Método del disparo para resolver una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones de frontera

Mauricio Yamil Tame Soria

10 de febrero de 2018

Resumen

Resolvemos numéricamente una ecuación utilizando el método del disparo con la aproximación de Newton

Palabras clave: Disparo, condiciones de frontera, edo segundo orden

1. Introducción

Tenemos una ecuación $y'' = f(x, y, y')$ con condiciones de frontera $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$, utilizando el método del disparo obtendremos una solución numérica, la cual graficaremos. También compararemos nuestras soluciones con la solución exacta y lo haremos con distintas resoluciones para el RungeKutta y distintas tolerancias para la condición de frontera. Nuestra ecuación es la siguiente.

$$y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3 \quad 1 \leq x \leq 2 \quad y(1) = 2 \;\; y(2) = 5/2 \tag{1}$$

2. Planteamiento del Disparo

Primero necesitamos pasar nuestro problema de valores de frontera a un problema de valor inicial. Para esto proponemos el siguiente sistema

$$y' = z \quad z' = 2y^3 - 6y - 2x^3 \quad 1 \leq x \leq 2 \quad y(1) = 2 \;\; y'(1) = t \tag{2}$$

el sistema representa un problema de valores iniciales. Resolviendo el sistema obtenemos una solución que tiene un cierto valor en la frontera, es decir $y(b)$ tiene un valor que depende del parámetro t entonces realmente nuestra solución es una función $y(x, t)$ y necesitamos un t tal que $y(b, t) = 5/2$ que es nuestra condición de frontera, esta condición nos da otra ecuación

$$y(b, t) - 5/2 = 0 \tag{3}$$

la cual resolveremos usando el método para encontrar raíces de Newton, entonces necesitamos resolver por $\frac{\partial y(b,t)}{\partial t}$ en la frontera, para esto planteamos el otro sistema definiendo $u = \frac{\partial y}{\partial t}$ y derivamos entonces $\frac{\partial y''}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$ utilizando la regla de la cadena y sabiendo que x no depende de t, además suponemos que el orden de derivación de x y t puede cambiarse entonces la ecuación (1) derivada respecto a t queda

$$u'' = (6y^2 - 6)u \quad 1 \leq x \leq 2 \quad u(a,t) = 0 \quad u'(a,t) = 1 \tag{4}$$

de esta manera para Newton debemos resolver dos problemas de valor inicial, el problema (1) y (4) por lo tanto tenemos un sistema de 4 ecuaciones de primer orden de la siguiente manera

$$y' = z \tag{5}$$

$$z' = 2y^3 - 6y - 2x^3 \tag{6}$$

$$u' = p \tag{7}$$

$$p' = (6y^2 - 6)u \tag{8}$$

este sistema se resuelve usando el RungeKutta de orden 4 programado en el código Disparo.cpp. Una vez resuelto el sistema tenemos $\frac{\partial y}{\partial t}$ y tenemos $y(b,t)$ entonces hacemos Newton para obtener una aproximación de t para la ecuación (3) de la siguiente manera

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(b,t_k) - 5/2}{u(b,t_k)} \tag{9}$$

así obtenemos un nuevo t_{k+1} que nos sirve para un nuevo diparo más aproximado. Iterando de esta manera aproximamos la solución.

3. Resultados

El código se ejecutó con 2 valores para δx y dos valores para la tolerancia: $0{,}02, 0{,}01$ y $1{,}0e-6, 1{,}0e-8$ respectivamente. Se compararon los resultados obtenidos numéricamente con los obtenidos por la función que representa la solución exacta y se graficó la diferencia de los dos valores respecto a las x de la siguiente manera

$$error(x) = |y_{num}(x) - y_{exc}(x)| \tag{10}$$

arrojando lo siguiente

Para la solución numéricagraficaremos la de menor error que es

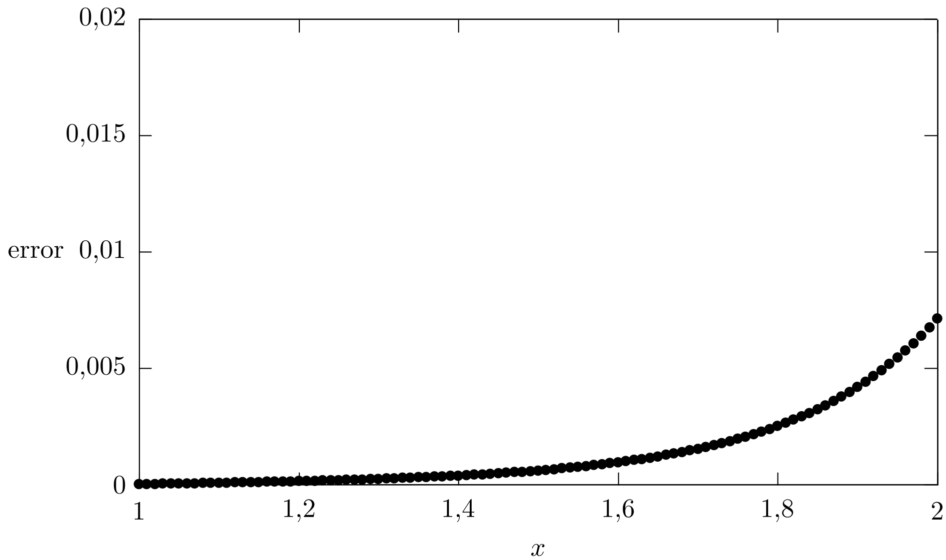

Figura 1: error con tolerancia 10^{-6} y $\delta x = 0{,}01$

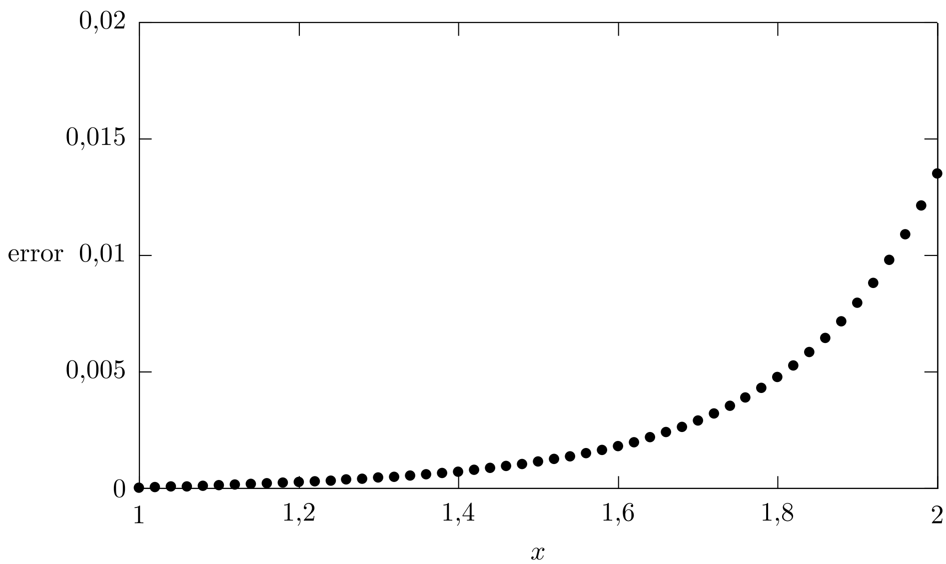

Figura 2: error con tolerancia 10^{-6} y $\delta x = 0{,}02$

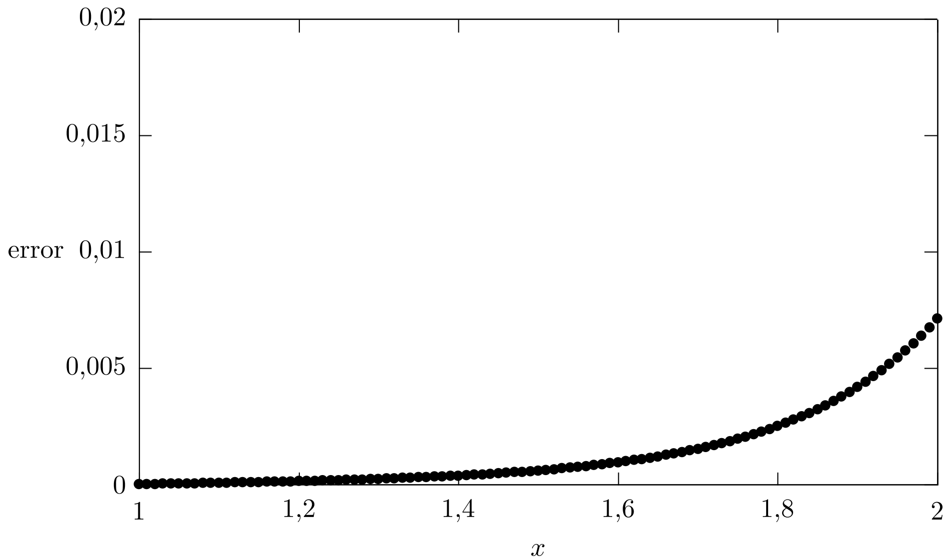

Figura 3: error con tolerancia 10^{-8} y $\delta x = 0{,}01$

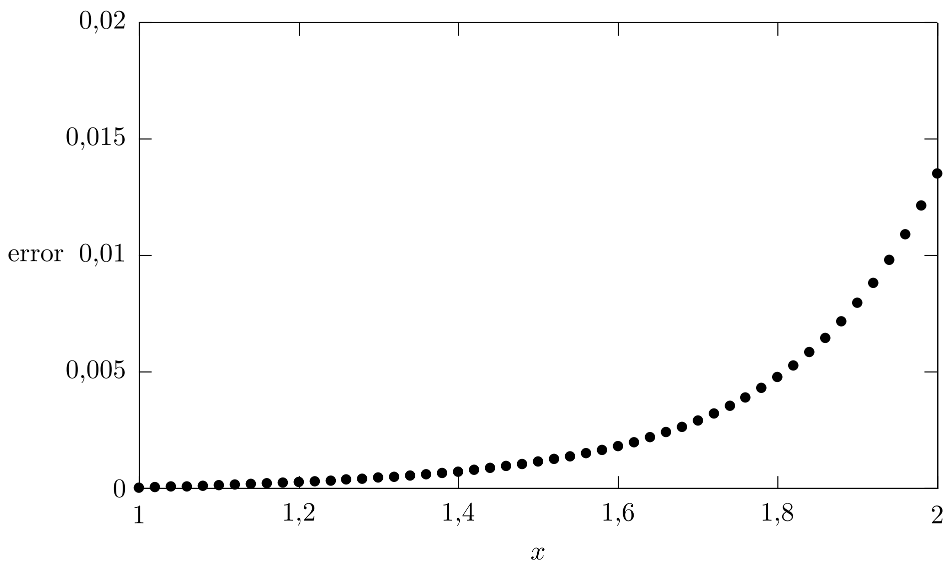

Figura 4: error con tolerancia 10^{-8} y $\delta x = 0{,}02$

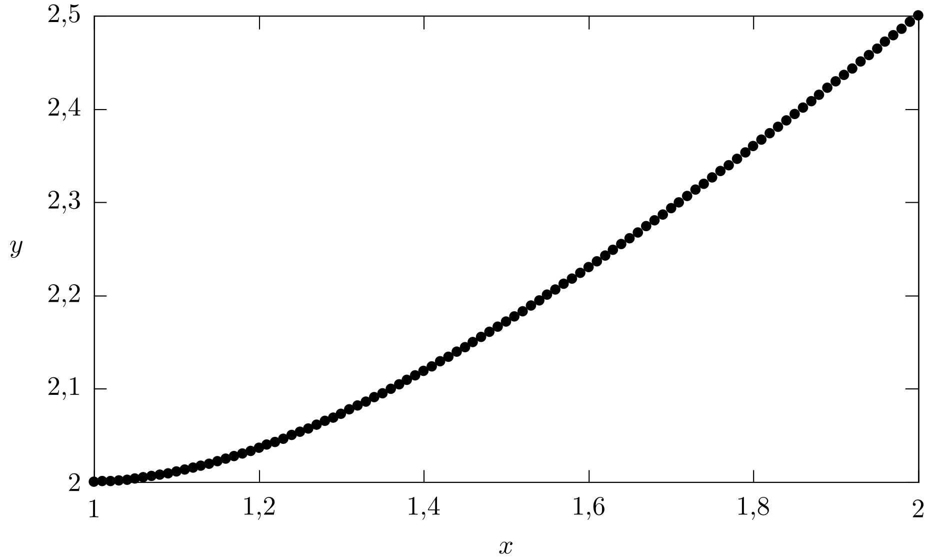

Figura 5: solucion con la menor toleracnica y δx

4. Conclusiones

En mi opinión la dificultad del método corresponde a la implementación del RungeKutta. Mientras mayor resolución la solución tendrá una mayor precisión. Uno debe ser cuidadoso al escoger el t inicial, en este sistema utilizar $\frac{\beta-\alpha}{b-a}$ provoca que el método de newton raphson no tenga solución ya que crece mucho y en unas cuantas iteraciones con Newton la variable t se vuelve nan (not a number); observando la solución exacta podemos estimar una t inicial cercana a cero pero no siempre nos darán la solución exacta entonces se generó una iteración sobre el ángulo inicial, se escogió un rango de $\pi/4$ y $-\pi/4$ en 10 ángulos distintos, de esas iteraciones se nota que si t inicial es mayor que 0.02 el valor de t no deja de crecer. La iteración sobre t_{init} permitió encontrar un t favorable para el método de Newton.

Referencias

[1] Luis José Berbesí Márquez *Solucion Numerica de Problemas de Valor de Frontera para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* Universidad de Los Andes Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas Grupo de Ciencias de la Computación