Interpolación

Mauricio Yamil Tame Soria

25 de mayo de 2018

Resumen

Se describen métodos de interpolación para un conjunto de puntos y se utilizan para hacer una interpolación con 8 valores que corresponden a una función conocida. Los métodos para una variable son: Interpolación polinomial de Newton en diferencias divididas, polinomio de Lagrange y la interpolación con trazadores cúbicos.

Palabras clave: Interpolación, Newton, diferencias divididas, Lagrange, splines, interpolación 2D.

1. Introducción

Se explicará brevemente en lo que consisten los métodos para ponerlos en práctica con un ejemplo. Los datos que utilizaremos para probar los métodos son 8 puntos que corresponden a la función logaritmo natural. Con los 8 puntos obtendremos el polinomio de Interpolación de 7 grado. Mediante un programa en Fortran se calculan los coeficientes para el polinomio con ambos métodos, el de Lagrange y el de Newton; después de obtener el polinomio estimamos el valor en 2, es decir, evaluamos $f(2)$ y lo comparamos con el valor conocido de $ln(2)$ para analizar el error en la estimación del polinomio.

2. Interpolación polinomial

La interpolación polinomial es un método que nos ayuda a estimar un valor partiendo de unos que ya conocemos. Dicha estimación se calcula con un polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ donde n es el número de puntos que tenemos, los cuales son de la forma (x, y). El método de Newton calcula los coeficientes de $f(x)$, el método de Lagrange construye el polinomio de tal manera que satisfaga $f(x_i) = y_i$, con los trazadores cúbicos se hace una interpolación en trozos(con pares de puntos). Por ejemplo para dos puntos usamos un polinomio $f(x) = a_0 + a_1 x$ que tiene la forma de una recta, el coeficiente a_0 es el primer valor y_1 y el coeficiente a_1 es la pendiente de la recta entonces $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Para un conjunto de n puntos obtenemos un polinomio de grando $n - 1$.

2.1. Polinomio de Lagrange

El polinomio de Lagrange se construye con la intuición de que el polinomio evaluado en x_1 debe ser y_1. Para un conjunto de $n + 1$ puntos numerados $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ se formula el polinomio $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i$ de tal manera que $f_n(x_i) = y_i$ eso implica que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, En este polinomio los valores y_i actuan como coeficientes mientras que los $L_i(x)$ son polinomios de grado i, entonces f_n es una suma de polinomios. para cumplir estas condiciones se construye el polinomio de la siguiente forma

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_1 \tag{1}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad j \neq i \tag{2}$$

Esta construcción nos asegura que $f_n(x_i) = y_i$

2.2. Diferencias Divididas

Para un conjunto de $n + 1$ puntos numerados de 0 a n el método de Newton ofrece una sistematización para obtener los coeficientes a_i mediante un planteamiento de que f tiene la forma de $f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$, desarrollando los productos y reagrupando los términos reescribimos f de la forma $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ lo que nos da un conjunto de ecuaciones $a_i = a_i(b_0, ..., b_n)$, es decir, los coeficientes en términos de las b_i las cuales se calculan partiendo de la condición $f(x_i) = \sum_{j=0}^{i} b_i \prod_{k=0}^{j-1}(x-x_k) = y_i$. El método de Newton proporciona una forma recursiva para obtener los b_i de la siguiente forma, $b_0 = y_0$, $b_i = d[x_i, ..., x_0]$ y se define $d[x_i, ..., x_0]$ como la diferencia dividia entre x_i y x_0 y se calcula de la manera siguiente.

$$d[x_i, x_{i-1}] = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{3}$$

y la regla recursiva

$$d[x_k, ..., x_0] = \frac{d[x_k, ..., x_1] - d[x_{k-1}, ..., x_0]}{x_k - x_0} \tag{4}$$

de esta forma se obtiene el polinomio de interpolación para los $n+1$ sustituyendo los b_i lo que resulta en

$$f_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} d[x_i, ..., x_0] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_i) \tag{5}$$

2.3. Error de interpolación

Para calcular el error de la estimación con el polinomio de Newton se observa que la ecuación (5) se parece a la serie de Taylor. Para calcular el error de truncamiento de Taylor se necesita la derivada de orden $(n+1)$ para calcular el error del polinomio se utiliza una diferencia dividida para aproximar dicha derivada, pero para eso ocupamos un punto extra, es decir, para calcular el error con n puntos necesitamos tener $n+1$ puntos. Usando esa aproximación resulta que el error para la estimación con el valor x es

$$E_n \approx d[x_{n+1}, ..., x_0] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{6}$$

Esta forma de calcular el error tambiés es válida para el polinomio de Newton ya que los dos métodos regresan el mismo polinomio, el único polinomio de grado $n-1$ que pasa por los n puntos. La diferencia que existe en los valores que devuelve un método y el otro se debe al error de truncamiento que se comete al momento de almacenar y operar los datos en forma de bytes.

2.4. Metodología y resultados

Se utilizan 8 puntos para hacer la interpolación, la tabla de valores es:

x	y=$ln(x)$
1	0
4	1.3862944
6	1.7917595
5	1.6094379
3	1.0986123
1.5	0.4054641
2.5	0.9162907
3.5	1.2527630

para el cálculo de las diferencias divididas se utiliza una matriz de $2n-1 \times n+1$ que se llena así

x_0	y_0	00	...
00	00	$d[x_0, x_1]$	...
x_1	y_1	00	$d[x_2, x_1, x_0]$
00	00	$d[x_2, x_1]$	...
x_2	y_2	00	$d[x_3, x_2, x_1]$
...	...	...	...

entonces para los puntos de la tabla de valores calculamos el valor estimado para 2 usando el programa en Fortran codificado en clase para obtener el Cuadro 1 que representa los resultados obtenidos, los resultados fueron truncados hasta 7 deimales para facilitar la visualización, los valores con la presición completa se obtienen ejecutando el código. Analizando el cuadro 1 podemos observar que en general el error estimado disminuye a medida que se incrementa el número de puntos, para los errores absolutos podemos observar lo mismo pero esto se debe a que los puntos que interpolamos corresponden a la función que conocemos.

puntos	Newton	Lagrange	Error Newton	Error Lagrange	Error estimado
1	0	0	0	0	0.4620981
2	0.4620981	0.4620981	0.231049	0.2310490	0.10374623
3	0.56584436	0.56584436	0.12730281	0.12730281	6.29243333E-002
4	0.62876867	0.6287687	6.43784805E-002	6.43784805E-002	4.69531E-002
5	0.6757218	0.6757218	1.74253805E-002	1.74253805E-002	2.17914927E-002
6	0.69751329	0.69751329	-4.36611213E-003	-4.36611213E-003	-3.61604254E-003
7	0.69389725	0.69389725	-7.50069598E-004	-7.50069598E-004	-4.58899682E-004
8	0.69343835	0.69343835	-2.91169912E-004	-2.91169916E-004	000

Cuadro 1: Resultados

3. Trazadores cúbicos

Interpolar los $n+1$ puntos nos devuelve un polinomio de grado n, sin embargo existen casos donde los polinomios devuelven resultados erróneos devido a errores de redondeo y la lejanía entre los puntos. El método de los trazadores cúbicos consiste en hacer polinomios de grado menor en subconjuntos de los datos, los polinomios son lo que llamamos trazadores. Los trazadores se vuelven más precisos cuando la función es suave pero de repente cambia muy rápido, por lo tanto si la función tiene cambios locales e intensos será conveniente usar el método de los trazadores. En este texto se expone el método usando polinomios de grado 3 para la interpolación de los subconjuntos de puntos. Necesitamos un conjunto de polinomios de la forma $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ donde el índice i corresponde al número de intervalo, por ejemplo el polinomio $f_1(x)$ es el trazador asignado al intervalo del punto (x_0, y_0) al punto (x_1, y_1) entonces para $n+1$ puntos numerados $(x_0, ..., x_n)$ existen n intervalos y para cada intervalo un polinomio con 4 incógnitas a_i, b_i, c_i, d_i lo que nos resulta en $4n$ incógnitas por lo que necesitamos $4n$ ecuaciones. Dichas ecuaciones se obtienen fijando condiciones las cuales son:

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i) = y_i \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{7}$$

$$f_1(x_0) = y_0, f_n(x_n) = y_n \tag{8}$$

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i) \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{9}$$

$$f''_i(x_i) = f''_{i+1}(x_i) \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{10}$$

$$f''_1(x_1) = 0, f''_n(x_n) = 0 \tag{11}$$

la condición (7) determina $2(n-1)$ ecuaciones, la condicion (8) igual que la (11) determinan 2 ecuaciones, la condición (9) igual que la (10) determinan $n-1$ ecuaciones, por lo tanto tenemos $2n-2+2+n-1+n-1+2 = 4n$ ecuaciones. Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i podemos construir los trazadores $f_i(x)$. Pero existe una alternativa más eficiente que sólo requiere resolver $n-1$ ecuaciones. Para este método observamos que la segunda derivada de cada $f_i(x)$ es una línea recta entonces al derivar el polinomio $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ obtenemos

$$f''_i(x) = f''_i(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f''_i(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{12}$$

esta ecuación calcula la segunda derivada en el intervalo i partiendo del conocimiento que es una recta que interpola $(x_{i-1}, f''_i(x_{i-1}))$ y $(x_i, f''_i(x_i))$. Al integrar (12) dos veces obtenemos

$$f_i(x) = \frac{(x - x_1)^3 f''_i(x_{i-1})}{6(x_{i-1} - x_i)} + \frac{(x - x_i)^3 f''_i(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} + bx + c \tag{13}$$

donde b y c son constantes de integración que obtenemos de las condiciones de igualdad de las funciones, es decir, $f_i(x_i) = y_i$ y $f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ entonces con esas condiciones despejamos por b y por c obteniendo la expresión

$$f_i(x) = \frac{(x-x_1)^3 f_i''(x_{i-1})}{6(x_{i-1}-x_i)} + \frac{(x-x_i)^3 f_i''(x_i)}{6(x_i-x_{i-1})}$$
$$+ [\frac{y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}{6}](x_i-x)$$
$$+ [\frac{y_i}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6}](x-x_{i-1}) \quad (14)$$

Para esta ecuación sólo quedan dos valores desconocidos, $f_i''(x_{i-1})$ y $f_i''(x_i)$; las segundas derivadas se evalúan con la condición de que las primeras derivadas son continuas, es decir, $f_i'(x_i) = f_{i-1}'(x_i)$, entonces derivamos la ecuación de $f_i(x)$ para meter la condición y de esta manera obtenemos para todas las f_i , $n-1$ ecuaciones con $n+1$ segundas derivadas desconocidas pero sabemos que en los extremos son cero, entonces slo quedan $n-1$ segundas derivadas por encontrar que se hace resolviendo el sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas.

Referencias

[1] Stephen C. Chapra, *Métodos numéricos para ingenieros* Mc. Graw Hill, 5th edition, 2007.