ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Trường Đại học Công nghệ

ĐỀ THI CUỐI HỌC KỲ 2, 2019-2020

MÔN: TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Thời gian: 90 phút

Ghi chú: Sinh viên không được sử dụng tài liệu

---

1. Cho 1 hệ thống tuyến tính, bất biến, liên tục, ổn định có đáp ứng tần số:

$$H(\omega) = \frac{2j\omega}{-2\omega^2 + 3j\omega + 1}$$

   (a) Xác định đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống.

   (b) Xác định hàm truyền H(s) và đáp ứng xung h(t) của hệ thống

   (c) Viết phương trình vi phân biểu diễn hệ thống trên

   (d) Xác định tín hiệu ra trong mỗi trường hợp sau:

      (i) Tín hiệu vào có dạng: $x(t) = cos(t/2)u(t)$

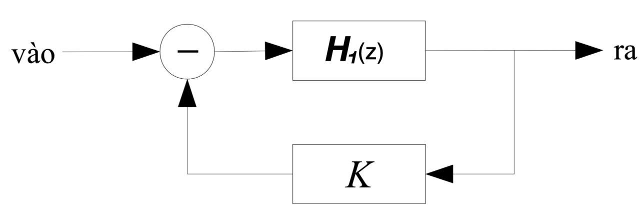
      (ii) Tín hiệu vào có dạng: $x(t) = cos(t/2)$.

2. Cho hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả rời rạc H_1 được biểu diễn dạng phương trình sai phân:

$$2y(n) + 3y(n-1) + y(n-2) = x(n-1)$$

   (a) Xác định đáp ứng tự nhiên của hệ thống khi chưa có tín hiệu vào, với điều kiện đầu y(-1) = 1, y(-2)=2

   (b) Xác định hàm truyền $H_1(z)$ của hệ thống. Hệ thống trên có ổn định không? Thiết lập một hệ thống có phản hồi từ hệ thống H_1 theo sơ đồ dưới đây (Hình 1), trong đó K là hằng số thực.



Hình 1: Hệ thống có phản hồi

   (c) Xác định hàm truyền của hệ thống có phản hồi trên

   (d) Với $K = 4\sqrt{3} - 3$ xác định tín hiệu ra khi tín hiệu vào có dạng $x(n) = (1/3)^n u(n)$

   (e) Xác định K để hệ thống có phản hồi trên nhân quả và ổn định.

Đáp án SS - 2019 - 2020.

No.

Date.

1a, $H(\omega) = \dfrac{2j\omega}{-2\omega^2 + 3j\omega + 1} = \dfrac{2j\omega}{(1-2\omega^2) + 3j\omega}$.

$$= \frac{2j\omega\,[(1-2\omega^2) - 3j\omega]}{(1-2\omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

$$= \underbrace{\frac{6\omega^2}{(1-2\omega^2)^2 + 9\omega^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{2\omega(1-2\omega^2)}{(1-2\omega^2)^2 + 9\omega^2}}_{Im}.$$

$\Rightarrow |H(\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \ldots$

$\measuredangle H(\omega) = \text{arctg}\,\dfrac{Im}{Re} = \text{arctg}\,\dfrac{2\omega(1-2\omega^2)}{6\omega^2}$.

b, Hệ thống ổn định nên $H(\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

hay $H(s) = H(\omega)\Big|_{\omega = s/j}$.

mà $H(\omega) = \dfrac{2j\omega}{-2\omega^2 + 3j\omega + 1} = \dfrac{2j\omega}{2(j\omega)^2 + 3j\omega + 1}$

nên $H(s) = \dfrac{2s}{2s^2 + 3s + 1} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s + \frac{1}{2}}$.

$A = H(s).(s+1)\Big|_{s=-1} = \dfrac{2s}{2s+1}\Big|_{s=-1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

$B = H(s)\,(s+1/2)\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = \dfrac{s}{s+1}\Big|_{s=-1/2} = \dfrac{-1/2}{1/2} = -1$

Vậy $H(s) = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+1/2}$.

No.

Date.

hệ thống ổn định nên H(s) có ROC: $Re(s) > -1/2$

do đó $h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-1/2 t}u(t)$

c) Xác định pt vi phân.

$$H(s) = \frac{2s}{2s^2 + 3s + 1} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

nên $2s.X(s) = 2s^2 Y(s) + 3s\,Y(s) + Y(s)$

hay $2x'(t) = 2y''(t) + 3y'(t) + y(t)$.

d) xác định tín hiệu ra khi biết tín hiệu vào?

i) $x(t) = \cos\frac{t}{2}\,u(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right)u(t)$

Áp dụng công thức biến đổi laplace.

$$\cos(\omega_0 t)\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

với. $Re(s) > 0$

Ta có: $x(t) = \cos\frac{1}{2}t\;u(t)$

thì $X(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}}$, $Re(s) > 0$.

do đó $Y(s) = X(s).H(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{2s}{(s+1)(2s+1)}$

với $Re(s) > 0$.

phân tích.

$$Y(s) = \frac{A\,s}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{B.\,1/2}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s + 1/2}.$$

trong đó.

$$C = Y(s).(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s^2}{(s^2+\frac{1}{4})(s+1/2)}\Big|_{s=-1} = \frac{-8}{5}.$$

$$D = Y(s).(s+\tfrac{1}{2})\Big|_{s=-1/2} = \frac{s^2}{(s^2+\frac{1}{4})(s+1)}\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = 1$$

Đồng nhất hệ số với A, B. hoặc thay 1 vài giá trị s cụ thể

vd tại s=0: 0 =Y(s)=2B+C+2D =>B=…;

tại s=1:4/15 =Y(s) =4/5 A +2/5 B+1/2 C+2/3 D=>A=…

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$$

[Có thể để nguyên hệ số A, B, C, D]

$-0{,}25$ đ)

$$\Rightarrow y(t) = \left[A.\cos\frac{1}{2}t + B.\sin\frac{t}{2} + C.e^{-t} + D.e^{-t/2}\right] u(t)$$

với A, B, C, D xđ ở trên.

ii, $x(t) = \cos t/2.$

Theo Euler: $\cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$

nên $x(t) = \frac{1}{2}.e^{jt/2} + \frac{1}{2}e^{-jt/2}.$

Hệ thống ổn định, có đáp ứng tần số $H(\omega)$ nên

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow e^{j\omega_0 t}.H(\omega_0)$$

do đó $\quad e^{jt/2} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow e^{jt/2} \cdot H(1/2)$

$\quad e^{-jt/2} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow e^{-jt/2}\, H(-1/2)$

vậy $x(t) = \frac{1}{2} e^{jt/2} + \frac{1}{2} e^{-jt/2}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{H(\omega)}$$

$$\downarrow$$

thu được $y(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{jt/2} H(1/2) + \frac{1}{2} e^{-jt/2} H(-1/2).$

mà $H(\omega) = \dfrac{2j\omega}{-2\omega^2 + 3j\omega + 1}$.

nên $H(1/2) = \dfrac{2j\, 1/2}{-2.(1/4) + 3j\frac{1}{2} + 1} = \dfrac{j}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j}$

$= \dfrac{2j}{1 + 3j}$

$H(-1/2) = \dfrac{2j\,(-1/2)}{-2.\frac{1}{4} - 3j\frac{1}{2} + 1} = \dfrac{-j}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j}$

$= \dfrac{2j}{3j - 1}.$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2j}{1+3j} \cdot e^{jt/2} + \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2j}{3j-1} \cdot e^{-jt/2}$

$= \dfrac{j}{1+3j} e^{jt/2} + \dfrac{j}{3j-1} e^{-jt/2}$

No.

Date.

Câu 2:

a, $2y(n) + 3y(n-1) + y(n-2) = x(n-1)$.

Đáp ứng tự nhiên là đáp ứng của hệ thống khi không có tín hiệu vào.

hay $2y(n) + 3y(n-1) + y(n-2) = 0$ (1)

(1) có nghiệm dạng $y(n) = \lambda^n$ nên

$$2\lambda^n + 3\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1/2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y^N(n) = c_1.(-1)^n + c_2.\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Đáp ứng tự nhiên thoả mãn điều kiện đầu, nên

$$\begin{cases} y^N(-1) = 1 = c_1(-1)^{-1} + c_2.\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ y^N(-2) = 2 = c_1.(-1)^{-2} + c_2.\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases}$$

hay $\begin{cases} -c_1 - 2c_2 = 1 \\ c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -4. \\ c_2 = 3/2 \end{cases}$

Vậy đáp ứng tự nhiên

$$y^N(n) = -4(-1)^n + \frac{3}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

No.

Date.

b) $2y(n) + 3y(n-1) + y(n-2) = x(n-1)$

Biến đổi Z 2 vế ta có

$$2Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z)$$

hay $(2 + 3z^{-1} + z^{-2})\,Y(z) = z^{-1}X(z)$

$\Rightarrow$ hàm truyền $H_1(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{z^{-1}}{(2 + 3z^{-1} + z^{-2})}$

* hệ thống H_1 nhân quả, nên hàm truyền $H_1(z)$ phải có miền hội tụ

ROC_1 : $|z| > 1$.

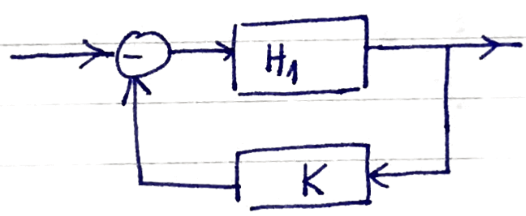
ROC_1 không chứa đường tròn đơn vị nên ht $H_1(z)$ K° ổn định.

Câu 2:

$H_1(z)$ có 2 điểm cực $z_p = -1$ và $z_p = -1/2$.

điểm cực $z_p = -1$ nằm trên đường tròn đơn vị nên hệ thống nhân quả $H_1(z)$ không ổn định.

c, Hệ thống phản hồi âm



có hàm truyền là,

$$H_{total}(z) = \frac{H_1(z)}{1 + K.H_1(z)}$$

hay $$H_{total}(z) = \frac{\dfrac{z^{-1}}{(2 + 3z^{-1} + z^{-2})}}{1 + \dfrac{Kz^{-1}}{(2 + 3z^{-1} + z^{-2})}}$$

$$H_{total}(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-2} + (3+K)z^{-1} + 2}.$$

d) $K = 4\sqrt{3} - 3$

$$\Rightarrow H_{total}(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-2} + 4\sqrt{3}z^{-1} + 2}.$$

$x(n) = (1/3)^n u(n)$

nên $X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$, $|z| > \dfrac{1}{3}$.

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z^{-1}}{(z^{-2} + 4\sqrt{3}z^{-1} + 2)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z| > \dfrac{1}{3}$.

$$= \frac{A}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{C}{1 - a_2 z^{-1}}$$

trong đó a_1, a_2 là nghiệm của ptrình

$$z^{-2} + 4\sqrt{3}z^{-1} + 2 = 0. \quad (2)$$

giải ptrình (2) : $\begin{cases} a_1 = -0,14 \\ a_2 = \dots -6,73 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} y(n) = A\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + B.a_1^n u(n) + C.a_2^n u(n) \\ \quad \text{với } |z| > |a_2|. \\ y(n) = A\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + B.a_1^n u(n) - C.a_2^n u(-n-1) \\ \quad \text{với } \frac{1}{3} < |z| < |a_2| \end{array} \right.$

c) Xác định K để hệ thống ổn định và nhân quả

$$H_{total}(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-2} + (3+K)z^{-1} + 2}.$$

để hệ thống vừa ổn định vừa nhân quả thì các điểm cực của $H_{total}(z)$ đều phải nằm trong đường tròn đơn vị : $|z_{p_{1,2}}| < 1$.

xét mẫu số. $z^{-2} + (3+K)z^{-1} + 2 = 0$

hay $2z^2 + (3+K)z + 1 = 0$ (*)

$\Delta = (3+K)^2 - 8 = K^2 + 6K + 1.$

* Nếu $\Delta \geq 0$ (*) có 2 nghiệm là:

$$z_{p_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3+K) \pm \sqrt{K^2+6K+1}}{4}.$$

Áp dụng đk ổn định, nhân quả.

$$|z_{p_{1,2}}| = \left| \frac{-(3+K) \pm \sqrt{K^2+6K+1}}{4} \right| < 1.$$

hay $|-(3+K) \pm \sqrt{K^2+6K+1}| < 4.$

hay $-4 < -(3+K) \pm \sqrt{K^2+6K+1} < 4.$

$-1+K < \pm\sqrt{K^2+6K+1} < 7+K.$

No.

Date

Tóm lại:

$$\begin{cases} k^2+6k+1 \geq 0 \\ \sqrt{k^2+6k+1} > k-1 \\ \sqrt{k^2+6k+1} < 1-k \\ \sqrt{k^2+6k+1} < 7+k \\ \sqrt{k^2+6k+1} > -(7+k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2+6k+1 \geq 0 \\ k^2+6k+1 < k^2-2k+1 \\ k < 1 \\ k > -7 \\ k^2+6k+1 < k^2+14k+49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2+6k+1 \geq 0 \\ 8k < 0 \\ k < 1 \\ k > -7 \\ 8k > -48 \end{cases} \Rightarrow -3+2\sqrt{2} \leq k < 0.$$

(*) Nếu $\Delta = k^2+6k+1 < 0$ pt có nghiệm phức.

$$z_{p1,2} = \frac{-b}{2a} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

(a, b là hệ số pt bậc 2)

phần thực $\qquad$ phần ảo.

$$|z_{p1,2}| = \sqrt{\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{(2a)^2}} = \frac{\sqrt{+b^2-\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{(3+k)^2 - k^2-6k-1}}{2.2} = \frac{\sqrt{8}}{2.2} = 0.7..$$

các đ' cực nằm trong đg tròn đvị. $\Rightarrow$ t/mãn.

$\Longrightarrow$ đk: $k^2+6k+1 < 0 \Leftrightarrow -3-2\sqrt{2} < k < -3+2\sqrt{2}$

KLuận. $-3-2\sqrt{2} < k < 0$