

CT 系统参数标定的测量及优化设计

摘要

CT 系统的参数标定是提高成像精度的重要手段。基于 Radon 变换的 CT 成像算法严重依赖对角度标定的精度。参数标定过程中, 收集数据是解决问题的第一步。通过对测得数据的分析, 可以算得标定误差, 修正标定误差, 从而提高 CT 系统成像的精度。

本文对 CT 标定问题进行了深入探讨, 从给定测量物和测量数据求标定值到允许自由发挥设计更好的测量物。

本文要求的该 CT 机器的旋转中心偏移量, 并标定方向角。我们根据对 Radon 变换公式的推导, 我们发现椭圆、圆等中心对称的图形, 它的线积分图像仍是轴对称的。通过图形的对称性确定对称轴, 对称轴两端误差相互抵消, 对称轴上点位置精度高。使用对称原理, 我们找到了椭圆和小圆的轨迹, 选取三个特殊的角度, 求得了中心偏移量和像素图的比例尺。其中方向角的确认难度较大, 但已经知道除方向角以外的一切信息。我们建立了从断层图像根据标定参数向 CT 图转换的模型, 生成了包含所有角度的 CT 图, 将附件 2 中的每个角度分别与生成 CT 图进行相似度对照, 并统计数据。汇总二维数据, 筛选出里面最有代表性的极值点, 降维成一维图像, 拟合得到结果时一次函数。可知这个 CT 的角度分散均匀, 相对理想。

二三问是对标定参数的带入验证。图片见图 5-14、图 5-15

模型的设计主要考虑的是两点: 一是对生成的 CT 图特征的提取难度, 二是提取出的特征精度和有效范围。

关键词: Radon 变换、对称消差、标定调参、峰值拟合

一、问题重述

计算机断层成像(Computed Tomography, CT)技术, 是现在较为先进从成像技术。相比与 X-ray 透射, X-ray 成像是 X 射线沿某一方向穿透待测物后, 在射线方向的法平面上留下的投影, X-ray 成像图中任意一点均表示的是从 X-ray 光源到该点所在直线上每一点的衰减率的线积分, X-ray 成像图是把三维空间中某物体的衰减率信息经线积分保存在了二维空间中, 数据少了一个维度, 丢失了大量的信息。而断层成像图是用一个二维的图片表示了某一二维断层的衰减率信息, 并没有降低维度, 对真实物品的特性具有很好的还原性和表现力。

本题中, 设备中的 X 射线发射器和 X 射线观测器的位置相对固定, 这个观测模块可以绕旋转中心旋转共 180 个特定角度, 一个完整的断层图的 180 个特定角度为依次逆时针旋转。传感器上等距分布着 512 个最小探测单元, 位于同一直线内。故不经处理的探测数据的宽度是 512, 即宽 512 像素位。某一像素位在某角度的检测值表示在该状态下从 X 光从光源到传感器之间的衰减量。衰减量是以 X 光初始强度为参考, 对采样信号进行信号增益后, 按照一定算法计算出的衰减值。任意角度任意探测单元的衰减量读数均不受其他任意探测单元读数的影响, 故相邻的探测单元虽然读数往往具有连续性, 但所有的探测单元均不耦合, 完全独立工作。

受制造工艺等、安装精度、设备形变等因素影响, CT 系统往往无法工作在一个极理想的状态, 一些控制的变量会存在误差, 这将影响断层成像系统成像的精度。为此, 我们可以测定误差值, 在系统中标定误差参数, 通过算法实现对误差的补偿, 从而采集的数据符合理论指导的需求, 提高成像质量。

从题目中可知, 这次我们使用的 CT 机有一块固定的正方形托盘, 待测物体应放在托盘中。截面示意图中任意的坐标表示该点在托盘中的位置, 任意一点的读数表示该点处的单位吸光强度(吸光率)。

问题一: 根据附件 1 的调校体模板信息, 和附件 2 的调校体的 CT 成像原始数据, 计算探测器上每个探测单元之间的距离长度。

问题二: 计算 CT 系统的旋转中心在托盘中的位置。以及该 CT 系统使用的 X-ray 的 180 个相对于正方形托盘的角度。

问题三: 结合前两问求出的校正参数, 根据附件 3 和附件 5 提供的 X 光的原始数据, 还原出对应的吸收率断层图像, 并标出指定点的吸收率数值。

问题四: 计算前两问中算得的标定参数的精度和稳定性。并自行设计新型标定, 来提高标定是标定的精度和稳定性。

二、问题分析

2.1 针对问题一的分析

利用 matlab 将附件 2 的数据生成灰度图, 得到附件 2 数据图。利用算法将图片进行边缘化处理, 生成图 5-5。建立与附件 2 同步的坐标系, 当 x 光与椭圆长轴平行时, 椭圆的投射阴影长度最小(即数据附件 2 EU 列), 且恒存在椭圆的中心在阴影投射的中心位置, 小圆圆心在小圆阴影投射的中心位置。两中心位置之间距离为 45mm, 由数据附件 2 可知: 圆心在 46 与 74 中心位置 60 行, 椭圆中心在 169 与 277 中心位置 223 行, 两心之间共计 163 像素位, 可以计算出探测器单元之间的距离。

2.2 针对问题二的分析

2.2.1 在借助于已知结构的样品标定 CT 系统的参数时，我们可以知道它的旋转中心点是恒定不动的。假设其为 O。那么在这个旋转坐标系中。任何一个固定点的位置，相对于 O 点距离是一定的。先以椭圆的中心 R 为原点。小圆圆心 r 与椭圆中心 R 所在直线为 x 轴，Rr 为正半轴建立平面坐标系一。则 or 与 oR 相对位置与各自长度是一定的。

以 o、r、R 三点建立三角形，由于观测台不动而 x 射线是平行且围绕载台逆时针旋转，更改参考系，我们假定 x 射线平行向前且不动。则载台相对于 x 射线即视角线顺时针旋转。分别选取三个特殊位置。即 x 射线与 rR 平行时（即附件 2 EU 列）、垂直时（即附件 2 EU 列）的位置和 X 射线与 or 垂直时（即附件 2 EN 列）数据进行分析。将三位置图置于同一平面坐标系中，利用勾股定理求出 o 点相对于 R、r 的相对位置。

2.2.2 依据 Radon 定理，可以将附件 1 的图形转换成附件二图形。由于附件一图形为 256×256 像素，该像素位距离为 0.400mm；附件 2 图形为 128×180 像素，该像素位距离为 0.2761mm。对附件一图形进行扩充使得像素位比例缩小至与附件二图像比例尺相同。经 Radon 变换后，得到新的线位图（线位图指代附件 3 类变换后的数据图），对两次线位图进行相似度比较，就可以找到每次旋转角度的大小。

2.3 针对问题三的分析

已知断层图像，根据前上文结出的标定的观测角，用 radon 变换求得 CT 机的原始数据，使用相同的观测角参数进行 radon 逆变换，可以复原出断层图像。本题将前问求得的角度参数带入 radon 逆变换即可求得断层图像，此图以旋转中心为中心。再将图像按照托盘中心点到旋转中心点的向量进行位移还原，即可得到与托盘位置一一对应的穿透率断层图像。

2.4 针对问题四的分析

从附件 2 中任意抽取某一角度时刻的 $\mu(x)$ 数据，在坐标轴上表示如图 2-1 所示。从图像可以看出，断层图像中心对称的物体，其任意角度的 X 光衰减率数据图形化之后，符合轴对称，对称轴与中心对称的对称中心重合。这一点可以借助 radon 转换的公式，通过证明线积分的对象数量相等，进而证明中心对称点两端任意两个等距离的点满足线积分相等，故数据图像满足轴对称。图形两端的边缘部分的位置确定误差较大，但借助勾股定理，可以有效中和边缘处理带来的误差。

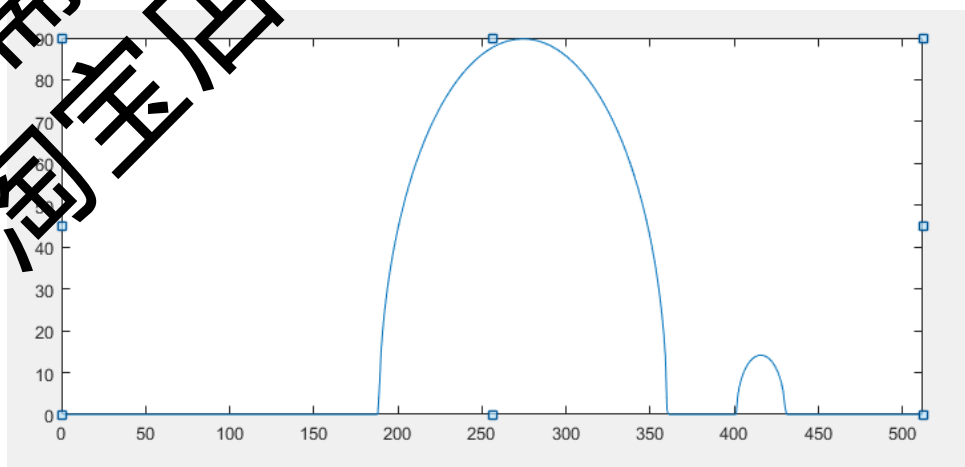


图 2-1 附件 2 中第 1 个角度时的数据连线图

中心对称的标定在解决求旋转中心偏移点时效果较好，图形关于观测角的关系的变化表现不明显。这点可以从三角函数入手。保证任意角度时总有一个参考点的运动轨迹的导数处于三角函数的峰值位置。

三、基本假设

1. 假设 X 射线沿直线传播，只有穿透时的衰减，没有折射和反射现象。
2. 假设设备的任意 X 光源和任意 X 光传感器完全等效。
3. 假设机器检测的 X 光衰减量不受外界的干扰。
4. 在随着转盘转动的过程中，始终垂直于固定转盘。

四、符号约定

符号	单位	说明
p	ppi	像素
d	mm	探测器单元之间的距离
n	次数	扫描次数
α	度	角度
μ		线性衰减系数
I_0		X 射线入射光强
I		X 射线透射光强
	mm	射线经过介质的长度
p		吸收率
ω		频率分量

五、模型建立与求解

为解决后续问题，应首先建立统一的绝对坐标系，使后文的表达更清晰、简介，每一问直接的分析也具有可比性。

已知 CT 机的工作流程是：在正方形托盘上放上待成型物体，X 光发射及接收模块沿一固定旋转中心逆时针旋转 180 个特定角度，并顺序取得这 180 个角度对应的由 512 个浮点数组成的数组。

目标对象是托盘上的代成像物体，故把正方形托盘定义为绝对参考物。如图 5-1 所示，以题目的模板为例。分别沿正方形托盘边沿方向建立坐标系方向，规定正下方向为

X 轴正方向，正右方向为 Y 轴正方向，并且记 X 轴正方向为 $\alpha=0^\circ$ ，逆时针为旋转正方向。

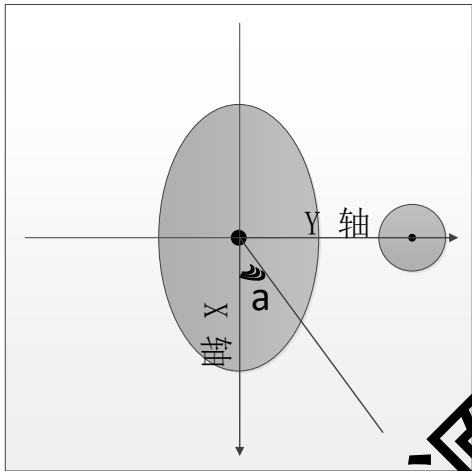


图 5-1 基本坐标系的方向示意图

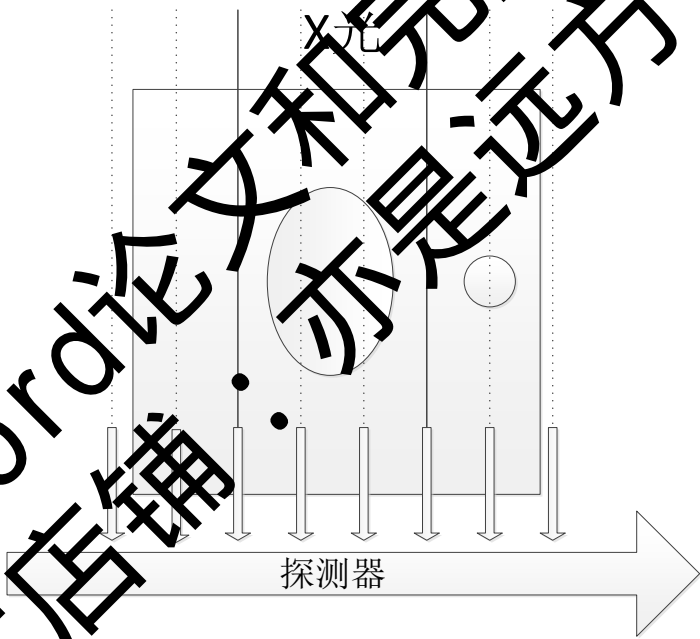


图 5-2 $\alpha=0^\circ$ 时射线示意图

故当 $\alpha=0^\circ$ 时，X 光及探测器工作如图 5-2 所示，探测器箭头表示探测器接收数据的正方向。在该角度下，探测器接受数据如下图 5-3 所示。

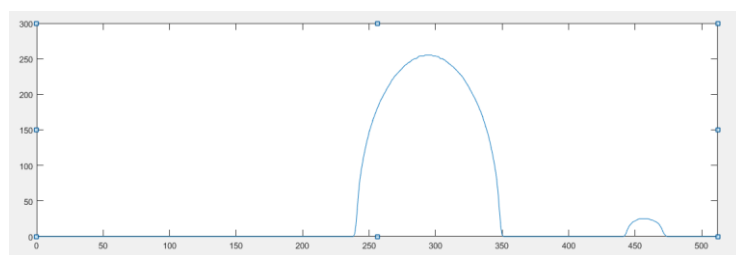


图 5-3 $\alpha=0^\circ$ 时检测数据

为方便对数据的使用，我们将附件 2 的数据进行了可视化处理，如图 5-4 所示。

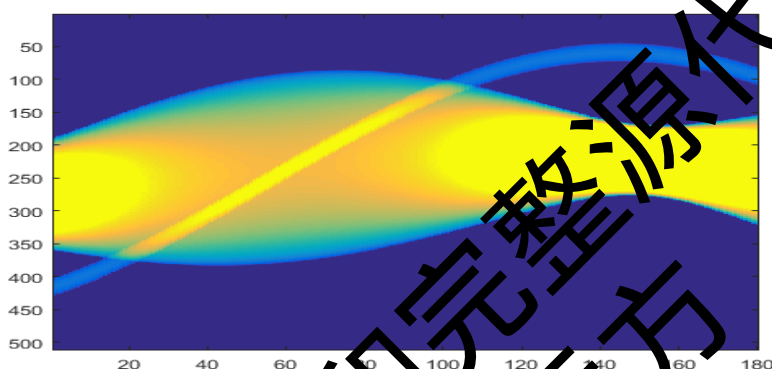


图 5-4 附件 2 的可视化图像

这里我们可以对图像表达的衰减率有了一个大概的认识，为了方便寻找其中的关键点，我们再次对该灰度图形进行了边缘处理，如图 5-5 所示。

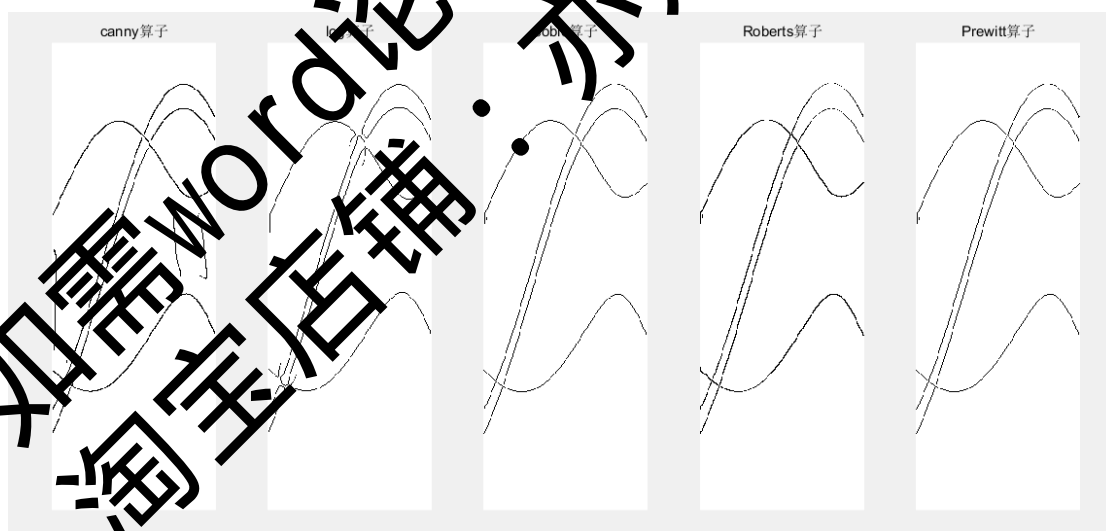


图 5-5 分别使用 5 种边缘对附件 2 进行处理的结果对照图

经比较可以发现，使用 Sobel 算子、Roberts 算子和 Prewitt 算子获得的结果较好，再次通过程序进行检测，Roberts 算子生成的图形平均线条宽度最窄，为方便从图像的像素图中挑选数据，我们选择了 Roberts 算子的处理结果。

在 Roberts 算子处理结果的基础上，我们再次使用代码将线条宽度精简到一个像素，

如图 5-6 所示。

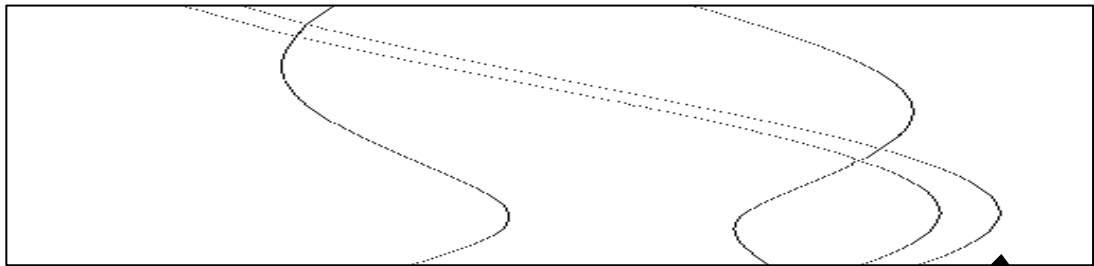


图 5-6 附件 2 经 Roberts 边缘处理后又精简线条的图像

5.1 问题一：计算传感器单元之间的距离长度

根据图 5-6 对应的数据，可以选出几个特殊点，它对应的是特殊的观察或状态视角。

在 0° 视角时，椭圆半径达到最短，从数据中逐个分析，应该在地 151 个观察视角，这一行的四个点的读数分别是：

$(46, 151); (74, 151); (169, 151); (277, 151)$ 单位：像素(ppi)

因为圆的圆心在直径的中点上，故可以根据直径两 endpoints，分别计算出两个圆的圆心坐标。椭圆圆心 $O_1 (74, 151)$ ，小圆的圆心 $O_2 (223, 151)$ 。

可得出 O_1O_2 中有 163 个像素位。

由原题的图 2 可得知， $O_1O_2=45\text{mm}$

则探测器单元之间的距离

$$d=\frac{45}{163}=0.2761\text{mm}$$

传感器传出的图像的比例尺是 0.2761mm/ppi

5.2 问题二：求解旋转中心，并标定 180 个角的度数

记 O 为旋转中心，以图 5-7 所示

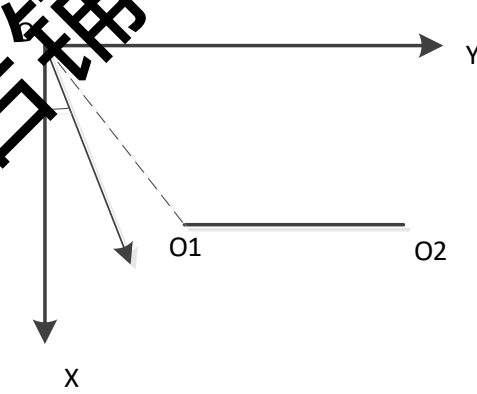


图 5-7 0° 度角的坐标系方向示意图

O_1O_2 分别为在 $\alpha=0^\circ$ 时椭圆中心和小圆的圆心。

O_1O_2 绕 O 逆时针旋转 90° 得到 $O_1'O_2'$ ，如图 5-8

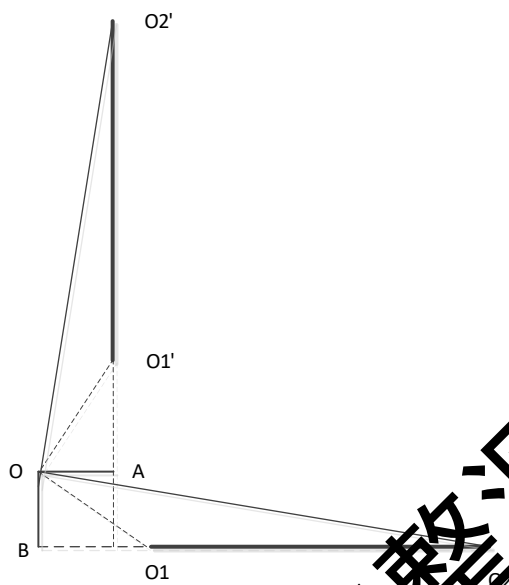


图 5-8 旋转 90° 的草图

当 $\alpha=0^\circ$ 视角时：

O_1 对应传感器的像素位 223， O_2 对应传感器的像素位 60。

当 $\alpha=90^\circ$ 视角时： O_1 对应传感器的像素位 233， O_2 对应传感器的像素位 233。

因为： $\triangle OAO_2'$ 是由 $\triangle BO_2O_1$ 绕旋转中心 O 旋转 $\alpha=90^\circ$ 获得

所以： $\triangle OAO_2' \cong \triangle BO_2O_1$

$OA = OB$

设 A 在传感器上对应的像素位是 X

$OB = Y$ ； $BO_1 = X + 16$

假设旋转 α 角度如图 5-9

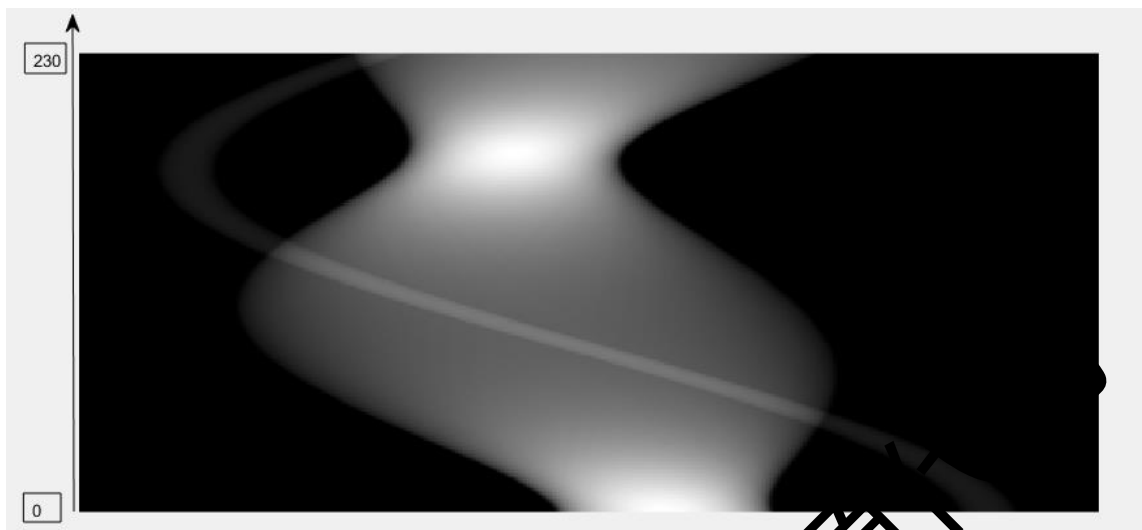


图 5-10 生成的 CT 图

我们将附件 2 中第一次的观测数据与仿真生成 1-230 度的上图数据中的每一个整数度数的数据进行比较，相似度如图 5-11 所示。

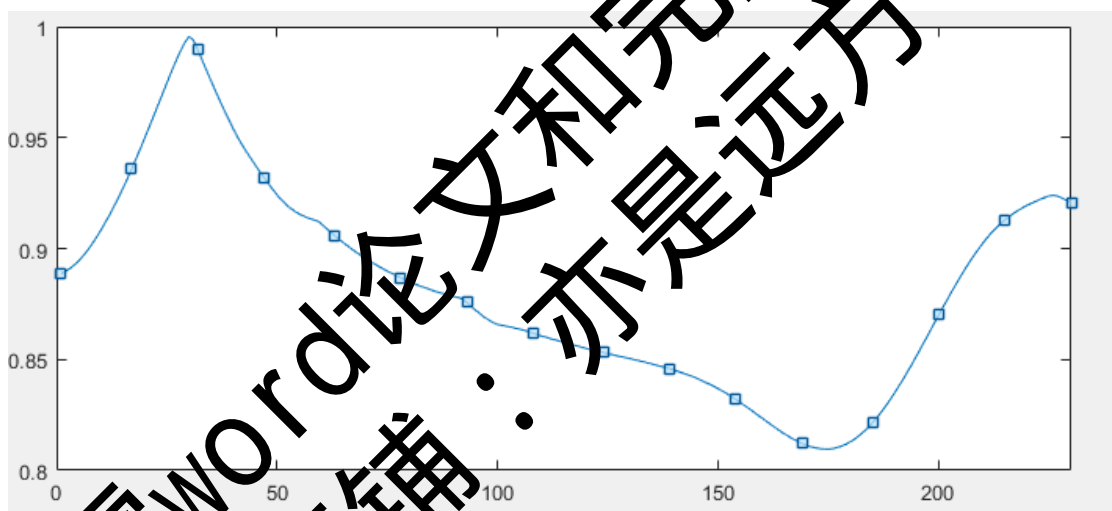


图 5-11 附件 2 第一角度与生成图的拟合

该图的评测对象是附件 2 的第一个角度的数据，比较对象是仿真生成 1-230 度的数据。从结果可以看出，附件 2 的第一个角度和 30 度最接近。

我们把附件 2 的 180 个角度的数据重复执行如上过程，将所有数据顺序记录在一起，经处理，如图 5-12

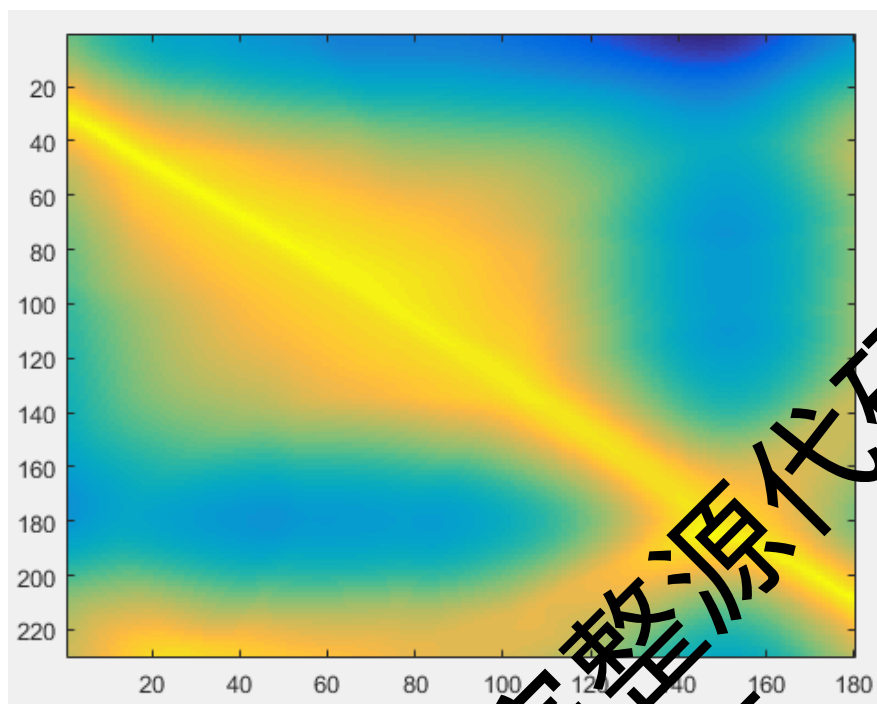


图 5-12 附件 2 与生成 CT 图的完整拟合

上图中横坐标表示附件 2 中的角度顺序，纵坐标表示与生成 CT 图进行相似比较的度数。从图像中可以看出，最大值集中在一条直线上。为了方便统计，我们还以横坐标为自变量，选出对应编号下图像与仿真图像相似度最高的度数，如图 5-13

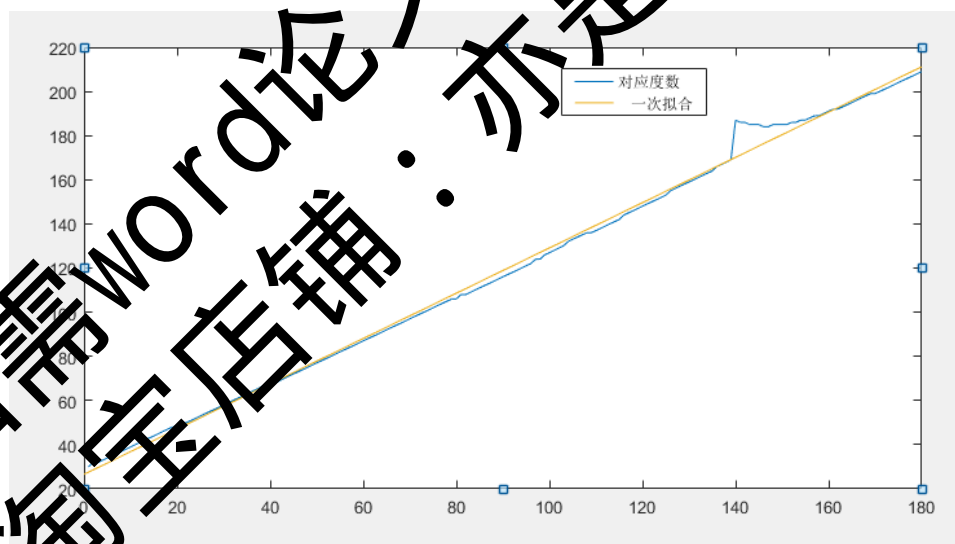


图 5-13 最大相似度对照图

其中图像拟合的式子为 $\alpha = 1.0257n + 26.554$

图像在 $n=150$ 左右的局部出现了较大的偏侧，但方程总的方差仍较小，分析认为该处偏差是仿真图像的参数调校问题所致，故 CT 机的旋转角度，基本满足等角度旋转，具体的角度见附录一。

5.3 问题三：重建横断面图像

记托盘上的两个标定模板对 X 射线的线性衰减系数为 $\mu = \mu(x, y)$

标定模板可被看作某函数 $\mu(x, y)$ 的二维分布。

对于 CT 系统，该函数标定模板线性衰减系数。

在均匀介质中

I 表示 X 射线的透射强度， I_0 表示 X 射线的入射光强， μ 表示标定模板的线性衰减系数， x 表示射线经过介质的长度。

$$I = I_0 * e^{-\mu x}$$

化简为

$$-\mu x = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = P$$

在非均匀介质中

I 表示 X 射线的透射强度， I_0 表示 X 射线的入射光强， x 表示射线经标定模板的长度， $\mu(x, y)$ 表示标定模板在点 (x, y) 处的线性衰减系数。

根据 Beer 定理可知：

$$I = I_0 * e^{-\int \mu(x, y) dx}$$

化简为

$$d * \sum_{i=1}^N \mu_i = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = P$$

radon 变换可以将物体原始体状变成投影像，radon 逆变换则相反。

Radon 变换是沿着 $x \cos \alpha + y \sin \alpha = \rho$ 确定多条平行射线，均匀旋转 α 度，然后计算 X 轴投影。

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \rho$$

$$f(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho) dx dy$$

Radon 逆变换公式为：

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \alpha + y \sin \alpha, \alpha) d\alpha$$

为了得到清晰图像，要进行频域滤波。

二维傅里叶变换对为：

$$\begin{cases} F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \end{cases}$$

在其中引入傅里叶切片定理， ω 表示频率分量：

$$\begin{aligned} G(\omega, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho, \alpha) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \right] dx dy \\ &= F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) \end{aligned}$$

这说明一个投影的一维傅里叶变换，是二维投影矩阵的二维傅里叶变换的一个切片。频域逆变换为：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega\cos\alpha, \omega\sin\alpha) d\omega\cos\alpha d\omega\sin\alpha$$

推理可知：

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \alpha) e^{j2\pi\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \omega d\omega d\alpha + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(-\omega, \alpha) e^{j2\pi(-\omega)(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \omega d\omega d\alpha$$

将 $-\omega$ 用 t 代替

则：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \alpha) e^{j2\pi\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \omega d\omega d\alpha + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(t, \alpha) e^{j2\pi t(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} t dt d\alpha \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \alpha) e^{j2\pi\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} |\omega| d\omega d\alpha \end{aligned}$$

进行 radon 投影时，看到 $[0 \sim \pi]$ 和 $[\pi \sim 2\pi]$ 的 α 角度下得到的投影成中心对称，认为信息是重复的，只计算了一半角度的投影数据，这可能隐性地造成了数据不全。直接进行空间积分变换，可能造成不同角度投影之间发生混淆，导致产生模糊和光晕。在最终式子中，积分计算 $|\omega|$ 项是不可能的，该项不可积。可以通过引入窗函数，截断 $|\omega|$ 项或者使用其他近似的窗函数，计算积分计算式并滤波，从而得到一个更加清晰的结果。

可以通过引入窗函数，截断 $|\omega|$ 项或者使用其他近似的窗函数，计算积分计算式并滤波，从而得到一个相对较好的结果。

从向托盘放入待测物体，到 X 光照射及感应模块旋转并获得数据，这一过程可以用 Radon 变换求得。若要通过传感器取得的图像数据重建横断面图像，就应进行 Radon 逆变换。

故要重建横断面图像，我们应当先研究从横断图像生成观测图的过程。

首先取得一个以正方形托盘为中心的横断面图像，再将图像反方向于旋转点对中点的偏移量，校正后的图像旋转中心与图像中心重合。接下来执行 Radon 变换，结合指定的角度，将生成环绕的扫面数据。

因此，我们从简横断面图像，应先将传感器拍得的数据结合对应的角度，通过 Radon 逆变换变为原始的图像，如图 5-14

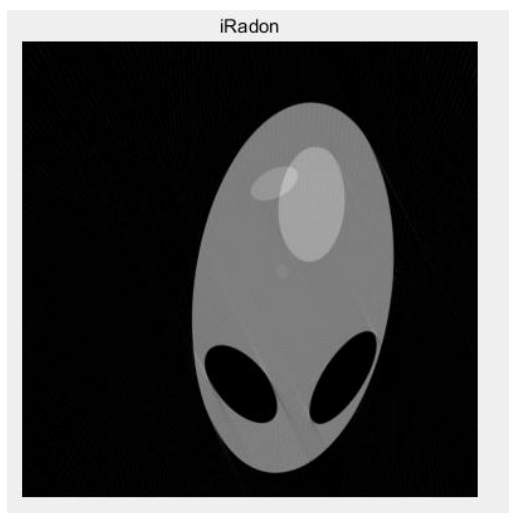


图 5-14 附件 3 的还原图

但这个图像的中心是旋转点，所以再将图形位移一个旋转点的偏差向量。就得到了复原的横断面图像，见支撑材料‘problem2.xls’文件。同理，我们可以解得附件五的图像，见支撑材料‘problem3.xls’文件。

5.4 问题 4：模型评价及参数修订

在解决第一个问题是，我们就已经了解到了，标定对 CT 机来说意义非凡。提高标定的精度，能在不提升传感器分辨率的情况下，有效的提升成像的清晰度。其中标定包含对旋转中心的标定和对旋转角的标定。

在第一个问中获得标定后，我们已经有能力通过 CT 图还原好横断面图像，如图 5-15

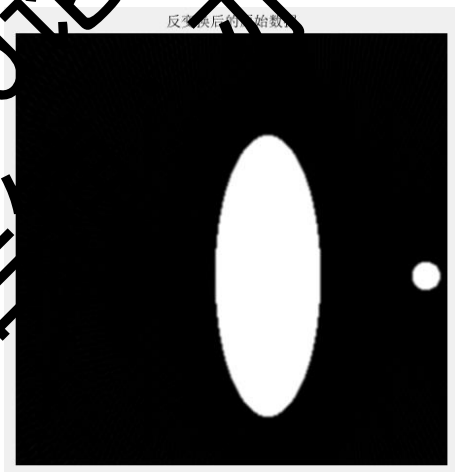


图 5-16 偏移之后

我们先通过机理来研究各个标定对图像的影响。

位移补偿是在图像经过 Radon 逆变换后对图像进行平移处理，旋转中心的位移标定不会影响图像的清晰度，但会造成相对于托盘的位置错位。故调校旋转中心的偏移参数不是我们主要关心的问题。

调校 180 个方向的参数标定，才能有效提高还原图像的精度。

图 5-15 的角参数是从 1 到 180 的等差数列，还原效果较好。我们在这里改变参数之为从 1 到 170.05 的以 0.95 为差的等差数列，还原图像如图 5-16

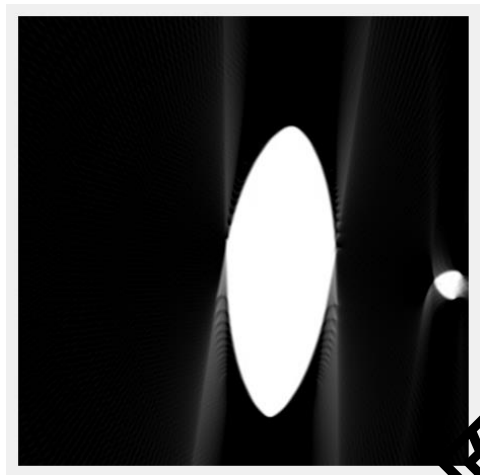


图 5-17 补偿参数图

六、模型的评价与改进

优点：在问题二的求解中运用几何模型来求解中心位置，计算简单、误差较小、具有广泛性，相对于峰值判定可以更加准确地标注出旋转中心的位置。在第三问中引用了 radon 变换以及 radon 逆变换，使图形做出了更大的优化，消除了图形的模糊和光晕，图片更加接近真实。

缺点：模型在建立过程中，没有充分考虑到误差的判定，误差影响没有得到充分的消除，可能导致模型出现系统偏差。

七、参考文献

- [1]金属矿山隐患空区声波层析成像识别及其安全控制技术研究 黄仁东 2005
- [2]基于 SIFT 的数字水印算法研究 王若愚 2011
- [3]多层螺旋 CT 冠状动脉造影技术及其临床应用 李冲云 蔡勇 贺红艳 2004
- [4]航空影像中油库目标智能判别系统的设计与实现 蒋定定 倪平 2004
- [5]算法导论第三版 Thomas H.Cormen Charls E.leiserson
- [6]数学建模竞赛优秀案例评析 房少梅 2015