

ทัวแบบแถวคอย (Queuing Theory)

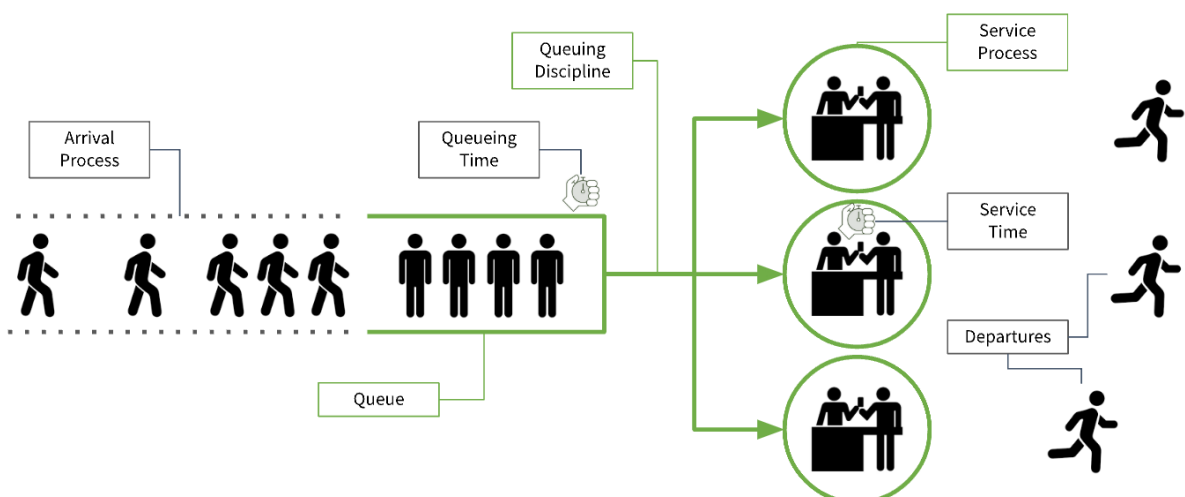
7.1 บทนำ

- ◇ ระบบแถวคอย (การเข้าคิว) คือระบบที่มีผู้ให้บริการและผู้มารับบริการ โดยที่ผู้รับบริการอาจจะได้รับบริการทันทีหรืออาจจะต้องรอเพื่อรับบริการตามลำดับ
- ◇ เป้าหมายของบทนี้คือวิเคราะห์และอธิบายระบบการเข้าแถวแบบต่าง ๆ ในแง่ของต้นทุนและแรงงาน

7.2 โครงสร้างของระบบแถวคอย

โครงสร้างสำคัญของระบบแถวคอยประกอบด้วย

1. ลูกค้า (ผู้มาใช้บริการ): ลักษณะการมาเป็นอย่างไร (อัตราการมา)
2. รูปแบบของระบบบริการ: มีกี่แถว มีกี่หน่วยบริการ และกระบวนการให้บริการของหน่วยบริการเป็นอย่างไร
3. หน่วยให้บริการ: อัตราการให้บริการเป็นอย่างไร



7.2.1 ลักษณะของลูกค้า

จำนวนผู้เข้ารับบริการ:

- ◇ มีผู้เข้ารับบริการได้ไม่จำกัด
- ◇ มีผู้เข้ารับบริการได้จำกัด

นอกจากประเด็นเรื่องความจำกัดของผู้เข้าคิวแล้ว ยังมีประเด็นเรื่องอัตราการมาเข้ารับบริการ (arrival rate) ซึ่งมักสมมติเป็น 2 รูปแบบ

- ◇ ผู้เข้ารับบริการมาแบบอัตราคงที่
- ◇ ผู้เข้ารับบริการมาแบบสุ่ม ซึ่งมักถูกสมมติให้สุ่มด้วยการแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson distribution)

ทั้งนี้การแจกแจงความน่าจะเป็นของการมาเข้ารับบริการอาจมีการแจกแจงแบบอื่นได้เช่นกันขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมของแต่ละธุรกิจ

Arrival Rate: Poisson distribution

คุณสมบัติ 7.1: การแจกแจงปัวซองของอัตราการเข้ารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนผู้เข้ารับบริการในช่วงระยะเวลาที่กำหนด เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบปัวซองที่อัตราเฉลี่ยของการเข้ารับบริการมีค่าเท่ากับ λ คนต่อหน่วยเวลา กล่าวคือ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ใช้บริการ x คนมีค่าเท่ากับ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

ตัวอย่าง 7.2.1: Warm-up Poisson

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้จำนวนผู้ใช้บริการห้างสรรพสินค้าแห่งนี้มีการแจกแจงแบบปัวซอง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ใช้บริการ 15 คน
2. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ใช้บริการไม่เกิน 5 คน
3. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ใช้บริการเกิน 5 คน

Arrival Time Interval: Exponential distribution

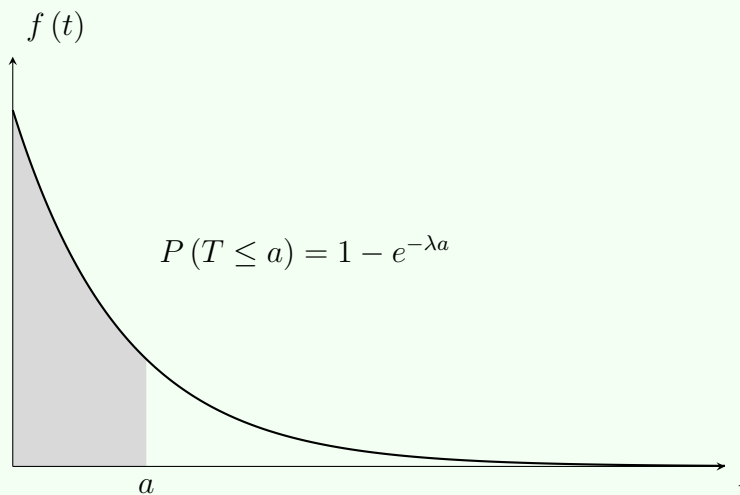
นอกจากการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้เข้าใช้บริการที่มีการแจกแจงแบบปัวซองแล้วนั้น ยังมีการแจกแจงอีกแบบที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ (arrival time interval)

คุณสมบัติ 7.2: การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลของระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะห่างเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ เราจะกำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่มีอัตราการเข้ามาใช้บริการเท่ากับ λ คนต่อหน่วยเวลา กล่าวคือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเวลา T คือ

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

ซึ่งจะได้ว่าความน่าจะเป็นสะสม $F(a) = P(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$



ตัวอย่าง 7.2.2: Warm-up Exponential

ในการทำการสำรวจอัตราการเข้าใช้บริการ ณ ร้านค้าแห่งหนึ่งในช่วงระยะเวลา 1 ชั่วโมง ผู้สำรวจพบว่าค่าเฉลี่ยการมาเข้าใช้บริการของบุคคลทั่วไปคือ 10 คน ต่อชั่วโมง กำหนดให้การเข้าใช้บริการเป็นกระบวนการปัวซอง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ามาใช้บริการภายใน 30 นาที
2. ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีผู้เข้ามาใช้บริการในช่วง 20 นาที

7.2.2 ลักษณะของแถวคอย

7.2.2.1 รูปแบบของระบบ

1. ระบบช่องทางเดียว-ขั้นตอนเดียว: ตัวอย่างเช่นตู้เอทีเอ็ม 1 ตู้
2. ระบบช่องทางเดียว-หลายขั้นตอน: ตัวอย่างเช่นการจ่ายยาในโรงพยาบาลขนาดเล็กที่มี 1 เคาน์เตอร์จ่ายยาและ 1 เคาน์เตอร์เก็บเงินที่ผู้ป่วยจะต้องเข้าคิวจ่ายเงินก่อนแล้วค่อยเข้าคิวรับยาในขั้นตอนถัดไป
3. ระบบหลายช่องทาง-ขั้นตอนเดียว: ตัวอย่างเช่นตู้ซื้อเหรียญโดยสาร MRT บางสถานีที่มีการเข้าคิว 1 แถวเพื่อกระจายคนไปตู้หลายตู้
4. ระบบหลายช่องทาง-หลายขั้นตอน: ตัวอย่างเช่นแผนกจ่ายยาในโรงพยาบาลใหญ่ที่แต่ละขั้นตอนมีผู้ให้บริการมากกว่า 1 คน

7.2.2.2 ความยาวของแถวคอย

1. จำกัด: เช่นในกรณีที่พื้นที่การเข้าแถวมีจำกัดทำให้เมื่อนั่งรอเต็มแล้วจะไม่สามารถรับลูกค้าเข้ามาเพิ่มได้อีกจนกว่าจะมีที่ว่าง เช่นปั้มน้ำมัน
2. ไม่จำกัด: เช่นเอกสารที่รอการพิมพ์ หรือระบบการจองที่ไม่ต้องอาศัยพื้นที่ทางกายภาพ

7.2.3 ลักษณะของหน่วยให้บริการ

ในทำนองเดียวกันกับลักษณะการเข้ามาของลูกค้า เราจะสมมติให้เวลาของการให้บริการเป็นกระบวนการปัวซองเช่นกัน กล่าวคือ

- ◇ การแจกแจงของเวลาให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล: กำหนดให้ μ เป็นอัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (คนต่อหน่วยเวลา) จะได้ว่า $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ เมื่อ $t > 0$ ซึ่งจะได้ตามมาว่า $P(T > t) = e^{-\mu t}$
- ◇ การแจกแจงของจำนวนคนที่ให้บริการได้ในหน่วยเวลาเป็นแบบปัวซอง: กล่าวคือ $P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$

ตัวอย่าง 7.2.3: อัตราการ กับ เวลาที่ใช้

จงหาอัตราของการให้บริการของหน่วยบริการหนึ่งเมื่อกำหนดให้หน่วยบริการนั้นมีใช้เวลาให้บริการ 3 นาทีต่อคน

7.3 ตัวแบบแถวคอย (เบื้องต้น)

ทั้งนี้ลักษณะของแถวคอยที่เราจะทำการศึกษามีลักษณะดังต่อไปนี้

- ◇ แถวคอยชั้นตอนเดียว
- ◇ หน่วยบริการมีได้ตั้งแต่ 1, 2, ..., หรือ n หน่วยบริการ
- ◇ มาก่อนได้รับบริการก่อน
- ◇ การมารับบริการและการให้บริการเป็นแบบปัวซอง (จำนวนครั้งเป็นปัวซอง และระยะเวลาเป็นเอกซ์โพเนนเชียล)

7.3.0.1 Kendall Notation

เราจะเขียนรูปแบบแถวคอยเป็นสัญลักษณ์แบบ Kendall Notation ดังนี้

นิยาม 7.3.1: Kendall Notation

$$A/B/s$$

โดยที่

A = การแจกแจงของอัตราการมารับบริการ

B = การแจกแจงของอัตราการให้บริการ

s = จำนวนหน่วยของผู้ให้บริการ

และสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการแจกแจงมีดังนี้

M = แจกแจงแบบปัวซอง

D = แจกแจงแบบคงที่

G = อัตราการให้บริการมีการแจกแจงแบบปกติ

7.3.0.2 สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แถวคอย

นิยาม 7.3.2: Notation

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แถวคอยมีดังนี้

λ = อัตราการเข้ามารับบริการ (จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา)

μ = อัตราการให้บริการ (จำนวนลูกค้าเฉลี่ยที่หน่วยบริการสามารถให้บริการแล้วเสร็จในหนึ่งหน่วยเวลา)

ρ = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน (มีผู้รับบริการอยู่ในหน่วยบริการ)

P_0 = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

L = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ (ทั้งที่กำลังรับบริการและกำลังรอในแถวคอย)

L_q = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย

W = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าเสียไปในการรับบริการในระบบตั้งแต่เข้ามาจนเสร็จ

W_q = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าเสียไปในการรอคอยอยู่ในแถวคอย

P_n = ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ามารับบริการจำนวน n คนในระบบแถวคอย

7.3.1 ตัวแบบ M/M/1

แถวคอยที่มีอัตราการเข้ารับบริการแบบสุ่มแบบกระบวนการปัวซอง, มีอัตราการให้บริการแบบปัวซอง และมี 1 หน่วยบริการ (กล่าวคือถ้ายังมี 1 คนใช้บริการอยู่คนที่เหลือต้องเข้าแถวคอยจนกว่าจะใช้บริการเสร็จและออกจากหน่วยบริการ)

ทฤษฎีบท 7.3.1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณของแถวคอยแบบ M/M/1

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{\mu}, & P_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu}, & P_n &= P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \\ L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, & L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \\ W &= \frac{1}{\mu - \lambda}, & W_q &= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

โดยที่สมมติฐานของตัวแบบนี้คือ $\lambda < \mu$

จริง ๆ แล้วสูตรเหล่านี้มีที่มาจากการใช้การคำนวณเชิงความน่าจะเป็น (ความน่าจะเป็น, ตัวแปรสุ่ม, การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง, ค่าคาดหวัง) นักศึกษาที่แม่นในส่วนของการคำนวณเหล่านี้จะสามารถคำนวณตัวแปรต่าง ๆ ได้ด้วยตัวเองโดยไม่ต้องรู้สูตรเหล่านี้ก็ได้

ตัวอย่าง 7.3.1: M/M/1

บริการถ่ายภาพเอกสารที่ร้านแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายภาพเอกสาร 1 เครื่องให้บริการแบบมาก่อนได้ก่อน โดยที่ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายภาพเอกสารจะเข้ามาแบบสุ่มปัวซองในอัตรานาที่ละ 2 คน ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายภาพเอกสารให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย $1/4$ นาทีต่อคน จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยของบริการเครื่องถ่ายภาพเอกสาร

ตัวอย่าง 7.3.2: M/M/1

ร้านค้าแห่งหนึ่งกำลังวางแผนพัฒนาเรื่องการรอคิวของลูกค้าเพื่อไม่ให้ลูกค้าต้องรอนานจึงได้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมลูกค้าและพบว่าจำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 20 คนต่อชั่วโมงและมีการแจกแจงแบบปัวซอง ในส่วนของทางร้าน พนักงานของร้านสามารถให้บริการคิดชำระเงินได้เฉลี่ย 1 คนต่อ 2 นาทีและมีการแจกแจงของเวลาการให้บริการแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ปัจจุบันทางร้านมีพนักงาน 1 คน จงวิเคราะห์แถวคอยของร้านค้าแห่งนี้

7.3.2 ตัวแบบ M/M/s

ทฤษฎีบท 7.3.2: การวิเคราะห์เชิงปริมาณของแถวคอยแบบ M/M/s

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}, \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right]}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{เมื่อ } n \leq s \\ P_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} & \text{เมื่อ } n > s \end{cases}$$

$$L_q = P_0 \left[\frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! (1 - \rho)^2} \right], \quad L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

โดยที่สมมติฐานของตัวแบบนี้คือ $\lambda < s\mu$

ตัวอย่าง 7.3.3: M/M/s

บริการถ่ายเอกสารที่ร้านแห่งหนึ่งมีเครื่องถ่ายเอกสาร 5 เครื่องให้บริการแบบมาก่อนได้ก่อน โดยที่ลูกค้าที่เข้ามาเพื่อถ่ายเอกสารจะเข้ามาแบบสุ่มปัวซองในอัตรานาที่ละ 2 คน ถ้าเวลาที่พนักงานประจำเครื่องถ่ายเอกสารให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 1/4 นาทีต่อคน จงวิเคราะห์ระบบแถวคอยของบริการเครื่องถ่ายเอกสาร

7.3.3 ตัวแบบ M/G/1

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.3.4 ตัวแบบ M/D/1

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.4 ตัวแบบแถวคอย (ทฤษฎี)

(ข้ามสำหรับ 720201)

7.5 การวิเคราะห์ระบบแถวคอยเพื่อการตัดสินใจทางธุรกิจ

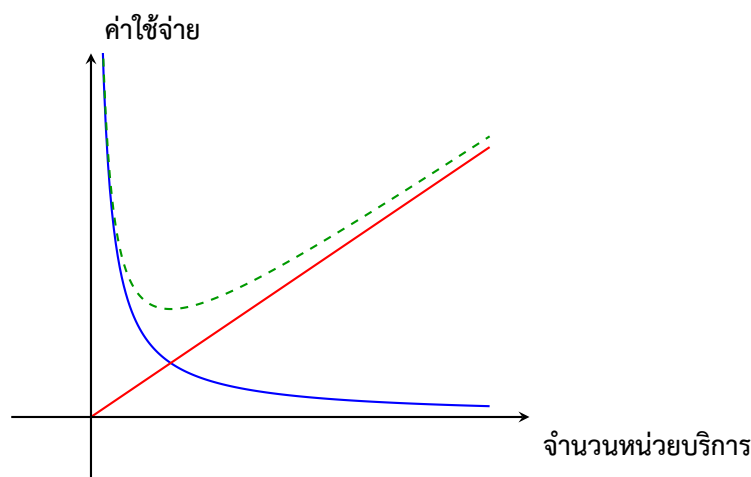
ชัดเจนว่าวิธีการหนึ่งที่จะทำให้ลูกค้าไม่ต้องรอคอยคือการเพิ่มหน่วยบริการเข้าไปให้มากพอ หรือมากกว่าลูกค้าที่เข้ามา ก็จะทำให้ลูกค้าทุกคนสามารถได้รับการได้ทันที ทว่าวิธีการดังกล่าวอาจจะเป็นไปไม่ได้เพราะใช้ต้นทุนสูงหรือทรัพยากรไม่เพียงพอ (เช่นพื้นที่ร้าน) เราจึงต้องทำการ trade-off กันระหว่างจำนวนหน่วยบริการกับต้นทุนที่ใช้

ทั้งนี้ ต้นทุนที่จะนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์แถวคอยมี 2 หมวดดังนี้

1. **ต้นทุนการให้บริการ (service cost):** เช่นค่าแรงงาน ค่าเช่าสถานที่ ที่แปรผันตรงกับจำนวนหน่วยบริการ กล่าวคือ ยิ่งเพิ่มหน่วยบริการมากขึ้น ก็จะใช้ต้นทุนมากขึ้นเรื่อย ๆ
2. **ต้นทุนในการรอคอยของลูกค้า (waiting cost):** เป็นค่าเสียหายที่เกิดจากการรอคอยที่ยิ่งลูกค้ารอคอยนานเท่าไร ก็จะมีค่าใช้จ่ายมากขึ้นเท่านั้น เช่นการประเมินความพึงพอใจของลูกค้า หรือต้นทุนของการเพิ่มเติมที่ลูกค้าได้รับขณะรอคิว (เช่นร้าน Haidilao มีบริการทำเล็บหรือขนมฟรีของลูกค้าที่กำลังรอคิว)

ค่าใช้จ่ายรวม = ต้นทุนการให้บริการ + ต้นทุนการรอคอยของลูกค้า

$$TC = s \cdot C_s + L \cdot C_w$$



7.5.1 การกำหนดจำนวนหน่วยบริการ

โจทย์ที่มักจะถูกถามเป็นอันดับแรกคือเราควรจะทำหน่วยบริการกี่หน่วยดีเพื่อให้เพียงพอที่จะทำให้ลูกค้าพอใจโดยไม่ต้องใช้ต้นทุนเยอะจนเกินไป ซึ่งวิธีการคือการวิเคราะห์หาจุดต่ำสุดของค่าใช้จ่ายรวม แต่ในทางปฏิบัติ เนื่องจากเราต้องการหาจุดเหมาะสมสุดของตัวแปรเดียวที่เป็นจำนวนนับ จึงเป็นการง่ายที่จะทำการวิเคราะห์หาต้นทุนรวมของ $M/M/1$, $M/M/2$, ... ไปเรื่อย ๆ จนเจอจุดที่ให้ค่าต่ำสุด (ลดลงเรื่อย ๆ จนเจอจุดที่เพิ่มอีกหน่วยแล้วมีต้นทุนมากขึ้น)

ตัวอย่าง 7.5.1

จากตัวอย่าง 7.3.2 ที่จำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 20 คนต่อชั่วโมงและมีการแจกแจงแบบปัวซอง, พนักงานของร้านสามารถให้บริการคิดชำระเงินได้เฉลี่ย 1 คนต่อ 2 นาทีและมีการแจกแจงของเวลาการให้บริการแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล สมมติว่าปัจจุบันมีพนักงาน 3 คนอยู่แล้ว จงหาว่าร้านนี้ควรจ้างพนักงานบริการชำระเงินเพิ่มอีกกี่คนมาทำงาน

7.5.2 การตัดสินใจจัดรูปแบบแถวคอย

ตัวอย่าง 7.5.2

จากตัวอย่าง 7.5.1 มีนักวิเคราะห์เสนอว่าแทนที่จะเพิ่มจำนวนพนักงานให้ลองเปลี่ยนรูปแบบเป็นแต่ละพนักงานมีแถวคอยเป็นของตัวเอง และลูกค้าที่เข้ามาจะกระจายตัวกันตามแถวคอยทั้ง 3 แถว กล่าวคือลองเปลี่ยนจาก $M/M/3$ เป็น $M/M/1$ ทั้งหมด 3 ระบบอิสระจากกัน จงวิเคราะห์ต้นทุนรวมของระบบใหม่นี้

7.5.3 การตัดสินใจในลักษณะอื่น ๆ

ตัวอย่าง 7.5.3

บริษัทโลจิสติกส์แห่งหนึ่งให้บริการทั่วไปเกี่ยวกับการขนส่งและจัดเก็บสินค้า โดยปัจจุบันมีโกดังเก็บสินค้าเพียงแห่งเดียว ซึ่งมีที่เทียบรถบรรทุกเพื่อขนส่งสินค้าขึ้นลงได้ครั้งละ 1 คัน รถเข้ามาเฉลี่ยทุก ๆ 40 นาที แจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล การขนส่งสินค้าขึ้นลงใช้เวลาเฉลี่ยคันละ 30 นาที แจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ถ้าบริษัทต้องการให้รถแต่ละคันใช้เวลาในระบบการขนถ่ายสินค้าไม่เกินคันละ 1 ชั่วโมง ควรใช้เวลาในการขนส่งสินค้าคันละกี่นาที