

基于传热学的最优炉温曲线

摘 要

在集成电路板等电子产品生产过程中，让回焊炉的各部分保持工艺要求的温度，对产品质量至关重要。本文基于电路板焊接的机理，从传热学角度研究分析，建立一维热传递的微分方程模型、单目标与双目标规划模型等，得出符合制程界限的最优炉温曲线及其对应方案。

针对问题一，首先从热传导与热对流的角度，建立一维热传递微分方程模型，并给出了其初始条件和第三类边界条件。接着，利用隐式有限差分法将其转化为差分方程，便于求解原微分方程的数值解。然后，结合最小二乘法的思想，使用遍历法得到焊接区域中心的温度数值与炉温曲线。结果表明，焊接区域中心位于小温区 3 中点处温度为 136.16°C 、小温区 6 中点处温度为 168.79°C ，小温区 7 中点处温度为 184.19°C ，小温区 8 结束处温度为 217.15°C 。最后对算法进行精度检验，并对拟合曲线进行误差分析，并从物理角度总结误差原因。

针对问题二，为探究允许的最大传送带过炉速度，以传送带过炉速度最大为目标，以制程界限与速度限制为约束条件，建立单目标规划模型并采用多重循环遍历法进行求解，之后结合二分算法验证答案的正确性。结果表明，传送带过炉速度最高可达 $71.781\text{cm}/\text{min}$ ，此时炉温曲线的指标均在制程界限内。对于此模型，还对传送带过炉速度进行了灵敏度分析，发现其对炉温曲线的影响较为灵敏。

针对问题三，为探究车间的最优炉温曲线，将问题二中的单目标规划模型作为基础，以超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小为目标，以制程界限、温度及速度限制为约束条件，建立单目标优化模型。考虑到变量的个数较多，采用粒子群算法进行求解，结果表明，当小温区 1—5 为 178.84°C ，小温区 6 为 198.02°C ，小温区 7 为 225.52°C ，小温区 8—9 为 264.99°C ，小温区 10—11 为 25°C ，传送带过炉速度为 $83\text{cm}/\text{min}$ 时，此时阴影部分面积最小，值为 $406.16^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$ 。针对上述模型，对各温区温度进行灵敏度分析，发现该模型稳定性较强。

针对问题四，首先在第三问的基础上考虑最优炉温曲线的局部对称性，因此引入偏度系数衡量以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线的对称性。其次，以超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小与偏度系数最小为双目标，以制程界限、温度及速度限制为约束条件，建立双目标优化模型。接着，鉴于阴影部分面积的影响程度较低，将其改进为约束条件，使用分层法将双目标转化单目标优化模型。并利用循环遍历算法进行求解，结果表明当小温区 1—5 为 174.7°C ，小温区 6 为 185.5°C ，小温区 7 为 230.3°C ，小温区 8—9 为 264.3°C ，小温区 10—11 为 25°C ，传送带过炉速度为 $88\text{cm}/\text{min}$ 时，此时阴影部分面积为 $412.2^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$ ，偏度系数为 1.31 ，即可认为是最优炉温曲线。最后，利用单因素分析法针对阴影部分面积与偏度系数进行灵敏度分析，发现二者关于小温区 8—9 的温度最为灵敏。

最后，针对上述模型分析其优缺点，并提出一定的改进与推广意见。

关键词：炉温曲线 一维热传递 有限差分法 粒子群算法 偏度系数

一、问题重述

1.1 问题背景

回焊炉是进行电子元件与集成电路板焊接的机械设备。一般的，回焊炉在功能上分为 4 个区域：预热区、恒温区、回流区、冷却区。每个功能区由若干小温区组成，各温区通过喷出热空气，重新融化焊料，实现对电子元件的焊接。在实际生产过程中，可以调节各温区的设定温度和传送带的过炉速度来保证焊接质量。

焊接区域中心的温度变化曲线称为炉温曲线，它受到各温区的温度，以及过炉速度等因素的影响。因此，研究炉温曲线是十分必要的。

1.2 待解决的问题

问题一：假设传送带过炉速度为 $78\text{cm}/\text{min}$ ，各温区温度分别为 173°C （小温区 1-5）、 198°C （小温区 6）、 230°C （小温区 7）和 257°C （小温区 8-9），试绘制相应的炉温曲线，列出小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度。

问题二：假设各温区温度的设定值分别为 182°C （小温区 1-5）、 203°C （小温区 6）、 237°C （小温区 7）和 254°C （小温区 8-9），试确定允许的最大过炉速度。

问题三：在实际焊接过程中，焊接区域中心高于 217°C 时间不宜过长，试给出在此条件下的最优炉温曲线、各温区的设定温度和过炉速度，并给出相应面积。

问题四：要使得炉温曲线峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线尽量对称，在问题三的基础上，进一步给出最优炉温曲线、各温区设定的温度和传送带过炉速度，并给出相应指标值。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

首先依据传热学的背景知识，建立回焊炉的温度变化曲线，便于确定不同位置处的炉内温度。其次，从热传导的角度建立一维热传导模型，并对初值进行设定。接着，结合牛顿冷却定律，对热传递的第三类边界条件进行补充与完善，建立整体的微分方程组。同时，鉴于解析解的复杂性，利用有限差分法将微分方程转化为差分方程。另外，考虑到参数的未知，利用附件中的炉温曲线数据，基于最小二乘法的思想，结合遍历法进行求解。并将符合实际的参数代入，得到相应的温度分布情况。为了验证模型的精确度，我们采用算法精度分析及误差分析，从两方面进行验证。

2.2 问题二的分析

为了确立能使回焊炉正常工作的最大传送带过炉速度，因此以允许的传送带过炉速度最大为目标，以制程界限与温度限制为约束条件建立单目标规划模型，运用多重循环遍历法求解规划模型并考虑使用二分搜索法对遍历法结果进行验证，最终判断模型的稳定性。

2.3 问题三的分析

为探究符合条件的最优炉温曲线，以炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小为目标，并以制程界限与温度限制为约束条件建立单目标规划模型。考虑结合粒子群算法对模型进行求解，得到最优炉温曲线方案。为了确保模型的稳定，考虑对其进行灵敏度分析。

2.4 问题四的分析

在问题三的基础上，为了使峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线尽量对称，我们引入偏度系数进行衡量。接着，以偏度系数最小及阴影区域面积最小为目标，以制程界限为约束条件，建立双目标优化模型。其次，考虑到阴影区域面积重要程度更大，利用分层法将其转化为约束条件，化简为单目标优化模型。最后，利用遍历法进行求解各温区设定的温度及传送带过炉速度，并给出相应的指标值。



图 1：模型总体框架

三、模型假设

1. 考虑到热辐射效应的微小变化，忽略热传递中热辐射效应对温度的影响。
2. 假设车间的热扩散系数相同。
3. 假设回焊炉中的高温加热区域与低温冷却区域的冷却系数不同，不考虑相同区域间的差异。
4. 假设电路板在焊接过程中无损坏现象，因此无多余的热量产生或损失。
5. 假设车间开始焊接与结束焊接的温度均是室温。

四、符号说明

符号	说明	符号	说明
d	电路板的厚度	sk	偏度系数
v	传送带过炉速度	α^2	环境热对流系数
r_k	第 k 个小温区的温度	H_1	高温环境下的冷却系数
H_2	低温环境下的冷却系数	$time_1$	温度为 217°C 时的左时刻
$time_2$	峰值温度所对应的时刻	$time_3$	温度为 217°C 时的右时刻

符号	说明
r_k	第 k 个小温区的初始设定温度
$T(h,t)$	在厚度 h 处， t 时刻的温度
T_{ij}^i	网格中，位置为 (i,j) 处的温度
T_e	电路板所处回焊炉的环境温度

注：其他局部符号在使用时给出各自具体说明

五、模型的建立与求解

5.1 模型的准备

5.1.1 电路板焊接的机理分析

在集成电路板等电子产品生产中，需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中，通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。在这个生产过程中，让回焊炉的各部分保持工艺要求的温度，对产品质量至关重要。

尽管回流焊设备品牌很多，结构也各异，但热风的循环方式基本都是从风口板吹出，再从炉子前后回去，电路板的受热过程一般为先表面后内部，主要通过热传递的方式进行^[1]。

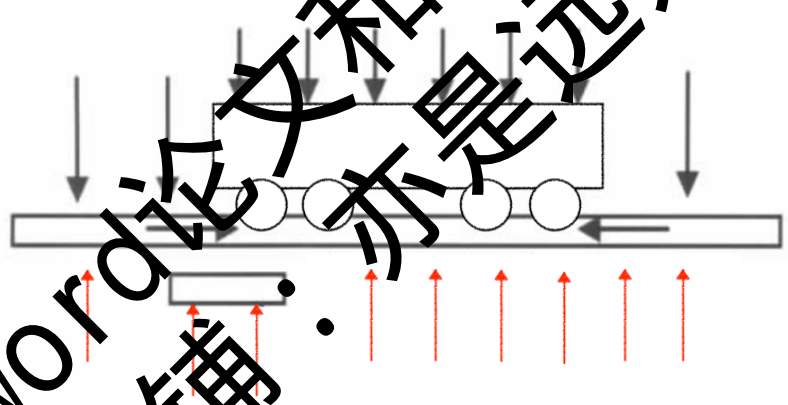


图 2: 工作原理示意图

具体来讲，就是回流焊设备将热空气吹到电路板的表面，使其表面被加热，再通过传导的方式把热量传递到电路板内部^[2]。热传导是由物质中大量的分子互相撞击，从而使能量从物体的高温部分传至低温部分，或由高温物体传给低温物体的过程，是固体传热的主要方式。除此之外，由于电路板上下表面与空气流体相接触，存在热对流的热量传递，指通过流动介质温度较高的分子由某一处向另一处传播热能的现象，是流体介质的主要交换热能的方式。

5.1.2 实际问题的简化处理

尽管电路板是三维立体结构，但在焊接时主要通过横向的移动使得每一部分得到焊接，而在纵向主要体现在不同厚度处的温度变化。同时，由于电路板在传送带上匀速移动，可利用时间与速度的乘积得出关于不同位置处的温度分布状况。由于

电路板的材料是均匀的，所以要分析的热传导方程可以归为一维的热传导方程研究，主要研究关于厚度 h 的温度分布情况。在工程应用场合，这种简化是可以容许的。

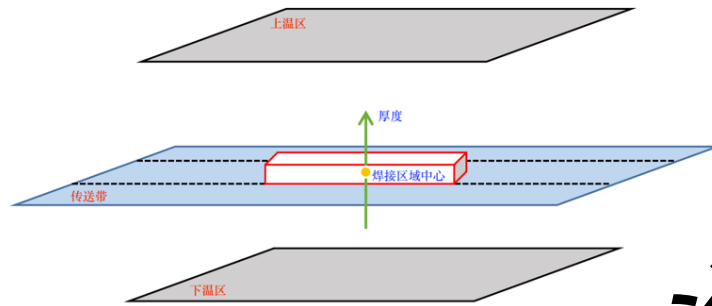


图 3：一维热传导示意图

在此问题中，由于不同小温区的温度可自主控制，且电路板一直处于运动状态，焊接区域中心的温度是随时间变化的，因此我们考虑非稳态传热过程。一维非稳态的维度：一维非稳态传热指的是空间坐标是一维的。在考虑时间坐标，则所谓的一维非稳态传热实际上是二维问题，即时间坐标 t 和空间坐标 h 两个变量：其中，时间坐标是单向的，也就是说，前一时刻的状态会对后一时刻的状态有影响。

5.2 问题一：基于传热学的焊接区域温度分布模型

本题首先依据传热学的背景知识，建立回焊炉的温度变化曲线，便于确定不同位置处的炉内温度。其次，从热传导的角度建立一维热传导模型，并对初值进行设定。接着，结合牛顿冷却定律，对热传递的第三类边界条件进行补充与完善，建立整体的微分方程组。同时，鉴于解析解的复杂性，利用有限差分法将微分方程转化为差分方程。另外，考虑到参数的未知，利用附件中的炉温曲线数据，基于最小二乘法的思想，结合遍历法进行求解。并将符合实际的参数代入，得到相应的温度分布情况。最后，进行算法的检验与误差分析。



图 4：问题一流程图

5.2.1 回焊炉温度分布的确定

回焊炉启动后，炉内空气温度会在短时间内达到稳定，此后，回焊炉方可进行焊接工作。根据题目要求，生产车间的温度保持在 25°C ，小温区 1~5 中的温度保持一致，小温区 8~9 中的温度保持一致，小温区 10~11 中的温度保持车间温度 25°C 。

同时，其余区域（炉前区域、炉后区域以及小温区之间的间隙）的温度与相邻温区的温度有关，各温区边界附近的温度也可能受到相邻温区温度的影响。根据传热学知识，物体间只要有温度差存在，热能就必然以某种方式从高温到低温处传递，

主要有3种基本形式：热传导、热辐射、热对流。根据三种方式即可推断出不同区域的温度变化情况。

(1) 关系式形式的确定

● 炉前区域

由于默认车间温度为25℃，且在回焊炉后，炉内空气温度会在短时间内达到稳定。因此，在回焊炉的第一个小温区将会达到极高的温度，与室温差距极大。而在回焊炉边缘部分，因未处于加热部分而温度与室温相近。在炉前区域内，温度伴有极大的上升，所以以指数函数衡量其变化趋势是极为恰当的：

$$T(x) = e^{ax} + b$$

其中，参数 a, b 可通过待定系数法，利用炉前区域的起点与第一个小温区的边缘数据确定。

● 小温区之间的间隙

由于小温区之间的间隙温度仅与相邻的小温区的温度分布有关，且间隙内无固体材料，所以无明显的热传导现象，只有微弱的热辐射反应。因而温度在有温差的材料中，会呈现线性降低的趋势，所以线性函数衡量其变化是极为恰当的：

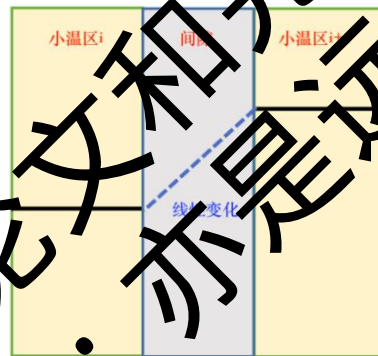


图 5：小温区之间的间隙温度变化示意图

如图 5 所示，在第 i 个小温区与第 $i+1$ 个小温区间温度呈线性上升(或不变)，因而用线性函数小温区之间的间隙衡量其变化是极为恰当的：

$$T(x) = cx + d$$

其中，参数 c 和 d 可通过待定系数法，利用相邻小温区的边缘数据确定。不同的间隙，温度变化曲线会略有不同。

● 炉后区域

根据题目要求，小温区 10~11 中的温度保持车间温度25℃，因此进入炉后区域，温度不再有上升的趋势，而是与车间温度持平：

$$T(x) = 25$$

其中，根据此常数函数可推断反应终止。

(2) 关系式的求解

结合问题1中数据，各温区温度的设定值如下：小温区1~5恒定为 173°C ，小温区6恒为 198°C 、小温区7恒为 230°C 、小温区8~9恒为 257°C ，小温区10~11恒为室温(23°C)。同时，利用上述其余区域的关系式，利用MATLAB软件，求解并绘制出回焊炉不同区域的温度情况。

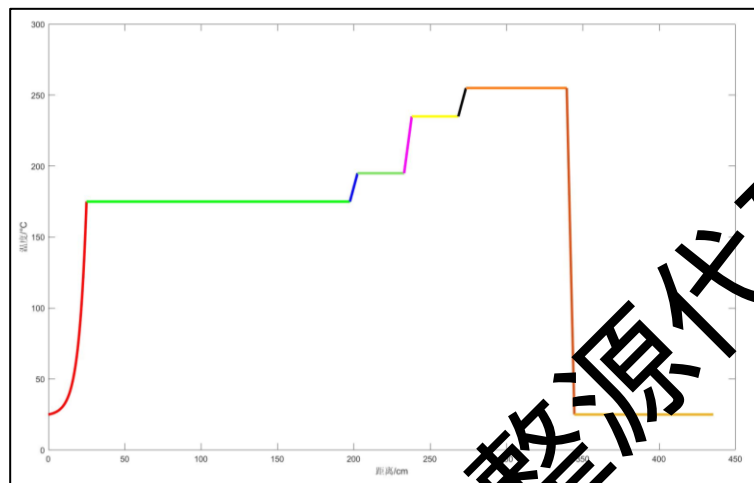


图 6：回焊炉温度变化曲线

如图6所示，在炉前区域(红色曲线)，温度由室温(23°C)呈指数上升到第1个小温区的温度(173°C)；且小温区1~5与各自间隙恒定为 173°C ；同时，从第5个小温区边缘温度呈线性上升至第6个小温区边缘温度(198°C)；类似的，以相似的线性规律爬升至第9个小温区；最后线性下降至第10个小温区，维持室温(23°C)至炉后区域，反应结束。

5.2.2 一维传热传递模型的确定

从回焊炉各区域传热到电路板的物理过程主要是热传导和热对流，由于物体时时刻刻均在热辐射，其相较于热传导和热对流所带来的热量改变是微不足道的，我们忽略热辐射效应的影响，主要考虑热传导和热对流传热过程。

◎一维热传导无热源方程

① 傅里叶热传导的热量微元算式：

根据傅立叶定律，可得出：单位时间物体的导热量与导热面积和温度梯度呈正比，因此可得到：

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dsdt = -\lambda \nabla u \cdot dSdt$$

其中，利用微元法表示傅立叶热传导的形式。

② 流入热量与吸收热量

基于傅里叶热传导的热量微元算式，可精确计算在一段时间内流入的热量与吸收的热量：

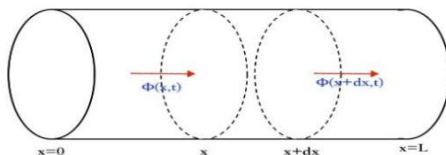


图 7：热通量示意图

如图 7 所示，从 $t_1 \sim t_2$ 时间段内，流入介质内部的热量为：

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds dt \right] dt$$

使用高斯公式可化简为：

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds dt \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] dt$$

同时，由于温度的升高，介质内温度升高吸收的热量为：

$$Q_2 = \int c \rho [T(x, t_2) - T(x, t_1)] dx$$

其中， c 为比热， ρ 为密度。

③ 基于能量守恒定律建立能量关系

由能量守恒定律有 $Q_1 = Q_2$ [4]。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int c \rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dx \right] dt$$

因此，有 $c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ，即 $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ，且 $\alpha^2 = \frac{\lambda}{c \rho}$ ，其中， λ 表示介质热导率， c 表示介质的比热， ρ 表示介质的密度。

④ 电路板中的热传导过程

根据实际问题的简化，具体探究不同厚度下，温度随时间的变化情况。因此，固体电路板中的热传导可表示为：

$$\frac{\partial T(h, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T(h, t)}{\partial h^2}$$

其中， $T(h, t)$ 表示为温度， $T(h, 0)$ 是一个随时间 t 和空间 h 变化的物理量，

α^2 指的是热扩散系数，与物体的本身特性与所处流体环境有关。

◎ 初始条件的约束

在实验刚开始时，即回焊炉刚启动时，此时 $t = 0$ ，各层的温度都与车间室温相

同。根据题目要求，室温为 25°C ，即可得到热传导的初始约束条件：

$$T(h, 0) = 25$$

其中， $T(h, 0)$ 表示各个厚度处 0 时刻的值均为室温 25°C 。

◎ 基于牛顿冷却定律的热对流分析

尽管回焊炉中是高温焊接与低温冷却的结合，但是炉腔内仍有空气等流体的存在，因而会有电路板产生热对流现象，其中以上表面与下表面反应最为剧烈与明显。同时，热对流现象也符合三大约束条件里的第三类约束条件，使得热传递模型更立体全面，具体表达式为：

● 下表面热对流

$$\left. \frac{\partial T(h, t)}{\partial h} \right|_{h=0} = H_k (T(0, t) - T_e), k=1, 2$$

● 上表面热对流

$$\left. \frac{\partial T(h, t)}{\partial h} \right|_{h=d} = -H_k (T(d, t) - T_e), k=1, 2$$

其中， H_k 表示热对流系数，但由于回焊炉内存在高温加热与低温冷却两个大区域，因此热对流系数有所差异， H_1 表示高温环境下的热对流系数， H_2 表示低温环境下的热对流系数。

◎ 一维热传递方程组的最终确定

根据一维热传导无热源方程及相应初始条件，结合热对流过程中的牛顿冷却定律，最终的一位热传递模型为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{一维热传导} : \frac{\partial T(h, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T(h, t)}{\partial h^2} \\ \text{初始边界条件} : T(h, 0) = 25 \\ \text{上边界} : \left. \frac{\partial T(h, t)}{\partial t} \right|_{h=0} = -H_k (T(d, t) - T_e), k=1, 2 \\ \text{下边界} : \left. \frac{\partial T(h, t)}{\partial t} \right|_{h=d} = H_k (T(0, t) - T_e), k=1, 2 \end{array} \right.$$

上式中， $T(h, t)$ 表示为温度，是一个随时间 t 和空间 h 变化的物理量， α^2 指的是热扩散系数，与物体的本身特性与所处流体环境有关， $T(h, 0)$ 表示各个厚度处 0 时刻的值均为室温 25°C ， H_k 表示热对流系数。其中， H_k 与 α^2 均为未知量。

5.2.3 基于有限差分法的微分方程转化

考虑到边界条件的有限，不易得出分析解，可以采用有限差分法得出各个数值解。但是数值解法只能确定一些散点的温度，于是需要先将时间与厚度构成的区域离散化，将矩阵分成无数个网格，然后利用有限差分来近似表示温度的微分。

① 区域离散化

根据时间长度 373.2857s，电路板总厚度为 0.015cm，建立关于时间和位置的二维直角坐标系。同时，将连续的时间和位置划分成 150×709 个区域，即厚度的最小间隔为 0.0001cm，时间的最小间隔为 0.5s，如图 8 所示。

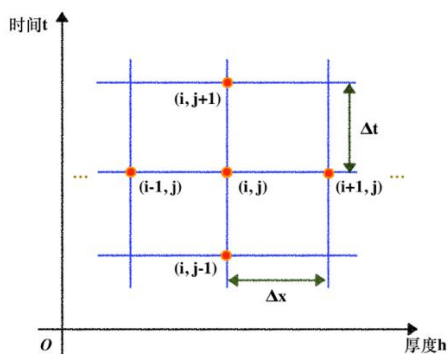


图 8：划分网格示意图

如图所示的二维直角坐标系，将每个区域的端点看作一个节点，则共有 150×709 个节点。 T_i^j 表示第 i 行第 j 列节点的温

② 差分方程的推导

微分方程与代数方程最大的不同就是其包含微分项，这也是求解微分方程最难处理的地方。有限差分法的基本原理即使用近似方法处理微分方程中的微分项。为了得到微分的近似，我们最容易想到的即导数定义：

$$T'(d) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{T(d + \Delta d) - T(d)}{\Delta d} \approx \frac{T(d + \Delta d) - T(d)}{\Delta d}$$

上式后面的近似表示使用割线斜率近似替代切线斜率， Δx 即为步长。这也表明函数在某一点的微分可以由相邻点的函数值近似确定。显然，这里微分近似的精度与步长的选取有关，步长越短则越精确^[4]。利用上述的思想，对一维热传递方程组近似转化为差分方程，具体的方法包括前向差分法、后向差分法与中心差分法。

一维热传导方程

由于一维热传导方程存在二阶微分，不能利用常规的一阶微分进行处理。则考虑利用中心差分法与前向差分法的结合，将其转化为差分方程，具体示意图如下：

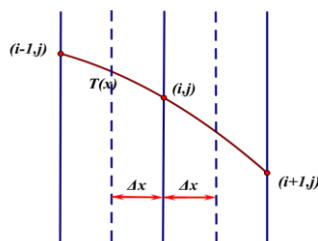


图 9：差分方程转化示意图

通过呈现“T型”相邻的三点，推出相应的差分方程，具体转化表达式如下：

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{\Delta h^2}$$

□ 初始边界条件

由于实验刚开始时，回焊炉各区域温度与车间室温相同，因此可用差分方程表示为：

$$T_i^0 = 25$$

其中， T_i^0 表示各个厚度处0时刻的值均为室温 $25^\circ C$ 。

□ 牛顿冷却定律

针对牛顿冷却定律，由于热对流主要发生于上下表面，即边界处，因此只能分别进行后向差分与前向差分进行处理，具体表达式如下：

$$\begin{cases} \text{上边界: } \frac{T_m^j - T_{m-1}^j}{\Delta h} = -H_k(T_m^j - T_e), k=1, 2 \\ \text{下边界: } \frac{T_1^j - T_0^j}{\Delta h} = H_k(T_0^j - T_e), k=1, 2 \end{cases}$$

因此，结合表达式14~16，即可得到关于一维热传递的差分方程组：

$$\begin{cases} \text{一维热传导: } \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{\Delta h^2} \\ \text{初始边界条件: } T_i^0 = 25 \\ \text{牛顿冷却定律} \begin{cases} \text{上边界: } \frac{T_m^j - T_{m-1}^j}{\Delta h} = -H_k(T_m^j - T_e), k=1, 2 \\ \text{下边界: } \frac{T_1^j - T_0^j}{\Delta h} = H_k(T_0^j - T_e), k=1, 2 \end{cases} \end{cases}$$

根据上述方程组，可建立关于温度与时间、厚度的关系式，进行一层的迭代分析。

5.2.4 炉温曲线的确定

● 基于最小二乘法的未知参数确定

在建立了温度关于时间 t 、厚度 h 的差分方程组，但其中的热扩散系数 α^2 、热对流系数 H_k 均未知，无法确定温度的分布情况。因此我们运用最小二乘法求解模型中的参数，在搜索参数的值时应尽可能地使模拟曲线接近实际曲线，即方差和最小^[5]。具体表达式如下：

$$\min F = \sum_{i=0}^n (T_{m/2}^j - \hat{T}_{m/2}^j)$$

结合附件中的温度-时间数据、利用MATLAB软件并使用遍历算法，可得到最终的参数结果如下：

表 1 参数结果

参数	α^2	H_1	H_2
数值	5.11×10^{-7}	6975.37	97.6

得出的参数结果，可发现热扩散系数极小，这是由于在高温环境下，扩散系数与密度、比热容相关，导致数值过小，与实际情况相符。同时，可直观发现在低温环境下的冷却系数明显比高温环境下的系数小，这是由于高温环境下与环境温度的差距较大，温差越大导致冷却系数大幅减小，这是符合常理的。因此，我们将得到的参数值代入，与原实际曲线相对比。

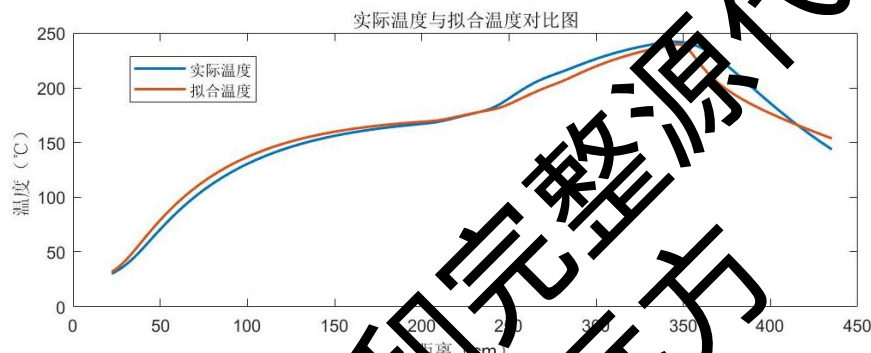


图 10：实际曲线与模拟曲线对比图

如图 10 所示，可发现模拟曲线与实际曲线近似相同，二后半段出现了略大的误差。具体原因是因为假设第 9 个小温区的边界至第 10 个小温区的边界温差过大，在回焊炉温度分钟中间隙的温度变化是呈现直线变化，因此造成环境温度的差异对模拟曲线的影响，不过这是符合原假设与实际情况的，即为合理。

● 焊接区域中心温度的变化

通过最小二乘法得到热扩散系数与冷却系数，即可代入实际情况的小温区温度与传送带速度，求解此时的炉温曲线。利用 MATLAB 软件，结合问题 1 所给数据，可绘制焊接区域中心温度随时间的变化（由于篇幅限制，仅例举典型位置处的温度情况）如表 2 所示。同时，根据对应的温度绘制相应的炉温曲线，如图 11 所示。

表 2 不同位置处焊接区域中心的温度

位置	小温区 3 中点	小温区 6 中点	小温区 7 中点	小温区 8 尾处
温度/°C	136.16	168.79	184.19	217.15

由表 2 可知，小温区 3 处于预热区，温度相较于室温有明显的上升。而小温区 6 与 7 的中点处与高温加热的恒温阶段，温度逐步平稳上升，直至小温区 8 的尾处达到高峰。

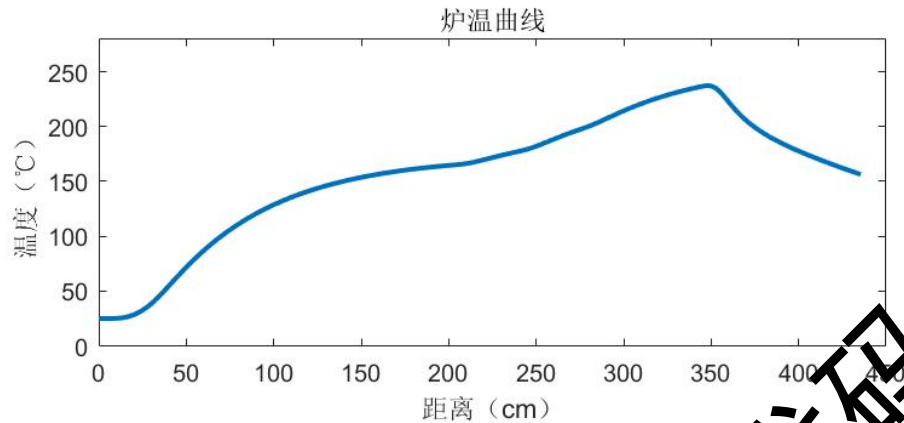


图 11：实际炉温曲线

如图 11 所示，可发现实际炉温曲线呈现 4 段趋势。首先在室温逐步加热，进行预热工作；其次，在此温度处进行恒温的上升，以此对电路板进行加热焊接；接着，进入回流状态，温度慢慢上升至顶点；最后，逐步恢复至室温，对电路板进行相应的冷却工作，便于后续的加工处理。

5.2.5 模型的检验

(1) 遍历法精度的检验

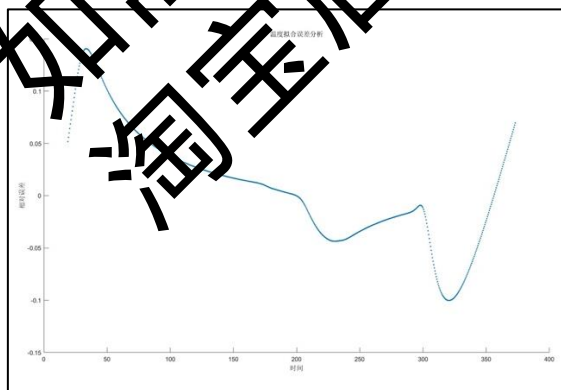
对于定步长的循环遍历算法，误差的来源主要为变量的步长，因此，我们可以通过减小步长，根据最优解变化幅度来判断步长是否合理。取变量 h 的步长为原步长的 0.1，则算法精度提高 10 倍，定义相对优化量 s 为目标函数优化量与理论优化量的比值。

$$s = \frac{|f^*(h, t) - f^*(h, t)|}{10}$$

通过 MATLAB 编程计算可得，由于 h 长度范围在数量级 10^{-5} ，因此可以忽略不计，因此目前的循环遍历算法的步长是十分合理的。

(2) 最小二乘法误差分析

为验证时间(距离)、厚度与温度关系式的拟合误差，我们将拟合计算值与实际值对比，计算温度拟合情况的相对误差，作出如下曲线：



观察左图，去除个别极端点，大部分点仍在 10% 误差以内，可以接受，所以整体拟合效果较好，即可认为建立的炉温曲线变化关系图是符合实际的。

图 12：炉温曲线拟合相对误差图

深究产生误差的具体原因，分析如下：

- ① **间隙温度变化过快**：第9个小温区的边界至第10个小温区的边界温差过大，在回焊炉温度分钟中间隙的温度变化是呈现直线变化，与实际情况有一定的出入，因此造成环境温度的差异对炉温曲线的影响。
- ② **样本容量不充分**：尽管附件给出了较多时刻对应的温度情况，但传送带的速度较快，尽管在相当小的时间内，划过的距离也相当大。因此，无法更精确得出每一个小温区里的温度变化情况，所以具有一定的偶然性。

5.3 问题二：基于单目标优化的传送带过炉速度确定

本题要求确立能使回焊炉正常工作的最大传送带过炉速度，因此以允许的传送带过炉速度最大为目标，以制程界限与温度限制为约束条件建立单目标规划模型，运用多重循环遍历法求解规划模型。最后，对模型进行相应的灵敏度分析。

5.3.1 单目标优化模型的确定

● 目标函数

根据题目，电路板两侧搭在传送带上匀速进入炉内进行加热焊接，电路板所处于回焊炉的位置可由时间与速度的乘积精确确定。因此，提高传送带的速度即可大幅减少实验时间，具有一定的工业价值。所以，以传送带过炉速度最大为目标函数。

$$\max v$$

其中， v 指的是传送带过炉速度

● 约束条件

- ① **温度变化速率约束**：制程界限要求炉温曲线的斜率满足一定要求，即温度变化速率不得超过 3°C/s 。

$$0 \leq \left| \frac{\partial T(h, t)}{\partial t} \right| \leq 3$$

- ② **峰值温度约束**：制程界限要求温度峰值在 $240^{\circ}\text{C} \sim 250^{\circ}\text{C}$ 之间，即表示为：

$$240 \leq T(h, t)_{\max} \leq 250$$

- ③ **温度上升过程中在 $150^{\circ}\text{C} \sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间约束**：制程界限要求温度大于 $150^{\circ}\text{C} \sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间在 $60 \sim 120\text{s}$ 内，即对炉温曲线进行约束。

$$60 \leq \Delta t|_{150 \leq T(h, t) \leq 190} \leq 120$$

- ④ **温度大于 217°C 的时间约束**：制程界限要求温度大于 217°C 的时间在 $40 \sim 90\text{s}$ 内，即对炉温曲线又进一步的约束。

$$40 \leq \Delta t|_{T(h, t) \geq 217} \leq 90$$

- ⑤ **传送带速度约束**：传送带的过炉速度调节范围为 $65 \sim 100 \text{ cm/min}$ ，对速度上下限有了约束条件。

$$65 \leq v \leq 100$$

综上，求解最大传送带过炉速度的单目标规划模型为：

$$\max v$$

s.t.

$$\begin{cases} \text{温度变化速率约束: } 0 \leq \left| \frac{\partial T(h,t)}{\partial t} \right| \leq 3 \\ \text{峰值温度约束: } 240 \leq T(h,t)_{\max} \leq 250 \\ \text{温度上升过程时间约束1: } 60 \leq \Delta t \Big|_{150 \leq T(h,t) \leq 190} \leq 120 \\ \text{温度上升过程时间约束2: } 40 \leq \Delta t \Big|_{T(h,t) \geq 127} \leq 90 \\ \text{传送带速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \end{cases}$$

5.3.2 最大传送带速度的确定

(1) 基于遍历法的模型求解

利用MATLAB软件，基于以下算法流程求解最大传送带速度。

Step1 初次遍历搜索：在约束条件中已对传送带的速度范围进行限值，因此初次遍历即在最大范围内遍历搜索，以1为速度搜索步长，找到符合制程条件的最大速度。第一次遍历的搜索结果最大速度为71cm/min，此时最大温度变化速率为2.4884°C/s，峰值温度为240.23°C，其余条件也符合制程条件。

Step2 第2次遍历搜索：在第一次最优结果领域范围内遍历搜索，以0.1为速度搜索步长，找到符合制程条件的最大速度。第二次遍历的搜索结果最大速度为71.7cm/min，此时制程指标与第一次搜索结果类似。

Step3 第3次遍历搜索：在第二次最优结果领域范围内遍历搜索，以0.01为速度搜索步长，找到符合制程条件的最大速度。第三次遍历的搜索结果最大速度为71.78cm/min，此时制程指标与第二次搜索结果类似。

Step4 最后遍历搜索：在第三次最优结果领域范围内遍历搜索，以0.001为速度搜索步长，找到符合制程条件的最大速度。最后以此次遍历的搜索结果最大速度为71.781cm/min，此时制程指标与第一次搜索结果类似。

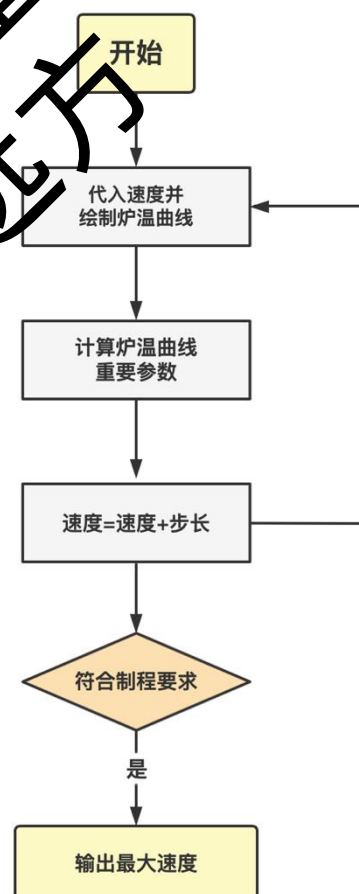


图 14：遍历法流程图

根据最后一次遍历搜索结果，可得到最大传送带过炉速度为71.781cm/min，并将最大传送带过炉速度代入，绘制炉温曲线如下：

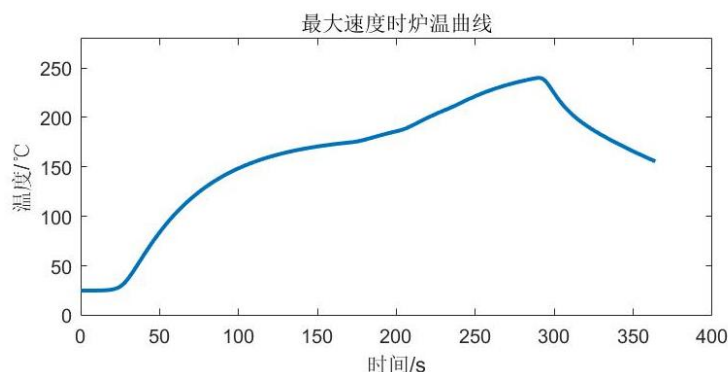


图 15: 最大传送带速度对应炉温曲线

如图 15 所示, 当传送带过炉速度为 71.781 cm/min 时, 此时最大温度变化速率为 2.4884°C/s , 峰值温度为 240.28°C , 温度上升过程中在 $150^\circ\text{C} \sim 190^\circ\text{C}$ 的时间约束为 105.5 s , 温度大于 217°C 的时间约束为 59.5 s , 符合实际的热力学运动规律, 并且在制程要求之内。

(2) 基于二分法的模型检验

为了验证上文的遍历法求解答案是否准确, 我们采用二分搜索算法进行验证, 算法求给定区间极值的步骤如下:

- ✧ 计算目标函数在有解区间端点处的值 $f(a)$ 、 $f(b)$
- ✧ 计算目标函数在区间中点处的值 $f(x_0)$
- ✧ 判断 $f(x_0)$:
 - 若 $f(x_0) = 0$, 即为 C₁ 烯烃的最大速率
 - 若 $f(x_0)f(a) < 0$, 极值区间缩小为 $[a, x_0]$
 - 若 $f(x_0)f(b) > 0$, 极值区间缩小为 $[x_0, b]$
- ✧ 重复上述步骤, 得到最大的传送速度

按照上述步骤, 利用 MATLAB 软件进行求解, 得出的最大传送带过炉速度同样为 71.781 cm/min , 此时最大温度变化速率为 2.4884°C/s , 峰值温度为 240.28°C , 温度上升过程中在 $150^\circ\text{C} \sim 190^\circ\text{C}$ 的时间约束为 105.5 s , 温度大于 217°C 的时间约束为 59.5 s , 因此, 遍历法与二分法求解答案十分相近, 因此可以验证前文用遍历法求解最大传送速度的准确性。

5.3.3 灵敏度分析

为了探究传送带不同速度对温度的影响以及炉温曲线变化, 我们采用单因素分析法, 将传送带速度上下浮动 5% , 观察炉温曲线的变化情况, 我们使用 MATLAB 编程得到结果如下:

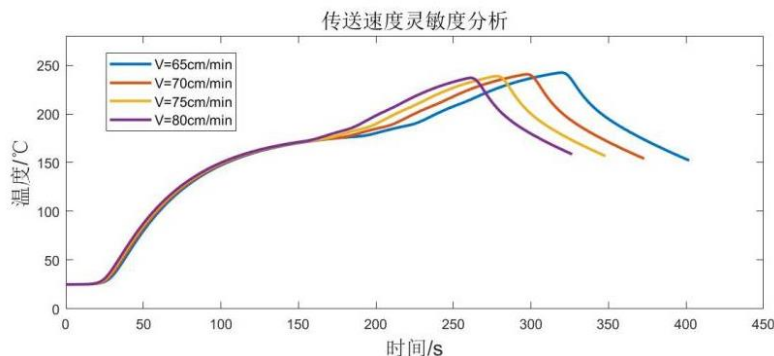


图 16: 关于传送带过炉速度的灵敏度分析图

①**走势**: 根据上图, 当传送带速度变化时, 炉温曲线的走势在不同速度向均大体一致, 呈现前期增速缓, 然后以上凸曲线走势不断上升, 到达一定温度后, 增速变快, 并呈现先升高后下降的趋势。

②**稳定性**: 当传送带速度在5%的范围内上下浮动时, 不同速度下的炉温曲线在前期基本重合, 并且当时间达到一定值时, 不同曲线出现微小差异, 其温度峰值基本相同, 仅达到峰值的时间略有差异, 此现象说明传送带速度对温度变化在前期极不敏感, 在后期同样对温度变化是稳定的。因此, 传送带速度是稳定的。

5.4 问题三: 基于粒子群算法的最优炉温曲线

为探究符合条件的最优炉温曲线, 炉温曲线应使超过217℃到峰值温度所覆盖的面积最小为目标, 且以制程界限与温度限制为约束条件建立单目标规划模型。接着, 结合粒子群算法对模型进行求解, 得到最优炉温曲线方案。最后, 对模型进行灵敏度分析。

5.4.1 单目标优化模型的建立

● 目标函数

在焊接过程中, 焊接区域中心的温度超过217℃的时间不宜过长, 峰值温度也不宜过高。最优炉温曲线应满足以下两个条件, 可通过炉温曲线应使超过217℃到峰值温度所覆盖的面积最小来衡量此目标。

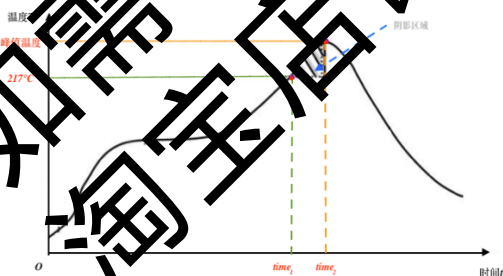


图 17: 阴影区域示意图

因此, 目标函数可表示为以下形式:

$$\min S = \int_{time_1}^{time_2} T(h, t) dt - (time_2 - time_1) \times 217$$

其中, $time_1$ 表示温度为217℃时的左时刻, $time_2$ 表示温度为峰值温度时刻。

● 约束条件

如左图所示, 阴影部分面积可由曲线积分面积减去矩形面积得到, 即可作为单目标优化模型的目标函数

① 继承问题 2 的条件约束：由于问题 2 相比问题 1 仅是缺少了各个小温区的温度，其余约束条件仍然不变，因此制程约束与传送带约束依旧适用，具体如下：

$$\begin{cases} \text{温度变化速率约束: } 0 \leq \left| \frac{\partial T(h,t)}{\partial t} \right| \leq 3 \\ \text{峰值温度约束: } 240 \leq T(h,t)_{\max} \leq 250 \\ \text{温度上升过程时间约束 1: } 60 \leq \Delta t \Big|_{150 \leq T(h,t) \leq 190} \leq 120 \\ \text{温度上升过程时间约束 2: } 40 \leq \Delta t \Big|_{T(h,t) \geq 127} \leq 90 \\ \text{传送带速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \end{cases}$$

② 各小温区温度约束：实际生产时可以通过调节各温区的设定温度和传送带的过炉速度来控制产品质量。在初始设定温度的基础上，各小温区设定温度可以进行 $\pm 10^\circ\text{C}$ 范围内的调整。调整时要求小温区 1~5 中的温度保持一致，小温区 8~9 中的温度保持一致，小温区 10~11 中的温度保持 25°C 。因此可得到如下限制条件：

$$\begin{cases} \text{温度可调整幅度: } r_k - 10 \leq u_k \leq r_k + 10 \\ \text{小温区 1~5 温度相同: } u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \\ \text{小温区 8~9 温度相同: } u_8 = u_9 \\ \text{小温区 10~11 温度相同: } u_{10} = u_{11} = 25 \end{cases}$$

综上，求解最优炉温曲线的单目标规划模型为：

$$\min S = \int_{time_1}^{time_2} T(h,t) dt - (time_2 - time_1) \times 217$$

s.t.

$$\begin{cases} \text{温度变化速率约束: } 0 \leq \left| \frac{\partial T(h,t)}{\partial t} \right| \leq 3 \\ \text{峰值温度约束: } 240 \leq T(h,t)_{\max} \leq 250 \\ \text{温度上升过程时间约束 1: } 60 \leq \Delta t \Big|_{150 \leq T(h,t) \leq 190} \leq 120 \\ \text{温度上升过程时间约束 2: } 40 \leq \Delta t \Big|_{T(h,t) \geq 127} \leq 90 \\ \text{传送带速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \\ \text{温度可调整幅度: } r_k - 10 \leq u_k \leq r_k + 10 \quad k = 1, 2 \\ \text{小温区 1~5 温度相同: } u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \\ \text{小温区 8~9 温度相同: } u_8 = u_9 \\ \text{小温区 10~11 温度相同: } u_{10} = u_{11} = 25 \end{cases}$$

5.4.2 基于粒子群算法的模型求解

为了求解上文所建立的单目标优化模型，考虑到变量较多，采用粒子群算法进行求解。在粒子群优化算法中，每个寻优的问题解都被想像成一只鸟，称为“粒子”。所有粒子都在一个维空间进行搜索。所有的粒子都由一个适应度函数（fitness function，即目标函数）确定适应值以判断目前的位置好坏。每一个粒子必须赋予记

忆功能，能记住所搜寻到的最优位置。每一个粒子还有一个速度以决定飞行的距离和方向。这个速度根据它本身的飞行经验以及同伴的飞行经验进行动态调整。

● 算法原理

假设有一个 n 维的解空间，有 m 个粒子构成一个微粒群，其中每个微粒都用一个 n 维的向量描述，将它的空间位置表示为 $X_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ ，即第 i 个粒子在解空间中的位置为 X_i 。换言之，每个粒子的位置向量是优化模型的潜在解，将 X_i 代入目标函数就可以计算出其适应值，根据适应值的大小衡量其优劣。每个粒子个体经过的最佳位置记为 $pbest(p_i^1, \dots, p_i^n)$ ，整个粒子群经过的最佳位置记为 $gbest(g_i^1, \dots, g_i^n)$ 。粒子的速度记为 $V_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$ 。粒子群的演化方程可描述为

$$\begin{cases} V_{ij}(t+1) = V_{ij}(t) + c_1 r_1(t) [P_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_2(t) [p_{ij}(t) - x_{ij}(t)] \\ X_{ij}(t+1) = m_{ij}(t) + V_{ij}(t+1) \end{cases}$$

其中， i 表示第 i 个微粒， j 表示微粒的第 j 个维度， t 表示第 t 代。

● 粒子群算法步骤

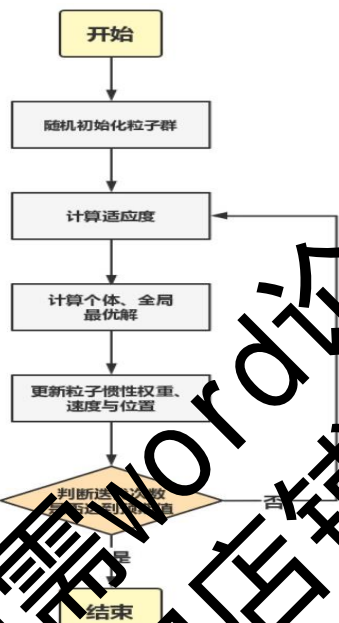


图 18: 算法流程图

- ①随机初始化粒子群：设定粒子群规模为 1000，迭代次数为 1000 次。在约束条件范围内，服从均匀分布随机产生粒子群。
- ②计算适应度：计算面积，即为每个粒子的适应度。
- ③计算个体和全局最优解：将每个粒子的适应值与其经历过的最好位置的适应值比较，若更好，则将其更新每个粒子的最优解；将每个粒子的适应值与全局的最好位置的适应值比较，若更好，则将其更新全局的最优解；
- ④更新粒子惯性权重、速度和位置：通过相应的公式前后更新粒子惯性权重、速度和位置。
- ⑤判断程序是否结束：“若达到预设的迭代次数就结束程序，否则继续迭代。”

● 求解结果

利用 MATLAB 软件，使用粒子群算法，结合题目所给数据，求得上述单目标规划的结果如下表所示，同时，根据对应的温度绘制相应的炉温曲线，如下图所示：

表 3 最优炉温曲线对应方案

位置	温区 1-5	温区 6	温区 7	温区 8-9	温区 10-11	速度	阴影面积
数值	178.84	198.02	225.52	264.99	25	83	406.16

我们根据粒子群算法及单目标优化模型得到各小温区的温度以及此时对应的传送带过炉速度，同时超过的阴影面积达到最小值为 $406.16^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$ 。

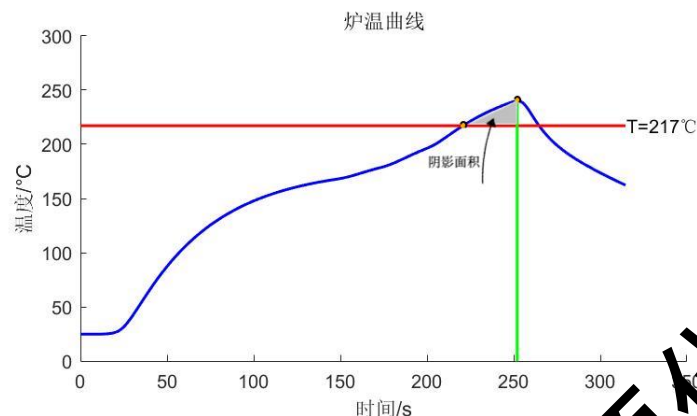


图 19：最优炉温曲线

可发现实际炉温曲线呈现 4 段趋势。首先由室温逐步加热，进行预热工作；其次，在此温度处进行恒温的上升，以此对电路板进行加热焊接；接着，进入回流状态，温度慢慢上升至顶点；最后，逐步恢复至室温，对电路板进行相应的冷却工作，便于后续的加工处理。与上文所得炉温曲线趋势一致。此时，大于 的阴影面积达到最小，即满足单目标优化模型。

5.4.3 灵敏度分析

为了验证模型的稳定性，我们分别对小温区 1-5，小温区 6，小温区 7 以及小温区 8-9 的温度进行单因素分析，分析结果如下：

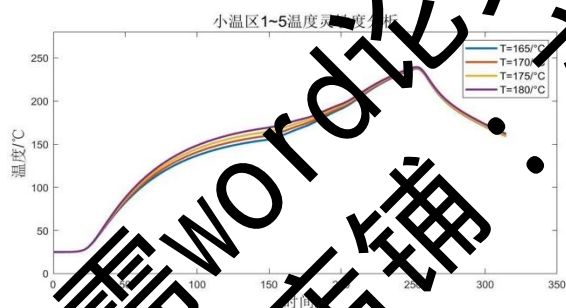


图 20：小温区 1-5 灵敏度分析

在控制其他参量不变的情况下，做出过炉温度曲线如右图所示：通过该图我们可以发现，在小温区 6 的温度浮动 5% 的变化时，曲线前端、中段基本重合仅在最后一时间段略有差异，且上下差异十分微小，近乎重合，因此十分稳定。

在控制其他参量不变的情况下，做出过炉温度曲线如左图所示：通过该图我们可以发现，在小温区 1-5 的温度浮动 5% 的变化时，曲线前端与后端基本重合仅在中间时间段略有差异，且上下差异十分微小，因此具有稳定性。

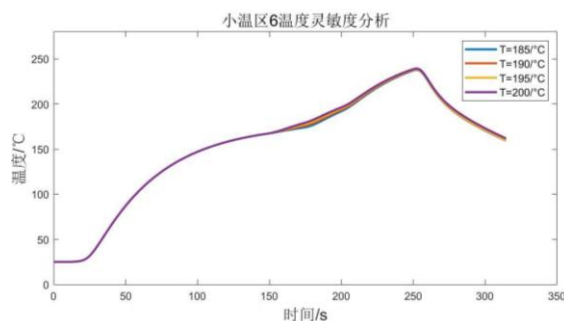


图 21：小温区 6 灵敏度分析

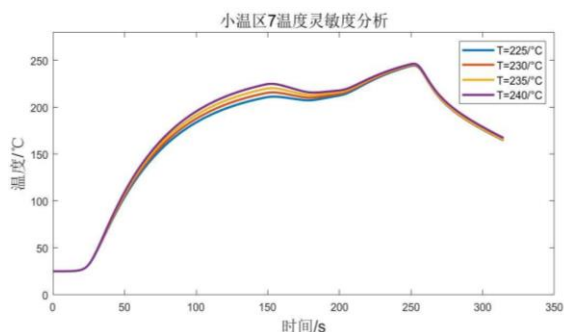


图 22: 小温区 7 灵敏度分析

在控制其他参量不变的情况下，做出过炉温度曲线如右图所示：通过该图我们可以发现，在小温区 8-9 的温度浮动 5% 的变化时，曲线变化趋势与小温区 7 大致相同，曲线前端与后端基本重合仅在中间时间段略有差异，且上下差异十分微小，因此具有稳定性。

在控制其他参量不变的情况下，做出过炉温度曲线如左图所示：通过该图我们可以发现，在小温区 7 的温度浮动 5% 的变化时，曲线前端与后端基本重合仅在中间时间段略有差异，且上下差异十分微小，远小于温度变化，因此具有稳定性。

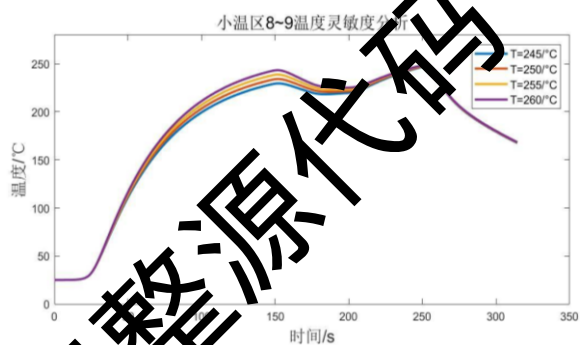


图 23: 小温区 8-9 灵敏度分析

5.5 问题四：基于双目标优化的最优炉温曲线

在问题三的基础上，我们希望以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称，因此引入引入偏度系数进行衡量。接着，以偏度系数最小及阴影区域面积最小为目标，以制程界限为约束条件，建立双目标优化模型。其次，考虑到阴影区域面积重要程度更大，利用分层法将其转化为约束条件，化简为单目标优化模型。然后，利用遍历法进行求解各温区设定的温度及传送带过炉速度，并给出相应的指标值。最后，对偏度系数关于各温区温度及传送带过炉速度进行灵敏度分析。

5.5.1 双目标优化模型的建立

在问题三的基础上，问题四要求使得超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称，因此问题四基于问题三，仍然满足问题三中单目标优化模型的目标函数和约束条件，并在此基础上增加新的目标，构建双目标优化模型。

● 继承问题三的目标函数

问题四仍需使得在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。最优炉温曲线应满足以上两个条件，可通过炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小来衡量此目标，同样继承问题三的目标函数：

$$\min S = \int_{time_1}^{time_2} T(h,t)dt - (time_2 - time_1) \times 217$$

其中， $time_1$ 表示温度为 217°C 时的左时刻， $time_2$ 表示温度为峰值温度时刻。

● 继承问题三的约束条件

由于问题四基于问题三，因此问题三所需满足的约束条件问题四仍然满足，继承约束条件如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{温度变化速率约束: } 0 \leq \left| \frac{\partial T(h,t)}{\partial t} \right| \leq 3 \\ \text{峰值温度约束: } 240 \leq T(h,t)_{\max} \leq 250 \\ \text{温度上升过程时间约束1: } 60 \leq \Delta t|_{150 \leq T(h,t) \leq 190} \leq 120 \\ \text{温度上升过程时间约束2: } 40 \leq \Delta t|_{T(h,t) \geq 127} \leq 90 \\ \text{传送带速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \\ \text{温度可调整幅度: } r_k - 10 \leq u_k \leq r_k + 10 \quad k = 1, 2 \\ \text{小温区1~5温度相同: } u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \\ \text{小温区8~9温度相同: } u_8 = u_9 \\ \text{小温区10~11温度相同: } u_{10} = u_{11} = 25 \end{array} \right.$$

● 新增目标函数

为了满足超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称，我们引入偏度系数进行衡量。偏度系数是描述分布偏离对称性程度的一个特征数。当分布完全对称时，偏度系数为 0。当偏度系数大于 0 时，即重尾在右侧时，该分布为右偏。当偏度系数小于 0 时，即重尾在左侧时，该分布左偏^[6]。

根据定义，偏度系数的基本计算公式为^[6]

$$SK = \frac{\mu - M_0}{\sigma}$$

其中， μ 为均值， M_0 为众数， σ 为标准偏差。

针对炉温曲线 $T(h,t)$ ，在温度超过 217°C 的区间 $[time_1, time_3]$ 中，其均值计算公式为

$$\mu = \frac{\int_{time_1}^{time_3} tT(h,t) dt}{\int_{time_1}^{time_3} T(h,t) dt}$$

方差的计算公式为

$$\sigma^2 = \frac{\int_{time_1}^{time_3} t^2 T(h,t) dt}{\int_{time_1}^{time_3} T(h,t) dt} - \mu^2$$

代入均值计算公式可得，

$$\sigma^2 = \frac{\int_{time_1}^{time_3} t^2 T(h,t) dt}{\int_{time_1}^{time_3} T(h,t) dt} - \left(\frac{\int_{time_1}^{time_3} tT(h,t) dt}{\int_{time_1}^{time_3} T(h,t) dt} \right)^2$$

根据皮尔逊经验法^[7]，连续型随机变量 ξ ，若概率密度函数为 f ，且 f 恰有一个最大值，则此最大值称为 ξ 的众数，有时也把 f 的极大值称为众数，因此，众数的计算公式为：

$$M_0 = T(h,t)_{\max}$$

即炉温曲线的在区间 $[time_1, time_3]$ 的众数为区间内的最大值。

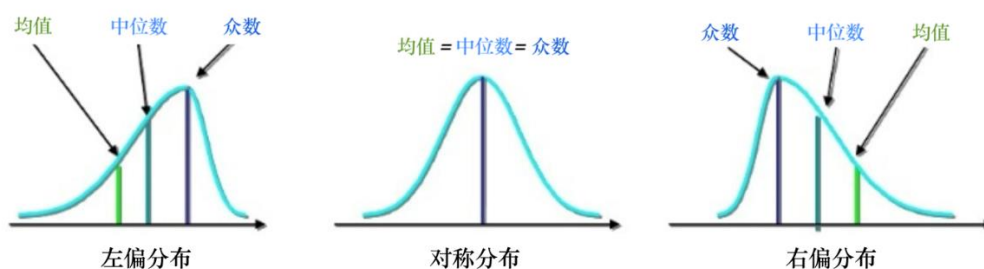


图 24：偏度系数示意图

根据上图可知，当区间内曲线满足左右严格对称时，均值、中位数、众数三者均相等。若曲线右偏，则众数最大均值最小，中位数居中；若曲线左偏，则众数最小，均值最大，中位数仍然居中。

根据上文所述的偏度系数，我们可以增加第二个目标函数，由于偏度系数 SK 越接近 0 表示曲线越对称，因此为了使超过 217°C 的炉温曲线尽量对称，我们建立目标函数为：

$$\min SK$$

其中， SK 代表偏度系数，其值大于等于 0，为无量纲数。

● 分层序列法将双目标转化为单目标

针对本题，由于超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积与衡量曲线对称性的偏度系数的量纲不同，数量级相差较大，将他们相加或者比较是不合适的，因此我们选择分层序列法进行求解。

超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积相较于曲线对称性而言更加重要，所以第一个目标函数的重要性相较于第二个目标函数的重要性更为显著，所以我们需要保证第一个目标满足的情况下使得第二个目标尽可能成立，于是，我们将第一个目标函数

$$\min S = \int_{time_1}^{time_2} T(hot) dt - (time_2 - time_1) \times 217$$

改写的约束条件：

$$S \leq 406.163(1 + 5\%)$$

考虑到实际求解过程未必可以达到问题三所求解的超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小的情况，我们适当对其进行放缩，在满足一定的容错率的基础上，适当调整限制，使得第二个目标尽可能达到预期。同时为了满足第一个目标尽可能成立，我们将容错率设为 5%，第一个目标的最优值为 $406.16^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}$ 。

综上所述，基于分层序列法求解双目标优化模型为

$$\min SK$$

$s.t.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{温度变化速率约束: } 0 \leq \left| \frac{\partial T(h,t)}{\partial t} \right| \leq 3 \\ \text{峰值温度约束: } 240 \leq T(h,t)_{\max} \leq 250 \\ \text{温度上升过程时间约束1: } 60 \leq \Delta t \Big|_{150 \leq T(h,t) \leq 190} \leq 120 \\ \text{温度上升过程时间约束2: } 40 \leq \Delta t \Big|_{T(h,t) \geq 127} \leq 90 \\ \text{传送带速度约束: } 65 \leq v \leq 100 \\ \text{温度可调整幅度: } r_k - 10 \leq u_k \leq r_k + 10 \quad k=1, 2 \\ \text{小温区1~5温度相同: } u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \\ \text{小温区8~9温度相同: } u_8 = u_9 \\ \text{小温区10~11温度相同: } u_{10} = u_{11} = 25 \\ \text{第一个目标函数约束: } S \leq 406.163(1+5\%) \end{array} \right.$$

5.5.2 基于遍历法的最优炉温曲线确定

step 1: 初次遍历搜索: 在约束条件中, 已经对各温度条件进行限制, 初次搜索在约束条件的限制的最大范围内进行搜索, 小温区 1~5 以 10 为步长, 过炉速度以 5 为步长进行搜索, 得到第一次遍历的搜索结果: 小温区 1~5 温度为 177°C , 小温区 6 的温度为 189°C , 小温区 7 的温度为 229°C , 小温区 8~9 的温度为 265°C , 过炉速度为 90cm/min 。下图分别是第一次遍历搜索、第二次遍历搜索、第三次遍历搜索、第四次遍历搜索得到的解的散点图:

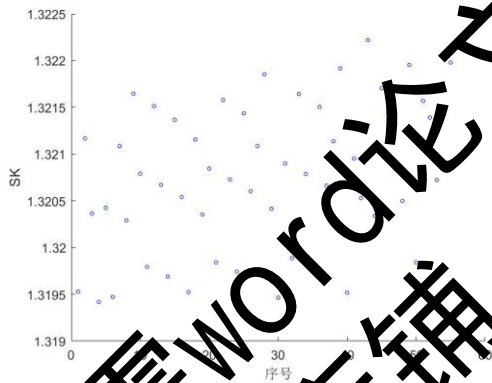


图 25: 初次遍历结果图

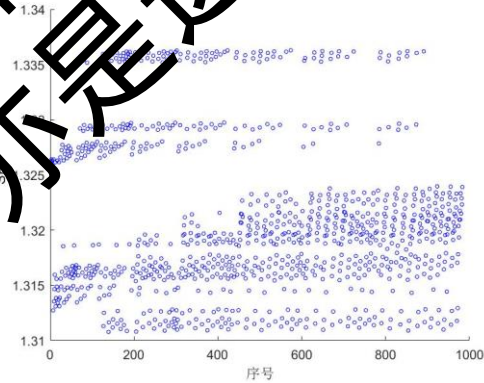


图 26: 第二次遍历结果

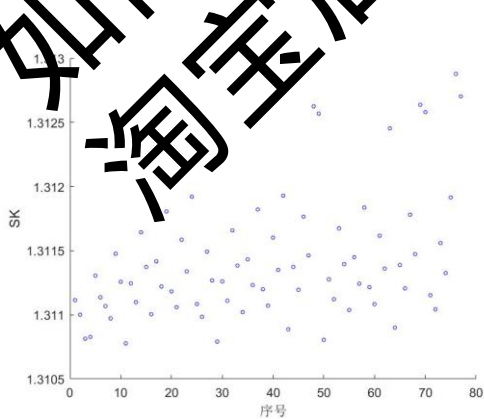


图 27: 第三次遍历结果图

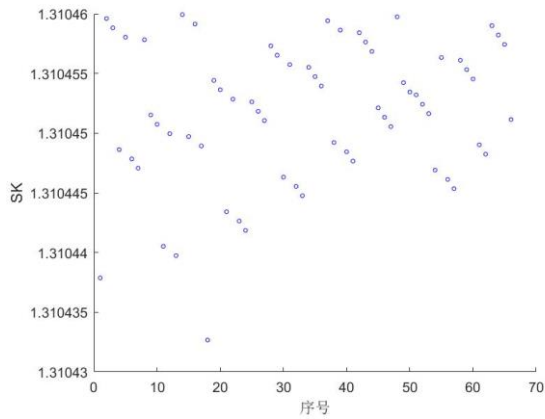


图 28: 第四次遍历结果

step 2：第二次遍历搜索：根据初次遍历搜索的结果，我们在得到的解的基础上缩小步长将小温区 1-9 的步长设为 1，过炉速度的步长也设为 1，得到第二次遍历搜索的结果：小温区 1-5 温度为 175°C ，小温区 6 的温度为 186°C ，小温区 7 的温度为 230°C ，小温区 8-9 的温度为 264°C ，过炉速度为 $88\text{cm}/\text{min}$ 。

step 3：第三、四次遍历搜索：在第二次遍历的基础上，再次缩小遍历步长，使得到的结果更精确，我们将小温区 1-9 的步长最终缩小到 0.1，将过炉速度的步长最终缩小到 0.1，得到最小偏度系数为 1.31，超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小及对应的各小温区温度及过炉速度如下：

表 4 最优炉温曲线对应方案

位置	温区 1-5	温区 6	温区 7	温区 8-9	温区 10-11	速度	阴影面积
数值	174.7	185.5	230.3	264.3	265	88	412.2017

加入使超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称的目标后，求得的超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小值增加为 $412.20^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$ ，相较于未增加第二个目标时略有提高，其偏度系数最小时对应的各小温区的温度相较于未增加第二个目标时略有改变且温区 8-9 的改变最小，可以忽略，因此可以发现问题四的结果在一定程度上继承问题三的结果，而问题四模型的建立基于问题三模型的建立，因此，模型与结果相照应，证明模型的合理性与完备性。

5.5.3 灵敏度分析

为探究各温区不同温度和传送带过炉速度对阴影部分面积及偏度系数的影响，采用单因素分析法，将各温区温度和过炉速度在最优炉温曲线方案分别上下浮动 1% 和 2%，观察阴影部分面积与偏度系数的变化情况：

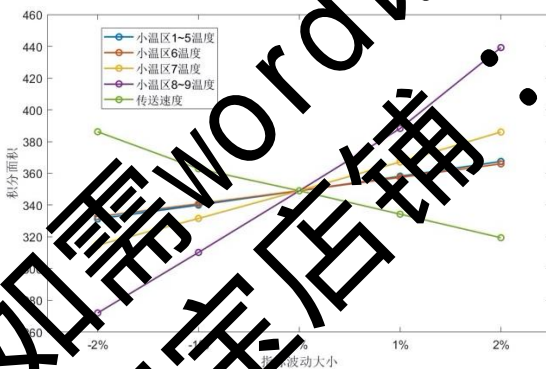


图 29：阴影部分面积灵敏度分析

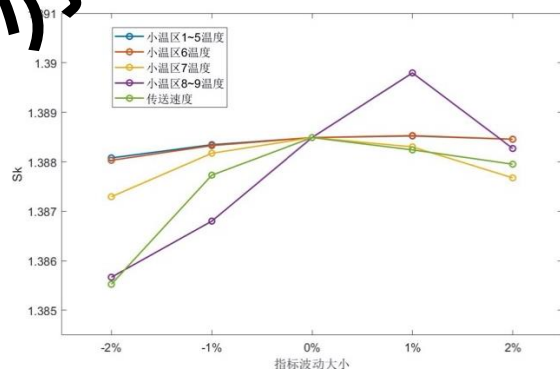


图 30：偏度系数灵敏度分析

①阴影面积：当传送带过炉速度数值上下浮动2%时，阴影部分面积单调递减，并且浮动不超过5%，可认为较为稳定。同时，当各小温区温度上下浮动2%时，阴影部分面积单调递增，针对小温区8-9温度的变化更为灵敏，对小温区1-6的温度变化较为稳定。

②偏度系数：当传送带过炉速度与各个温区温度数值上下浮动2%时，偏度系数呈现先单调递增后递减的趋势。其中，小温区1-7的温度变化对偏度系数影响不大，较为稳定。但是，对于传送带过炉速度及小温区8-9的温度变化较为灵敏，尤其是

小温区8-9的温度较高，一旦产生轻微变化，即会影响炉温曲线在217℃以上的曲线，改变其对称性，因此是合理的。

六、模型的评价

6.1 模型的优点

1. 问题一中结合传热学背景知识，切合实际的建立关于时间与空间的温度分布模型，并利用有限差分法将其转化为差分方程，综合运用最小二乘法、遍历法求解炉温曲线，误差小且精度高。

2. 问题二中对于单目标规划的求解，采用了遍历算法和二分算法两种解法分别求解，并进行对比使得结果更加有说服力。

3. 问题三中利用粒子群算法求解多变量的单目标规划模型，剪精度高且速度快，适用性强。

4. 问题四中引入统计学中的偏度系数衡量对称性，将双目标规划问题转化为单目标规划问题，使得求解方便，结果直观科学，符合实际。

6.2 模型的缺点

1. 由于时间有限，对于电路板的焊接过程进行简单的物化机理分析，并忽略了微小变化的热辐射反应。

2. 囿于小温区9与小温区10边缘温度差异较大，导致其间隙温度线性曲线极为陡峭，因此拟合程度不高。

6.3 模型的改进

在建模过程中，我们可以考虑三维热传导模型，使模型更加契合实际，可以研究任意位置处的温度情况。同时，后续可根据双目标优化模型寻找更加快速的求解算法，提高计算的效率与精度。

6.4 模型的推广

结合传热学背景知识，模型在电路板的焊接过程和研究热传递过程等方面有众多的应用。本文使用的优化模型可应用于各类隔热材料设计的问题中，适应性强；解决计算难的问题。本文采用的有限差分方法求偏微分方程的数值解，能够解决偏微分方程求解难的问题。该优化设计体系可应用于各领域，例如：电路板焊接温度分布、保温服装设计等。

七、参考文献

- [1] 谢再晋,林用满,刘友举.实验室回流焊接温度曲线的设计与应用[J].焊接技术,2010,39(06):29-31
- [2] 高金刚,吴懿平,丁汉.基于加热因子的回流曲线的优化与控制[J].电子工业专用设备,2006(08):23-29.
- [3] 贾海峰.一维热传导方程的推导[J].科技信息,2013(02):159.
- [4] 王跃平.基于有限差分法的铸造热应力数值模拟[D].哈尔滨工业大学,2013.
- [5] 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型[M].北京:高等教育出版社,2011.

[6] <https://baike.baidu.com/item/偏度系数/7595119?fr=aladdin> 2022.8.17

[7] 《数学辞海》第1卷：山西教育出版社，2002

附录

附录 1	
支撑材料	
源代码	<ul style="list-style-type: none"> problem_0_1 problem_0_2 problem_1_1 problem_1_2 problem_2_1 problem_2_2 problem_2_3 problem_3_1 problem_3_2 problem_3_3 problem_3_4 problem_3_5 problem_4_1 problem_4_2 problem_4_3 problem_4_4 problem_4_5 problem_4_6 problem_4_7 代码说明
数据	<ul style="list-style-type: none"> result 附件 问前_拟合数据 问前_热系数 问题二_结果 问题三_结果 问题四_第二次遍历结果 问题四_第三次遍历结果 问题四_第四次遍历结果 问题四_第一次遍历结果 问题四_结果 问题_结果
文献	<ul style="list-style-type: none"> 基于初热因子的回流曲线的优化与控制_高金刚 基于有限差分法的铸造热应力数值模拟_王跃平 实验室回流焊接温度曲线的设计与应用_谢再晋 数学模型 姜启源第四版电子书(2) 一维热传导方程的推导
图片	<ul style="list-style-type: none"> 图片汇总

附录 2

问题一的代码

```

clc; clear; % 问题一
global F v T
F=[25,173,198,230,257,25];
v=78/60;
W = 30.5;
Left = 25;
Right = 25;
gap = 5;
L=Left*2+W*11+gap*10; % 总长度
T=L/v; % 总时间
dt=0.5; % 时间变化率
t=0:dt:T; % 各个时间点
alpha = 7.15e-04;
H1 = 6975.37;
H2 = 97.60;
xm=[alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H2];
u=heat(xm);

X3 = Left + W*2 + gap*2 + W/2;
X6 = Left + W*5 + gap*5 + W/2;
X7 = X6 + W + gap;
X8 = X7 + gap + 1.5*W;
tt3 = X3/v;
tt6 = X6/v;
tt7 = X7/v;
tt8 = X8/v;

z_Time = t;
z_Temp = u;

plot(t*v,u,'linewidth',2);
xlabel('距离 (cm)');
ylabel('温度 (°C)');
title('炉温曲线');
daspect([1,1,1]);
v=78/60;
F=[25,173,198,230,257,25];
global F
l=5; L=30.5; s=25;
x1=0; x2=2*s;
x3=x2+5*L+4*s; x4=x3+l;
x5=x4+L; x6=x5+l;
x7=x6+L; x8=x7+l;
x9=x8+2*L+l; x10=x9+l;
y=(exp(0.2007*x)+24).*(x<=x2)+F(2).*(x>x2).*(x<=x3)+((F(3)-F(2))/l).*(x-
x3)+F(2)).*(x>x3).*(x<=x4)+F(3).*(x>x4).*(x<=x5)...
+((F(4)-F(3))/l).*(x-x5)+F(3)).*(x>x5).*(x<=x6)+F(4).*(x>x6).*(x<=x7)...
+((F(5)-F(4))/l).*(x-x7)+F(4)).*(x>x7).*(x<=x8)+F(5).*(x>x8).*(x<=x9)...
+((F(6)-F(5))/l).*(x-x9)+F(5)).*(x>x9).*(x<=x10)+F(6).*(x>x10);
end

function t=heat(xm)
global T v

```

```

L1=25+5*30.5+5*5;
L2=L1+30.5+5;
L3=L2+30.5+5;
t1=L1/v;
t2=L2/v;
t3=L3/v;
dt=0.5;
m1=floor(t1/dt)+1;
m2=floor(t2/dt)+1;
m3=floor(t3/dt)+1;

l=0.015;
x=1e-4;
q1=xm(1)^2*dt/(x^2);
q2=xm(3)^2*dt/(x^2);
q3=xm(5)^2*dt/(x^2);
q4=xm(7)^2*dt/(x^2);
q5=xm(9)^2*dt/(x^2);
h1=xm(2);
h2=xm(4);
h3=xm(6);
h4=xm(8);
h5=xm(10);
n=ceil(l/x)+1;
m=floor(T/dt)+1;
u=zeros(n,m);
t=ones(m,1)*25;
u(:,1)=25;
u0=f(v*(0:floor(T/dt))*dt);
k=ceil(l/2/x);
A1=diag([1+h1*x,2*ones(1,n-2)*(1+q1),1+h1*x],1);
A1=A1+diag([-1,-q1*ones(1,n-2)],1);
A1=A1+diag([-q1*ones(1,n-2),-1],-1);
B1=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q1),0]);
B1=B1+diag([0,q1*ones(1,n-2)],1);
B1=B1+diag([q1*ones(1,n-2),0],-1);
C1=A1\B1;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h1*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
for j=1:m-1
    t(j)=t(j)+1;
    u(:,j+1)=C1*u(:,j)-c(:,j+1);
    t(j+1)=t(j)+1;
end

A2=diag([1+h2*x,2*ones(1,n-2)*(1+q2),1+h2*x],1);
A2=A2+diag([-1,-q2*ones(1,n-2)],1);
A2=A2+diag([-q2*ones(1,n-2),-1],-1);
B2=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q2),0]);
B2=B2+diag([0,q2*ones(1,n-2)],1);
B2=B2+diag([q2*ones(1,n-2),0],-1);
C2=A2\B2;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h2*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A2\c;
for j=m1:m2-1
    u(:,j+1)=C2*u(:,j)+c(:,j+1);

```

```

        t(j+1)=u(k,j+1);
    end

    A3=diag([1+h3*x,2*ones(1,n-2)*(1+q3),1+h3*x]);
    A3=A3+diag([-1,-q3*ones(1,n-2)],1);
    A3=A3+diag([-q3*ones(1,n-2),-1],-1);
    B3=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q3),0]);
    B3=B3+diag([0,q3*ones(1,n-2)],1);
    B3=B3+diag([q3*ones(1,n-2),0],-1);
    C3=A3\B3;
    c=zeros(n,m); c(1,:)=h3*u0*x;
    c(n,:)=c(1,:);
    c=A3\c;
    for j=m2:m3-1
        u(:,j+1)=C3*u(:,j)+c(:,j+1);
        t(j+1)=u(k,j+1);
    end

```

```

    A4=diag([1+h4*x,2*ones(1,n-2)*(1+q4),1+h4*x]);
    A4=A4+diag([-1,-q4*ones(1,n-2)],1);
    A4=A4+diag([-q4*ones(1,n-2),-1],-1);
    B4=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q4),0]);
    B4=B4+diag([0,q4*ones(1,n-2)],1);
    B4=B4+diag([q4*ones(1,n-2),0],-1);
    C4=A4\B4;
    c4(1,:)=h4*u0*x;
    c4(n,:)=c4(1,:);
    c4=A4\c4;
    A5=diag([1+h5*x,2*ones(1,n-2)*(1+q5),1+h5*x]);
    A5=A5+diag([-1,-q5*ones(1,n-2)],1);
    A5=A5+diag([-q5*ones(1,n-2),-1],-1);
    B5=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q5),0]);
    B5=B5+diag([0,q5*ones(1,n-2)],1);
    B5=B5+diag([q5*ones(1,n-2),0],-1);
    C5=A5\B5;
    c5(1,:)=h5*u0*x;
    c5(n,:)=c5(1,:);
    c5=A5\c5;
    for j=m2:m-1
        if t(j)>=t(j-1)
            u(:,j+1)=C4*u(:,j)+c4(:,j+1);
        else
            u(:,j+1)=C5*u(:,j)+c5(:,j+1);
        end
        t(j+1)=u(k,j+1);
    end
end

```

附录 3

问题二的代码

```

clc; clear; %问题二
global F v T xm
F=[25 182 203 237 254 25];

```

```

L=50+30.5*11+5*10;
alpha = 7.15e-04;
H1 = 6975.37;
H2 = 97.60;
xm=[alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H2];
T_150_190_Arr=zeros(41,1);
T_217_Arr=T_150_190_Arr;
T_Max_Arr=T_150_190_Arr;
K_Max_Arr=T_150_190_Arr;

% 遍历温度
for i=0:40
    v=1+i/60;      % 本次遍历的速度
    T=L/v;          % 总时间
    u=heat(xm);      % 温度分布
    T_217=find(u>=217);
    T_217_Arr(i+1)=(length(T_217)-1)*0.5;
    T_Max_Arr(i+1)=max(u);
    tmp3=abs(u(2:length(u))-u(1:length(u)-1))/0.5;
    K_Max_Arr(i+1)=max(tmp3);
    u=u(u(2:length(u))>=u(1:length(u)-1));
    u=u(u>=150);
    u=u(u<=190);
    T_150_190_Arr(i+1)=(length(u)-1)*0.5;
end

figure
ax1=subplot(2,2,1);ax2=subplot(2,2,2);
ax3=subplot(2,2,3);ax4=subplot(2,2,4);
plot(ax1,60:100,K_Max_Arr);
title(ax1,'斜率的最大值与过炉速度的关系');
xlabel(ax1,'过炉速度 (cm/min)');ylabel(ax1,'斜率');

plot(ax2,60:100,T_Max_Arr);
title(ax2,'温度峰值与过炉速度的关系');
xlabel(ax2,'过炉速度 (cm/min)');ylabel(ax2,'温度 (°C)');

plot(ax3,60:100,T_150_190_Arr);
title(ax3,'升温期温度在150-190°C的时长与过炉速度的关系');
xlabel(ax3,'过炉速度 (cm/min)');ylabel(ax3,'时间(s)');

plot(ax4,60:100,T_217_Arr);
title(ax4,'温度≥217°C的时长与过炉速度的关系');
xlabel(ax4,'过炉速度 (cm/min)');ylabel(ax4,'时间(s)');

v1=60/60; v2=100/60;
while 1
    v=(v1+v2)/2;
    T=L/v;
    if check()
        v1=v;
    else
        v2=v;
    end
end

```

```

        if v2-v1<1e-4
            break;
        end
    end
end
v=(v1+v2)/2*60;

```

```

function y=f(x)
global F
gap=5;
W=30.5;

```

```

x1=0;
x2=25;
x3=x2+5*W+4*gap;
x4=x3+gap;
x5=x4+W;
x6=x5+gap;
x7=x6+W;
x8=x7+gap;
x9=x8+2*W+gap;
x10=x9+gap;
y=(exp(0.2007*x)+24).*(x<=x2)+F(2).*(x>x2).*(x<=x3)+((F(3)-F(2))/gap).*(x-
x3)+F(2)).*(x>x3).*(x<=x4)+F(3).*(x>x4).*(x<=x5).*(x-
+((F(4)-F(3))/gap).*(x-x5)+F(3)).*(x>x5).*(x<=x6)+F(4).*(x>x6).*(x<=x7)..
+((F(5)-F(4))/gap).*(x-x7)+F(4)).*(x>x7).*(x<=x8)+F(5).*(x>x8).*(x<=x9)...
+((F(6)-F(5))/gap).*(x-x9)+F(5)).*(x>x9).*(x<=x10)+F(6).*(x>x10);
end

```

```

function t=heat(xm)
global T v
L1=25+5*30.5+5*5;
L2=L1+30.5+5;
L3=L2+30.5+5;
t1=L1/v;t2=L2/v;t3=L3/v;
dt=0.5;
m1=floor(t1/dt)+1;
m2=floor(t2/dt)+1;
m3=floor(t3/dt)+1;
n1=2*5;
n2=10;
r1=xm(1)^2*dt/(x^4);
r2=xm(3)^2*dt/(x^2);
r3=xm(5)^2*dt/(x^2);
r4=xm(7)^2*dt/(x^2);
r5=xm(9)^2*dt/(x^2);
h1=xm(2);h2=xm(4);h3=xm(6);h4=xm(8);h5=xm(10);
n=ceil(l/x)+1; m=floor(T/dt)+1;
u=zeros(n,m);t=ones(m,1)*25;
u(:,1)=25;
u0=f(v*(0:floor(T/dt))*dt);
k=ceil(l/2/x);
A1=diag([1+h1*x,2*ones(1,n-2)*(1+r1),1+h1*x]);
A1=A1+diag([-1,-r1*ones(1,n-2)],1);
A1=A1+diag([-r1*ones(1,n-2),-1],-1);
B1=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r1),0]);

```



```

B1=B1+diag([0,r1*ones(1,n-2)],1);
B1=B1+diag([r1*ones(1,n-2),0],-1);
C1=A1\B1;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h1*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A1\c;
for j=1:m1-1
    u(:,j+1)=C1*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A2=diag([1+h2*x,2*ones(1,n-2)*(1+r2),1+h2*x]);
A2=A2+diag([-1,-r2*ones(1,n-2)],1);
A2=A2+diag([-r2*ones(1,n-2),-1],-1);
B2=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r2),0]);
B2=B2+diag([0,r2*ones(1,n-2)],1);
B2=B2+diag([r2*ones(1,n-2),0],-1);
C2=A2\B2;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h2*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A2\c;
for j=m1:m2-1
    u(:,j+1)=C2*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A3=diag([1+h3*x,2*ones(1,n-2)*(1+r3),1+h3*x]);
A3=A3+diag([-1,-r3*ones(1,n-2)],1);
A3=A3+diag([-r3*ones(1,n-2),-1],-1);
B3=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r3),0]);
B3=B3+diag([0,r3*ones(1,n-2)],1);
B3=B3+diag([r3*ones(1,n-2),0],-1);
C3=A3\B3;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h3*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A3\c;
for j=m2:m3-1
    u(:,j+1)=C3*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A4=diag([1+h4*x,2*ones(1,n-2)*(1+r4),1+h4*x]);
A4=A4+diag([-1,-r4*ones(1,n-2)],1);
A4=A4+diag([-r4*ones(1,n-2),-1],-1);
B4=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r4),0]);
B4=B4+diag([0,r4*ones(1,n-2)],1);
B4=B4+diag([r4*ones(1,n-2),0],-1);
C4=A4\B4;
c4(1,:)=h4*u0*x;
c4(n,:)=c4(1,:);
c4=A4\c4;

```

```

A5=diag([1+h5*x,2*ones(1,n-2)*(1+r5),1+h5*x]);
A5=A5+diag([-1,-r5*ones(1,n-2)],1);
A5=A5+diag([-r5*ones(1,n-2),-1],-1);
B5=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r5),0]);

```

```

B5=B5+diag([0,r5*ones(1,n-2)],1);
B5=B5+diag([r5*ones(1,n-2),0],-1);
C5=A5\B5;
c5(1,:)=h5*u0*x;
c5(n,:)=c5(1,:);
c5=A5\c5;
for j=m3:m-1
    if t(j)>=t(j-1)
        u(:,j+1)=C4*u(:,j)+c4(:,j+1);
    else
        u(:,j+1)=C5*u(:,j)+c5(:,j+1);
    end
    t(j+1)=u(k,j+1);
end
end

function y=check()
    global xm
    u=heat(xm);
    Arr_217=find(u>=217);
    T217=length(Arr_217)*0.5;
    TMax=max(u);
    K=abs(u(2:length(u))-u(1:length(u)-1))/0.5;
    KMax=max(K);
    s=u( u(2:length(u))>=u(1:length(u)-1) );
    s=s(s>=150);
    s=s(s<=190);
    T_60_120=length(s)*0.5;
    y=(TMax<=250)*(TMax>=240)...
        *(T217>=40)*(T217<=90)...
        *(KMax<=3)...
        *(T_60_120<=120)*(T_60_120>=60);
end

```

附录 4

问题三的代码

```

clear; % 问题三
global xm L u0
L=50+30.5*11.5*10^-5;
alpha = 7.17e-04;
H1 = 697.12/;
H2 = 97.60;
xm=[alpha,H1,alpha;H1,alpha;H1,alpha;H2];
x=[];

% 粒子群找最优解
[x, fv]=PSO(@area, 60 ,0.8, 2, 2,[185,205,245,265,10/6],[165,185,225,245,65/60],1000,5);

F=[25,x(1),x(2),x(3),x(4),25];
v=x(5);
T=L/v;
S=area(x);
t=0:0.5:T;
k=find(u0==max(u0));

```

```

figure
hold on
plot(t,u0, 'blue', 'linewidth', 1.5);
hold on;
plot(t,217*ones(length(t),1), 'red', 'linewidth', 1.5);
xlabel('时间/s');
ylabel('温度/°C');
title('炉温曲线');
text(T,217,'T=217°C','color','black');
line([t(k),t(k)],[0,280], 'color', 'g', 'linewidth', 1.5);
daspect([1,1.6,1]);

```

```

function y=f(x,F)
l=5; L=30.5; s=25;
x1=0; x2=25;
x3=x2+5*L+4*l; x4=x3+1;
x5=x4+L; x6=x5+1;
x7=x6+L; x8=x7+1;
x9=x8+2*L+1; x10=x9+1;
y=(exp(0.2007*x)+24).*(x<=x2)+F(2).*(x>x2).*(x<=x3)+((F(3)-F(2))/l).*(x-
x3)+F(2)).*(x>x3).*(x<=x4)+F(3).*(x>x4).*(x<=x5).
+((F(4)-F(3))/l).*(x-x5)+F(3)).*(x>x5).*(x<=x6)+F(4).*(x-x6).*(x<=x7)...
+((F(5)-F(4))/l).*(x-x7)+F(4)).*(x>x7).*(x<=x8)+F(5).*(x-x8).*(x<=x9)...
+((F(6)-F(5))/l).*(x-x9)+F(5)).*(x>x9).*(x<=x10)+F(6).*(x>x10);
end

```

```

function t=heat(u1,u2,u3,u4,v)
global xm L
F=[25,u1,u2,u3,u4,25]; T=L/v;
L1=25+5*30.5+5*5;
L2=L1+30.5+5;
L3=L2+30.5+5;
t1=L1/v;t2=L2/v;t3=L3/v;
dt=0.5;
m1=floor(t1/dt)+1;
m2=floor(t2/dt)+1;
m3=floor(t3/dt)+1;
r=0.015;
x=e-4;
q1=xm(1)^2*dt/(x^2);
q2=xm(3)^2*dt/(x^2);
q3=xm(5)^2*dt/(x^2);
q4=xm(7)^2*dt/(x^2);
q5=xm(9)^2*dt/(x^2);
h1=xm(2);
h2=xm(4);
h3=xm(6);
h4=xm(8);
h5=xm(10);
n=ceil(l/x)+1; m=floor(T/dt)+1;
u=zeros(n,m);t=ones(m,1)*25;
u(:,1)=25;
u0=f(v*(0:floor(T/dt))*dt,F);
k=ceil(l/2/x);

```

```

A1=diag([1+h1*x,2*ones(1,n-2)*(1+q1),1+h1*x]);
A1=A1+diag([-1,-q1*ones(1,n-2)],1);
A1=A1+diag([-q1*ones(1,n-2),-1],-1);
B1=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q1),0]);
B1=B1+diag([0,q1*ones(1,n-2)],1);
B1=B1+diag([q1*ones(1,n-2),0],-1);
C1=A1\B1;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h1*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A1\c;
for j=1:m1-1
    u(:,j+1)=C1*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A2=diag([1+h2*x,2*ones(1,n-2)*(1+q2),1+h2*x]);
A2=A2+diag([-1,-q2*ones(1,n-2)],1);
A2=A2+diag([-q2*ones(1,n-2),-1],-1);
B2=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q2),0]);
B2=B2+diag([0,q2*ones(1,n-2)],1);
B2=B2+diag([q2*ones(1,n-2),0],-1);
C2=A2\B2;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h2*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A2\c;
for j=m1:m2-1
    u(:,j+1)=C2*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A3=diag([1+h3*x,2*ones(1,n-2)*(1+q3),1+h3*x]);
A3=A3+diag([-1,-q3*ones(1,n-2)],1);
A3=A3+diag([-q3*ones(1,n-2),-1],-1);
B3=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q3),0]);
B3=B3+diag([0,q3*ones(1,n-2)],1);
B3=B3+diag([q3*ones(1,n-2),0],-1);
C3=A3\B3;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h3*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A3\c;
for j=m2:m3-1
    u(:,j+1)=C3*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A4=diag([1+h4*x,2*ones(1,n-2)*(1+q4),1+h4*x]);
A4=A4+diag([-1,-q4*ones(1,n-2)],1);
A4=A4+diag([-q4*ones(1,n-2),-1],-1);
B4=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q4),0]);
B4=B4+diag([0,q4*ones(1,n-2)],1);
B4=B4+diag([q4*ones(1,n-2),0],-1);
C4=A4\B4;
c4(1,:)=h4*u0*x;
c4(n,:)=c4(1,:);
c4=A4\c4;

```

```

A5=diag([1+h5*x,2*ones(1,n-2)*(1+q5),1+h5*x]);
A5=A5+diag([-1,-q5*ones(1,n-2)],1);
A5=A5+diag([-q5*ones(1,n-2),-1],-1);
B5=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-q5),0]);
B5=B5+diag([0,q5*ones(1,n-2)],1);
B5=B5+diag([q5*ones(1,n-2),0],-1);
C5=A5\B5;
c5(1,:)=h5*u0*x;
c5(n,:)=c5(1,:);
c5=A5\c5;
for j=m3:m-1
    if t(j)>=t(j-1)
        u(:,j+1)=C4*u(:,j)+c4(:,j+1);
    else
        u(:,j+1)=C5*u(:,j)+c5(:,j+1);
    end
    t(j+1)=u(k,j+1);
end
end

function a=area(x)
global u0
u0=heat(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5));
u=u0(u0>=30);
tmp2=u(u>=217)-217;
t2=length(tmp2)*0.5;
TMax=max(u);
tmp3=abs(u(2:length(u))-u(1:length(u)-1))/0.5;
KMax=max(tmp3);
s=u(u(2:length(u))>=u(1:length(u)-1));
s=s(s>=150);
s=s(s<=190);
t1=length(s)*0.5;

y=logical((TMax<=250)*(TMax>=240)*(t2>=40)*(t2<=90)*(KMax<=3)*(t1<=120)*(t1>=60));
if y
    k=find(tmp2==max(tmp2));
    if k>2
        a=(sum(tmp2(1:k))+(tmp2(1)+tmp2(k))/2)*0.5;
    else
        a=(tmp2(1)+tmp2(k))*0.5/2;
    end
else
    a=inf;
end
end

```

附录 5

问题四的代码

```

clc; clear; % 第四问
%第一次遍历
-----
L=50+30.5*11+5*10;
alpha = 7.15e-04;
H1 = 6975.37;
H2 = 97.60;

```

```

xm=[alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H2];

Temp15 = 165:5:185;
Temp6 = 185:5:205;
Temp7 = 225:5:245;
Temp89 = 245:5:265;
V = 65:5:100;

Z_SArr = [];
n = 0;
Z_Sk = [];

T1 = [];
T2 = [];
T3 = [];
T4 = [];
T5 = [];
T6 = [];
T7 = [];
T8 = [];

Z_Result = zeros(1, 5);
i1 = 1;
for i1=1:length(Temp15)
    i1
    for i2=1:length(Temp6)
        for i3=1:length(Temp7)
            for i4=1:length(Temp89)
                for i5=1:length(V)
                    x = [Temp15(i1) Temp6(i2) Temp7(i3) Temp89(i4) V(i5)/60];

                    u0 = GetTemp(x(1),x(2),x(3),x(4), x(5));

                    V=x(5);
                    T=[25,x(1),x(2),x(3),x(4),25];
                    T=L/v;
                    t=0:0.5:T;
                    S=-1;
                    t=area1(x,u0);
                    if t>0.99
                        S=tt;
                    end
                    n = n+1;

                    Z_SArr(n) = S;

                    % 所有大于 217 的温度
                    AllTemp = u0(u0>217);

                    %plot(1:1:length(AllTemp), AllTemp);
                    hold on;

                    Xbar = sum(AllTemp)/length(AllTemp); % 均值

```



```

r2=xm(3)^2*dt/(x^2);
r3=xm(5)^2*dt/(x^2);
r4=xm(7)^2*dt/(x^2);
r5=xm(9)^2*dt/(x^2);
h1=xm(2);h2=xm(4);h3=xm(6);h4=xm(8);h5=xm(10);
n=ceil(l/x)+1; m=floor(T/dt)+1;
u=zeros(n,m);t=ones(m,1)*25;
u(:,1)=25;
u0=f(v*(0:floor(T/dt))*dt,F);
k=ceil(l/2/x);
A1=diag([1+h1*x,2*ones(1,n-2)*(1+r1),1+h1*x],1);
A1=A1+diag([-1,-r1*ones(1,n-2)],1);
A1=A1+diag([-r1*ones(1,n-2),-1],-1);
B1=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r1),0]);
B1=B1+diag([0,r1*ones(1,n-2)],1);
B1=B1+diag([r1*ones(1,n-2),0],-1);
C1=A1\B1;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h1*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A1\c;
for j=1:m1-1
    u(:,j+1)=C1*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

%第四次遍历

```

A2=diag([1+h2*x,2*ones(1,n-2)*(1+r2),1+h2*x],1);
A2=A2+diag([-1,-r2*ones(1,n-2)],1);
A2=A2+diag([-r2*ones(1,n-2),-1],-1);
B2=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r2),0]);
B2=B2+diag([0,r2*ones(1,n-2)],1);
B2=B2+diag([r2*ones(1,n-2),0],-1);
C2=A2\B2;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h2*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A2\c;
for j=m1:m2-1
    u(:,j+1)=C2*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

A3=diag([1+h3*x,2*ones(1,n-2)*(1+r3),1+h3*x],1);
A3=A3+diag([-1,-r3*ones(1,n-2)],1);
A3=A3+diag([-r3*ones(1,n-2),-1],-1);
B3=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r3),0]);
B3=B3+diag([0,r3*ones(1,n-2)],1);
B3=B3+diag([r3*ones(1,n-2),0],-1);
C3=A3\B3;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h3*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A3\c;
for j=m2:m3-1
    u(:,j+1)=C3*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A4=diag([1+h4*x,2*ones(1,n-2)*(1+r4),1+h4*x]);
A4=A4+diag([-1,-r4*ones(1,n-2)],1);
A4=A4+diag([-r4*ones(1,n-2),-1],-1);
B4=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r4),0]);
B4=B4+diag([0,r4*ones(1,n-2)],1);
B4=B4+diag([r4*ones(1,n-2),0],-1);
C4=A4\B4;
c4(1,:)=h4*u0*x;
c4(n,:)=c4(1,:);
c4=A4\c4;

```

```

A5=diag([1+h5*x,2*ones(1,n-2)*(1+r5),1+h5*x]);
A5=A5+diag([-1,-r5*ones(1,n-2)],1);
A5=A5+diag([-r5*ones(1,n-2),-1],-1);
B5=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r5),0]);
B5=B5+diag([0,r5*ones(1,n-2)],1);
B5=B5+diag([r5*ones(1,n-2),0],-1);
C5=A5\B5;
c5(1,:)=h5*u0*x;
c5(n,:)=c5(1,:);
c5=A5\c5;
for j=m3:m-1
    if t(j)>=t(j-1)
        u(:,j+1)=C4*u(:,j)+c4(:,j+1);
    else
        u(:,j+1)=C5*u(:,j)+c5(:,j+1);
    end
    t(j+1)=u(k,j+1);
end
end

```

```

% a: 积分面积
function [a]=areal(x,u0)

```

```

S=0;
n=length(u0)-1;
% 温度大于 217 的部分
tmp1=u(u>=217)-217;
tmp2=tmp1-mp2;
tmp2=length(tmp2)*0.5;
umax=max(tmp2);
tmp3=abs(u(2:length(u))-u(1:length(u)-1))/0.5;
kmax=max(tmp3);
s=u(2:length(u))>=u(1:length(u)-1);
s=s(s>=150);
s=s(s<=190);
t1=length(s)*0.5;

```

```

y=logical((umax<=250)*(umax>=240)*(t2>=40)*(t2<=90)*(kmax<=3)*(t1<=120)*(t1>=60));
% 如果满足第三问的条件
if y
    k=find(tmp2==max(tmp2));
    if k>2
        a=(sum(tmp2(1:k))-(tmp2(1)+tmp2(k))/2)*0.5;
    end
end

```

```

else
    a=(tmp2(1)+tmp2(k))*0.5/2;
end
if a > 406.1637111*1.05
    a=10000;
end

else
    a=10000;
end
%if a < 406.1637111 * 1.05

clc; clear; % 第四问

L=50+30.5*11+5*10;
alpha = 7.15e-04;
H1 = 6975.37;
H2 = 97.60;
xm=[alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H1;alpha;H2];

Temp15 = 174.6:0.1:174.8;
Temp6 = 185.4:0.1:186.6;
Temp7 = 230.2:0.1:230.4;
Temp89 = 264.2:0.1:264.4;
V = 87.5:0.1:88.5;

Z_SArr = [];
n = 0;
Z_Sk = [];

T1 = [];
T2 = [];
T3 = [];
T4 = [];
T5 = [];
T6 = [];
T7 = [];
T8 = [];
Z_SArr = zeros(1, 5);

for i1=1:length(Temp15)
    i1
    for i2=1:length(Temp6)
        for i3=1:length(Temp7)
            for i4=1:length(Temp89)
                for i5=1:length(V)
                    x = [Temp15(i1) Temp6(i2) Temp7(i3) Temp89(i4) V(i5)/60];

                    u0 = GetTemp(x(1),x(2),x(3),x(4), x(5));

                    v=x(5);
                    F=[25,x(1),x(2),x(3),x(4),25];

```

```
T=L/v;
t=0:0.5:T;
S = -1;
tt = area1(x, u0);
if tt < 999
    S = tt;

% 所有大于 217 的温度
AllTemp = u0(u0>217);

%plot(1:1:length(AllTemp), AllTemp);
hold on;

Xbar = sum(AllTemp)/length(AllTemp); % 均值
M0 = max(AllTemp); % 众数、最大值
Sigma2 = 0; % 方差
for i=1:length(AllTemp)
    Sigma2 = Sigma2 + (AllTemp(i)-Xbar)^2/length(AllTemp);
end
Sigma = Sigma2^(1/2);
Sk = abs(Xbar-M0)/Sigma;
if(Sk < 1.315)
    n = n+1;
    Z_SArr(n) = S;
    Z_Sk(n) = Sk;
    Z_Result(n, :) = x;
end
end
end
end
end
end
end
end
scatter(1:1:n, Z_Sk, 'r');
xlabel('序号');
ylabel('SK');
title('');

% 外部温度分布（斜线的那个图）
function y=f(x,F)
    gap=5; W=30.5; Left=25;
    x1=0; x2=25;
    x3=x2+5*W+4*gap; x4=x3+gap;
    x5=x4+W; x6=x5+gap;
    x7=x6+W; x8=x7+gap;
    x9=x8+2*W+gap; x10=x9+gap;
```

```

y=(exp(0.2007*x)+24).*(x<=x2)+F(2).*(x>x2).*(x<=x3)+((F(3)-F(2))/gap).*(x-
x3)+F(2)).*(x>x3).*(x<=x4)+F(3).*(x>x4).*(x<=x5)...
+((F(4)-F(3))/gap).*(x-x5)+F(3)).*(x>x5).*(x<=x6)+F(4).*(x>x6).*(x<=x7)...
+((F(5)-F(4))/gap).*(x-x7)+F(4)).*(x>x7).*(x<=x8)+F(5).*(x>x8).*(x<=x9)...
+((F(6)-F(5))/gap).*(x-x9)+F(5)).*(x>x9).*(x<=x10)+F(6).*(x>x10);
end

```

% 求温度分布

```
function t=GetTemp(u1,u2,u3,u4,v)
```

```
global xm L
```

```
F=[25,u1,u2,u3,u4,25]; T=L/v;
```

```
L1=25+5*30.5+5*5;
```

```
L2=L1+30.5+5;
```

```
L3=L2+30.5+5;
```

```
t1=L1/v;t2=L2/v;t3=L3/v;
```

```
dt=0.5;
```

```
m1=floor(t1/dt)+1;
```

```
m2=floor(t2/dt)+1;
```

```
m3=floor(t3/dt)+1;
```

```
l=0.015;
```

```
x=1e-4;
```

```
r1=xm(1)^2*dt/(x^2);
```

```
r2=xm(3)^2*dt/(x^2);
```

```
r3=xm(5)^2*dt/(x^2);
```

```
r4=xm(7)^2*dt/(x^2);
```

```
r5=xm(9)^2*dt/(x^2);
```

```
h1=xm(2);h2=xm(4);h3=xm(6);h4=xm(8);h5=xm(10);
```

```
n=ceil(l/x)+1; m=floor(T/dt)+1;
```

```
u=zeros(n,m);t=ones(m,1)*25;
```

```
u(:,1)=25;
```

```
u0=f(v*(0:floor(T/dt))*dt,F);
```

```
k=ceil(l/2/x);
```

```
A1=diag([1+h1*x,ones(1,n-2)*(1+r1),1-h1*x]);
```

```
A1=A1+diag([-r1*ones(1,n-2)],1);
```

```
A1=A1+diag([-r1*ones(1,n-2),-1],-1);
```

```
B1=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r2),0]);
```

```
B1=B1+diag([0,r1*ones(1,n-2)],1);
```

```
B1=B1+diag([r1*ones(1,n-2),0],-1);
```

```
C2=A1\B1;
```

```
c=zeros(n,m); c(1,:)=h1*u0*x;
```

```
c(:,1)=c(1,:);
```

```
i=A1\c;
```

```
for j=1:n-1;
```

```
u(:,j+1)=C1*u(:,j)+c(:,j+1);
```

```
(C1=C1)\u(k,j+1);
```

```
end
```

```
A2=diag([1+h2*x,2*ones(1,n-2)*(1+r2),1+h2*x]);
```

```
A2=A2+diag([-1,-r2*ones(1,n-2)],1);
```

```
A2=A2+diag([-r2*ones(1,n-2),-1],-1);
```

```
B2=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r2),0]);
```

```
B2=B2+diag([0,r2*ones(1,n-2)],1);
```

```
B2=B2+diag([r2*ones(1,n-2),0],-1);
```

```
C2=A2\B2;
```

```
c=zeros(n,m); c(1,:)=h2*u0*x;
```

```
c(n,:)=c(1,:);
```

```

c=A2\c;
for j=m1:m2-1
    u(:,j+1)=C2*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A3=diag([1+h3*x,2*ones(1,n-2)*(1+r3),1+h3*x]);
A3=A3+diag([-1,-r3*ones(1,n-2)],1);
A3=A3+diag([-r3*ones(1,n-2),-1],-1);
B3=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r3),0]);
B3=B3+diag([0,r3*ones(1,n-2)],1);
B3=B3+diag([r3*ones(1,n-2),0],-1);
C3=A3\B3;
c=zeros(n,m); c(1,:)=h3*u0*x;
c(n,:)=c(1,:);
c=A3\c;
for j=m2:m3-1
    u(:,j+1)=C3*u(:,j)+c(:,j+1);
    t(j+1)=u(k,j+1);
end

```

```

A4=diag([1+h4*x,2*ones(1,n-2)*(1+r4),1+h4*x]);
A4=A4+diag([-1,-r4*ones(1,n-2)],1);
A4=A4+diag([-r4*ones(1,n-2),-1],-1);
B4=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r4),0]);
B4=B4+diag([0,r4*ones(1,n-2)],1);
B4=B4+diag([r4*ones(1,n-2),0],-1);
C4=A4\B4;
c4(1,:)=h4*u0*x;
c4(n,:)=c4(1,:);
c4=A4\c4;

```

```

A5=diag([1+h5*x,2*ones(1,n-2)*(1+r5),1+h5*x]);
A5=A5+diag([-1,-r5*ones(1,n-2)],1);
A5=A5+diag([-r5*ones(1,n-2),-1],-1);
B5=diag([0,2*ones(1,n-2)*(1-r5),0]);
B5=B5+diag([0,r5*ones(1,n-2)],1);
B5=B5+diag([r5*ones(1,n-2),0],-1);
C5=A5\B5;
c5(1,:)=h5*u0*x;
c5(n,:)=c5(1,:);
c5=A5\c5;
for j=m3:m4-1
    if t(j)>=t(j-1)
        u(:,j+1)=C4*u(:,j)+c4(:,j+1);
    else
        u(:,j+1)=C5*u(:,j)+c5(:,j+1);
    end
    t(j+1)=u(k,j+1);
end
end

```

```

% a: 积分面积
function [a]=area1(x, u0)

```

```

S=0;

```

```

u=u0(u0>=30);
% 温度大于 217 的部分
tmp2=u(u>=217)-217;
Temp_217 = tmp2;
t2=length(tmp2)*0.5;
umax=max(u);
tmp3=abs(u(2:length(u))-u(1:length(u)-1))/0.5;
kmax=max(tmp3);
s=u(u(2:length(u))>=u(1:length(u)-1));
s=s(s>=150);
s=s(s<=190);
t1=length(s)*0.5;

y=logical((umax<=250)*(umax>=240)*(t2>=40)*(t2<=90)*(kmax<=3)*(t1<=120)*(t1>=60));
% 如果满足第三问的条件
if y
    k=find(tmp2==max(tmp2));
    if k>2
        a=(sum(tmp2(1:k))-(tmp2(1)+tmp2(k))/2)*0.5;
    else
        a=(tmp2(1)+tmp2(k))*0.5/2;
    end
    if a > 406.1637111*1.05
        a=10000;
    end
else
    a=10000;
end
end

```