Kiểm tra Giữa kỳ - Học kỳ I - Năm học 2022 - 2023

Môn: Xác suất thống kê Ứng dụng - Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1.5đ). Giả sử các biến cố A, B thoả mãn: P(A) = 1/2, P(B) = 1/3, P(AB) = 1/6. Tính:

a.
$$P(\overline{A} + \overline{B})$$

b.
$$P(A+\overline{B})$$

c.
$$P(A\overline{B}|\overline{B})$$

Giải: a.
$$P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 5/6$$
.

b.
$$P(A + \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - P(B) + P(AB) = P(\overline{B}) + P(AB) = 5/6$$
.

c.
$$P(A\overline{B}|\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\overline{B})} = \frac{1}{2}$$
.

Câu 2 (1.0đ). Cho hệ biến cố đầy đủ $\{A, B, C\}$ và D là biến cố bất kỳ.

Biết
$$P(D|A) = 0.35, P(D|B) = 0.25, P(D|C) = 0.45, P(AD) = 0.07, P(B) = 7 \cdot P(C)$$
.

a. Tính
$$P(D)$$

b. Tính
$$P(A+B+BC|\bar{D})$$

Giải: a. Ta có:
$$P(A) = \frac{P(AD)}{P(D|A)} = \frac{0.07}{0.35} = 0.2$$
.

Do đó:
$$\begin{cases} P(B) + P(C) = 0.8 \\ P(B) = 7 \cdot P(C) \end{cases} \rightarrow P(B) = 0.7, P(C) = 0.1.$$
 Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 0.29.$$

b.
$$P(A+B+BC|\bar{D}) = P(A|\bar{D}) + P(B|\bar{D}) = \frac{P(A\bar{D}) + P(B\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}) + P(B\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}) + P(B\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}) + P(B\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}) + P(\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D$$

$$= \frac{P(A) - P(AD) + P(B) - P(BD)}{1 - P(D)} = \frac{P(A) - P(AD) + P(B) - P(B) \cdot P(D|B)}{1 - P(D)} = 0.92254.$$

Câu 3 (1.0đ). Hai thùng hàng chứa bóng đèn, mỗi thùng chứa bóng loại I và II. Thùng thứ nhất chứa 40 bóng đèn, tỷ lệ bóng đèn loại II chiếm 20%. Thùng thứ hai chứa 60 bóng đèn, tỷ lệ bóng đèn loại II chiếm 30%. Lấy tất cả các bóng đèn từ hai thùng và cho vào thùng thứ ba. Từ thùng thứ ba lấy ngẫu nhiên 2 bóng đèn. Tính xác suất để 2 bóng đèn này là bóng loại I.

Giải: A: lấy được 2 bóng loại I từ thùng thứ ba.

Thùng thứ nhất có 32 bóng loại I, 8 bóng loại II.

Thùng thứ hai có 42 bóng loại I, 18 bóng loại II.

Do đó, thùng thứ 3 có 74 bóng đèn loại I và 26 bóng đèn loại II. Vậy xác suất lấy được 2 bóng đèn

loại I từ thùng thứ 3:
$$P(A) = \frac{C_{74}^2}{C_{100}^2} = \frac{2701}{4950} = 0.54566$$
.

Cách khác: Gọi $T_i = \text{lấy được i bóng đèn của thùng thứ nhất từ thùng thứ ba, } i = 0,1,2$.

Ta có:
$$P(T_0) = \frac{C_{60}^2}{C_{100}^2}, P(T_1) = \frac{40.60}{C_{100}^2}, P(T_2) = \frac{C_{40}^2}{C_{100}^2}.$$

$$P(A|T_0) = \frac{C_{42}^2}{C_{60}^2}, P(A|T_1) = \frac{32 \cdot 42}{40 \cdot 60}, P(A|T_2) = \frac{C_{32}^2}{C_{40}^2}.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ:
$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(T_i) P(A|T_i) = \frac{C_{42}^2}{C_{100}^2} + \frac{32 \cdot 42}{C_{100}^2} + \frac{C_{32}^2}{C_{100}^2} = \frac{2701}{4950} = 0.54566$$
.

Câu 4 (1.5đ). Cho ĐLNN liên tục X có hàm phân bố xác suất:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ a \cdot x \cdot (1+x) & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$

- a. Tìm hàm mất đô xác suất của ĐLNN X
- b. Tính P(-1 < X < 0.5).
- c. Xét ĐLNN $Y = 3X^2 + 2X 2$. Tính EY.

Giải: a.
$$F(x)$$
 liên tục tại $x = 0, x = 1$. Do đó: $2a = 1 \rightarrow a = 1/2 \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0.5 + x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{trai lai} \end{cases}$

b.
$$P(-1 < X < 0.5) = P(0 < X < 0.5) = F(0.5) - F(0) = 0.375$$
.

c.
$$EY = \int_{0}^{1} (3x^2 + 2x - 2) \cdot (0.5 + x) dx = \frac{5}{12} = 0.41667$$
.

Câu 5 (1.0đ). Gọi X là ĐLNN chỉ số vụ tai nạn xảy ra trên một đoạn đường trong một ngày, X có phân bố Poisson. Biết rằng xác suất có 2 vụ tai nạn xảy ra gấp 3 lần xác suất có 4 vụ tai nạn xảy ra trên đoạn đường đó trong một ngày. Tính xác suất có ít nhất 5 vụ tai nạn xảy ra trên đoạn đường đó trong hai ngày.

Giải: Ta có:
$$P(X=2) = 3 \cdot P(X=4) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} = 3 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} \rightarrow \lambda = 2$$
. Do đó, trong hai ngày trung bình

sẽ có 4 vụ tai nạn xảy ra.

$$P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) \rightarrow 1 - e^{-4} \sum_{k=0}^{4} \frac{4^k}{k!} = 0.37116.$$

Câu 6 (1.5đ). Theo khảo sát ở một thành phố ta thấy tỷ lệ người xem chương trình thể thao là 20%, tỷ lệ người xem chương trình ca nhạc là 30%, trong số người xem thể thao thì tỷ lệ xem ca nhạc chiếm 80%. Cần điều tra tối thiểu bao nhiều người để có ít nhất 1 người "xem ca nhạc và không xem thể thao" với xác suất lớn hơn 90%.

Giải: A: xem chương trình thể thao, B: xem chương trình ca nhạc.

Ta có: P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(B|A) = 0.8.

$$\rightarrow P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) \cdot P(B|A) = 0.14.$$

Số người "xem ca nhạc và không xem thể thao" là ĐLNN $X \sim B(n, 0.14)$.

Do đó:
$$P(X \ge 1) \ge 0.9 \longleftrightarrow 1 - P(X = 0) \ge 0.9 \longleftrightarrow (1 - 0.14)^n \le 0.1 \longleftrightarrow n \ge 15.26681$$
.

Vậy cần điều tra tối thiểu 16 người.

Câu 7 (1.5đ). Thời gian đi từ nhà đến trường của một sinh viên là ĐLNN có phân bố chuẩn. Biết rằng khả năng sinh viên đó đến trường mất hơn 25 phút là 0.65 và khả năng mất hơn 35 phút là 0.1.

- a. Tính thời gian trung bình, phương sai của thời gian sinh viên đó đến trường.
- b. Nếu sinh viên đó xuất phát từ nhà trước giờ vào học 30 phút thì xác suất để sinh viên đó đến muộn là bao nhiêu?
- c. Sinh viên đó cần xuất phát trước giờ vào học bao nhiều phút để khả năng đi học muộn nhỏ hơn 0.03.

Giải: a. X: thời gian sinh viên đi từ nhà đến trường.

$$P(X > 25) = 0.65 \leftrightarrow 0.5 - \Phi_0 \left(\frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0.65 \leftrightarrow \Phi_0 \left(\frac{\mu - 25}{\sigma}\right) = 0.15 \leftrightarrow \frac{\mu - 25}{\sigma} = 0.38 \quad (1)$$

$$P(X > 35) = 0.1 \leftrightarrow 0.5 - \Phi_0 \left(\frac{35 - \mu}{\sigma}\right) = 0.1 \leftrightarrow \Phi_0 \left(\frac{35 - \mu}{\sigma}\right) = 0.4 \leftrightarrow \frac{35 - \mu}{\sigma} = 1.28 \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra $\mu = 27.28916$, $\sigma = 6.0241$.

b.
$$P(X > 30) = 0.5 - \Phi_0 \left(\frac{30 - 27.28916}{6.0241} \right) = 0.5 - \Phi_0 \left(0.45 \right) = 0.3264$$
.

c. Gọi t là thời gian sinh viên xuất phát trước giờ vào học.

$$P(X > t) < 0.03 \leftrightarrow 0.5 - \Phi_0 \left(\frac{t - 27.28916}{6.0241}\right) < 0.03 \leftrightarrow \Phi_0 \left(\frac{t - 27.28916}{6.0241}\right) > 0.47 = \Phi_0 \left(1.88\right).$$

$$\rightarrow \frac{t - 27.28916}{6.0241} > 1.88 \rightarrow t > 38.61447.$$

Câu 8 (1.0đ). Số lối trên một trang sách là ĐLNN có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4
P	0.15	0.25	a	0.2	0.17

Giả sử số lỗi trên các trang sách độc lập với nhau. Tính xác suất để trung bình có hơn 2 lỗi trên 100 trang sách.

Giải: X_i : số lỗi trên trang sách thứ i, từ bảng phân bố xác suất ta có: a = 0.23.

$$\rightarrow EX_i = 1.99, DX_i = 1.7299.$$

Số lỗi trung bình trên 100 trang sách là ĐLNN $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ có phân bố chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ với

$$\mu = E\overline{X} = 1.99$$
, $\sigma^2 = D\overline{X} = 1.7299/100$.

Do đó:
$$P(\overline{X} > 2) = 0.5 - \Phi_0 \left(\frac{2 - 1.99}{\sqrt{1.7299/100}} \right) = 0.5 - \Phi_0 (0.07603) = 0.4681.$$

Cho biết: $\Phi_0(0.07603) \approx 0.0319$, $\Phi_0(0.38) \approx 0.15$, $\Phi_0(0.45) \approx 0.1736$, $\Phi_0(1.28) \approx 0.4$.

$$\Phi_0(1.88) \approx 0.47$$
 . Trong đó: $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$.

------ Hết ------

Chú ý: Sinh viên không được sử dụng tài liệu.