

# 机场的出租车问题

## 摘 要

随着人民生活水平的提高和社会经济的发展,机场在城市的地位越来越重要,而出租车则承担了机场相当一部分的乘客集散量,合理调配出租车载客方式和疏通乘客流量变得日益重要。本文针对机场的出租车问题进行研究,探讨司机决策行为的影响因素和提高乘客效率的方案,给机场管理部门提供了一些合理建议。

针对问题一,本文首先建立了出租车和乘客排队理论模型(M/M/s/∞),该模型是问题分析的基础,并结合多层次综合评价模型分析,定性和定量地建立排队长度与载客效率 $\mu$ 之间的联系,进一步指出当蓄车池里的排队数量长度满足 $L_s < D/\mu$ (指的是排队数量低于一定指标)时,可以直接选择A方案,即前往机场等候载客返回市区,否则选择B方案返回市区拉客。

针对问题二,合理收集国内机场及其城市出租车的数量,以上海市浦东机场为例,通过分析日夜间收费标准、65%以上乘客目的地距离、出租车司机的正常单位时间成本等因素成功预测了方案A的最大长度,结合每个时间段内航班数量和乘客排队滞后效应曲线得到完整的全时段的最大排队长度,可以快速判断哪个方案更为稳妥。在获得了基准载客效率之后,可以通过评价分析方法进一步考虑月份、节假日和天气等因素对模型的依赖性,引入载客效率放大因子,进一步完善排队时间成本的预测。

针对问题三,通过分析1个M/M/2/∞排队系统和2个M/M/1/∞排队子系统优劣之后,发现单排队方式比双排队方式要优越,这在对排队系统进行统筹和设计时候需要注意的关键因素。接着本文提出,在单个“上车点”情况下,M/M/2×2/∞单排队矩阵式系统和M/M/2×3/∞单排队矩阵式系统能够显著提升乘车效率。最后创新性地提出多“上车点”M/M/2×2/∞单排队矩阵式系统能够达到最高的乘车效率。

针对问题四,本文建立了出租车司机收益均衡模型,通过算例验证了收益均衡模型的合理性和实用性,最后给出优先安排方案,在合理范围内允许出租车司机“插队”进场或者直接载客。

关键词：排队论；评价模型；单排队矩阵式系统；收益均衡模型

## 一、问题重述

大多数乘客下飞机后要去市区（或周边）的目的地，出租车是主要的交通工具之一。国内多数机场都是将送客（出发）与接客（到达）通道分开的。送客到机场的出租车司机都将会面临两个选择：

(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。出租车必须到指定的“蓄车池”排队等候，依“先来后到”排队进场载客，等待时间长短取决于排队出租车和乘客的数量多少，需要付出一定的时间成本。

(B) 直接放空返回市区拉客。出租车司机会付出空载费用和可能损失潜在的载客收益。

在某时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数是司机可观测到的确定信息。通常司机的决策与其个人的经验判断有关，比如在某个季节与某时间段抵达航班的多少和可能乘客数量的多寡等。如果乘客在下飞机后想“打车”，就要到指定的“乘车区”排队，按先后顺序乘车。机场出租车管理人员负责“分批定量”放行出租车进入“乘车区”，同时安排一定数量的乘客上车。在实际中，还有很多因素影响出租车司机决策的确定和不确定因素，其关联关系各异，影响效果也不尽相同。

请团队结合实际情况，建立数学模型研究下列问题：

(1) 分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，综合考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益，建立出租车司机选择决策模型，并给出司机的选择策略。

(2) 收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，给出该机场出租车司机的选择方案，并分析模型的合理性和对相关因素的依赖性。

(3) 在某些时候，经常会出现出租车排队载客和乘客排队乘车的情况。某机场“乘车区”现有两条并行车道，管理部门应如何设置“上车点”，并合理安排出租车和乘客，在保证车辆和乘客安全的条件下，使得总的乘车效率最高。

(4) 机场的出租车载客收益与载客的行驶里程有关，乘客的目的地有远有近，出租车司机不能选择乘客和拒载，但允许出租车多次往返载客。管理部门拟对某些短途载客再次返回的出租车给予一定“优先权”，使得这些出租车的收益尽量均衡，试给出一个可行的“优先”安排方案。

## 二、问题假设

假设 1：出租车到达互相独立，即以前的到达情况对以后的到达没有任何影响

假设 2：出租车司机在载客过程中没有出现任何意外事故，能够完成所有载客任务

假设 3：乘客上车打开车门过程的时间忽略不计

假设 4：机场蓄车场能够容纳较大的停车位数量，不会发生任何变化，机场设施对司机排队或者乘客排队没有影响

假设 5：假设司机平均一天工作时间不低于 8 小时，载客过程不会发生任何让司机停止或暂停载客的情况

假设 6：乘客分别以单个个体排队，一旦进入排队后不会随意变动位置或者离开选择其他交通工具

### 三、符号说明

符号	意义
$P_n$	平衡态分布函数
$\lambda$	乘客到达率
$\mu$	载客效率
$\rho$	排队系统中的忙期
$L_q$	平均排队长度
$L_s$	平均排队时间
$W_s$	单位时间成本
$k$	

注：由于符号较多，因此在文中都有相关说明。

### 四、问题分析

出租车排队系统的特殊性<sup>[1]</sup>体现在：1)出租车会自主往返移动；2)出租车与乘客双向排队等待；3)出租车具备主动搜索乘客的能力。某个季节与某时间段抵达航班的多少和可能乘客数量的多寡，都会影响司机的排队效率，排队是影响出租车司机运营收入的重要因素，排队耗费了时间成本，造成了经济损失。

#### 4.1 问题一的分析

需要根据机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益之间的关系，研究决策相关因素的影响机理。进一步建立以出租车司机最大收益为目标选择决策模型，最后给出决策策略。

#### 4.2 问题二的分析

需要合理收集机场和所在城市的出租车数据，从中提取有用的信息，并结合问题一建立的模型，代入到模型中验证模型建立的合理性。从层次分析法的思想分析有哪些因素与司机的决策有密切联系，实际上影响司机决策的因素主要是时间成本，需要尽可能缩短排队时间，而乘客数量越大是能够提高载客效率的。

#### 4.3 问题三的分析

为了提高乘车效率，需要研究上车点是如何安排上车的。根据排队论的方法，单排队和双排队各有优劣，但在效率方面单排队无疑占有巨大优势。还可以采用矩阵发车方式，这样既能提高乘客离开机场效率也能使得司机的排队时间大为减少。

#### 4.4 问题四的分析

司机之所以拒载，是因为短途的收益更低，无法弥补排队时间成本。对于再次返回的出租车需要给予排队时间成本上的补偿，该补偿必须大于或等于上次亏损的收益

和返回机场的时间成本之和，才能使这些出租车收益尽量平衡。如何建立均衡模型可以参考问题一建立的排队模型，通过验证之后可以给出合理的方案。

## 五、基于排队服务理论建立多层次评价模型

### 5.1 出租车排队论一般模型

排队是出租车司机在机场载客经常遇到的现象，到达的出租车司机到达机场后不能立即载客，因而出现了排队现象。由于出租车司机到达和排队时间的随机性，排队现象几乎不可避免，直接影响司机选择排队载客还是空载回市区。

下面是出租车排队论<sup>[2]</sup>的一般模型：

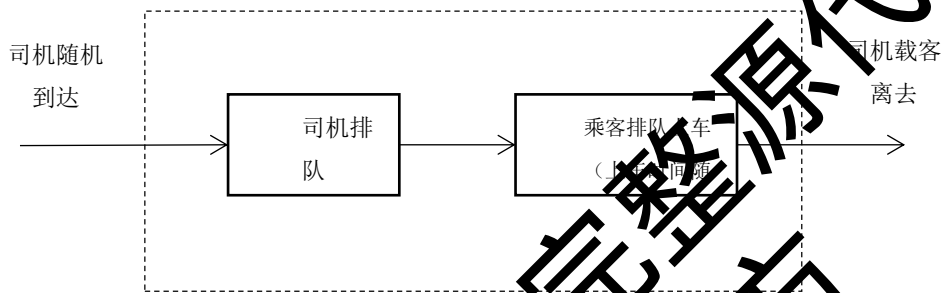


图 5.1 出租车司机排队模型

排队规则：等待制。当司机到达时，司机就排队等待，直到乘客受完服务才离去。司机排队模型用六个符号表示<sup>[3]</sup>，即  $X/Y/Z/A/B/C$ 。

第一个符号  $X$  表示乘客到达时间的分布，第二个符号  $Y$  表示的是服务时间的分布，第三个符号  $Z$  表示出租车数目，第四个符号  $A$  是系统容量限制；第五个符号  $B$  是乘客源数目；第六个符号  $C$  是服务规则，如先到先服务（First come first service, FCFS）。

本文约定略去后三项，即指的是  $X/Y/Z/\infty/\infty/FCFS$  的情形。例如， $M/M/1$  表示乘客相继到达间隔时间为指数分布、载客时间为指数分布、单出租车等待制系统模型。 $D/M/s$  表示确定的乘客或司机的到达时间、载客时间为指数分布、 $s$  个平行出租车的系统模型。

### 5.2 出租车司机和乘客的排队模型 ( $M/M/s/\infty$ )

假设乘客单个到达出租车乘车，从航班出来相继到达乘车区的时间间隔服从参数为  $\lambda$ ，系统“停车场”里共有已有的正在服务的平行车辆数  $s$ ，每个出租车的服务时间互相独立，且服从参数  $\mu$  的负指数分布。当乘客到达时，若有空闲的出租车马上接受服务，否则出租车便排成一个队列等待，等待时间为无限。

下面来讨论本文建立的排队系统的平衡态分布。记

$$P_n = P\{N = n\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

为系统达到平衡状态后的排队长度  $N$  的概率分布，注意到对正在服务的平行车辆

数为  $s$  的出租车排队服务系统，乘客到达率（人/min）有

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

本文假设乘客的到达近似为 Poisson 流，乘客到达率大小与某个季节、某个时间段有关，是一个重要的参数。对于泊松流， $\lambda$  表示单位时间平均到达的乘客数，所以  $\frac{1}{\lambda}$  就表示相继乘客到达平均间隔时间。

用  $\mu$  表示单位时间能被载客完成的乘客数，称为平均载客效率，而  $\frac{1}{\mu}$  表示一个乘客的平均上车时间。

载客效率（人/min）有

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 0, 1, 2, \dots \\ s\mu, & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

于排队系统中的忙期和闲期出现的概率分别为  $\rho$  和  $1-\rho$ ，记  $\rho_s = \frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu}$ ，当  $\rho_s < 1$  时，有

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0, & n \geq s \end{cases}$$

其中

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{s!(1-\rho_s)} \right]^{-1}$$

当  $n \geq s$  时，即系统中乘客数大于当前正在载客的出租车个数，再来的分批次乘客必须等待。等待的时间越长，说明司机获得载客的机会越多，同时也会影响机场总体乘车效率。

对多服务台等待制排队系统而言，由已得到的平衡分布可以得到乘客或者出租车的平均队长度  $L_q$  为

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) p_n = \frac{p_0 \rho^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \rho_s^{n-s}$$

平均排队长度  $L_s$  为

$$L_s = \text{平均排队长度} + \text{正在接受服务的乘客平均数} = L_q$$

平均排队逗留时间

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

对于出租车司机排队问题来说, Little 公式依然成立, 上述模型同样可以应用到车辆排队模型中, 此时

$$W_s = \frac{L_s}{\mu}$$

平均排队时间会直接影响司机的收益。

### 5.3 出租车司机收益多层次综合评价决策

层次分析法<sup>[3]</sup> (Analytic Hierarchy Process, AHP), 是为了解决较为复杂、较为模糊的问题作出决策的简易方法, 它适用于本文出租车决策评价模型中难于完全定量分析的问题, 是一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。

应用 AHP 分析本文出租车司机决策问题模型时, 首先要把问题条理化、层次化, 进而构造出一个有层次的结构量化模型。由此, 复杂问题被分解为各个因素的组成成分。这些因素又按其属性及关系形成若干层次。上一层次的因素作为准则对下一层次有关因素起支配作用。

这些层次可以分为三类: 最高层、中间层和最底层。层次结构反映了因素之间的关系, 准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重其实并不一定相同的, 需要我们构造判断矩阵。要比较  $n$  个影响因素因子两两相互对比, 并根据重要程度采用 1~9 标度大小来定量分析。

#### 5.3.1 层次分析法

根据 AHP 的思想, 本文的层次结构模型为:

目标层: 出租车司机收益

准则层: 各类相关因素 (待选), 各类相关因素参考: 节假日因素、每日时间段 (上下班高峰、晚间出行)、特殊情况 (重大城市活动)、天气因素、行业竞争、现场排队数量、市区载客机会、当前航班数量、乘客数量、机场距离、附近路况、空载费用、单位排队时间成本等。

措施层: 方案 (A)、方案 (B)。

根据题意综合判断, 综合考虑机场乘客数量的变化规律, 直接影响司机决策的相关因素主要有: 航班数量、乘客排队时长、正在排队出租车数量、空载费用、机场载客收入、市区载客收入。

建立司机收益 AHP 模型, 如图所示。

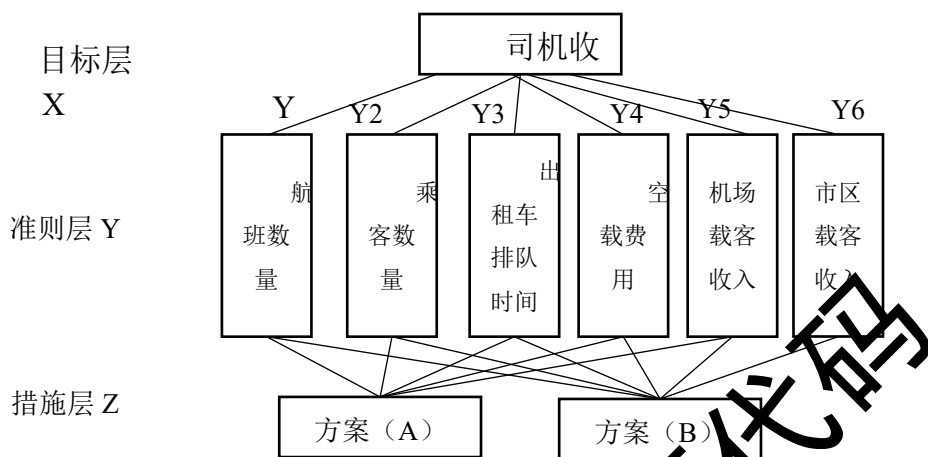


图 5.2 司机收益层次结构模型示意图

### 5.3.2 总体决策模型和选择策略

实际上，用层次分析法有很大的局限性，主要的原因在于其只能算是一个半定量（或定量与定性相结合）的一个方法，很大程度依赖于人们的直观经验判断，为了排除出租车司机作为决策者个人的片面性，判断过程精度很低，因此本文需要结合排队论进行更细致的定量分析。

根据题意有：

A 方案总体收益=机场载客收入 - 排队时间成本 - 油费，有

$$A = P_1(Y5) - T_1(Y4, Y2, Y3) - T_1(Y4)$$

B 方案总体收益=市区拉客收入 - 空载成本（油费）- 潜在载客收益

$$B = P_2(Y6) - T_2(Y4) - P_1(Y5)$$

本文认为当前排队时间成本实际上与回市区拉客收入一致，潜在载客收益与机场载客收入相等，进一步设排队单位时间成本为  $k$  相对收益为

$$S = A - B = 2(P_1 - W_s k)$$

当  $S > 0$  时， $P_1 > W_s k$ ，司机的选择方案为 A 否则为 B。

进一步，有排队时间

$$W_s = \frac{L_s}{\mu} < \frac{P_1}{k}$$

排队长度（辆）

$$L_s < \frac{P_1}{k} \mu$$

当送客到机场的出租车司机对在某时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数是司机可观测到的确定信息，根据个人的日常判断，同时不等号的右边的参数如

空载成本等是可以预先估算的，由此可见，载客效率  $\mu$  是最为重要的参数之一，与乘客数量、发车安排相关。

利用该公式，即可快速初步判断出排队长度的影响，满足排队长度小于  $P_1/k\mu$ ，选择方案为 A 否则为 B。而在实际情况中，司机往往很难直接预测到  $\mu$  的值，从而判断哪个方案是最佳收益，最大的变量还是对排队时间的预估和决策，这跟当时司机的判断决策有关，还需要进一步确定其他相关影响参数，基于 AHP 方法，对排队成本中的载客效率设计一套简单的综合评价指标体系。

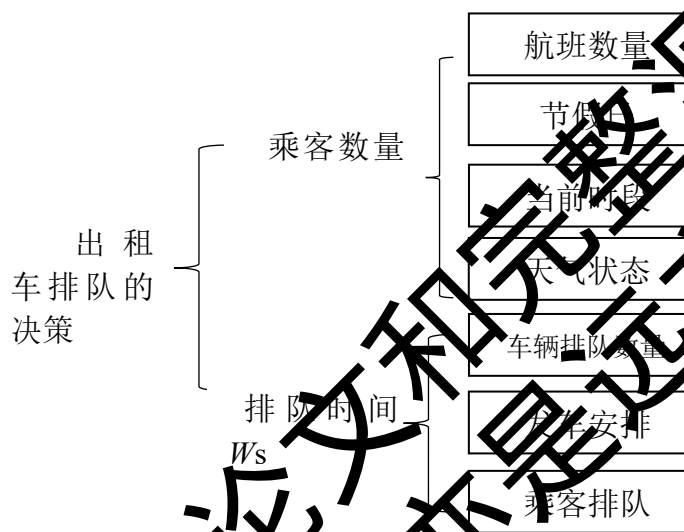


图 5.3 排队决策多层次结构

基于 AHP 分析法，按 1-9 判断标度及含义构造判断矩阵，再计算比较判断矩阵的大特征值，后进行归一化处理。

而在一般因素中，由于机场位置跟市区的距离是常量，因此空载费用  $Y_4$  基本是保持不变的。机场载客收入和市区载客收入需要根据司机以往的经验感知判断，总体来说从机场到市区的距离更大平均收入会更高些，因此可以设收入  $Y_5 > Y_6$ 。

而航班数量与乘客数量相关，影响这两个因素的还包括节假日因素、每日时间段（上下班高峰、晚间出行）、特殊情况（重大城市活动）等社会因素。乘客数量越多越容易吸引司机排队，同时也会加速司机的发车效率。路况拥堵和天气恶劣会影响回市区的时间，增加司机空载成本。

基于司机的评价角度，可以对评语集的确定，然后对上述指标分为一定的等级，将等级分为多个等级，确定各指标的隶属度，构造评价矩阵，再对其进行综合评价，获得对  $\mu$  的评分预估。实际上，通过大量的数据统计可以得到  $\mu$  的大致范围，有

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$$



评分越高， $\mu$  的值越大，反之越小。 $\mu$  的值越大，排队时间越短，有利于执行方案 A。

最后可以得到出租车司机选择决策模型，由此我们给出司机的选择策略为

(1) 排队是影响出租车司机运营收入的重要因素，排队耗费了时间，造成了经济损失。司机进入机场后，尽量避免较长的排队时间，当蓄车池里的排队数量长度  $L_s < \frac{P_1}{k} \mu$ ，指的是排队数量较少时，可以直接选择 A 方案，即前往到达区等候载客返回市区，否则选择 B 方案返回市区拉客。

(2) 当排队数量长度  $L_s$  和  $\frac{P_1}{k} \mu$  相差不大时，需要通过决策判断载客效率  $\mu$  的大小，如在节假日期间繁忙时段，加上发车效率较高时， $\mu$  的值越大，可以选择 A 方案，反之如果乘客数量很少、发车效率低的情况下建议选择 B 方案空载返回市区，节省时间成本。

## 六、模型合理性分析及其相关因素依赖性

本文进一步以上海市浦东机场为例，其以所在上海市出租车的相关数据为基础，结合前文建立的模型，探索模型的合理性，以出租车司机的最大收益为目标给出稳妥的选择方案，并研究模型对相关因素的依赖性。

### 6.1 出租车司机载客收益

机场到市区的距离是已知的，乘客的目的地虽然有长途的也有短途，但可以通过司机本人的经验判断出一个大致的区间，大部分的乘客进市区的某个目的地时同样要经过机场与市区之间的大部分路程，因此关于出租车到机场的载客收益可以认为是可感知的信息。载客收益通过上海市出租车收费标准和目的地的距离能够计算出来，如表 1、2 所示。由于收费标准分为日间和夜间两类收费，因此不同时间段成为了模型中一个重要因素。

表 6.1 上海市出租车收费标准

	日间	夜间
	(05:00-23:00)	(23:00-05:00)
3 公里	14 元	18 元
3-10 公里	2.5 元/公里	3.1 元/公里
15 公里以上	3.6 元/公里	4.7 元/公里

表 6.2 上海市浦东机场出租车目的地及机场载客收益价格

目的地	里程(KM)	参考车费 (元)	夜间
徐家汇 (东方商厦、港汇广场、太平洋百货)	48	180	230

莘庄	50	185	240
陆家嘴（东方明珠、金茂大厦、正大广场）	44	165	210
浦东八佰伴	44	165	210
大拇指广场（联洋社区）	37	165	170
五角场	45	170	215
月星环球港	56	215	270
静安寺	50	185	240
上海体育场（上海体育馆）	48	180	230
锦江乐园	46	180	220
人民广场（城市规划馆、博物馆）	48	180	230
豫园（城隍庙）	46	175	220
外滩	50	185	240
上海科技馆	39	145	180
上海南站	46	145	220
上海火车站	50	185	240
长途客运总站	50	185	240
虹桥交通枢纽	60	230	290

本模型参考重要地点人口密集的地方，附近 2km 范围内涵盖 65% 以上乘客目的地，具有高度的代表性。取均值后进一步求得浦东机场日间打车费平均 179 元，夜间打车费平均 228 元。

## 6.2 方案 A 的最大排队长度预测

假设司机平均一天正常工作 10 小时，总时间为 600 min，查找数据出租车司机的每天的平均载客收入为 1300~1500 元，范围较广，取中位数 1350 元左右，则单位时间成本

$$C_s = 1350/600 = 2.25 \text{ 元/min}$$

对于日间打车费用为 179 元收入来说，选择排队方案的最大等待时间为

$$W_{s, \text{司机}} \leq \frac{P_1}{k} = 79.6 \text{ min}$$

对于夜间打车费用为 238 元收入来说，选择排队方案的最大等待时间为

$$W_{s, \text{司机}} \leq \frac{P_1}{k} = 101.3 \text{ min}$$

根据上海市统计快报显示，2018 年国内上海机场集团旗下两大机场完成年乘客吞吐量 11769.97 万人次（其中浦东机场 7405.42 万人次，虹桥机场 4364.55 万人次），年起降航班 771957 架次（其中浦东机场 504972 架次，虹桥机场 266985 架次）。本文以浦东机场为例，可以估算出：浦东机场平均每架次人数 = 7405.42 万人次 / 504972 架次  $\approx 147$  人/架。

再根据不同时间段的航班数量（如图 6.1），可以获得乘客人数随时间的分布。而乘坐出租车的乘客数量对于出租车司机来说无法直接通过实时监控获得，需要通过统计数据来给出合理的范围。在浦东机场，白天（6 时~22 时）约有 15%、夜班（22 时~6

时) 约有 40% 的到港乘客需要乘坐出租车离开。

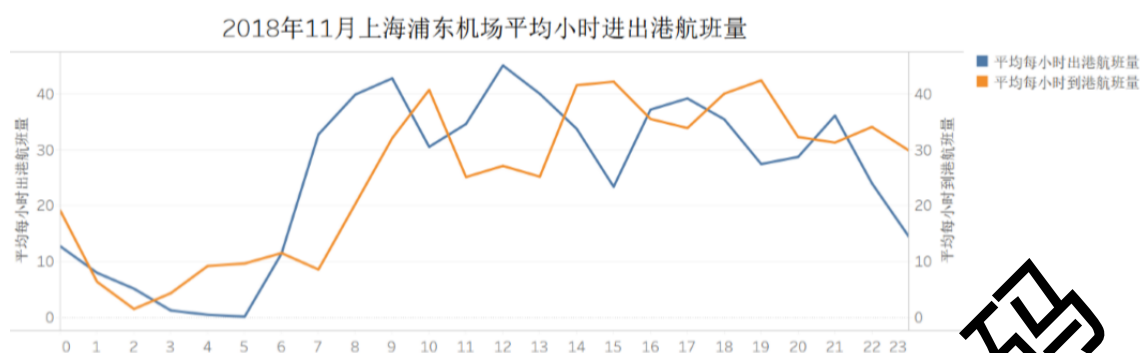


图 6.1 2018 年 11 月上海市浦东机场平均每小时进出港航班量 [6]

航班到达过程的乘客排队也是典型的排队论问题，经过粗略计算，乘客平均排队时间约为

$$W_{s, \text{乘客}} \approx 15 \text{ min}$$

机场到达乘客在出租车蓄车场易形成高峰，这是因为乘客都想尽快到达目的地，取行李时间和前往搭乘出租车的时间具有不可预测性，但对于某一航班来说，平均排队时间为 15min，因此会在开始排队的这个时间段内达到高峰值。

上海市浦东机场的出租车蓄车场 F7 位于上海市浦东新区飞翱路 126 号，距离航站楼 3.6 公里，可容纳出租车的数量为 1000 辆。乘客下飞机开始计算到蓄车场时间  $X_1$  大约为 30~45 分钟，因此乘客排队长度与滞后时间高峰约为 50~60 分钟，可以得到乘客打车滞后曲线<sup>[4]</sup>

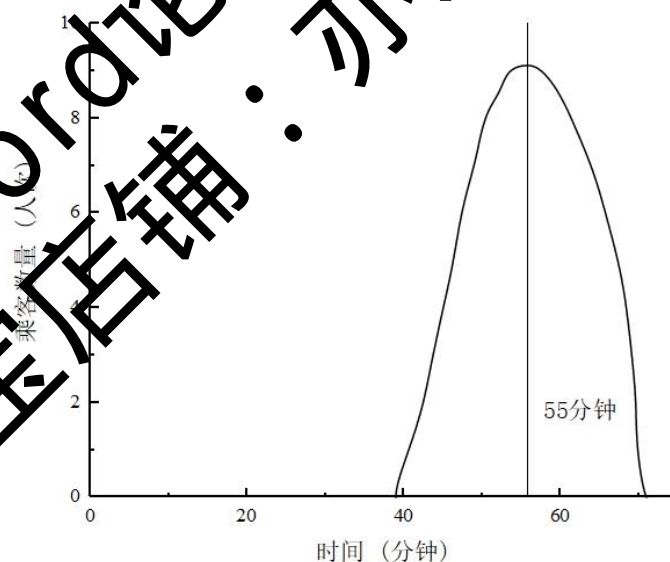


图 6.2 乘客到达机场排队的时间分布

由于乘客排队滞后效应，乘客打车的时间相对于航班降落时间会有所延后，根据高峰时间值，以时间段为统计数据，可以获得平均每小时的打车乘客数量分布，如图 6.3 所示。

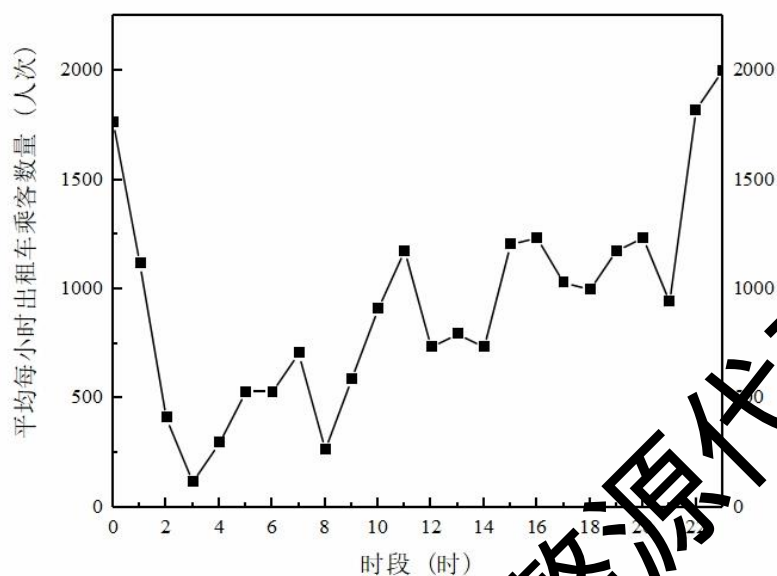


图 6.3 2018 年 11 月上海浦东机场平均每小时出租车乘客数量

通过图 6.3 可以看出，每天 22 时至次日凌晨 2 时是排队高峰期，乘坐出租车的人数在 23 时和 0 时达到全天的峰值，最重要的原因是上海地铁停止运营，夜间公交变少，乘客急于休息。这一时间段对司机载客机会来说是最大的，出租车车均载客数量取为 1.28 人/辆<sup>[5]</sup>，设平均载客效率为

$$\mu(t) = \frac{\text{当前时间段的载客数量}}{\text{时间}}$$

根据排队论，处于系统平衡状态时，在一段平均时间内，乘客到达率与出租车载客效率相同（意思是乘客到达多少出租车就载客多少），则在不同时间段排队队长  $L_s$  最大为  $\frac{P}{k} \mu(t)$ 。通过计算得到选择方案 A 时不同时间段的最大长度预测表，如表 3 所示。

表 3 不同时段最大排队长度预测表

时段	航班总数 (个)	滞后打车乘客数量 (人)	平均载客效率 (辆/min)	最大排队长度 预测 (辆)
0	793	1764	22.96875	2326.7
1	1029	1117.2	14.546875	1473.6
2	294	411.6	5.359375	542.9
3	735	117.6	1.53125	155.1
4	1323	294	3.828125	387.8
5	1323	529.2	6.890625	698.0
6	1764	529.2	6.890625	548.5
7	1323	705.6	9.1875	731.3
8	2940	264.6	3.4453125	274.2
9	4557	588	7.65625	609.4

10	5880	911.4	11.8671875	944.6
11	3675	1176	15.3125	1218.9
12	3969	735	9.5703125	761.8
13	3675	793.8	10.3359375	822.7
14	6027	735	9.5703125	761.8
15	6174	1205.4	15.6953125	1249.3
16	5145	1234.8	16.078125	1279.8
17	4998	1029	13.3984375	1056.5
18	5880	999.6	13.015625	1030.0
19	6174	1176	15.3125	1218.9
20	4704	1234.8	16.078125	1279.8
21	4557	940.8	12.25	975.1
22	4998	1822.8	23.724375	1889.3
23	4410	1999.2	26.03125	2637.0

通过上表可知，排队长度凌晨 3 时段最短为 1.5 辆，在夜间 23 时段达到最高峰为 2637 辆，而此时段的载客效率也是最大的，有

$$\mu_{\max} = 26.03 \text{ 辆/min}$$

通过大量的数据统计可以得到  $\mu$  的大致范围

$$0 \leq \mu \leq 26.03$$

与文献[5]中的实际测量结果相近，但比文献的结果更具有一般性。本模型基于实际大多数情况出发，具有较高的合理性，说明模型的建立和结果信服度很高。

出租车司机按照表上的某时段的最大排队数量与蓄车场实际排队的车辆数量进行对比，可以快速判断出哪个方案的优劣，当实际排队数量超过表上预估的最大排队数量时，应该选择方案 B 较为稳妥，反之选择方案 A 较为稳妥。

### 6.3 模型改进和相关因素的依赖性分析

由于前述基础的司机排队模型，是基于大多数情况下的均值反映，本文可以以此为基准值，还是以上海浦东机场为例，后续还需要加入天气因素、月份、节假日、工作日等数据来完善这个模型。将  $\mu_0$  设为每个时间段的基准载客效率。由此还可以进一步用综合评价法来预测当前某一时刻的  $\mu$  值相对大小，也就是相关因素影响程度的依赖性有多大。对  $\mu$  进行统计上的指标量化，可以适当微调（放大或缩小）每个时间段内的平均载客效率，模型的精度依赖于对每个因素权重的准确把握。



图 6.4 2017 年 12 月-2018 年 11 月上海机场平均每小时进出港航班量

天气类型	描述
第 I 类天气 (无影响)	晴天、阴天
第 II 类天气 (微弱影响)	阵雨、小到中雨、雾、小到中雪、小雪
第 III 类天气 (中度影响)	中雪、雨夹雪、中雨、大雨、暴雨、大雨、轻雾、霾
第 IV 类天气 (严重影响)	大雪、冻雪、大到暴雨、雷阵雨、暴雨、雾

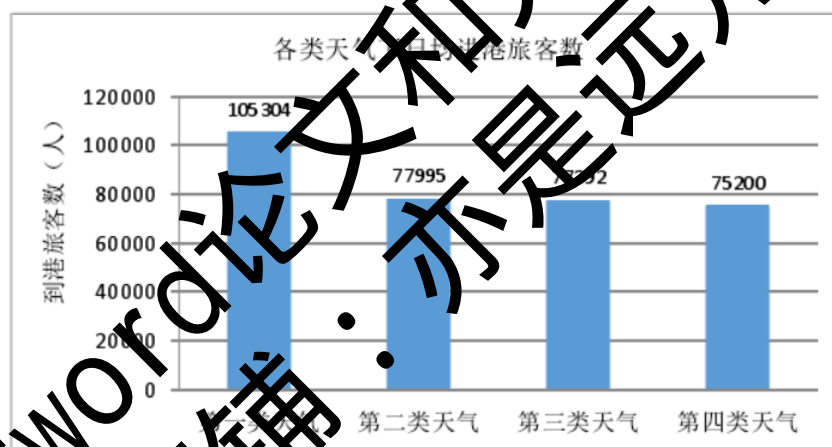


图 6.5 天气信息分类和各类天气下的日均对乘客数量的影响<sup>[7]</sup>

如图 6.4 所示，在统计周期内，上海市机场的出港航班量变化趋势大致一致，月度变化幅度较小。由此可见，月份影响因素相对来说比较小，最低航班量月份在 2 月，总体载客效率低于全年约 8%，最大航班量在 10 月。对于国内来说，2 月是冬天季节，人们出行较少，而 10 月的季节天气适宜出行，恰逢国庆假期，因此航班量较高，总体载客效率高于全年约 12%。而天气恶劣会影响航班数量，严重时导致航班取消，乘客数量变少。上述因素都会对载客效率产生放大或缩小的作用。

因此可以将放大（或缩小）影响因子  $\alpha$  代入到平均载客率中，有

$$\mu = \alpha \cdot \mu_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \cdot \mu_0$$

式中  $\gamma_n (n=1,2,3)$  表示需要评价的指标因素，可分别表示月份、节假日、天气等因

素。例如当月份为 2 月时，通过以往的统计数据得出  $\gamma_1 = \frac{\mu}{\mu_0} = 0.92$ ，节假日（例如国庆节）

节）  $\gamma_2 = \frac{\mu}{\mu_0} = 1.12$ ，天气晴朗时  $\gamma_3 = \frac{\mu}{\mu_0} = 1.15$ ，综合评价  $\alpha$  的值

$$\alpha = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \theta_3 \gamma_3$$

各个因素的影响程度依赖于评价权重  $\theta_n (n=1,2,3)$ ，且满足

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$$

此时每个时间段内微调优化后的临界排队长度有

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{P_1}{k} (\theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \theta_3 \gamma_3) \mu_0 \\ &= \frac{P_1}{k} (0.22 \gamma_1 + 0.38 \gamma_2 + 0.40 \gamma_3) \mu_0 \\ &= 1.088 \frac{P_1}{k} \mu_0 \end{aligned}$$

由此可以进一步分析出以上相关因素在本文建立的模型中呈现线性、互相独立的关系，也能比较合理地解释不同因素与排队长度的关系，进一步完善排队时间成本的预测，从而能够给出该机场出租车司机的更佳选择方案。

## 七、最高乘车效率模型分析

当乘车区有两条并行车道时，单个“上车点”采用多服务台等待排队模型模型，此时

$$s=2$$

当只有一个“上车点”时，排队模式主要有两类：

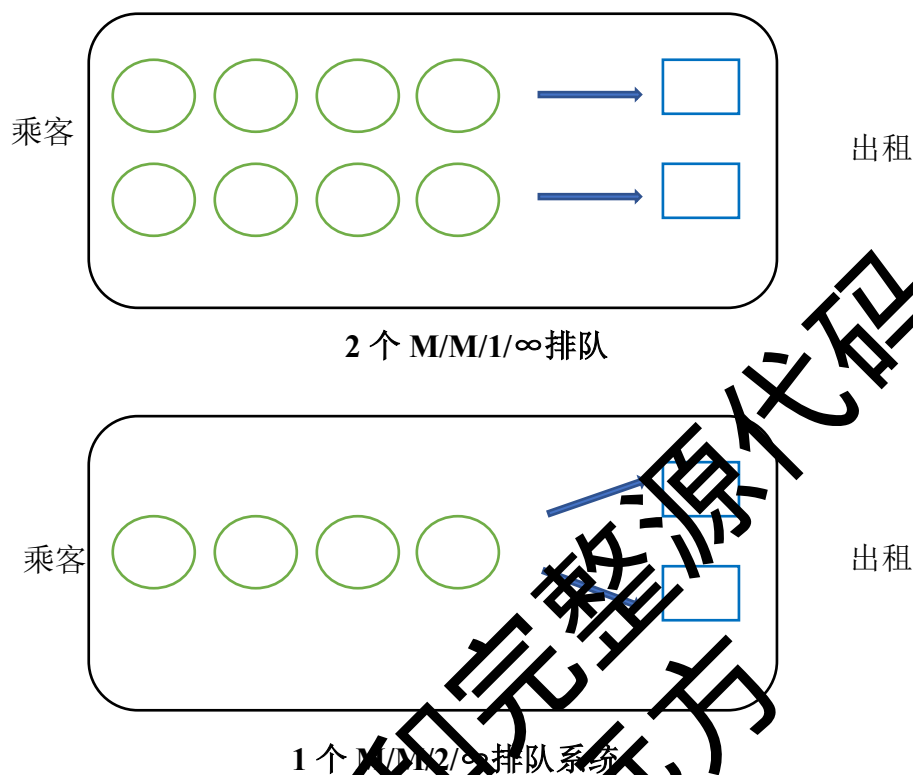


图 7.1 两类排队模式示意图

下面来综合分析这两种排队模式的优劣。

当考虑系统的平衡状态，假设出租车的供给足够大，这两种系统的载客达率同样保持不变，即乘车去的发车效率相同，均为  $\mu$ ，设 1 个 M/M/2/∞ 排队系统的乘客平均到达率为  $\lambda$ 。

在 2 个 M/M/1/∞ 排队模型中，乘客排队方式变为达到乘车区后可到任一个车道前排队，且排队后不再换队，即可形成 2 个队列，此时，原来的 M/M/2/∞ 系统实际上已经变为了 2 个 M/M/1/∞ 子系统组成的排队系统，且每个子系统的乘客平均到达率变为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$$

同样地，本文还是以上海浦东机场为例，分析排队指标，对比上述主要排队模型的优越进行比较。参考上海浦东机场的 2018 年 11 月 23 时平均时段的数据（可以任意选取），令

$$\mu=12.51, \lambda=25, \lambda_1=\lambda_2=12.5$$

代入到排队理论模型中，可以获得两种上车安排模式的指标值，下表 7.1 给出了 M/M/2/∞ 和 2 个 M/M/1/∞ 的比较。



表 7.1 两种排队系统的指标值对比

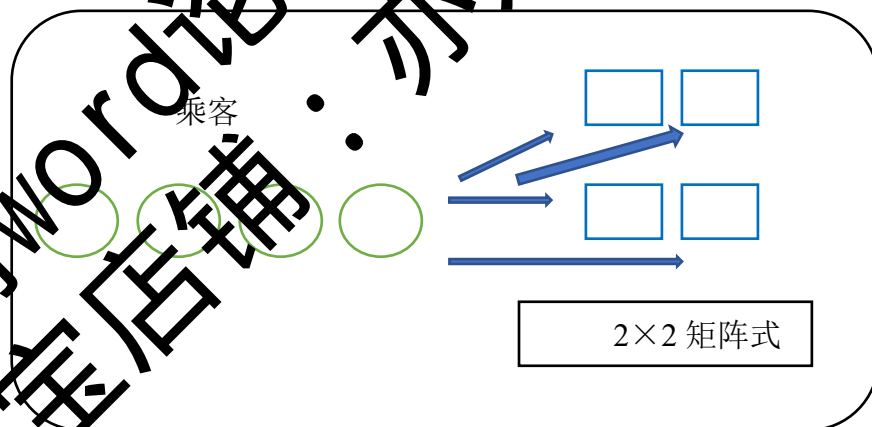
项 目	M/M/2/ $\infty$	2 个 M/M/1/ $\infty$
出租车空闲概率 $p_0$	4.0E-04	1.6E-03
乘客必须等待概率 $p_{wait}$	0.9976	0.9984
平均排队长度 $L_s$	625.5	1250.0 (整个系统)
平均排队时间 $W_s$	25.02 (min)	50.0 (min) (每个子系统)

通过对并行车道数和载客效率不变的情况下，单排队方式的平均等待时间更短为 25.02 min，而双排队方式为 50.0 min，明显需要的时间更长。而对整个系统来说，单排队平均排队长度更短，约为双排队时间的一半。

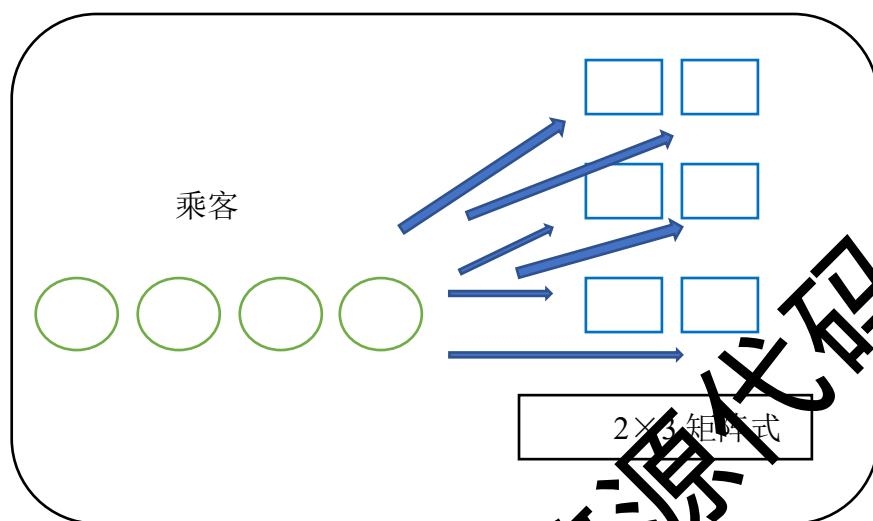
由此可得出结论，单排队方式比双排队方式要优越，这在对排队系统进行统筹和设计时候需要注意的关键因素。

单排队模型不受限制，当出租车出现时乘客可以立即上车，系统的乘车效率最高，出现拥挤的概率大大减小，更为安全；而双排队系统前需分散乘客人流，优化机场乘车区排队秩序便于管理，单由于到达时间和上车时间的随机特性，例如某个出租车司机出现某种随机因素引起的拒载将影响整个系统排队的进城。由此，对于单个上车点，本文建议采用单排队方式安排乘客上车，故乘车效率更高。

为了使总的乘车效率最高，关键是要提高  $\mu$  和  $\lambda$  的大小，还可以采用分批次单排队矩阵式安排。



M/M/2 $\times$ 2/ $\infty$ 单排队矩阵式系统



$M/M/2 \times 3/\infty$  单排队矩阵式系统

图 7.2 两种单排队矩阵式排队模型示意图

在保证乘客和司机的前提下，同时尽量让矩阵式发车的上车时间足够小，此时有

$$\lambda=6, \mu=12.51, \rho=25$$

相对于单个  $M/M/2/\infty$  系统而言， $M/M/2 \times 2/\infty$  和  $M/M/2 \times 3/\infty$  单排队矩阵式系统的排队指标更加有明显的优势

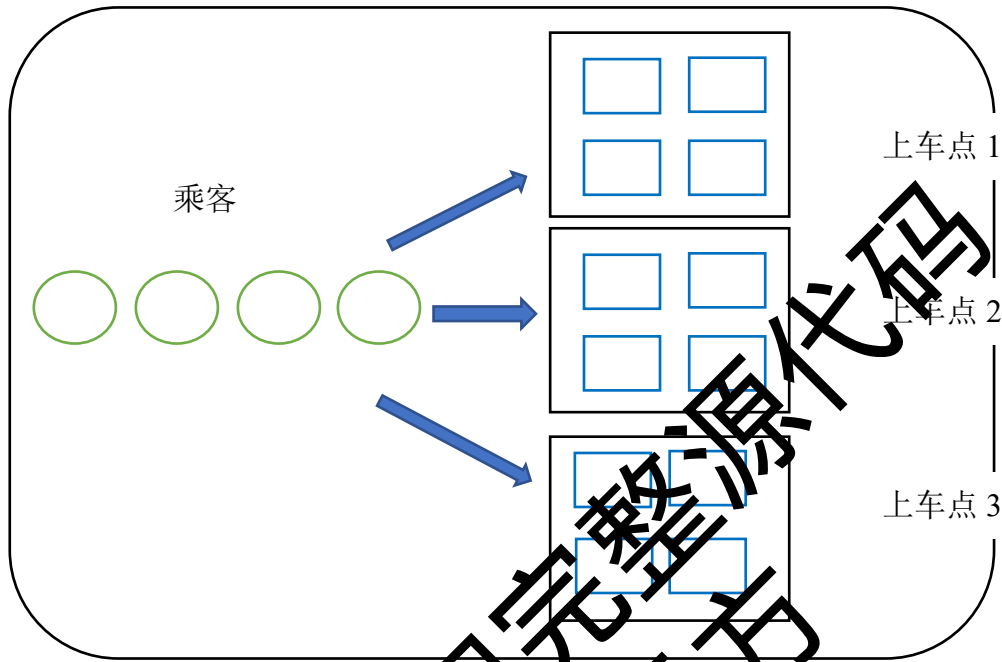
表 7.2 多种排队系统的指标值对比

项 目	$M/M/2/\infty$	$M/M/2 \times 2/\infty$	$M/M/2 \times 3/\infty$
出租车空闲概率 $P_0$	4.0E-04	6.5E-2	9.0E-02
乘客必须等待概率 $p_{wait}$	0.9976	0.173	1.79E-02
平均排队长度 $L_s$	625.5	2.17	2.00
平均排队时间 $W_s$	25.02	0.087	0.080
	(min)	(min)	(min)

采用矩阵式排队系统后能大幅度提高排队效率，特别是平均排队长度从 625.5 人降低至 2.17 人，平均排队时间从 25 分钟降低至平均几乎不用排队，必须等待的概率明显下降，达到随进随走的状态，对于出租车司机来说也具有很大的好处。上述只是其中一个算例，对于其他数据同样适用于计算。

同时，考虑到车辆和乘客安全的条件下，采用  $2 \times 2$  单排矩阵式系统的乘车效率已经达到效果，相对  $2 \times 3$  来说安全系数更高一些。但如果仅仅设置单个上车点的话，

在面临极端高峰排队状况，2×3 单排队矩阵式系统仍然是一个很好的选择。



多“上车点” $M/M/2 \times 2/\infty$ 单排队矩阵式系统

根据实际情况，还可以设置多个上车点时，且上车点之间不独立，不存在干扰，这将对发车效率会有更大的提升。多“上车点” $M/M/2 \times 2/\infty$ 单排队矩阵式系统能够达到最高的乘车效率。当然这也是要考虑乘车区的空间设置和机场的管理安排。

八、出租车司机收益均衡方案

当出租车司机接受短途乘客时，由于载客的行驶里程不足，导致选择方案 A 中机场载客收益  $P_1$  减小，司机收益

$$S = 2(P_1 - W_s \cdot k) < 0$$

此时方案 A 的收益小于方案 B，亏损的收益为即为  $P_1 - W_s \cdot k$ 。

出租车载客收益与载客的行驶里程有关，设行驶里程为  $l$ ，平均驾驶速度为  $\bar{v}$ ，平均排队时间为  $\bar{w}_s$ ，按里程收费标准为  $a(l)$ ，是一个分段函数，载客时间为  $t$ 。建立载客收益与平均载客时间的关系式为

$$P_1 = a(l) \cdot l = a(l) \cdot \bar{v}t$$

当载客里程  $l$  低于  $\frac{\bar{W}_s \cdot k}{a(l)}$  或载客时间低于  $\frac{\bar{W}_s \cdot k}{a(l) \bar{v}}$  时可认为是需要获得下次排队的优先权。

先权。

### 8.1 收益均衡模型的建立

对于再次返回的出租车需要给予排队时间成本上的补偿，该补偿必须大于或等于上次亏损的收益和返回机场的时间成本之和，才能使这些出租车收益尽量平衡。

设下一次需要补偿的时间为  $W_{s, \text{补偿}}$ ，必须满足

$$W_{s, \text{补偿}} \cdot k \geq -2(P_1 - \bar{W}_s \cdot k) + t \cdot k$$

同时

$$W_{s, \text{补偿}} = \frac{L_{s, \text{补偿}}}{\mu}$$

需要补偿的排队长度为

$$L_{s, \text{补偿}} \geq 2 \left( \bar{W}_s \cdot \left( \frac{a(l) \cdot l}{k} \right) \mu + \frac{l}{\bar{v}} \cdot \mu \right) - 2 \bar{W}_s \cdot \mu + \left( \frac{1}{\bar{v}} - \frac{2a(l)}{k} \right) \mu t$$

或

$$L_{s, \text{补偿}} \geq 2 \left( \bar{W}_s \cdot \left( \frac{a(l) \cdot t}{k} \right) \mu + t \cdot \mu \right) - 2 \bar{W}_s \cdot \mu + \left( 1 - \frac{2a(l) \cdot \bar{v}}{k} \right) \mu t$$

进入排队补偿后，当前的排队长度最多为

$$L_{\text{插队}} = L_s - 2 \bar{W}_s \cdot \mu + \left( \frac{1}{\bar{v}} - \frac{2a(l)}{k} \right) \mu l$$

### 8.2 收益均衡模型的验证

算例：以上海浦东机场 2018 年 11 月 0 时平均时段的数据为例，有载客效率  $\mu = 22.97$  辆/min，若夜间载客行驶里程  $l = 20$  km，夜间行驶平均速度为  $\bar{v} = 40$  km/h，平均排队时间  $\bar{W}_s = 0.8$  h，载客前出租车已排队长度  $L_s = 1500$ ， $a$  取平均值 4.78 元/km，单位时间成本  $k = 2.25$  元/min。

短途行为判断：夜间载客平均收益为 228 元，而载客 20 公里的费用约为 95.6 元，排队时间成本为 108 元。载客费用明显低于平均值，甚至低于排队时间成本，因此可

以清楚判断其载客过程为短途行为，由此可得到  $L_{s, \text{补偿}} \approx 272$  辆。

采取方案：若进入蓄车场后，当前的停车数量为  $L_s = 1000$  辆，则至少需要优先“插队”到的位置为 728 辆。由此可见，上述方案能够使这些出租车收益得到平衡，具有较高的合理性和实用性。

### 8.3 优先方案安排

出租车的里程  $l$  可以根据智能调度系统的 GPS 系统或者北斗导航系统监测轨迹，自动识别短途行为（包括路程或者时间），还可以根据进出停车场的车牌识别系统获得行车时间，判断是否满足短途行为，然后系统可以给司机发放短途优先权使用机会，使返回的出租车能够优先再次“插队”进入排队系统。

综上所述，优先的方案归纳如下：

（1）可以让满足短途行为的出租车先在蓄车场，一批批出来，具备有限权的提前出来进入乘客去排队，最大“插队”位置为  $L_{\text{插队}}$ ；

（2）再次返回机场载客时，若出租车司机的短途行为非常明显，载客收入低于 90% 以上的水平时，可不必在蓄车场排队，直接到出租车载客点排队载客；

（3）为了避免出租车司机之间的博弈行为，建议发放定量的优先机会券，例如每日限定 2~3 次；

（4）由于“插队”容易引起秩序问题，因此不宜让司机进入得太早，还可以利用其他补助形式，例如优惠停车收费或者提供地理位置比较好的蓄车场位置；

（5）有些时候比较难判断短途行为的界限在哪，此时可以根据统计数据，制定一个简单的措施，如在较短的时间内（如 40 分钟内返回机场）或者往返里程低于一定距离（如往返 50 公里）的出租车给予优先权。

## 九、模型评价与改进

### 9.1 模型的优点

1 模型建立更多基于理性分析和数据支撑，并且对于部分重要原则给出了完整的推到和证明，定量的排队理论集合半定性的层次分析评价模型更具有理论支持；

本模型基于实际大多数情况出发，具有较高的合理性，说明模型的建立和结果信服度很高；

2 问题一和问题二将主要问题归结为对载客效率的讨论，大大提升了模型的对问题分析的方向精确性和掌控性；

3 模型评价建立的指标有理有据，每一步都经过严格验证，评价公正客观，对模型的求解质量和排队系统的整体性能评价准确，给出的建议方案实用、准确。

### 9.2 模型的缺点

1 对于影响出租车司机的因素考虑的情况不够多，互相之间的影响机理并未说明清楚；

2 所建立的几个模型中作出了不少均值假设，在一定程度上降低了模型的准确度。

### 9.3 模型的改进

司机的收益均衡模型并不是针对个人，而是整个系统的所有个体，因此可以参考博弈理论进行进一步分析，提升模型的可靠性；还可以进一步深入研究影响司机决策的因素，提升评价方法的求解精度和可靠度。

## 十、参考文献

- [1] 慕晨, 宣慧玉. 由出租车和乘客构成的特殊结构排队系统仿真[J]. 系统仿真学报.
- [2] 司守奎, 孙玺菁. 数学建模算法与应用[M]. 国防工业出版社, 2011.
- [3] 司守奎. 数学建模算法与程序  
<https://max.book118.com/html/2019/0405/6151222132002021.shtm>, 2019年9月13日.
- [4] 姜恒, 吴海俊, 周正全. 大型枢纽出租车到发车位及周转停车位研究[C]// 公交优先与缓堵对策——中国城市交通规划 2012 年年会暨第 26 次学术研讨会. 0.
- [5] 黄岩. 虹桥机场出租车上客系统组织管理优化探讨[C]// 海峡两岸都市交通学术研讨会. 2013.
- [6] 飞常准, 《上海市机场发展报告》, <http://www.ctoutiao.com/Article/62137.html> ,2019 年 9 月 13 日.
- [7] 张泉峰. 首都机场接续运输协调保障技术研究[ D ]. 2015.
- [8] 姜启源. 数学建模案例选集[M]. 2006.

[9]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[10]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方



[11]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[12]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[13]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[14]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[15]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[16]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[17]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[18]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方



如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[20]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[21]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[22]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[23]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[24]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[25]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[26]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方



[27]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[30]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[31]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[32]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

[34]

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方



如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方