Métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Mauricio Yamil Tame Soria

25 de mayo de 2018

Resumen

En el texto se exponen dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, la eliminación de incógnitas de Gauss-Jordan y la descomposición en factores LU. Se analizan algunas limitaciones y conflictos de los métodos.

Palabras clave: eliminación Gauss-Jordan, Descomposición LU

1. Introducción

Eliminar incógnitas consiste en sumar y restar las ecuaciones del sistema para reducirlo. La forma en la que se consigue es multiplicando las ecuaciones por constantes de tal manera que al combinarlas se eliminen las incógnitas y quede al menos una ecuación de una sola incógnita para hacer sustitución con ese valor y conocer las demás incógnitas.

2. Eliminación de Gauss

Este método se utiliza para resolver un sistema general de n ecuaciones con n incógnitas. El método consiste en hacer una eliminación de incógnitas sistemáticamente para obtener una matriz triangular superior y partiendo de ella calcular las incógnitas con una sustitución apoyada del valor obtenido de la ecuación de una sola incógnita. Para ello primero hacemos la matriz aumentada con los coeficientes de las variables y los valores independientes de las ecuaciones, una vez que tenemos la matriz aumentada lo que se hace es transformar la parte de los coeficientes de la matriz aumentada en una matriz triangular superior, para poder transformar la matriz aumentada necesitamos evitar las divisiones por cero o las divisiones por números chicos al momento de normalizar la ecuación, es decir, convertir el coeficiente de la variable en 1, para evitar estas situaciones lo que se utiliza es un pivoteo parcial. El pivoteo parcial consiste en reacomodar las filas de la matriz aumentada para obtener el mayor coeficiente posible que sirva como factor para la eliminación. Entonces primero se acomoda el sistema con un pivoteo parcial para obtener el mayor número como factor divisor después a la fila siguiente se le suma la ecuación anterior multiplicada por un factor tal que se elimine la incógnita en la ecuación siguiente, por ejemplo en el sistema visto en clase

$$\begin{pmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{pmatrix}$$

el primer paso de la eliminación ya está, es el pivoteo, es decir el mayor número de la primera columna es el 3 y está arriba que es lo que necesitamos para calcular el factor $m = \frac{A(2,1)}{A(1,1)} = \frac{-0{,}1}{3}$, es el factor por el cual se multiplica la ecuación correspondiente a la fila 1 para sumarla a la ecuación correspondiente a la fila 2 para eliminar la incógnita 1 de la ecuación 2, de esta manera iterando sobre las filas y columnas se obtiene la matriz triangular, en el código se puede observar la sitematización del proceso. Una vez obtenida la matriz triangular se realiza la sustitución hacia atrás para obtener los valores de las incógnitas.

2.1. Gauss-Jordan

La eliminación de Gauss-Jordan consiste en hacer la elminicaión de Gauss y después seguir el proceso hasta obtener una matriz diagonal, es decir, continuar eliminando incógnitas hasta reducir el sistema a tres ecuaciones de una sola incógnita, por ejemplo, tomamos la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales visto en clase después de haber realizado la eliminación gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & -3{,}33E-2 & -6{,}66E-2 & 2{,}616 \\ 0{,}0 & 1 & -4{,}188E-2 & -2{,}793 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1 & 7{,}0 \end{pmatrix}$$

si quisieramos eliminar la variable 2 de la primera ecuación podríamos sumarle a la ecuación 1 la ecuación 2 multiplicada por el factor $m = 3{,}333$ y de esta manera eliminar el valor de la segunda columna en la ecuación 1. Repitiendo el proceso para la fila 1 y 2 con la ecuación 3 obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3{,}000 \\ 0{,}0 & 1 & 0 & -2{,}500 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1 & 7{,}000 \end{pmatrix}$$

de la cual obtenemos los valores de las incógnitas.

3. Descomposición LU

La descomposición LU consiste en factorizar la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior U y una matriz triangular inferior L de tal manera que $LU = A$, donde A es la matriz de coeficientes, cumpliendo esta condición se deduce a partir de la ecuación

$$Ax = B \tag{1}$$

que

$$L\left(Ux - D\right) = Ax - B = 0 \tag{2}$$

por lo tanto $LU = A$ y $LD = B$ donde x es el vector de soluciones y B es el vector de valores independientes. Con esas igualdades podemos obtener D haciendo sustitución hacia adelante y despues usar D sobre la igualdad $Ux = D$ para obtener x con una sustitución hacia atrás. Para hacer la descomposición LU necesitamos hacer eliminación gaussiana sobre la matriz de coeficientes para obtener la matriz triangular superior U entonces U es la matriz que resulta de eliminación gaussiana sobre la matriz de coeficientes mientras que la matriz triangular inferior L se construye primero con una diagonal de unos y luego las entadas son los factores utilizados para hacer las eliminaciones de incógnitas, en el ejemplo anterior consideramos el factor $m = \frac{A(2,1)}{A(1,1)} = \frac{-0{,}1}{3}$ para eliminar la primera incógnita de la ecuación 2, dicho factor sería la entrada $l_{2,1}$ de la matriz triangular inferior L y así sistemáticamente, lo que nos garantiza esto es que al hacer la multiplicación LU se obtiene la matriz original pues la multiplicación de dichas matrices representa las operaciones inversas de la triangulación de la matriz de coeficientes A.

Referencias

chapra Stephen C. Chapra *Métodos numéricos para ingenieros* Mc. Graw Hill, 5th edition, 2007.