819605 Discrete Mathematics

Week 1: Propositional Logic & Sets

Propositions, Truth Tables, Set Operations, and Proof Templates

Aj. Phaphontee Yamchote (Toey)

Learning goals for this worksheet

- **Core.** Decide whether a sentence is a *proposition* (has a definite truth value).
- **Core.** Use core logical connectives ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) and build truth tables.
- **Core.** Work with sets and set operations ($\cup$, $\cap$, ^{c}, $\setminus$) using roster/set-builder notation.
- **Core.** Translate everyday statements (Thai/English) into symbols and back (mostly via set language).
- **Core.** Use a **proof template** to argue set containments and set equality (without focusing on "method names" yet).
- **Extension (if time).** Spot common pitfalls about implication ("if", "only if", necessary/sufficient), and use $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ carefully.

---

1 Quick course conventions

Convention for this course: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
If we need a universe set, we will always state it explicitly.
Warm-up (write your own):
In your own words, what does it mean for a solution/proof to be "checkable"? (open question)

2 Propositions and open sentences

2.1 Proposition or not?

Definition 1. A **proposition** is a sentence that is either **true** or **false** (but not both). A sentence with free variables (like x, n) is usually **not** a proposition until the variables are given values or quantified.

Exercise 2 (Classify each item). Mark Proposition? Yes/No. If it *is* a proposition, also mark whether it is true or false.

(A1)	$2 + 3 = 5$	Proposition? ☐Yes ☐No	True/False? ☐ T ☐ F
(A2)	"Bangkok is the capital of Thailand."	Proposition? ☐Yes ☐No	True/False? ☐ T ☐ F
(A3)	$x^2 - 3x + 2 = 0$	Proposition? ☐Yes ☐No	True/False? ☐ T ☐ F
(A4)	"Please close the door."	Proposition? ☐Yes ☐No	True/False? ☐ T ☐ F
(A5)	"n is a prime number."	Proposition? ☐Yes ☐No	True/False? ☐ T ☐ F

In your opinion, how can we change what in above are not propositions to be propositions?

3 Part II: Logical connectives and truth tables

B. Connectives: meaning and symbols

We use:

$$\neg p \text{ (not)}, \quad p \wedge q \text{ (and)}, \quad p \vee q \text{ (or)}, \quad p \to q \text{ (if } p \text{ then } q\text{)}, \quad p \leftrightarrow q \text{ (iff)}.$$

Note: In this first class, the core connectives are $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

> **OR in this course:** $p \vee q$ is the *inclusive* OR (true when at least one of p, q is true, including when both are true).
> **Parentheses / precedence:** If in doubt, add parentheses. A common convention is: $\neg$ binds strongest, then $\wedge$, then $\vee$.

Implication $(\to)$ and $(\leftrightarrow)$ are included as preview / extension and will be used in the sense of meaning a lot later.
B1. Matching. Match the Thai/English phrase to the symbol.

(B1) "ไม่ใช่ p" / "not p" _____ (a) $p \wedge q$ (b) $\neg p$ (c) $p \to q$

(B2) "p และ q" / "p and q" _____ (a) $p \vee q$ (b) $p \wedge q$ (c) $p \leftrightarrow q$

(B3) "ถ้า p แล้ว q" / "if p then q" _____ (a) $p \to q$ (b) $q \to p$ (c) $p \vee q$

(B4) "p ก็ต่อเมื่อ q" / "p iff q" _____ (a) $p \wedge q$ (b) $p \leftrightarrow q$ (c) $\neg(p \vee q)$

C. Truth tables (follow-along + practice)

C1. Follow-along example. Complete the truth table for $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
T	T	_____	_____
T	F	_____	_____
F	T	_____	_____
F	F	_____	_____

C2. Practice 1. Build the truth table for $(p \to q)$. *(Extension)*

p	q	$p \to q$
T	T	_____
T	F	_____
F	T	_____
F	F	_____

Key observation (write it): When is $p \to q$ false?

_____

D. Tautology / contradiction / equivalence (Extension)

D1. Classify each formula by truth table: ☐ tautology (always true), ☐ contradiction (always false), ☐ neither.

(D1) $p \vee \neg p$ ☐tautology ☐contradiction ☐neither

(D2) $p \wedge \neg p$ ☐tautology ☐contradiction ☐neither

(D3) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ ☐tautology ☐contradiction ☐neither

D2. Equivalence by truth table. Decide whether the following are equivalent:

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	Same?
T	T	_____	_____	_____
T	F	_____	_____	_____
F	T	_____	_____	_____
F	F	_____	_____	_____

Conclusion: $p \to q$ is _____ to $\neg p \vee q$.

4 Part III: Implication in plain language (very important)

Note: This part is a preview that helps avoid common misunderstandings. If time is short, you may do it after Part IV or take it home.

E. "If", "only if", necessary/sufficient

Reference box (keep this):

$$p \to q: \text{ "if } p \text{ then } q\text{"} \qquad \text{means } p \text{ is } \textbf{sufficient} \text{ for } q, \quad q \text{ is } \textbf{necessary} \text{ for } p.$$

Vacuous truth (สำคัญ): If p is false, then $p \to q$ is true (no matter what q is). Intuition: an implication only fails when it makes a promise (p true) and breaks it (q false).

E1. Translate into symbols. Let

$$p: \text{ "I submit HW1 on time"}, \qquad q: \text{ "I get full credit for HW1"}.$$

Translate each sentence.

(E1) "If I submit HW1 on time, then I get full credit." _____

(E2) "I get full credit only if I submit on time." _____

(E3) "Submitting on time is sufficient for full credit." _____

(E4) "Submitting on time is necessary for full credit." _____

E2. Which one is stronger? (Explain briefly.)

$$(1)\ p \to q \qquad \text{vs} \qquad (2)\ q \to p$$

Answer: _____

Reason: _____

F. Common pitfall: confusing converse and inverse

For an implication $p \to q$, define:

$$\text{converse: } q \to p, \qquad \text{inverse: } \neg p \to \neg q, \qquad \text{contrapositive: } \neg q \to \neg p.$$

F1. Fill in the blanks. The statement $p \to q$ is always logically equivalent to _____.
(Choose one: converse / inverse / contrapositive)

F2. Practice. Let p: "n is divisible by 4", q: "n is even", where $n \in \mathbb{Z}$.

(F1) Write $p \to q$ in Thai: _____

(F2) Write the *converse* in Thai: _____

(F3) Write the *contrapositive* in Thai: _____

(F4) Which of these are true? (Mark all that are true.)
☐$p \to q$ ☐converse ☐contrapositive

(F5) Give a counterexample to the converse (one integer n): $n =$ _____

5 Part IV: Sets

Reminder: A set is a collection of objects. We write $x \in A$ if x is an element of A.

Common confusions (read once):

- $x \in A$ means "x is an *element* of A" (an object belongs to a set).
- $A \subseteq B$ means "A is a *subset* of B" (a set is contained in a set).
- $\emptyset$ is the empty set (a set with no elements). It is a subset of every set.
- To prove $A = B$, we usually prove $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$.

S1. Describing sets

Roster notation: list elements (or the first few with a clear pattern).
Set-builder notation: describe elements by a condition (using "|" or ":").
ให้กำหนดเซตต่อไปนี้ในสองรูปแบบ:

(1) *Roster notation* (เขียนสมาชิกทั้งหมดหรือบางส่วน ถ้ายังคงความหมายเดิม), (2) *Set-builder notation* (เขียนเงื่อนไข)

(S1) เซตของจำนวนเต็มคู่ระหว่าง 0 ถึง 10 (รวมทั้งสองขอบเขต)

$$E = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$$

เขียนแบบ set-builder:

$$E = \{ n \in \mathbb{Z} \mid \underline{\hspace{6cm}} \}$$

(S2) เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า -1 แต่น้อยกว่า 3

$$S = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$$

เขียนแบบ set-builder:

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{\hspace{6cm}} \}$$

(S3) เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว

$$M = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$$

เขียนแบบ set-builder:

$$M = \{ k \in \mathbb{Z} \mid \underline{\hspace{6cm}} \}$$

S2. Working with set operations

Definition 3 (Set operations (within a universe U)). Let $A, B \subseteq U$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in U \mid x \in A \text{ or } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in U \mid x \in A \text{ and } x \in B\}, \\ A^c &= \{x \in U \mid x \notin A\}, \\ A \setminus B &= \{x \in U \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}. \end{aligned}$$

Working with a specific universe.
ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ เป็น universal set และกำหนด

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C = \{4, 5, 6, 7\}.$$

จงหาค่าต่อไปนี้ (เขียนคำตอบเป็น roster notation):

(S4) $A \cap B = \{$ _____ $\}$

(S5) $A \cup C = \{$ _____ $\}$

(S6) $B \setminus A = \{$ _____ $\}$

(S7) A^c (ส่วนเติมเต็มของ A ใน U) $= \{$ _____ $\}$

S3. Describing real-world statements using sets

ให้ U เป็นเซตของนักศึกษาทุกคนในรายวิชา *Discrete Mathematics* กลุ่มนี้ และกำหนดเซตย่อยดังนี้

$$A = \{x \in U \mid x \text{ เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80\% ของคลาสทั้งหมด}\},$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ ส่งการบ้านครั้งที่ 1 ตรงเวลา}\},$$
$$C = \{x \in U \mid x \text{ เป็นนักศึกษาที่ทำงาน Part-time ควบคู่ไปกับการเรียน}\}.$$

จงใช้ภาษาเซต (เช่น $\subseteq, \cup, \cap, ^c, =$) เขียนแทนประโยคต่อไปนี้ และ/หรือ แปลนิพจน์ของเซตกลับเป็นภาษาไทยให้เข้าใจง่าย

(S8) เขียนประโยคต่อไปนี้ในรูป *สัญลักษณ์ของเซต*:

(1) "นักศึกษาทุกคนที่ส่งการบ้านครั้งที่ 1 ตรงเวลาเป็นคนที่เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80% ทั้งหมด"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเซต: _____

(2) "มีนักศึกษาบางคนที่เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80% แต่ไม่ได้ส่งการบ้านครั้งที่ 1"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเซต: _____

(3) "ไม่มีนักศึกษาที่ทำงาน Part-time คนใดที่เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80%"

Hint: "ไม่มี ..." มักเขียนได้เป็น "เซตนั้นว่าง" หรือ "เป็นสับเซตของส่วนเติมเต็ม"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเซต: _____

(S9) จากนิพจน์ของเซตต่อไปนี้ ให้แปลกลับเป็นภาษาไทย (อธิบายเป็นประโยคเกี่ยวกับนักศึกษาให้เข้าใจง่าย)

(4) $B \subseteq A$

แปลเป็นภาษาไทย: _____

(5) $A \cap C^c \neq \emptyset$

แปลเป็นภาษาไทย: _____

(6) $A \cap B^c \cap C \neq \emptyset$

แปลเป็นภาษาไทย: _____

Reasoning Corner: ทบทวนอีกรอบว่าในการอ้างเหตุผลจากนิยาม จะมี 2 รูปแบบที่ได้ใช้งานเสมอคือ (1) ถ้าเป็นจริงแล้วเอาไปใช้งานอย่างไรต่อ และ (2) ถ้าอยากพิสูจน์ว่าเป็นจริงต้องพิสูจน์อะไร

ตัวกำเนินการ	นิยาม	การนำไปใช้ต่อ	การพิสูจน์
$A \cup B$	$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$		

S4. Symbols you must be comfortable with

$$x \in A, \quad x \notin A, \quad \emptyset, \quad A \subseteq B, \quad A = B, \quad A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A^c.$$

(Optional note) Some books write $A \subset B$ for "proper subset" (subset but not equal). In this course, we will use $\subseteq$ unless stated otherwise.

G1. Translate. Let U be all students in this class. Let A = "students who attended today", B = "students who submitted HW0". Write each sentence using set symbols.

(G1) "Everyone who submitted HW0 attended today."
Symbol form: _____

(G2) "Some student attended today but did not submit HW0."
Symbol form: _____

S5. A guided proof shape

Example 4 (Subset proof template). To argue $X \subseteq Y$, by definition we often:

1.
2.
3.

Example 5 (Equality template (use two containments)). To show $X = Y$, it is enough to show

1.
2.

H1. Follow-along proof
Proposition. For any sets A, B, C, if $A \subseteq B$ then $A \cap C \subseteq B \cap C$.
Proof Idea: ในบทนี้ยังไม่ต้องเขียนพิสูจน์ทางการ แค่ระบุแนวทางได้ และให้เหตุผลเป็นส่วน ๆ ได้ก็เพียงพอ

Fill-in guide (optional):

- Start: Assume $A \subseteq B$. Take $x \in A \cap C$.
- Unpack: $x \in A$ and $x \in C$.
- Use $A \subseteq B$: from $x \in A$ conclude $x \in B$.
- Repack: $x \in B \cap C$. Conclude $A \cap C \subseteq B \cap C$.

H2. Your turn (short).
Proposition. For any sets A, B, we have $A \cap B \subseteq A$.
Proof. (Write clearly. Use the template above.)

D. Disproof by Counterexample (with Sets)

Idea: ถ้าประโยคมีรูปแบบ "สำหรับเซตทุกเซต $A, B, \ldots$ แล้วเงื่อนไข $P(A, B, \ldots)$ เป็นจริง" เราสามารถแสดงว่า *ประโยคนี้ไม่จริง* ได้โดยการหาตัวอย่างเพียงตัวเดียวของเซต $A, B, \ldots$ ที่ทำให้เงื่อนไขดังกล่าวไม่เป็นจริง เรียกว่า *counterexample*

ในข้อนี้ให้ใช้ universe set

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

และให้ส่วนเติมเต็ม A^c หมายถึงส่วนเติมเต็มของ A ใน U (เช่น $A^c = U \setminus A$)

D1. Counterexample practice 1
พิจารณาประโยคต่อไปนี้ (ยังไม่ทราบว่าจริงหรือเท็จ):

Statement S1. สำหรับทุกเซตย่อย A และ B ของ U เรามี

$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c.$$

ลองทดสอบค่าของ A และ B บางค่า แล้วเติมตารางด้านล่างนี้ ถ้าคุณพบว่าเมื่อเลือก A, B บางคู่แล้วสมการไม่เป็นจริง ให้ถือคู่นั้นเป็น counterexample

(E1) ลองเลือก A และ B อย่างน้อย 3 คู่ (เช่น คู่หนึ่งให้ $A = B$, อีกคู่ให้ A และ B ไม่ทับซ้อนกัน เป็นต้น) แล้วเติมตาราง

A	B	$(A \cap B)^c$	$A^c \cap B^c$

(E2) ถ้าคุณพบคู่ของ A และ B ที่ทำให้ $(A \cap B)^c \neq A^c \cap B^c$ ให้เขียนคู่ดังกล่าวลงมาอย่างชัดเจน:

Counterexample: $A = \{$ _____ $\}$, $B = \{$ _____ $\}$

และอธิบายสั้น ๆ ว่าทำไมคู่นี้จึงเป็น counterexample ของ S1

D2. Counterexample practice 2
พิจารณาประโยคต่อไปนี้:

Statement S2. สำหรับทุกเซตย่อย A และ B ของ U ถ้า $A \cap B = A$ แล้ว $B = U$.

(F1) ลองหาตัวอย่างเซต A และ B ที่ทำให้ $A \cap B = A$ เป็นจริง แต่ $B \neq U$:

$A = \{$ _____ $\}$, $B = \{$ _____ $\}$

(F2) ตรวจสอบว่า $A \cap B = A$ จริงหรือไม่ และอธิบายสั้น ๆ ว่าทำไมตัวอย่างนี้จึงเป็น counterexample ของ S2

_____

6 Exit ticket (2 minutes)

Answer in 1–2 sentences each.

(1) What is the **only** case when $p \to q$ is false?

---

(2) When p is **true**, what must q be so that $p \to q$ is true? Explain briefly. (I DO NOT ask about truth table, please don't mention like "by the truth table that ajarn taught in class")

---

(3) What does it mean for two formulas to be **logically equivalent**?

---

7 Homeworks

homework (very short): Create truth tables for (i) $\neg(p \vee q)$, (ii) $(p \leftrightarrow q)$, and write 2 real-life sentences that have the form $p \to q$ (one true, one false).

homework (sets): Choose any universe U with at least 6 elements, pick two subsets $A, B \subseteq U$, and compute $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c. Write your answers in roster notation.

homework (sets): Let A and B be sets. Prove that $A \subseteq A \cup B$ (no need formal writing in proof, you can explain in words, but it should be LOGICAL)