

“危”楼高百尺

摘要

本文根据对古塔的 4 次测量数据，给出了确定古塔各层中心位置的通用方法，并分析古塔的变形情况及其变形趋势，最后完成了给相关部门的建议信。

为了计算的精度，我们首先对各变形量进行了合理的数学定义，并对附录的缺失数据进行合理的赋值。

针对问题一，我们通过**最小二乘法拟合**出观测点所在平面，再建立利用平面中求多边形重心的方法，得到了每次观测古塔各层中心坐标的通用方法及各层的中心点坐标。

针对问题二，我们对古塔的倾斜、弯曲和扭曲等变形情况，分别给予合理的数学描述，得到如下结论：

关于**倾斜变形**，我们定义了倾斜角 α ，即塔尖与底层中心的水平距离与塔高的比值；发现：1996 年—2009 年这 13 年的自然条件易加剧古塔的倾斜速度。

关于**弯曲变形**，我们定义了弯曲率 κ ，即用中心点所拟合出的空间曲线的曲率来描述古塔各处弯曲率；该古塔的弯曲程度非常小，且古塔的最大弯曲程度在逐年增大。同时，最近两次观测弯曲现象有“修正”倾向，可能由古塔的修复引起。

关于**扭曲变形**，我们定义了相对扭曲度 θ ，即用坐标的旋转变换角度描述古塔的扭曲变形情况。1986 年和 1996 年的扭曲角基本一样，2009 年的观测数据得到扭曲的角度比前面变小了，而且最高层变化最大。

针对问题三，我们考虑通过古塔的倾斜、弯曲及扭曲程度来分析古塔的变形趋势。由于数据量较少，我们建立了**时间序列分析模型**，得到了倾斜角 α 、弯曲率 κ 以及相对扭曲度 θ 的预测函数和误差检验，验证了模型的可靠性，并据此分析了古塔的变形趋势。

针对第四问，根据上文所求出来的趋势，建议政府部门对倾斜、弯曲及扭曲程度分开分析与处理，并参考国外修复，增加传统与现代的对话，让古塔有新的活力。

本文给予了各类现实意义上的名词合理的数学描述及模型，并运用最小二乘法、曲线投影拟合、坐标变换等数学方法实现了现实问题的数学化步骤。最终，利用时间序列分析预测对未来变形趋势进行了预测，又从纯数学方面的解析回到了现实意义，具有较好的实用性和可推广性。

关键词：最小二乘拟合；空间曲线曲率；时间序列分析预测；古塔变形

一、问题重述

1.1 问题背景

古建筑是先人们留给我们的宝贵财富,然而,随着历史的变迁,自然环境的变化以及人为因素等影响,一些古建筑受到不同程度的损害。另外,建筑遗产有其各自的特征、尺度及结构,需要采用精细的测量手段记录其档案信息。

在古建筑遗产中,塔类古建筑是具有代表性的一类,国内有许多著名古塔(如应县木塔、虎丘塔等)都成为国家重点文物且经过多次修缮,然而塔类古建筑有倾斜、弯曲及扭转等多种变形,传统形变监测难以满足其全部形变特征测量,需要获取其三维数据来分析其详细变形。本文结合某文物部门对某古塔进行的观测数据,分析了古塔的变形趋势,从而有利于保护古塔。

1.2 问题重述

由于长时间承受自重、气温、风力等各种作用,偶然还要受地震、飓风的影响,古塔产生各种变形,诸如倾斜、弯曲、扭曲等。为保护古塔,文物部门需适时对古塔进行观测,了解各种变形量,以制定必要的保护措施。

某古塔已有上千年历史,是我国重点保护文物。管理部门委托测绘公司先后于 1986 年 7 月、1996 年 8 月、2009 年 3 月和 2011 年 3 月对该塔进行了 4 次观测。请你们根据附件 1 提供的 4 次观测数据,讨论以下问题:

- 1.给出确定古塔各层中心位置的通用方法,并列表给出各次测量的古塔各层中心坐标。
- 2.分析该塔倾斜、弯曲、扭曲等变形情况。
- 3.分析该塔的变形趋势。
- 4.根据上述建模得到的结果,给有关部门提供一份古塔保护的建议。要求:一张 A4 纸(最后一页)。

二、问题假设与符号说明

2.1 问题假设

- 1.由于中国古建筑多为对称图形,假设古塔是对称的。
- 2.假设每次古塔的测量点选取是固定的。
- 3.假设测量数据都是准确可靠的。
- 4.假设古塔的变形只由倾斜、弯曲和扭曲变形造成,不考虑其他因素。

2.2 符号说明

符号	符号解释
α	倾斜角
κ	弯曲率
θ	扭曲度

三、模型准备与数据处理

3.1 对建筑物变形、倾斜、弯曲、扭曲的理解

根据定义,古塔的变形情况由倾斜、弯曲、扭曲三部分组成。为此,我们需要先对各类变形情况进行客观的数学定义。

根据《中华人民共和国行业标准建筑变形测量规范(JGJ8—2007)》[1],我们对以下关键概念进行了定义,并给出合理的数学解释:

建筑变形:建筑的地基、基础、上部结构及其场地受各种作用力而产生的形状或位置变化现象。在本文中,我们认为建筑变形主要由建筑物的倾斜、弯曲、扭曲以及沉降等现象共同造成。

倾斜:建筑中心线或其墙、柱等,在不同高度的点对其相应底部点的偏移现象。在本文中,我们定义倾斜角 α ,其正切值即塔尖与底层中心点水平距离与塔高的比值,即

$$\tan \alpha = \frac{d}{H}。$$

弯曲:当杆件受到与杆轴线垂直的外力或在轴线平面内的力偶作用时,杆的轴线由原来的直线变成弯曲,这种变形叫弯曲变形。在本文中,我们利用古塔各层中心位置所在空间曲线的曲率定义了古塔的弯曲率。

扭曲:建筑产生的非竖向变形。由于扭曲为非竖向的变形,讨论古塔扭曲时只需考虑水平方向的坐标变化,即x,y坐标的水平旋转。因此我们用古塔水平旋转角度的扭曲度 κ 来描述。

3.2 缺失数据的预处理:

检查数据发现,本题所用的数据部分有误差缺失,分别为:第十三层的第五个点缺失数据,塔尖只有一个数据。为此,对数据进行预处理如下:

第十三层的缺失数据:由于在1986和1996的观测数据中,第十三层缺少第五个点的观测数据,使得在寻找第十三层中心点时产生较大误差。

因此,我们结合第十三层的第一、二、三、六、七个点,对第十三层的缺失数据进行了合理赋值。根据对古塔各观测点散点图观察可见,古塔相邻两层的对应观测点坐标之间具有类似的关系。每个点所在的平面内,相差四的点有关于中轴线的对称关系。因此将二、六、七点连接,得到中心点坐标,然后将第一个点关于中心点对称。

因此,赋值1986年第五个观测点为(567.984, 519.588, 52.984)。

同理,将第二次测量中第十三层的缺失数据赋值为(567.99, 519.5816, 52.983)。

塔尖的数据:在后两次测量中,塔尖仅有一个观测数据。由于塔尖各点坐标变化很小,所以对于只有一个测量点的塔尖数据,我们将其近似处理为塔尖中心点坐标。

四、模型建立与求解

4.1 总体问题把握

总本文从古塔出发,通过四年的观察数据,进行逐步分析。

首先,需要根据古塔的测量坐标,确定中心位置,从而达到,实际问题坐标化,然后数学化的目的。

其次,需要通过数年的数据进行比较,准确描述对古塔的倾斜、弯曲和扭曲等变形情况。

再者,需要根据刚刚完成的古塔的倾斜、弯曲和扭曲等变形情况,进行古塔变形趋势的估计与预测。

最终,根据预测结果,给有关部门书写信件,提出合理意见。

4.2 古塔各层中心位置确定的通用方法

4.2.1 建模想法

问题一要求确定古塔各层中心位置的通用方法。根据建筑变形测量规范,在建筑物变形测量中,为更好地测量出建筑物变形程度的各个指标,我们假设每次测量应选取固定的测量点,且在同一层所选取的测量点在未变形前处于同一个水平面上。

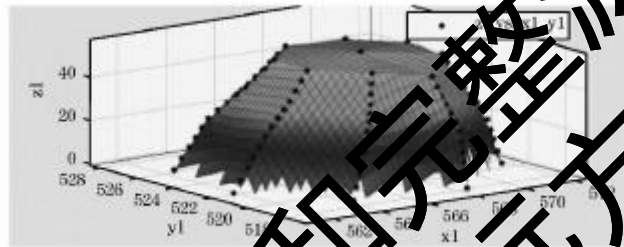


图 1 古塔测量点分布示意图

而经过对各层观测点三维散点图(如图 1 所示)的绘制发现,各层的八个点近似对称地分布在一个平面上,只是因为年代久远发生变形导致了些许偏差。

因此为了更准确地找出各层中心点,我们考虑先利用最小二乘法拟合出各层观测点所在的平面方程,再建立优化模型在该平面上寻找一点使其到各观测点距离的平方和最小,以此确立古塔各层中心坐标。

4.2.2 平面拟合

4.2.2.1 模型的构建

根据假设,在变形前,同层的观测点应处于同一平面上,而由于该层各点发生的变形程度的不同使其与该平面有微小的偏差,因此我们首先根据各层的观测值通过最小二乘法[2]拟合所在平面。

平面方程的一般表达式为:

$$Ax + By + Cz + D = 0 (C \neq 0)$$

对 z 进行参数分离,得到:

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

因此,可设第 k 次测量时第 i 层观测点的拟合平面方程为

$$z = A_i(k)x + B_i(k)y + C_i(k)$$

利用最小二乘法的思想,建立如下优化模型如下:

$$\min \sum_{j=1}^8 (A_i(k)x_{ij}(k) + B_i(k)y_{ij}(k) + C_i(k) - z_{ij}(k))^2 \quad (i=1,2,\dots,13, \quad k=1,2,3,4)$$

上式的意思为，寻找到各层所有观测点的距离的平方之和最小的平面，即寻找与各层观测点最接近的平面方程。

4.2.2.2 极小值的求解

根据上述模型的构建，可将该问题转化为一种无条件极值问题，将求解到各层所有观测点的距离的平方之和最小的平面的问题，转化为了求解 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ 、 $C_i(k)$ 三个函数的问题。

具体模型如下：

目标函数为：

$$f(A_i(k), B_i(k), C_i(k)) = \sum_{j=1}^8 (A_i(k)x_{ij}(k) + B_i(k)y_{ij}(k) + C_i(k) - z_{ij}(k))^2$$

上式表示，寻找到所有观测点的距离的平方之和最小的 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ 、 $C_i(k)$ ，即寻找与各层观测点最接近的平面方程。

根据分析学内容，取得极小值的必要条件，可知，上式三个偏导数应满足：

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{\partial f}{\partial B} = \frac{\partial f}{\partial C} = 0$$

展开得到：

$$\sum_{j=1}^8 2(A_i(k)x_{ij}(k) + B_i(k)y_{ij}(k) + C_i(k) - z_{ij}(k))x_{ij}(k) = 0$$

$$\sum_{j=1}^8 2(A_i(k)x_{ij}(k) + B_i(k)y_{ij}(k) + C_i(k) - z_{ij}(k))y_{ij}(k) = 0$$

$$\sum_{j=1}^8 2(A_i(k)x_{ij}(k) + B_i(k)y_{ij}(k) + C_i(k) - z_{ij}(k))z_{ij}(k) = 0$$

整理可得

$$\begin{cases} A_i(k) \sum_{j=1}^8 x_{ij}^2(k) + B_i(k) \sum_{j=1}^8 [x_{ij}(k)y_{ij}(k)] + C_i(k) \sum_{j=1}^8 x_{ij}(k) = \sum_{j=1}^8 [x_{ij}(k)z_{ij}(k)] \\ A_i(k) \sum_{j=1}^8 [x_{ij}(k)y_{ij}(k)] + B_i(k) \sum_{j=1}^8 y_{ij}^2(k) + C_i(k) \sum_{j=1}^8 y_{ij}(k) = \sum_{j=1}^8 [y_{ij}(k)z_{ij}(k)] \\ A_i(k) \sum_{j=1}^8 [x_{ij}(k)z_{ij}(k)] + B_i(k) \sum_{j=1}^8 [y_{ij}(k)z_{ij}(k)] + C_i(k) \sum_{j=1}^8 z_{ij}(k) = \sum_{j=1}^8 z_{ij}^2(k) \end{cases}$$

则，满足上述方程组条件的 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ 、 $C_i(k)$ 就为可能的取到最小值的值。因此，

先通过代入 $x_{ij}(k)$ 、 $y_{ij}(k)$ 解方程，得到 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ 、 $C_i(k)$ ，再计算在该点的 *Hessian* 矩阵，若其在该点处是正定的，则 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ 、 $C_i(k)$ 即为所求。

4.2.2.3 数据拟合结果

将各层观测值 $x_{ij}(k)$ 、 $y_{ij}(k)$ 带入上式，利用 MATLAB 编程（程序见附录 1）解上述线性方程组，解得每次测量各层的拟合平面系数 $A_i(k)$ 、 $B_i(k)$ 、 $C_i(k)$ 如表 1 所示。

表 1：拟合后各层的系数

第 i 层	第一次测量拟合平面系数			第 i 层	第二次测量拟合平面系数		
	A	B	C		A	B	C
1	-0.00083	0.003417	0.471956	1	-0.00149	-0.003715	0.6844
2	-0.00082	0.003629	5.887189	2	-0.00049	-0.003782	5.617203
3	-0.10353	-0.1706	160.1073	3	-0.10358	-0.1706	160.2876
4	-0.08443	-0.13913	137.2556	4	-0.08442	-0.13916	136.4015
5	-0.09317	-0.15634	155.8157	5	-0.09355	-0.15634	156.0257
6	-0.10906	-0.15576	169.0503	6	-0.1087	-0.15562	168.7628
7	-0.09725	-0.13291	154.098	7	-0.09689	-0.13279	153.8289
8	-0.10094	-0.13874	162.7653	8	-0.10135	-0.13886	162.9446
9	-0.10708	-0.14904	175.7784	9	-0.10644	-0.14886	174.7784
10	-0.10713	-0.15624	182.2592	10	-0.1076	-0.15628	182.591
11	-0.13503	-0.21748	204.2576	11	-0.13553	-0.21745	234.5203
12	-0.14529	-0.22331	252.8149	12	-0.14591	-0.23338	252.9946
13	-0.14784	-0.22395	268.9965	13	-0.14817	-0.25401	269.2087
塔尖	1.1448	0.7035	-961.701		1.269504	0.641135	-999.836
第 i 层	第三次测量拟合平面系数			第 i 层	第四次测量拟合平面系数		
	A	B	C		A	B	C
1	-0.00237	0.00377	5.079985	1	-0.00233	-0.00374	5.040576
2	-0.00397	0.0006	9.661222	2	-0.00255	-0.00253	10.06101
3	-0.17179	-0.11494	-30.2461	3	0.172475	-0.10626	-29.9822
4	-0.140822	-0.08276	-19.8928	4	0.140913	-0.08503	-18.7722
5	-0.157628	-0.0909	-20.5583	5	0.158721	-0.09192	-20.6534
6	-0.16843	-0.11876	-7.63286	6	0.168404	-0.11917	-7.39017
7	-0.134088	-0.0953	3.269996	7	0.133926	-0.09493	3.161969
8	-0.139157	-0.10075	6.766714	8	0.139362	-0.10079	6.667404
9	-0.147529	-0.10482	7.636402	9	0.148239	-0.10721	8.463752
10	-0.152723	-0.10346	7.301055	10	0.15518	-0.10713	7.808521
11	-0.215153	-0.13588	-6.99514	11	0.216632	-0.13885	-6.29511
12	-0.232414	-0.14731	-6.56117	12	0.321244	-0.14226	-8.55393
13	-0.241372	15773-0.	-2.08825	13	0.241593	-0.15841	-1.86442

4.2.3 各层中心点的确定

4.2.3.1 平面八边形的重心

考虑到自重也是造成古塔变形的重要因素，且可以把各层都抽象成质量均匀的薄片，所以将各层的中心位置定义成重心位置更为合理。

为了便于重心的计算，需要将每层上的八个观测点近似归结到同一平面上，然后求这个平面上八个点围成的八边形的重心，以此作为每层的中心。具体的做法是：将这八个点投影到 $z = A_i(k)x + B_i(k)y + C_i(k)$ 的平面上，求出投影到这个平面上的八个点围成平面八边形区域的重心的坐标值，以此作为中心的坐标值。

八边形重心的求法采用计算几何的方法，基本原理如下：

三角形的重心：

$$\begin{cases} x = (x_a + x_b + x_c)/3 \\ y = (y_a + y_b + y_c)/3 \\ z = (z_a + z_b + z_c)/3 \end{cases}$$

其中， $(x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b), (x_c, y_c, z_c)$ 为三角形各顶点坐标，

(x, y, z) 为三角形重心坐标。

四边形的重心：

作一对角线，将它分成两个三角形，

分别求出两个三角形重心与面积 $(x_1, y_1, z_1), S_1$ 和 $(x_2, y_2, z_2), S_2$

则该四边形的重心：

$$\begin{cases} x = (x_1 S_1 + x_2 S_2) / (S_1 + S_2) \\ y = (y_1 S_1 + y_2 S_2) / (S_1 + S_2) \\ z = (z_1 S_1 + z_2 S_2) / (S_1 + S_2) \end{cases}$$

五边形则分为一个三角形与一个四边形，……

依次类推，任意多边形中直接取任一点(一般为原点)把多边形分为 $n - 2$ 个三角形
分别求重心 (x_i, y_i, z_i) 和面积 S_i ，

那么任意多边形的重心可表示为：

$$\begin{cases} x = \sum S_i * x_i / \sum S_i \\ y = \sum S_i * y_i / \sum S_i \\ z = \sum S_i * z_i / \sum S_i \end{cases}$$

4.2.4 各层中心点的计算

根据上述模型步骤，可以得到，各层的中心点如下表所示：

表 2：各次测量各层中心坐标

第 i 层	第一次测量各层中心坐标			第 i 层	第二次测量各层中心坐标		
	x	y	z		x	y	z
1	566.6647	522.7105	1.787375	1	566.665	522.7102	1.783001
2	566.7196	522.6683	7.32025	2	566.7205	522.6675	7.314628
3	566.7251	522.5475	12.28766	3	566.7625	522.5459	12.28297
4	566.7842	522.5418	16.70028	4	566.787	522.5395	16.69614
5	566.8246	522.4962	21.31765	5	566.8273	522.4933	21.31278
6	566.866	522.4639	25.84712	6	566.8696	522.4606	25.84084
7	566.9167	522.467	29.52712	7	566.9206	522.463	29.52177
8	566.9538	522.4506	33.0495	8	566.9579	522.4465	33.04354
9	566.9897	522.4318	36.55586	9	566.9946	522.4361	36.54837
10	567.0267	522.4184	39.89099	10	567.0317	522.4152	39.88566
11	567.0565	522.3456	44.08503	11	567.062	522.3359	44.07846
12	567.1007	522.3017	48.36058	12	567.1055	522.2955	48.35469
13	567.148	522.2615	52.51921	13	567.1522	522.2552	52.51373
塔尖	567.2641	522.2541	55.10855		567.2547	522.2366	55.11965
第 i 层	第三次测量各层中心坐标			第 i 层	第四次测量各层中心坐标		
	x	y	z		x	y	z
1	566.7268	522.7015	1.7645	1	566.726	522.7014	1.76325
2	566.764	522.6693	7.309	2	566.7642	522.669	7.2905
3	566.8798	522.5896	12.2677	3	566.8809	522.5891	12.25993
4	566.8829	522.5817	16.68893	4	566.883	522.5805	16.67334
5	566.9238	522.55	21.30717	5	566.9252	522.5488	21.29916
6	567.0101	522.4898	25.8372	6	567.0107	522.4889	25.83086
7	567.0214	522.492	29.50962	7	567.0222	522.4816	29.50188
8	567.0722	522.4494	33.03954	8	567.0732	522.4486	33.03601
9	567.125	522.4153	36.54536	9	567.1263	522.414	36.52683
10	567.184	522.364	39.88097	10	567.1816	522.3625	39.86353
11	567.2556	522.3069	44.08065	11	567.2575	522.3045	44.07157
12	567.3032	522.2649	48.35264	12	567.3044	522.2652	48.33555
13	567.3573	522.219	52.48581	13	567.3529	522.2174	52.48076
塔尖	567.536	522.2148	55.091	塔尖	567.3375	522.2135	55.087

绘制剖面图

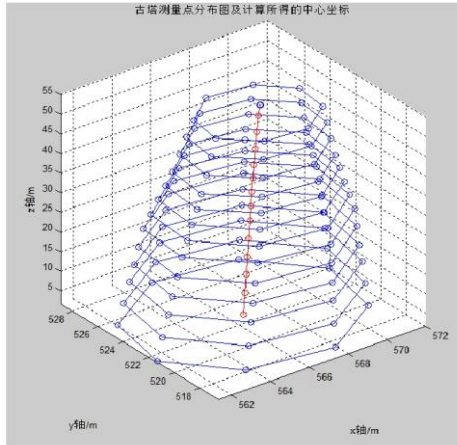


图 2：1996 年观测点与中心示意图

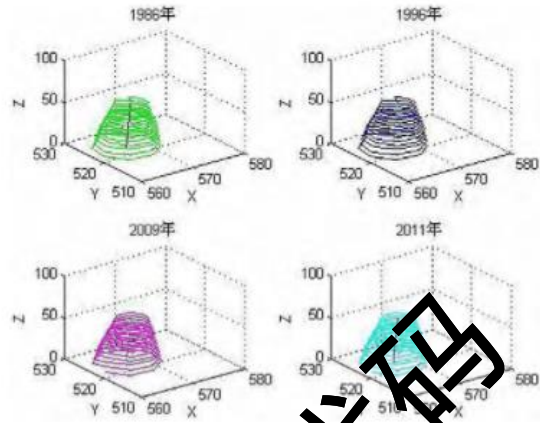


图 3：各年份观测点与中心示意图

4.2.5 寻找中心通用方法总结

针对本小问，本文提出寻找每层中心的通用方法如下：

- 1) 根据观测点坐标，利用最小二乘法，拟合出每层的平面函数；
- 2) 将各层的观测点投影到各层上，得到投影点坐标；
- 3) 根据平面多边形中心计算公式，得到中心点坐标。

4.3 第二小问概括

4.3.1 第二小问问题分析

我们对古塔的倾斜、弯曲和扭曲等变形情况，需要分别给予合理的数学描述，考虑可以给出如下定义：

关于**倾斜变形**，我们可以定义倾斜角 γ ，即塔尖与底层中心的水平距离与塔高的比值；根据年份，比较古塔的倾斜速度。

关于**弯曲变形**，我们可以定义弯曲率 κ ，即用中心点所拟合出的空间曲线的曲率来描述古塔各处弯曲率。结合微分几何中相关知识，根据年份，比较该古塔的弯曲程度。

关于**扭曲变形**，我们可以定义相对扭曲度 θ ，利用坐标的旋转变换角度描述古塔的扭曲变形情况。根据年份，比较该古塔的扭曲角。

4.3.2 古塔的倾斜情况分析

要描述古塔的倾斜度，可以用塔尖和底面中心的连线和垂直线的夹角大小来表示，但根据提供的观测数据，加之古塔发生了变形，故无法准确知道塔底的中心坐标，而塔尖的坐标前边已给出了 4 个点的坐标，经验算这 4 点构成的三角形不是正三角形，也不好确定塔尖的中心坐标，所以用第 1 层和第 13 层中心点的连线与垂直线夹角的大小来表示古塔的倾斜度误差最小，如图 2 所示，倾斜角越大，古塔倾斜得越多。

因此定义：古塔第 1 层和第 13 层中心的连线与垂线的夹角称为古塔的倾斜角。

根据 1986 年的观测数据，计算该古塔 1986 年的倾斜情况，由表 2 得知，第一层的中心坐标为 A (566.648 , 522.7105,1.787375)，第 13 层的中心坐标为 B(567.2712,522.2715,52.829)，如图 2 所示。

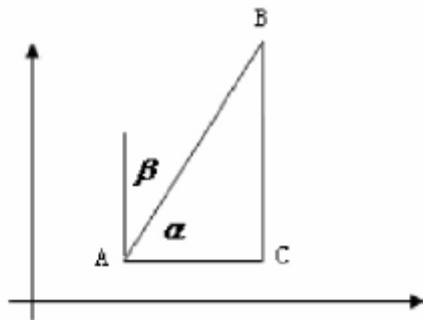


图 2：古塔倾斜关系图

由于倾斜位移值为：

$$AC = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0.6583$$

斜率为：

$$k_1 = \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{52.829 - 1.7873}{0.6583} = 77.1355$$

则倾斜角 β 的计算为：

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha \quad (2)$$

可以用上述定义来描述古塔的倾斜度。

表 3 观测年倾斜角一览表

时间	1986	1996	2009	2011
斜率	77.5355	76.5744	73.59253	73.41015
α	89.26108 度	89.25181 度	89.22149 度	89.21956 度
β	0.738921 度	0.748194 度	0.778506 度	0.78044 度

由表 3 可知，1986 年—1996 年的 10 年间，该古塔平均每年的倾斜角变化为

$$\bar{\beta}_1 = \frac{0.748194 - 0.738921}{10} = 0.000927 ;$$

1996 年—2009 年的 13 年间，该古塔平均每年的倾斜角变化为 $\bar{\beta}_2 = \frac{0.778506 - 0.748194}{13} = 0.002332 ;$

2009 年—2011 年的 2 年间，该古塔平均每年的倾斜角变化为 $\bar{\beta}_3 = \frac{0.78044 - 0.778506}{2} =$

0.000967 。

由上可知，1986 年—1996 年这 10 年古塔每年平均倾斜 0.000927 度，而 1996-2009 年这 13 年中平均每年古塔倾斜 0.002332 度，是 1986 年—1996 年平均倾斜速度的 2.514535 倍，说明该古塔在 1996 年受到自然因素影响，导致倾斜速度加快，而 2009

年一 2011 年这 2 年古塔倾斜的速度又和 1996 年之前差不多，如果不是采取了人工方法阻止古塔的倾斜，就说明 1996 年一 2009 年这 13 年的自然条件易加速古塔的倾斜速度，故以后再遇到相同的自然条件时，应采取必要的措施，以防古塔加速倾斜。

4.3.3 塔的弯曲情况分析

度量一条曲线在某点的弯曲程度可以用曲率来表示，一条曲线在某点处的曲率越大，则该曲线在此点越弯曲。我们可以借用曲率来表示古塔的弯曲情况。用各层的中心拟合成一条曲线方程，然后再求曲线方程在关键点的曲率来体现塔的弯曲情形。

首先，将各层中心点进行连接，得到一条 E^3 上的曲线。需要对该曲线进行拟合，考虑到在尝试建立参数方程如下：

$$\begin{cases} x_k(t) = a_1(k)t^2 + b_1(k)t + c_1(k) \\ y_k(t) = a_2(k)t^2 + b_2(k)t + c_2(k) \\ z_k(t) = a_3(k)t^2 + b_3(k)t + c_3(k) \end{cases}$$

以 1986 年数据为例，我们得到如下拟合结果：

$$\begin{cases} X = 0.0007t^2 - 0.0064t + 560.65624 \\ Y = 0.0004t^2 - 0.00863t + 522.30198 \\ Z = t \end{cases}$$

证明：设 s 是曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长参数，则 $s = s(t)$ 与 $t = t(s)$ 互为反函数。由于空间曲线的 Frenet 标架和曲率与(容许的)参数选取无关，故

$$\mathbf{t}(t) = \mathbf{t}(s(t)) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds} = \mathbf{r}'(t) \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

$$\dot{\mathbf{t}}(t) = \mathbf{r}''(t) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \mathbf{r}'(t) \frac{d^2t}{ds^2}, \quad \mathbf{n}(s(t)) = \frac{1}{\kappa(s(t))} \dot{\mathbf{t}}(s(t)),$$

$$\ddot{\mathbf{t}}(s(t)) = \mathbf{r}'''(t) \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\mathbf{r}''(t) \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} + \mathbf{r}'(t) \frac{d^3t}{ds^3},$$

$$\mathbf{b}(s(t)) = \mathbf{t}(s(t)) \wedge \mathbf{n}(s(t)) = \frac{1}{\kappa(s(t))} \mathbf{t}(s(t)) \wedge \dot{\mathbf{t}}(s(t))$$

$$= \frac{1}{\kappa(s(t))} \mathbf{r}'(t) \frac{dt}{ds} \wedge \left(\mathbf{r}''(t) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \mathbf{r}'(t) \frac{d^2t}{ds^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\kappa(s(t))} \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)$$

$$\kappa(t) = \kappa(s(t)) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 |\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

由此，得到各层的曲率 κ 如下表所示：

年份 第 i 层	1989	1999	2009	2011
1	0.000141404	0.000121639	0.000089860	0.000056555

2	0.000141405	0.000121641	0.000089920	0.000056556
3	0.000141406	0.000121642	0.000089977	0.000056556
4	0.000141407	0.000121643	0.000090030	0.000056557
5	0.000141408	0.000121644	0.000090089	0.000056557
6	0.000141408	0.000121645	0.000090149	0.000056558
7	0.000141409	0.000121646	0.0000902200	0.000056558
8	0.000141409	0.000121647	0.000090250	0.000056558
9	0.000141409	0.000121647	0.000090301	0.000056559
10	0.000141409	0.000121648	0.000090352	0.000056559
11	0.000141408	0.000121648	0.000090417	0.000056559
12	0.000141408	0.000121648	0.000090486	0.000056560
13	0.000141408	0.000121648	0.000090555	0.000056560
塔尖	0.000141407	0.000121648	0.000090596	0.000056560

四年中各年最大的曲率分别为 0.000141409, 0.000121648, 0.000090599, 0.000056559, 总体上反映了随着时间的推移, 曲率越来越大, 即古塔的最大弯曲程度逐年增大。但由于计算的曲率都非常小, 说明该古塔的弯曲程度非常小, 这和前面计算出的最大倾斜角才 0.78044 度相吻合。同时, 最近两次观测弯曲现象有“矫正”倾向, 可能是因为古塔的修复引起。

4.3.4 古塔的扭曲情况分析

如图 4 所示, 设古塔第 1 层的 A_1 点, 在第 13 层的对应点为 A_{13} , 如果古塔只是倾斜和弯曲, 则向量 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 和 $\overrightarrow{O_{13}A_{13}}$ 在 XOY 平面上的投影向量应是平行的, 即夹角为 0。

现在假设古塔发生了扭曲, 原来的点 A_{13} 扭转到 A'_{13} , 则可以用向量 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 和 $\overrightarrow{O_{13}A'_{13}}$ 在 XOY 平面上的夹角的大小来反映古塔的扭曲性, 很显然夹角越大, 扭曲程度越大, 反之亦然, 而其垂直方向的夹角和倾斜和弯曲有关, 和扭曲无关。

设 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 在 XOY 平面的坐标形式为 (x_{01}, y_{01}) , 其它所需求的向量方法同样。则两向量在 XOY 平面上的夹角公式为:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (4)$$

为后面描述方便, 定义 θ 为扭曲角, θ 越大, 则古塔扭曲的程度越大^[2]。

根据以上定义, 得到古塔各层扭曲角 θ

扭曲角 θ 的大小

层数	1986 年	1996 年	2009 年	2011 年
1				

2	0	0	0.3719491	0.3222011
3	1.6587017	1.6587017	0.7759518	0.776494
4	2.3832312	2.3832312	1.1195104	1.1186015
5	3.2112247	3.2112247	1.5222602	1.5225122
6	4.0879304	4.0879304	2.3227995	2.3230514
7	4.2472264	4.2468375	3.6170426	2.6172946
8	4.4102606	4.4075846	3.1645703	3.1648222
9	4.6115845	4.6115945	3.7616592	3.7623178
10	4.8171537	4.8171537	3.6580342	3.582162
11	4.8942415	4.8942415	3.5002459	2.5004978
12	4.9836955	4.9807638	3.3236999	2.3219518
13	5.4181834	5.4188055	3.1259139	3.1261659

由表 6 古塔扭曲角分析可知，1986 年和 1996 年的扭曲角基本一样，即这 10 年间要么古塔由于自然或人为的原因停止扭曲，也可能在这 10 年第 1 到上面各层的扭曲速度一样，故以第一层 A 为参照的各水平夹角和 1986 年的一样，但实际上扭曲了，只不过速度从上到下一样。2009 年和 2011 年基本一样，是因为间隔时间短，且扭曲的速度本身不可很快，所以结果和事实相吻合。

2009 年的观测数据得到扭曲的角度比前面变小了，而且最高层变化最大，可能是因为古塔在外界条件或由于倾斜、弯曲等原因，在重力的作用下，导致塔向和原来相反的方向扭曲，故扭曲角不是继续增大而是变小了，也可能是在 19 年之后，古塔受到了当地政府的保护进行了维修和加固等措施，使扭曲得到了纠正。

4.3.5 该塔的变形情况结论

倾斜变形方面：1996 年—2009 年这 13 年的自然条件易加速古塔的倾斜速度，故以后再遇到相同的自然条件时，应采取必要的措施，以防古塔加速倾斜。

弯曲变形方面：该古塔的弯曲程度非常小，但古塔的最大弯曲程度在逐年增大。同时，最近两次观测弯曲现象有“纠正”倾向，可能是因为古塔的修复引起。

扭曲变形方面：1986 年和 1996 年的扭曲角基本一样，2009 年的观测数据得到扭曲的角度比前面变小了，而且最高层变化最大，可能是因为古塔在外界条件或由于倾斜、弯曲等原因，在重力的作用下，导致塔向和原来相反的方向扭曲，故扭曲角不是继续增大而是变小了，也可能是在 19 年之后，古塔受到了当地政府的保护进行了维修和加固等措施，使扭曲得到了纠正。

4.4 古塔变形趋势

4.4.1 第三小问题问题分析

本题需要分析古塔的变形情况。本文中，我们认为建筑物变形由建筑物的倾斜、弯曲、扭曲等因素共同造成。下文中，我们把倾斜角 α ，弯曲率 κ ，相对扭曲度 θ ，所组成的矩阵叫做古塔的变形参数。

由于附录只给出了四次统计的数据，而我们的目标是分析古塔未来多年的变化趋势，换句话说，是三个方面的变形对时间的一种拟合。所以，可以尝试采取时间序列分

析的方法，有效地解决随时间变化的趋势。

4.4.2 时间序列分析

时间序列预测算法主要包括趋势分量预测、季节性分量预测、突发分量预测以及随机误差分量预测。以传统的时间序列预测算法为例，*Holt - Winters* 算法中 α , β , γ 分别为水平项、趋势项、周期项的平滑参数。由于 α , β , γ 一旦确定就不可以改变，且需要反复试验确定最佳值，因此传统的 *Holt - Winters* 算法对于长期大量的数据分析是不适合的。而 *ARIMA* 仅在短期预测中有较好的预测结果，随着预测时间的推迟，其预测误差会越来越大，因此 *ARIMA* 对于长期数据预测是不符合要求的，必须采用新的时间序列预测模型来进行预测分析。

文中提出的大数据算法采用全新的方法来对三要素量进行预测。利用海量数据的优点，将隐藏在数据背后的有效信息挖掘出来，具体推导过程如下所示：

(1)趋势分量 $T(t)$ 的预测。

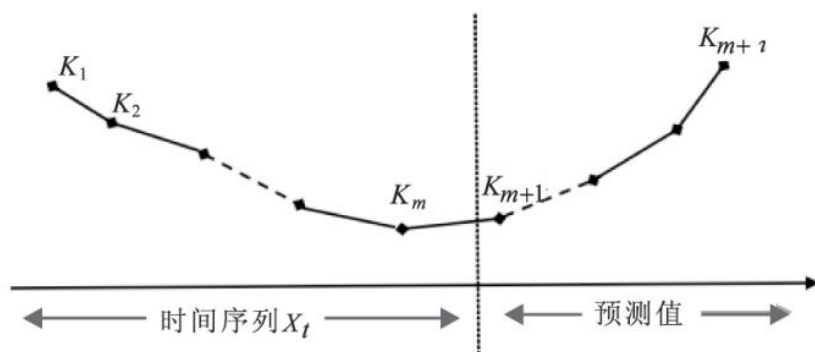
将每一段的起始变形参数历史数据和斜率 $Slope_k$ 拟合为一条直线，每个拟合线间首尾连续，将无线网络话务量历史数据作为训练样本进行建模，获得趋势分量 $T(t)$ 预测模型：

$$T(t) = f\{x_k, Slope_k\} \quad (1)$$

$$K'_{T+i} = Max\{K_{T+i}, \gamma \cdot \min\{K_T, K_{T-1}, \dots, K_{T-N+1}\}\} \quad (2)$$

上式中， K'_{T+i} 表示补偿后的改善斜率，如果最近连续 N 个斜率不小于零，那么第 $T+i$ 的斜率不应小于零； γ 是可调节的，直到一个最佳常数。

图 1：趋势分量预测过程。



如此一来,对于趋势分量 $T(t)$ 的预测,预测值之前数据的权重变成由历史数据 X_k 和斜率 $Slope_k$ 决定。

(2)季节性分量 $S(t)$ 的预测。

文中首先需要确认的是周期时间,通过统计分析对海量数据进行特征提取,按照式(3)进行差分运算,得到矩阵 A 。

$$A = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & \cdots & x_{n-1} - x_{n-2} \\ x_3 - x_2 & x_4 - x_3 & \cdots & x_n - x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m+1} - x_m & x_{m+2} - x_{m+1} & \cdots & x_{n+m-3} - x_{n-2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

对矩阵 A 的每一行进行线性拟合,得到不同的拟合直线 $Y = aX + b$,其中拟合误差最小的行数即为周期 L 。 p 表示每个周期 L 里的样本数,每个 q ($q = 1, 2, \dots, p$)位置处的季节分量可表示为 p 样本中相同位置 q 处的数据的平均值,利用式(4)可得出季节性分量。

$$S_{pi}(t) = \sum_{q=1}^p X_{qi} / p \quad (4)$$

(3)突发分量 B 的预测。

突发分量 B 产生的原因一般是由于突发事件,比如重大节日、活动、会议等。一般情况下,突发分量具有可列举性,即每个小区的 KPI 对应的突发分量 B 都可以用特定

的类别对应特定的数值表示，如式⁽⁵⁾：

$$\begin{aligned} B(t)_{value} &= \{Burst_{v1}, Burst_{v2}, \dots, Burst_{vn}\} \\ B(t)_{type} &= \{Burst_{t1}, Burst_{t2}, \dots, Burst_{tm}\} \\ B(t) &= \{CELLID, Burst_{v1}, Burst_{t1}, \dots, Burst_{vn}, Burst_{tm}\} \end{aligned} \quad (5)$$

在 *KPI* 分析预测中，只需要根据年份的 *ID* 号，查找对应的突发分量 $B(t)$ 带入预测公式即可。

(4) 随机误差分量 R 的预测。

在大数据预测模型中，随机误差分量不再是独立样本，而是根据无线网络话务量历史数据减去趋势分量、季节性分量和突发分量得到随机误差分量的预估值。处理的结果确保了随机误差分量更具有实际性。

(5) *KPI* 预测。

预测目标 *KPI* 时，利用公式

$$X(t) = (1 + B(t)) \times (T(t) + S(t) + R(t)) \quad (6)$$

即可得到目标结果。

4.4.3 模型求解

根据上述时间序列模型，可以得到，变形参数的拟合方程如下：
倾斜角 α 的拟合方程为：

$$\alpha = 0.0135667t + 0.00248889e^{0.214286t} + 0.0116111$$

弯曲率 k 的拟合方程为：

$$\begin{cases} K_1 = 0.000226155t - 0.000409937e^{0.206742t} + 0.000551341 \\ K_2 = 0.000225623t - 0.000405716e^{0.20758t} + 0.000547121 \\ K_3 = 0.000225123t - 0.000401755e^{0.208378t} + 0.000543161 \\ K_4 = 0.000224666t - 0.000398157e^{0.20911t} + 0.000539564 \\ K_5 = 0.000224152t - 0.00039413e^{0.209941t} + 0.000535538 \\ K_6 = 0.000223627t - 0.000390046e^{0.210793t} + 0.000531454 \\ K_7 = 0.000223187t - 0.000386632e^{0.211515t} + 0.000528041 \\ K_8 = 0.000222755t - 0.000383296e^{0.212228t} + 0.000524705 \\ K_9 = 0.000222314t - 0.000379912e^{0.212958t} + 0.000521321 \\ K_{10} = 0.000221877t - 0.000376565e^{0.213689t} + 0.000517974 \\ K_{11} = 0.000221304t - 0.000372213e^{0.214651t} + 0.000513621 \\ K_{12} = 0.000220724t - 0.000367825e^{0.215636t} + 0.000509333 \\ K_{13} = 0.000220142t - 0.00036344e^{0.216635t} + 0.000504848 \\ K_{14} = 0.000219762t - 0.000360601e^{0.21722t} + 0.000502008 \end{cases}$$

相对扭曲度 θ 的拟合方程为:

$$\begin{cases} \theta_1 = 9.6951210^{-7}e^{1.98118t} - 0.0000199238t - 0.00000164111 \\ \theta_2 = 8.7254510^{-7}e^{2.00118t} - 0.00000175145t - 8.6204510^{-7} \\ \theta_3 = 0.0000110419e^{2.021813t} - 0.0000023248t - 0.0000108589 \\ \theta_4 = 0.00000745823e^{1.99164t} - 0.00000255123t - 0.00000812358 \\ \theta_5 = 0.0000075424e^{2.00073t} - 0.00000273541t - 0.00000872334 \\ \theta_6 = 0.00000685972e^{1.99824t} - 0.00000206424t - 0.0000103907 \\ \theta_7 = 0.00000645303e^{1.99157t} - 0.00000129391t - 0.00000654043 \\ \theta_8 = 0.0000058195e^{2.01018t} - 0.0000116196t - 0.0000057409 \\ \theta_9 = 0.00000537741e^{2.0053t} - 0.0000105531t - 0.00000528761 \\ \theta_{10} = 0.00000464649e^{2.11286t} - 0.00000963558t - 0.00000449829 \\ \theta_{11} = 0.00000923582e^{2.06131t} - 0.0000188619t - 0.00000905982 \\ \theta_{12} = 0.0000117968e^{1.96995t} - 0.0000230411t - 0.0000115988 \\ \theta_{13} = 0.0000179646e^{2.00557t} - 0.0000358703t - 0.0000178056 \end{cases}$$

五、模型的评价

5.1 模型的优点

1.本文中讨论了古塔的变形特征,围绕着中心点刻画了三种不同变形情况的数学描述,能够较为合理准确地刻画各种变形量,所得结果对于古塔保护的相关部门制定必要的保护措施具有一定的指导意义,具有较强的实用性。

2.本文题目给出的确定古塔各层中心点位置的通用方法可以推广至其他建筑物及测量方式。

5.2 模型的不足

1.时间序列分析预测模型中,所给的样本数据实在过少,导致预测结果可能不够准确,对结果产生了一定的误差。

六、参考文献

- [1]M. Bakker, J.H.G. Vreeburg, K.M. van Schagen, L.C. Rietveld, A fully adaptive forecasting model for short-term drinking water demand, *Environmental Modelling&Software*, Volume 48 October 2013, Pages 141 — 151.
- [2]A. Candelieri, F. Archetti, Identifying Typical Urban Water Demand Patterns for a Reliable Short-term Forecasting — The Icewater Project Approach, *Procedia Engineering*, Volume 89 2014, Pages 1004 — 1012.
- [3]Munir S, Nimmo W, Uibbs B. The effect of air staged, *combustion of pulverised coal and biomass blends on NO_x emissions and combustion efficiency*[J]. *Fuel*, 2011, 90(1):126-135.
- [4]Zhong B, Shi W, Fu W. Effect of catalysts on the NO_x reduction during the returning with coal chars as the *fuel*[J]. *Combustion Science and Technology*, 2001, 164 (1):239-251.
- [5] Redding, S. and Venables A.J.. Economic Geography and International Inequality. *Journal of International Economics*, 2004, 62.
- [6] Krugman, P Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade, *The American Economic Review*. Vol. 71, No. 5, Dec. 1980.
- [7] Zejan A. R&D Activities in Affiliate of Swedish Multinational Enterprises. *Scandinavian Journal of Economics*, 1990, 92(3)
- [8] Ottaviano, Thisse J — F. Integration, Agglomeration and the Political Economics of Factor Mobility. *Journal of Public Economics*, 2002, 83
- [9] Puga, Diego and Venables. The Spread of Industry: Spatial Agglomeration in Economic Development. *Journal of Japanese and International Economics*, 1996, 10
- [10] Verspagen, B. Estimating International Technology Spillovers Using Technology Flow Statistics. *Review of World Economics*. 1997. 133 (2)

七、关于保护千年古塔的建议

尊敬的文物保护单位：您们好！

我国是一个文明古国，各地的古塔建筑非常的多，由于长时间承受自重、气温、风力等各种作用，偶然还要受地震、飓风的影响，古塔会产生各种变形，诸如倾斜、弯曲、扭曲等。为保护古塔，文物部门需适时对古塔进行观测，了解各种变形量，以制定必要的保护措施。

据悉，上海千年古塔斜而不倒 斜度超比萨斜塔的天马山斜塔，如今倾斜度已经从上世纪 80 代的 6.51° 增加到 7.10° ，这可是一个十分危险的信号，这就是说天马山斜塔，随着时间的变化，正在朝着倒塌破坏的方向发展。

虽然 1983 年-1987 年对天马山斜塔的抢救修缮是很重要措施，保持了天马山斜塔斜而不倒的奇姿。但造成天马山斜塔塔身倾斜的主要原因：地基地质条件不一至，并没有从根本上解决，也就是说天马山斜塔仍然是在：一半是山体滑坡，一半是石碴，地基地质条件不一至的危险地质条件。

由此看来，还有很多很多类似的斜塔都在不断倾斜和仍然处于危险之中。

我们建议：

对危险斜塔需要对症下药，具体处理。针对塔的倾斜变形、弯曲变形、扭曲变形，进行分开预测与处理。根据我们的预测，如果不加处理，古塔将在未来八年内倒塌。

“除了古塔本体的保护以外，也要通过建筑手段增加一些传统和现代的对话，有效传递文物背后的价值，让文物的价值更容易被公众理解。”来自意大利的专家毛里齐奥·安纳斯塔西认为。他介绍，意大利在古塔修缮利用中，开展了不少颇有成效的尝试，比如坐落在罗马的瞭望塔在修缮时增加了楼梯、阳台、跑道甚至玻璃罩，以释放其原有空间的活力；元老院中的一座古塔增加了升降机，以满足观众的参观需求。“从观众、从美学的角度赋予其新的景观，在新的时代下给观众一种新的感觉，让现在失去功用的古塔显示出另外一种价值。”他说。

在这方面，我国也有不少尝试，比如陕西咸阳汉阳陵遗址、四川成都金沙遗址等，皆在遗址周边架设栈道，河南内黄三杨庄遗址 2 号庭院修建了玻璃罩等，以便观众更好地体验文化遗产。我国有些理念与国外不同，比如罗马斗兽场建有电梯，杭州西湖雷峰塔也建有电梯，但我们的保护理念是在文物建筑中不准建电梯，新复建的可以；再比如意大利不允许复建，神安在南门箭楼遗址基础上，对其进行了复建，既保护了原来的箭楼遗址，也通过保护性设施复原了箭楼原貌。

古塔的修复，不仅仅是单纯的复原，可以借鉴其他国家的保护方式和理念，让我国古塔的保护得到长足发展。

以上意见和建议仅供参考！

某学生