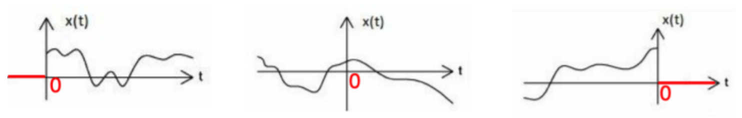
CHƯƠNG 1: TÍN HIỆU TRONG MIỀN THỜI GIAN

TÍN HIỆU NHÂN QUẢ, PHI NHÂN QUẢ – NĂNG LƯỢNG CỦA TÍN HIỆU

Tín hiệu nhân quả, phản nhân quả, phi nhân quả

- Tín hiệu là nhân quả nếu $\forall t < 0, x(t) = 0$.
- Tín hiệu là phản nhân quả nếu $\forall t > 0, x(t) = 0$.
- Tín hiệu là phi nhân quả nếu có giá trị trong cả miền âm và dương trong trục thời gian.

$\forall t < 0:\ x(t) = 0$ $\quad$ $\forall t:\ x(t) \neq 0$ $\quad$ $\forall t > 0:\ x(t) = 0$



Tín hiệu nhân quả $\quad$ Tín hiệu phi nhân quả $\quad$ Tín hiệu phản nhân quả

Năng lượng của tín hiệu và tín hiệu năng lượng

- Năng lượng của tín hiệu là tổng bình phương biên độ tín hiệu theo thời gian:
- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$
- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
- Tín hiệu năng lượng: là tín hiệu mà năng lượng của nó hữu hạn.
- Tín hiệu xác định, có **độ dài hữu hạn** là tín hiệu năng lượng.

CÔNG SUẤT TÍN HIỆU — CÔNG SUẤT TÍN HIỆU TUẦN HOÀN

Công suất của tín hiệu và tín hiệu công suất

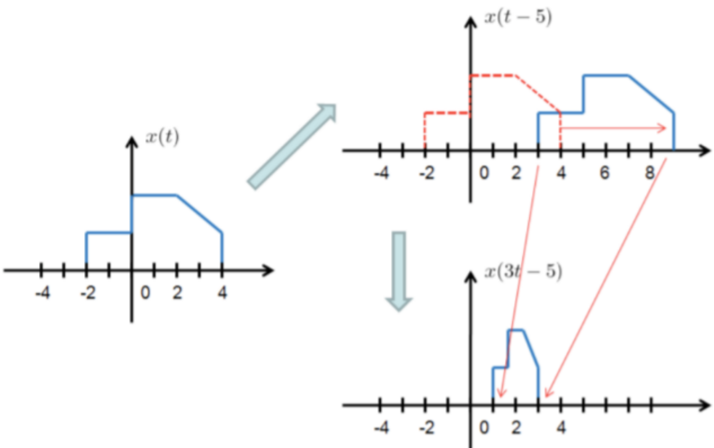
- Công suất của tín hiệu x(t) được định nghĩa là năng lượng trung bình của tín hiệu theo thời gian:
  $P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$
- Trong trường hợp tín hiệu là liên tục $x[t]$
  $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 d(t)$
- Tín hiệu công suất: là tín hiệu có công suất hữu hạn và khác không.
- Tín hiệu năng lượng thì không thể là tín hiệu công suất.
- Tín hiệu công suất thì không thể là tín hiệu năng lượng.

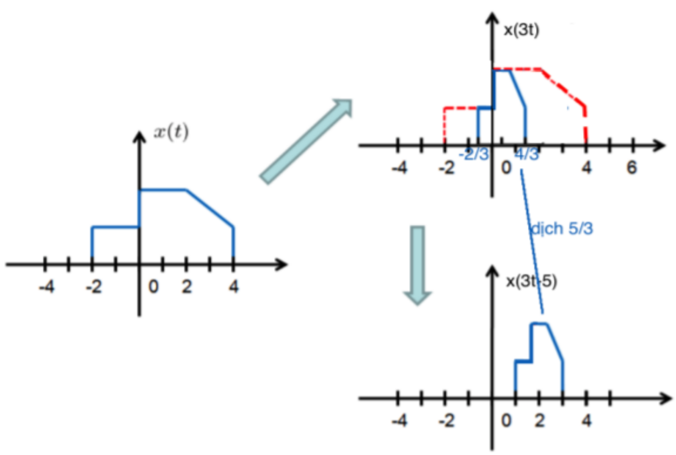
Công suất của tín hiệu

- Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu công suất.
- Công suất của tín hiệu tuần hoàn là năng lượng trung bình trong một chu kỳ:
- $P_x = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} |x(t)|^2 d(t)$
  với tín hiệu rời rạc $x(n)$:
- $P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

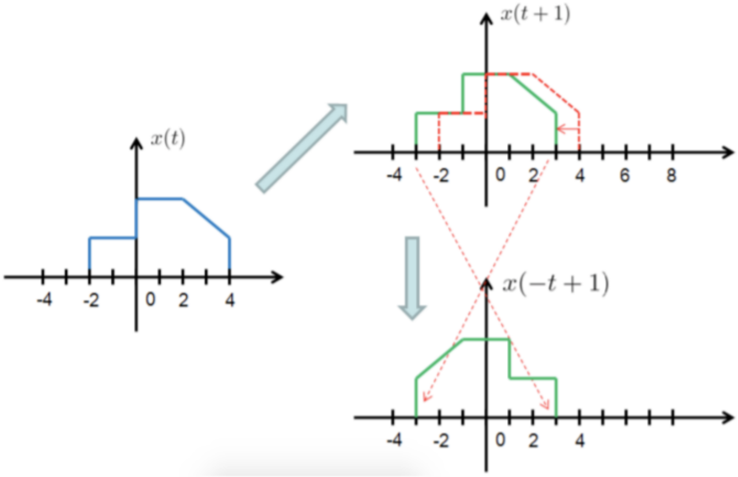
PHÉP LẬT DỊCH CO TÍN HIỆU: CHUYỂN x(t) -> x(3t-5)

cách 1: x(t) -> x(t - 5) -> x(3t -5) $\quad$ **cách 2: x(t) -> x(3t) -> x(3t -5)**





PHÉP LẬT DỊCH CO TÍN HIỆU: CHUYỂN x(t) -> x(-t+1)



HỆ THỐNG:

HỆ THỐNG CÓ NHỚ, KHÔNG CÓ NHỚ - HỆ THỐNG NHÂN QUẢ.

Hệ thống có nhớ và hệ thống không nhớ

- Hệ thống gọi là không nhớ (hệ thống tĩnh) nếu đầu ra của tín hiệu chỉ phụ thuộc vào thời điểm đo.
  Ví dụ: $y(t) = sin(\pi t)x(t)$
  $y(n) = 2^n x(n)$
- Ngược lại, hệ thống gọi là hệ thống có nhớ (hệ thống động).
  Ví dụ: $y(t) = x(t) + x(t-1)$ cần bộ nhớ lưu x(t-1)
  $y(n) = x(n+1)$

Hệ thống nhân quả, hệ thống phi nhân quả

- Hệ thống nhân quả nếu tín hiệu đầu ra chỉ xuất hiện sau khi có tín hiệu đầu vào. t-2 t-1 t t+1 t+2
  Điều này có nghĩa là: tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ. $y(t_0)$ chỉ phụ thuộc vào $x(t)$ với $t \leq t_0$.
- Ngược lại, hệ thống gọi là phi nhân quả.

y(t) chỉ phụ thuộc vào x ở thời điểm hiện tại và quá khứ => nhân quả

Ví dụ

- $y(t) = x(t+1)$ là hệ thống phi nhân quả
- $y(n) = x(n-1) + x(n-2)$ là là hệ thống nhân quả

HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH

Hệ thống tuyến tính, hệ thống phi tuyến

- Hệ thống tuyến tính nếu nó thoả mãn nguyên lý đồng nhất và xếp chồng. Về mặt toán học: Hệ thống T: $y(t) = T(x(t))$ (hoặc $y(n) = T(x(n))$) là hệ thống tuyến tính khi và chỉ khi:
  (x1)
  (x2) $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$ với $\alpha, \beta \neq 0$
- Hệ thống không thoả mãn điều kiện tuyến tính gọi là phi tuyến.

Hệ thống phi tuyến
y(t)= [x(t)]^2
x1 =>x1^2
x2=>x2^2
(x1+x2) =>(x1+x2)^2 !=x1^2 +x2^2

Ví dụ

$y[n] = nx[n]$ là hệ thống tuyến tính vì:
$T(\alpha x_1+\beta x_2) = n(\alpha x_1+\beta x_2) = \alpha n x_1+\beta n x_2 = \alpha T(x_1)+\beta T(x_2)$

Hệ thống tuyến tính, hệ thống phi tuyến

Các hệ thống sau là có tuyến tính hay không:

a) $y(t) = x(t)^2$ Phi tuyến

b) $y(n) = 2^n.x(n)$ Tuyến tính

đưa ra 1 ví dụ, khôngthoả mãn
x1(n)= 1 =>y1 (n)=1
x2(n)=-2=>y2(n)=0
x(n)=x1(n)+x2(n)= -1=>y(n)=0 != y1+y2

c) $y(n) = \begin{cases} 1 & x(n) \geq 0 \\ 0 & x(n) < 0 \end{cases}$ Phi tuyến

d) $y(t) = cos(x(t))$ Phi tuyến

e) $y(n) = x(2-n)$ Tuyến tính

x1(n)==>y1(n)= x1(2-n)
x2(n)==>y2(n)= x2(2-n)
x(n)=ax1(n)+ bx2(n)==>y(n)= x(2-n)= a x1(2-n)+ b x2(2-n)= a y1(n)+ by2(n)

f) y(n)= x(n)+1 Phi tuyến

HỆ THỐNG ỔN ĐỊNH

Hệ thống ổn định

- Hệ thống ổn định nếu tín hiệu đầu vào có biên độ hữu hạn thì đầu ra cũng có biên độ hữu hạn.
- Tính chất ổn định của hệ thống còn gọi là BIBO (Bounded Input Bounded Output). Về mặt toán học: Nếu $\exists M_x < \infty : \forall t : |x(t)|^2 < M_x$ thì hệ thống là ổn định nếu cũng xác định được $M_y < \infty : |y(t)|^2 < M_y < \infty, \forall t$
- Với hệ thống rời rạc: $\exists M_x < \infty : \forall n : |x(n)|^2 < M_x$ thì hệ thống là ổn định nếu cũng $\exists M_y < \infty : |y(n)|^2 < M_y < \infty, \forall n$

y(n)^2 =(x(n) + x(n-1))^2 < 2 (x^2(n) + x^2(n-1))< 4Mx

Ví dụ

(a1x1+a2x2)^2 < (a1^2+a2^2)(x1^2+x2^2)

$y(n) = x(n) + x(n-1)$ hệ thống ổn định.

HỆ THỐNG BẤT BIẾN VỚI THỜI GIAN

Hệ thống bất biến với thời gian

- Hệ thống là bất biến với thời gian nếu tín hiệu ra chỉ phụ thuộc vào tín hiệu đầu vào mà không phụ thuộc vào thời điểm quan sát.

dịch tín hiệu vào t0 thì tín hiệu ra cũng bị dịch t0

- $y(t) = T(x(t))$ thì $T(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$
- $y(n) = T(x(n))$ thì $T(x(n-n_0)) = y(n-n_0)$
- Ngược lại: hệ thống gọi là phụ thuộc với thời gian.

Ví dụ

Hệ thống bất biến với thời gian

- $y(t) = x(t)^2$
- $y(t) = cos(x(t))$

x(t)===>y(t)=tx(t)

x(t-t0)==>tx(t-t0)

y(t-t0)=(t-t0)x(t-t0)

[phép đổi biến]

Hệ thống không bất biến (phụ thuộc) với thời gian: y(t)=t.x(t)

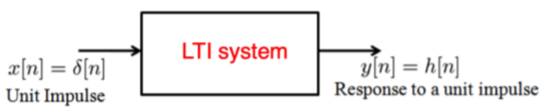
Đối với HT bất biến: cho x(t) -> y(t) thì cho x(t - t0) -> y(t - t0). cho x1(t) = x(t - t0) vào hệ thống thì đầu ra vẫn là y(t - t0) thì nó là bất biến. Ví dụ y(t) = tx(t). x1(t) = x(t - t0). y1(t) = tx(t - t0) thay vì (t - t0) x(t - t0) nên sẽ không phải hệ thống bất biến.

CHƯƠNG 2: HỆ THỐNG TUYẾN TÍN BẤT BIẾN: RỜI RẠC:

ĐÁP ỨNG XUNG:

Định nghĩa

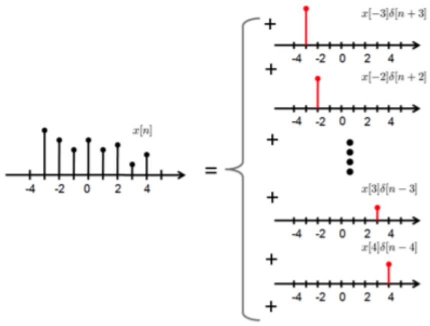
Đáp ứng xung của 1 hệ thống TTBB,kí hiệu là h(n), là đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là xung delta



x(n) bất kỳ

y(n) =?

Mối quan hệ giữa input/output/đáp ứng xung



Input signal vs delta signal

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Mối quan hệ giữa input/output/đáp ứng xung

Cho $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$ thì tín hiệu ra $y(n) = ?$

- Có: $\delta(n) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} h(n)$
- nên $\delta(n-k) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} h(n-k)$ (t/c bất biến thời gian)
- Áp dụng tính chất tuyến tính:
  - $x(k)\delta(n-k) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} x(k)h(n-k)$ (coi x(k) là 1 giá trị của x tại k)
  - $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$ (t/c tuyến tính)
- Hay: $x(n) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = y(n) =$Output

TÍCH CHẬP:

Định nghĩa tích chập rời rạc (convolution sum)

Tích chập giữa 2 tín hiệu a(n) và b(n) là 1 tín hiệu, kí hiệu là $c(n) = a(n) * b(n)$ được tính dựa theo công thức:

$$c(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)b(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b(k)a(n-k)$$

Mối quan. hệ giữa input/output/đáp ứng xung:

Tín hiệu lối vào lối ra và đáp ứng xung của hệ thống TTBB liên hệ với nhau thông qua quan hệ tích chập:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

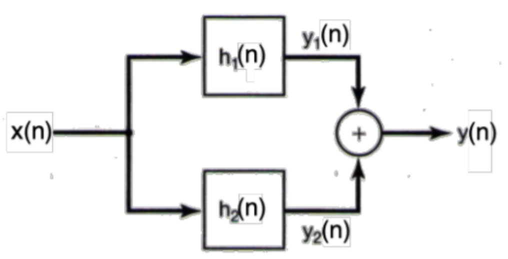
TÍNH CHẤT TÍCH CHẬP:

- Tích chập của mọi tín hiệu với xung delta đều bằng chính nó:
  $x(n) * \delta(n) = x(n)$
- Giao hoán:
  $a(n) * b(n) = b(n) * a(n)$ =c(n)
- Kết hợp
  $a(n) * [b_1(n) * b_2(n)] = [a(n) * b_1(n)] * b_2(n)$
- Phân phối:
  $a(n) * [b_1(n) + b_2(n)] = a(n) * b_1(n) + a(n) * b_2(n)$
- Dịch thời gian:
  $a(n - n_0) * b(n) = a(n) * b(n - n_0) = c(n - n_0)$

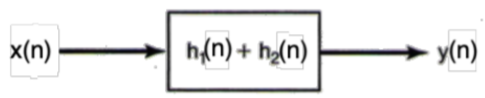
a(n-n1) * b(n-n2) =c(n-n1-n2)

Phân phối - Kết nối song song

h1(n), h2(n): LTI



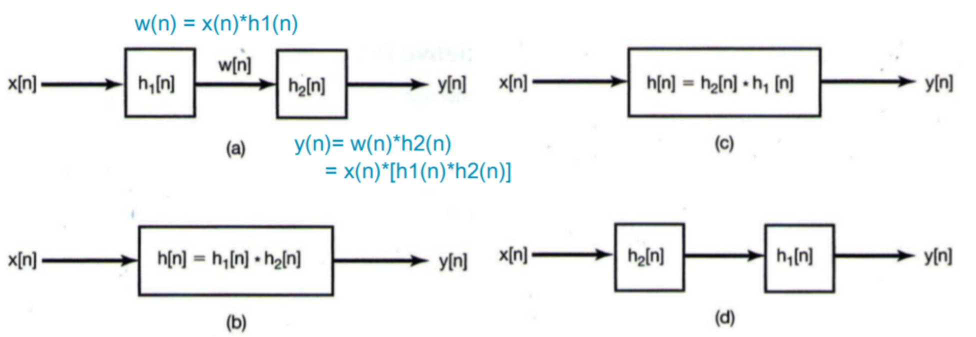
(a)



(b)

Giao hoán, Kết hợp & Kết nối nối tiếp

h1(n), h2(n): LTI

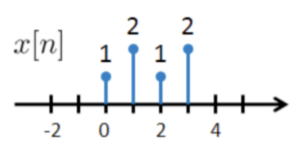


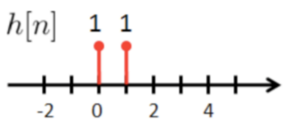
CỘNG TÍN HIỆU:

METHOD1: CỘNG TÍN HIỆU

Method1: Cộng tín hiệu

- $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
- $y(n) = ... + x(-2)h(n+2) + x(-1)h(n+1) + x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + ...$
- Vẽ tín hiệu h(n) và các tín hiệu bị dịch h(n+2), h(n+1), h(n-1)...
- Thực hiện phép nhân tín hiệu với hằng số và cộng các tín hiệu lại $\Rightarrow$ y(n)
- Cũng có thể thực hiện tương tự với tổng theo x(n):
- $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) =$
  $... + h(-2)x(n+2) + h(-1)x(n+1) + h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + ...$





$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1)$

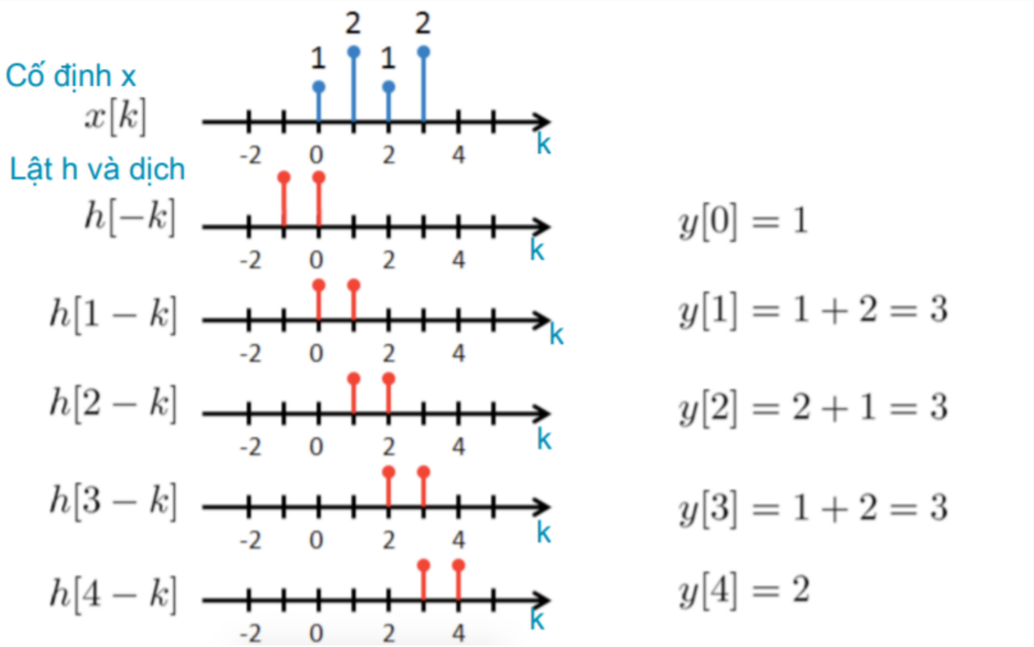
METHOD2: LẬT VÀ DỊCH

Method2: Lật và dịch

$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

Coi k là biến số, n là tham số. Tính tín hiệu ra tại từng giá trị của n:

- n=0: $y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)$
  Vẽ tín hiệu x(k) và h(-k) theo k, nhân 2 tín hiệu và cộng giá trị của tín hiệu thu được $\Rightarrow$ y(0)
- n=1: $y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)$ h(-(k-1))
- n=-1: $y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k)$
- ...



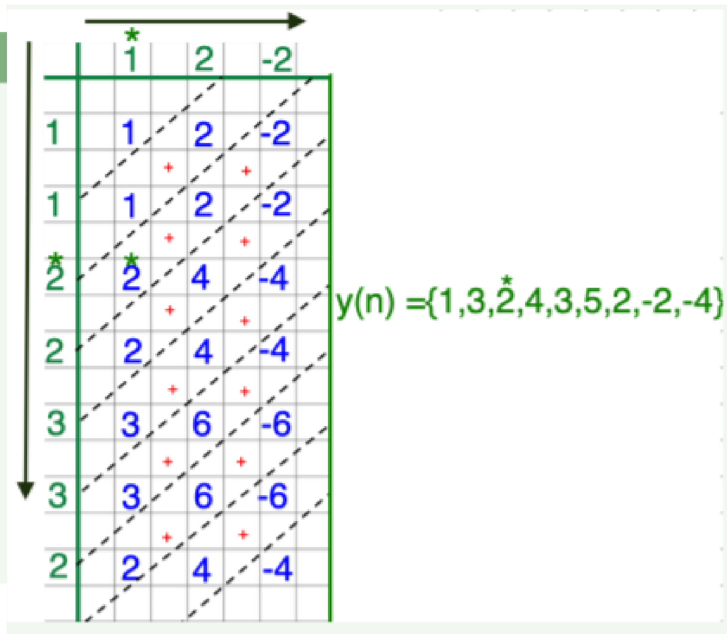
METHOD3: KẺ BẢNG

Method3: Kẻ bảng

$x[n] = \{a, b, c\}$ and $h[n] = [e, f, g]$. Thì:

$y(n) = x(n) * h(n) = \{ea, fa + eb, ga + fb + ec, gb + fc, gc\}$

Phù hợp với tính tích chập giữa các tín hiệu ngắn



TÍNH CHẤT CỦA HỆ THỐNG:

Hệ thống TTBB có đáp ứng xung h(n):

- Là hệ thống không nhớ, khi và chỉ khi $h(n) = c.\delta(n)$
- Là hệ thống nhân quả, khi và chỉ khi $h(n)$ là tín hiệu nhân quả, hay $h(n) = 0 \forall n < 0$
- Là hệ thống ổn định, khi và chỉ khi $h(n)$ là tín hiệu năng lượng, hay $E_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h(n))^2 < \infty$ (hoặc: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$)

HỆ THỐNG TTBB BIỂU DIỄN DƯỚI DẠNG PT SAI PHÂN

$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

hoặc: $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), a_0 = 1$

- Nghiệm tổng quát $y^{TQ}(n)$ của 1 pt sai phân bao gồm 2 thành phần:
- **Nghiệm thuần nhất** (homogeneous solution) $y^H(n)$: là nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào x(n)

  $\Rightarrow y^H(n)$ là nghiệm của phương trình: $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$
- **Nghiệm riêng** (particular solution) $y^P(n)$: là 1 nghiệm được chọn để thoả mãn phương trình sai phân với tín hiệu vào x(n) (bỏ qua điều kiện khởi tạo)
- Như vậy nghiệm tổng quát của pt sai phân là $y^{TQ}(n) = y^H(n) + y^P(n)$
- Áp dụng điều kiện giá trị khởi tạo của phương trình $\Rightarrow y^{TQ}(n)$

Nghiệm thuần nhất

- Là nghiệm không phụ thuộc vào x(n) nên $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$ (1)
- (1) có nghiệm dạng λ^n nên $\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0$: **pt đặc trưng**.
- Nghiệm đơn (nghiệm thực hoặc phức): $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \Rightarrow y^H(n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_i^n$
- Nghiệm bội: Giả sử λ_1 lặp lại m lần $\Rightarrow y^H(n) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i n^i \lambda_1^n + \sum_{i=m}^{N} c_i \lambda_i^n = 0$ (Kĩ thuật nâng bậc)
- Khi giải không phân biệt nghiệm thực nghiệm phức. Đa thức bậc N có đủ N nghiệm; không có trường hợp vô nghiệm
- Các hệ số c_i sẽ được xác định ở bước cuối cùng để nghiệm tổng quát thoả mãn điều kiện khởi tạo

Nghiệm riêng

Nghiệm riêng $y^P(n)$ là một nghiệm được chọn thoả mãn phương trình sai phân $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$, với x(n) đã cho ban đầu; nhưng bỏ qua điều kiện khởi tạo

- $y^P(n)$ được chọn là bội của $x(n)$,

$x(n) = 1$	$y_s(n) = c$
$x(n) = n$	$y_s(n) = c.n$
$x(n) = A^n$	$y_s(n) = c.A^n$
$x(n) = cos(\omega n + \phi)$	$y_s(n) = c_1 cos(\omega n) + c_2 sin(\omega n)$

- Chú ý: Chọn $y^P(n)$ phải độc lập với các thành phần của nghiệm thuần nhất, nên nếu bị trùng phải dùng kĩ thuật nâng bậc, nhân thêm n vào hệ số c

VD2

Giải phương trình sai phân: $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) + 4x(n-1)$ with $y(-1) = 2, y(-2) = 1, x(n) = 2^n u(n)$

- Nghiệm tổng quát của pt sai phân: $y^{TQ}(n) = y^H(n) + y^P(n) = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 6n(2)^n$ (với $n \geq 0$)
- Để xác định hệ số c_1, c_2 ta sử dụng điều kiện khởi tạo. Tuy nhiên lưu ý $y^{TQ}(n)$ chỉ đúng với $n \geq 0$ nên tính y(0), y(1) theo công thức pt sai phân: y(n) = x(n)+4x(n-1) + 5y(n-1)-6y(n-2)
- $y(0) = x(0) + 4x(-1) + 5y(-1) - 6y(-2) = 1 + 0 + 10 - 6 = 5 = c_1 + c_2$
- $y(1) = x(1)+4x(0)+5y(0)-6y(-1) = 2+4+25-12 = 19 = c_1 2+c_2 3-12$
- Giải hệ phương trình $\Rightarrow c_1 = -16, c_2 = 21$ nên $y^{TQ}(n) = -16(2)^n + 21(3)^n - 6n(2)^n$

- **Tín hiệu-Hệ thống**: x(n) tín hiệu vào, y(n) đáp ứng của hệ thống ở lối ra
- Giả sử thời điểm 0 là gốc thời gian ta bắt đầu cho x(n) đi qua hệ thống
- Tín hiệu vào: $x(n) = \begin{cases} 0 & \text{với } n < 0 \rightarrow \textit{ khi chưa có tín hiệu vào} \\ f(n) & \text{với } n \geq 0 \rightarrow \textit{ khi có tín hiệu vào} \end{cases}$
- Đáp ứng hệ thống y(n) chia thành 2 phần:
- **Đáp ứng tự nhiên** (Natural response) $y^N(n)$: là đáp ứng vốn có của hệ thống, khi chưa có tín hiệu vào;
- **Đáp ứng cưỡng bức** (Forced response) $y^F(n)$: là đáp ứng khi có tín hiệu ở đầu vào của hệ thống hay $x(n) \neq 0$; gây ra sự chuyển trạng thái của hệ thống từ trạng thái nghỉ sang trạng thái hoạt động
- Đáp ứng hệ thống $y(n) = \begin{cases} y^N(n) & \text{với } n < 0 \\ y^N(n) + y^F(n) & \text{với } n \geq 0 \end{cases}$

Đáp ứng tự nhiên

- **Đáp ứng tự nhiên** (Natural response) $y^N(n)$: là đáp ứng vốn có của hệ thống, khi chưa có tín hiệu vào;
- Vì vậy: $y^N(n)$: có dạng **giống với nghiệm thuần nhất**
- VD pt đặc trưng có nghiệm đơn: $y^N(n) = \sum_i c_i(\lambda_i)^n$
- Đáp ứng hệ thống là đáp ứng tự nhiên với n <0 nên đáp ứng tự nhiên sẽ thoả mãn điều kiện khởi tạo
- **Sử dụng trực tiếp** điều kiện khởi tạo $\Rightarrow c_i$

Đáp ứng cưỡng bức

- **Đáp ứng cưỡng bức** (Forced response) $y^F(n)$: là đáp ứng khi có tín hiệu ở đầu vào của hệ thống hay $x(n) \neq 0$; gây ra sự chuyển trạng thái của hệ thống từ trạng thái nghỉ sang trạng thái hoạt động
- Vì vậy: $y^F(n)$: có dạng **giống với nghiệm tổng quát** của phương trình sai phân
- $y^F(n) = y^H(n) + y^P(n) = \sum_i c_i(\lambda_i)^n + y^P(n)$
- Để xác định các hệ số c_i ta sử dụng giả thiết: hệ thống bị cưỡng bức chuyển trạng thái nghỉ $\Longrightarrow$ trạng thái hoạt động hay điều kiện khởi tạo là hệ thống ở trạng thái nghỉ
- Hệ thống ở trạng thái nghỉ: ...=y(-3)=y(-2)= y(-1)=0 nên ta tính được tính y(0), y(1),..
- Tính hệ số $c_i \Longrightarrow y^F(n), y(n)$

HỆ THỐNG TTBB LIÊN TỤC TRONG MIỀN THỜI GIAN

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

'tổng liên tục'

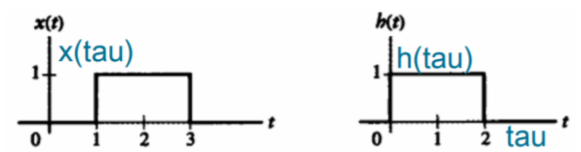
ĐẦU VÀO
TÍCH CHẤT TÍCH CHẬP: Y HỆT RỜI RẠC
TÍNH CHẤT GHÉP NỐI HỆ THỐNG: Y HỆT RỜI RẠC
TÍNH CHẤT NHÂN QUẢ, ỔN ĐỊNH, KHÔNG NHỚ: Y HỆT RỜI RẠC

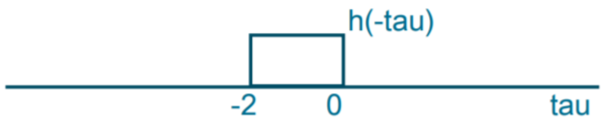
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ so $y(t) = T(x(t)) = ?$

- Áp dụng tính chất bất biến
  $\delta(t) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} h(t)$ nên:
  $\delta(t-\tau)) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} h(t-\tau)$ bất biến dịch thời gian
- Áp dụng tính chất tuyến tính:
  $x(\tau)\delta(t-\tau) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} x(\tau)h(t-\tau)$
  Và: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)$ dtau $\xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- Hay: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH CHẬP

Hệ thống TTBB có đáp ứng xung $h(t) = u(t) - u(t-2)$
Xác định tín hiệu ra khi tín hiệu vào là
$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$

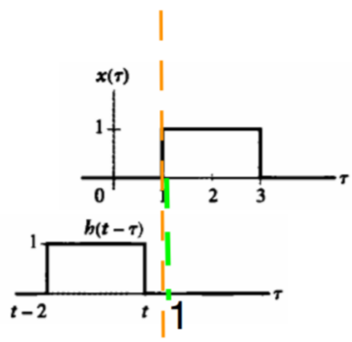




Nhân 2 tín hiệu: đồng bộ gốc thời gian, nhân giá trị biên độ

h(t-tau) = h(-(tau-t))
=> doi bien tau = tau - t

Nếu $t < 1$:
$w(\tau) = x(\tau).h(t-\tau) = 0$ với mọi tau Do đó $y(t) = 0$



Nếu $1 \leq t \leq 3$:

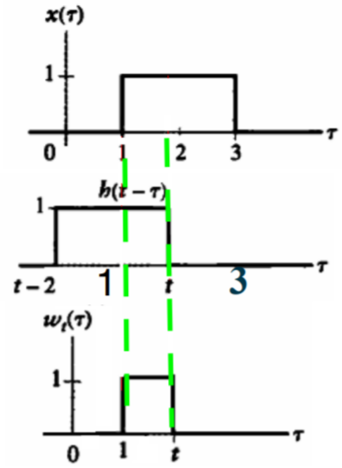
$$w(\tau) = x(\tau).h(t-\tau) = 1$$

với $\tau \in [1, t]$
Do đó

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)d\tau = \int_{1}^{t}(1.d\tau)$$

hay

$$y(t) = t - 1$$



TƯƠNG TỰ NỐT:

Kết luận:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 3 \\ 5-t, & 3 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN:

$$y(t) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d(t)} + \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k(x(t)}{d(t)}$$

hoặc: $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d(t)} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k(x(t)}{d(t)}, a_0 = 1$

với $\frac{d^k}{d(t)}$ là phép tính vi phân bậc k

Cách giải phương trình vi phân

- Mọi PT vi phân có nghiệm dạng tổng quát là: $y^{TQ}(t) = y^H(t) + y^P(t)$
- $y^H(t)$: đáp ứng thuần nhất, tại thời điểm khởi đầu t=0, không phụ thuộcv ào $x(t)$

  $y^H(n)$ là nghiệm của phương trình: $\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$
- $y^P(t)$: đáp ứng riêng, là đáp ứng của hệ thống khi hệ thống đã ổn định ($t > 0$).

  Dạng của $y^P(t)$ được xác định căn cứ bởi dạng của tín hiệu vào $x(t)$.

Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân

PT thuần nhất $\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$ có nghiệm dạng $e^{st}, s \neq 0$.

$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i = 0$ (**phương trình đặc trưng**).

- Nếu PT đặc trưng có N nghiệm đơn: $s_1, s_2, \ldots, s_N$

  $\Rightarrow$ Nghiệm của PT thuần nhất có dạng: $\sum_{i=1}^{N} c_i e^{s_i t}$
- Nếu PT đặc trưng có nghiệm bội: s_1 là nghiệm bội bậc m:

  Kỹ thuật nâng bậc

  $\Rightarrow$ Nghiệm của PT thuần nhất có dạng:

  $(\sum_{i=0}^{m} c_i t^i)e^{s_1 t} + \sum_{i=m}^{N} c_i e^{s_i t}$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân

- Nghiệm riêng $y^P(t)$ được chọn có dạng giống với $x(t)$:

t>=0

$x(t) = 1.u(t)$	$y_s(t) = C$
$x(t) = t.u(t)$	$y_s(t) = At$
$x(t) = e^{-at}.u(t)$	$y_s(t) = C.e^{-at}$
$x(t) = t^N.e^{-at}.u(t)$	$y_s(t) = (A_N t^N)e^{-at}$
$x(t) = cos(\omega t + \phi).u(t)$	$y_s(t) = C_1 cos(\omega t) + C_2 sin(\omega t)$

- Chú ý: Chọn $y^P(t)$ có dạng độc lập với nghiệm thuần nhất.

  VD: Nếu tín hiệu đầu vào có dạng $x(t) = e^{\alpha t}$:
  - Nếu nghiệm thuần nhất không chứa $e^{\alpha t}$: chọn $y_s = c.e^{\alpha t}$
  - Nếu nghiệm thuần nhất chứa $e^{\alpha t}, ..., t^{p-1}e^{\alpha t}$: chọn $y^P = c.t^p e^{\alpha t}$

Đáp ứng tự nhiên và cưỡng bức tương tự

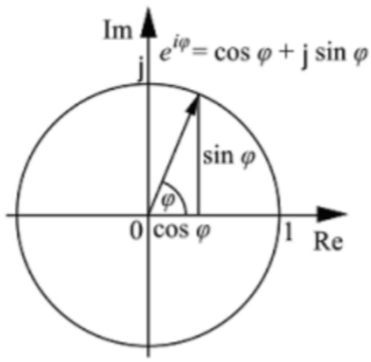
CHƯƠNG 3: BIỂU DIỄN TẦN SỐ CỦA TÍN HIỆU:

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn:

CÔNG THỨC TOÁN:

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j.sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $e^{-j\varphi} = cos(-\varphi) + j.sin(-\varphi)$
- hay $e^{-j\varphi} = cos(\varphi) - j.sin(\varphi)$
- Do đó:
- $cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$
- $sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$



- $z = r.cos(\varphi) + j.r.sin(\varphi) = r.e^{j\varphi}$
- $z = |z|.e^{j\Phi(z)}$
- $|e^{j\varphi}| = 1$; số phức $e^{j\varphi}$ thuộc đường tròn đơn vị
- $e^{j0} = 1, e^{j\pi} = -1, e^{j.2\pi} = 1$
- $e^{j\pi/2} = j, e^{-j.\pi/2} = -j$
- $e^{j\varphi} = e^{j\varphi}.e^{j2\pi} = e^{j(\varphi+2\pi)}$, hay $e^{j\varphi}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π

TÍN HIỆU TUẦN HOÀN:

Định nghĩa

- $\exists 0 < T < \infty$: x(t) = x(t+T)
- $\exists N \in \mathbb{N}, 0 < N < \infty$: x(n) = x(n+N)
- Chu kỳ: T (or N)
- Tần số: $f = \frac{1}{T}$ (or $\frac{1}{N}$) (Hz)
- Tần số: $\omega = \frac{2\pi}{T}(or \frac{2\pi}{N}) = 2\pi f$ (Rad/s)
- Trong chương trình, khi nhắc đến tần số, nghĩa là ω

- $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})}$ với $\forall t$ nên $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω
- Tương tự $e^{j\omega n}$ tuần hoàn với tần số ω
- $e^{j\omega t}, e^{j\omega n}$ là đại lượng cơ bản **đặc trưng cho tần số** ω

Tgian: delta(n), delta(t) là hàm cơ bản nhất
Tần số: e^{jwt}, e^{jwn}: là hàm cơ bản nhất

CHUỖI FOURIER

Thời gian liên tục	Thời gian rời rạc
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\omega_0 n}$
$X(k) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}$

- Phép khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn ∼ biểu diễn tín hiệu thành **tổ hợp tuyến tính** của các đại lượng có tần số là $k\omega_0$
- Các hệ số của phép khai triển đóng vai trò trọng số; thể hiện thành phần tần số $k\omega_0$ trong tín hiệu ban đầu lớn hay bé hay bằng 0.

Phổ của tín hiệu

- Từ x(n), x(t) xác định X(k)
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\mathrm{Re}(X(k))^2 + \mathrm{Im}(X(k))^2}$$

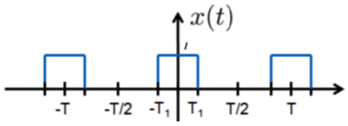
- Pha:

$$\phi(X(k)) = \arctan[\mathrm{Im}(X(k))/\mathrm{Re}(X(k))]$$

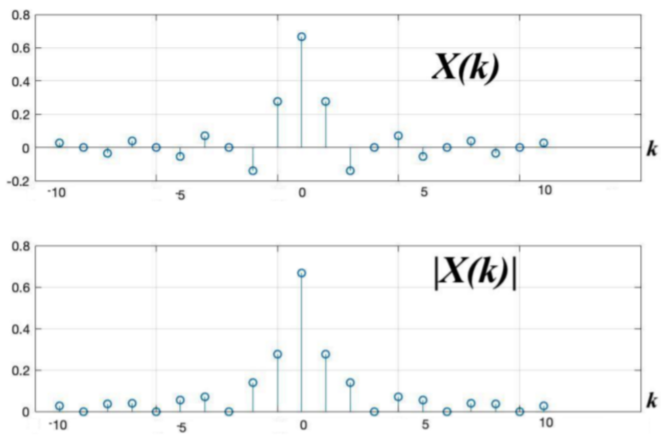
- Đồ thị của $|X(k)|$ và $\phi(X(k))$ theo k hoặc $k\omega_0$ được gọi là **Phổ biên độ** và **Phổ pha** của tín hiệu

PHỔ CỦA TÍN HIỆU → →

MỘT VÍ DỤ XÁC ĐỊNH PHỔ:



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T ⇒ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:
- $X(k) = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$
- $X(k) = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1.e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{jTk\omega_0}$
- $X(k) = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{Tk\omega_0} = \frac{2T1}{T}\mathrm{sinc}(2k\pi\frac{T1}{T})$ sinc = sin(x)/x



<– EXAMPLE: XÁC ĐỊNH HỆ SỐ FOURIER CỦA KHAI TRIỂN SAU:

- $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$
- $x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$ (Euler)
- Fourier: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$
- hay $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\pi t}$
- Đồng nhất hệ số ta có: $X(k) = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ \frac{1}{2j}, \text{k=3} \\ \frac{-1}{2j}, \text{k=-3} \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$

$$Re(X(k)) = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ 0, k = \pm 3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases} \qquad Im(X(k)) = \begin{cases} 0, k = 0 \\ 0, k = \pm 2 \\ \frac{-1}{2}, k = 3 \\ \frac{1}{2}, k = -3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$|X(k))| = \begin{cases} 1, \text{k=0} \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ \frac{1}{2}, k = \pm 3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases} \quad \Phi(X(k)) = \begin{cases} artan(0) = 0, k = 0, \pm 2 \\ artan(-\infty) = \frac{-\pi}{2}, k = 3 \\ artan(\infty) = \frac{\pi}{2}, k = -3 \\ 0, \text{k còn lại} \end{cases}$$

TÍNH CHẤT CỦA CHUỖI FOURIER CHO TÍN HIỆU TUẦN HOÀN:

- **Tuyến tính :**
  x_1, x_2 là các tín hiệu tuần hoàn với tần số ω_0
  $x_1 \xRightarrow{\text{Fourier Series}} X_1(k)$,
  $x_2 \xRightarrow{\text{Fourier Series}} X_2(k)$
- Thì: $(a_1x_1 + a_2x_2) \xRightarrow{\text{Fourier Series}} (a_1X_1(k) + a_2X_2(k))$

- **Dịch thời gian:**
- $x(t) \xRightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$
  thì $x(t - t_0) \xRightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0 t_0}$,
- $x(n) \xRightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$
  $x(n - n_0) \xRightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0 n_0}$
- Phép dịch thời gian không làm thay đổi phổ biên độ của tín hiệu mới mà **chỉ làm dịch pha**

CÔNG SUẤT TÍN HIỆU TUẦN HOÀN

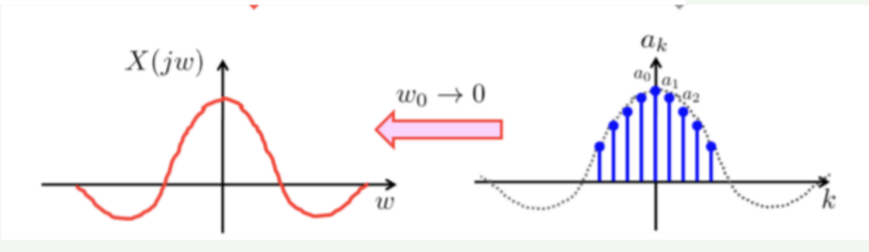
- **Công suất (Định lý Parseval)**: Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.
- $P(x(t)) = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2$,
- $P(x(n)) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$
- Đồ thị của $X(k)^2$ được gọi là **phổ công suất** của tín hiệu.

Biểu diễn của tín hiệu không tuần hoàn:

Definition

- Tuần hoàn: $\exists T : 0 < T < \infty : x(t) = x(t+T)$
- hoặc $\exists N$ nguyên : $0 < N < \infty : x(n) = x(n+N)$
- Không tuần hoàn: $T = \infty; N = \infty$

- Khoảng cách giữa các vạch phổ là ω_0
- Khi tín hiệu **không** tuần hoàn: $T \to \infty$ (hoặc $N \to \infty$)
- nên $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \to 0$
- Khi đó: Đồ thị rời rạc $\Rightarrow$ đồ thị liên tục
- Hay thay $k\omega_0$ bởi biến ω liên tục $-\infty \to +\infty$



Định nghĩa

CÔNG THỨC:

Bảng tóm tắt biểu diễn tần số của tín hiệu

	Continuous Time ***t***	Discrete Time ***n***
Fourier Series *(Tín hiệu tuần hoàn)*	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\, e^{jk\omega_0 t}$ continuous and periodic in time *(T)* $X(k) = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ discrete and aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=<N>} X(k)\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ discrete and periodic in time *(N)* $X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ discrete and periodic in frequency (N)
Fourier Transform *(Tín hiệu không tuần hoàn)*	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}d\omega$ continuous and aperiodic in time $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ continuous and aperiodic in frequency	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)\, e^{j\omega n}d\omega$ discrete and aperiodic in time $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ continuous and periodic in frequency (2pi)

- **Điều kiện hội tụ Dirichlet**: Biểu diễn tần số của tín hiệu không tuần hoàn sẽ hữu hạn/tồn tại/hội tụ khi và chỉ khi x(t) là tín hiệu năng lượng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \text{ hoặc } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

- Chỉ có tín hiệu năng lượng có biến đổi Fourier.

PHỔ:

- $X(\omega)$ là số phức $\Rightarrow$ vẽ Biên độ và Pha
- Biên độ (Amplitude:)

$$|X(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(X(\omega))^2 + \text{Im}(X(\omega))^2}$$

- Pha (Phase:)

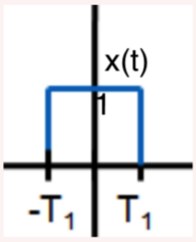
$$\phi(X(\omega)) = \arctan[\text{Im}(X(\omega))/\text{Re}(X(\omega))]$$

- Đồ thị của $|X(\omega)|$ và $\phi(X(\omega))$ theo ω được gọi là **Phổ biên độ** và **Phổ pha** của tín hiệu

- ω là biến liên tục $\Rightarrow$ Phổ của tín hiệu không tuần hoàn có dạng liên tục
- $x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)$: với $-\infty < \omega < +\infty$, nên ta vẽ $X(\omega)$ trong $-\infty \to +\infty$
- $x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)$: $X(\omega)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, nên ta chỉ cần vẽ $X(\omega)$ trong 1 chu kỳ 2π là được (thường chọn $-\pi \to +\pi$)

Example 2

Xác định biểu diễn tần số và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu sau:



- Tín hiệu x(t) không tuần hoàn
- Năng lượng : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T_1}^{T_1} 1dt = 2T_1 < \infty$
- Tồn tại biểu diễn tần số (FT)

VÍ DỤ:

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
- $X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{j\omega}$
- $X(\omega) = \frac{2sin(\omega T_1)}{\omega}$ (Theo Euler)

Xác định biểu diễn tần số và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x(t) = e^{-at}.u(t)$, a>0

- Tín hiệu $x(t)$ không tuần hoàn
- Năng lượng $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} (e^{-at})^2 dt = \frac{-1}{2a}e^{-2at}|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} < \infty \Rightarrow$ x(t) có biểu diễn tần số:
- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}.u(t)e^{-j\omega t}dt$
- $= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t)}|_0^{+\infty} = \frac{1-e^{-\infty}}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$

- $X(\omega)$ là số phức:
- $X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$ => Re, Im
- Biên độ $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(a^2+\omega^2)}}$; Pha $\phi(X(\omega)) = arctan(\frac{-\omega}{a})$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER: TUYẾN TÍNH, BẤT BIẾN

TÍNH CHẤT DỊCH:

Dịch

- x(t) (x(n)) là tín hiệu năng lượng
- $x(t)(x(n)) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)$, X(w) =|X(w)| . e^{jPhiX}
- **Dịch thời gian -Time-sift**
- $$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$
  =|X(w)|.e^{jPhiX}.e^{-jwt0}
  = | X(w)| e^{j(PhiX-wt0)}
- $$x(n-n_0) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)e^{-j\omega n_0}$$

- **Dịch tần số- Frequency-sift:**
- $$X(\omega-\omega_0) \xrightarrow{\text{Inverse Fourier Transform}} x(t)e^{j\omega_0 t}$$
  x(t) cos(w0t) = x(t).[e^{jw0t} + e^{-jw0t}]/2 ===> [X(w-w0) + X(w+w0)]/2
- $$X(\omega-\omega_0) \xrightarrow{\text{Inverse Fourier Transform}} x(n)e^{j\omega_0 n}$$

TÍNH CHẤT CO GIÃN:

Co giãn-Time-scalling:

- x(t) (x(n)) là tín hiệu năng lượng
- $x(t)(x(n)) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)$,
- $$x(at) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
- $$x(an) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
- Phép co trong miền thời gian tương ứng với phép giãn trong miền tần số
- Phép giãn trong miền thời gian tương ứng với co trong miền tần số.

ĐẠO HÀM:

Đạo hàm

- x(t), x(n) là tín hiệu năng lượng
- $x(t), x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} X(\omega)$,
- **Đạo hàm trong miền thời gian**
- $$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} j\omega X(\omega)$$
- **Đạo hàm trong miền tần số**
- $$-jtx(t) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} \frac{d}{d\omega}X(\omega)$$
  tx(t)=======> j dX(w)/dw
- $$-jnx(n) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} \frac{d}{d\omega}X(\omega)$$

TÍNH CHẤT TÍCH CHẬP

- f, g là các tín hiệu năng lượng có $F(\omega)$, $G(\omega)$ là biến đổi tần số
- **Tích chập trong miền thời gian**
- $f(t) * g(t) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} F(\omega)G(\omega)$
- $f(n) * g(n) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} F(\omega)G(\omega)$
- **Tích chập trong miền tần số**
- $$f(t)g(t) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$
- $$f(n)g(n) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} \frac{1}{2\pi} F(\omega) \circledast_{2\pi} G(\omega)$$

- ở đây $\circledast_{2\pi}$ là tích chập vòng, tính trong chu kỳ 2π:

NĂNG LƯỢNG CỦA TÍN HIỆU KHÔNG TUẦN HOÀN.

Năng lượng của tín hiệu

- **Định lý Parseval** : Năng lượng của tín hiệu không tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số biến đổi Fourier của tín hiệu đó theo thời gian.
- $$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$
- $$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$
- Ở đây $|X(\omega)|^2$ biểu diễn năng lượng của thành phần tín hiệu $e^{j\omega t}$ (hay tại tần số ω)
- Đồ thị $|X(\omega)|^2$ theo ω biểu diễn phân bố năng lượng của tín hiệu theo tần số , và được gọi là *Phổ năng lượng-Energy spectrum* của $x(t)$.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ

Đáp ứng tần số

- $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$ hay $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-jt\omega}dt$
- $H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-kj\omega}$ hay $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$
- Đáp ứng tần số $H(\omega)$ chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung $h(t)$ hoặc $h(n)$:
- Để $H(\omega)$ tồn tại (nhận giá trị hữu hạn) thì $h(t), h(n)$ phải là tín hiệu năng lượng hay hệ thống ổn định
- Khi $h(t), h(n)$ là tín hiệu năng lượng thì hệ thống ổn định $\Rightarrow$ Chỉ hệ thống ổn định mới tồn tại đáp ứng tần số

- Đáp ứng biên độ:

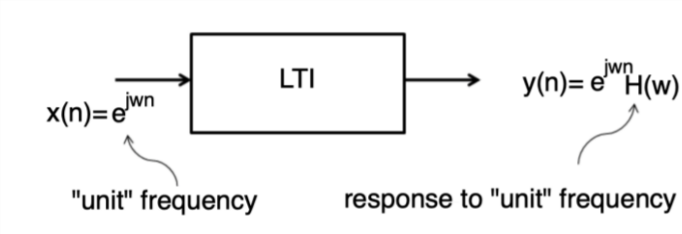
$$|H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}[H(\omega)]^2 + \text{Im}[H(\omega)]^2}$$

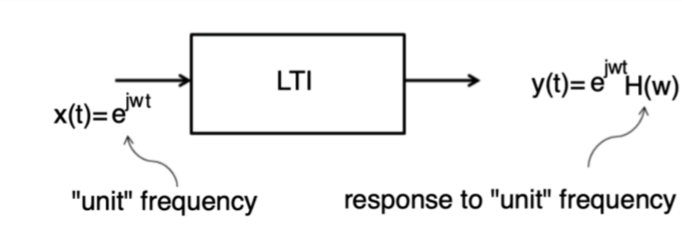
- Đáp ứng pha:

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[H(\omega)]}{\text{Re}[H(\omega)]}$$

- $H(\omega) = |H(\omega)|.e^{j\phi(\omega)}$

Nói chung phân tích được thì phân tích ra các thành phần e^jwt, e^jwn rồi * H(w).





- Đối với tín hiệu vào cơ bản có tần số ω: $e^{j\omega t}, e^{j\omega n}$ $\Rightarrow$tín hiệu ra có thể biểu diễn được dưới dạng:
- $$y(t) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t} = |H(\omega)|e^{j[\omega t + \phi(\omega)]}$$
- $$y(n) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega n} = |H(\omega)|e^{j[\omega n + \phi(\omega)]}$$
- $\Rightarrow$ tín hiệu ra có biên độ bằng $|H(\omega)|$ lần biên độ của tín hiệu vào và pha bị dịch một góc bằng $\phi(\omega)$ so với pha của tín hiệu vào.

- Xác định đáp ứng tần số với tần số ω_i : $H(\omega_i)$
- Tổng hợp:
  - $$y(t) = \sum_i a_i H(\omega_i)e^{j\omega_i t}$$
  - $$y(n) = \sum_i a_i H(\omega_i)e^{j\omega_i n}$$

TÍNH CHẤT NHÂN CHẬP

Đáp ứng tần số:

- Nhân chập trong miền thời gian là phép nhân trong miền tần số:
- Có $y(t) = x(t) * h(t)$
- nên nếu $\exists X(\omega), Y(\omega), H(\omega)$ thì $\rightarrow Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$
- Với thời gian rời rạc: $y(n) = x(n) * h(n)$
- nên nếu $\exists X(\omega), Y(\omega), H(\omega)$ thì $\rightarrow Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$

Nói chung phân tích được thì phân tích ra các thành phần e^jwt, e^jwn rồi * H(w).

VÍ DỤ: →

Cho hệ thống có đáp ứng tần số:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Xác định đáp ứng đầu ra của hệ thống với tín hiệu vào: $x(t) = 3cos(2\pi t) + 6sin(5\pi t)$

Đáp ứng tần số:

- Phân tích-tổng hợp:
- $x(t) = 3cos(2\pi t) + 6sin(5\pi t) = \frac{3}{2}e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi t} - 3je^{j5\pi t} + 3je^{-j5\pi t}$
- $e^{j2\pi t} \xrightarrow{\text{LTI}} H(2\pi)e^{j2\pi t}$, $e^{-j2\pi t} \xrightarrow{\text{LTI}} H(-2\pi)e^{-j2\pi t}$
- $e^{j5\pi t} \xrightarrow{\text{LTI}} H(5\pi)e^{j5\pi t}$, $e^{-j5\pi t} \xrightarrow{\text{LTI}} H(-5\pi)e^{-j5\pi t}$
- $y(t) = \frac{3}{2}H(2\pi)e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}H(-2\pi)e^{-j2\pi t} - 3jH(5\pi)e^{j5\pi t} + 3jH(-5\pi)e^{-j5\pi t}$
- Thay số: $y(t) = \frac{3}{2}H(2\pi)e^{j2\pi t} + \frac{3}{2}H(-2\pi)e^{-j2\pi t} = 3cos(2\pi t)$

Chương 4: Biến đổi Z-Laplace

Miền thời gian LIÊN TỤC

Biến đổi Laplace : $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$

s là 1 số phức

Miền thời gian RỜI RẠC

Biến đổi Z: $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$

z là 1 số phức

$ROC = \{s| \, |X(s)| < \infty\}$

$ROC = \{z| \, |X(z)| < \infty\}$

- $X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$
- $X(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$

Biến đổi Z:

VÍ DỤ VỀ BIẾN ĐỔI Z

Examples 2

- $x(n) = a^n u(n)$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n).z^{-n}$
- $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a.z^{-1})^n$
- Áp dụng công thức tổng luỹ thừa:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, & \text{với } a \neq 1 \\ N+1, & \text{với } a = 1 \end{cases}$$

- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a.z^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} \text{với } az^{-1} \neq 1 \\ \infty \text{ với } az^{-1} = 1 \end{cases}$
- $X(z) < \infty$ khi và chỉ khi $|a.z^{-1}| < 1$ or $|z| > |a|$.
- Khi đó $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$
- Vậy:$x(n) = a^n u(n) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, ROC = |z| > |a|$

$x(n) = a^n u(-n-1) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{-1}{1-az^{-1}}, ROC = |z| < |a|$

- $x(n) = a^n$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n}$
- $|X(z)| < \infty : |z| < |a|$ và $|z| > |a|$
- Hay không tồn tại giá trị nào của z để $|X(z)| < \infty$

- Tuỳ thuộc đề bài cho tín hiệu vào dạng nào mà áp dụng biến đổi thích hợp:
-
  - $x(n) = cos(\omega n)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)$: sử dụng biến đổi Fourier và đáp ứng tần số của hệ thống
  - $x(n) = cos(\omega n)u(n)$ hoặc $x(n) = cos(\omega n)u(-n-1)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)u(n)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)u(-n-1)$: sử dụng biến đổi Z

← NOTE

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z: TUYẾN TÍNH, BẤT BIẾN

TÍNH CHẤT DỊCH THỜI GIAN:

Dịch thời gian:

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $x(n-1) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} z^{-1}X(z)$
- $x(n-n_0) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} z^{-n_0}X(z)$
- ROC'=ROC
- Nhân thêm z^{-1} trong miền Z tương ứng với dịch 1 bước trong miền thời gian
- Nhân thêm z trong miền Z tương ứng với dịch -1 bước trong miền thời gian

PHÉP LẬT →

Phép lật

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $x(-n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z^{-1})$ (Thay z trong công thức X(z) bởi z^{-1})
- ROC': Thay z trong công thức ROC bởi z^{-1}

← ĐẠO HÀM, ROC = ROC'

Đạo hàm trong miền Z

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $nx(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} -z\frac{d(X(z))}{dz}$
- Nhân thêm n trong miền thời gian tương ứng với lấy đạo hàm bậc nhất trong miền Z nhân thêm với (-z)

CO GIÃN: →

Co giãn trong miền Z:

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $a^n x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(a^{-1}z)$ (Thay z trong công thức X(z bởi $a^{-1}z$)
- ROC: $|a|R_{x-} < |z| < a.R_{x+}$ (Thay z trong công thức ROC bằng biến $a^{-1}z$)

Nhân chập:

- $x_1(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_1(z), ROC1,$
- $x_2(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_2(z), ROC2$
- Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_1(z)X_2(z)$
- Nhân chập trong miền thời gian tương ứng với phép nhân trong miền Z
- ROC = ROC1 và ROC2

NHÂN CHẬP

BẢNG BIẾN ĐỔI Z

Sequence	Transform	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 or ∞
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC:

- Ví dụ: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$. Nếu |z|> |a| thì $x(n) = a^n u(n)$: (nhân quả). Ngược lại Nếu |z|< |a| thì $x(n) = -a^n u(-n-1)$(không nhân quả)

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z
- $1 \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Inv Z}} \delta(n)$
- $\frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Inv Z}} \begin{cases} a^n u(n) \text{ nếu ROC: } |z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) \text{ nếu ROC: } |z| < |a| \end{cases}$
- $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Inv Z}} \begin{cases} na^n u(n) \text{ nếu} |z| > |a| \\ -na^n u(-n-1) \text{ nếu } |z| < |a| \end{cases}$
- $z^{-k}F(z) \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} f(n-k)$, F(z) là 1 trong các dạng bên trên, f(n) là tín hiệu tương ứng trong miền thời gian
- VD $\frac{z^{-k}}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Inv Z}} a^{n-k}u(n-k) \text{ nếu} |z| > |a|$

BIẾN ĐỔI LAPLACE:

VÍ DỤ:

Example 1

- $x(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \geq 0 \\ 0, \text{với } t < 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$
- $X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}|_0^{+\infty} = \frac{(e^{(a-s).+\infty}-1)}{a-s}, \text{với } s \neq a \\ \int\limits_0^{+\infty} 1dt = +\infty, \text{ với } s = a \end{cases}$
- X(s) sẽ hữu hạn khi và chỉ khi $s \neq a$ và $e^{(a-s).+\infty} = 0$

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)
- $e^{(a-s).+\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].+\infty}$
- Hay $e^{(a-s).+\infty} = e^{Re(a-s).+\infty}e^{jIm(a-s).+\infty}$
- Do $|e^{-j\Phi}| = 1\forall\Phi$, nên $e^{(a-s).+\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).+\infty} = 0$ hay $Re(a-s) < 0 \Rightarrow Re(s) > Re(a)$
- Khi đó: $X(s) = \frac{1}{s-a}$ và ROC: $Re(s) > Re(a)$

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có: $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$
- Vậy $x(t) = cos(\omega t)u(t)$ thì $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) > 0$
- Tương tự $x(t) = cos(\omega t)u(-t)$ thì $X(s) = \frac{-s}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) < 0$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE: TUYẾN TÍNH, BẤT BIẾN DỊCH THỜI GIAN:

Dịch thời gian:

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $x(t-t_0) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} e^{-st_0}X(s)$
- ROC'=ROC

Dịch trong miền Laplace:

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $e^{s_0t}x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s-s_0)$
- ROC'=ROC với biến $(s-s_0)$

Ứng dụng:

- $cos(\omega t)u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{s}{s^2+\omega^2}, Re(s) > 0$
- $e^{at}.cos(\omega t)u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
- ROC: Re(s-a) > 0 hay Re(s) >Re(a)
- Tương tự: $e^{at}.sin(\omega t)u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$
- ROC: Re(s) >Re(a)

TÍNH CHẤT CO GIÃN:

Co giãn

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $x(at) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$
- ROC' = thay biến s trong ROC bởi $\frac{s}{a}$

ĐẠO HÀM:

Đạo hàm theo thời gian:

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} s.X(s)$
- $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} s^2.X(s)$
- ROC' = ROC

VD Ứng dụng:

- 1 hệ thống LTI xác định bởi phương trình vi phân: $a_0y(t) + a_1\frac{dy(t)}{dt} + .. + a_N\frac{d^Ny(t)}{dt^N} = b_0x(t) + .. + b_M\frac{d^My(t)}{dt^M}$
- Biến đổi Laplace 2 vế và áp dụng tính chất đạo hàm:
- $a_0Y(s) + a_1sY(s) + .. + a_Ns^NY(s) = b_0X(s) + b_1sX(s) + .. + b_Ms^MX(s)$
- $Y(s)[a_0 + a_1s + .. + a_Ns^N] = X(s)[b_0 + b_1s + .. + b_Ms^M]$
- $H(s) = \frac{b_0+b_1s+..+b_Ms^M}{a_0+a_1s+...+a^Ns^N}$: hàm truyền của hệ thống có thể xác định từ các hệ số phương trình vi phân

Đạo hàm theo biến s (trong miền Laplace):

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $-tx(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{d}{ds}X(s)$

Ứng dụng:

- $e^{at}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{s-a}, Re(s) > Re(a)$
- $te^{at}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2}$
- Với ROC: Re(s)>Re(a)
- $t^2e^{at}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-a)^2}\right) = \frac{2}{(s-a)^3}$

Nhân chập:

- $x_1(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_1(s), ROC1$
- $x_2(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_2(s), ROC$
- $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_1(s).X_2(s)$
- ROC' = ROC1 và ROC2

← **NHÂN CHẬP**

TABLE 9.2 LAPLACE TRANSFORMS OF ELEMENTARY FUNCTIONS

Transform pair	Signal	Transform	ROC
1	$\delta(t)$	1	All s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	All s
11	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
12	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$
15	$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	All s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ times}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$

BẢNG LAPLACE

ỨNG DỤNG CỦA BIẾN ĐỔI Z/LAPLACE

Một số ứng dụng:

- Tính tích chập
- Phân tích hệ thống:
  - Xác định các đặc trưng của hệ thống như đáp ứng xung, đáp ứng tần số, hàm truyền..
  - Xác định tính chất của hệ thống
- Xác định tín hiệu ra khi biết tín hiệu vào
- Thiết kế cấu trúc (nối tiếp, song song...) hệ thống
- Giải phương trình vi phân/ sai phân (điều kiện khởi tạo khác 0)

TÍCH CHẬP:

$$x(n) \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Z}} X(z), \quad y(n) \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Z}} Y(z) \quad \Rightarrow \quad X(z)Y(z) \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Inverse Z}} x(n)*y(n)$$

$$x(t) \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Laplace}} X(s), \quad y(t) \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Laplace}} Y(s) \quad \Rightarrow \quad X(s)Y(s) \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Laplace Inverse Z}} x(t)*y(t)$$

Hệ thống LTI đặc trưng bởi một số đại lượng sau:

- Phương trình vi phân/sai phân
- Đáp ứng xung h(t), h(n)
- Đáp ứng tần số: đáp ứng biên độ, đáp ứng pha H(w)
- Hàm truyền H(s), H(z)
- Giản đồ điểm cực-điểm không

Thông qua **Hàm truyền** có thể chuyển đổi qua lại giữa các đại lượng

PHÂN TÍCH HỆ THỐNG: -

Điểm cực điểm không

- Điểm không: $z|H(z) = 0$ hoặc $s|H(s) = 0$ (kí hiệu 0 in figure).
- Điểm cực: $z|H(z) = \infty$ or $s|H(s) = \infty$ (kí hiệu x in figure).

ĐIỂM CỰC, ĐIỂM KHÔNG

Hệ thống LTI cần xét các tính chất sau

Z, LAPLACE CÓ THỂ XÁC ĐỊNH ĐC CÓ NHỚ, K NHỚ, NHÂN QUẢ, ỔN ĐỊNH.

XÁC ĐỊNH NHÂN QUẢ:

Nhân quả

Hệ thống LTI nhân quả khi và chỉ khi:

- Đáp ứng xung **chỉ xác định ở phần dương** của trục thời gian, hay $h(t) = 0 \forall t < 0$, $h(n) = 0 \forall n < 0$ và $\cancel{E_h < \infty}$
- $\Longrightarrow$ đáp ứng xung h(n)= f(n).u(n); h(t)= f(t).u(t)
- Do đó:
  - ROC của H(z) phải có dạng $|z| > a$ không được phép a <|z| <b
  - ROC của H(s) phải có dạng $Re(s) > a$

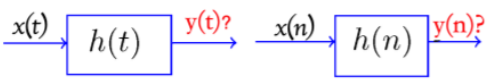
XÁC ĐỊNH ỔN ĐỊNH:

Hệ thống LTI ổn định khi và chỉ khi:

- Đáp ứng xung là tín hiệu năng lượng: $E_h < \infty$ hay $\sum_n |h(n)|^2 < \infty$, $\int_t |h(t)|^2 < \infty$
- Khi hệ thống ổn định $\Longleftrightarrow \exists H(\omega)$
- Do đó: $H(z)|_{z=e^{j\omega}} < \infty$ hay $z = e^{j\omega} \in ROC$ của H(z) $\Longrightarrow$ ROC của H(z) chứa đường tròn đơn vị |z|=1
- Tương tự: $H(s)|_{s=j\omega} < \infty$ hay $s = j\omega \in ROC$ của H(s) $\Longrightarrow$ ROC của H(s) chứa trục tung Re(s)=0

NẾU VỪA NHÂN QUẢ, VỪA ỔN ĐỊNH THÌ CẢ 2 ĐIỀU KIỆN

XÁC ĐỊNH TÍN HIỆU RA KHI BIẾT TÍN HIỆU VÀO



Tuỳ thuộc vào x(t), x(n) và thông tin hệ thống =>lựa chọn cách giải thích hợp:

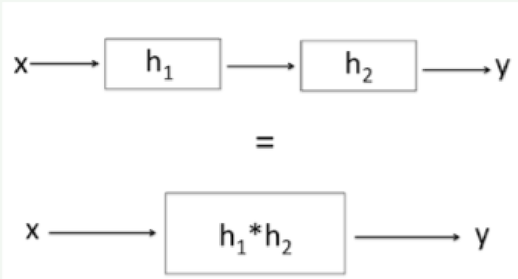
- Nếu hệ thống cho dạng pt vi phân /sai phân có điều kiện đầu khác không => giải phương trình vi phân /sai phân xem chương 2
- $x(n) = \sum_k a_k \delta(n-k)$, tín hiệu ra $y(n) = \sum_k a_k h(n-k)$
- Tín hiệu vào có thể tính biến đổi Z/Laplace => sử dụng hàm truyền x(n)==> X(z) hệ thống => H(z) => Y(z) = H(z)X(z)==> bd ngược => y(n)
- Tín hiệu vào không có biến đổi Z:
  - Nếu có thể biểu diễn thành $\sum_i a_i e^{j\omega_i t}$ hay $\sum_i a_i e^{j\omega_i n}$, và hệ thống ổn định=> sử dụng $H(\omega)$
  - Nếu không, sử dụng tích chập trong miền thời gian

SƠ ĐỒ LIÊN HỆ, TƯƠNG TỰ VỚI LAPLACE

THIẾT KẾ HỆ THỐNG:

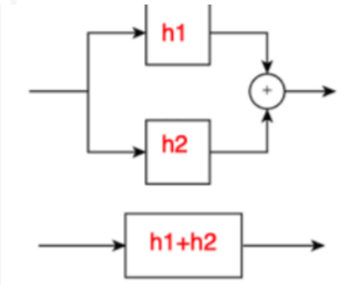
- Có 3 cách ghép nối cơ bản là: ghép nối tiếp, ghép song song và ghép phản hồi

NỐI TIẾP



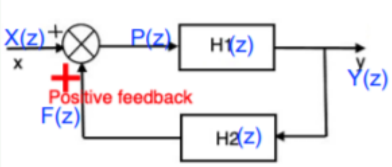
- Thời gian:
  $h_{total}(n) = h_1(n) * h_2(n)$
  $h_{total}(t) = h_1(t) * h_2(t)$
- Hàm truyền:
  $H_{total}(z) = H_1(z)H_2(z)$
  $H_{total}(s) = H_1(s)H_2(s)$

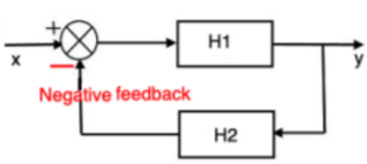
SONG SONG



- Thời gian:
  $h_{total}(n) = h_1(n) + h_2(n)$
  $h_{total}(t) = h_1(t) + h_2(t)$
- Hàm truyền:
  $H_{total}(z) = H_1(z) + H_2(z)$
  $H_{total}(s) = H_1(s) + H_2(s)$

PHẢN HỒI DƯƠNG, PHẢN HỒI ÂM





- Ghép nối phản hồi âm:
  $H_{total}(z) = \frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}$; $H_{total}(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$
- Ghép nối phản hồi dương:
  $H_{total}(z) = \frac{H_1(z)}{1-H_1(z)H_2(z)}$; $H_{total}(s) = \frac{H_1(s)}{1-H_1(s)H_2(s)}$

Table 4.1

A Short Table of Fourier Transforms

	$f(t)$	$F(\omega)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$	$a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\dfrac{1}{a-j\omega}$	$a > 0$
3	$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\dfrac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	
10	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	
12	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j\omega}$	
13	$\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
14	$\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
15	$e^{-at}\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
16	$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a > 0$
17	$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
18	$\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wt)$	$\operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
20	$\frac{W}{2\pi}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
21	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\displaystyle\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$	$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$
22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	

1. Công thức cơ bản:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

2. Công thức cộng:

$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$

$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$

$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$

3. Công thức nhân đôi:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

Hệ quả: *(Công thức hạ bậc hai)*

$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

4. Công thức nhân ba:

- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

Hệ quả: *(Công thức hạ bậc ba)*

- $\sin^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$
- $\cos^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$

$\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$

7. Công thức bổ xung:

- $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha \mp \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha\right)$

- $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$

- $1 + \sin 2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2$
- $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$
- $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$
- $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

$= \dfrac{1}{4}\cos 4\alpha + \dfrac{3}{4}$

- $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$

$= 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

$= \dfrac{3}{8}\cos 4\alpha + \dfrac{5}{8}$

8. Công thức biểu diễn theo $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$.

- $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$