

חקב"צ 1 – עבודת בית מס' 2

סוגייה 1

נתונה בעיית האופטימיזציה הבאה במשתנים x, y, z, w וקבועים $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ -\sqrt{|y|} + |x + z| + (w^2 + 1) \cdot \max\{x, -z\} \right\} \\ \text{s.t.} & \\ & x^2 + \alpha^2 y \geq 0 \\ & z^4 \leq 1 \\ & |x - z| \leq \beta \\ & y \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

באמצעות הוספה והחלפה של משתנים, נסחו בעיית תכנות לינארי שפתרונה שקול לזו. (רמז: האם ישנם משתנים שניתן לקבוע מראש מה יהיה ערכם בפתרון האופטימלי?)

סוגייה 2:

נתונה מפה ובה $n > 1$ מדינות. ישנם $n > 1$ צבעים שונים אפשריים (נציין אותם בתור מספרים טבעיים $1, \dots, n$), ומעוניינים לבחור את המספר המינימלי של צבעים שונים שצריך על מנת לצבוע את המפה, כך שכל שתי מדינות בעלות גבול משותף תיזבענה בצבעים שונים.

- נסח את הבעיה כבעיית תכנות לינארי בשלמים. (רמז: הגדר משתנים y_1, \dots, y_n כאשר y_i הוא האינדקס של שימוש בצבע i . בנוסף, הגדר משתני עזר x_{vi} אינדקסורים של "מדינה v צבועה בצבע i , שימו לב שרשימת המדינות בעלות גבול משותף נתונה)
- האם הפתרון האופטימלי בבעיה שניסחתם הוא בהכרח היחיד, בהכרח לא יחיד, או שהתשובה תלויה במבנה של המפה? נמק.
- חזור על סעיפים א' ו-ב' כאשר השימוש בצבע i לכל סמ"ר עולה c_i , העלויות הן שונות בין כל שני צבעים, השטח בסמ"ר של מדינה v ע"ג המפה נתון ע"י s_v והמטרה היא לצבוע את המפה בעלות צביעה מינימלית.

סוגייה 3

נתונות 61 נקודות במישור (x_i, y_i) $i = 1, \dots, 61$. ראשית התאימו פולינום $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ בעזרת שיטת הריבועים הפחותים, ע"י שימוש בפונקציית קיימת, ובדקו את התאמה של הפולינום בעזרת הצגה על גבי גרף. (ע"י שימוש בקוד הבא)

```
import pandas as pd
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
try:
    import cvxpy as cp
except ImportError:
    !pip install cvxpy
import cvxpy as cp

# read points
url = 'https://www.dropbox.com/s/wosxk8qsa8w5e2f/dots.txt?dl=1'
df = pd.read_csv(url, sep=' ')
```

```

x = df['u']
y = df['v']
# polynomial fit
z = np.polyfit(x, y, 3)
p = np.poly1d(z)
# evaluate fit
t = np.arange(-3, 3, 0.1)
y_est_least_squares = p(t)
# plot dots with polyfit
plt.plot(t, y_est_least_squares, 'r--')
plt.plot(x, y, 'b*', markersize=5)

```

המטרה למצוא קו מהצורה $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ המתאר טוב ככל האפשר את הנקודות הללו – כלומר, למצוא את המשתנים a, b, c, d כך שערך פונ' המטרה המוגדרת בכל סעיף יהיה אופטימלי. כתבו **בעיית תכנות ליניארי** מתאימה, כתבו קוד CVXPY הפותר את הבעיה שניסחתם, הציגו את הפלט ואת הפתרון וציירו את הפתרון המתקבל לעומת הנק' הנתונות ולעומת פתרון בשיטת הריבועים הפחותים, באמצעות פונקציית `plt.plot`:

פונק' המטרה היא סה"כ המרחקים של הנק' (x_i, y_i) מהנק' על העקום $(x_i, ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d)$:

$$\min \sum_{i=1}^{61} |ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i|.$$

סוגייה 4

חברת בנייה גדולה עומדת בפני תחילתו של פרויקט גדול שיימשך 24 חודשים. בחודש t יש לחברה צורך בלפחות d_t עובדים עבור $t = 1, \dots, 24$. לפני תחילת הפרויקט, לחברה אין עובדים. כל עובד המתקבל לחברה חייב בקורס בטיחות קצר לפני שיתחיל לעבוד. עלות הקורס לחברה הוא 300 ש"ח (ללא קשר למספר המשתתפים) ועוד 50 ש"ח על כל עובד המשתתף בקורס (למשל, אם בחודש מסוים נפתח הקורס ובו 3 משתתפים, אז עלותו לחברה תהיה 450 ש"ח). פיטורי עובדים הם ללא עלות ועובדים שפוטרו לא יגויסו מחדש. בהינתן שמשכורת חודשית של עובד היא 100 ₪

א. נסחו כבעיית תכנות בשלמים את בעיית שכירת העובדים במינימום עלות (קורסים ומשכורות) תחת עמידה באילוצים המתוארים לעיל.

ב. נתון הווקטור d עבור ששת החודשים הראשונים לעבודה.

$$d = (110, 112, 200, 193, 195, 188)$$

פתרו את הבעיה בעזרת CVXPY, צרפו את הקוד ואת המידע לגבי גיוס/פיטור העובדים.