Задачі для самостійного розв'язування

1. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Виписати всі розміщення без повторень з елементів множини M по 3 елементи. Виписати всі сполучення без повторень з елементів множини M по 3 елементи.

2. Обчислити кількість перестановок множини $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, які закінчуються буквою a.

3. Обчислити значення:
   а) A_5^3; б) A_6^5; в) A_8^1; г) A_8^5; д) A_8^8; е) A_{10}^9.

4. Обчислити значення:
   а) C_5^1; б) C_5^3; в) C_8^4; г) C_8^8; д) C_8^0; е) C_{12}^6.

5. Скількома способами можна визначити призові місця (перше, друге, третє) у забігу 12 коней?

6. У групі є n чоловіків і n жінок. Скількома способами їх можна вишикувати в шеренгу так, щоб чергувалися чоловік і жінка?

7. Міста A та B з'єднано трьома різними дорогами. Скількома способами можна здійснити коловий рейс від A до B та від B до A, якщо, їдучи від B до A, обов'язково треба вибирати нову дорогу?

8. Дано множину $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$. Скільки існує розміщень без повторень з елементів множини M по 4 елементи, які містять:
   а) число 47;
   б) водночас числа 17 і 47;
   в) водночас числа 17, 47 та 73;
   г) водночас числа 17, 47, 73 та 97;
   д) три послідовні цілі числа у висхідному порядку?

9. Скількома способами можна розсадити шістьох осіб за круглим столом?

10. Скількома способами можна розсадити за круглим столом п'ятьох чоловіків і п'ятьох жінок, щоб двоє чоловіків не сиділи поруч?

11. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі можливі п'ятицифрові числа. Скільки серед них таких чисел:
    а) які починаються цифрою 3;
    б) не починаються цифрою 5;
    в) починаються з 54?

12. Дано натуральні числа від 1 до 31. Скількома способами можна вибрати з них три числа так, щоб їх сума була парним числом?

13. Скількома способами можна поставити на полицю 10 книжок:
    а) якщо серед них один тритомник, усі томи якого мають стояти поруч у довільному порядку;
    б) усі томи тритомника мають стояти поруч за зростанням номерів томів?

14. Скільки учасників у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожний учасник зіграв із кожним із решти, а всього відбулося 210 партій?

15. Скількома способами з колоди 52 карт можна вийняти 10 карт, щоб серед них були такі:

а) точно один туз;

б) принаймні один туз;

в) не менше двох тузів?

16. Скількома способами з 28 кісток доміно можна утворити пари кісток, які можна докласти одна до другої за правилами доміно?

17. Скількома способами можна вибрати пару однакових карт із колоди 36 карт?

18. Скількома способами можна вибрати пару з колоди 36 карт і одного джокера? (Джокер утворює пару з будь-якою картою.)

19. Скількома способами можна поселити дев'ять студентів у три кімнати гуртожитку, поселяючи їх по троє в кожній?

20. Скількома способами можна вибрати п'ять невпорядкованих елементів множини, що складається з трьох елементів, якщо повторення дозволені?

21. Скількома способами можна вибрати три невпорядкованих елементи множини, що складається з п'яти елементів, якщо повторення дозволені?

22. Скільки можна утворити різних рядків із шести букв алфавіту, який має 26 букв, якщо повторення дозволені?

23. Знайти кількість розв'язків наведених нижче рівнянь у невід'ємних цілих числах:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;

б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$

в) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ за умов $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \geq 5$.

24. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, де x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – невід'ємні цілі числа, причому:

а) $x_1 \geq 1$;

б) $x_j \geq 2$ для $j = 1, 2, 3, 4, 5$;

в) $0 \leq x_1 \leq 10$;

г) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$, $x_3 \geq 15$.

25. Знайти кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$.

26. Знайти кількість таких додатних цілих чисел, менших за 1 000 000, що сума їх цифр дорівнює 19.

27. Знайти кількість доданих цілих чисел, менших за 1 000 000, що мають точно одну цифру 9, і сума всіх їх цифр дорівнює 13.

28. Скільки різних рядків можна утворити зі слова MISSISSIPPI, використовуючи всі букви? Скільки таких рядків починаються та закінчуються буквою S? У скількох таких рядках усі 4 букви S стоять поспіль?

29. Знайти кількість бітових рядків довжиною n. Користуючись цим результатом, довести, що кількість підмножин множини з n елементів дорівнює 2^n.

30. Множина містить 100 елементів. Знайти кількість підмножин цієї множини, що містять більше одного елемента.

31. Скільки бітових рядків можна утворити з шести одиниць і восьми нулів?

32. Скільки бітових рядків, які складаються з чотирьох одиниць і 12 нулів, можна утворити, якщо кожний рядок обов'язково має починатися з одиниці та після кожної одиниці має бути принаймні два нулі?

33. Побудувати розклад:

а) $(x+y)^5$; б) $(x-y)^5$; в) $(x+y)^6$; г) $(x-y)^6$.

34. Визначити коефіцієнт:

а) при x^5y^8 у розкладі $(x-y)^{13}$;

б) при $x^{14}y^{11}$ у розкладі $(x-y)^{25}$.

35. Скільки членів у розкладі $(x+y)^{100}$?

У задачах 36 – 42 члени бінома пронумеровано від 1 до $n+1$:

$$(x \pm y)^n = \sum_{j=0}^{n} T_{j+1}, \text{ де } T_{j+1} = (\pm 1)^j C_n^j x^{n-j} y^j.$$

36. Визначити п'ятий член розкладу бінома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, якщо відношення коефіцієнта третього члена до коефіцієнта другого члена дорівнює 11/2.

37. У розкладі бінома $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$ коефіцієнт 3-го члена дорівнює 28. Визначити середній член розкладу.

38. Визначити найменше значення показника n у розкладі $(1+x)^n$, за якого відношення двох сусідніх коефіцієнтів дорівнює 7/15.

39. У розкладі бінома $(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}})^{15}$ визначити член, який не залежить від a.

40. Скільки раціональних членів міститься в розкладі $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

41. У розкладі бінома $(a\sqrt[5]{a/3} - b/\sqrt[7]{a^3})^n$ визначити член, що містить a^3, якщо сума біноміальних коефіцієнтів на непарних місцях у розкладі дорівнює 2048.

42. За якого значення n коефіцієнти другого, третього та четвертого членів розкладу бінома $(x+y)^n$ утворюють арифметичну прогресію?

43. Довести тотожність Паскаля $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ на основі алгебраїчних перетворень.

44. Нехай M – скінченна множина. Довести, що підмножин множини M із парною кількістю елементів стільки, скільки й підмножин із непарною кількістю елементів.

45. Довести, що $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^k)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

46. Довести біноміальну теорему алгебраїчно за допомогою математичної індукції.

47. Довести, що $C_n^r = P_n(r, n-r)$.

48. Записати розклад $(x+y+z)^4$.

49. Знайти коефіцієнт при $x^3y^2z^5$ у розкладі $(x+y+z)^{10}$.

50. Знайти кількість членів (доданків) у розкладі $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$.

51. Знайти лексикографічно наступну перестановку для кожної з перестановок: 1432; 54123; 12453; 45231; 6714235; 31528764.

52. Розмістити наведені перестановки елементів множини $\{1,2,3,4,5,6\}$ у лексикографічному порядку: 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612.

53. За допомогою алгоритму побудови лексикографічно наступної перестановки, записати перші 18 перестановок елементів множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

54. Задати взаємно однозначну відповідність між елементами множин $M = \{a, b, c, d, e\}$ та $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Побудувати перші 18 перестановок елементів множини M у лексикографічному порядку.

55. За допомогою алгоритму побудови лексикографічно наступного сполучення, виписати всі сполучення по чотири елементи множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

56. Задати взаємно однозначну відповідність між елементами множин $M = \{x, y, z, t, u\}$ та $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. За допомогою алгоритму виписати всі сполучення по три елементи множини M.

57. Описати алгоритм побудови розміщень по r елементів множини з n елементів. За його допомогою виписати всі розміщення по два елементи множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

58. Описати алгоритм побудови всіх розміщень по r елементів множини з n елементів, якщо повторення дозволені.

59. Описати алгоритм побудови всіх сполучень по r елементів множини з n елементів, якщо повторення дозволені.

60. Описати алгоритм побудови списку всіх розбиттів множини на непорожні частини. Виписати всі можливі розбиття множини $\{a, b, c, d\}$. Скільки їх?

61. Розв'язати наведені нижче рекурентні рівняння із заданими початковими умовами:

а) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n \ge 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$;

б) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $n \ge 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;

в) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $n \ge 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$;

г) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \ge 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$;

д) $a_n = a_{n-2}$, $n \ge 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$;

е) $a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, $n \ge 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = -4$;

ж) $a_n = -7a_{n-1} - 16a_{n-2} - 12a_{n-3}$, $n \ge 3$, $a_0 = 2$, $a_1 = 9$, $a_2 = 29$.

62. Дано неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$. Показати, що $a_n = -2^{n+1}$ – його частковий розв'язок. Знайти загальний розв'язок цього рекурентного рівняння. Знайти розв'язок за початкової умови $a_0 = 1$.

63. Дано неоднорідне рекурентне рівняння $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$. Визначити такі константи s та t, що $a_n = sn + t$ – його розв'язок. Знайти загальний розв'язок цього рекурентного рівняння. Знайти розв'язок за початкової умови $a_0 = 4$.

64. Є 12 знаків зодіаку. Скільки потрібно запросити людей, аби щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?

$\left\lceil \frac{N}{\ldots} \right\rceil = 6$ N = [illegible]

65. Скільки має бути людей, щоб обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?

66. Позначимо як M множину з десяти натуральних чисел, які не перевищують 50. Довести, що є принаймні дві різні п'ятиелементні підмножини множини M такі, що суми їх елементів рівні.

67. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10.000 елементів, кожна пара – 1000 спільних елементів, кожна трійка – 100 спільних елементів, кожна четвірка – 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?

68. За допомогою принципу включення – виключення в альтернативній формі визначити кількість простих чисел, що не перевищують 100.

69. Скільки розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, якщо x_1, x_2, x_3 – невід'ємні цілі числа, менші, ніж 6?

70. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, якщо x_1, x_2, x_3, x_4 – невід'ємні цілі такі, що $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, $x_3 \le 5$, $x_4 \le 8$.

71. Нехай D_n – кількість перестановок n об'єктів, з яких жодний не залишається в початковому положенні (задача про зміщення). Використавши комбінаторні міркування, довести, що послідовність (D_n) задовольняє таке рекурентне рівняння:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

72. Знайти твірні функції для сполучень із повтореннями, у яких кожний об'єкт зустрічається:

а) не менше двох разів;

б) не більше чотирьох разів;

в) не менше одного й не більше п'яти разів;

г) кількість разів, кратну трьом.

73. Знайти твірну функцію для сполучень з n об'єктів по r із повтореннями, у яких об'єкт A_i зустрічається не менше i разів. Дослідити випадок п'яти об'єктів A, B, C, D, E та записати всі такі сполучення.

74. Дано п'ять об'єктів A, B, C, D, E. Знайти твірні функції для сполучень із повтореннями (тут число x дає кількість появ об'єкта X у сполученні):

а) A, B, C зустрічаються парну кількість разів, а D, E – непарну;

б) a, b, c – непарні числа й $d + e \le 3$;

в) $a < b < c$;

г) $a \ge 2d$;

д) наявність A виключає B, але дозволяє наявність C у разі, якщо є D; наявність D виключає E.

75. Знайти кількість сполучень із чотирьох об'єктів A, B, C, D по десять із повтореннями, у яких кожний об'єкт зустрічається щонайменше 2 рази. Записати всі ці сполучення.

76. Записати твірні функції для розміщень з n елементів по r із повтореннями, у яких кожний елемент зустрічається:

а) не менше двох разів;

б) точно два рази;

в) не більше двох разів;

г) парну кількість разів;

д) непарну кількість разів.

77. Знайти твірну функцію для розміщень із чотирьох елементів A, B, C, D по r із повтореннями за умови, що кожний елемент зустрічається не більше двох разів. Записати ці розміщення.

78. Розглянемо p об'єктів A й q об'єктів B, розміщених на прямій так, що жодні два об'єкти B не стоять поспіль. Довести, що кількість таких упорядкованих $(p+q)$-вибірок дорівнює C_{p+1}^{q}.

79. Методом твірних функцій розв'язати однорідні рекурентні рівняння:

а) $a_n = 7a_{n-1}$, $a_0=5$;

б) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0=6$, $a_1=30$.

80. Методом твірних функцій розв'язати неоднорідні рекурентні рівняння:

а) $a_n = 3a_{n-1} + 2$, $a_0 = 1$;

б) $a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1}$, $a_0 = 1$.

Комп'ютерні проекти

Скласти програми із зазначеними вхідними даними та результатами

1. Задано натуральне число n. Побудувати в лексикографічному порядку всі перестановки елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Задано натуральне число n і невід'ємне ціле число r ($r \le n$). Побудувати в лексикографічному порядку всі r-сполучення без повторень з елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Задано натуральне число n і невід'ємне ціле число r ($r \le n$). Побудувати в лексикографічному порядку всі r-розміщення без повторень з елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Задано натуральне число n. Побудувати в лексикографічному порядку всі сполучення без повторень з елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

5. Задано натуральні числа n і r. Побудувати в лексикографічному порядку всі r-розміщення з повтореннями з елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Задано натуральні числа n і r. Побудувати в лексикографічному порядку всі r-сполучення з повтореннями з елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

7. Задане натуральне число n. Побудувати всі перестановки елементів множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, у яких жодний елемент не залишається у початковому положенні.

8. Задано послідовність, яка складається з натуральних чисел. Знайти найдовші зростаючу й спадну підпослідовності цієї послідовності.

9. Задано рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$, де r – ціла невід'ємна константа. Знайти всі розв'язки цього рівняння в невід'ємних цілих числах.