Зразок контрольної роботи №1

(1) (3 бали) Знайти $\sqrt[4]{z}$ для комплексного числа z: $z = -72(1-\sqrt{3}i)$.

Запишемо в тригонометричній формі число $z = -72(1-\sqrt{3}i)$. Отже, $|z| = 72\sqrt{1+3} = 144$, $\begin{cases} cos\phi = \frac{-72}{144} = \frac{-1}{2}, \\ sin\phi = \frac{72\sqrt{3}}{144} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Звідси $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Тому $z = 144\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$. Отже,

$$\sqrt[4]{-72(1-\sqrt{3}i)} = \sqrt[4]{144}\left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + isin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$$

$\omega_0 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{12} + isin\frac{2\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 3 + \sqrt{3}i,$

$\omega_1 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + 3i,$

$\omega_2 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{14\pi}{12} + isin\frac{14\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -3 - \sqrt{3}i,$

$\omega_3 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{20\pi}{12} + isin\frac{20\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 3i.$

(2) (2 бали) Обчислити: $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$

Обчислимо тригонометричні форми чисельника $z_1 = \sqrt{3} + i$ та знаменника $z_2 = 1 - i$. Оскільки $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$, а аргумент z_1 знаходимо з системи $\begin{cases} cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ sin\phi = \frac{1}{2}, \end{cases}$ тобто $\phi = \frac{\pi}{6}$, то

$$z_1 = 2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}).$$

Аналогічно $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ і з системи $\begin{cases} cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$ отримуємо $\phi = \frac{7\pi}{4}$, тобто

$$z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}).$$

При діленні двох комплексних чисел їхні модулі діляться, а аргументи віднімаються. Тому

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Звідси

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}\left(cos\left(30\cdot\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(30\cdot\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2^{15}\left(cos\left(\frac{25\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{25\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{15}\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{15}(0 + 1i) = 2^{15}i.$$

(3) (3 бали) Нехай $f(x) = x^2 + 4x - 8$ многочлен.

Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Зауважимо, що $f(A) = A^2 + 4A - 8E$, де E - одинична матриця третього порядку. Обчислимо матрицю A^2, врахувавши, що $A^2 = A \cdot A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 & -5 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $4A$, для цього кожний елемент матриці A помножимо на число 4.

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 0 & 16 & -4 \\ -12 & 20 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо скалярну матрицю $8E$.

$$8E = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо $f(A) = A^2 + 4A - 8E$.

$$f(A) = \begin{pmatrix} -5 & 25 & -5 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 0 & 16 & -4 \\ -12 & 20 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 37 & 3 \\ 3 & 19 & -6 \\ -9 & 21 & -7 \end{pmatrix}.$$

(4) (4 бали) Розв'язати систему рівнянь методом Гауса, методом Крамера та матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$$

Розв'язок методом Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 12 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & -4 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 21 & -13 & 34 \\ 0 & 11 & -13 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 13 & -14 \\ 0 & 11 & -13 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 13 & -14 \\ 0 & 0 & 130 & -130 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає східчастій розширеній матриці

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6 \\ -x_2 + 13x_3 = -14 \\ 130x_3 = -130. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи $x_3 = -1$. Підставимо $x_3 = -1$ в друге рівняння та знайдемо $x_2 = 1$. Підставимо $x_3 = -1$ та $x_2 = 1$ в перше рівняння та знаходимо $x_1 = 2$.

Розв'язок методом Крамера. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 130, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 10 & 5 & 3 \\ -6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 260,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & -5 \\ 4 & 10 & 3 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 130, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 5 & 10 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -130.$

Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{260}{130} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{130}{130} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-130}{130} = -1.$

Розв'язок матричним способом. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

$X = A^{-1}B.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{65} & \frac{4}{65} & \frac{17}{65} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{21}{130} & \frac{11}{130} & -\frac{1}{65} \end{pmatrix}.$

Знайдемо розв'язок: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{16}{65} & \frac{4}{65} & \frac{17}{65} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{21}{130} & \frac{11}{130} & -\frac{1}{65} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(5) (3 бали) Знайти остачу від ділення 223^{2123} на 52.

Якщо треба знайти остачу від ділення a^s на m, де $(s, m) = 1$ і $s \geq \varphi(m)$, то s можна подати у вигляді $s = \varphi(m)q + r$, де $0 \leq r < \varphi(m)$. Оскільки $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\operatorname{mod} m)$, то

$$a^s = a^{\varphi(m)q+r} = (a^{\varphi(m)})^q \cdot a^r \equiv a^r (\operatorname{mod} m),$$

де a^r може бути значно меншим, ніж a^s.

У цьому разі маємо $52 = 2^2 \cdot 13$, $\varphi(52) = 2^2 \cdot 13 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right) = 24$, $223 = 52 \cdot 4 + 15$, $2123 = 24 \cdot 88 + 11$.

Тоді $223^{2123} = (52 \cdot 4 + 15)^{24 \cdot 88 + 11} \equiv 15^{11} = 15^9 \cdot 15^2 = (15^3)^3 \cdot 225 \equiv (3375)^3 \cdot 17 \equiv (-5)^3 \cdot 17 = (-125) \cdot 17 \equiv (-21) \cdot 17 = -357 \equiv 7 (\operatorname{mod} 52)$.

Отже, 223^{2123} при діленні на 52 дає остачу 7.