

# 基于偏微分方程模型的高温作业专用服装研究

## 摘要

本文针对高温作业服装的问题，基于能量守恒定律、傅里叶导热定律建立一维热传导模型，模拟高温作业服装各分层导热传热过程，确定各分层随时间空间变化的分布状况和各层的最优厚度，实现成本小、周期短的目标。

**针对问题一**，要求建立模型求解各层的温度分布。关于传热问题，能通常以热传导、热对流和热辐射三种形式传播。由于热辐射影响过小，其作用可忽略不计。从一般性传热方程出发，考虑一维方向的热传递，利用傅里叶导热定律和能量守恒定律，建立一维热传导方程模型。为表示边界处时间、热量和温度的关系，引入牛顿冷却定理。以人体温度  $37^{\circ}\text{C}$  为初始值，设各层材料的初始温度与人体体温相同，建立传热模型，此时对流传热系数  $h_1, h_2$  未知。根据附件 2，建立以相同时间下最右侧边界点的模拟值与实验值的最小残差平方和为目标函数，以第三类边界条件为约束的偏微分方程模型。为具体求解高温作业服各层的温度分布状况，通过隐式差分法求出对流传热系数  $h_1 = 116.790 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ 、 $h_2 = 8.374 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ ，运用 Crank-Nicholson 得到作业服各分层随时间与空间变化的温度分布，并将结果保存在 problem1.xlsx 中。

**针对问题二**，要求求解 II 层的最优厚度。考虑到经济适用型，由于材料层厚度不发生变化，因而第 II 层最小的厚度即为最优厚度。基于此，建立以第 II 层厚度最小为目标函数的单目标优化模型。同时，高温作业服第 I 层材料最外侧和第 IV 层最内侧需满足 Robin 边界条件。利用问题一中模型，在第 II 层厚度范围  $0.6\text{--}25\text{mm}$  内，以  $0.1$  为步长对第 II 层厚度赋值遍历，求得不同厚度取值情况下假人皮肤外侧温度随时间的变化。最终结果为：II 层最优厚度是  $17.5\text{mm}$ ，此条件下人体皮肤温度超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间为  $2.6\text{s}$ ，最高（最后）温度为  $44.0759^{\circ}\text{C}$ 。

**针对问题三**，要求求解第 II 层和第 IV 层的最优厚度，使得高温作业服研发成本最小、研发周期最短。考虑到成本，第 II 层材料的厚度应尽可能小；考虑从工作服工作灵活性及穿着舒适性，第 II 层和第 IV 层厚度之和应尽可能小。因此，建立多目标优化模型，为求解该模型本文使用两种方法求解。方法一综合考虑成本、灵活性舒适性，得出成本相较而言更为重要。为此，在满足约束的情况下，先确定 II 层最小厚度，再确定 II、IV 层厚度之和最小时第 IV 层的厚度。方法二将成本、灵活性两因素视为同等重要的前提下，各赋予  $0.5$  权重，将原来的多目标函数相加求最小。发现上述两种方法求解出的最优值相同。最终结果为：II 层最优厚度为  $19.3\text{mm}$ ，IV 层最优厚度为  $6.4\text{mm}$ ，此条件下人体皮肤温度超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间为  $290\text{s}$ ，最高（最后）温度为  $44.7704^{\circ}\text{C}$ 。

最后，本文对所求得结果进行灵敏度分析，分析模型敏感性，得出第 IV 层即空气层厚度对人体皮肤温度有较大影响的结论。

**关键词：**Fourier 定律 热传导方程 Crank-Nicolson 差分格式 优化模型

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

近年来,社会发展日新月异,人民生活水平稳步提升,人们对于生产生活环境也愈发重视,高温环境下工作人员的生产安全、工作效率等问题逐渐成为焦点。调查研究表明,高温环境会使工作人员病变,影响生产效率。因而,在高温环境下工作时,为避免灼伤,工作人员需穿着专用服装。高温作业服由三层材料构成,分别将其记为 I、II、III 层,与外界环境接触的材料记为 I 层,III 层与皮肤之间的空隙记为 IV 层。

### 1.2 问题提出

为设计高温作业服,在实验室模拟高温环境,放置体温恒定为  $37^{\circ}\text{C}$  的假人,测量假人皮肤外侧的温度。在研发成本尽可能小、研发周期尽可能短的情况下,建立数学模型确定假人皮肤外侧的温度变化情况,解决以下问题:

(1)在环境温度  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度  $6\text{ mm}$ 、IV 层厚度  $5\text{ mm}$ 、工作时间  $90\text{ 分钟}$  的情形下,测得假人皮肤外侧温度。建立数学模型,计算温度分布并生成 Excel 文件。

(2)在环境温度  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层厚度  $5\text{ mm}$  的情形下,在确保满足工作  $60\text{ 分钟}$  时,假人皮肤外侧温度不高于  $57^{\circ}\text{C}$ ,且高于  $44^{\circ}\text{C}$  的时长小于等于  $5\text{ 分钟}$  的条件下,求解出 II 层的最优厚度。

(3)当环境温度  $80^{\circ}\text{C}$  时,在确保满足工作  $30\text{ 分钟}$  时,假人皮肤外侧温度不高于  $47^{\circ}\text{C}$ ,且高于  $44^{\circ}\text{C}$  的时长小于等于  $5\text{ 分钟}$  的条件下,求解出 II 层和 IV 层的最优厚度。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一的分析

问题一要求在环境温度  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度  $6\text{ mm}$ 、IV 层厚度  $5\text{ mm}$ 、工作时间  $90\text{ min}$  的条件下确定各层的温度分布状况。

对于传热问题,热量一般以热传导、热对流和热辐射三种形式传递。考虑到热辐射的影响过于细微,将其忽略。首先,由于室内温度的均匀分布和材料的各向同性,可视热传递为只在皮肤垂直方向进行,因此只考虑一维方向上得到热传递。其次,利用傅里叶导热定律结合能量守恒定律,推导出作业服工作状态下一维热传导方程。运用牛顿冷却定理表示出工作服两端边界处时间、热量和温度的关系。假设开始工作时,各层材料的初始温度与人体温度相同均为  $37^{\circ}\text{C}$ ,将其视为初始值。综合以上条件,建立出传热模型,此时传热模型中有两个对流传热系数未知,分别设为  $h_1, h_2$ 。由于实验室环境和 I 层之间、IV 层与皮肤之间存在热对流,因而利用附件 2 实验测得的数据,建立以不同  $h_1, h_2$  根据传热模型计算出

相同时间下最右侧边界点的模拟值与实验值的最小残差平方和为目标函数，采用显隐式差分法，求出各自的对流传热系数 $h_1, h_2$ 。基于此，传热模型无任何未知数，可得到作业服各分层随时间与空间变化的温度分布。

## 2.2 问题二的分析

问题二要求在环境温度 65°C、IV 层厚度 5.5 mm 的条件下，满足工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C，且超过 44°C 的时长不高于 5 分钟的要求，给出 II 层的最优厚度。

建立单目标优化模型，在其它层厚度不发生变化和满足约束保证工作安全的基础上，求解第 II 层最小的厚度即为最优厚度。工作服第 I 层材料最外侧和第 IV 层最内侧需要满足 Robin 边值条件。本文通过遍历搜索的方法，在第 II 层厚度范围 0.6-25mm 内，以 0.1 为步长对第 II 层厚度赋值，再将第一问所求出的 $h_1, h_2$ 代入传热方程组并化成 Crank-Nicolson 差分格式后，才能求得假人皮肤外侧温度。

## 2.3 问题三的分析

问题三要求在环境温度 80°C 的条件下，满足工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C，且超过 44°C 的时长不高于 5 分钟的要求，给出 II 层和 IV 层的最优厚度。

从成本方面考虑要求第 II 层材料的厚度最小，从工作服工作灵活性及衣着舒适性的角度考虑，第 II 层和第 IV 层厚度之和最小为最优厚度。因此本问为一个多目标优化模型，没有明确评价任意一个多目标优化模型最优解的方法，本问在综合考虑成本、灵活性舒适性的情况下，认为成本较为重要；且第 IV 层厚度难以在实际使用过程中，精确控制每时每刻每处的厚度。因此本文决定在满足约束的情况下，先确定 II 层最小厚度，之后再计算二者之和最小时，第 IV 层的厚度，认为该方法求解出的厚度为该多目标规划的最优解。

## 三、模型假设

- 1、工作环境温度保持不变；
- 2、空气层热对流影响小，故而不考虑热对流；
- 3、热传递沿垂直于皮肤方向进行，故可视为一维的；
- 4、工作服装的材料是各项同性的，且在工作过程中受热均匀；
- 5、材料层之间、材料与空气层之间、空气层与皮肤之间的温度分布都是连续变化的，但温度梯度是跳跃的；
- 6、能量从实验室内空气到第 I 层时，包含热对流和热辐射。由于第 I 层阻挡了大部分的热辐射，因此，在服装第 II、III 层和人体皮肤传递过程中，可以忽略热辐射；

## 四、符号说明

符号	符号说明
$c$	比热
$\rho$	密度

$S$	横截面积
$C$	导热系数
$\Delta x$	长度元
$\Delta V$	体积元
$Q$	热流率
$A$	导热面积
$k$	导热系数
$T(t)$	当前温度
$H$	室温
$\alpha$	室温与降温速率之间的比例关系
$h_1$	外界环境与第一层材料之间的对流传热系数
$h_2$	第四层材料与人体皮肤之间的对流传热系数
$T_{en}$	环境温度
$T_r$	人体温度
$T_{di}^P$	第 d 层材料在第 i 个节点的温度

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一

在问题一中，已知环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ ，II 层厚度为  $1\text{mm}$ ，IV 层厚度为  $5\text{mm}$ ，工作时间为  $90\text{min}$ 。假人体温恒定为  $37^{\circ}\text{C}$ ，皮肤外侧温度变化已测得。为求解各层温度，本文建立偏微分方程模型。

#### 5.1.1 模型预处理

##### (一) 一维热传递模型的建立

题中陈述：假人置于环境温度恒定为  $75^{\circ}\text{C}$  的实验室内。分析高温作业服的工作环境，可假设人体周围环境温度相同，即作业服第一层材料外侧每一点的温度均相同。由于边界条件分布均匀，工作期间的热传递可简化为只在一个方向进行，即只在垂直于皮肤表面的方向进行；且无其他不均匀热源，无其他传热过程。因此，建立一维热传递模型，建立如下坐标系：

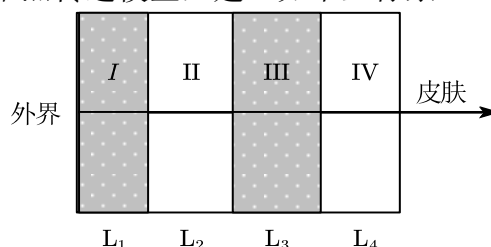


图 1 一维热传递模型

通常情况下，对物体内部热流率的研究方法分为两种，考虑研究对象的物质属性或考虑热量通过研究对象边界的速度<sup>[1]</sup>。下面，将分别从两个角度出发，推导热传导方程，并将其做比较研究。

##### 1) 考虑研究对象的物质属性

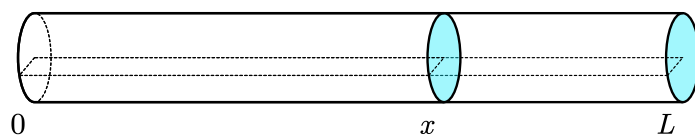


图 2 杆件示意图

以图中杆件为例，在  $t$  时刻，体积  $\Delta V$  内的热量  $Q$  可表示为：

$$\Delta Q = c\rho u(x,t) \Delta V \quad (1)$$

其中， $c$  表示比热， $\rho$  表示密度， $u$  表示温度， $\Delta V$  表示体积元。

随机取杆件的某段区域  $U$ ，以  $x=a, x=b$  隔开。

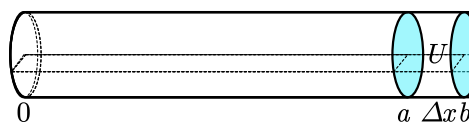


图 3 截取区域示意图

如图所示，将截取片段的横截面积记为  $S$ ， $\Delta x$  作为长度，则有

$$\Delta V = S\Delta x \quad (2)$$

因而，区域  $U$  的热量可表示为

$$\Delta Q = c\rho u(x,t) S\Delta x \quad (3)$$

即

$$Q(t) = \int_a^b c\rho u(x,t) S dx \quad (4)$$

假设杆件均匀，则截面积  $S$  不随时间变化，比热  $c$  与密度  $\rho$  均与时间无关。

（偏）微分可得，

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx S \quad (5)$$

如上即为从研究对象的物质属性出发，得出的热量关于时间变化的表达式。

## 2) 考虑热量通过研究对象边界的速度

根据能量守恒定律，当温度不同的两物体放置在一起时，热量总是从温度高的一方向温度低的一方。同样以方法一中细长杆件为例，在考虑热量通过研究对象边界速度的情况下，通过  $U$  的热流速度总与  $U$  的长度成反比，与横截面积  $S$  成正比。若  $x=a$  处温度小于  $x=b$  处，那么，热量将从  $b$  运动到  $a$ 。

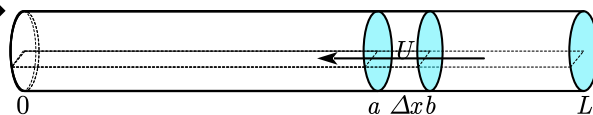


图 4 温度流向示意图

结合以上特点，不难得出，

$$\Delta Q = -C \frac{u(a + \Delta x, t)}{\Delta x} S \quad (6)$$

其中， $C$  为导热系数，导热系数仅与研究对象的材料有关。

当  $\Delta x$  趋向于 0 时，通过  $a$  处的热流速度为

$$-C \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) S \quad (7)$$

通过 b 处的热流速度为

$$C \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) S \quad (8)$$

t 时刻 U 所含的热量为

$$\frac{dQ}{dt} = C \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) \right] S \quad (9)$$

微分可得，

$$\frac{dQ}{dt} = C \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx S \quad (10)$$

### 3) 两种方法综合比较

将方法一和方法二所得的最终表达式进行联立，可得

$$c\rho \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dx S = C \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx S \quad (11)$$

化简可得，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12)$$

上述表达式揭示任意 t 时刻杆件各位置温度，模拟热量通过杆件的过程。

### (二) 傅里叶导热定律

在单位时间内，热传导方式传递的热量与垂直于热流的截面积成正比，与温度梯度成正比。负号表示导热方向与温度梯度方向相反。

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (13)$$

其中，Q 表示热流率，单位为 W； $\frac{dT}{dx}$  为温度梯度，单位为  $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ ；A 为导热面积，单位为  $\text{m}^2$ ；k 为材料的导热系数，又称热导率，单位为  $\text{W}/(\text{m}^{\circ}\text{C})$ ，也可以为  $\text{W}/(\text{m}^{\circ}\text{C})$ 。热导率是材料的固有的物理特性，代表材料的导热能力，导热系数越大，说明材料的导热性能越好。

由能量守恒定律和傅里叶导热定律，可以推导出

$$\rho_i c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\phi}{c\rho}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

其中， $c_i$  为比热容， $\rho_i$  为密度， $k_i$  为热传导率。

由于作业服工作中各分层内不含热源，可简化热传导方程。简化后方程为

$$\rho_i c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (15)$$

### (三) 牛顿冷却定理

当物体表面与周围存在温度差时，单位时间从单位面积散失的热量与温度差成正比，比例系数称为热传递系数。公式如下：

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - H) \quad (16)$$

其中， $T(t)$ 是温度关于时间的函数， $H$ 代表室温， $T(t)-H$ 为当前温度与室温之间的温差，常数 $\alpha$  ( $\alpha>0$ )表示室温与降温速率之间的比例关系。

### 5.1.2 偏微分方程模型的建立

#### (一) 根据材料之间的热传递方式确定边界条件

##### 1) 各层传热方式

对于传热问题，热传递的方式有三种：热传导、热对流和热辐射，但是工程计算中，若热辐射的影响不大，通常忽略热辐射的影响，仅考虑热传导、热对流两种方式。不同的传热方式有其特点和适用的情况。因而，需要对各层材料和各边界条件进行讨论，确定各自的传热方式。

第一层材料，与外界环境交界处考虑对流传热，一、二、三层材料内部仅考虑热传导，第四层空气与人体皮肤交界处考虑对流传热。

##### 2) 各层材料交界处的关系确定：

在假设4种材料紧密贴合的情况下，可以忽略材料之间的热阻。不同介质在临界界面处的温度相同：

$$\begin{cases} T_1|_{x=x_1} = T_2|_{x=x_1} \\ T_2|_{x=x_2} = T_3|_{x=x_2} \\ T_3|_{x=x_3} = T_4|_{x=x_3} \end{cases}$$

根据傅里叶导热定律，在导热过程中，相邻两个介质临界界面处热流密度相同，得：

$$\begin{cases} k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \\ k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = k_3 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_2} \\ k_3 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_3} = k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_3} \end{cases}$$

##### 2) 第三类边界条件的确定：

第三类边界条件是针对流体对流传热的近似。由于流体具有流动性，除了和固体一样热传导以外，还会通过流动来“搬运”热量。由于第I层材料外侧和第IV层材料内侧都存在对流传热过程。因此高温作业服两端都为第三类边界条件。

介质内侧的温度  $U$  与所考察介质表面上的温度  $T$  往往并不相同，考虑流过所考察介质表面的热量，从所考察内部介质来看它应由 Fourier 定律确定，即：

$$dQ = -k \frac{\partial T}{\partial n} ds dt$$

其中， $\frac{\partial T}{\partial n}$ 表示  $T$  沿边界  $S$  上的单位外法线方向  $n$  的方向导数。

从外部方面来看则应由牛顿冷却定律决定，即：

$$dQ = h \cdot \Delta T \cdot ds \cdot dt$$

结合前两式得到第三类边界条件：

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h \Delta T$$

即

$$\begin{cases} -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{en} - T(0, t)) \\ -k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_4} = h_2 (T(x_4, t) - T_r) \end{cases}$$

式中： $h_1$ 表示外界环境与第一层材料之间的对流传热系数， $h_2$ 表示第四层材料与人体皮肤之间的对流传热系数， $T(0, t)$ 和 $T(x_4, t)$ 分别表示两端界面  $t$  时刻的温度。 $T(x, 0)$ 为初始条件， $T_{en}$ 表示环境温度， $T_r$ 表示人体温度。

## (二) 目标函数的确立：

在分析作业服高温环境中传热过程中，现未知参数为  $h_1$ ：外界环境与第一层材料之间的对流传热系数， $h_2$ ：第四层材料与人体皮肤之间的对流传热系数。附件 2 中已给出环境温度为  $75^\circ\text{C}$ 、II 层厚度为  $2 \text{ mm}$ 、IV 层厚度为  $5 \text{ mm}$ 、各工作时间段假人皮肤外侧的温度。故现在对  $h_1$ 、 $h_2$  进行赋值，求解出各时刻第 IV 层材料最右端处的温度，最小二乘法建立参数估计模型。

$$\arg \min \sum_{n=1}^N (T(x_4, t_n, h_1, h_2) - T^*(t_n))^2$$

综上，模型建立为：

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_i \frac{\partial T}{\partial x} \right), i=1, 2, 3, 4 \\ -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{en} - T(0, t)) \\ k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_4} = h_2 (T(x_4, t) - T_r) \\ T|_{x=x_i} = T_{j+1}|_{x=x_3}, j=1, 2, 3 \\ T_{en} = 75, T_r = 37 \\ T(x_4, 0) = T_r \end{cases}$$

### 5.1.3 模型的求解：隐式法求解差分方程<sup>[2]</sup>

为了解上述偏微分方程模型，本文采用有限差分法。由于辐射存在边界条件，且存在随温度变化的对流系数，导致偏微分方程非线性。因而，通过隐式差分法求解。

将区域 I 即  $[0, l_1]$  分成  $m_1$  份，将区域 II 即  $[l_1, l_2]$  分成  $m_2$  份，将区域 III 即  $[l_2, l_3]$  分成  $m_3$  份，将区域 IV 即  $[l_3, l_4]$  分成  $m_4$  份。同时，将总时间切割为  $n$  份。

即，

$$\Delta t = \frac{t_{\text{总}}}{n}$$



设  $T_{di}^P$  为第  $d$  层材料在第  $i$  个分点的温度，时间  $t = P \cdot \Delta t$ 。

将模型中的热传递方程组转化为如下差分形式<sup>[3]</sup>：

$$\begin{cases} \frac{\partial T^2}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^P - 2T_i^P + T_{i+1}^P}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{P+1} - T_i^P}{\Delta t} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^P - T_i^P}{\Delta x} \end{cases}$$

热传导方程化使用向后差分和中心差分得

$$\frac{T_{d_i}^{P+1} - T_{d_i}^P}{\Delta t} = \alpha_d \cdot \frac{T_{d_{i-1}}^{P+1} - 2T_i^{P+1} + T_{d_{i+1}}^{P+1}}{(\Delta x_d)^2}$$

令

$$r_d = \frac{\alpha_d \cdot \Delta t}{(\Delta x_d)^2}$$

可将上式化简得，

$$-r_d T_{d_{i-1}}^P + (1 + 2r) T_i^P - r T_{d_{i+1}}^P = T_i^{P+1}$$

各层材料交界处，由平衡时的能量守恒公式，忽略热阻可得

$$k_d \left. \frac{\partial T_d}{\partial x_d} \right|_{x=ld} = k_{d+1} \left. \frac{\partial T_{d+1}}{\partial x_{d+1}} \right|_{x=ld}, d=1, 2, 3$$

向后差分，

$$k_d \frac{T_{d,m_{d+1}}^{P+1} - T_{d,m_d}^P}{\Delta x_d} = k_{d+1} \frac{T_{d+1,m_{d+1}}^{P+1} - T_{d+1,m_d}^{P+1}}{\Delta x_{d+1}}, d=1, 2, 3$$

化简得

$$-\frac{k_d}{\Delta x_d} T_{d,m_d}^{P+1} + \left( \frac{k_d}{\Delta x_d} + \frac{k_{d+1}}{\Delta x_{d+1}} \right) T_{d,m_{d+1}}^{P+1} - \frac{k_{d+1}}{\Delta x_{d+1}} T_{d,m_{d+2}}^{P+1} = 0$$

由第二类边界条件

$$\begin{cases} -k_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h_1 (75 - T(0, t)) \\ -k_4 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_4} = h_2 (T(x_4, t) - 37) \end{cases}$$

可推得，

$$\begin{cases} -k_1 \frac{T_{1,2}^{P+1} - T_{1,1}^P}{\Delta x_1} = h_1 (75 - T_{1,1}^{P+1}) \\ -k_4 \frac{T_{m_4}^{P+1} - T_{m_4-1}^P}{\Delta x_4} = h_2 (T_{m_4}^{P+1} - 37) \end{cases}$$

化简得

综上所述, 热传递方程组隐式差分格式为:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{d_i}^1 &= 37 \\ T_{d,m_d+1}^P &= T_{d+1,m_d+1}^P \\ -r_d T_{d_{i-1}}^P + (1+2r) T_{d_i}^P - r T_{d_{i+1}}^P &= T^{P-1} \\ -\frac{k_d}{\Delta x_d} T_{d,m_d}^{P+1} + \left( \frac{k_d}{\Delta x_d} + \frac{k_{d+1}}{\Delta x_{d+1}} \right) T_{d,m_{d+1}}^{P+1} - \frac{k_{d+1}}{\Delta x_{d+1}} T_{d,m_{d+2}}^{P+1} &= 0, \quad d=1,2,3,4, \quad i=1,\dots,m_d+1, \quad P=1,2,\dots,n+1 \\ -\frac{k_1}{\Delta x_1} T_{1,1}^P + \left( \frac{k_1}{\Delta x_1} + h_1 \right) T_{1,0}^{P+1} &= 75h_1 \\ -\frac{k_4}{\Delta x_4} T_{4,m_4-1}^P + \left( \frac{k_4}{\Delta x_4} + h_2 \right) u_{4,m_4}^{P+1} &= 37h_2 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{\Delta x_1} + h_1 - \frac{k_1}{\Delta x_1} & & & & & & & & & & \\ & -r_1 & 1+2r_1 & -r_1 & & & & & & & \\ & & -r_1 & 1+2r_1 & -r_1 & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & -r_1 & 1+2r_1 & -r_1 & & & & \\ & & & & & -\frac{k_1}{\Delta x_1} & -\frac{k_2}{\Delta x_2} + \frac{k_2}{\Delta x_2} & \frac{k_1}{\Delta x_1} & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & -\frac{k_3}{\Delta x_3} & -\frac{k_4}{\Delta x_4} + \frac{k_4}{\Delta x_4} & -\frac{k_3}{\Delta x_3} & \\ & & & & & & & & -r_4 & 1+2r_4 & -r_4 \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & & -r_4 & 1+2r_4 & -r_4 \\ & & & & & & & & & & & -\frac{k_4}{\Delta x_4} & \frac{k_4}{\Delta x_4} + h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1}^{i+1} \\ T_{1,2}^{i+1} \\ T_{1,3}^{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{1,m_1}^{i+1} \\ T_{1,m_1+1}^{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{3,m_3+1}^{i+1} \\ T_{4,m_3+2}^{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{4,m_4-1}^{i+1} \\ T_{4,m_4}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,1}^i \\ T_{1,2}^i \\ T_{1,3}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{1,m_1}^i \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{3,m_3+1}^i \\ T_{4,m_3+1}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{4,m_4-1}^i \\ T_{4,m_4}^i \end{bmatrix}$$

在以上推导中, 最终得到的代数矩阵为三对角线性方程组。

$$AT^{n+1} = T^n$$

一般来说,可以使用 MATLAB 进行逆矩阵运算,但由于此偏微分求解模型在后续问题还会多次使用,但因本题中系数矩阵规模较大,且除主对角线和两个次对角线之外,其余元素均为 0 因,而矩阵求逆解方程组会导致浪费内存、程序运行缓慢,故这里选用追赶法来进行方程组的求解。

对上述矩阵进行如下操作:

$$[f_1, f_2, f_3, \cdots, f_{n-1}, f_n] = [T_{1,1}^i, T_{1,2}^i, T_{1,3}^i, \cdots, T_{4,m_A-1}^i, T_{4,m_A}^i]$$

再按如下算法流程图进行编程求解：

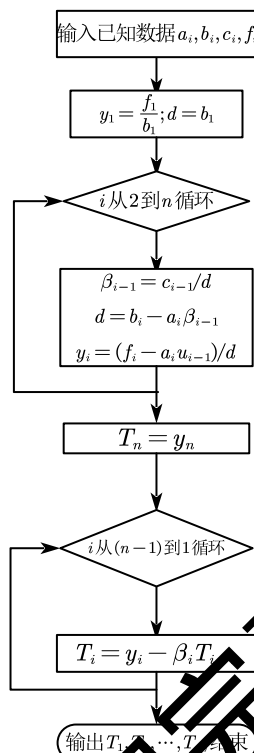


图 5 追赶法流程图

另因目标函数最终比较的是第 IV 层最内测温度与假人皮肤差的平方和最小，因此，可知在  $h_2$  暂未达到较优水平时，遍历出的最优  $h_2$  并不是整个过程中的最优值。因此在求解时，先遍历出一个较优的  $h_2$  范围后，再与  $h_1$  一同遍历求整体最优。

#### 5.1.4 模型结果

利用 MATLAB 对矩阵方程组进行求解，得到模型的数值解。由于实验室环境和 I 层之间、IV 层与皮肤之间存在热对流，且流传热系数  $h_1, h_2$  未知。因而，采用显隐式差分法，求出各自的对流传热系数  $h_1, h_2$ 。首先，初步确定 IV 层与皮肤之间的热对流系数  $h_2$ 。在搜索确定  $h_2 = 8.374 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot \text{C})$  后，再在  $[1, 200]$  内以步长  $\Delta = 1$  搜索  $h_1$ ，搜到  $h_1$  在 117 附近，再在  $[116, 118]$  内以步长  $\Delta = 0.001$  搜索得

$h_1 = 116.790 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot \text{C})$ ，此时， $\arg \min \sum_{n=1}^N (T(x_4, t_i, h_1, h_2) - T'(t_i))^2 = 1.6258$ 。

同时，将遍历搜索到的  $h_1, h_2$  的最优解回代至模型中求解出人体表面温度随时间变化的矩阵，将其与附件 2 中的实际实验所得数值进行比较绘图，发现其与实际的人体温度变化规律高度吻合，直观反映出所建立模型的可信度极高。

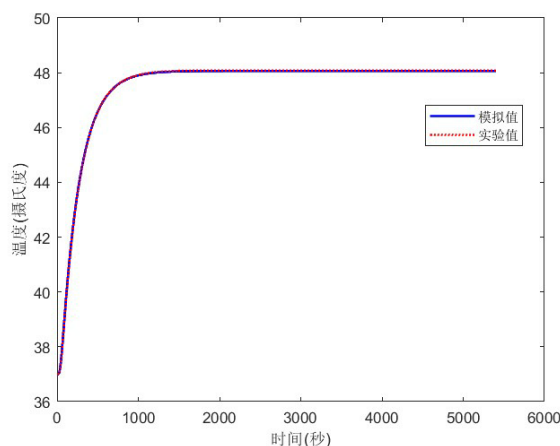


图6 人体温度模拟值与实验值对比示意图

运用 Crank-Nicholson，求解出在对流传热系数  $h_1 = 116.720 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ 、 $h_2 = 8.374 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  条件下的模型数值，并将温度分布的结果储存在 problem1.xlsx 中，部分数据展示如下表：

表1 温度分布结果

时间 (s)	服装外表面 ( $^\circ\text{C}$ )	II、III 交界 ( $^\circ\text{C}$ )	III、IV 交界 ( $^\circ\text{C}$ )	IV、V 交界 ( $^\circ\text{C}$ )	皮肤外侧 ( $^\circ\text{C}$ )
0	37.0000	37.0000	37.0000	37.0000	37.0000
50	62.7742	52.3865	46.4961	38.4810	37.5841
100	65.1604	56.7926	46.5135	43.0689	39.4203
150	66.9576	60.1172	51.5490	47.2913	41.1146
...	...	...	...	...	...
2500	74.2063	73.5281	72.0257	64.6122	48.0654
3500	74.2066	73.5285	72.0254	64.6128	48.0657
4500	74.2066	73.5285	72.0259	64.6128	48.0657

表(1)

并绘出最后时刻各点的温度分布图和时间-空间-温度分布图。

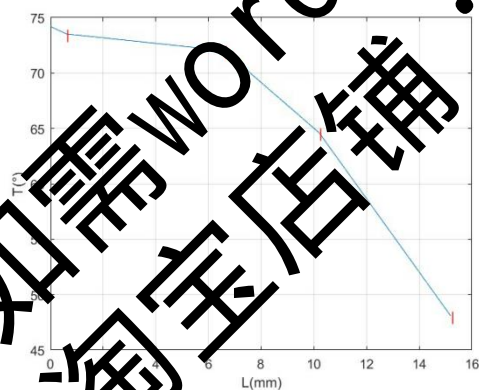


图7 工作时间 90min 时各点的温度分布情况

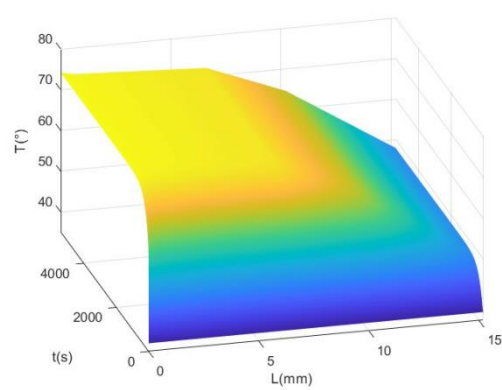


图8 时间-空间-温度分布图

### 5.1.5 结果检验

模型一的本质可以理解为：已知右边界各时刻的温度，未知  $h_1$ 、 $h_2$  的真实值，通过遍历求解出最接近真实  $h_1$ 、 $h_2$  的预测值。故可将该过程近似看成拟合  $h_1$ 、 $h_2$  的过程，即可用拟合优度对模型一的结果进行检验。

总离差平方和：

$$SST = \sum_{i=1}^N (T'(t_i) - \bar{T}')^2$$

残差平方和：

$$SSE = \sum_{i=1}^N (T(x_4, t_i; h_1, h_2) - T'(t_i))^2$$

拟合优度：

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

计算得： $SST = 1.7718 \times 10^4$ ， $SSE = 1.6258$ ， $R^2 = 0.9999$ 。拟合优度非常接近于 1，说明模型一的预测效果非常好。

## 5.2 问题二

在问题二中，已知环境温度为  $65^\circ\text{C}$ ，IV 层厚度为  $2.5\text{mm}$ 。借用问题一已知模型，求解出 II 层的最优厚度。

### 5.2.1 模型的建立

#### (一) 目标函数

由于降低研发成本、缩短研发周期对高温作业服批量投入生产尤为重要，因而，在考虑实际问题时，不仅需要保证到作业服装对工作人员工作效率的影响尽可能小，还需要考虑到作业服的经济性。一方面，从制作成本的角度考虑，II 层的厚度自然是越薄越好；另一方面，从服装的角度考虑，越轻薄的衣服越能保证作业过程的灵活性。因此建立目标函数：

$$\bullet \min thick_2$$

#### (二) 约束条件

假设 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^\circ\text{C}$ ，即：

$$\max_{0 \leq t \leq 60\text{min}} T(l_4, t; thick_2) \leq 47^\circ\text{C}$$

由于假人皮肤外侧温度一直是一个持续升温过程，超过  $44^\circ\text{C}$  的时间不超过 5 分钟，可以理解为在工作 55 分钟之前皮肤外侧温度不能达到  $44^\circ\text{C}$ <sup>[4]</sup>。

$$60 - t(l_4, 44; thick_2) \leq 5\text{min}$$

由附件 1 知 II 层的厚度  $0.6\text{--}25\text{mm}$ ，故：

$$0.6\text{mm} \leq thick_2 \leq 25\text{mm}$$

综上所述，问题二的模型如下：

$$\min thick_2$$

$$\begin{cases}
 \rho_i c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( k_i \frac{\partial T}{\partial x} \right), i = 1, 2, 3, 4 \\
 \begin{cases}
 -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{en} - T(0, t)) \\
 -k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_4} = h_2 (T(x_4, t) - T_x)
 \end{cases} \\
 s.t. \begin{cases}
 T_j|_{x=x_i} = T_{j+1}|_{x=x_3}, j = 1, 2, 3 \\
 T_{en} = 65, T_r = 37 \\
 T(x_4, 0) = T_r \\
 \max_{0 \leq t \leq 60 \text{ min}} T(l_4, t; thick_2) \leq 47^\circ \text{C} \\
 60 - t(l_4, 44; thick_2) \leq 5 \text{ min} \\
 0.6 \text{ mm} \leq thick_2 \leq 25 \text{ mm}
 \end{cases}
 \end{cases}$$

### 5.2.2 模型的求解

由问题一求解可知，模型对流传热系数  $h_1 = 116.190 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ， $h_2 = 8.374 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ 。此时热传递方程组无任何未知数，只需给出各层材料的厚度和外界温度，即可求解算该工作服任意时刻任意层材料内任意一点的温度值。相较于问题一的初始条件问题二的外界环境温度升高为  $65^\circ\text{C}$ ，IV层的厚度为  $5.5\text{mm}$ 。

模型求解步骤如下：

#### 第二问模型求解流程

Step1: 粗略考虑  $0.6\text{--}25\text{mm}$  在搜索最小厚度的范围，步长为  $1\text{mm}$

Step2: 将此时第 II 层的厚度代入问题一的模型中，采用相同求解方法，求解出 90 分钟内每秒假人皮肤外侧的预测温度，当 II 的层厚大于  $25\text{mm}$  是跳转至 step6

Step3: 断第 90 分钟假人皮肤外侧温度是否小于  $47^\circ\text{C}$ ，若大于则 II 的层厚增加  $1\text{mm}$  转到 step2

Step4: 到假人皮肤外侧达到  $44^\circ\text{C}$  的时刻，判断该时刻是否大于 55 分钟，若小于则 II 的层厚增加  $1\text{mm}$  转到 Step2

Step5: 记录保存此时 II 的层厚，II 的层厚增加  $1\text{mm}$  转到 Step2

Step6: 比较所有记录的 II 的层厚，按存入时间顺序，输出最小厚度相邻的两个厚度为： $16.6\text{mm}$ 、 $18.6\text{mm}$

Step7: 在  $16.6\text{--}18.6\text{mm}$  范围内更改步长为  $0.1\text{mm}$  循环上述过程，找到最小厚度

Step8: 将此时 II 的层厚代入问题一的模型中，用相同求解方法求解出 90 分钟内每秒假人皮肤外侧的预测温度，当 II 的层厚大于  $18.6\text{mm}$  是跳转至 Step12

Step9: 断第 90 分钟假人皮肤外侧温度是否小于  $47^\circ\text{C}$ ，若大于则 II 的层厚增加  $0.1\text{mm}$  转到 step8

Step10: 找到假人皮肤外侧达到  $44^\circ\text{C}$  的时刻，判断该时刻是否大于 55 分钟，若小于则 II 的层厚增加  $0.1\text{mm}$  转到 Step8

Step11: 记录保存此时 II 的层厚，II 的层厚增加  $0.1\text{mm}$  转到 Step8

**Step12:** 比较所有记录的 II 的层厚，找到最小厚度

**Output:** 输出最小厚度

### 5.2.3 模型的结果

在附件 1 给定的区间下进行遍历搜索，得到第 II 层不同厚度与假人皮肤外侧温度的关系。示意图如下。

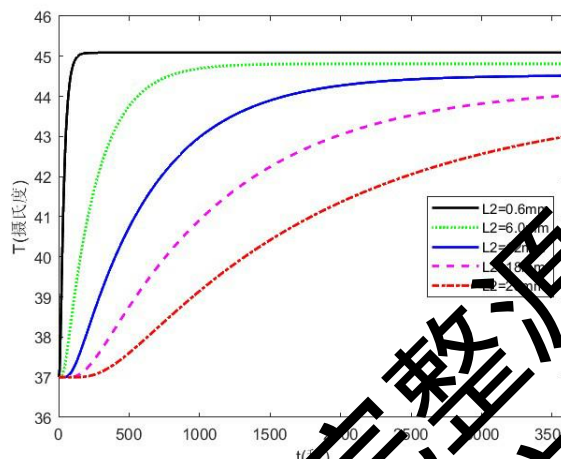


图 9 II 层厚度-温度T示意图

观察上图，易知，当 II 层厚度增加时，假人皮肤外侧温度降低，且皮肤外侧温度高于  $44^{\circ}\text{C}$  的时间逐级递减。题目要求确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ 。分析图像可以知道，在 60 分钟内，假人皮肤外侧温度始终低于  $47^{\circ}\text{C}$ ，因而恒定满足该条件。同时，要求假人皮肤外侧温度高于  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。为满足上述条件，依据图像缩小遍历范围，继续求解直至所得结果最优。

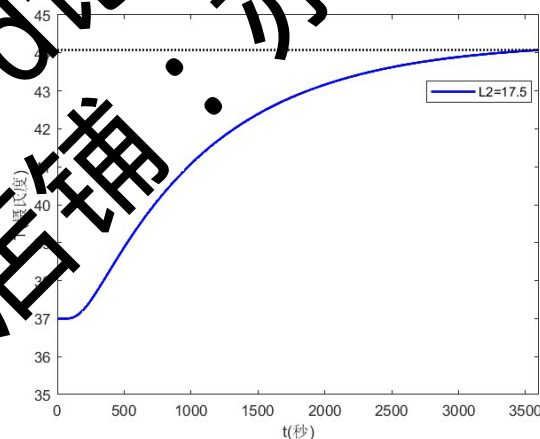


图 10 皮肤随时间的温度变化示意图

最终，遍历得出 II 的最优厚度为  $17.5\text{mm}$ ，此时，假人皮肤外侧温度超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间为  $296\text{s}$ ，最高（最后）温度为  $44.0759^{\circ}\text{C}$ 。满足假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟的条件。绘出假人皮肤外侧温度随时间的变化图，如上图所示。

### 5.3 问题三

在问题三中，已知环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$ 。运用上述模型，求解出 II 层和 IV 层

的最优厚度,以确保工作 30 分钟时,假人皮肤外侧温度不超过 47°C,且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

### 5.3.1 模型的建立

#### (一) 目标函数

从成本方面考虑时,由于第 IV 层实际是 III 层与皮肤之间的空隙,并不需要花费资金进行生产,且在高温作业服的实际使用中,并不能很好的控制该层的厚度。因此给出 II、IV 层最优厚度的最优化模型的目标为:

$$\min thick_2$$

仅对工作服灵活性、舒适性的方面进行考虑时,给出 II、IV 层最优厚度的最优化模型的目标为:

$$\min thick_2 + thick_4$$

#### (二) 约束条件

确保工作 30 分钟时,假人皮肤外侧温度不超过 47°C,且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。同理问题二,可以列出下述约束条件:

$$\max_{0 \leq t \leq 30 \text{ min}} T(l_4, t; thick_2) \leq 47^\circ \text{C}$$

$$30 - t(l_4, 44; thick_2) \leq 5 \text{ min}$$

由附件 1 知 II 层的厚度 0.6-25 mm, IV 层厚度范围为 0.6-6.4mm,故:

$$0.6 \text{ mm} \leq thick_2 \leq 25 \text{ mm}$$

$$0.6 \text{ mm} \leq thick_4 \leq 6.4 \text{ mm}$$

因此,本问是一个多目标优化问题。综上所述问题三模型如下:

$$\min thick_2$$

$$\min thick_2 + thick_4$$

$$\max_{0 \leq t \leq 30 \text{ min}} T(l_4, t; thick_2) \leq 47^\circ \text{C}$$

$$30 - t(l_4, 44; thick_2) \leq 5 \text{ min}$$

$$0.6 \text{ mm} \leq thick_2 \leq 25 \text{ mm}$$

$$0.6 \text{ mm} \leq thick_4 \leq 6.4 \text{ mm}$$

综合考虑成本因素和灵活性、舒适性的因素,将多目标优化转化为单目标优化的过程中应在所有满足约束的可行解中,找到最小第二层厚度时,再通过两者之和最小找到第四层的厚度。

因而,最终所建立的单目标规划模型为:

$$\min thick_2$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{0 \leq t \leq 30 \text{ min}} T(l_4, t; thick_2) \leq 47^\circ \text{C} \\ 30 - t(l_4, 44; thick_2) \leq 5 \text{ min} \\ 0.6 \text{ mm} \leq thick_2 \leq 25 \text{ mm} \\ 0.6 \text{ mm} \leq thick_4 \leq 6.4 \text{ mm} \\ \rho_i c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( k_i \frac{\partial T}{\partial x} \right), i = 1, 2, 3, 4 \\ \left\{ \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{en} - T(0, t)) \\ -k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_4} = h_2 (T(x_4, t) - T_x) \end{array} \right. \\ T_j|_{x=x_i} = T_{j+1}|_{x=x_j}, j = 1, 2, 3 \\ T_{en} = 80, T_r = 37 \\ T(x_4, 0) = T_r \end{array} \right.$$

### 5.3.2 模型的求解：多目标规划转单目标规划

根据第二问的求解经验可知，最小 II 层厚度并不是可行范围内较小，因此本问遍历求解时可选取从 10mm 开始。本方法要求先解出最小 II 层厚度，再求最小 IV 层厚度，但要求第 II 层和第 IV 层两者的厚度均具体给出后，才能进行热传递方程组的求解。因此本问求解的核心思想转变为：求出所有满足约束的可行解，再从中找最小 II 层厚度，进而固定 thick2 求最小 IV 层厚度，

具体求解步骤如下：

#### 第三问方法一求解流程

Step1: 确定 II 层厚度、IV 层厚度的搜索范围及步长，范围分别为 10mm-25mm, 0.6mm-6.4mm，设定步长均为 0.1mm。给定 thick2、thick4 的初始值

Step2: ( $thick_2$ ) II 层厚度增加 0.1mm

Step3: ( $thick_4$ ) IV 层厚度增加 0.1mm

Step4: 代入此时  $thick_2, thick_4$  进行求解

Step5: 判断第 30 分钟假人皮肤外侧温度是否小于  $47^\circ\text{C}$ ；找到假人皮肤外侧达到  $47^\circ\text{C}$  的时刻，判断该时刻是否大于 25 分钟。若两判断条件均为真，则保存此时 II 层厚度、IV 层厚度为可行解

Step6: 若 II 层厚度等于范围最大值 25mm，则跳转至 Step8

Step7: 若 IV 层厚度没有超过范围（小于 6.4mm）时，则转到 Step3，若恰好等于 6.4mm，则令 IV 层厚度 ( $thick_4$ ) 等于初始值 0.6mm 跳转至 Step2

Step8: 选出此时可行解中最小 II 层厚度

Step9: 当 II 层厚度为 Step8 值时，筛选出 IV 层厚度最小值

Output: 输出最小 II 层厚度、最小 IV 层厚度

更改目标函数再次求解：

由于两目标函数均为求最小值，且量纲相同都是 mm 为单位。因此可假设两目标的重要性相同，各取权重 0.5，构造出新的单目标函数：

$$\min thick_2 + 0.5thick_4$$

可行解如下图：

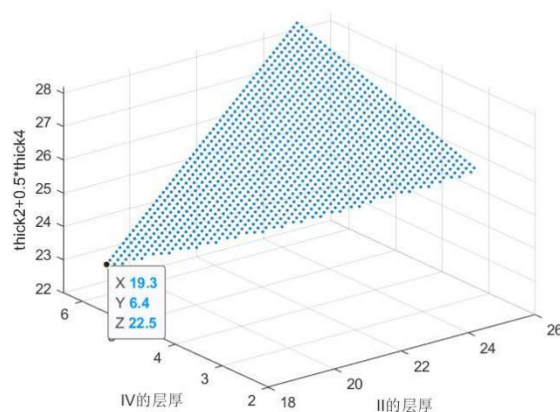


图 11 更变目标函数后可行解示意图

观察图像，发现最优解结果与为目标函数时求解出的结果一致，说明该结果从各方面来看均是最优解。

### 5.3.3 模型的结果及分析

II 层最优厚度为 19.3mm，在第 II 层的厚度确定后，通过遍历搜索最优厚度为 6.4mm，30 分钟内假人皮肤外侧温度超过 44℃ 的时间为 296s，最高(最后)温度为 44.7704℃。

## 六、模型评价与推广

### 6.1 灵敏度分析

在实际生产生活中，高温作业服装各分层厚度可能与其设计值存在微小偏差。考虑到做工精度带来的误差，这里采用单因素敏感性分析的方法，对本文所建立的偏微分方程中的各分层厚度参数的敏感性进行分析。具体方法如下：

采用问题一中的各参数值， $h_1 = 116.790 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ 、 $h_2 = 8.374 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ 、 $T_{en} = 75^\circ\text{C}$ 、 $T_a = 37^\circ\text{C}$ 、 $\alpha = 4.03$ 、 $L_1 = 0.6\text{mm}$ 、 $L_2 = 6\text{mm}$ 、 $L_3 = 3.6\text{mm}$ 、 $L_4 = 1.6\text{mm}$ ，首先依据模型求解出此条件下的最终人体温度为 48.0657℃，然后分别对各分层 I、II、III、IV 的厚度  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$  进行  $\pm 0.5\text{mm}$  范围内的变动，每次变动 0.1mm，并同时保证其他参数和条件不变，再代入至模型求解厚度调整后的最终人体温度，并与原先的温度进行差值比较计算出变化率，即可通过最终绘图比较各分层厚度对模型的敏感性。

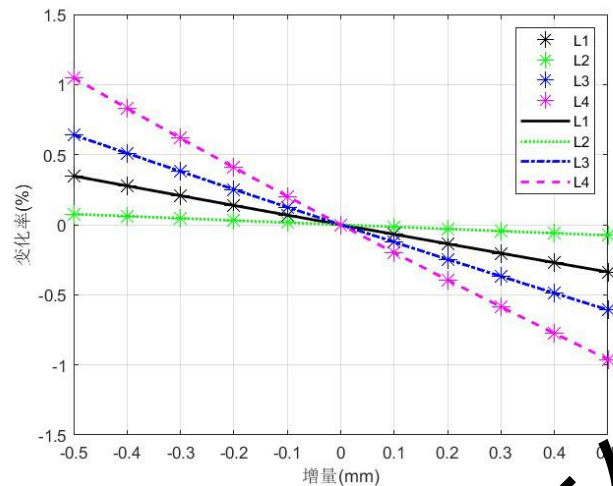


图 12 皮肤外侧温度随各分层厚度的变化率

由图 11 可以看出, 各分层厚度与人体最终温度的变化率呈现出明显的线性关系, 且由图中各斜率可以对比发现, 第 IV 层的厚度对皮肤外侧温度的影响最大, 因此, 在实际生产中, 为保证对人体温度的把控, 要更加注意对第 IV 层的厚度的把控, 同时可以确定本文所建立的偏微分方程模型具有较高的准确性。

## 6.2 模型的优点

- 1、本文充分利用 MATLAB 等软件进行求解, 所得误差较小, 数据准确合理。
- 2、本文通过模型的得到结果, 并能联系全文不同模型所得结果, 合理的分析, 反复推测, 最终验证模型的可行性。
- 3、本文所建立的偏微分模型规律简单、易懂, 而且能够运用该模型以及模型求解算法得出比较理想的结果, 说明了模型的实用性和算法有效性。

## 6.3 模型的缺点

- 1、由于在考虑高温作业服第 II、III 层和人体皮肤传递过程中, 忽略了辐射, 因而会存在一定的误差。
- 2、本文在解决实际问题中使用的数据大部分为实验值, 本身存在一定的不准确性, 我们没有使用实际数据进行检验。
- 3、本文使用差分方程模型, 精度略低。在实际问题的应用中, 易造成误差。

## 6.4 模型的推广

在解决人口问题时, 采用威尔霍斯特模型, 通过偏微分方程精确描述人口分布的发展过程。同类微分方程可用来描述许多性质不同的自然现象, 因而, 微分方程在物理学、医学、生物学等科学研究的广度和深度两方面的应用不断扩展, 并在新兴学科和边缘学科的开发中及时发挥作用。

# 七、 参考文献

- [1]贾海峰.一维热传导方程的推导[J].科技信息,2013(02):159.
- [2]D.L.罗伯特,M.S.赛里姆,陈玉田.解一维抛物型偏微分方程的六种显式和两种隐式有限差分格式的比较[J].华水科技情报,1985(04):108-123.

- [3]李华,周维奎,邓培智.Crank-Nicolson 差分格式及其稳定性研究[J].矿物岩石,1998(S1):253-256.DOI:10.19719/j.cnki.1001-6872.1998.s1.059.
- [4]谷韬,徐定华.带随机 Robin 边界数据的三层热传递模型及参数识别反问题[J].浙江理工大学学报(自然科学版),2021,45(02):266-272.

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方

## 八、 附录

### 附件清单

1. 核心 m 函数文件
2. 问题一程序 1
3. 问题一程序 2
4. 问题二程序 1
5. 问题二程序 2
6. 问题三程序 1
7. 问题三程序 2
8. 灵敏度分析

### 1. 核心 m 函数文件 (qiujie.m)

```
%输入各可调节参数，返回温度分布
function [T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_0,tt,T_r=37;
rou=[300;862;74.2;1.18];%密度
c=[1377;2100;1726;1005];%比热容
k=[0.082;0.37;0.045;0.028];%热传导率
H=[L1,L2,L3,L4]*1e-3;
X1=H(1);X2=sum(H(1:2)); X3=sum(H(1:3));X4=sum(H);
alpha=k./(rou.*c);
dx=0.0001;%空间步长
x=0:dx:X4;
dt=1;%时间步长
t=0:dt:tt;
r=dt/dx^2.*alpha;
T=zeros(length(x),length(t));
T(:,1)=T_r;%初始条件
%构造 A 矩阵，分四个区域
A=zeros(round(X4/dx+1));
A1=(1+2*r(1))*eye(round(X1/dx+1))-
r(1)*diag(ones(1,round(X1/dx)),1)-
r(1)*diag(ones(1,round(X1/dx)),-1);
A2=(1+2*r(2))*eye(round((X2-X1)/dx+1))-
r(2)*diag(ones(1,round((X2-X1)/dx)),1)-
r(2)*diag(ones(1,round((X2-X1)/dx)),-1);
A3=(1+2*r(3))*eye(round((X3-X2)/dx+1))-
r(3)*diag(ones(1,round((X3-X2)/dx)),1)-
r(3)*diag(ones(1,round((X3-X2)/dx)),-1);
A4=(1+2*r(4))*eye(round((X4-X3)/dx+1))-
r(4)*diag(ones(1,round((X4-X3)/dx)),1)-
r(4)*diag(ones(1,round((X4-X3)/dx)),-1);
%不同材料交界处
A1(1,1)=k(1)/dx+h1;
A1(1,2)=-k(1)/dx;
```

```

A1(end,end)=(k(1)+k(2))/dx;
A1(end,end-1)=-k(1)/dx;
A2(1,1)=(k(1)+k(2))/dx;
A2(1,2)=-k(2)/dx;
A2(end,end)=(k(2)+k(3))/dx;
A2(end,end-1)=-k(2)/dx;
A3(1,1)=(k(2)+k(3))/dx;
A3(1,2)=-k(3)/dx;
A3(end,end)=(k(3)+k(4))/dx;
A3(end,end-1)=-k(3)/dx;
A4(1,1)=(k(3)+k(4))/dx;
A4(1,2)=-k(4)/dx;
A4(end,end)=k(4)/dx+h2;
A4(end,end-1)=-k(4)/dx;
%合并
A(1:length(A1),1:length(A1))=A1;
A(length(A1):length(A1)+length(A2)-
1,length(A1):length(A1)+length(A2)-1)=A2;
A(length(A1)+length(A2)-1:end-
length(A4)+1,length(A1)+length(A2)-1:end-length(A4)+1)=A3;
A(end-length(A4)+1:end,end-length(A4)+1:end)=A4;
%追赶法求解
for n=1:length(t)-1
    aa=[0,diag(A,-
1)']; bb=diag(A)'; cc=diag(A,1)'; ff=T(:,n); m=length(A); %追
赶法
    ff(1)=T_en*h1;
    ff(length(A1))=0;
    ff(length(A1)+length(A2)-1)=0;
    ff(length(A1)+length(A2)+length(A3)-2)=0;
    ff(end)=T_en*h2;
    betal=zeros(1,m); zeros(1,m); y(1)=ff(1)/bb(1); d=bb(1);
    for i=2:m
        betal(i-1)=cc(i-1)/d;
        d=bb(i)-aa(i)*betal(i-1);
        y(i)=(ff(i)-aa(i)*y(i-1))/d;
    end
    T(end,n)=y(end);
    for i=length(T(:,1))-1:-1:1
        T(i,n+1)=y(i)-betal(i)*T(i+1,n+1);
    end
end
end
% %温度分布动态
% plot(x,T(:,n+1));
% getframe;
end
end

```

## 2. 问题一程序 1 (Q1\_1.m)

```

%搜索 h1、h2 的具体值
%实际操作发现 h1 敏感度不大，而 h2 敏感度非常大
%先 h1 保持不变，搜索出 h2=8.374，再保持 h2 不变，找出 h1 的具体数值
clc;clear;close all;
% [FJ2,FJ2_text]=xlsread('A.xlsx','附件 2');
% T0=FJ2(:,2); %初始各点的温度，T0(1)是 0 时的温度
% save FJ_2
load FJ_2.mat
%有限差分法，隐式
arg_min=1e6;
L1=0.6;L2=6;L3=3.6;L4=5;
T_en=75;tt=5400;
h2=8.374;
for h1=116:0.01:118
[T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
TT=[FJ2(:,1),T(end,:)];%模拟人的温度变化
arg=norm(TT(:,2)-FJ2(:,2))^2;
if arg<arg_min
arg_min=arg;
h_1=h1;
h_2=h2;
TT_2=TT;
end
end
%绘图
figure('Color','w')
plot(1:5401,TT_2(:,2),'b','LineWidth',1.5);
hold on
plot(1:5401,FJ2(:,2),'r','LineWidth',1.5);
legend('模拟值','实验值')
xlabel('时间(秒)');ylabel('温度(摄氏度)')

```

### 3. 例题二 程序 2 (q1\_2.m)

```

%已知 L1、h2，求解温度分布
clc;clear;close all;
load FJ_2.mat
%有限差分法，隐式
L1=0.6;L2=6;L3=3.6;L4=5;
T_en=75;tt=5400;
h1=116.79;h2=8.374;
[T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
%绘最终温度分布图
figure('Color','w')
x=[0:length(T(:,1))-1]/10;
plot(x,T(:,end))
hold on
text(L1,T(L1*10+1,end),'|','color','r')

```

```

text(L1+L2,T((L1+L2)*10+1,end),'|','color','r')
text(L1+L2+L3,T((L1+L2+L3)*10+1,end),'|','color','r')
text(L1+L2+L3+L4,T((L1+L2+L3+L4)*10+1,end),'|','color','r')
grid on
xlabel('L(mm)');ylabel('T(°)')
%拟合优度计算
SST=norm(FJ2(:,2)-mean(FJ2(:,2)))^2;
SSE=arg_min;
R=1-SSE/SST;
%绘三维温度分布图
t=0:5400;
figure('Color','w')
surf(x,t,T')
shading interp
xlabel('L(mm)');ylabel('t(s)');zlabel('T(°)')
axis([0 15.2 0 5400 35 80 ])
%储存温度分布
xlswrite('problem1.xlsx',T')

```

#### 4. 问题二程序 1 (Q2\_1.m)

```

%求解二层的最优厚度
clc;clear;close all;
L1=0.6;L3=3.6;L4=5.5;
h1=116.790;h2=8.374;
T_en=65;tt=3600;
%遍历找到 L2
min_L2=25;
for L2=0.6:0.1:25
[T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
TT=T(end,:);%提取人体表面温度
count=find(TT>44);%找出温度超 44°的点
if TT(end,end)<=47&&length(count)<=5*60&&L2<min_L2
min_L2=L2;
end
end
T_max=TT(end,:);
pass=length(count);%超出时间
end
end
%绘图 1 人体随时间的温度变化
figure('Color','w')
x=0:tt;
plot(x,T_re,'b-','LineWidth',1.7)
hold on
plot(x,ones(1,length(x))*T_max,'k:','LineWidth',1.5);
xlabel('t(秒)');ylabel('T(摄氏度)')
legend('L2=17.5')
axis([0 tt 35 45])

```



#### 5. 问题二程序 2 (Q2\_2.m)

```
%不同 L2 厚度对人体温度的影响
clc;clear;close all;
L1=0.6;L3=3.6;L4=5.5;
h1=116.790;h2=8.374;
T_en=65;tt=3600;
L2=[0.6,6,12,18,25];
[T1]=qiujie(L1,L2(1),L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
[T2]=qiujie(L1,L2(2),L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
[T3]=qiujie(L1,L2(3),L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
[T4]=qiujie(L1,L2(4),L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
[T5]=qiujie(L1,L2(5),L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
%提取人体表面温度
TT1=T1(end,:);
TT2=T2(end,:);
TT3=T3(end,:);
TT4=T4(end,:);
TT5=T5(end,:);
x=0:tt;
figure('Color','w')
plot(x,TT1,'c-',x,TT2,'g:',x,TT3,'b',x,TT4,'m--',x,TT5,'r-.','Linewidth',1.7)
legend('L2=0.6mm','L2=6mm','L2=12mm','L2=18mm','L2=25mm')
axis([0 3600 36 46])
xlabel('t(秒)');ylabel('T(摄氏度)')
```

#### 6. 问题三程序 1 (Q3\_1.m)

```
%求解二层、四层的最佳厚度
%程序运行可能的5mins
clc;clear;close all;
h1=116.790;h2=8.374;
T_en=65;tt=1800;
L1=0.6;L3=3.6;
%遍历找到 L2、L4
min_L2=25;
for L2=0.6:0.2:25
    min_L4=5.4;
    for L4=0.1:0.1:6.4
        [T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
        TT=T(end,:);%提取人体表面温度
        count=find(TT>44);%找出温度超 44°的点
        if TT(end,end)<=47&&length(count)<=5*60&&L2<=min_L2%先找到二层厚度最小
            min_L2=L2;
            if L4<min_L4%再找到四层厚度最小
                min_L4=L4;
            end
        end
    end
end
```

```

        T_max=TT(end);
        pass=length(count);%超出时间
    end
end
end
end

```

#### 7. 问题三程序 2 (Q3\_2.m)

```

%根据 Q3 搜索的 L2、L1 结果，获取相关信息
clc;clear;close all;
h1=116.790;h2=8.374;
T_en=80;tt=1800;
L1=0.6;L2=19.3;L3=3.6;L4=6.4;
[T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
TT=T(end,:);%提取人体表面温度
count=find(TT>44);%找出温度超 44°的点
T_max=TT(end);%t=30mins 时人体的温度
pass=length(count);%超出时间

```

#### 8. 灵敏度分析 (sensitivity.m)

```

%灵敏度分析，分布对 L1、L2、L3、L4 进行
%L1、L2、L3、L4 初始值与问一条件一致,变化程度: +0.5
clc;clear;close all;
L1=0.6;L2=6;L3=3.6;L4=5;
h1=116.790;h2=8.374;
T_en=75;tt=5400;
x=-0.5:0.1:0.5;
[T]=qiujie(L1,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
TT=T(end,end);
T_L1=zeros(11,1);jj=1;
for ii=L1-0.5:0.1:L1+0.5
    [T]=qiujie(ii,L2,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
    T_L1(jj)=(T(end,end)-TT)/TT*100;
    jj=jj+1;
end
T_L2=zeros(11,1);jj=1;
for ii=L2-0.5:0.1:L2+0.5
    [T]=qiujie(L1,ii,L3,L4,h1,h2,T_en,tt);
    T_L2(jj)=(T(end,end)-TT)/TT*100;
    jj=jj+1;
end
T_L3=zeros(11,1);jj=1;
for ii=L3-0.5:0.1:L3+0.5
    [T]=qiujie(L1,L2,ii,L4,h1,h2,T_en,tt);
    T_L3(jj)=(T(end,end)-TT)/TT*100;
    jj=jj+1;
end

```

```

T_L4=zeros(11,1);jj=1;
for ii=L4-0.5:0.1:L4+0.5
[T]=qiujie(L1,L2,L3,ii,h1,h2,T_en,tt);
T_L4(jj)=(T(end,end)-TT)/TT*100;
jj=jj+1;
end
%绘图
figure('Color','w')
plot(x,T_L1,'k*',x,T_L2,'g*',x,T_L3,'b*',...
_L4,'m*','MarkerSize',10)
hold on;
plot(x,T_L1,'k-',x,T_L2,'g:',x,T_L3,'b-.',x,T_L4,'m-','Linewidth',1.7)
axis([-0.5 0.5 -1.5 1.5])
legend('L1','L2','L3','L4','L1','L2','L3','L4')
grid on;
xlabel('增量(mm)');ylabel('变化率(%)');

```

如需word论文和完整源代码  
淘宝店铺：亦是远方