Зразок екзаменаційного білету

(1) (4 бали) Знайти $\sqrt[4]{z}$ для комплексного числа z: $z = -72(1-\sqrt{3}i)$.

Запишемо в тригонометричній формі число $z = -72(1-\sqrt{3}i)$. Отже, $|z| = 72\sqrt{1+3} = 144$, $\begin{cases} cos\phi = \frac{-72}{144} = \frac{-1}{2}, \\ sin\phi = \frac{72\sqrt{3}}{144} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Звідси $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Тому $z = 144\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$. Отже,

$$\sqrt[4]{-72(1-\sqrt{3}i)} = \sqrt[4]{144}\left(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + isin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3.$$

$\omega_0 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{12} + isin\frac{2\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 3 + \sqrt{3}i,$

$\omega_1 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + 3i,$

$\omega_2 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{14\pi}{12} + isin\frac{14\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -3 - \sqrt{3}i,$

$\omega_3 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{20\pi}{12} + isin\frac{20\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 3i.$

(2) (3 бали) Обчислити: $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$

Обчислимо тригонометричні форми чисельника $z_1 = \sqrt{3} + i$ та знаменника $z_2 = 1 - i$. Оскільки $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$, а аргумент z_1 знаходимо з системи $\begin{cases} cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ sin\phi = \frac{1}{2}, \end{cases}$ тобто $\phi = \frac{\pi}{6}$, то

$$z_1 = 2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}).$$

Аналогічно $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ і з системи $\begin{cases} cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$ отримуємо $\phi = \frac{7\pi}{4}$, тобто

$$z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}).$$

При діленні двох комплексних чисел їхні модулі діляться, а аргументи віднімаються. Тому

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Звідси

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}\left(cos\left(30\cdot\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(30\cdot\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2^{15}\left(cos\left(\frac{25\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{25\pi}{2}\right)\right) =$$
$$= 2^{15}\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{15}(0 + 1i) = 2^{15}i.$$

(3) (4 бали) Нехай $f(x) = x^2 + 4x - 8$ многочлен.

Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Зауважимо, що $f(A) = A^2 + 4A - 8E$, де E - одинична матриця третього порядку. Обчислимо матрицю A^2, врахувавши, що $A^2 = A \cdot A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 & -5 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $4A$, для цього кожний елемент матриці A помножимо на число 4.

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 0 & 16 & -4 \\ -12 & 20 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо скалярну матрицю $8E$.

$$8E = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо $f(A) = A^2 + 4A - 8E$.

$$f(A) = \begin{pmatrix} -5 & 25 & -5 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 0 & 16 & -4 \\ -12 & 20 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 37 & 3 \\ 3 & 19 & -6 \\ -9 & 21 & -7 \end{pmatrix}.$$

(4) (6 балів) Розв'язати систему рівнянь методом Гауса, методом Крамера та матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$$

Розв'язок методом Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 12 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & -4 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 21 & -13 & 34 \\ 0 & 11 & -13 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 13 & -14 \\ 0 & 11 & -13 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 13 & -14 \\ 0 & 0 & 130 & -130 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає східчастій розширеній матриці

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6 \\ -x_2 + 13x_3 = -14 \\ 130x_3 = -130. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи $x_3 = -1$. Підставимо $x_3 = -1$ в друге рівняння та знайдемо $x_2 = 1$. Підставимо $x_3 = -1$ та $x_2 = 1$ в перше рівняння та знаходимо $x_1 = 2$.

Розв'язок методом Крамера. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 130, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 10 & 5 & 3 \\ -6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 260,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & -5 \\ 4 & 10 & 3 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 130, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 5 & 10 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -130.$

Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{260}{130} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{130}{130} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-130}{130} = -1.$

Розв'язок матричним способом. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

$X = A^{-1}B.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{65} & \frac{4}{65} & \frac{17}{65} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{21}{130} & \frac{11}{130} & -\frac{1}{65} \end{pmatrix}.$

Знайдемо розв'язок: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{16}{65} & \frac{4}{65} & \frac{17}{65} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{21}{130} & \frac{11}{130} & -\frac{1}{65} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(5) (3 бали) Ортогоналізувати систему векторів: $a_1 = (1,0,2,2), a_2 = (2,1,0,2), a_3 = (2,2,1,0)$.

$b_1 = a_1 = (1,0,2,2),$

$b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} b_1 = (2,1,0,2) - \frac{6}{9}(1,0,2,2) = \frac{1}{3}(4,3,-4,2),$

$b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} b_1 - \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} b_2 = (2,2,1,0) - \frac{4}{9}(1,0,2,2) - \frac{10/3}{15/3} \cdot \frac{1}{3}(4,3,-4,2) = \frac{1}{3}(2,4,3,-4).$

(6) (5 балів) З'ясувати, чи є лінійним перетворенням відображення φ, яке довільному вектору $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ простору $\mathbf{R}^3$ ставить у відповідність вектор $\varphi(\overrightarrow{x}) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - x_3, 3x_3 - x_1)$. Якщо φ - лінійне перетворення, то знайти його матрицю в тій самій базі, в якій задано координати векторів $\overrightarrow{x}$ і $\varphi(\overrightarrow{x})$.

Перевіримо виконання умов 1 і 2 з означення лінійного перетворення. Для цього розглянемо образ суми векторів $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, де $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$

$= ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), 3(x_3 + y_3) - (x_1 + y_1)) = (x_1 + y_1 + 2x_2 +$

$2y_2, x_1+y_1+x_2+y_2-x_3-y_3, 3x_3+3y_3-x_1-y_1)$.

Сумою образів векторів $\overrightarrow{x}$ та $\overrightarrow{y}$ є вектор $\varphi(\overrightarrow{x})+\varphi(\overrightarrow{y}) = (x_1+2x_2, x_1+x_2-x_3, 3x_3-x_1)+$ $+(y_1+2y_2, y_1+y_2-y_3, 3y_3-y_1) = (x_1+2x_2+y_1+2y_2, x_1+x_2-x_3+y_1+y_2-y_3, 3x_3-x_1+3y_3-y_1)$.

Оскільки $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ - дійсні числа, то, очевидно, що відповідні координати векторів $\varphi(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})$ та $\varphi(\overrightarrow{x})+\varphi(\overrightarrow{y})$ попарно рівні, тому $\varphi(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{x})+\varphi(\overrightarrow{y})$.

Нехай λ - довільне дійсне число. Тоді $\varphi(\lambda\overrightarrow{x}) = \varphi(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1 + 2\lambda x_2, \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3, 3\lambda x_3 - \lambda x_1) = \lambda(x_1+2x_2, x_1+x_2-x_3, 3x_3-x_1) = \lambda\varphi(\overrightarrow{x})$. Отже, φ - лінійне перетворення.

Знайдемо образи $\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \varphi(\overrightarrow{e_3})$ базових векторів і розкладемо їх за векторами бази $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$

$$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \varphi(1,0,0) = (1+2\cdot 0, 1+0-0, 3\cdot 0-1) = (1,1,-1),$$
$$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \varphi(0,1,0) = (0+2\cdot 1, 0+1-0, 3\cdot 0-0) = (2,1,0),$$
$$\varphi(\overrightarrow{e_3}) = \varphi(0,0,1) = (0+2\cdot 0, 0+0-1, 3\cdot 1-0) = (0,-1,2).$$

Матрицею A лінійного перетворення φ в базі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ буде матриця, стовпчиками якої є координати векторів $\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \varphi(\overrightarrow{e_3})$. Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(7) (5 балів) Звести матрицю лінійного перетворення до діагонального вигляду $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо власні значення лінійного перетворення як корені характеристичного многочлена

$$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Коренями цього многочлена будуть $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

Обчислимо відповідні власні вектори. Для $\lambda_1 = -1$ розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зводимо її матрицю до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 + 3y_1 + 2z_1 = 0, \\ y_1 + z_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є, наприклад, $x_1 = 1, y_1 = -2, z_1 = 2$. Аналогічно знаходимо інші власні вектори: $x_2 = 2, y_2 = -1, z_2 = -2; x_3 = 2, y_3 = 2, z_3 = 1$.

Для діагоналізації матриці A використаємо матрицю T, стовпцями якої є координатні стовпці власних векторів. Отже, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Знаходимо матрицю $T^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Звідси одержуємо

$$A^{'} = T^{-1}AT = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$