Lecture 5: กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)
(Extended Simplex Method: Greater than and Equality Constraints)

วิชา: การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางธุรกิจ

อาจารย์ผู้สอน: ปพนธีร์ แย้มโชติ | ภาคปลาย ปีการศึกษา 2568

เป้าหมายของคาบนี้

เมื่อจบคาบนี้ นักศึกษาควรสามารถ

1. สามารถแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีเงื่อนไขมากกว่าหรือเท่ากับ ($ax + by \geq k$) โดยการเติมตัวแปรส่วนเกิน (surplus) และตัวแปรเทียม (artificial)
2. สามารถแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีเงื่อนไขการเท่ากัน ($ax + by = k$) โดยการตัวแปรเทียม (artificial)
3. สามารถแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่จุดประสงค์คือการหาค่าต่ำสุด (min) ของฟังก์ชันจุดประสงค์ได้

1 ความหมายของตัวแปรเทียม

จุดตั้งหลักของ Simplex คือต้องการทำระบบให้เริ่มจากการกำหนดตัวแปรตัดสินใจเป็นตัวแปร non-basic กล่าวคือต้องทำให้ระบบเริ่มที่จุด $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$ และตัวแปรเสริมทั้งหมดจะต้องมีค่าไม่ติดลบด้วย

พิจารณาเงื่อนไข

$$2x + 3y \geq 12$$

เติมตัวแปรส่วนเกิน (ถ้าเติมฝั่งมากกว่าจะเรียกตัวแปรส่วนเกิน $2x + 3y - s = 12$ แต่ถ้าเติมฝั่งน้อยกว่าจะเรียกตัวแปรส่วนขาด $2x + 3y = 12 + s$)

$$2x + 3y - s = 12$$

คำถาม: ทำไมเติมแค่ส่วนเกินอย่างเดียวไม่พอ?

และเราจะแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการเติมไปอีกตัวแปรเรียก ตัวแปรเทียม (artificial)

$$2x + 3y - s + a = 12$$

โดยที่ให้ a เป็นตัวแปรฐาน

และเป้าหมายคือกำจัดตัวแปรเทียมออกจากระบบให้ได้ เรียกว่ากระบวนการ Two-phase Simplex โดยที่
Phase 1: optimize โจทย์ $W = -a1 - a2 - ...$ ภายใต้เงื่อนไขเดิม เพื่อกำจัดทุกตัวแปรเทียมออกจากฐาน
Phase 2: เมื่อกำจัดทุกตัวแปรเทียมออกจากฐาน ให้กลับมา optimize โจทย์เดิมจากชุดเงื่อนไขใน Phase 1 (Phase 2 ให้กลับไปทำเอง เพราะทำเหมือน Week 3-4)

2 Simplex บนเงื่อนไขที่มีการมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$)

จงหาผลเฉลยด้วยวิธี simplex

$$\begin{array}{lrcl} \max & Z = 4x + 5y & & \\ \text{s.t.} & -3x + 5y & \geq & 4 \\ & x + 2y & \leq & 8 \\ & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

ทำรูปมาตรฐาน:

Phase 1: กำจัดตัวแปรเทียม เพื่อเลื่อนเข้าขอบ feasible region

Phase 2: optimize โจทย์หลักโดยเงื่อนไขจาก Phase 1

3 Simplex บนเงื่อนไขที่มีการเท่ากับ (=)

จงหาผลเฉลยด้วยวิธี simplex

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{max} & Z = 2x + 15y & & \\
\text{s.t.} & -3x + 5y & \leq & 15 \\
 & 2x + 5y & \leq & 40 \\
 & 4x - 5y & = & 20 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

4 Simplex บนเงื่อนไขผสม

จงหาผลเฉลยด้วยวิธี simplex

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{max} & Z = 1840x + 1720y & & \\
\text{s.t.} & 2x + 3y & \leq & 1800 \\
 & 2x + y & \geq & 1400 \\
 & x - 2y & = & 100 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

5 Simplex บนที่วัตถุประสงค์คือการหาค่าต่ำสุด

จงหาผลเฉลยด้วยวิธี simplex

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & Z = x + 2y & & \\
\text{s.t.} & x + 3y & \geq & 90 \\
 & 8x + 2y & \geq & 160 \\
 & 3x + 2y & \geq & 120 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

6 Exit Ticket

1. เราใส่ตัวแปรเทียมในเงื่อนไข $\geq$ กับเงื่อนไข $=$ เพื่ออะไร:

2. สรุปขั้นตอนที่ต้องทำ Two-phase simplex:

7 การบ้าน

บริษัทประกอบชิ้นส่วนเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเวลาเหลืออยู่ในแต่ละแผนกดังนี้

- แผนกประกอบ มีเวลาเหลือ 7500 นาที
- แผนกทดสอบ มีเวลาเหลือ 1600 นาที
- แผนกบรรจุ มีเวลาเหลือ 800 นาที

ซึ่งทางบริษัทกำลังตัดสินใจว่าจะใช้เวลาของแต่ละแผนกที่เหลืออยู่ผลิตผลิตภัณฑ์ชิ้นใหม่ซึ่งมี 2 แบบคือแบบมาตรฐานและแบบพิเศษ ทั้งนี้แบบมาตรฐานใช้เวลาในการประกอบ 20 นาที, ทดสอบ 10 นาที และบรรจุ 4 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 360 บาทต่อชิ้น ในขณะที่แบบพิเศษใช้เวลาในการประกอบ 50 นาที, ทดสอบ 2 นาที และบรรจุ 4 นาทีต่อชิ้น และขายได้กำไร 290 บาทต่อชิ้น บริษัทต้องการหาว่าจะต้องผลิตสินค้าแต่ละชนิดเท่าไหร่ให้ได้กำไรมากที่สุด ทว่า คราวนี้บริษัทได้รับเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า (1) จะต้องผลิตผลิตภัณฑ์ทั้ง 2 ชนิดรวมกันอย่างน้อย 100 ชิ้น และ (2) ต้องผลิตแบบธรรมดามากกว่าแบบพิเศษ 20 ชิ้น จงเขียนตัวแบบมาตรฐานซิมเพล็กซ์ของโจทย์ปัญหาใหม่นี้ และทำ Two-phase simplex จนได้คำตอบสุดท้าย