สอบย่อยครั้งที่ 2
Recursion and Induction

รายวิชา: Discrete Mathematics for CS/CE
เวลาแนะนำ: 1 สัปดาห์
จำนวนข้อ: 7 ข้อใหญ่

คำชี้แจง

1. เขียนคำตอบอย่างเป็นระบบ และระบุให้ชัดว่าขั้นใดใช้คำนิยาม ขั้นใดใช้อุปนัย และขั้นใดใช้อสมบัติทางพีชคณิต
2. ในข้อที่ให้วิเคราะห์บทพิสูจน์ ให้ตอบโดยอธิบายเหตุผลของแต่ละบรรทัดอย่างชัดเจน
3. อนุญาตให้ใช้เฉพาะนิยามและข้อเท็จจริงที่ระบุไว้ด้านล่างโดยไม่ต้องพิสูจน์เพิ่ม นอกเหนือจากนี้ต้องให้เหตุผลประกอบ

ใบปะหน้า: นิยาม/ข้อเท็จจริงที่อนุญาตให้ใช้โดยไม่ต้องพิสูจน์

1. ความหมายของการหารลงตัว:
$$d \mid n \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ such that } n = dk.$$
2. ถ้า $d \mid a$ และ $d \mid b$ แล้ว
$$d \mid (a+b) \quad \text{และ} \quad d \mid (a-b).$$
3. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้วมี $t \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้
$$n = 2t.$$
4. กฎเลขยกกำลังที่อนุญาตให้ใช้ได้โดยตรง:
$$a^{m+n} = a^m a^n, \qquad (a^m)^n = a^{mn}.$$
5. สำหรับลิสต์ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ที่มี $n \geq 1$,
$$\text{tail}(A) = (a_2, a_3, \ldots, a_n).$$
6. ความหมายของ $\max(x, y)$: เป็นค่าที่มากกว่าหรือเท่ากับทั้ง x และ y และมีค่าเท่ากับหนึ่งในสองจำนวนนี้
7. ความหมายของ $\gcd(x, y)$: เป็นจำนวนเต็มบวกมากที่สุดที่หารทั้ง x และ y ลงตัว

เริ่มทำข้อสอบในหน้าถัดไป

ข้อ 1. Recurrence แบบให้คำตอบมาแล้ว จงแสดงว่าเป็นจริง

กำหนดลำดับ $H(n)$ โดย

$$H(0) = 1, \qquad H(n) = 3H(n-1) + 2 \quad \text{สำหรับ } n \geq 1.$$

มีผู้เสนอว่าคำตอบของ recurrence นี้คือ

$$H(n) = 2 \cdot 3^n - 1.$$

จงแสดงว่าคำตอบที่เสนอมาเป็นจริง โดยตอบตามลำดับต่อไปนี้

(a) คำนวณ $H(1), H(2), H(3), H(4)$ จากนิยามเดิม

(b) จงใช้วิธี plug-and-chug เพื่อหาว่า $H(n) = 2 \cdot 3^n - 1$

(c) พิสูจน์ด้วย induction ว่า $H(n) = 2 \cdot 3^n - 1$ สำหรับทุก $n \geq 0$

(d) ระบุให้ชัดว่า induction hypothesis ถูกใช้ตรงไหนในพิสูจน์ที่นักศึกษาเขียน

ข้อ 2. อ่านบทพิสูจน์ที่ให้มา แล้วอธิบายเหตุผลของแต่ละบรรทัด

พิจารณาข้อความต่อไปนี้:

> สำหรับทุก $n \geq 1$, จำนวน $8^n - 1$ หารด้วย 7 ลงตัว

มีผู้ให้บทพิสูจน์ดังนี้

> **Proof.** พิสูจน์ด้วย induction บน n.
>
> <u>ขั้นฐาน</u>: เมื่อ $n = 1$, ได้ $8^1 - 1 = 7$ ซึ่งหารด้วย 7 ลงตัว
>
> <u>ขั้นอุปนัย</u>: ให้ $k \geq 1$ ใด ๆ สมมติว่าจะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $8^k - 1 = 7m$
>
> พิจารณา $8^{k+1} - 1 = 8 \cdot 8^k - 1 = 8(8^k - 1) + 7 = 8(7m) + 7 = 7(8m + 1)$
> ดังนั้น $8^{k+1} - 1$ หารด้วย 7 ลงตัว จบการพิสูจน์

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) induction hypothesis ในบทพิสูจน์นี้คือประโยคใด

(b) เหตุใดจึงเขียนได้ว่า $8^k - 1 = 7m$ สำหรับจำนวนเต็มบางตัว m

(c) จาก $8^{k+1} - 1 = 8 \cdot 8^k - 1$ ไปเป็น $8(8^k - 1) + 7$ ได้อย่างไร

(d) บรรทัดใดคือจุดที่ใช้ induction hypothesis

(e) เหตุใดจาก $7(8m + 1)$ จึงสรุปได้ว่าหารด้วย 7 ลงตัว

(f) เขียนสรุปท้ายใหม่ด้วยภาษาของตัวเองให้ครบตรรกะ

ข้อ 3. Structural induction บน full binary tree

นิยามเซต T ของ *full binary trees* แบบ recursion ดังนี้

- ต้นไม้ที่มีเพียงจุดยอดเดียว 1 จุด เป็นสมาชิกของ T
- ถ้า $L, R \in T$ แล้วต้นไม้ใหม่ที่มีรากหนึ่งจุดและมี L เป็นซ้าย, R เป็นขวา เป็นสมาชิกของ T

สำหรับต้นไม้ $X \in T$ กำหนดให้

- $L(X)$ คือจำนวน leaves ของ X
- $I(X)$ คือจำนวน internal nodes ของ X

จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุก $X \in T$,

$$L(X) = I(X) + 1.$$

โดยให้เขียนพิสูจน์ตามลำดับต่อไปนี้

(a) ระบุฐานของโครงสร้างนี้

(b) พิสูจน์ขั้นฐาน

(c) ตั้ง induction hypothesis ให้ชัดสำหรับต้นไม้ย่อย

(d) พิสูจน์กรณีประกอบต้นไม้ใหม่จาก L และ R

(e) อธิบายว่าทำไมตอนนับ internal nodes จึงต้องบวก 1 เพิ่ม

(f) สรุปว่าครอบคลุมต้นไม้ทุกต้นใน T ได้อย่างไร

หมายเหตุ: นักศึกษาอาจจะเขียนบทพิสูจน์เต็มก่อนแล้วระบุว่าส่วนไหนตอบข้อไหนก็ได้เช่นกันนะครับ (อาจารย์แบ่งข้อให้-เพื่อเป็นคำใบ้)

ข้อ 4. Strong induction กับ Fibonacci

กำหนดลำดับฟีโบนัชชีโดย

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

จงพิสูจน์ว่า $F_n < 2^n$ สำหรับทุก $n \geq 1$

โดยให้ทำตามข้อย่อยต่อไปนี้

(a) ตรวจสอบกรณีฐานที่จำเป็นให้ครบ

(b) อธิบายว่าทำไมโจทย์นี้เหมาะกับ strong induction มากกว่า induction แบบสมมติแค่ $P(k)$

(c) เขียน strong induction hypothesis ให้ชัด

(d) พิสูจน์กรณี $k + 1$

(e) ระบุจุดที่ต้องใช้ข้อมูลจากมากกว่า 1 ขั้นก่อนหน้า

(f) อธิบายว่าทำไมตอนท้ายจึงสรุปได้ว่า $F_{k+1} < 2^{k+1}$

ข้อ 5. พิสูจน์ความถูกต้องของ recursive algorithm: MaxList

กำหนด pseudocode ดังนี้

```
MaxList(A):
    if |A| = 1 then return A[1]
    else return max(A[1], MaxList(tail(A)))
```

โดย A เป็นลิสต์ของจำนวนจริงที่มีความยาวอย่างน้อย 1

สเปกที่ต้องการพิสูจน์คือ:

> สำหรับทุกลิสต์ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ที่ $n \geq 1$, ค่าที่ $\text{MaxList}(A)$ คืนออกมาคือสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของลิสต์นั้น

จงพิสูจน์ให้ครบทั้ง **termination** และ **correctness**

(a) อธิบายว่า input ที่เล็กลงใน recursive call คืออะไร

(b) พิสูจน์ว่าอัลกอริทึมหยุดทำงานเสมอ

(c) กำหนดข้อความที่จะพิสูจน์ด้วย induction และตัวแปรที่จะระบุ induction

(d) พิสูจน์กรณีฐาน

(e) พิสูจน์ induction step

(f) อธิบายว่าฟังก์ชัน $\max(x, y)$ ถูกใช้เพื่อรักษาสเปกอย่างไร

ข้อ 6. Recursive algorithm: FastPow

พิจารณา pseudocode ต่อไปนี้

```
FastPow(a, n):
    if n = 0 then return 1
    else if n is even then return FastPow(a*a, n/2)
    else return a * FastPow(a, n-1)
```

มีผู้เสนอว่า algorithm นี้คืนค่า

$$a^n$$

สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$ และทุก $n \in \mathbb{N}$

จงแสดงว่าข้อเสนอข้างต้นเป็นจริง

(a) อธิบายว่าทำไม recursive call แต่ละครั้งใช้ input ที่เล็กลง

(b) ตั้งข้อความ correctness ที่จะพิสูจน์

(c) พิสูจน์กรณีฐาน

(d) พิสูจน์กรณีที่ n เป็นจำนวนคู่

(e) พิสูจน์กรณีที่ n เป็นจำนวนคี่

(f) อธิบายให้ชัดว่าทำไมกรณีจำนวนคู่จึงใช้ $(a^2)^{n/2} = a^n$ ได้

(g) เปรียบเทียบสั้น ๆ ว่า FastPow ต่างจาก recursion แบบคูณทีละหนึ่งชั้นอย่างไรในแง่ของการลดขนาดปัญหา

ข้อ 7. (โบนัส)

กำหนดเซต R ของ ordered pairs ของจำนวนนับแบบ recursion ดังนี้

- $(1, 1) \in R$
- ถ้า $(x, y) \in R$ แล้ว $(x + y, y) \in R$ และ $(x, x + y) \in R$

มีทฤษฎีบทว่า

Theorem. สำหรับทุก $(x, y) \in R$, จะได้ว่า

$$\gcd(x, y) = 1.$$

และมีผู้เขียนบทพิสูจน์ดังนี้

Proof. พิสูจน์ด้วย structural induction บนการสร้างสมาชิกของ R.
ขั้นฐาน: $(1, 1) \in R$ และ $\gcd(1, 1) = 1$

ขั้นอุปนัย: สมมติว่า $(x, y) \in R$ และ $\gcd(x, y) = 1$. ต้องพิสูจน์ว่าสมาชิกใหม่ที่สร้างจาก (x, y) ก็ยังมีตัวหารร่วมมากเป็น 1

กรณีที่ 1: พิจารณา $(x + y, y)$. ให้ $d = \gcd(x + y, y)$. จะได้ว่า $d \mid (x + y)$ และ $d \mid y$. ดังนั้น $d \mid ((x + y) - y) = x$. สรุปว่า d เป็นตัวหารร่วมของ x และ y. แต่จาก induction hypothesis, $\gcd(x, y) = 1$. เพราะฉะนั้น $d = 1$. ดังนั้น $\gcd(x + y, y) = 1$

กรณีที่ 2: พิจารณา $(x, x + y)$. ให้ $e = \gcd(x, x + y)$. จะได้ว่า $e \mid x$ และ $e \mid (x + y)$. ดังนั้น $e \mid ((x + y) - x) = y$. สรุปว่า e เป็นตัวหารร่วมของ x และ y. แต่จาก induction hypothesis, $\gcd(x, y) = 1$. เพราะฉะนั้น $e = 1$. ดังนั้น $\gcd(x, x + y) = 1$

จึงสรุปได้ว่าสำหรับทุก $(x, y) \in R$, $\gcd(x, y) = 1$. QED

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(a) คำว่า structural induction บนการสร้างสมาชิกของ R หมายความว่าอย่างไร

(b) ในขั้นฐาน เหตุใดเพียงตรวจ $(1, 1)$ จึงพอ

(c) ในขั้นอุปนัย เราสมมติอะไรได้บ้าง และเพราะอะไร

(d) ในกรณี $(x + y, y)$ เหตุใดจาก

$$d \mid (x + y), \qquad d \mid y$$

จึงสรุปได้ว่า

$$d \mid x$$

(e) ทำไมการที่ d หารทั้ง x และ y ลงตัว จึงเกี่ยวข้องกับ induction hypothesis

(f) เหตุใดจาก $\gcd(x, y) = 1$ จึงสรุปว่า $d = 1$

(g) อธิบายว่ากรณี $(x, x+y)$ คล้ายกับกรณีแรกอย่างไร

(h) ประโยคสุดท้าย ``ดังนั้นทุก $(x, y) \in R$ มี $\gcd(x, y) = 1$'' สรุปจากอะไร

(i) บทพิสูจน์นี้พิสูจน์ว่า ``ทุกสมาชิกที่สร้างได้มีสมบัตินี้'' หรือพิสูจน์ว่า ``เซตของคู่ที่มี $\gcd = 1$ เท่ากับ R'' เพราะอะไร