Lecture 2
บท: Propositional Logic for Proving

วิชา: 819605 Discrete Mathematics

อาจารย์ผู้สอน: ปพนธีร์ แย้มโชติ | วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ | ภาคปลาย ปีการศึกษา 2568

แนวคิดสำคัญของสัปดาห์นี้

เราจะใช้ตรรกศาสตร์ประพจน์เป็น "แผนผังโครงสร้างพิสูจน์" ไม่ใช่เป็นแค่การทำตารางค่าความจริง
รูปประโยค $\Rightarrow$ วิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม
(implication $\rightarrow$ สมมติส่วนหน้า / contrapositive / contradiction / cases / iff)

เป้าหมายการเรียนรู้ของเอกสารประกอบนี้ (Week 2)

1. เข้าใจความหมายของ $P \rightarrow Q$ แบบ "สัญญาเฉพาะตอน P เกิด" และรู้ว่า **จะทำให้มันเป็นเท็จได้อย่างไร**
2. แปลประโยคภาษาไทย/อังกฤษที่พบบ่อยในงานคอมฯ เป็นสัญลักษณ์อย่างถูกต้อง (if, only if, sufficient/necessary)
3. ใช้สมมูลตรรกะพื้นฐานเพื่อ "เปลี่ยนรูป" ข้อความให้พิสูจน์ง่ายขึ้น โดยเฉพาะ **contrapositive** และ **De Morgan**
4. เขียนพิสูจน์ของข้อความรูป $P \rightarrow Q$ ได้อย่างตรวจสอบได้ (Claim$\rightarrow$Idea$\rightarrow$Proof$\rightarrow$QED)
5. ดีบักบทพิสูจน์ที่ผิดเกี่ยวกับ $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ และ proof by cases/contradiction โดยชี้ **บรรทัดแรกที่ผิดกฎ** และเหตุผล
6. สร้างนิสัย "counterexample hunt" เพื่อหักล้างข้อความเชิงตรรกะ โดยรู้ว่า **ต้องทำให้ส่วนหน้า/ส่วนหลังเป็นอะไร**

Reading (แนะนำอ่านก่อน/หลังเรียน)

- **MCS**: Ch.1 §1.5--1.8 (implication, iff, cases, contradiction) และ Ch.3 §3.1--3.4 (logical formulas, equivalence)
- **How to Prove It (Velleman)**: Sentential Logic และ conditional/biconditional (บทต้น ๆ)

1 นิยาม/ทฤษฎีบท + พิสูจน์ต้นแบบ (เชื่อมตรรกะกับโครงสร้างพิสูจน์)

นิยาม: ตัวเชื่อมตรรกะ (connectives) และสูตรตรรกะ

Definition 1. ให้ P, Q เป็นประพจน์ เราสร้างประพจน์ใหม่ได้ด้วย

$$\neg P, \quad (P \wedge Q), \quad (P \vee Q), \quad (P \to Q), \quad (P \leftrightarrow Q).$$

แนวคิดสำคัญ: **รูปของประโยค** จะบอกว่า **โครงพิสูจน์** ควรหน้าตาแบบไหน

ให้ P, Q เป็นประพจน์

- **นิเสธ** (negation) เขียน $\neg P$ แปลว่า "ไม่เป็นจริงที่ P" (ตรงข้ามกับ P)
- **และ** (conjunction) เขียน $P \wedge Q$ แปลว่า "P และ Q" (ต้องเป็นจริงทั้งคู่)
- **หรือ** (disjunction) เขียน $P \vee Q$ แปลว่า "P หรือ Q (หรือทั้งคู่)" (อย่างน้อยหนึ่งอย่าง)
- **ถ้า** P **แล้ว** Q (implication) เขียน $P \to Q$ (การเป็นเหตุเป็นผลของการเกิดขึ้น)
- **ก็ต่อเมื่อ** (biconditional) เขียน $P \leftrightarrow Q$ แปลว่า "P ก็ต่อเมื่อ Q" (ความเสมือนกัน)

ค่าความจริงของประโยคที่ประกอบขึ้นจากตัวเชื่อมเหล่านี้สามารถกำหนดได้ด้วย **ตารางค่าความจริง** (truth table)[1]

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**

1.1 การพิสูจน์แบบ contradiction ของข้อความ

รูปแบบการพิสูจน์ contradiction ของ statement เดียว

$$P \quad \text{สมมูลกับ} \quad (\neg P) \to F$$

กล่าวคือ เราสามารถพิสูจน์ P ได้โดยสมมติกรณีตรงข้ามขึ้นมาแล้วสรุปให้ได้ว่ามีสิ่งแปลกประหลาดหรือขัดแย้งกันเองเกิดขึ้น

Example 2. จงพิสูจน์ว่า ``ไม่มีจำนวนเต็ม n ที่เป็นทั้งจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่พร้อมกัน"

[1] นักศึกษาไม่จำเป็นต้องจำตารางค่าความจริง ถ้านักศึกษาเข้าใจความหมายของตัวเชื่อมแต่ละตัว

1.2 ความหมายของ implication เกี่ยวกับการพิสูจน์

ใจความสำคัญของ $P \to Q$

$P \to Q$ แปลว่า ``**ทุกครั้งที่ P จริง จะต้องทำให้ Q จริงด้วย**''
โลกคอม: P = **precondition** Q = **postcondition**

เมื่อไหร่ที่ $P \to Q$ เป็นเท็จ? (สำคัญมาก)

อิมพลิเคชัน $P \to Q$ **เป็นเท็จได้แค่กรณีเดียว** คือ

_____

ดังนั้น **การหักล้าง** ข้อความรูป $P \to Q$ ทำได้โดย

_____

ความจริงแบบ ``ว่าง'' (vacuous truth)

ถ้า P **เท็จ** แล้ว $P \to Q$ จะ **ถือว่าเป็นจริง** (ไม่ว่า Q จะจริงหรือเท็จ)
เพราะประโยคนี้ให้สัญญาเฉพาะ ``กรณีที่ P เกิดขึ้น'' เท่านั้น

ตัวอย่าง: ``ถ้า 1 เป็นจำนวนคู่ แล้ว $2 + 2 = 5$'' เป็น **จริงในเชิงตรรกะ** เพราะส่วนหน้าเท็จ

คำพูดที่มักแปลผิด: if / only if / sufficient / necessary

ให้ P, Q เป็นประพจน์

- ``P **only if** Q'' $\equiv$ $P \to Q$
- ``P **if** Q'' $\equiv$ $Q \to P$
- ``P is **sufficient** for Q'' $\equiv$ $P \to Q$
- ``Q is **necessary** for P'' $\equiv$ $P \to Q$

ทริกจำ: ``P only if Q'' = Q เป็น **เงื่อนไขจำเป็น** ของ P (ไม่มี Q ห้ามมี P)

แบบฝึกหัด (A): แปลงภาษาเป็นสัญลักษณ์

ให้โดเมนเป็น “นักศึกษาในคลาสนี้” และให้

$$P = \text{``ส่งการบ้าน''}, \quad Q = \text{``ได้คะแนนการบ้าน''}, \quad R = \text{``ทำตามรูปแบบไฟล์ที่กำหนด''}$$

(A1) ``ได้คะแนนการบ้าน **only if** ส่งการบ้าน'' เขียนเป็นสัญลักษณ์:

(A2) ``ถ้าส่งการบ้านแต่ไม่ทำตามรูปแบบไฟล์ที่กำหนด แล้วจะไม่ได้คะแนนการบ้าน''
เขียนเป็นรูป P, Q, R:

(A3) ``การส่งการบ้านเป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการได้คะแนน'' เขียนเป็นสัญลักษณ์:

1.2.1 การพิสูจน์วิธี Contrapositive

สมมูลที่ contrapositive

$$P \to Q \quad \text{สมมูลกับ} \quad \neg Q \to \neg P$$

แนวคิด: เรา “เปลี่ยนรูป” ประโยคให้พิสูจน์ง่ายขึ้นได้ โดยไม่เปลี่ยนความหมาย

ทฤษฎีบทตัวอย่าง: contrapositive ทำให้พิสูจน์ง่ายขึ้น

Theorem 3. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่

Proof idea. พิสูจน์แบบ contrapositive: จะพิสูจน์ $\neg Q \to \neg P$ คือ ``ถ้า n คี่ แล้ว n^2 คี่''
(ซึ่งเหมือนทฤษฎีบทที่เรามีแล้วจากสัปดาห์ที่ 1)

Proof. ให้ $n \in \mathbb{Z}$ และสมมติว่า n เป็นจำนวนคี่ ตามนิยามของจำนวนคี่ จะมี $k \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $n = 2k + 1$ ดังนั้น

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

จึงได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่ สรุปว่า $\neg(n^2 \text{ คู่}) \to \neg(n \text{ คู่})$ เป็นจริง ดังนั้น $(n^2 \text{ คู่}) \to (n \text{ คู่})$ เป็นจริงด้วย $\square$

1.2.2 การพิสูจน์วิธี Contradiction

สมมูล contradiction ของ implication

$$P \to Q \quad \text{สมมูลกับ} \quad \neg(P \wedge \neg Q) \quad \text{สมมูลกับ} \quad (P \wedge \neg Q) \to F$$

กล่าวคือ เราสามารถพิสูจน์ $P \to Q$ ได้โดยสมมติกรณีไม่จริงขึ้นมา นั่นคือ เหตุเป็นจริงแต่ผลเป็นเท็จ แล้วสรุปให้ได้ว่ามีสิ่งแปลกประหลาดหรือขัดแย้งกันเองเกิดขึ้น

Example 4. จงพิสูจน์โดยวิธี contradiction ว่า ``สำหรับจำนวนเต็ม n ใดๆ ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่"

ตอนนี้ นักศึกษาสามารถพิสูจน์ข้อความ implication ได้แล้ว แต่อีก step ต่อมาคือเมื่อพิสูจน์ว่าเป็นจริงแล้วอยากนำไปใช้งานเพื่ออ้างเหตุผลต่อในการพิสูจน์อื่นจะใช้งานอย่างไร

1.2.3 การใช้งานข้อความ implication ในการอ้างเหตุผล

Inference Rule for Implication: Modus Ponens

$$\frac{P \to Q \qquad P}{\therefore\ Q} \quad \text{(Modus Ponens)}$$

กล่าวคือ:

Example 5. ให้เรายอมรับข้อเท็จจริง (หรือพิสูจน์มาแล้ว) ต่อไปนี้เป็น ``กฎ'' ที่ใช้ได้เสมอ:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ (n \text{ เป็นจำนวนคู่ } \to n^2 \text{ เป็นจำนวนคู่})$$

จงพิสูจน์ว่า: $\forall x \in \mathbb{Z}$ ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $x^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่

1.3 การพิสูจน์เกี่ยวกับข้อความ $\vee$

ความหมายของ ``หรือ'' ในตรรกศาสตร์ (สำคัญ)

ในรายวิชานี้ $P \vee Q$ หมายถึง ``P **หรือ** Q **(หรือทั้งคู่ก็ได้)''**
กล่าวคือ $P \vee Q$ เป็นจริงเมื่อ **อย่างน้อยหนึ่ง** ใน P, Q เป็นจริง

ให้ P, Q เป็นประพจน์ ในการพิสูจน์ เราพบ $P \vee Q$ ใน 2 สถานการณ์หลัก:

1. **เราอยากพิสูจน์ให้ได้ว่า $P \vee Q$ เป็นจริง** (การ ``สร้าง'' ประโยค $\vee$)
2. **เรามี $P \vee Q$ อยู่แล้ว และอยาก ``ใช้'' มันเพื่อสรุปอะไรบางอย่าง** (การ ``ใช้'' ประโยค $\vee$)

1.3.1 การพิสูจน์ให้ได้ว่า $P \vee Q$ เป็นจริง

อีกรูปสมมูลของของ implication

$$P \to Q \quad \text{สมมูลกับ} \quad \neg P \vee Q$$

ดังนั้น

$$\neg P \to Q \quad \text{สมมูลกับ} \quad \underline{\hspace{3cm}}$$

กล่าวคือ:

Example 6. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้:

$$(ab \text{ เป็นจำนวนคู่}) \to \big((a \text{ เป็นจำนวนคู่}) \vee (b \text{ เป็นจำนวนคู่})\big)$$

Proof idea.

Proof.

1.3.2 การใช้ $P \vee Q$ เพื่อสรุปผล: Proof by Cases / $\vee$-Elimination

กฎสรุป (Inference Rule): $\vee$-Elimination (Proof by Cases)

ถ้าเรารู้ว่า $P \vee Q$ จริง และเราพิสูจน์ได้ว่า

$$(P \to R) \quad \text{และ} \quad (Q \to R)$$

แล้วเราสรุปได้ว่า R จริง

$$\frac{P \vee Q \qquad (P \to R) \qquad (Q \to R)}{\therefore\ R}$$

อ่านแบบภาษาคน: ``ถ้าเกิดกรณี P ก็ได้ R; ถ้าเกิดกรณี Q ก็ได้ R; แต่เรารู้อยู่แล้วว่าต้องเกิดอย่างน้อยหนึ่งกรณี ดังนั้นไม่ว่ากรณีไหนก็ได้ R''

ข้อผิดพลาดที่พบบ่อย

- มี $P \vee Q$ แล้ว **เลือกเอาว่า P จริงเลย** (ผิด! เพราะเราไม่รู้ว่าเป็นกรณีไหน)
- จะใช้ $P \vee Q$ ให้สรุปอะไร ต้องทำ **ครบทั้งสองกรณี** แล้วได้ผลลัพธ์เดียวกัน R

Example 7 (ใช้ $\vee$ เพื่อสรุปผล (proof by cases)). ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้:

$$\big((a \text{ เป็นจำนวนคู่}) \ \vee\ (b \text{ เป็นจำนวนคู่})\big) \ \to\ (ab \text{ เป็นจำนวนคู่})$$

Proof idea.

Proof.

Exercise 8 (ใช้ $\vee$-Elimination เพื่อสรุปประโยคใหม่). ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$. สมมติว่า a เป็นจำนวนคู่ $\vee$ b เป็นจำนวนคู่ จงพิสูจน์ว่า a^2 เป็นจำนวนคู่ $\vee$ b^2 เป็นจำนวนคู่

Proof idea. (ใบ้โครง): ทำ proof by cases จาก a คู่ $\vee$ b คู่

Proof.

2 คลินิกพิสูจน์: ดีบักพิสูจน์ที่ผิด (ตรรกะ $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, cases, contradiction)

กติกาเดิม (สำคัญมาก)

เมื่อบอกว่า "ผิด" ต้องชี้ให้ได้ว่า **บรรทัดแรกที่ผิดกฎคือบรรทัดไหน** และ**ผิดเพราะอะไร**

พิสูจน์ที่ผิด #1: สลับเงื่อนไข (confusing converse)

Claim 9. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ของนักศึกษา (มีข้อผิดพลาด):

1. ต้องการพิสูจน์ว่า ถ้า n คู่ แล้ว n^2 คู่
2. สมมติว่า n^2 เป็นจำนวนคู่
3. ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่
4. สรุปว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่ $\square$

Exercise 10 (ดีบัก).

(B1) บรรทัดแรกที่ผิดคือบรรทัดที่ _____

(B2) ผิดเพราะ _____

(B3) แก้ให้ถูกต้อง (เขียน **Proof idea.** และโครง **Proof.** แบบสั้น):

พิสูจน์ที่ผิด #2: พิสูจน์ $P \leftrightarrow Q$ แต่ทำแค่ทิศเดียว

Claim 11. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n, n เป็นจำนวนคี่ $\leftrightarrow$ n^2 เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ของนักศึกษา (มีข้อผิดพลาด):

1. ให้ $n \in \mathbb{Z}$ และสมมติว่า n เป็นจำนวนคี่
2. จะได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่ (พิสูจน์เหมือนตัวอย่างสัปดาห์ที่ 1)
3. ดังนั้น n เป็นคี่ $\leftrightarrow$ n^2 เป็นคี่ $\square$

Exercise 12 (ดีบัก & เติมให้ครบ).

(B3) สิ่งที่ขาดหายไปคือการพิสูจน์ทิศ _____

(B4) เขียนทิศที่ขาดให้ครบ โดยใช้ contrapositive ได้:

พิสูจน์ที่ผิด #3: ใช้ proof by contradiction แบบ "สมมติผิดคน"

Claim 13. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n, ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n ไม่เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ของนักศึกษา (มีข้อผิดพลาด):

1. สมมติว่า n เป็นจำนวนคู่
2. เพื่อพิสูจน์แบบขัดแย้ง สมมติว่า n ไม่เป็นจำนวนคี่
3. ข้อ 2 ขัดแย้งกับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จึงจบ $\square$

Exercise 14 (ดีบัก).

(B3) บรรทัดแรกที่ผิดคือ _____ เพราะ _____

(B4) ถ้าจะใช้ contradiction อย่างถูกต้อง ต้องสมมติอะไรเพิ่ม?

(B5) ลองเขียนพิสูจน์ที่ถูกต้อง (สั้น ๆ):

3 Workshop: เขียนพิสูจน์

ขั้นตอนทำงานในห้อง (เหมือนเดิม)

(1) ร่างเดี่ยว 10 นาที $\rightarrow$ (2) เลือกบางคนแชร์ขึ้นจอแบบ blind $\rightarrow$ (3) ทั้งห้องช่วยดีบัก

Workshop 1: Proof by cases (รูปตรรกะ: $P \vee Q$)

Exercise 15. Claim. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n, n^2 เป็นจำนวนคู่ $\vee$ n^2 เป็นจำนวนคี่

Proof idea. : ใช้ fact ว่า "จำนวนเต็มทุกตัวเป็นคู่หรือคี่" แล้วแยกกรณี

Proof. (เติมโครงให้ครบ):

- ให้ $n \in \mathbb{Z}$. พิจารณา 2 กรณี: (i) n เป็นจำนวนคู่ และ (ii) n เป็นจำนวนคี่
- กรณี (i): ถ้า n คู่ แล้ว $n = 2k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $n^2 =$ _____ จึงเป็นคู่
- กรณี (ii): ถ้า n คี่ แล้ว $n = 2k + 1$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $n^2 =$ _____ จึงเป็นคี่
- สรุปว่าในทุกกรณี n^2 เป็นคู่หรือคี่ $\square$

Workshop 2: เปลี่ยนรูปด้วย contrapositive แล้วพิสูจน์

Exercise 16. Claim. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n, ถ้า n ไม่เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 ไม่เป็นจำนวนคู่

Proof idea. : ข้อความนี้คือ $\neg P \rightarrow \neg Q$. จะพิสูจน์ได้โดยมองเป็น _____ หรือพิสูจน์ตรงก็ได้

Proof. :

Workshop 3: IFF ต้องพิสูจน์สองทิศ

Exercise 17. Claim. สำหรับทุกจำนวนเต็ม n, n หารด้วย 4 ลงตัว $\leftrightarrow$ n เป็นจำนวนคู่ **และ** $n/2$ เป็นจำนวนคู่

คำใบ้ (นิยาม):

$$n \text{ หารด้วย } 4 \text{ ลงตัว} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \; n = 4k.$$

Proof idea. (แบ่งทิศ):

(1) ($\rightarrow$) _____

(2) ($\leftarrow$) _____

Proof. :

4 สรุปแพตเทิร์น + Counterexample hunt + Exit Ticket

สรุปแพตเทิร์น: รูปประโยค $\Rightarrow$ โครงพิสูจน์

(1) พิสูจน์ $P \to Q$
สมมติ $P \to$ ใช้นิยาม/ข้อเท็จจริง $\to$ สรุป Q

(2) พิสูจน์ $P \leftrightarrow Q$
ทำ 2 ทิศ: $(P \to Q)$ และ $(Q \to P)$

(3) พิสูจน์แบบ contrapositive
แทน $P \to Q$ ด้วย $\neg Q \to \neg P$ ถ้าพิสูจน์ง่ายกว่า

(4) พิสูจน์แบบ contradiction
เป้าหมายคือได้ "เป็นไปไม่ได้" เช่น $0 = 1$ หรือได้ว่า X เป็นทั้งจริงและเท็จ
(มักเริ่มจากสมมติ P และ $\neg P$ ในจุดที่เหมาะสม)

(5) Proof by cases
ถ้ารู้ว่า $A \vee B$ เป็นจริง ให้พิสูจน์ผลลัพธ์ในแต่ละกรณี แล้วสรุป "ทุกกรณีจบ"

Counterexample hunt: หักล้างอิมพลิเคชัน/สมมูลผิด ๆ

จงหาค่า P, Q ที่ทำให้แต่ละข้อความเป็นเท็จ (เขียนเป็น T/F ก็ได้)

1. $(P \to Q) \to (Q \to P)$
2. $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$

ชวนมองมุมแปลกก่อนจบคลาส

จากตัวอย่างข้างบน เราคงทราบแล้วว่าประพจน์ $(P \to Q) \to (Q \to P)$ ไม่เป็นจริง (มีบางกรณีที่ทำให้เป็นเท็จ) ซึ่งบางคนอาจจะมี sense ว่ามันไม่ควรเป็นจริงตลอดเวลาโดยไม่จำเป็นต้องหา counterexample ซึ่งวิธีการคิดแบบหนึ่งที่ผมชอบทำคือลองจินตนาการว่าถ้ามันเป็นจริงตลอดจะเกิดอะไรขึ้น ซึ่งสิ่งที่จะเกิดขึ้นคือ

1. ความหมายของประโยคคือ: ข้อความ implication ใด ๆ ก็ตามจะสามารถสรุปข้อความย้อนกลับ (conversion) ของตัวเองได้เสมอ (why?)
2. จะเกิดอะไรขึ้นกับโลกใบนี้ถ้าเราเชื่อประโยคดังกล่าว: ลองพิจารณาประโยค $\bot \to \top$

Exit Ticket: Week 2

Exit Ticket

(1) $P \to Q$ เป็นเท็จได้กรณีเดียวคืออะไร? (ตอบเป็นคำว่า P จริง/เท็จ และ Q จริง/เท็จ)

(2) ประโยค "P only if Q" ต้องเขียนเป็น $P \to Q$ หรือ $Q \to P$? เพราะอะไร (1 ประโยค)

(3) ถ้าจะพิสูจน์ $P \leftrightarrow Q$ ต้องทำอะไร "ขั้นต่ำ" กี่อย่าง?

(4) ถ้าพิสูจน์ $P \to Q$ ตรง ๆ ยาก คุณมีทางเลือกเชิงตรรกะอะไรที่สมมูล?

การบ้าน (สัปดาห์ที่ 2)

1. ให้โดเมนเป็น “โปรแกรมที่รับอินพุตจำนวนเต็ม n” และให้ $P(n)$ = “โปรแกรมคืนค่า 1”, $Q(n)$ = “n เป็นจำนวนคี่”
   (ก) เขียนประโยค “โปรแกรมคืนค่า 1 **iff** อินพุตเป็นจำนวนคี่” เป็นสัญลักษณ์
   (ข) เขียน “อินพุตเป็นคี่เป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการคืนค่า 1” เป็นสัญลักษณ์
2. พิสูจน์ว่า ``สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{Z}$, ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $a + b$ เป็นจำนวนคี่ หรือ b เป็นจำนวนคู่"
   (a) ด้วยวิธี direct proof
   (b) ด้วยวิธี contrapositive
   (c) ด้วยวิธี contradiction
3. เพราะเหตุใดที่การจะพิสูจน์ข้อความ $p \to q$ ด้วยวิธี contradiction จึงไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางของข้อความไม่ว่าจะตั้งข้อความแบบ direct หรือแบบ contrapositive
4. ปฏิเสธข้อความต่อไปนี้โดยหาตัวอย่างค้าน:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \big((n \text{ หารด้วย } 2 \text{ ลงตัว}) \ \vee\ (n \text{ หารด้วย } 3 \text{ ลงตัว})\big) \to (n \text{ หารด้วย } 6 \text{ ลงตัว})$$

   โดยนิยามของการหารลงตัวคือ

   Definition 18. สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใด ๆ จะกล่าวว่า a หารด้วย b ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a = bk$ และเราจะเรียก a ว่าตัวตั้ง เรียก b ว่าตัวหาร และเรียก k ว่าผลหารจากการหารลงตัวนี้

หมายเหตุ: ในช่วง 4 สัปดาห์แรกรวมถึงการสอบย่อยครั้งที่ 1 จะยังคงระบุโจทย์ชัดเจนว่าให้พิสูจน์หรือหาตัวอย่างค้าน แต่หลังจากสอบย่อยครั้งที่ 1 เป็นต้นไปจะเป็นโจทย์ในรูปแบบ prove or disprove กล่าวคือจะไม่บอกมาว่าข้อความที่ให้มาจริง(พิสูจน์)หรือไม่จริง(หาตัวอย่างค้าน) เพื่อให้นักศึกษาได้ลองฝึกนิสัยการฉุกคิดก่อนลงมือทำซึ่งคล้ายกับนิสัยของการแก้ปัญหาในโลก software development ว่าปัญหานั้นแก้ได้จริง ๆ หรือมีแก้ได้เฉพาะกรณีเฉพาะเท่านั้น