1 + \frac{250}{3}s_2 &= 13000 \end{aligned}$$

ໂດຍທີ່ມີ x, y ເປັນຕົວແປຣູານ ດັ່ງນັ້ນ s_1, s_2 ທີ່ໄມ່ໃຫ້ຕົວແປຣູານຈຶ່ງມີຄ່າເທົ່າກັບ 0 ຈຶ່ງໄດ້ວ່າ

$$\begin{aligned} x + \frac{5}{12}(0) + \frac{-1}{12}(0) &= 5 & \Rightarrow x = 5 \\ y + \frac{-1}{4}(0) + \frac{1}{4}(0) &= 3 & \Rightarrow y = 3 \\ z + \frac{1750}{3}(0) + \frac{250}{3}(0) &= 13000 & \Rightarrow z = 13000 \end{aligned}$$

□

Quiz 3

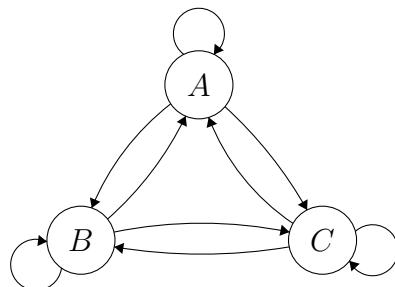
ในการสอบย่อยครั้งนี้ เราจะมาฝึกคุณแม่ทริกซ์กับทริกซ์โดยอาศัยรูปภาพของการเปลี่ยนสถานะแบบมาร์คอฟกัน

Exercise C.0.3: หากถ้ากำลังสองของเมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ

จงหาผลคูณของเมทริกซ์ได้ผลลัพธ์ดังนี้ (โจทย์ให้ผลลัพธ์การคูณมาแล้ว ดังนั้นไม่ต้องนั่งคูณด้วยตัวเอง แต่เราจะลองใช้ความรู้ Markov ช่วยหาผลคูณ และในข้อนี้เราจะไม่ได้หาผลคูณของทั้ง 9 ตัว เราจะยกตัวอย่างการหาผลคูณของแค่ 3 ตัวเท่านั้น)

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.48 & 0.36 \\ 0.23 & 0.25 & 0.20 \\ 0.21 & 0.27 & 0.44 \end{bmatrix}$$

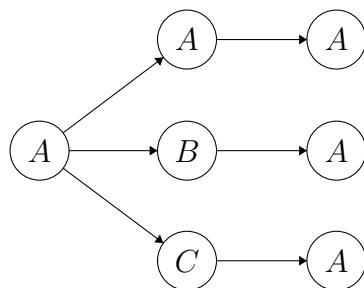
เริ่มจากเขียนแผนภาพการเปลี่ยนสถานะกันก่อน โดยโจทย์คือให้ เขียนค่าความน่าจะเป็นลงไปบนเส้นการเปลี่ยนสถานะ



จากที่เรียนมาในห้อง เราทราบกันอยู่แล้วว่าความหมายของการนำเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ 1 ขั้นมาคูณกัน จะได้ผลออกมานำเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะข้าม 2 ขั้น (เช่นเปลี่ยนจากขั้นที่ 1 ไปขั้นที่ 3) ดังนั้น ถ้าเรารอกราคาผลคูณของเมทริกซ์การเปลี่ยนสถานะ สิ่งที่ต้องทำคือหาความน่าจะเป็นในการเดินข้าม 2 ขั้นทุกรูปแบบที่เป็นไปได้

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป A ในขั้นที่ 3

วางแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ จงเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)



ด้วยความรู้ในเรื่องความน่าจะเป็น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นรวมของการย้ายสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นถัดไป หาได้จากการคูณและการบวกจากแผนภาพด้านในไม้ดังกล่าว โดยที่

- ◊ เส้นต่อ กัน ให้นำค่าความน่าจะเป็นของเส้นมาคูณกัน

- ◊ หลังจากคิดผลคุณค่าความน่าจะเป็นของแต่ละกิ่งเรียบร้อยแล้ว ให้นำมาบวกกัน

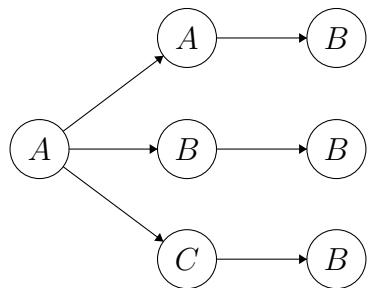
เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป A ใน 2 ขั้นตอนดังไปมีค่าเท่ากับ

$$P(A \rightarrow_2 A) = \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) = 0.56$$

ซึ่งมีผลลัพธ์เท่ากับสมาชิกในແກຣມที่ 1 หลักที่ 1 ที่แทนความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจาก A ไป A ในเมทริกซ์ผลลัพธ์

การเปลี่ยนสถานะจาก A ในขั้นที่ 1 ไป B ในขั้นที่ 3

วางแผนภาพด้านล่าง โจทย์คือ จงเขียนค่าความน่าจะเป็นของการย้ายสถานะของแต่ละเส้น (มี 6 เส้น)



เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก A ข้ามไป B ใน 2 ขั้นตอนดังไปมีค่าเท่ากับ

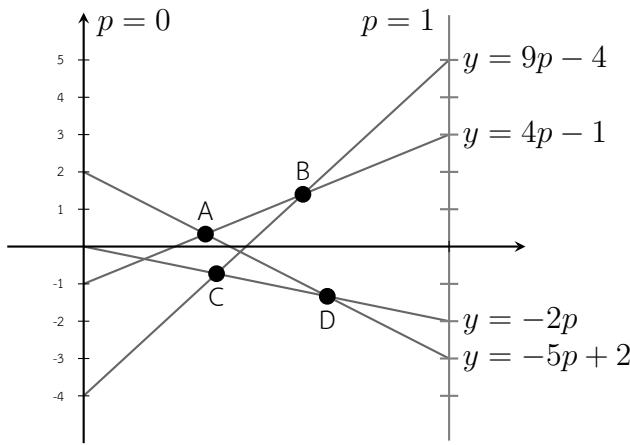
$$P(A \rightarrow_2 B) = \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) + \left(\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \right) = \boxed{\quad}$$

ใบนัสพิเศษ +1 คะแนน (แบบไม่หาร)

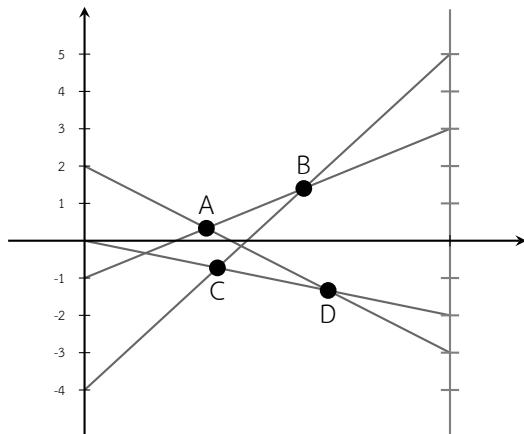
จาก 2 ตัวอย่างที่ผ่านมา น่าจะพอสังเกตถ้าหากจะการนำตัวเลขในเมทริกซ์มาคูณไขว้กันได้ จะอธิบายวิธีการคิดการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์จากข้อสังเกตที่ได้ พร้อมทั้งแสดงวิธีคำนวณการคูณเพื่อหาสมาชิกอีก 7 ตัวที่เหลือ

Quiz 5

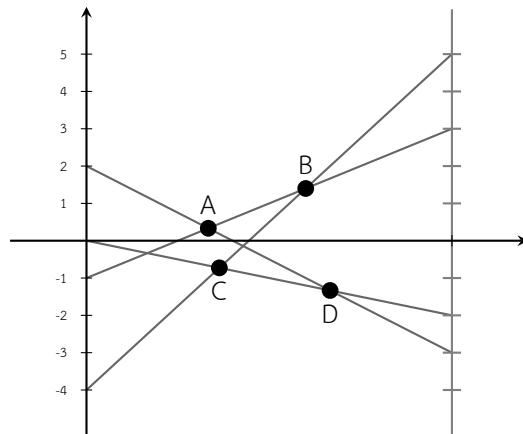
สมมติว่าในการวิเคราะห์กลยุทธ์การแข่งขันทางการตลาดแห่งหนึ่งแบบกลยุทธ์สม 2 กลยุทธ์ด้วยวิธีการวาดกราฟแล้วได้กราฟดังรูป



(1) จงແຮງເບຣີເວນກາຮາ minmax ພ້ອມບອກຈຸດທີ່ເປັນ minmax ຂອງກາຮັບຂັ້ນນີ້ (A, B, C, ອີ່ວຍ D)



(2) ຈິງແຮງເບຣີເວນກາຮາ maximin ພ້ອມບອກຈຸດທີ່ເປັນ maximin ຂອງກາຮັບຂັ້ນນີ້ (A, B, C, ອີ່ວຍ D)



ໂບນໍສພືເສະ +1 ຄະແນນ (ແບບໄມ່ຫາຮ)

ຈິງແກ້ສມກາຮາຄ່າພິກັດຂອງຈຸດ maximin ທີ່ຮະບູໃນຂົ້ວ (2) (ຫາຄ່າ p ໄດ້ຈະໄດ້ 0.5 ຄະແນນ) ພ້ອມທັງຮະບູຄ່າຂອງເກມ (ຫາຄ່າຂອງເກມໄດ້ຈະໄດ້ 0.5 ຄະແນນ)

Bibliography

- [1] Mattia Puddu, *Title*.
- [2] _____, *Title*, Publisher, 2025.
- [3] _____, *Title*, Journal (2025), 1–100.

