**Зразок контрольної роботи №2**

(1) (1 бал) Задано рівняння площини $\pi_1$, прямої $l_1$ і точку $M(x, y, z)$. Знайдіть:
1) рівняння площини $\pi_2$, що проходить через точку $M$ паралельно до площини $\pi_1$;
2) рівняння прямої $l_2$, що проходить через точку $M$ перпендикулярно до площини $\pi_1$.

$$\pi_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0, l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}, M(5; 3; 0).$$

**Розв'язок.** 1) Рівняння площини $\pi_2$, яка паралельна до площини $\pi_1$, можна записати у вигляді $2x - y + 3z + d = 0$. Точка $M$ належить площині $\pi_2$, відповідно її координати задовольняють рівняння цієї площини. Маємо $10 - 3 + d = 0$, звідки $d = -7$, отже, $\pi_2 : 2x - y + 3z - 7 = 0$.

2) Нормальний вектор площини $\pi_1$ є напрямним вектором прямої $l_2$, отже, $l_2 : \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$.

(2) (4 бали) Лінійний оператор, що перетворює простір $R^3$ в себе, задається в базисі $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ матрицею $A_\varphi$. Знайдіть матрицю цього оператора в базисі з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = (0, 1, 2), \vec{a}_2 = (3, 1, 0), \vec{a}_3 = (0, 1, 1)$.

**Розв'язок.** Матрицю цього лінійного оператора в базисі з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ знаходимо з формули $F_\varphi = T^{-1} \cdot A \cdot T$, де $T$ - матриця переходу, стовпчиками якої є координати векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $F_\varphi = \begin{pmatrix} 7/3 & 26/3 & 0 \\ 13/3 & 19/3 & 2 \\ -8/3 & -19/3 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) (7 балів) Звести матрицю лінійного перетвореня до діагонального вигляду $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Розв'язок.** Знайдемо власні значення лінійного перетворення як корені характерестичного многочлена $\chi(A) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$.

Коренями цього многочлена будуть $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

Обчислимо відповідні власні вектори.

Для $\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідна система лінійних рівнянь набуде вигляду $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язком цієї системи є, наприклад, $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 2$. Отже, перший власний вектор $\vec{v}_1 = (1, -2, 2)$. Аналогічно знаходимо інші власні вектори: $\vec{v}_2 = (2, -1, -2), \vec{v}_3 = (2, 2, 1)$.

Для діагоналізації матриці $A$ використаємо матрицю $T$, стовпцями якої є координатні стовці власних векторів. Отже, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Знаходимо матрицю $T^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Звідси одержуємо

$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(4) (3 бали) Ортогоналізувати систему векторів: $a_1 = (1, 0, 2, 2), a_2 = (2, 1, 0, 2), a_3 = (2, 2, 1, 0)$.

$b_1 = a_1 = (1, 0, 2, 2)$,

$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = (2, 1, 0, 2) - \frac{6}{9}(1, 0, 2, 2) = \frac{1}{3}(4, 3, -4, 2)$,

$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = (2, 2, 1, 0) - \frac{4}{9}(1, 0, 2, 2) - \frac{10/3}{15/3} \cdot \frac{1}{3}(4, 3, -4, 2) = \frac{1}{3}(2, 4, 3, -4)$.