

基于最小二乘法的太阳影子定位模型

摘 要

本文针对太阳影子定位技术进行研究，首先建立太阳影长模型，其次解决了根据太阳影子变化数据反推确定拍摄日期和地点的问题。

针对问题一，首先借助天文学资料建立影长与太阳高度角间的几何模型，由太阳高度角确定时间、地理经度、地理纬度四个参数，建立太阳影长模型。为了检验模型准确性，我们对太阳高度角进行误差分析。其次，采取控制变量法，依次分析每个参数与太阳影长间的关系，绘制各参数关系曲线图，最后代入题目中给定的数据，得出在给定日期、地点下的太阳影子长度变化曲线，如图 9 所示。

针对问题二，确定其目标为根据已知附件 1 中的 21 个不同时刻的影子顶点数据及日期，求出直杆高度、地理经纬度三个未知参数的值，我们采用最小二乘法，利用遍历算法思想，逐步减小步长，缩小范围，利用 MATLAB 求出可能的 2 个目标地点，见表 2，为了检验拟合精度，我们进行误差分析，发现对于可能地点 1（海南岛）太阳方位角误差较大，因此我们进行模型优化，采用加权法，分配给太阳方位角差较大权重，再次进行求解，得到最终地点：海南省三亚市崖州区，具体参数见下表：

纬度	经度	直杆高度
$18.2^{\circ}N$	$109.4^{\circ}E$	2m

为检验模型精确度，我们对该地区分别进行影长和太阳高度角的误差分析，结果见表 6，相对误差数量级为 10^{-4} ，验证模型精确性。

针对问题三，在问题二的基础上增加了未知参数日期，我们沿用问题二的模型，利用最小二乘法进行求解，同时，通过问题二求解我们发现太阳方位角对精度有极大影响，因此我们将太阳方位角差的权重调整为 0.7，利用 MATLAB 分别对附件 2、3 中的数据求解并结合误差分析最终确定的地点为新疆阿克苏地区和四川省广安市，具体参数见下表：

地区	日期	纬度	经度	直杆高度
新疆阿克苏地区	7 月 28 日或 5 月 27 日	$40.1^{\circ}N$	$81.1^{\circ}E$	2m
四川省广安市	2 月 15 日或 11 月 7 日	$30.5^{\circ}N$	$106.7^{\circ}E$	2.9m

另外，我们对模型进行灵敏度分析，分别分析影长模型关于日期、直杆高度、经纬度的灵敏度，使用 MATLAB 绘制曲线发现，影长模型关于各个参数均是稳定的，且对于直杆所在地经度最稳定。

关键词：太阳高度角 误差分析 最小二乘法 太阳方位角 灵敏度分析

一、问题重述

太阳影子定位技术可以根据不同时刻太阳影子的变化，确定拍摄地点及日期的技术，本题基于这一背景解决以下问题：

1. 找到与影子长度有关的参数，建立影子长度变化的数学模型，并将模型应用于给定日期，时间范围，经纬度时的具体实例。
2. 根据题目中给定的日期，21 个不同时刻下的影子顶点坐标，反推判断出固定直杆所在的可能地点的经纬度。
3. 对问题 2 进行延伸，仅根据题目中给定的 21 个时刻的两组影子顶点坐标数据，反推判断固定直杆所在地的可能地点的经纬度。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

查阅资料发现与影长有关的参数太阳高度角，以太阳高度角作为桥梁，找到影响太阳高度角的参数，利用这些参数建立太阳影长模型。利用控制变量法，探究各个参数与太阳影长间的关系，最后将题目中给定的日期，时间段，直杆高度以及经纬度代入太阳影长模型进行求解，最后通过误差分析检验模型准确性。

2.2 问题二的分析

题目可以转化为根据附件 1 中给定的 21 个不同时刻的影子顶点坐标以及日期，结合问题一所建立的模型求解直杆高度、地理经度、地理纬度三个未知参数的值，我们采用最小二乘法进行求解，并利用误差分析进行模型精确度检验。

2.3 问题三的分析

在问题二的基础上增加一个未知参数日期，延伸问题二的模型，利用最小二乘法求出日期、直杆高度、地理经度、地理纬度四个参数的值。

三、模型假设

1. 影子变化仅与太阳有关，忽略不同地区的天气影响
2. 假设太阳光线严格平行
3. 日期关于夏至日冬至日对称时出现的情况也对称
4. 附件给出的影子顶点坐标忽略地面不平整情况以及其他物体遮挡

四、符号说明

符号	说明
l_s	直杆高度
l	影子长度
α	太阳高度角
γ	太阳方位角
ω	太阳时角
δ	赤纬夹角
n	日期（一年中的第几天）
H_s	太阳时
H_{ls}	钟表时
ϑ	经度
ϕ	纬度
t	时刻

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

影子是一种光学现象，影子长度由各个因素共同决定，我们通过确定各参数对影子长度的影响，从而建立影长模型。

5.1.1 影长模型

我们将实际影长、物体高度与太阳三者关系抽象为图1的几何模型，设太阳高度角为 α ，直杆高度为 l_s ，影长为 l ，则有几何关系：

$$l = l_s \cot \alpha$$

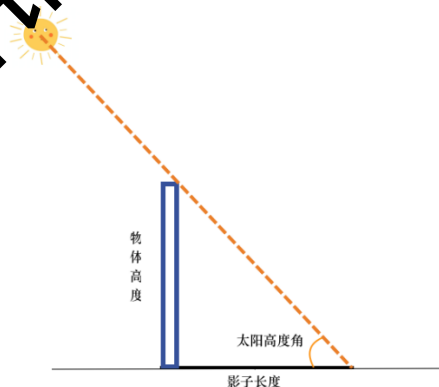


图1：影长的几何模型

由于物体高度是固定的，因此影长与太阳高度角有关，接下来我们分析太阳高度角，建立太阳高度角的具体模型。

太阳高度角模型

太阳高度角是指某地太阳光线与通过该地与地心相连的地表切面的夹角[1]，如图2所示，查阅资料，太阳高度角计算公式如下：

$$\alpha = \arcsin(\sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \omega)$$

其中, ϕ 为所在地纬度, δ 为太阳赤纬夹角, ω 为太阳时角。

因此，太阳高度角与纬度，太阳赤纬夹角和太阳时角有关，由于某地的经纬度是确定的，下面我们从赤纬夹角和太阳时角进行分析。

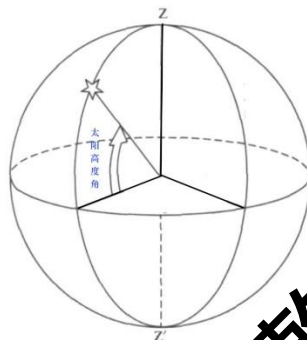


图 2: 太阳高度角示意图

太阳赤纬夹角

赤纬角是由于地球绕太阳运行造成的现象,它随时间而变,因为地轴方向不变,所以赤纬角随地球在运行轨道上的不同点具有不同的数值。赤纬角以年为周期,在 $+23^{\circ}26'$ 与 $-23^{\circ}26'$ 的范围内移动,成为季节的标志[2],如图2所示。

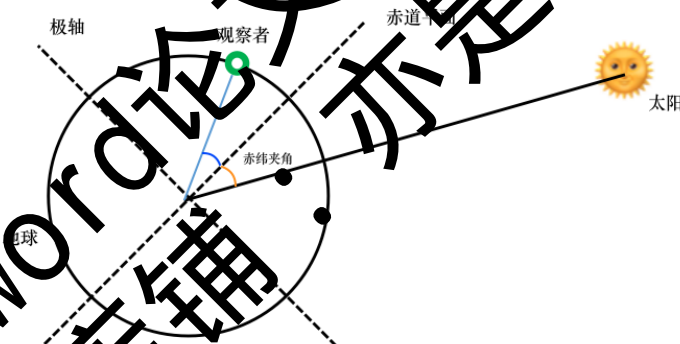


图 3: 太阳赤纬夹角

查相关资料结合赤纬角定义可知, 太阳赤纬夹角与时间有关且以年为周期, 计算公式为:

$$\delta = 23.45 \times \sin\left(2\pi \times \frac{284 + n}{365}\right) \times \frac{\pi}{180}$$

其中, δ 为弧度制, n 表示天数, 即一年中的第几天, 认为 1 月 1 日, $n=1$, 12 月 31 日, $n=365$ 。

太阳时角

太阳时角是指日面中心的时角，即从观测点天球子午圈沿天赤道量至太阳所在时圈的角距离[3]。在地球上，同一时刻，对同一经度，不同纬度的人来说，太阳对应的时角是相同的。单位时间地球自转的角度定义为时角 ω ，规定正午时角为 0，上

午时角为负值，下午时角为正值。地球自转一周 360 度，对应的时间为 24 小时，即每小时相应的时角为 15 度。查阅资料可知，太阳时角的计算公式为

$$\omega = 15 \times (H_s - 12) \times \frac{\pi}{180}$$

其中， H_s 为太阳时， ω 为弧度制。

在中国地区，各地时间均用的是北京时间，而北京时间为北京时间是东经 120 度经线的地方平太阳时，由于中国地域宽广，东西跨经度范围大，分析太阳高度角时我们需采用地方时。根据查阅天文资料，从天文学上说，时间分为真太阳时和平太阳时，在中国，平太阳时即为北京时间，而真太阳时=北京时间+时差，因此，太阳时 H_s 的计算公式为

$$H_s = H_{ls} + \frac{E}{60} + \frac{L_{sm} - \vartheta}{15}$$

其中， H_{ls} 表示所在地的标准时间，我国为北京时间， ϑ 表示所在地的经度，若所在地经度为东经则 $\vartheta > 0$ ，若所在地经度为西经，则 $\vartheta < 0$ ， L_{sm} 为制定标准时间地区的地理经度，中国为 $120^\circ E$ ， E 表示太阳公转引起的时间差 H_s 和钟表时 H_{ls} 之间的修正值，以分为单位，查阅资料其计算公式如下：

$$E = \sin 2B - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B$$

$$\text{其中， } B = 2\pi \times \frac{n - 81}{365}$$

综合上述公式可知，影长模型如下：

$$l = l_s \cos \alpha$$

其中，

$$\begin{cases} \alpha = \arcsin(\sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \omega) \\ \delta = 23.45 \times \sin(2\pi \times (0.84 + n)/365) \times \pi/180 \\ \omega = 15 \times (H_s - 12) \times \pi/180 \\ H_s = H_{ls} + E/60 + (L_{sm} - \vartheta)/15 \\ E = 9.8 \sin 2B - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B \\ B = 2\pi \times (n - 81)/365 \end{cases}$$

H_{ls} 为北京时间， L_{sm} 为 $120^\circ E$ ， ϑ 表示所在地的经度， ϕ 表示所在地纬度。

3.1.2 影子长度关于各个参数的变化规律

由模型一可知，影长由太阳高度角决定，而太阳高度角由杆高、时间和所在地经纬度决定，因此我们采用控制变量法，分别分析这三个参数与影长的关系。

(1) 固定经度为 $116^\circ 23' 29''$ ，纬度为 $39^\circ 54' 26'' N$ ，时间为 2015 年 10 月 22 日，自变量为杆的高度，因变量为影长，二者关系图如下：

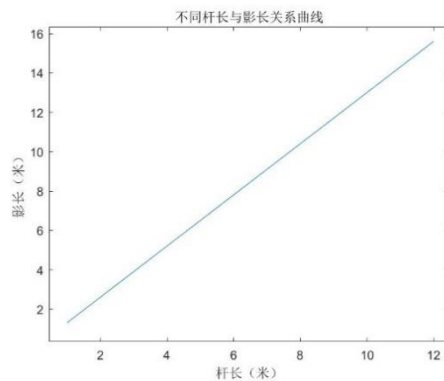


图 4：直杆高度与影长关系图

当时间和经纬度均固定时，随着杆高度的增加，影长随之不断增加。

- (2) 固定杆的高度为 3 米，经度为 $116^{\circ}23'29''$ ，纬度为 $39^{\circ}54'26''N$ ，自变量为时间，以月为单位变化，因变量为影长，二者关系如图：

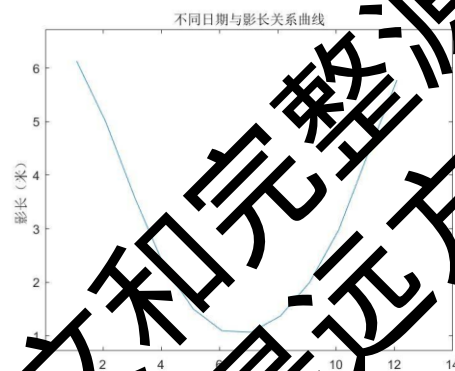


图 5：时间与影长关系图

当杆高和经纬度均固定时，随着时间的增加，影长呈现先减少后增加的趋势，并在 6、7 月中间达到最小值，此时应为夏至日。

- (3) 固定固定杆的高度为 3 米，时间为 2015 年 10 月 22 日，经度为 $116^{\circ}23'29''$ ，自变量为时间，以月为单位变化，因变量为影长，二者关系如图：

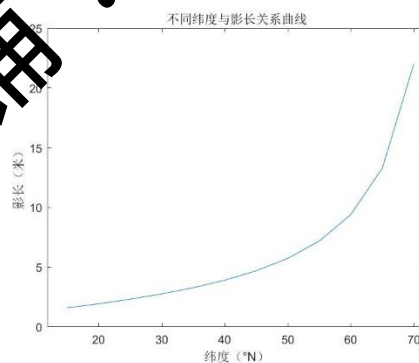


图 6：所在地纬度与影长关系图

当杆高、时间和所在地经度均固定时，在北半球，随着纬度的增加，影长随之增加，由于地球的对称性，南半球同理成立。

- (4) 固定固定杆的高度为 3 米，时间为 2015 年 10 月 22 日，纬度为 $39^{\circ}54'26''N$ ，自变量为经度，因变量为影长，二者关系如图：

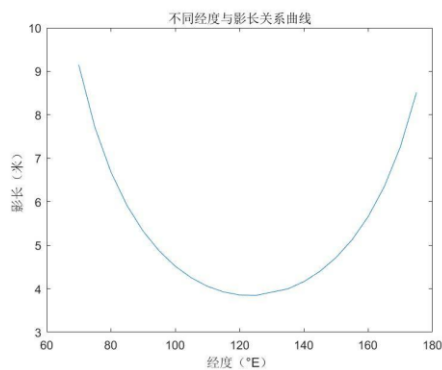


图 7：所在地经度与影长关系图

当杆高、时间和所在地纬度均固定时，在东半球，随着经度的增加，影长呈现先减少后增加的趋势，且影长最小值在 $120^{\circ}E$ 附近。

5.1.3 问题一的求解

问题一重述：通过模型一画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线，因此有

$$\begin{cases} l_s = 3 \\ n = 294 \\ H_{ls} \in [9:00, 15:00] \\ \varphi = 39^{\circ}54'26'' \\ \lambda = 116^{\circ}23'29'' \end{cases}$$

代入影长模型，利用 MATLAB 可绘制出太阳高度角和太阳影子长度的变化曲线分别如下图所示，

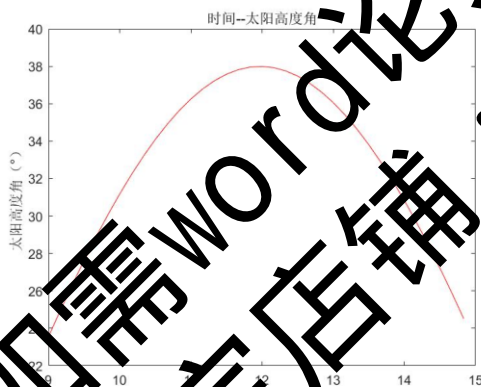


图 8：时间与太阳高度角变化曲线

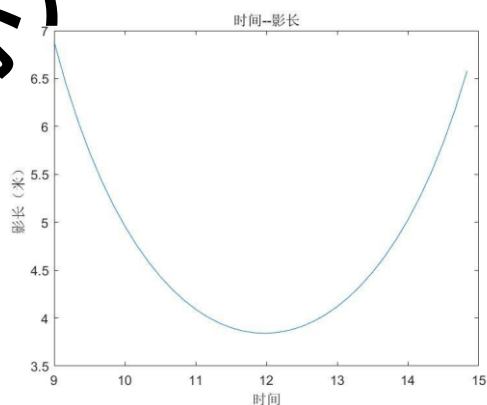


图 9：时间与影长变化曲线

在 2015 年 10 月 22 日北京天安门广场，北京时间从 9:00 开始一直增加到 15:00 结束，当直杆高度固定为 3 米时，影子的长度先减少后增加，且最大长度不超过 7 米，最小长度大于 3.5 米，影长达到最小长度时，北京时间为 12:00，通过太阳高度角与影长关系图可分析知，此时太阳高度角最大，因而影长最短。对比两图可以发现，太阳高度角的变化与影长的变化正好相反。

5.1.4 误差分析

我们利用模型一计算出理论太阳高度角 h ，通过软件 stellarium 中实际测量出的太阳高度角数据 h' 与理论计算出的数据进行对比，并计算误差 $\Delta = \alpha - \alpha'$ ，测量时间为 2015 年 10 月 22 日，测量地点为北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒，

部分结果如下：

表 1：太阳高度角误差分析

北京时间	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
理论值	24.4514	32.1941	37.3778	39.1747	37.2264	31.9186	24.0872
实际值	23.5471	31.1730	36.2500	37.9899	36.0596	30.8273	23.0908
相对误差	0.9043	0.0317	0.0302	0.0302	0.0313	0.0342	0.0414

相对误差散点分布图如下：

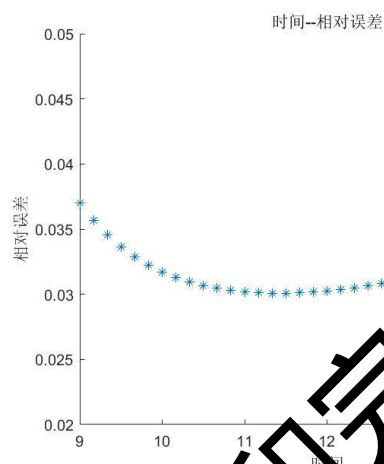


图 10：太阳高度角相对误差散点图

计算相对误差限为 0.0414，平均误差为 0.0327，故我们可以认为模型误差相当小，从而我们在模型中求出的太阳高度角所作的计算是合理的，因此模型中影长的计算是准确有效的。

5.2 问题二模型的建立与求解

太阳影子定位技术是通过分析物体影子变化，确定拍摄地点及拍摄日期的技术，本题通过附件 1 中所给出日期与影子顶点坐标，反推确定直杆所在地点。

5.2.1 问题二模型的建立

由附件 1 中仅给出影子顶点坐标数据及日期，模型一是关于各参数与影长模型，建立的量为长度与角度间关系，为了结合模型一并使影子顶点坐标充分利用，我们采用极坐标思想，将给出的顶点数据直角坐标 (x, y) 转化为极坐标 (l, θ) 进行问题求解。

根据问题二所给，坐标系以直杆底端为原点，水平地面为 xy 平面，直杆垂直于地面，建立坐标系如下图所示：

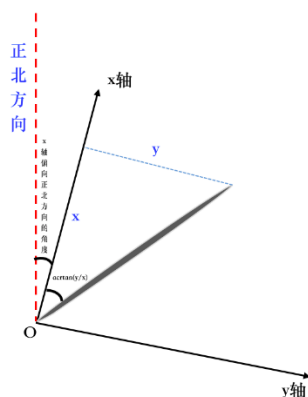


图 11: 影长坐标系

将直角坐标转化为极坐标

$$\begin{cases} l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ \theta_i = \arctan \frac{y_i}{x_i} \end{cases}$$

其中, $i = 1, 2, \dots, 21$

影子长度

根据影子顶点坐标 (x, y) 与影长 l 的几何关系可知, 影长

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

即上述极坐标公式中 $l_i (i = 1, 2, \dots, 21)$ 为影子长度

同时, 为了探究 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, 21)$ 与模型一中各个角度的关系, 目的是利用已建立的模型一求解问题二, 我们通过查阅天文资料, 发现太阳方位角与 θ 角的定义十分相似, 于是我们引入太阳方位角概念。

太阳方位角

太阳方位角是太阳在方位上的角度, 一般是以目标物的北方向为起始方向, 以太阳光的入射方向为终止方向, 按顺时针方向所测量的角度, 可近似的看作是竖立在地面上的直线在阳光下的阴影与正南方向的夹角[5]。

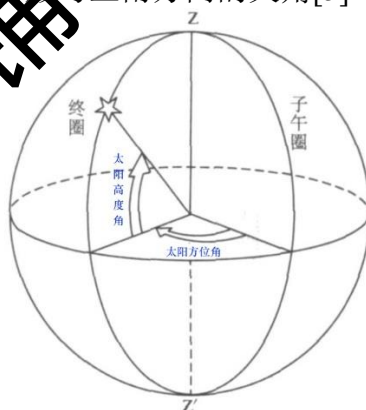


图 12: 太阳方位角图示

查阅资料, 太阳方位角 γ 计算公式为:

$$\cos \gamma = \frac{\sin \delta - \sin \alpha \sin \phi}{\cos \alpha \cos \phi}$$

$$\gamma = \begin{cases} \arccos \frac{\sin \delta - \sin \alpha \sin \phi}{\cos \alpha \cos \phi}, \omega < 0 \\ \arccos \frac{\sin \delta - \sin \alpha \sin \phi}{\cos \alpha \cos \phi}, \omega > 0 \end{cases}$$

其中， α 为太阳高度角， δ 为赤纬夹角， ϕ 为所在地纬度， ω 为太阳时角。

根据定义，我们建立太阳方位角 γ 和 θ 的几何关系。由于题目中未明确说明 x 轴的具体方位，我们假设 x 轴与正北方向存在夹角 β ，根据图 11 几何模型可建立如下关系：

$$\gamma_i = \theta_i + \beta$$

其中， $i = 1, 2, \dots, 21$ ， γ_i 为太阳方位角， β 为 x 轴与正北方向的夹角，为一固定角度。

由于 β 的具体值未知，为了消除其影响，我们利用作差法，对相邻时间太阳方位角进行作差，得到

$$\Delta \gamma_i = \theta_{i+1} - \theta_i$$

其中， $i = 1, 2, \dots, 20$

$$\gamma_i = \begin{cases} \arccos \frac{\sin \delta - \sin \alpha \sin \phi}{\cos \alpha \cos \phi}, \omega < 0 \\ \arccos \frac{\sin \delta - \sin \alpha \sin \phi}{\cos \alpha \cos \phi}, \omega > 0 \end{cases}$$

$$\theta_i = \arctan \frac{y_i}{x_i}$$

5.2.2 参数 ϕ, ϑ, l_s 的确定

利用最小二乘法确定参数的值：

首先，我们通过对附件 1 中的数据进行处理，可以得到

1. 各时间的实际影长 $l_i (i = 1, 2, \dots, 21)$
2. 相邻时间的实际太阳方位角差 $\Delta \gamma_i = \theta_{i+1} - \theta_i (i = 1, 2, \dots, 20)$

综合模型一和模型二以及题目中所给的时间，可分别得到 $l = f(\phi, \vartheta, l_s)$ ， $\Delta \gamma = g(\phi, \vartheta, l_s)$ 关系式。由影长和太阳方位角的实际值，可绘出实际影长—时间散点图，实际太阳方位角—时间散点图，我们利用遍历思想，对参数 ϕ, ϑ, l_s 进行遍历，最终确定参数 ϕ, ϑ, l_s 的值使以下公式成立

$$\begin{cases} \min \left[\sum_{i=1}^{21} (l_i - l'_i)^2 \right] / 21 \\ \min \left[\sum_{i=1}^{20} (\Delta \gamma_{i+1} - \Delta \gamma_i)^2 \right] / 20 \end{cases}$$

s.t.

$$\begin{cases} l_s > 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 0 \leq \gamma \leq 180^\circ \\ -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ \end{cases}$$

上述问题为双目标规划模型，为了简便计算，我们利用代数变换将双目标规划模型转化为单目标规划模型，首先，我们考虑到影长和太阳方位角地位等价，设其权重相等，于是目标函数转化为

$$\min \sum_{i=1}^{21} (l_i - l'_i)^2 / 21 \cdot \sum_{i=1}^{20} (\Delta\gamma_i - \Delta\gamma'_i)^2 / 20$$

其次，我们利用遍历算法，求出参数 ϕ, ϑ, l_s 的值。

具体遍历步骤如下：

Step1: 设纬度 ϕ from -90° to 90° ，经度 ϑ from -180° to 180° ，直杆高度 l_s from 1 to 10

Step2: 先粗略遍历，设纬度 ϕ 步长为10，经度 ϑ 步长为10，直杆高度 l_s 步长为1进行遍历，依次算出每个时间节点对应的单目标规划目标函数的值。

Step3: 设定阈值 ε ，筛选 step2 求出的目标函数值小于 ε 的各组参数值。

Step4: 进行精确遍历，在筛选出各参数的周围缩小遍历步长，同时减小阈值 ε ，重复 step1~step3，得到最终各参数 ϕ, ϑ, l_s 的值。

最小二乘算法伪代码

Algorithm 2 求解地理位置

Input: $G: Fs', Ls', Time$ ▷ 输入通过附件数据所求得的方位角，影长和时间

Output: $P: [l \ w \ j]$ ▷ 影长，纬度，经度

```

1: function ROUGHTRAVERSAL
2:    $L = [0, 10]$ 
3:    $W = [-90, 90]$ 
4:    $J = [-180, 180]$ 
5:   for each  $l$  in  $L$  step = 1 do
6:     for each  $w$  in  $W$  step = 10 do
7:       for each  $j$  in  $J$  step = 10 do
8:         for each  $t$  in  $Time$  do
9:            $Ls(i) = 1 / \tan(\theta_H)$ 
10:           $Err(i) = \arccos((\sin(C) - \sin(\theta_H) * \sin(w)) / (\cos(\theta_H) * \cos(w)))$ 
11:        end for
12:         $FsError = \frac{1}{20} * \sum_{i=1}^{20} (Fs(i) - Fs'(i))^2$ 
13:         $LsError = \frac{1}{21} * \sum_{j=1}^{21} (Ls(j) - Ls'(j))^2$ 
14:         $Error = 0.6 * FsError + 0.4 * LsError$  ▷ 误差
15:        if  $Error < \delta$  then
16:           $P = [l \ w \ j]$  ▷ 误差最小的杆长，纬度和经度数组
17:        end if
18:      end for
19:    end for
20:  end for
21:  return P
22: end function

```

通过 MATLAB 进行遍历求解得出附件一可能地点有两个

表 2: 附近 1 可能地点

可能地点	纬度	经度	直杆高度
1	19°N	109°E	2m
2	21°N	106°E	2m

根据地图可知，

地点 1 位于我国海南岛大广坝文兴水库附近，地点 2 位于越南兴安文林附近。

5.2.3 预测地点误差分析

为了检验模型所求各参数值是否精确，我们分别对影长和太阳方位角差值进行误差分析，部分数据结果如下，全部数据结果见附录 1：

表 3: 预测地点误差分析

可能地点	影长平均相对误差	太阳方位角差平均相对误差
海南岛大广坝水库	-0.0028	0.0869
越南文兴安林	0.0026	0.4172

对比两组地点误差可以发现海南的误差更小，但是太阳方位角误差较大，超过 5%。为了使参数值更精确，我们进行模型优化。

预测地点 1（海南岛大广坝水库）拟合曲线

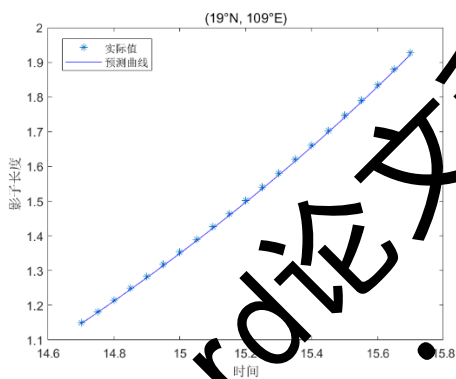


图 13: 地点 1 影长拟合曲线

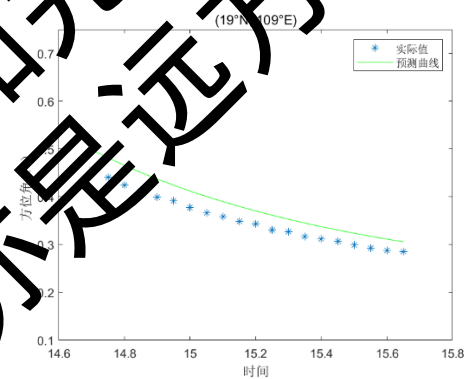


图 14: 地点 1 太阳高度角差拟合曲线



图 15: 海南岛大广坝水库实际地图

5.2.4 模型优化

根据上述分析，我们可以将目标锁定中国海南岛附近，由于此时太阳方位角误差过大，我们调整目标函数，通过加权法，将太阳方位角的权重调大，以减少太阳方位角误差。我们将太阳方位角差权重设为0.6，将影长的权重设为0.4，因此，模型二调整为

$$\min 0.4 \sum_{i=1}^{21} (l_i - l'_i)^2 / 21 + 0.6 \sum_{i=1}^{20} (\Delta\gamma_i - \Delta\gamma'_i)^2 / 20$$

s.t.

$$\begin{cases} l_{si} > 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 0 \leq \gamma \leq 180^\circ \\ -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ \end{cases}$$

同样地，我们使用最小二乘法，求解参数 ϕ, ϑ, l_s ，利用遍历算法，在海南岛附近进行搜索，并提高遍历精度，使曲线拟合更完美，利用MATLAB可得到最终地点

表 4：附近 1 最终地点

纬度	经度	直杆高度
18.2°N	109.4°E	2m

该地点为海南省三亚市崖州区，地图如下



图 16：海南省三亚市崖州区地图

误差分析
影长误差分析

表 5：优化后影长误差分析

数据	1	2	3	4	5
实际值	1.1496	1.3534	1.6201	1.7901	1.9279
预测值	1.1482	1.3529	1.6211	1.7923	1.9311
相对误差	0.0013	0.0003	0.0006	0.0012	0.0017
平均误差：0.0188%					

太阳方位角差误差分析

表 6: 优化后太阳方位角误差分析

数据	1	2	3	4	5
实际值	0.4555	0.4136	0.3582	0.2987	0.2853
预测值	0.4583	0.4151	0.3598	0.3001	0.2840
相对误差	0.0060	0.0035	0.0044	0.0045	0.0046

平均误差: 0.4011%

影长的平均误差为 0.0188%，太阳方位角差的平均误差为 0.4011%，平均误差非常小，认为曲线拟合完美，求出的地点精确。

拟合曲线如下图所示：

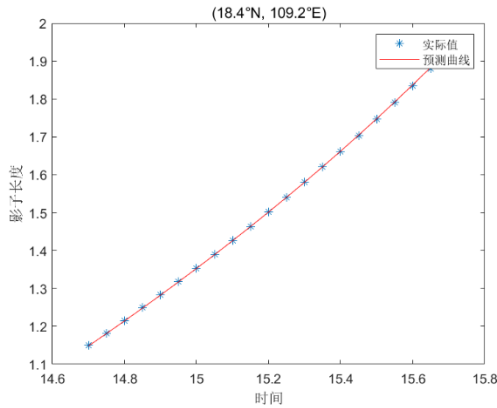


图 17: 附件 1 地点影长拟合曲线

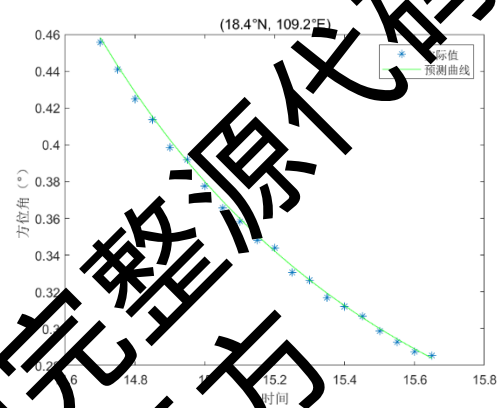


图 18: 附件 1 地点太阳方位角差拟合曲线

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 问题三的分析

问题三相较于问题二，多了一个未知参数日期 n 。利用模型一和模型二可以分别得出影长和太阳方位角差与各参数间的关系式 $l = f'(n, \phi, \vartheta, l_s)$ ， $\Delta\gamma = g'(n, \phi, \vartheta, l_s)$ ，我们沿用问题二使用的最小二乘法，求出四个未知参数 n, ϕ, ϑ, l_s 的值，同样地，我们使用遍历算法进行求解。

通过问题二误差分析可以看出，当拟合得到的参数值接近实际参数值时，影长的误差均很小，变化不明显，而太阳方位角差的误差对于不同参数值，表现出的变化更大。为了使预测地点更为精确，我们利用加权法，将太阳方位角的权重调大，设为 0.7，影长的权重设为 0.3，目标函数为

$$\min_{s.t.} 0.3 \sum_{i=1}^{21} (l_i - l'_i)^2 / 21 + 0.7 \sum_{i=1}^{20} (\Delta\gamma_i - \Delta\gamma'_i)^2 / 20$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_s > 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 0 \leq \gamma \leq 180^\circ \\ -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ \\ 1 \leq n \leq 365 \end{array} \right.$$

未知参数有日期 n 、纬度 ϕ 、经度 ϑ 、直杆高度 l_s 。

5.3.2 附件 2 数据对应地点预测

通过 MATLAB 进行计算，对附件 2 中的数据预测出可能地点如下：

表 7：附件 2 数据预测地点

可能地点	日期	纬度	经度	直杆高度	对应地区
1	5.11/8.13	37.4°N	80.9°E	1.9m	新疆和田地区
2	7.20/5.25	39.8°N	81.3°E	2m	新疆阿克苏地区
3	7.18/5.27	40.1°N	81.1°E	2m	新疆阿克苏地区

为了确定哪个地点最精确，我们对上述三个地区进行影长和太阳方位角的误差分析。

表 8：预测地点误差分析

可能地点	影长平均相对误差	太阳方位角差平均相对误差
新疆和田地区	0.0069%	-2.3220%
新疆阿克苏地区 1	0.0090%	0.5220%
新疆阿克苏地区 2	0.0089%	0.0985%

分析上表可知，影长的平均误差均极小，由于太阳方位角误差更大，而新疆阿克苏地区 2 的相对误差最小且达到 0.0985%，我们认为误差极小，曲线拟合十分完美。

地点 3 的误差散点图

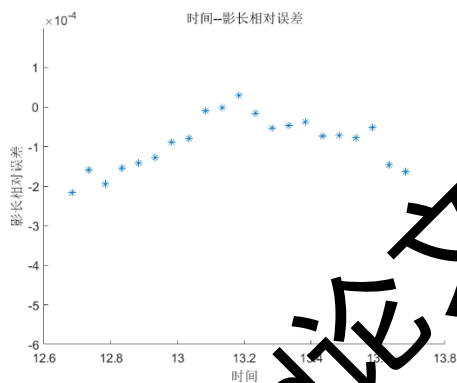


图 19：影长相对误差散点图

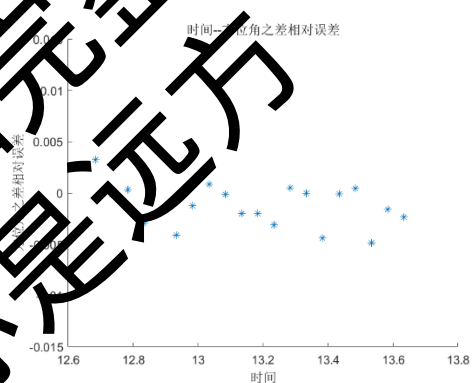


图 20：太阳方位角相对误差散点图

分析散点图可以发现，影长和太阳方位角差的相对误差均在 0 附件震荡，影长相对误差限值小于 0.01%，太阳方位角相对误差限值不超过 0.5%，我们认为相对误差十分小，因此我们选择地点 3 作为最终地点，且预测推断合理有效。

地点 3 对应的拟合曲线

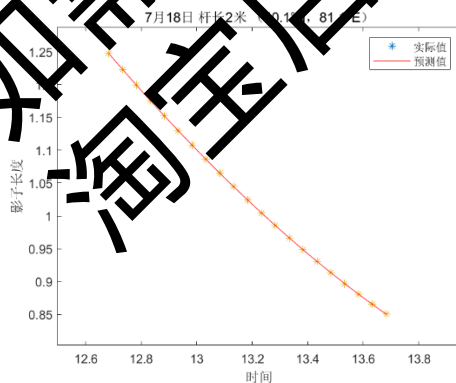


图 21：附件 2 地点影长拟合曲线

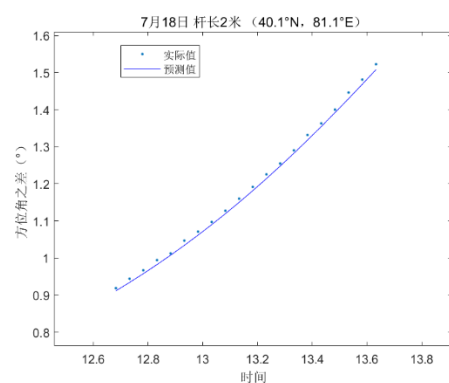


图 22：附件 2 地点方位角差拟合曲线

表 9：附件二最终地点

日期	纬度	经度	直杆高度
7 月 18 日或 5 月 27 日	$40.1^{\circ}N$	$81.1^{\circ}E$	$2m$



图 23：新疆阿克苏地区

5.3.3 附件 3 数据对应地点预测

通过 MATLAB 进行计算，对附件 3 中的数据预测出可能地点如下：

表 10：附件 3 预测地点

可能地点	日期	纬度	经度	直杆高度	对应地区
1	11.7/2.16	$30.5^{\circ}N$	$106.7^{\circ}E$	2.9m	四川省广安市
2	5.15/1.18	$31.3^{\circ}S$	$109.4^{\circ}E$	2.9m	澳大利亚西北海域
3	5.13/8.20	$31.8^{\circ}S$	$109.4^{\circ}E$	2.9m	澳大利亚西北海域

为了确定哪个地点最精确，我们对上述三个地区进行影长和太阳方位角的误差分析。

表 11：预测地点误差分析

可能地点	影长平均相对误差	太阳方位角差平均相对误差
四川省广安市	0.0004%	0.5409%
澳大利亚西北海域 1	0.0064%	0.0082%
澳大利亚西北海域 2	0.0007%	0.3304%

分析上表可知，四川省广安市的影长平均误差接近于 0，我们选择陆地区域四川省广安市作为预测地点。

四川省广安市相对误差散点图

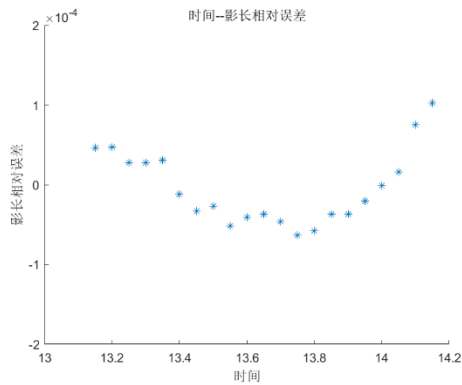


图 24: 影长相对误差散点图

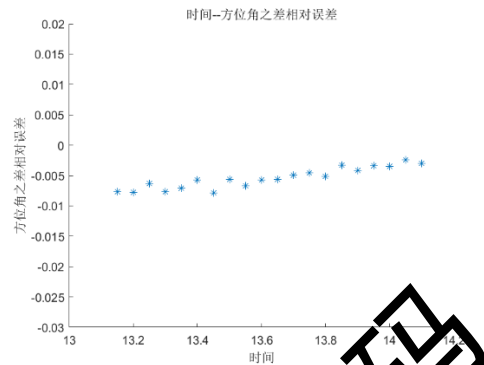


图 25: 方位角差相对误差散点图

由图可知，影长和方位角差的相对误差均在 0 附件震荡，且限制均很小，我们可以认为各参数值十分精确，曲线拟合完美。

四川省广安市拟合曲线

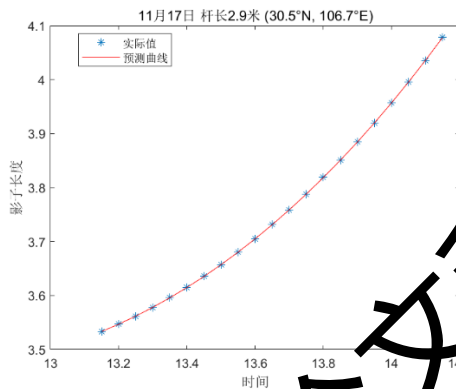


图 26: 影长拟合曲线

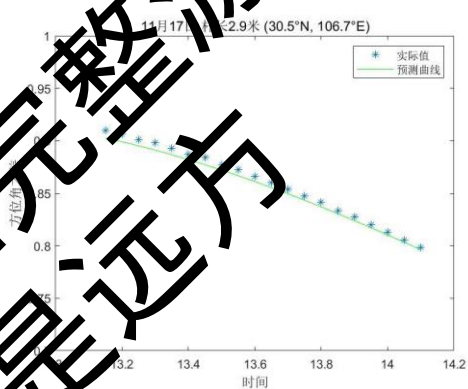


图 27: 方位角差拟合曲线

表 12: 附件 3 最终地点

日期	纬度	经度	直杆高度
2 月 13 日或 11 月 7 日	30.5°N	106.7°E	2.9m



图 27: 四川省广安市

六、模型的检验

我们对于问题一进行灵敏度分析。

(1) 日期 n 的灵敏度分析

当 $l_s = 3m$, $\phi = 39^\circ 54' 26'' N$, $\vartheta = 116^\circ 23' 29'' E$,

取 $n = 10$ 月20日, 10月22日, 10月24日分别进行标定得:

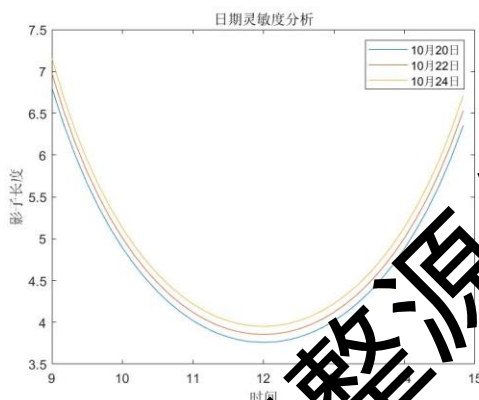


图 28: 日期灵敏度分析

由图可知, n 在一定变化范围内, 曲线大致形状不变, 可以认为模型关于 n 是稳定的。其次, 在正午12时附近差值较大, 与实际相符。

(2) 直杆高度 l_s 的灵敏度分析

当 $n = 10$ 月22日, $\phi = 39^\circ 54' 26'' N$, $\vartheta = 116^\circ 23' 29'' E$,

取 $l_s = 2.9m, 3m, 3.1$ 分别进行标定可得:

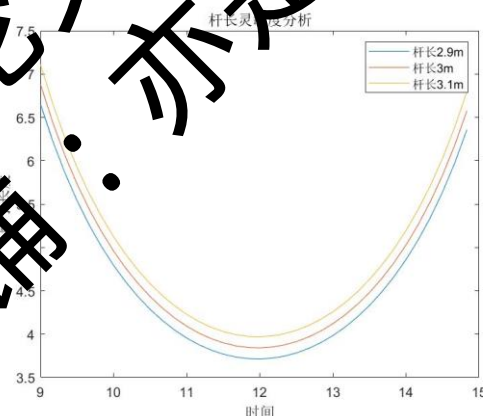


图 29: 直杆高度灵敏度分析

由图可知, l_s 在一定变化范围内, 曲线大致形状不变, 可以认为模型关于 l_s 是稳定的。其次, 在正午12时附近差值较大, 与实际相符。

(3) 纬度 ϕ 的灵敏度分析

当 $n = 10$ 月22日, $l_s = 3m$, $\vartheta = 116^\circ 23' 29'' E$,

取 $\phi = 38^\circ N, 40^\circ N, 42^\circ N$, 分别进行标定可得

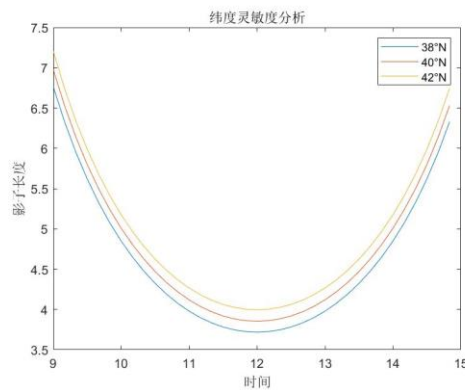


图 30: 纬度灵敏度分析

由图可知, ϕ 在一定变化范围内, 曲线大致形状不变, 可以认为模型关于 ϕ 是稳定的。其次, 在正午 12 时附近差值较大, 与实际相符。

(4) 经度 ϑ 的灵敏度分析

当 $n=10$ 月 22 日, $l_s=3m$, $\phi=39^{\circ}54'26''N$,

取 $\vartheta=114^{\circ}E, 116^{\circ}E, 118^{\circ}E$ 分别进行标准计算。

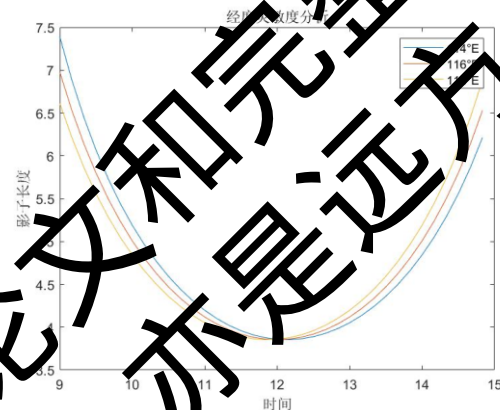


图 31: 经度灵敏度分析

由图可知, ϑ 在一定变化范围内, 曲线大致形状不变, 可以认为模型关于 ϑ 是稳定的, 且变化较小, 认为稳定程度较好。

综合以上对各参数的灵敏度分析可以发现, 模型关于参数 n, l_s, ϕ, ϑ 均是稳定的, 且关于经度 ϑ 的稳定度最高。

七、模型的评价

7.1 模型的优点

1. 建立了影子长度与太阳高度角的联系, 通过影子长度推断太阳高度角, 具有普遍适用性;
2. 通过相邻两组角度做差, 消除 x 轴的方向影响, 得到太阳方位角的差, 精确度更高;
3. 利用最小二乘法能够找到最接近实际值的曲线, 具有极高精确度;
4. 该模型可用于生活实际, 并推广到建筑领域, 具有实用性。

7.2 模型的缺点

1. 只能大致确定该地区的范围，无法十分精确到具体到该地区的某一位置
2. 双目标转化为单目标时，求的是较优解，即是太阳方位角的差和影子长度曲线误差均较小的可行解，算法遍历时间较长。

如需word论文和完整源代码
淘宝店铺：亦是远方

八、参考文献

- [1] <https://baike.baidu.com/item/>
- [2] [赤纬角_百度百科 \(baidu.com\)](#)
- [3] [太阳时角_百度百科 \(baidu.com\)](#)
- [4] [太阳方位角_百度百科 \(baidu.com\)](#)
- [5] http://www.wsanford.com/~wsanford/exo/sundials/DEC_Sun.html
- [6] <https://blog.csdn.net/zengxiantao1994/article/details/70210662>

如需word论文和完整源代码
淘宝店铺：亦是远方

附录

附录 1

介绍：问题一相关数据

09:00	09:10	09:20	09:30	09:40	09:50	10:00	10:10
10:20	10:30	10:40	10:50	11:00	11:10	11:20	11:30
11:40	12:00	12:10	12:20	12:30	12:40	12:50	13:00
13:10	13:20	13:30	13:40	13:50	14:00	14:10	14:20
14:30	14:40	14:50					
23.54706747	24.95888652	26.31936021	27.62484963	28.87157098			
30.05561416	31.17296885	32.21955763	33.19127789	34.08405189			
34.89388501	35.61693124	36.24956439	36.78845272	37.23067416			
37.57358859	37.81530344	37.95432881	37.98981875	37.92155585			
37.74995774	37.47606473	37.1015097	36.62847216	36.03961937			
35.39803825	34.64716175	33.81069349	32.89253395	31.89671067			
30.82731526	29.68844735	28.48416728	27.21845698	25.87518899			
24.51810309							
6.88405728	6.445592095	6.064878557	5.7328296	5.440869581			
5.184524165	4.958867111	4.760314805	4.586004052	4.433639269			
4.301377394	4.187740618	4.091548975	4.011868186	3.947969099			
3.899296324	3.865444393	3.846140289	3.841231639	3.850680081			
3.874559593	3.913059721	3.966495805	4.035312316	4.120123254			
4.221716208	4.341098421	4.479527717	4.638619413	4.820318373			
5.027096221	5.262024908	5.528956576	5.832746202	6.179576661			
6.577391163							

附录 2

介绍：问题一求解关系曲线 MATLAB 代码

```

clc;
clear;

% 0 -> A 纬度
% 0 -> B 太阳赤道倾角
% 0 -> C 太阳时角
% 0 -> Oh 太阳高度角
% 0 -> D 经度
%

% 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00

% 10 月 22 日是一年的第 295 天
n = 295.0;

% 地理位置 北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒
% 纬度
W = 39 + 54/60 + 26/3600;
% 经度
J = 116 + 23/60 + 29/3600;
    
```

```

% 时区经度
Jm = 120;

% 太阳赤纬夹角（度）
F = 23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);

% 太阳时
B = 2*pi*(n - 81)/364;
E = 9.87*sin(2*B) - 7.53*cos(B) - 1.5*sin(B);

ii = 0;

X = [];

```

```

% T0: m 时 n 分
% 9:00-15:00
% m = [9, 15] n = [0, 59]
for m = 9:1:14
    for nn = 0:10:59
        ii = ii + 1;
        X(ii) = m+nn/60;
        Hour(ii) = m;
        Minute(ii) = nn;

```

```

        T0 = m + nn/60;
        Ts = T0 + E/60 + (J - Jm)/15;
        % 太阳时角（度）
        C = 15*(Ts - 12);

```

```

        % 太阳高度角
        Oh = asin(sin(W*pi/180)*sin(F*pi/180) +
            cos(W*pi/180)*cos(F*pi/180)*cos(C*pi/180));

```

```

        Ohh = Oh*180/pi;

```

```

        H(ii) = Ohh;

```

```

        % 杆长 L = 3 m
        L = 3;

```

```

        % 影长 Ls
        Ls = L/tan(Ohh);
        LsArr(ii) = Ls;

```

```

    end
end

```

```

plot(X, LsArr, 'red');
%axis([9 15 22 40]);
xlabel('时间');
ylabel('影子长度');
title('时间--影长');

```

```

clc;
clear;

%  $\phi$  -> A  纬度
%  $\delta$  -> F  太阳赤道纬度夹角
%  $\omega$  -> C  太阳时角
% h -> Oh  太阳高度角
%  $\lambda$  -> D  经度
%

% 10月22日北京时间 9:00-15:00

% 10月22日是一年的第 295 天
n = 295.0;

%地理位置 北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒
% 纬度
A = 39 + 54/60 + 26/3600;
% 经度
D = 116 + 23/60 + 29/3600;
% 时区经度
Dm = 120;

% 太阳赤纬夹角(度)
F = 23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);

% 太阳时
B = 2*pi*(n - 81)/364;
E = 9.87*sin(2*B) - 7.53*cos(B) - 5*sin(B);

ii = 0;

LsArr = [];

X = [];

Larr = [3 4 5 6 7 8 9 10]

% T0: 0:00 ~ 1:00
% 9:00 ~ 15:00
% m = [0, 15] n = [0, 59]
for m = 0:1:14
    for nn = 0:10:59
        ii = ii + 1;
        X(ii) = m*nn/60;
        T0 = m + nn/60;
        Ts = T0 + E/60 + (D - Dm)/15;
        % 太阳时角(度)
        C = 15*(Ts - 12);

        % 太阳高度角
        Oh = asin(sin(A*pi/180)*sin(F*pi/180) +
cos(A*pi/180)*cos(F*pi/180)*cos(C*pi/180));

        % 杆长 L = 3 m
        L = 3;

```



```

        % 影长 Ls
        Ls = L/tan(Oh);
        LsArr(ii) = Ls;
    end
end

plot(X, LsArr, 'red');
%axis([9 15 22 40]);
xlabel('时间');
ylabel('影子长度');
title('北京 3 米杆长 9-15 点影长随时间变化曲线');

```

附录 3

介绍：附件 1、2、3 预测地点 MATLAB 代码及灵敏度分析

```

clc;
clear;

%  $\phi$  -> A  纬度
%  $\delta$  -> F  太阳赤道纬度夹角
%  $\omega$  -> C  太阳时角
% h -> Oh  太阳高度角
%  $\lambda$  -> D  经度

dB = [0.4555 0.4409 0.4247 0.4136 0.3986 0.3919 0.3777 0.3656
      0.3582 0.3481 0.3438 0.3305 0.3264 0.3169 0.3120 0.3069
      0.2987 0.2928 0.2875 0.2853 ];

dLs = [1.1496 1.1822 1.2253 1.2491 1.2832 1.3180 1.3534 1.3894
       1.4262 1.4634 1.5015 1.5402 1.5799 1.6201 1.6613 1.7033
       1.7462 1.7901 1.8350 1.8809 1.9279 ];

% 4 月 18 日是一年的第 108 天
n = 108;

% 太阳赤道夹角 (度)
C = 23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);

% 太阳时
B = 2*pi*(n -81)/364;
E = 9.87*sin(2*B) - 7.53*cos(B) - 1.5*sin(B);

Jm = 120;

hour = [14 14 14 14 14 14 15 15 15 15 15 15 15 15 15
        15 15 15 15 15];
minutes = [4245 48 51 54 57 0 3 6 9 12 15 18 21 24 27
          30 33 36 39 42];

```

```

value1 = 0;
value2 = 0;

min = 100000000;

j = 1;

X = [];
Y = [];

MinArr = ones(12,5);
dFsArr = [];

LsArr = [];

DD = ones(12, 20);

LsArrr = ones(12, 21);
% 杆长
for L = 0:0.1:3
    % 纬度
    for W = 15:0.1:25
        % 经度
        for J = 105:0.1:115
            % 时间
            for i = 1:1:21

                T0 = hour(i) + minutes(i)/60;
                Ts = T0 + E/60 + J - 7m/15;

                % 太阳时角(度)
                S = 15*(Ts - 12);

                % 太阳高度角
                Oh = asin(sin(L*pi/180)*sin(C*pi/180) +
cos(W*pi/180)*cos(C*pi/180)*cos(L*pi/180));

                % 太阳方位角
                if (S < 0)
                    Fs = acos( (sin(C*pi/180) - sin(Oh)*sin(W*pi/180)) /
(cos(Oh)*cos(L*pi/180)));
                    FsArr(i) = Fs;
                else
                    Fs = 2*pi - acos( (sin(C*pi/180) - sin(Oh)*sin(W*pi/180))
/ (cos(Oh)*cos(W*pi/180)));
                    FsArr(i) = Fs;
                end

                if(i >= 2)
                    value1 = value1 + ( FsArr(i-1) - FsArr(i) - dB(i -
1) )^2;

                    dFsArr(i-1) = FsArr(i-1) - FsArr(i);
                end

                % 影长 Ls

```

```

        Ls = L / tan(Oh);

        LsArr(i) = Ls;

        value2 = value2 + (Ls - dLs(i))^2;

        i = i + 1;

    end

    value = value1/20*value2/21;
    %if(value < min)
        %min = value;
        %MinArr = [L W J]
    %end

    if (value < 0.0000003)
        X(j) = j;
        j
        Y(j) = value;
        LsArrr(j, :) = LsArr;
        DD(j, :) = dFsArr*180/pi;
        MinArr(j, 1:5) = [j L W J value];
        j = j+1;
    end

    value1 = 0;
    value2 = 0;
    value = 0;

end
end
end

clc;
clear;

%  $\phi$  -> 纬度
%  $\delta$  -> 太阳赤道纬度夹角
%  $\omega$  -> 太阳时角
%  $h$  -> Oh 太阳高度角
%  $L$  -> D 经度

dB = [0.928613526 0.944000767 0.966801009 0.994166838 1.012283158
1.040653371 1.071045389 1.097061852 1.127405199 1.159996144
1.191548883 1.225531726 1.254788569 1.290149918 1.331772011
1.362830448 1.399931432 1.446251384 1.481107264 1.522542777];
dLs = [1.247256205 1.22279459 1.198921486 1.175428964 1.152439573
1.12991747 1.10783548 1.086254206 1.065081072 1.044446265
1.024264126 1.004640314 0.985490908 0.966790494 0.948584735
0.930927881 0.91375175 0.897109051 0.880973762 0.865492259
0.850504468];

Jm = 120;

```

```

hour = [12 12 12 12 12 12 12 13 13 13 13 13 13 13 13 13
        13 13 13 13 13];
minutes = [41 44 47 50 53 56 59 2 5 8 11 14 17 20 23 26
           29 32 35 38 41];

value1 = 0;
value2 = 0;

j = 1;

X = [];
Y = [];

MinArr = ones(1,6);
dFsArr = [];

LsArr = [];

dFsArrr = ones(1, 20);

LsArrr = ones(1, 21);

% 199 2 40 81
% 杆长
for L = 1:0.1:3
    L
    % 纬度
    for W = 35:0.1:45
        % 经度
        for J = 75:0.1:85
            for n = 150:1:250

                % 太阳赤纬角 (度)
                C = 23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);

                % 太阳时角
                B = 2*pi*(n-81)/364;
                E = 9.87*sin(2*B) - 7.53*cos(B) - 1.5*sin(B);

                % 时间
                for i = 1:1:21
                    T0 = hour(i) + minutes(i)/60;
                    Ts = T0 + E/60 + (J - Jm)/15;

                    % 太阳时角 (度)
                    S = 15*(Ts - 12);

                    % 太阳高度角
                    Oh = asin(sin(W*pi/180)*sin(C.*pi/180) +
                               cos(W*pi/180)*cos(C*pi/180)*cos(S*pi/180));

                    % 太阳方位角
                    if(S < 0)
                        Fs = acos( (sin(C*pi/180) - sin(Oh)*sin(W*pi/180)) /
                                   (cos(Oh)*cos(W*pi/180)));
                        FsArr(i) = Fs;
                    else

```

```

        Fs = 2*pi - acos( (sin(C*pi/180) -
sin(Oh)*sin(W*pi/180)) / (cos(Oh)*cos(W*pi/180)));
        FsArr(i) = Fs;
    end

    if(i >= 2)
        value1 = value1 + ( FsArr(i-1) - FsArr(i) - dB(i -
1) )^2;

        dFsArr(i-1) = FsArr(i-1) - FsArr(i);
    end
    % 影长 Ls
    Ls = L / tan(Oh);

    LsArr(i) = Ls;

    value2 = value2 + (Ls - dLs(i))^2;

end

value = value1/20*value2/21;

if (value < 0.0000001)
    X(j) = j;
    j
    Y(j) = value;
    LsArrr(j, :) = LsArr;
    dFsArrr(j, :) = dFsArr*180/pi;
    MinArr(j, 1:6) = [j h L W J value];
    j = j+1;
end

value1 = ;
value2 = ;
value = 0;

end

end

end

clc;
clear;

% 0 -> A 经度
% 1 -> F 太阳赤纬纬度夹角
% w -> W 太阳时角
% h -> Oh 太阳高度角
% λ -> D 经度

dB = [0.909541043 0.906049014 0.900872887 0.897969489 0.893046127
0.887167053 0.884149304 0.876983995 0.872571801 0.866083489
0.860234734 0.853663332 0.847169536 0.841329236 0.833261206
0.827336861 0.819957272 0.813116998 0.805282613 0.798637273
];
dLs = [3.533142184 3.546768029 3.561797643 3.578100715 3.595750783
3.61493428 3.635425983 3.657218272 3.680541115 3.705167836
3.731278025 3.758917911 3.788087888 3.818701015 3.850809619

```

```

3.88458522 3.919911828 3.956875992 3.99553479 4.035750835
4.077863059
];
Jm = 120;

hour = [13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13
13 14 14 14 14
];
minutes = [9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 42 45 48 51 54
57 0 3 6 9
];

value1 = 0;
value2 = 0;

j = 1;

X = [];
Y = [];

MinArr = ones(1,6);
dFsArr = [];

LsArr = [];

dFsArrr = ones(1, 20);

LsArrr = ones(1, 21);

% 199 2 40 81
% 杆长
for L = 1.5:0.1:5
    L
    % 纬度
    for W = -50:0.1:50
        % 经度
        for J = 105.0:0.1:115
            for n = 1:1:365
                % 太阳赤纬角(度)
                C = 23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);
                % 太阳时
                B = 2*pi*(n - 81)/364;
                E = 0.87*sin(2*B) - 7.53*cos(B) - 1.5*sin(B);
                % 时间
                for i = 1:1:21
                    T0 = hour(i) + minutes(i)/60;
                    Ts = T0 + E/60 + (J - Jm)/15;

                    % 太阳时角(度)
                    S = 15*(Ts - 12);

                    % 太阳高度角
                    Oh = asin(sin(W*pi/180)*sin(C.*pi/180) +
cos(W*pi/180)*cos(C*pi/180)*cos(S*pi/180));

```

```

% 太阳方位角
if(S < 0)
    Fs = acos( (sin(C*pi/180) - sin(Oh)*sin(W*pi/180)) /
(cos(Oh)*cos(W*pi/180)));
    FsArr(i) = Fs;
else
    Fs = 2*pi - acos( (sin(C*pi/180) -
sin(Oh)*sin(W*pi/180)) / (cos(Oh)*cos(W*pi/180)));
    FsArr(i) = Fs;
end

if(i >= 2)
    value1 = value1 + ( FsArr(i-1) - FsArr(i) - dFsArr(i-1) )^2;
    dFsArr(i-1) = FsArr(i-1) - FsArr(i);
end
% 影长 Ls
Ls = L / tan(Oh);

LsArr(i) = Ls;

value2 = value2 + (Ls - dLs(i))^2;

end
value = value1/20*value2/21;

if (value < 0.000001)
    X(j) = j;
    j = j+1;
    Y(j) = value;
    LsArr(j,:) = LsArr;
    dFsArr(j,:) = dFsArr;
    MinArr(j, 1:6) = [j h L W J value];
    j = j+1;
end

value1 = 0;
value2 = 0;
value = 0;

end
end
end
end
clc;
clear;

% Ø -> A 纬度
% δ -> F 太阳赤道纬度夹角
% ω -> C 太阳时角
% h -> Oh 太阳高度角
% λ -> D 经度
%
% 10月22日北京时间 9:00-15:00

```

```
% 10月22日是一年的第 295 天
n = 295.0;
```

```
%地理位置 北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒
% 纬度
A1 = 39;
A2 = 40;
A3 = 41;
```

```
% 经度
D = 116;
```

```
% 时区经度
Dm = 120;
```

```
% 太阳赤纬夹角 (度)
F = 23.45*sin(2*pi*(284+n)/365);
```

```
% 太阳时
B = 2*pi*(n -81)/364;
E = 9.87*sin(2*B) - 7.53*cos(B) - 1.5*sin(B);
```

```
i = 0;
```

```
LsArr1 = [];
LsArr2 = [];
LsArr3 = [];
```

```
% T0: m 时 n 分
% 9:00-15:00
% m = [9, 15] n = [0, 59]
for m = 9:1:15
    for n = 0:10:59
        i = i + 1;
        T(i) = m+n/60;
        T0 = m + n/60;
        Ts = T0 + E/60 + (D - Dm)/15;
        % 太阳时角 (度)
        C = 15*(Ts - 12);
```

```
% 太阳高度角
Oh1 = asin(sin(A1*pi/180)*sin(F*pi/180) +
cos(A1*pi/180)*cos(F*pi/180)*cos(C*pi/180));
Oh2 = asin(sin(A2*pi/180)*sin(F*pi/180) +
cos(A2*pi/180)*cos(F*pi/180)*cos(C*pi/180));
Oh3 = asin(sin(A3*pi/180)*sin(F*pi/180) +
cos(A3*pi/180)*cos(F*pi/180)*cos(C*pi/180));
```



```

% 杆长 L = 3 m
L = 3;

L3 = 3.1;

% 影长 Ls
Ls1 = L/tan(Oh1);
Ls2 = L/tan(Oh2);
Ls3 = L/tan(Oh3);
LsArr1(i) = Ls1;
LsArr2(i) = Ls2;
LsArr3(i) = Ls3;
end
end

plot(I, LsArr1);
hold on;
plot(I, LsArr2);
hold on;
plot(I, LsArr3);
%axis([9 15 22 40]);
xlabel('时间');
ylabel('影子长度');
title('纬度灵敏度分析');
legend('38°N', '40°N', '42°N');

```