Puntos fijos de un sistema dinámico de primer orden

Mauricio Yamil Tame Soria

29 de mayo de 2017

Resumen

Se determinan los puntos fijos y sus estabilidades para un sistema dinámico particular. También se determina un valor donde se presenta una bifurcación y se hace un diagrama.

Palabras clave: sistema dinámico, puntos fijos, estabilidad, bifurcación

1. Introducción

Analizaremos un sistema $f(x) = \dot{x}$. La ecuación representa la relación que hay entre una variable (en este caso x) con su cambio en el tiempo ($\dot{x}$). El análisis será determinar los puntos fijos x_f y verificar el valor de $\frac{df}{dx}(x_f)$ para determinar su estabilidad. La obtención de los puntos fijos se hará analíticamente primero y después numéricamente utilizando el método de Newton Raphson. La ecuación del sistema es:

$$\dot{x} = x + \frac{rx}{1+x^2} \tag{1}$$

2. Puntos fijos

Los puntos fijos x_f cumplen $f(x_f) = 0$, entonces para (1) tenemos $x_f + \frac{rx_f}{1+x_f^2} = 0$. Al despejar x_f obtenemos

$$x_f(1 + \frac{r}{1+x_f^2}) = 0 \tag{2}$$

esta ecuación se cumple si $x_f = 0$ ó si $(1 - \frac{r}{1+x_f^2}) = 0$ por lo tanto $x_f = 0$ siempre será punto fijo mientras que para el otro factor debemos analizar la forma de los puntos fijos. Para el segundo factor si despejamos x_f se obtiene

$$x_f = \pm\sqrt{-r-1} \tag{3}$$

por lo tanto los puntos fijos son $x_f = 0$ y (3), analizando el segundo observamos que x_f tendrá valores reales sólo si $-r-1 \geq 0$ lo que implica que $r \leq -1$ si

$r = -1$ entonces $x_f = 0$ es el único punto fijo, si $r < -1$ los puntos fijos serían dos y estarían determinados por (3) por lo tanto podemos intuir que el punto r_c donde ocurre la bifurcación es $r_c = -1$.

2.1. Estabilidad

Para determinar si los puntos fijos son estables o no, se construye un criterio de estabilidad mediante un analisis lineal. Si un punto fijo es estable entonces al hacer una leve perturbación sobre el punto fijo $x_f + \eta$ el sistema debería regresar al punto fijo x_f conforme pasa el tiempo. Considerando el punto $x = x_f + \eta$ que se encuentra cerca del punto fijo tenemos que su evolución en el tiempo será $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_f}{dt} + \frac{d\eta}{dt}$ que depende realmente de cómo evoluciona la perturbación η, por lo tanto $\dot{x} = \dot{\eta} = f(x) = f(x_f + \eta)$ donde al hacer una expansión en serie de Taylor obtenemos

$$\dot{\eta} = f(x_f) + \eta f'(x_f) + O(\eta^2) \tag{4}$$

despreciando los términos de orden η^2 (suponiendo una perturbación lo suficientemente leve) y tomando en cuenta que $f(x_f) = 0$ nos queda una ecuación diferencial que nos revela cómo se comporta la perturbación η.

$$\dot{\eta} \approx \eta f'(x_f) \tag{5}$$

de la cual la solución es

$$\eta = ke^{tf'(x_f)} \tag{6}$$

De la solución podemos observar que si $f'(x_f) < 0$ entonces la perturbación η se hará cero al pasar el tiempo, lo que significa que x regresa a x_f por lo tanto x_f sería estable. Si $f'(x_f) = 0$ entonces los términos $O(\eta^2)$ no son despreciables y se requiere otro tipo de análisis que en este caso será numérico y si $f'(x_f) > 0$ la perturbación crece por lo tanto x_f sería inestable. Este es el criterio de estabilidad.

Para nuestro sistema tenemos lo siguiente

$$f'(x) = 1 + \frac{r(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \tag{7}$$

entonces para el punto fijo $x_f = 0$ tenemos que $f'(0) = 1 + r$ lo que implica que $x_f = 0$ será estable si $r < -1$ e inestable si $r > -1$, para cuando $r = -1$ basta observar la gráfica de $f(x)$ (figura 1).

analizando la gráfica la dirección del flujo nos indica que $x_f = 0$ es inestable cuando $r = -1$ y ahí es cuando comienza la inestabilidad de este punto. Para los puntos fijos determinados por la ecuación (3) evaluamos $f'(x_f)$ obteniendo

$$f'(x_f) = 1 + \frac{r(1+r+1)}{(1-r-1)^2} = 1 + \frac{r+2}{r} = 2(1 + \frac{1}{r}) \tag{8}$$

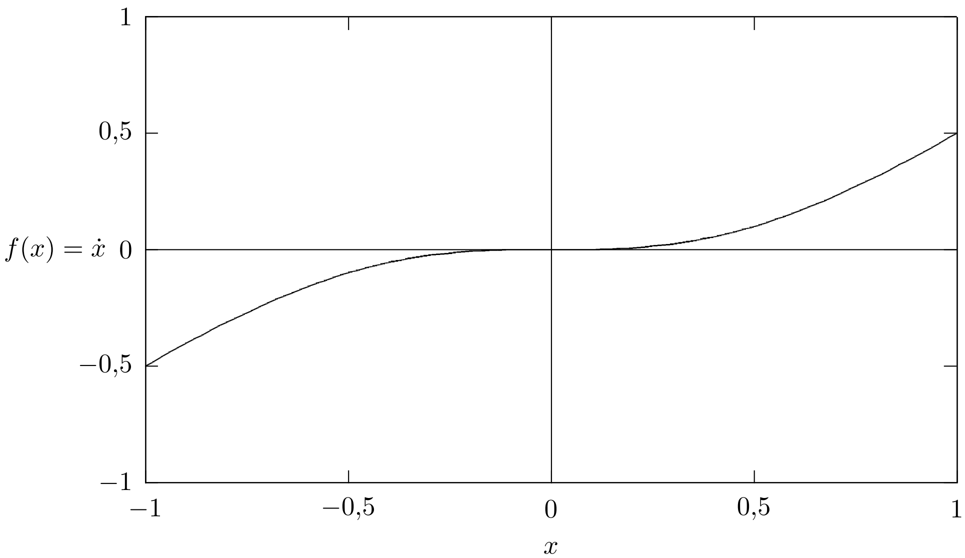
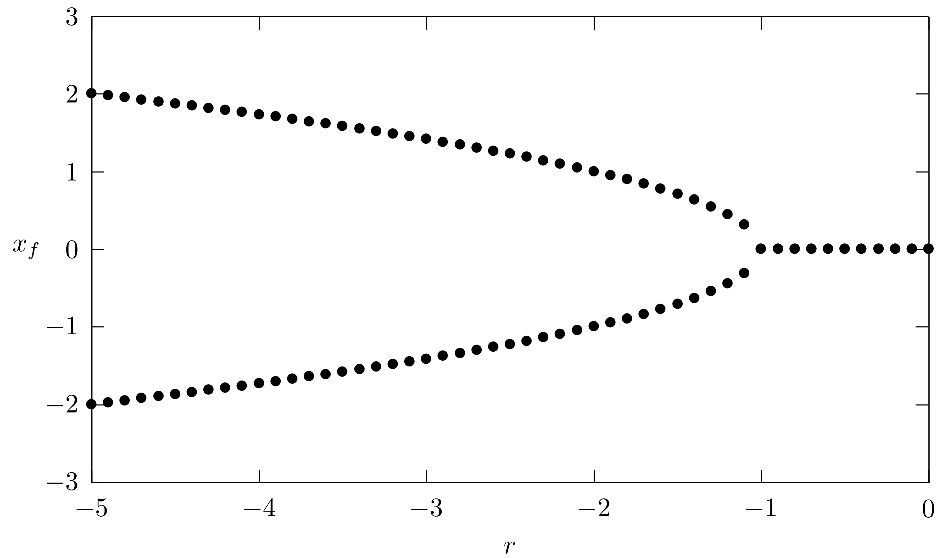


Figura 1: gráfica de $f(x)$ con $r = -1$

como estos puntos fijos sólo existen si $r < -1$ entonces obtenemos que los puntos fijos obtenidos por (3) serán inestables si $\frac{1}{r} > -1$ lo que implica que $0 < r < -1$ por lo tanto todos son inestables. Si $r = -1$ tenemos el punto $x_f = 0$.

3. Diagrama x_f vs r

El diagrama se obtiene haciendo una iteración sobre el parámetro r donde en cada paso se resuelve por los x_f tales que $f(x_f) = 0$, para resolver se utiliza el método para encontrar raices de Newton. Para la aproximación inicial en el método de Newton usamos el análisis de los puntos fijos, es decir, sabemos que son dos cuando $r < -1$ y sabemos que tienen la forma de la ecuación (3) por lo tanto escogemos una aproximación inicial $aprox = \sqrt{r}$, se escogió esta porque sabemos que está cerca del punto fijo diferente de cero y está también lo suficiente lejos de $x_f = 0$ para no caer en ese punto. La ecuación (3) nos indica que las raices son simétricas por lo tanto también buscamos la raíz cerca de $aprox = -\sqrt{r}$ para obtener el par de puntos fijos. Entonces una iteración sobre r desde -5 hasta 0 con un paso de 0,1 nos genera la gráfica siguiente.



Referencias

[1] Stephen H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos* Westview, 2th edition, 2015.