

## ตัวอย่าง 1.1.3: ตัวอย่างการผลิตเพื่อให้ได้ยอดขายสูงสุด

โรงงานผลิตชิ้นส่วนรถยนต์ต้องการวางแผนการผลิตชิ้นส่วน X และชิ้นส่วน Y โดยมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 4 เครื่อง และใช้เหล็ก ไฟฟ้าและแรงงานในการผลิตดังนี้

กระบวนการ	ปริมาณที่ผลิตได้		ความต้องการ		
	X	Y	เหล็ก	ไฟฟ้า	แรงงาน
1	4	0	100 kg	800 kWh	16 hrs
2	0	1	70 kg	600 kWh	16 hrs

ในแต่ละวัน โรงงานจะมีเหล็กให้ใช้ไม่เกิน 6000 กิโลกรัม มีปริมาณไฟฟ้าที่ใช้ได้ไม่เกิน 100000 กิโลวัตต์ และใช้แรงงานคนงานรวมกันได้ไม่เกิน 1000 ชั่วโมง สมมติว่าชิ้นส่วน X ขายได้ 1000 บาทต่อชิ้น ในขณะที่ชิ้นส่วน Y ขายได้ 1800 บาทต่อชิ้น และโรงงานนี้ต้องการจัดการการผลิตให้มียอดขายสูงสุดเท่าที่จะทำได้

## วิธีทำ:

**ขั้นที่ 1:** กำหนดตัวแปร: เนื่องจากในโจทย์ข้อนี้ เราต้องตัดสินใจว่าจะผลิตกระบวนการใดเป็นจำนวนเท่าไรบ้าง เราจึงต้องให้ตัวแปรตัดสินใจเป็นจำนวนกระบวนการที่ใช้งาน โดยกำหนดให้

$a$  = จำนวนหน่วยการใช้งานกระบวนการที่ 1

$b$  = จำนวนหน่วยการใช้งานกระบวนการที่ 2

**ขั้นที่ 2:** เขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยสิ่งที่เป้าหมายของโจทย์ธุรกิจนี้คืออยาก maximize ยอดขายให้สูงที่สุด แต่การจะรู้ยอดขายได้นั้น เราต้องรู้ก่อนว่าเราผลิตชิ้นส่วน X และผลิตชิ้นส่วน Y ได้กี่ชิ้น และเนื่องจากชิ้นส่วน X ขายได้ชิ้นละ 1000 บาท จึงจะได้ว่ายอดขายจากชิ้นส่วน X คือ

$$\text{ยอดขาย} = 1000 (\text{จำนวนชิ้น X ที่ขายได้}) + 1800 (\text{จำนวนชิ้น Y ที่ขายได้})$$

แต่เนื่องจากจำนวนชิ้นที่จะผลิตได้ขึ้นกับการตัดสินใจว่าเราจะผลิตกระบวนการใดกี่กระบวนการบ้าง ตัวอย่างเช่นถ้าเราผลิตด้วยกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน 1 หน่วย เราจะผลิต X ออกมาได้ 4 ชิ้นภายในคราวเดียว ดังนั้นถ้าเราสั่งทำกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน  $a$  หน่วย เราจะได้ชิ้นส่วน X ออกมา  $4a$  ชิ้นทำนองเดียวกัน ผลผลิตที่ได้จากกระบวนการที่ 2 คือ ชิ้นส่วน Y เป็นจำนวน  $b$  ชิ้น จึงได้ว่า

$$\text{ยอดขาย} = 1000 (4a) + 1800 (b) = 4000a + 1800b \quad [1]$$

**ขั้นที่ 3:** เขียนสมการเงื่อนไข โดยจากโจทย์จะได้ว่ามีเงื่อนไขอยู่ 3 เงื่อนไข คือเงื่อนไขการใช้เหล็ก เงื่อนไขการใช้

## 1.2. แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

ไฟฟ้า และเงินใช้แรงงาน

$$\text{เหล็ก:} \quad 100a + 70b \leq 6000 \quad [2]$$

$$\text{ไฟฟ้า:} \quad 800a + 600b \leq 100000 \quad [3]$$

$$\text{แรงงาน:} \quad 16a + 16b \leq 1000 \quad [4]$$

จึงได้กำหนดการเชิงเส้นดังนี้

$$\max \quad z = 4000a + 1800b$$

$$\text{s.t.} \quad 100a + 70b \leq 6000$$

$$800a + 600b \leq 100000$$

$$16a + 16b \leq 1000$$

$$a, b \geq 0$$

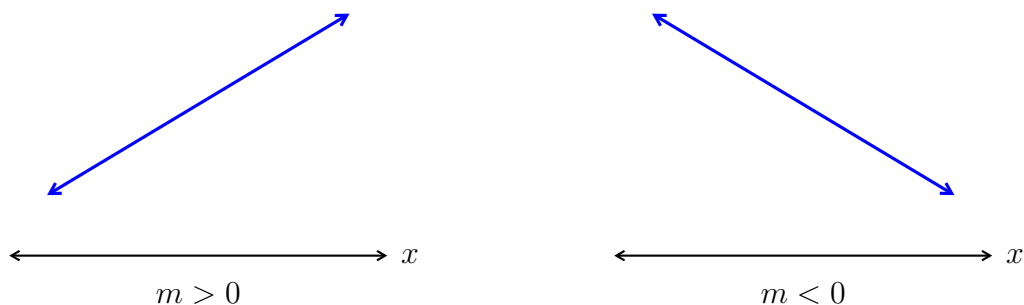
□

## 1.2 แนวคิดพื้นฐานการหาผลเฉลยด้วยกราฟ

หลังจากที่เราสามารถสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นได้แล้ว สิ่งที่จะต้องทำต่อมาก็คือการหาผลเฉลยของปัญหานั้น ซึ่งแนวคิดหลักของการทำกำหนดการเชิงเส้นเป็นสิ่งที่ได้ซับซ้อนมากขึ้น ถ้าพิจารณาในกรณี 1 ตัวแปรหรือ 2 ตัวแปร เพราะเป็นกรณีที่ยังคงวาดกราฟได้ และการศึกษาจากกรณีเล็ก ๆ นี้ก็จะสามารถนำไปสู่แนวคิดที่ทั่วไปมากขึ้นได้

## 1.2.1 กรณี 1 ตัวแปรตัดสินใจ

ขอเริ่มจากกรณีที่ชัดเจนและตรงไปตรงมามากที่สุดก่อน ซึ่งก็คือกรณี 1 ตัวแปร ซึ่งจะสามารถวาดทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์และความสัมพันธ์เงื่อนไขได้โดยง่ายในกราฟ 2 มิติ องค์ประกอบแรกสุดคือฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น  $f(x)$  โดยที่  $x$  เป็นตัวแปรตัดสินใจ ดังนั้น หน้าตาของสมการจะอยู่ในรูป  $f(x) = mx + c$  และแน่นอนว่ามีความเป็นไปได้หลัก ๆ อยู่ 2 แบบคือเส้นตรงความชันบวก กับเส้นตรงความชันลบดังรูป



ตัวอย่าง 1.2.3: แก้ปัญหาคำหนดการเชิงเส้น 2 ตัวแปรด้วยการวาดภาพ

จงแก้โจทย์กำหนดการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.1.3 ด้วยวิธีวาดภาพ โดยพิจารณาค่าสูงสุดทั้งวิธีการไถ่ระดับ และวิธีการลองแทนค่าทุกจุดยอด

วิธีทำ: จากข้อที่ผ่านมา เราได้มาแล้วว่ากำหนดการเชิงเส้นคือ

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4000a + 1800b \\ \text{s.t.} \quad & 100a + 70b \leq 6000 \\ & 800a + 600b \leq 100000 \\ & 16a + 16b \leq 1000 \\ & a, b \geq 0 \end{aligned}$$

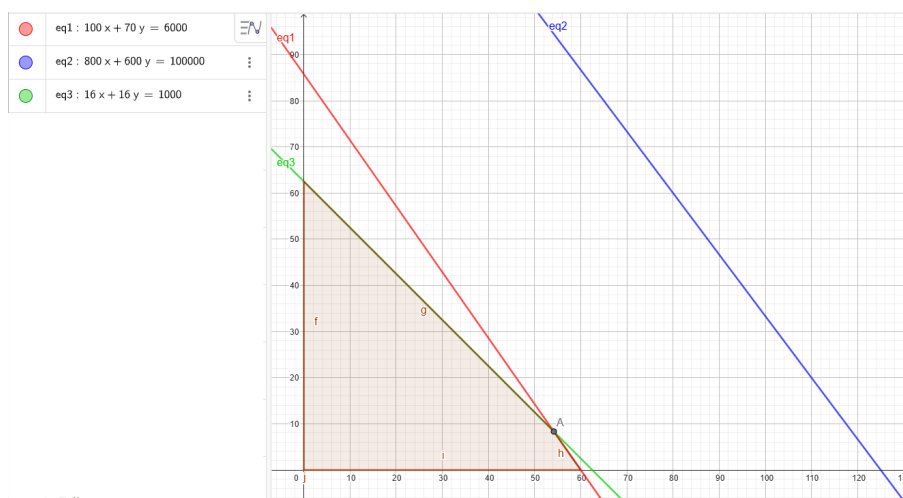
ขั้นที่ 1: วาดรูปภาพเงื่อนไข โดยเรามี 3 เงื่อนไขดังนี้

- ◇  $100a + 70b = 6000$
- ◇  $800a + 600b = 100000$
- ◇  $16a + 16b = 1000$

ซึ่งทำได้โดยการหาจุดตัดแกน ซึ่งจะได้ดังนี้

สมการ	จุดตัดแกน $x$ ( $a$ )	จุดตัดแกน $y$ ( $b$ )
$100a + 70b = 6000$	60	$600/7 \approx 85.71$
$800a + 600b = 100000$	125	$\approx 166.67$
$16a + 16b = 1000$	62.5	62.5

และถ้าหาจุดตัดจากสมการที่



1 และสมการที่ 3 ที่ตัดกันจะได้จุด  $\approx (54.17, 8.33)$

## 1.3. แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

ขั้นที่ 2: แทนค่าจุดมุมลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกับว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์มากที่สุด

$(a, b)$	ยอดขาย = $4000a + 1800b$
$(0, 62.5) \approx (0, 62)$	111600
$(54.17, 8.33) \approx (54, 8)$	230400
$(60, 0)$	240000
$(0, 0)$	0

ขั้นที่ 3: สรุปคำตอบ จะได้ค่ายอดขายมากที่สุดเท่ากับ 240000 เกิดขึ้นที่จุด  $(60, 0)$  กล่าวคือผลิตกระบวนการที่ 1 เป็นจำนวน 60 เครื่อง และไม่ผลิตกระบวนการที่ 2 เลย

## หมายเหตุ 1: โจทย์เพิ่ม

จะเห็นว่ากระบวนการที่ 2 ไม่ถูกใช้งานเลย ซึ่งอาจไม่เป็นที่พึงพอใจกับฝ่ายจัดซื้อที่ลงทุนไปกับการซื้อเครื่องมือสำหรับกระบวนการที่ 2 ไปแล้ว (เช่นกรณีกระบวนการที่ 2 เป็นเรื่องของเครื่องจักร) แต่เมื่อฝ่ายการตลาดทำการสำรวจเพิ่มเติม พบว่าเรายังสามารถทำสินค้า Y ให้มีภาพลักษณ์ที่พรีเมียมมากขึ้นเพื่อเปลี่ยนกลุ่มลูกค้าไปกลุ่มที่กำลังจ่ายสูงขึ้นได้ (เนื่องจากผลิตได้น้อยเมื่อเทียบกับ X ที่ผลิตได้ 4 ชิ้นต่อครั้งของกระบวนการที่ 1) ดังนั้นฝ่ายการตลาดจึงมาถามเราที่เป็นที่ปรึกษาทางธุรกิจว่าควรตั้งราคาขายสินค้า Y ให้อยู่ในช่วงราคาเท่าไรเพื่อให้ผลเฉลี่ยที่ให้ออกขายสูงที่สุดมาจากการใช้ทั้งเครื่องจักรของกระบวนการที่ 1 และเครื่องจักรของกระบวนการที่ 2

นอกจากการปรับราคาแล้ว ยังมีทางเลือกอื่นใดบ้างในการปรับปรุงแบบจำลองให้ยังคงใช้ทั้ง 2 กระบวนการ โดยที่ไม่ต้องปรับราคา (แต่อาจจะได้ออกขายรวมน้อยลงบ้างก็ยังยอมรับได้)

□

## 1.3 แนวคิดเบื้องต้นของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex)

ในหัวข้อที่แล้ว เราศึกษาวิธีการแก้ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธีการรูปภาพ ซึ่งข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวคือเราสามารถแก้ปัญหาได้แค่กรณี 2 ตัวแปร และจริง ๆ แล้ว เราสามารถทำกับปัญหา 3 ตัวแปรก็ได้เช่นกันแต่จะวาดภาพยากกว่า เพราะต้องดูขอบเขตผลเฉลยใน 3 มิติ แต่ว่าถ้า 4 ตัวแปรเป็นต้นไปเราจะไม่สามารถวาดภาพได้อีกแล้ว ทำให้วิธีการดังกล่าวใช้ไม่ได้อีกต่อไป

เครื่องมือที่จะใช้ในการแก้ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นสำหรับกรณีใด ๆ ก็ตามที่จะศึกษาในหัวข้อนี้คือวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) ซึ่งเป็นกระบวนการในการใช้การดำเนินการทางเมทริกซ์เพื่อการเปลี่ยน pivot ที่จะให้ค่าสูงขึ้นเรื่อย ๆ ไล่ไปตามขอบของรูป โดยอาศัยคุณสมบัติตามที่เราได้ศึกษามาในกรณี 2 มิติว่าการเดินตามขอบบนบริเวณที่เป็นรูปนูน (convex) จะพาเราไปจุดผลเฉลยค่าสุดขีดได้แน่ ๆ

ทั้งนี้ สิ่งหนึ่งที่ต้องเน้นย้ำสำหรับขั้นตอนกระบวนการนี้คือสมมติฐานการเป็นรูปนูน เพราะอัลกอริทึมที่กำลังจะได้ศึกษาอาศัยการเดินตามเส้นขอบตามทิศทางที่มีค่าเพิ่มได้ ซึ่งเงื่อนไขที่การันตีการไปจุดผลเฉลยสุดขีดได้คือการเป็นรูปนูนที่ทำให้

## Assignment

จากสถานการณ์ของบริษัท ABC Furniture ที่ต้องการวางแผนการผลิต “โต๊ะทำงาน” และ “ตู้เก็บเอกสาร” เพื่อให้ได้ยอดขายสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดของแรงงานและวัตถุดิบ (ตามสถานการณ์ในต้นบท)

### Part A: การสร้างโมเดลคณิตศาสตร์

#### 1. จากสถานการณ์ของบริษัท ABC Furniture

- (a) กำหนดตัวแปรให้ชัดเจน
- (b) เขียนสมการจุดประสงค์ (Objective Function)
- (c) เขียนข้อจำกัดทั้งหมด (Constraints)
- (d) ระบุ Domain ของตัวแปร

**วิธีทำ:** เนื่องจากเราต้องวางแผนจำนวนการผลิตโต๊ะทำงานและตู้เก็บเอกสาร ดังนั้นเราจึงต้องกำหนดตัวแปรเป็นจำนวนโต๊ะและจำนวนตู้ โดยในที่นี้ กำหนดให้

$x =$  จำนวนโต๊ะทำงานที่จะผลิต

$y =$  จำนวนตู้เก็บเอกสารที่จะผลิต

เป้าหมายของการผลิตคือเพื่อที่ทำให้ได้ยอดขายสูงสุด ดังนั้นจึงต้องวางฟังก์ชันจุดประสงค์คือยอดขาย และเนื่องจากยอดขายคิดได้จากจำนวนโต๊ะและจำนวนตู้ที่ผลิตคูณด้วยราคาที่ขายตรง ๆ จึงได้ว่า สมการจุดประสงค์คือยอดขาย

$$2000x + 1500y$$

ในส่วนของเงื่อนไขที่เป็นข้อจำกัดของโจทย์นี้จะมีเรื่องของเวลาแรงงานและปริมาณวัตถุดิบที่มี

- ◇ การผลิตโต๊ะ  $x$  ตัวซึ่งต้องใช้เวลามผลิตตัวละ 4 ชั่วโมง จึงต้องใช้เวลามผลิตโต๊ะทั้งหมด  $4x$  ชั่วโมง
- ◇ การผลิตตู้  $y$  ตัวซึ่งต้องใช้เวลามผลิตตัวละ 3 ชั่วโมง จึงต้องใช้เวลามผลิตโต๊ะทั้งหมด  $3y$  ชั่วโมง

ดังนั้นเราจึงใช้เวลาแรงงานในการผลิตทั้งหมด  $4x + 3y$  และเพราะเรามีเวลาจำกัดสูงสุดที่ 1000 ชั่วโมง จึงได้เงื่อนไขด้านเวลาเป็น

$$4x + 3y \leq 1000$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้เงื่อนไขเรื่องวัตถุดิบเป็น

$$2x + y \leq 800$$

ทั้งนี้ เนื่องจากตัวแปรที่เราตั้งไว้เป็นเรื่องของจำนวนการผลิต ดังนั้น Domain ของจำนวนแปรจึงคือจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (ถึงแม้ตอนแรกแก้ปัญหาเราจะสนใจแค่ไม่ติดลบอย่างเดียวก็ตาม:  $x \geq 0, y \geq 0$ )

สรุปแล้ว โจทย์นี้เราจะได้แบบจำลองกำหนดการเชิงเส้นอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1500y \\ \text{subject to} \quad & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

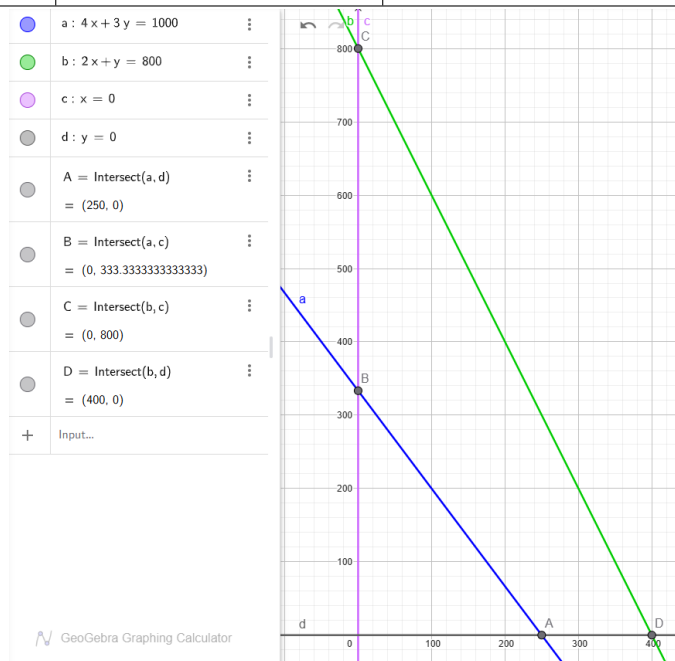
□

## Part B: การวิเคราะห์และคำนวณผลลัพธ์

### 1. หาผลเฉลยด้วยวิธีการวาดกราฟ

วิธีทำ: เริ่มจากการหาจุดตัดแกนของแต่ละเส้นสมการเงื่อนไข

สมการ	จุดตัดแกน $x$ (แทน $y = 0$ )	จุดตัดแกน $y$ (แทน $x = 0$ )
$4x + 3y = 1000$	$4x = 1000 \Rightarrow x = 250$	$3y = 1000 \Rightarrow y = 1000/3 \approx 333.33$
$2x + y = 800$	$2x = 800 \Rightarrow x = 400$	$y = 800$



จะได้ว่าบริเวณความเป็นไปได้ (feasible region) คือรูปสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยแกน  $x$ , แกน  $y$  และเส้นตรงสมการ  $4x + 3y = 1000$  ซึ่งมีจุดยอด 3 จุดได้แก่  $(0, 0)$ ,  $(0, 1000/3)$ ,  $(250, 0)$  (เนื่องจากในข้อนี้ไม่มีการตัดกันของเส้นสมการเงื่อนไขในบริเวณที่สนใจ จึงไม่มีการแก้ระบบสมการเพื่อหาจุดตัด)

สุดท้ายคือแทนค่าจุดมุมลงในฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อหาค่าแล้วเปรียบเทียบกับกันว่าจุดใดให้ค่าจุดประสงค์มากที่สุด

$(x, y)$	ยอดขาย = $2000x + 1500y$
$(0, 0)$	0
$(0, 1000/3) \approx (0, 333)$	499500
$(250, 0)$	500000

ซึ่งทำให้ได้ว่าค่ายอดขายสูงสุดที่จะทำได้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดมาคือ 500,000 บาท ที่จะผลิตโต๊ะอย่างเดียว 250 ตัว

### หมายเหตุ 2

ถ้าไม่นับเรื่องการปิดให้เป็นจำนวนเต็มนั้น จริงๆ แล้วที่จุด  $(0, 1000/3)$  ก็ให้ค่ายอดขายสูงสุดเป็น 500000 บาทเช่นกัน แต่ว่าเนื่องจากเราต้องปิดให้เป็นจำนวนเต็ม และไม่สามารถปัดขึ้นได้เนื่องจากจะเกินเงื่อนไขที่กำหนดมา ทำให้เราสามารถผลิตได้ยอดขายแค่ 499500 ที่จุดที่จะผลิตได้อย่างเดียว

นอกจากนั้น ทุกจุดบนเส้นสมการเงื่อนไข  $4x + 3y = 1000$  นั้นต่างให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น 500000 เหมือนกันทุกจุด (เป็นโจทย์ทิ้งไว้ให้นักศึกษาลองคิดว่าทำไมถึงเป็นเช่นนั้น) ดังนั้น เราอาจจะเลือกตัวเลือกอื่นที่ไม่ใช่จุดมุมก็ได้ トラบใดที่ยังเป็นจุดที่ทั้ง  $x$  และ  $y$  ต่างเป็นจำนวนเต็มและยังอยู่บนเงื่อนไขดังกล่าว (ตัวอย่างเช่น  $x = 100, y = 250$  ก็เป็นอีกจุดที่ยังสอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์และให้ค่ายอดขายรวมเป็น 500000 เช่นเดียวกัน)

### โจทย์ Challenge

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x + 1500y \\ \text{subject to} \quad & 4x + 3y \leq 1000 \\ & 2x + y \leq 800 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

- ทำไมทุกจุดบนเส้นเงื่อนไข  $4x + 3y = 1000$  ถึงทำให้ค่ายอดขายรวมได้ราคา 500,000 บาทเหมือนกันทั้งหมด
- ถ้าเกิดทางบริษัท ABC Furniture ไม่ต้องการตัวเลือกที่ผลิตแค่อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น แต่ให้ช่วยลิสต์รายการทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่ทำให้ยอดขายรวมได้ 500,000 บาทเหมือนกัน เราจะมีวิธีการหาตัวเลือกทั้งหมดนั้นอย่างไร  
(คำใบ้  $x = 250 - \frac{3}{4}y$ )

