Lecture 14 Worksheet

บท: Graph Theory (continued)
Adjacency Matrices, Directed Graphs, and Relations

วิชา: 819605 Discrete Mathematics

อาจารย์ผู้สอน: ปพนธีร์ แย้มโชติ | วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ | ภาคปลาย ปีการศึกษา 2568

เป้าหมายการเรียนรู้ Week 14

1. เขียน **adjacency matrix** ของกราฟไม่มีทิศทางและตีความกำลังของเมทริกซ์เพื่อ **นับจำนวน walks** ได้
2. เข้าใจความแตกต่างระหว่าง **undirected graph** และ **directed graph** ผ่านมุมมองของ adjacency matrix
3. เข้าใจว่า **relation** บนเซตจำกัดสามารถแทนได้ด้วย **ordered pairs**, **directed graph**, และ **0--1 matrix**
4. ใช้ graph และ adjacency matrix เพื่อช่วยคิดเกี่ยวกับ **composition** และ **powers** ของ relation ได้

1 Adjacency Matrix ของกราฟไม่มีทิศทาง

Definition 1 (adjacency matrix ของ simple graph). ให้ $G = (V, E)$ เป็น simple graph และให้

$$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

เราเรียกเมทริกซ์ $A_G = (a_{ij})$ ขนาด $n \times n$ ว่า **adjacency matrix** ของ G เมื่อ

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \{v_i, v_j\} \in E(G), \\ 0 & \text{ถ้า } \{v_i, v_j\} \notin E(G). \end{cases}$$

ข้อสังเกตที่สำคัญ

สำหรับ simple graph:

- A_G เป็นเมทริกซ์ **0--1**
- A_G เป็น **symmetric** เพราะ $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$
- ถ้าไม่มี loop แล้ว entry บนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0
- รูปร่างของเมทริกซ์ **ขึ้นกับลำดับการเรียงจุดยอด**

Example 2. ให้ G เป็นกราฟที่มี

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

และ

$$E(G) = \big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\big\}.$$

1. เขียน adjacency matrix ของ G ตามลำดับจุดยอด $1, 2, 3, 4, 5$
2. เมทริกซ์ที่ได้ symmetric หรือไม่ เพราะเหตุใด
3. ดีกรีของจุดยอด 4 อ่านจากเมทริกซ์ได้อย่างไร

Exercise 3 (หา counterexample). พิจารณาข้อความต่อไปนี้:

``ถ้าเปลี่ยนการเรียงจุดยอดของกราฟแล้ว adjacency matrix จะไม่เปลี่ยน''

จงให้ counterexample

2 Algebra ของ Adjacency Matrix

Theorem 4 (Walk counting theorem). ให้ G เป็นกราฟที่มี adjacency matrix เท่ากับ A. สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k ค่า entry ตำแหน่ง (i, j) ของเมทริกซ์ A^k เท่ากับจำนวน **walks ความยาว** k จาก v_i ไป v_j

จำให้แม่น

$$(A^k)_{ij} = \text{จำนวน walks ความยาว } k \text{ จาก } v_i \text{ ไป } v_j$$

คำว่า **walk** อนุญาตให้ผ่านจุดยอดซ้ำหรือเส้นเชื่อมซ้ำได้
คำว่า **path** โดยทั่วไปไม่อนุญาตให้ซ้ำ

Example 5 (ตีความ A^2). ให้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

โดยไม่ต้องคูณเมทริกซ์ทั้งหมด จงอธิบายความหมายของ

$$(A^2)_{14}, \qquad (A^2)_{22}, \qquad (A^3)_{13}.$$

Example 6 (จัดโครงพิสูจน์). จงเติมโครงพิสูจน์ให้สมบูรณ์สำหรับกรณี $k = 2$

Claim. ค่า entry ตำแหน่ง (i, j) ของ A^2 เท่ากับจำนวน walks ความยาว 2 จาก v_i ไป v_j

Proof idea. ใช้นิยามการคูณเมทริกซ์

$$(A^2)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj}$$

แล้วตีความว่าแต่ละดัชนี r เป็น **จุดยอดตัวกลาง** ของ walk แบบ

$$v_i \to v_r \to v_j$$

Proof.

Exercise 7. ให้ G เป็นกราฟที่มี adjacency matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. คำนวณ A^2
2. ใช้ A^2 ตอบว่ามี walks ความยาว 2 จาก 1 ไป 3 กี่เส้น
3. ใช้ A^2 ตอบว่ามี walks ความยาว 2 จาก 2 กลับมาที่ 2 กี่เส้น
4. ค่า $(A^2)_{ii}$ เกี่ยวข้องอย่างไรกับดีกรีของจุดยอด v_i ในกราฟไม่มีทิศทางนี้

3 Directed Graphs และ Adjacency Matrix

Definition 8 (directed graph). **Directed graph** หรือ **digraph** คือโครงสร้าง $D = (V, E)$ โดยที่

$$E \subseteq V \times V.$$

สมาชิกของ E เป็น **ordered pairs** และเขียนเป็นลูกศรจาก u ไป v

Definition 9 (adjacency matrix ของ directed graph). ให้ $D = (V, E)$ เป็น directed graph และให้

$$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

เราเรียกเมทริกซ์ $A_D = (a_{ij})$ ว่า adjacency matrix ของ D เมื่อ

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } (v_i, v_j) \in E(D), \\ 0 & \text{ถ้า } (v_i, v_j) \notin E(D). \end{cases}$$

เปรียบเทียบอย่างรวดเร็ว

- **Undirected graph**: adjacency matrix ต้องเป็น symmetric
- **Directed graph**: adjacency matrix *ไม่จำเป็นต้อง* symmetric
- entry $a_{ij} = 1$ หมายถึงมีลูกศรจาก v_i ไป v_j
- ถ้ามี loop ที่ v_i แล้ว $a_{ii} = 1$

Example 10. ให้ directed graph D มีจุดยอด

$$V(D) = \{a, b, c, d\}$$

และมีลูกศร

$$E(D) = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, c), (d, b)\}.$$

1. เขียน adjacency matrix ของ D ตามลำดับ a, b, c, d
2. จุดยอดใดมี loop
3. มีลูกศรจาก b ไป a หรือไม่
4. เมทริกซ์นี้ symmetric หรือไม่

Exercise 11 (นับ directed walks). ให้ D เป็น directed graph ที่มี adjacency matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. เขียนลูกศรของ directed graph นี้
2. ค่า $(A^2)_{14}$ มีความหมายว่าอย่างไร
3. มี directed walk ความยาว 2 จาก 1 ไป 4 กี่เส้น
4. มี directed walk ความยาว 3 จาก 1 กลับมาที่ 1 หรือไม่

4 Relations ในมุมมองของ Directed Graph

Definition 12 (relation). ให้ A เป็นเซตหนึ่ง **relation** บน A คือสับเซตของ $A \times A$

มุมมองที่ควรจำ

ถ้า $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ แล้ว relation R บน A สามารถแทนได้ 3 แบบที่สมมูลกัน:

1. **ordered pairs** เช่น $(a_i, a_j) \in R$
2. **directed graph** ที่มีลูกศร $a_i \to a_j$
3. **0--1 matrix** โดยให้ $m_{ij} = 1$ ก็ต่อเมื่อ $(a_i, a_j) \in R$

Example 13. ให้

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

และให้ relation R บน A เป็น

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}.$$

1. วาด directed graph ของ R
2. เขียน adjacency matrix ของ R
3. relation นี้ reflexive หรือไม่
4. relation นี้ symmetric หรือไม่

Exercise 14 (อ่านคุณสมบัติจากเมทริกซ์). ให้ R เป็น relation บนเซต $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ และมี matrix

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. เขียนสมาชิกทั้งหมดของ R
2. วาด directed graph ของ R
3. relation นี้ reflexive หรือไม่
4. relation นี้ symmetric หรือไม่
5. relation นี้มีลูกศรจาก a_2 ไป a_3 หรือไม่

5 การใช้ Graph และ Matrix ช่วยคำนวณ Relation

Definition 15 (composition ของ relation). ให้ R เป็น relation บนเซต A เรานิยาม $R^2 = R \circ R$ โดยกล่าวว่า

$$(x, z) \in R^2$$

ก็ต่อเมื่อมี $y \in A$ บางตัวที่ทำให้

$$(x, y) \in R \quad \text{และ} \quad (y, z) \in R.$$

ตีความด้วย directed graph

$$(x, z) \in R^2$$

หมายความว่า ใน directed graph ของ R มีการเดิน **สองขั้น**

$$x \to y \to z$$

ผ่านจุดยอดกลางบางตัว y

Definition 16 (Boolean product). ถ้า $M = (m_{ij})$ และ $N = (n_{ij})$ เป็นเมทริกซ์ 0--1 ขนาดที่คูณกันได้ เรานิยาม **Boolean product** $M \odot N$ โดย

$$(M \odot N)_{ij} = \bigvee_{r=1}^{n} (m_{ir} \wedge n_{rj}),$$

ซึ่งหมายความว่า entry ตำแหน่ง (i, j) เป็น 1 ก็ต่อเมื่อมีดัชนี r บางตัวที่ทำให้

$$m_{ir} = 1 \quad \text{และ} \quad n_{rj} = 1.$$

สองโหมดของการคูณเมทริกซ์

- **คูณแบบปกติ:** ใช้นับว่า *มีกี่* walks
- **คูณแบบ Boolean:** ใช้ถามว่า *มีหรือไม่มี* walk หรือความสัมพันธ์แบบประกอบ

Example 17. ให้ relation R บน $A = \{1, 2, 3\}$ มี matrix

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. เขียน directed graph ของ R
2. หาว่ามีการเดินสองขั้นจาก 1 ไป 3 หรือไม่
3. ใช้ directed graph หา R^2
4. ใช้ Boolean product ของ M_R กับตัวเองเพื่อตรวจคำตอบอีกครั้ง

Exercise 18 (Proof clinic). พิจารณาข้อความต่อไปนี้:

$$\text{``}\textit{ถ้า } (i,j) \textit{ เป็น entry ของ } M_R^2 \textit{ ที่มีค่าเป็นบวกแล้ว แปลว่า } (a_i, a_j) \in R\text{''}$$

1. ข้อความนี้จริงหรือเท็จ
2. ถ้าเท็จ จงอธิบายว่า entry ของ M_R^2 ที่มีค่าเป็นบวกควรตีความอย่างไร
3. ถ้าต้องการทราบว่า $(a_i, a_j) \in R^2$ หรือไม่ ควรใช้มุมมองแบบ ``นับจำนวน'' หรือแบบ ``มี/ไม่มี''

Exercise 19 (Counterexample hunt). จงตัดสินว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ และถ้าเท็จให้ยก counterexample

1. relation ทุกตัวมี adjacency matrix ที่ symmetric
2. ถ้า relation R มี $(a,b) \in R$ แล้วจำเป็นต้องมี $(b,a) \in R$
3. ถ้า $(a,c) \in R^2$ แล้วจำเป็นต้องมี $(a,c) \in R$
4. directed graph ทุกตัวสามารถมองเป็น relation บนเซตของจุดยอดได้

6 Pattern Summary และ Exit Ticket

Pattern summary ของคาบนี้

แนวคิดหลักของคาบนี้คือ

โครงสร้างเดียวกันสามารถมองได้หลาย representation

- graph $\longleftrightarrow$ adjacency matrix
- directed graph $\longleftrightarrow$ 0--1 matrix
- relation $\longleftrightarrow$ directed graph $\longleftrightarrow$ 0--1 matrix

และเมทริกซ์ช่วยเราได้สองแบบ:

- ใช้ **นับจำนวน walks**
- ใช้ **ตรวจการมีอยู่** ของความสัมพันธ์แบบประกอบ

Exercise 20 (Exit ticket). ตอบให้ครบ 3 ข้อสั้น ๆ

1. ค่า $(A^k)_{ij}$ ของ adjacency matrix บอกอะไรเกี่ยวกับ graph
2. directed graph ต่างจาก undirected graph ในมุมของ adjacency matrix อย่างไร
3. ทำไม relation บนเซตจำกัดจึงสามารถคำนวณด้วย directed graph และ 0--1 matrix ได้