819605 Discrete Mathematics

Worksheet 1: Mathematical Language & Sets; Recursive Definitions

Direct Proof, Counterexample

Aj. Phaphontee Yamchote
Information Systems for Digital Business, Faculty of Business Administration
Southeast Asia University

Learning goals for this worksheet

- Use basic mathematical language to describe sets and simple statements.
- Work with sets using roster notation and set-builder notation.
- Understand and use simple recursive definitions (for sequences and sets).
- Practice direct proof and disproof by counterexample for basic statements.

Part I: Mathematical Language, Sets, and Recursive Definitions

A. Mathematical Language and Sets

A1. Classifying expressions

แต่ละข้อด้านล่างนี้ ให้ระบุว่าเป็น *ประพจน์* (proposition: มีค่าจริง/เท็จแน่นอน) หรือ *ไม่ใช่ประพจน์* (not a proposition) และถ้าเป็นประพจน์ให้วงไว้ว่า T หรือ F

(A1) $2 + 3 = 5$ Proposition? ☐ Yes ☐ No True/False? ☐ T ☐ F

(A2) 7 is an even integer. Proposition? ☐ Yes ☐ No True/False? ☐ T ☐ F

(A3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ Proposition? ☐ Yes ☐ No True/False? ☐ T ☐ F

(A4) Bangkok is the capital city of Thailand. Proposition? ☐ Yes ☐ No True/False? ☐ T ☐ F

(A5) n is a prime number. Proposition? ☐ Yes ☐ No True/False? ☐ T ☐ F

สรุปสั้น ๆ: ประโยคที่มีตัวแปรอิสระ (เช่น n, x) มักจะยังไม่เป็นประพจน์ จนกว่าเราจะกำหนดค่าของมันให้ชัดเจน

A2. Describing sets

ให้กำหนดเซตต่อไปนี้ในสองรูปแบบ:

(1) *Roster notation* (เขียนสมาชิกทั้งหมดหรือบางส่วน), (2) *Set-builder notation* (เขียนเงื่อนไข)

(B1) เซตของจำนวนเต็มคู่ระหว่าง 0 ถึง 10 (รวมทั้งสองขอบเขต)

$$E = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$$

เขียนแบบ set-builder:

$$E = \{ n \in \mathbb{Z} \mid \underline{\hspace{6cm}} \}$$

(B2) เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า -1 แต่น้อยกว่า 3

$$S = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$$

เขียนแบบ set-builder:

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{\hspace{6cm}} \}$$

(B3) เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว

$$M = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$$

เขียนแบบ set-builder:

$$M = \{ k \in \mathbb{Z} \mid \underline{\hspace{6cm}} \}$$

A3. Working with set operations

ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ เป็น universal set และกำหนด

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C = \{4, 5, 6, 7\}.$$

จงหาค่าต่อไปนี้ (เขียนคำตอบเป็น roster notation):

(C1) $A \cap B = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$

(C2) $A \cup C = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$

(C3) $B \setminus A = \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$

(C4) A^c (ส่วนเติมเต็มของ A ใน U) $= \{ \underline{\hspace{6cm}} \}$

A4. Describing real-world statements using sets

ให้ U เป็นเซตของนักศึกษาทุกคนในรายวิชา *Discrete Mathematics* กลุ่มนี้ และกำหนดเซตย่อยดังนี้

$$A = \{x \in U \mid x \text{ เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80\% ของคลาสทั้งหมด}\},$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ ส่งการบ้านครั้งที่ 1 ตรงเวลา}\},$$
$$C = \{x \in U \mid x \text{ เป็นนักศึกษาที่ทำงาน Part-time ควบคู่ไปกับการเรียน}\}.$$

จงใช้ภาษาเซต (เช่น $\subseteq, \cup, \cap, {}^c, =$) เขียนแทนประโยคต่อไปนี้ และ/หรือ แปลนิพจน์ของเซตกลับเป็นภาษาไทยให้เข้าใจง่าย

(D1) เขียนประโยคต่อไปนี้ในรูป *สัญลักษณ์ของเซต*:

(1) "นักศึกษาทุกคนที่ส่งการบ้านครั้งที่ 1 ตรงเวลาเป็นคนที่เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80% ทั้งหมด"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเซต: _____

(2) "มีนักศึกษาบางคนที่เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80% แต่ไม่ได้ส่งการบ้านครั้งที่ 1"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเซต: _____

(3) "ไม่มีนักศึกษาที่ทำงาน Part-time คนใดที่เข้าเรียนเกินหรือเท่ากับ 80%"

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของเซต: _____

(D2) จากนิพจน์ของเซตต่อไปนี้ ให้แปลกลับเป็นภาษาไทย (อธิบายเป็นประโยคเกี่ยวกับนักศึกษาให้เข้าใจง่าย)

(4) $B \subseteq A$

แปลเป็นภาษาไทย: _____

(5) $A \cap C^c \neq \emptyset$

แปลเป็นภาษาไทย: _____

(6) $A \cap B^c \cap C \neq \emptyset$

แปลเป็นภาษาไทย: _____

B. Recursive Definitions

Idea: การนิยามแบบเวียนกลับ (recursive definition) มักประกอบด้วย

- **Base clause:** นิยามกรณีเริ่มต้น
- **Recursive clause:** นิยามกรณีทั่วไปในแง่ของกรณีก่อนหน้า

B1. A recursively defined sequence

ให้ลำดับ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ถูกนิยามแบบเวียนกลับดังนี้

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}.$$

(D1) จงหาค่า a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 แล้วใส่ในตาราง

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
_____	_____	_____	_____	_____

(D2) จากคำตอบของคุณ ลองเดาว่าสูตรปิด (closed form) ของ a_n อาจมีหน้าตาประมาณใด

$$a_n \approx \underline{\hspace{10cm}}$$

(ยังไม่ต้องพิสูจน์ ให้แค่เดาและสังเกตรูปแบบ)

B2. A recursively defined set of strings

ให้ $\Sigma = \{0, 1\}$ เป็น alphabet ของตัวอักษรสองตัว กำหนดเซต S ของสตริงไบนารีแบบเวียนกลับดังนี้

- **Base clause:** $\epsilon \in S$ (สตริงว่างอยู่ใน S)
- **Recursive clause:** ถ้า $s \in S$ แล้ว $0s \in S$ และ $1s \in S$

(E1) เขียนสมาชิกทั้งหมดของ S ที่มีความยาวไม่เกิน 2 (รวมสตริงว่าง)

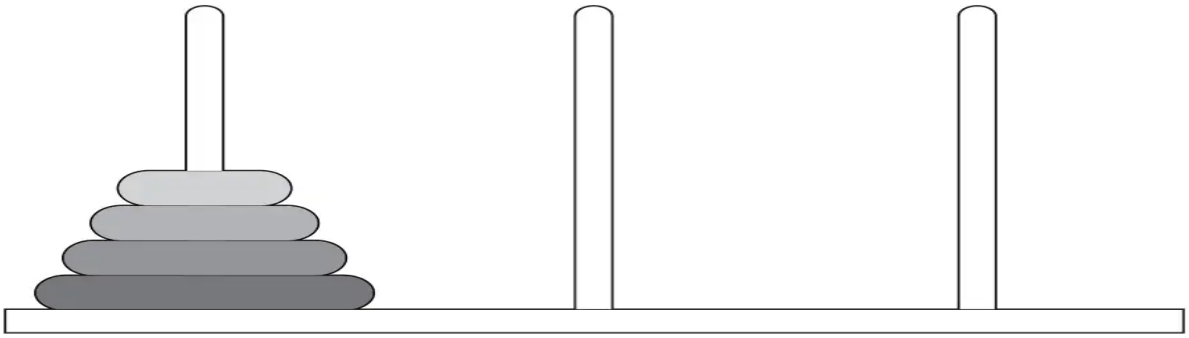
$$S_{\leq 2} = \{ \underline{\hspace{10cm}} \}$$

(E2) จากนิยามข้างต้น 010 เป็นสมาชิกของ S หรือไม่? อธิบายสั้น ๆ ว่าทำอย่างไรจึงได้ 010 เริ่มจาก base

_____

_____

B3. Tower of Hanoi: จากเรื่องเล่าไปสู่ความคิดแบบเวียนเกิด



ลองพิจารณาเกม *Tower of Hanoi* ที่มีเสา 3 ต้น (ให้เรียกชื่อว่า A, B, C) และมีแผ่นดิสก์ซ้อนกันอยู่บนเสาต้นหนึ่ง โดยมีกติกาว่า

- ครั้งหนึ่งย้ายได้ทีละแผ่นเท่านั้น
- ห้ามวางแผ่นใหญ่ทับแผ่นเล็ก

ตอนนี้ให้สมมติสถานการณ์ดังนี้:

คุณกำลังอยากเล่น Tower of Hanoi ที่มี 4 แผ่นโดยนึกขึ้นได้ว่ามีเพื่อนคนหนึ่งที่มีความสามารถพิเศษว่า

> **ความสามารถพิเศษของเพื่อน:**
> ไม่ว่าเกมจะมี **3 แผ่น** และเริ่มต้นด้วยการวางแผ่นทั้ง 3 ซ้อนกันอยู่บนเสาต้นไหนก็ตาม เพื่อนของคุณสามารถย้ายทั้ง 3 แผ่นไปยังเสาอีกต้นหนึ่ง (ที่คุณบอก) ได้ถูกต้องเสมอ โดยใช้เสาที่เหลือเป็นตัวช่วยตามกติกา

กล่าวคือ เพื่อนของคุณเป็น "ผู้เชี่ยวชาญ Tower of Hanoi 3 แผ่น" ที่คุณสามารถสั่งได้ว่า

"ช่วยย้าย 3 แผ่นจากเสา X ไปเสา Y โดยใช้เสาอีกต้นหนึ่งเป็นตัวช่วยให้หน่อย"

และเขาจะทำสำเร็จให้คุณเองโดยอัตโนมัติ

โจทย์: ตอนนี้คุณต้องการออกแบบวิธีเล่นเกม Tower of Hanoi แบบ **4 แผ่น** โดยให้เพื่อนคนเก่งที่เล่นแบบ 3 แผ่นเป็นผู้ช่วยอยู่เบื้องหลัง เป้าหมายคือ

- เริ่มต้น: แผ่นทั้ง 4 ซ้อนกันอยู่บนเสาต้นหนึ่ง (เช่น เสา A)
- เป้าหมาย: ย้ายแผ่นทั้ง 4 ไปยังอีกเสาต้นหนึ่ง (เช่น เสา C)
- ใช้เพื่อนคนเก่ง 3 แผ่นเป็น "ชายชุดดำ" ช่วยย้ายชุดของ 3 แผ่นเล็กตามที่คุณสั่ง (โดยที่คุณไม่จำเป็นต้องเข้าใจหรือรู้เห็นว่าเล่นอย่างไร รู้แค่ว่ากดปุ่มสั่งเมื่อไหร่คุณจะเห็นกอง 3 แผ่นนั้นย้ายไปในพริบตา)

ให้ตอบคำถามต่อไปนี้

(F1) สมมติว่าเริ่มต้นมีแผ่นทั้ง 4 อยู่บนเสา A และคุณต้องการย้ายไปที่เสา C โดยใช้เสา B เป็นเสาตัวช่วย

a) ในมุมมองของคุณ แผ่น **แผ่นล่างสุด** (แผ่นที่ใหญ่ที่สุด) ควรถูกย้ายจากเสา A ไปเสา C **เมื่อไร** ในลำดับการเล่น (ต้นเกม กลางเกม หรือท้ายเกม) และเพราะอะไร?

_____

_____

b) ไม่ว่าคุณจะกำหนดให้แผ่นใหญ่สุดอยู่ที่เสาใดก็ตาม เพราะเหตุใดถึงไม่กระทบการเล่น 3 แผ่นที่เหลือของเพื่อนผู้ช่วย

_____

_____

c) ก่อนที่คุณจะย้ายแผ่นล่างสุดจาก A ไป C คุณจำเป็นต้องจัดการกับแผ่นเล็กอีก 3 แผ่นด้านบนอย่างไรบ้าง?

_____

_____

(F2) ตอนนี้ให้คุณ **เขียนแผนการเล่น 4 แผ่นแบบทีละขั้น** โดยใช้เพื่อนคนเก่ง 3 แผ่นเป็น "ชายชุดดำ" (ไม่ต้องสนใจรายละเอียดว่าเขาย้ายอย่างไร):

แผนการเล่น Tower of Hanoi 4 แผ่น (จาก A ไป C โดยใช้ B เป็นตัวช่วย):

จากแผนข้างบน ลองเขียนสรุปให้เป็น "ขั้นตอนวิธี" (เป็นภาษาคน) สำหรับการย้าย **4 แผ่น** ว่า

"ในการย้าย Tower of Hanoi 4 แผ่นจากเสาเริ่มต้นไปยังเสาปลายทาง เราจะ"

(1) _____

(2) _____

(3) _____

(F3) (Beyond specific case) จากไอเดียการเล่น 4 แผ่นข้างต้น ถ้าต้องการออกแบบวิธีเล่นสำหรับ n **แผ่น** ใด ๆ เราต้องการอะไรบ้าง และจะออกแบบขั้นตอนวิธีการเล่นอย่างไร

Part II: Method of Proof

Direct Proof and Counterexample (with Sets)

คำถามตั้งต้น

การพิสูจน์คืออะไร และลักษณะของการพิสูจน์ที่ดีควรเป็นอย่างไร (ไม่จำเป็นต้องเป็นการพิสูจน์คณิตศาสตร์ก็ได้)

C. Direct Proof

Idea: การพิสูจน์แบบตรง (direct proof) สำหรับข้อความรูปแบบ

"สำหรับเซตทุกเซต $A, B, \ldots$ ถ้าเงื่อนไข $P(A, B, \ldots)$ เป็นจริง แล้ว $Q(A, B, \ldots)$ เป็นจริง"

จะมีโครงคร่าว ๆ คือ

1. สมมติให้ $A, B, \ldots$ เป็นเซตใด ๆ ที่ทำให้ $P(A, B, \ldots)$ เป็นจริง
2. ใช้นิยามของเซต, สมาชิกของเซต ($\in$), สับเซต ($\subseteq$), ยูเนียน ($\cup$), อินเตอร์เซกชัน ($\cap$), ส่วนเติมเต็ม (^{c}) ฯลฯ
3. สรุปว่า $Q(A, B, \ldots)$ เป็นจริงตามต้องการ

C1. Example to follow
Proposition. ให้ A, B, C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $A \cap C \subseteq B \cap C$.
Proof.

C2. Direct proof practice 1
Proposition. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \cap B \subseteq A$.
Proof.

C3. Direct proof practice 2 (เกี่ยวกับยูเนียน)
Proposition. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq A \cup B$.
Proof.

D. Disproof by Counterexample (with Sets)

Idea: ถ้าประโยคมีรูปแบบ "สำหรับเซตทุกเซต $A, B, \ldots$ แล้วเงื่อนไข $P(A, B, \ldots)$ เป็นจริง" เราสามารถแสดงว่า *ประโยคนี้ไม่จริง* ได้โดยการหาตัวอย่างเพียงตัวเดียวของเซต $A, B, \ldots$ ที่ทำให้เงื่อนไขดังกล่าวไม่เป็นจริง เรียกว่า *counterexample*

ในข้อนี้ให้ใช้ universe set

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

และให้ส่วนเติมเต็ม A^c หมายถึงส่วนเติมเต็มของ A ใน U (เช่น $A^c = U \setminus A$)

D1. Counterexample practice 1
พิจารณาประโยคต่อไปนี้ (ยังไม่ทราบว่าจริงหรือเท็จ):

Statement S1. สำหรับทุกเซตย่อย A และ B ของ U เรามี

$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c.$$

ลองทดสอบค่าของ A และ B บางค่า แล้วเติมตารางด้านล่างนี้ ถ้าคุณพบว่าเมื่อเลือก A, B บางคู่แล้วสมการไม่เป็นจริง ให้ถือคู่นั้นเป็น counterexample

(E1) ลองเลือก A และ B อย่างน้อย 3 คู่ (เช่น คู่หนึ่งให้ $A = B$, อีกคู่ให้ A และ B ไม่ทับซ้อนกัน เป็นต้น) แล้วเติมตาราง

A	B	$(A \cap B)^c$	$A^c \cap B^c$

(E2) ถ้าคุณพบคู่ของ A และ B ที่ทำให้ $(A \cap B)^c \neq A^c \cap B^c$ ให้เขียนคู่ดังกล่าวลงมาอย่างชัดเจน:

Counterexample: $A = \{$ _____ $\}$, $B = \{$ _____ $\}$

และอธิบายสั้น ๆ ว่าทำไมคู่นี้จึงเป็น counterexample ของ S1

D2. Counterexample practice 2
พิจารณาประโยคต่อไปนี้:

Statement S2. สำหรับทุกเซตย่อย A และ B ของ U ถ้า $A \cap B = A$ แล้ว $B = U$.

(F1) ลองหาตัวอย่างเซต A และ B ที่ทำให้ $A \cap B = A$ เป็นจริง แต่ $B \neq U$:

$A = \{$ _____ $\}$, $B = \{$ _____ $\}$

(F2) ตรวจสอบว่า $A \cap B = A$ จริงหรือไม่ และอธิบายสั้น ๆ ว่าทำไมตัวอย่างนี้จึงเป็น counterexample ของ S2

_____

E. Proof about Integer Numbers

Definition 1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

- n เป็นจำนวนคู่ ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $n = 2k$
- n เป็นจำนวนคี่ ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $n = 2k + 1$

Example 2.

1. 6 เป็นจำนวนคู่เพราะว่า_____
2. -10 เป็นจำนวนคู่เพราะว่า_____
3. 99 เป็นจำนวนคี่เพราะว่า_____

Exercise 3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว n^2 จะเป็นจำนวนคู่

Exercise 4. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $m + n$ เป็นจำนวนคู่