สอบย่อย 1: การพิสูจน์เบื้องต้น

ข้อ 1 (3 คะแนน)

กำหนดสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ที่อนุญาตให้ใช้ดังนี้:

- $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ (เพื่อใช้เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของตัวบ่งปริมาณ)
- สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ $=, <, >, \leq, \geq$
- ตัวดำเนินการ $+, -, \times$
- เพรดิเคต $\text{Prime}(x)$ แทนประโยค "x เป็นจำนวนเฉพาะ" (ไม่จำเป็นต้องทราบว่าจำนวนเฉพาะคืออะไร แต่ถ้าอยากรู้ "จำนวนเฉพาะคือจำนวนเต็มบวกที่มีเพียงแค่ 1 และตัวมันเองที่หารลงตัวเท่านั้น")
- สัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ทั้งหมดที่สอนไป

จงแปลงประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบสัญลักษณ์

1. ผลต่างของจำนวนนับสองจำนวนใด ๆ จะไม่มีทางมีค่าเกินผลบวกของพวกมัน
2. ไม่มีจำนวนเฉพาะที่เขียนได้ในรูปแบบกำลังสองของจำนวนนับใด ๆ เลย

ข้อ 2 (4 คะแนน)

กำหนดให้ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ แทนเซตของจำนวนนับ, $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าจริงหรือเท็จพร้อมทั้งพิสูจน์

1. $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x + y = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{N}, x + y = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

ข้อ 3 (4 คะแนน)

จงพิสูจน์ข้อคาดการณ์นี้
สำหรับจำนวนเต็ม x และ y,

xy เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อทั้ง x และ y เป็นจำนวนคี่

ข้อ 4 (4 คะแนน)

จินตนาการว่ามีกลุ่มปาร์ตี้ที่มีคนอยู่อย่างน้อย 3 คน (รวมตัวนักศึกษาด้วย) โดยที่คน 2 คนใด ๆ มีแค่เป็นเพื่อนหรือไม่ก็ไม่รู้จักกันเลย จงพิสูจน์ว่า

"แต่ละคนมีเพื่อนอยู่ในปาร์ตี้อย่างมากแค่ 1 คน" หรือไม่ก็ "มีคน 2 คนในงานที่มีเพื่อนร่วมกัน"

ข้อโบนัส (3 คะแนน)

กำหนดนิยามของจำนวนตรรกยะให้ดังนี้

Definition 1.

- q เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม a และ b โดยที่ $b \neq 0$ ที่ทำให้ $q = \frac{a}{b}$
- r เป็นจำนวน<u>อ</u>ตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ r ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

ทั้งนี้ นักศึกษาไม่จำเป็นต้องใช้นิยามที่ให้ไว้ในการพิสูจน์โจทย์ข้อนี้ อาจารย์ให้ไว้เผื่อมีคนอยากรู้ว่าจำนวนตรรกยะและอตรรกยะคืออะไร

จงพิสูจน์ว่า

<u>มี</u>จำนวน<u>อ</u>ตรรกยะ x และ y ที่ทำให้ x^y เป็นจำนวนตรรกยะ

คำใบ้: ลองพิจารณา $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ และนักศึกษาสามารถใช้ fact ต่าง ๆ เหล่านี้ได้เลยโดยไม่ต้องพิสูจน์

- $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- 2 เป็นจำนวนตรรกยะ