Primer Examen Parcial Física Computacional

Mauricio Yamil Tame Soria

9 de mayo de 2017

1. Péndulo invertido(problema 1)

El péndulo es un ejemplo excelente que se usa como modelo para estudiar diferentes fenómenos físicos. El sistema que propone el autor simula un péndulo rígido en dos dimensiones del cual mueven el pivote oscilándolo periódicamente en forma vertical. Se busca la existencia de posiciones invertidas estables para el péndulo variando los parámetros. Cuando se mueve el pivote con una fuerza periódica el péndulo tiene movimientos oscilatorios y también se observan movimientos caóticos. El autor estudia el rango de los parámetros en donde el movimiento invertido se vuelve estable, el análisis se hace con ecuaciones linealizadas. La posición invertida estable es un fenómeno de estabilización dinámica. En los experimentos se observa que la posición invertida estable del péndulo no es completamente vertical si no que tiene un ligero desfase y sugieren que se debe a la inclinación de la fuerza sobre el pivote. Para el análisis se utiliza el método del potencial efectivo de Kapitza y Landau y Lifshitz. Algunas simulaciones numéricas muestran la relación entre el ángulo que se desfasa la posición vertical y el ángulo en el cual se mueve el pivote. Para demostrar la relación se realiza un experimento que consiste en un péndulo rígido conectado a un pivote móvil, donde el movimiento del pivote es movido en un movimiento vertical oscilatorio, es decir, de arriba a abajo y así periódicamente. A pesar de que se fabricaron instrumentos simétricos que brindaban forzamineto vertical aún así el estado invertido estable no es completamente vertical. El objetivo del autor es discutir el estado invertido con más detalle al hacer comparaciones de resultados analíticos con soluciones obtenidas numéricamente; primero consideran el péndulo cuando mueven el pivote verticalmente y explican cómo usar el método del potencial efectivo para obtener expresiones para la frecuencia en la cual se obtienen posiciones invertidas. Después consideran el sistema con una ligera inclinación en el movimiento del pivote al cual está conectado el péndulo y obtienen resultados que sugieren que el estado invertido sin inclinación es asintótico.

COnstruyen un modelo idealizado del péndulo excitado paramétricamente, es decir, se cuantifica la excitación del pivote. El modelo consiste en la masa m unida a una varilla de longitud l que está conectada al pivote el cual se mueve sinusoidalmente de acuerdo a una ecuación(función de posición) $z(\tau)$. Se utiliza una aproximación lineal de un oscilador amortiguado constantemente(amortiguamineto constante ζ), de ahí obtienen una ecuación

$$I\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{d\theta}{d\tau} + \left(g + \frac{d^2z}{d\tau^2}\right)\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

que depende del tiempo τ y del ángulo respecto a la vertical θ siendo la posición hasta abajo el $\theta = 0$. La ecuación de la posición del pivote es un coseno ya que el movimiento del pivote era oscilatorio y lo definen así

$$z(\tau) = -Zcos\Omega\tau \qquad (2)$$

haciendo cambio de variables con el tiempo $t = \omega_n\tau$ de tal manera que involucran el periodo de oscilación llegan a una simplificación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + (1 + p\cos t\omega)\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_n}, \quad c = \frac{2\zeta}{\omega_n l}, \quad p = \frac{Z\Omega^2}{g} \tag{4}$$

La ecuacion (**??** es la que usan en los cálculos numéricos. Para el coeficiente de amortiguamiento ζ utilizan valores que ya conocen.

El valor de ω que se usa en el articulo para obtener el punto estable $\theta = \pi$ es $\omega = 17{,}5$ entonces para estimar el valor de p donde $\theta = \pi$ es estable, se hace la simulación numérica de la ecuación (**??**) resolviendo para θ con el método de Runge-Kutta programado en Fortran90(el código que está en Dropbox). En el diagrama de bifurcación que hacen dicen que toman una muestra cada periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, editando el código RungeKutta.f90 para hacer un diagrama de bifurcación, corriendo con la condición inicial $\theta = 3$ por ser un valor cercano a pi, si converge $\frac{\theta}{\pi}$ hacia 1 entonceses estable. Observando la gráfica supongo que el valor del parámetro p para el cual $\theta = \pi$ está entre 27.2 y 27.4.

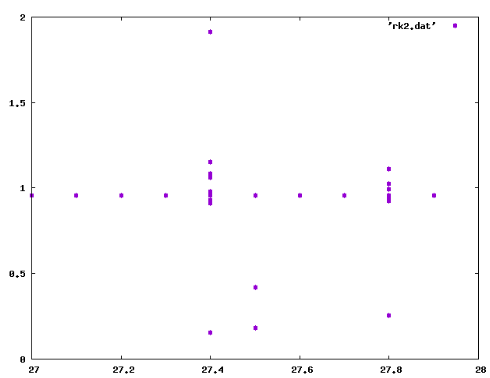

Figura 1: diagrama de bifurcación

2. Problema 2

2.1. a)

la ecuación que se debe resolver es

$$v' - \frac{c_1}{m} v = -g \tag{5}$$

sabemos que la solución es $v_h + v_p$ donde v_h es solución al sistema homogéneo y v_p es una solución particular. Para v_h la solución es $v_h = ke^{-\frac{c_1}{m}t}$ y la solución particular es $v_p = -\frac{m}{c_1} g$ por lo tanto la solución general es $v = ke^{-\frac{c_1}{m}} - \frac{m}{c_1} g$. Con la condición inicial obtenemos k entonces $v(0) = k - \frac{m}{c_1} g = v_0$ por lo tanto $k = v_0 + \frac{m}{c_1} g$ de esta manera la solución es

$$v = (v_0 + g\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} - v_t \tag{6}$$

2.2. b)

las unidades de c_1 y c_2 deben ser $\frac{kg}{s}$ son unidades de masa sobre tiempo.

2.3. c) y d)

La ecuación cuadrática sería

$$mv' = -mg - c_2 v^2 \tag{7}$$

esta es una ecuación de ricati, de la cual la solución es

$$v = -\sqrt{\frac{gm}{c_2}} \tan\left(\sqrt{\frac{gc_2}{m}}(k + t)\right) \tag{8}$$

k es una constante. En términos de τ y v_t la ecuación queda

$$v = -v_t \tan\left(\frac{(c_1 + t)}{\tau}\right) \tag{9}$$