Método de la transformada inversa

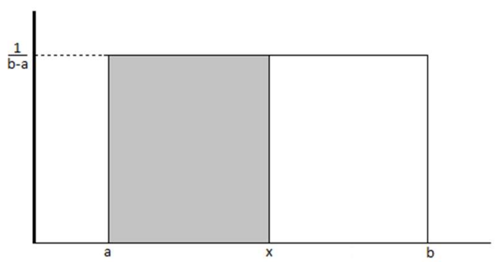
El método de la transformada inversa puede utilizarse para simular variables aleatorias continuas, lo cual se logra mediante la obtención de la función acumulada F(X) y la generación de números pseudo aleatorios r_i con distribución uniforme entre 0 y 1.

Los pasos a seguir para efectuar el método son:

1. Definir la función f(x) que represente la variable a modelar.
2. Calcular la función acumulada F(X).
3. Igualar la función acumulada F(X) a un número pseudo aleatorio r_i U(0,1), y luego despejar la variable aleatoria x para obtener la función acumulada inversa $F(X)^{-1}$.
4. Generar las variables aleatorias x, a través de números pseudo aleatorios r_i U(0,1) en la función acumulada inversa.

Ejemplo:

1. Definición: distribución uniforme en el intervalo A-B.



función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & si\ a > x > b \end{cases}$$

2. Cálculo de la función acumulada.

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^x dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^x \qquad F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

3. Igualar a r_i y despejar la variable aleatoria x.

$$F(x) = r_i \qquad r_i = \frac{x-a}{b-a} \qquad r_i.(b-a) = x - a \qquad x = a + r_i.(b-a)$$

4. Generar variables aleatorias

Ejercicios:

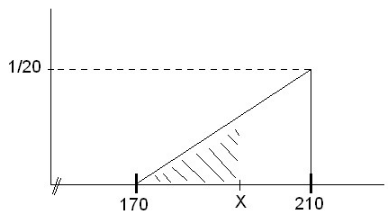
1. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$

2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{16}}; & para\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}; & para\ 1 \leq x < 6 \end{cases}$ Generar con la serie U(0,1): 0,19 0,41 0,83 0,16 0,50

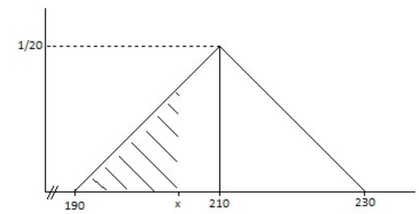
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(18-x); & para\ 14 \leq x < 18 \\ \frac{1}{16}(x-18); & para\ 18 \leq x < 22 \end{cases}$ Generar con la serie U(0,1): 0,29 0,68 0,55 0,34 0,86

4. Generar 5 números aleatorios de cada uno de los siguientes gráficos de probabilidad:

a)



b)



Algunas soluciones:

1. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$

Calculo de la función acumulada:

$$F(X) = \lambda. \int_0^x e^{-\lambda.x}\, dx = \left[-e^{-\lambda.x}\right]_0^x = \left[-e^{-\lambda.x} + e^{-\lambda.0}\right] = -\boldsymbol{e^{-\lambda.x}} + \mathbf{1}$$

Integral indefinida:

$$\lambda. \int e^{-\lambda.x}\, dx = \lambda. \int e^u \frac{du}{-\lambda} = \frac{\lambda}{-\lambda} \int e^u du = -1. e^u = -\boldsymbol{e^{-\lambda x}}$$

$$u = -\lambda. x$$
$$du = -\lambda. dx$$
$$dx = \frac{du}{-\lambda}$$

Igualación a r_i (lo denominaremos RND) y despeje de x:

$$RND = -e^{-\lambda.x} + 1$$
$$RND - 1 = -e^{-\lambda.x}$$
$$-RND + 1 = e^{-\lambda.x}$$
$$ln(-RND + 1) = -\lambda. x$$
$$x = \frac{-1}{\lambda}. ln(1 - RND)$$

Con esta última fórmula pueden obtenerse números pseudo-aleatorios que responden a una distribución exponencial negativa.

2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{16}}; & para\ 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{6}; & para\ 1 \le x < 6 \end{cases}$

Generar con la serie U(0,1): 0,19 0,41 0,83 0,16 0,50

Se calcula la función acumulada para $f(x)_1$:

$$F(X)_1 = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{16}}\,dx = \int_0^x \frac{\sqrt{x}}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^x = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^x = \frac{1}{6}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}$$

Igualación a RND y despeje de x:

$$RND = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}$$

$$RND.6 = x^{\frac{3}{2}}$$

$$X_1 = \sqrt[3]{(RND.6)^2}$$ (para 0 ≤ RND < 1/6)

Para poder continuar se debe valuar la integral definida para el segmento en el que la $F(X)_1$ es válida (entre cero y uno).

$$F(X)_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{6}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{6} - 0\right] = \frac{1}{6}$$

Este valor de 1/6 pasará a ser el corte entre un generador y otro

Por lo tanto el área total de la primer fórmula $F(X)_1$ es de 1/6. Este valor se debe agregar a la segunda función acumulada $F(X)_2$, de otro modo la misma no contemplaría el total de la superficie.

$$F(X)_2 = \frac{1}{6} + \int_1^x \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\int_1^x dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,[x]_1^x = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(x-1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.x - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.x$$

Igualación a RND y despeje de x:

$$RND = \frac{1}{6}.x$$

$$RND.6 = x$$

$$X_2 = RND.6$$ (para 1/6 ≤ RND < 1)

Se procede a valuar la serie numérica 0,19 ; 0,41 ; 0,83 ; 0,16 ; 0,50, cada número con su correspondiente generador. El primer generador es válido para valores de la serie hasta 1/6 (valor de corte).

0,19	$X_1 = RND.6 = 0{,}19\ .\ 6 = 1{,}14$
0,41	$X_1 = RND.6 = 0{,}41\ .\ 6 = 2{,}46$
0,83	$X_1 = RND.6 = 0{,}83\ .\ 6 = 4{,}98$
0,16	$X_2 = \sqrt[3]{(RND.6)^2} = 0{,}97$
0,50	$X_1 = RND.6 = 0{,}50\ .\ 6 = 3{,}00$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(18-x);\ para\ 14 \leq x < 18 \\ \frac{1}{16}(x-18);\ para\ 18 \leq x < 22 \end{cases}$ Generar con la serie U(0,1): 0,29 0,68 0,55 0,34 0,86

Resultados:

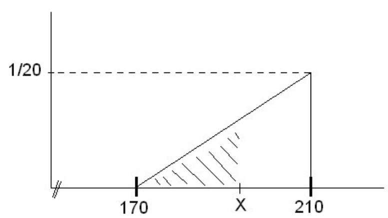
$F(X)_1 = \frac{1}{2} - \frac{(18-x)^2}{32}$ Valor de corte: $\frac{1}{2}$ $X_1 = 18 - \sqrt{32.\left(\frac{1}{2} - RND\right)}$ (para 0 ≤ RND < ½)

$F(X)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{32}(x-18)^2$ $X_2 = 18 + \sqrt{32.\left(RND - \frac{1}{2}\right)}$ (para ½ ≤ RND < 1)

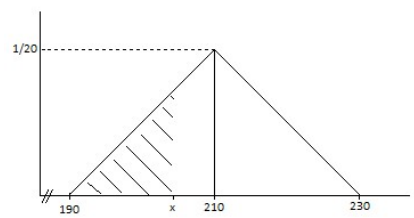
0,29 => 15,40 / 0,68 => 20,40 / 0,55 => 19,26 / 0,34 => 15,73 / 0,86 => 21,39

4. Generar 5 números aleatorios de cada uno de los siguientes gráficos de probabilidad:

a)



b)



Resultados:

a)

$f(x) = \frac{1}{800}.x - \frac{170}{800}$ $F(X) = \frac{1}{1600}.(x-170)^2$ $X = \sqrt{RND.1600} + 170$

b)

$f(x)_1 = \frac{1}{400}.x - \frac{190}{400}$ $F(X)_1 = \frac{(x-190)^2}{800}$ $X_1 = 190 + \sqrt{RND.800}$

$f(x)_2 = \frac{-1}{400}.x + \frac{230}{400}$ $F(X)_2 = 1 - \frac{(230-x)^2}{800}$ $X_2 = 230 - \sqrt{-RND.800 + 800}$