РОЗДІЛ 1. Множини і відношення. Функції

Тема 1. Множини. Поняття відношення

План лекції

- **Поняття множини і кортежу. Декартів добуток**
- **Булева алгебра множин**
- **Розбиття множини**
- **Доведення рівностей з множинами**
- **Поняття відношення на множині**

Об'єкти, які утворюють *множину*, називають її *елементами*. Про множину говорять, що вона *містить* ці елементи. Якщо об'єкт a є елементом множини A, то пишуть $a \in A$; а ні, то $a \notin A$. Синоніми: *сукупність, система, набір*.

Множину можна задати переліченням її елементів у фігурних дужках. Наприклад, множина $A=\{a, e, i, o, u\}$ містить елементи a, e, i, o, u й лише ці елементи. Множина не може містити двох однакових елементів, а порядок її елементів не фіксують.

Для часто використовуваних множин є спеціальні позначення:

$\varnothing$ – *порожня* множина, яка не містить жодного елемента;

Z – множина *цілих чисел*, $Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

R – множина дійсних чисел;

N – множина *натуральних чисел*, $N=\{1, 2, \ldots\}$;

N_0 – множина *натуральних чисел із числом* 0, $N_0=\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Задати множину можна, зазначивши спільну властивість усіх її елементів. Тоді множину A задають за допомогою позначення $A=\{x \mid P(x)\}$, яке читають так: „A – це множина об'єктів x, які мають властивість $P(x)$". Наприклад, $A=\{x \mid x \in N_0, x<7\}$ – це множина $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Дві множини A та B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Рівність множин A та B записують як $A=B$.

Множину A називають *підмножиною* множини B, якщо кожний елемент множини A належить множині B. У такому разі пишуть $A \subset B$, причому це не виключає, що $A=B$. Якщо $A=B$ або $A=\varnothing$, то A називають *невласною* підмножиною множини B. Якщо $A \neq B$ і $A \neq \varnothing$, то A називають *власною* підмножиною множини B. Для будь-якої множини A правдиве включення $\varnothing \subset A$.

Зазначимо, що в літературі іноді використовують позначення $A \subseteq B$; тоді позначення $A \subset B$ резервують для випадку, коли $A \subseteq B$ і $A \neq B$.

Множини бувають скінченними й нескінченними. *Скінченною* називають множину, для якої існує натуральне число, що дорівнює кількості її елементів. Множину, яка не є скінченною, називають *нескінченною*. Якщо множина A скінченна, то кількість її елементів позначають як $|A|$ і називають *потужністю*. Поняття потужності вводять і для нескінченних множин, але ми не будемо розглядати його.

Часто всі розглядувані в певній ситуації множини являють собою підмножини якоїсь множини, яку називають *універсальною множиною* або *універсумом*. Універсальну множину позначають як U.

Множини можна зображати графічно за допомогою *діаграм Венна*, які запровадив 1881року англійський математик Дж. Венн (J. Venn). Універсальну множину позначають прямокутником, а всі інші множини – кругами в ньому.

Для заданої множини A можна розглянути множину всіх її підмножин, включно з порожньою множиною $\varnothing$ і самою множиною A. Цю множину позначають 2^A чи $P(A)$ й називають *множиною-степенем*, або *булеаном* множини A. Для скінченної множини A множина 2^A містить $2^{|A|}$ елементів.

Приклад. Нехай $A=\{0, 1, 2\}$. Тоді $2^A=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\} \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. Ця множина містить $2^3 = 8$ елементів.

Кортеж – це впорядкований набір елементів. Сказане не слід розглядати як означення кортежу, оскільки тоді потрібно дати пояснення з приводу його синоніма «впорядкований набір». Поняття «кортеж» (синоніми – *вектор*, *рядок*, *ланцюжок*, *слово*) уважатимемо, як і поняття множини, первісним, тобто неозначуваним. Елементи, що утворюють кортеж, називають його *компонентами*. Компоненти нумерують, кількість компонент називають *довжиною* або *розмірністю* кортежу. Нескінченні кортежі не розглядатимемо.

На відміну від елементів множини, компоненти кортежу можуть повторюватись. Кортеж записують у круглих дужках, наприклад (a, b, c, a, d) – кортеж довжиною 5. Іноді дужки й навіть коми не пишуть, наприклад кортеж 011001. Кортежі довжиною 2 часто називають *парами*, довжиною 3 – *трійками*. Кортежі довжиною n іноді називають *n-ками* («*енками*»).

Два кортежі рівні, якщо вони мають однакову довжину та відповідні їх компоненти рівні. Іншими словами, кортежі $(a_1, \ldots, a_m)$ *та* $(b_1, \ldots, b_n)$ *рівні, якщо* $m = n$ *та* $a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_m=b_n$.

Декартовим добутком множин A та B (позначають $A\times B$) називають множину всіх пар (a, b) таких, що $a\in A$, $b\in B$. Зокрема, якщо $A=B$, то обидві компоненти належать A. Такий добуток позначають як A^2 та називають *декартовим квадратом* множини A. Аналогічно, декартовим добутком n множин $A_1, \ldots, A_n$ (позначають $A_1\times\ldots\times A_n$) називають множину всіх кортежів $(a_1, \ldots, a_n)$ довжиною n таких, що $a_1\in A_1, \ldots, a_n\in A_n$. Частковий випадок $A\times\ldots\times A$ позначають як A^n і називають *n-м степенем* множини A.

Приклад. Нехай $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$. Тоді $A\times B=\{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$, $B\times A=\{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$. Зрозуміло, що загалом $A\times B\neq B\times A$.

Для скінченних множин потужність (кількість елементів) декартового добутку дорівнює добутку потужностей цих множин: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

Приклад. Нехай $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{x, y\}$. Тоді

$A\times B\times C=\{(1,a,x), (1,a,y), (1,b,x), (1,b,y), (1,c,x), (1,c,y), (2,a,x), (2,a,y), (2,b,x), (2,b,y), (2,c,x), (2,c,y)\}$

Булева алгебра множин

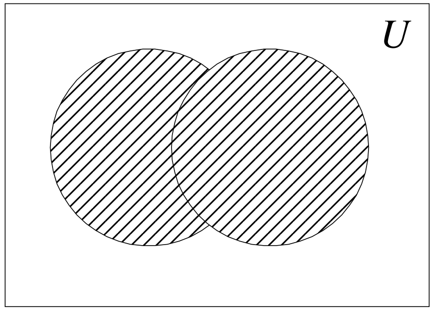
Будемо вважати, що всі розглядувані множини – підмножинами деякого універсума U. Для довільних множин A та B можна побудувати нові множини за допомогою *теоретико-множинних операцій*:

об'єднанням множин A та B називають множину $A\cup B=\{\, x \mid (x\in A)$ або $(x\in B)\}$;

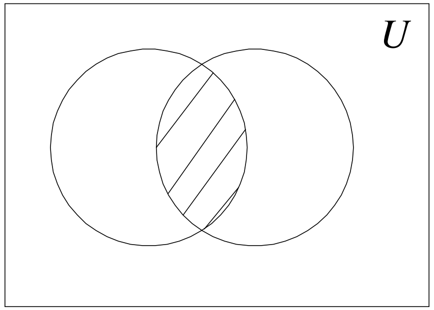
перетином множин A та B називають множину $A\cap B=\{\, x \mid (x\in A)$ і $(x\in B)\}$;

різницею множин A та B називають множину $A\backslash B=\{\, x \mid (x\in A)$ і $(x\notin B)\}$;

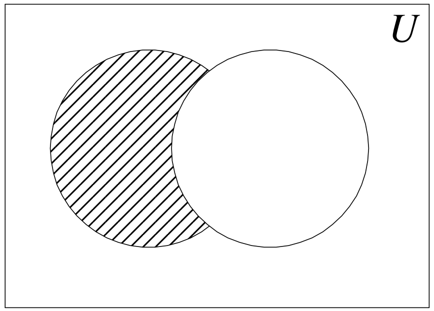
доповненням множини A називають множину $\overline{A}=U\backslash A$, де U – універсальна множина.



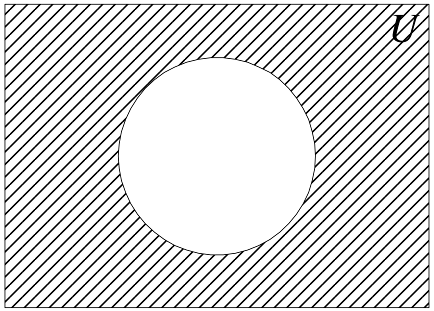
$A\cup B$



$A\cap B$



$A\setminus B$



$\overline{A}$

Основні закони для операцій з множинами

	Назва закону	Формулювання закону
1	Закони комутативності	*а*) $A\cup B=B\cup A$ *б*) $A\cap B=B\cap A$
2	Закони асоціативності	*а*) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ *б*) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3	Закони дистрибутивності	*а*) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ *б*) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4	Закон подвійного доповнення	$\overline{(\overline{A})}=A$
5	Закони ідемпотентності	*а*) $A\cap A=A$ *б*) $A\cup A=A$
6	Закони де Моргана	*а*) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ *б*) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
7	Закони поглинання	*а*) $A\cap(A\cup B)=A$ *б*) $A\cup(A\cap B)=A$
8	Закони тотожності	*а*) $A\cup\varnothing=A$ *б*) $A\cap U=A$
9	Закони домінування	*а*) $A\cup U=U$ *б*) $A\cap\varnothing=\varnothing$
10	Закони доповнення	*а*) $A\cup\overline{A}=U$ *б*) $A\cap\overline{A}=\varnothing$

Представимо тепер теорію, формули якої побудовані із змінних за допомогою трьох операцій, які є аналогами $\cap$, $\cup$ та доповнення $\setminus$ (до U) і аналогів U (універсальна множина) і $\varnothing$ (порожня множина). Якщо формули з наведеної таблиці залишаються правильними при заміні $\cap$, $\cup$, $\setminus$, U, $\varnothing$ на їхні аналоги, то ми матимемо нову абстрактну алгебру, яку називають *алгеброю Буля*.

Отже, алгебра множин – це приклад алгебри Буля.

Існують і інші булеві алгебри.

Розбиття множини

Систему $S=\{A_i\}$ ($i\in I$, де I – множина індексів) підмножин множини A називають *розбиттям* множини A якщо:

1) $A_i \neq \varnothing$ для всіх $i\in I$;

2) $A_i \cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$;

3) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

Інакше кажучи, система S непорожніх підмножин множини A являє собою розбиття цієї множини, якщо будь-який елемент $a\in A$ належить точно одній множині A_i із системи S.

Приклад. $A=\{a,b,c\}$. Ось (всі) різні розбиття множини A.

$$S_1=\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\qquad S_2=\{\{a,b\},\{c\}\},\qquad S_3=\{\{a\},\{b,c\}\},$$

$$S_4=\{\{a,c\},\{b\}\},\qquad S_5=\{\{a,b,c\}\}.$$

Доведення рівностей з множинами

Спосіб 1. Цей спосіб ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Множини A і B рівні тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ та $B \subset A$.

Приклад. Доведемо рівність множин, яка являє собою формулювання закону де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Припустимо, що $x \in \overline{A \cap B}$. Тоді $x \notin A \cap B$, звідки випливає, що $x \notin A$ або $x \notin B$. Отже $x \in \overline{A}$ або $x \in \overline{B}$, а це означає, що $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Ми довели, що $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Навпаки, нехай $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тоді $x \in \overline{A}$ або $x \in \overline{B}$, звідки випливає, що $x \notin A$ або $x \notin B$. Це означає, що $x \notin A \cap B$, тобто $x \in \overline{A \cap B}$. Отже $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Спосіб 2. Доведення рівності множин за допомогою *таблиць належності*. Ці таблиці містять усі можливі комбінації належності елементів множинам (1 – елемент належить множині, 0 – не належить).

Приклад. Доведемо цим способом рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Доведення подано в таблиці.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Стовпчики, які у таблиці позначено $\overline{A \cap B}$ та $\overline{A} \cup \overline{B}$, однакові, отже $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Спосіб 3. Доведення рівності множин з використанням основних законів, яким задовольняють теоретико-множинні операції.

Приклад. Довести тотожність $\overline{A\cup(B\cap C)}=(\overline{C}\cup\overline{B})\cap\overline{A}$. Використовуючи закони де Моргана та комутативності, можна записати таку послідовність рівних множин:

$\overline{A\cup(B\cap C)}=\overline{A}\cap\overline{(B\cap C)}=$	за законом де Моргана 6*а*
$=\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=$	за законом де Моргана 6*б*
$=(\overline{B}\cup\overline{C})\cap\overline{A}=$	за законом комутативності 1*б*
$=(\overline{C}\cup\overline{B})\cap\overline{A}$	за законом комутативності 1*а*.

Поняття відношення на множині

Найпростіший спосіб задати зв'язок між елементами двох множин – записати впорядковані пари елементів, що перебувають у цьому зв'язку. Нехай A та B – множини.

Бінарне відношення з множини A в множину B **– це підмножина *R* декартового добутку $A\times B$ цих множин: $R\subset A\times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з *A* в *B* – це якась множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині *A*, а другий – множині *B*. Якщо $(a, b)\in R$, то в контексті відношень часто пишуть *aRb*.**

Бінарні відношення описують зв'язки між елементами двох множин. Зв'язки між елементами більше ніж двох множин задають n-арними відношеннями. Розглядаючи в певному контексті лише бінарні відношення, уживають термін „*відношення*" замість „бінарне відношення".

Приклад. Нехай $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{a, b\}$ та задано відношення $R=\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$. Отже, $0Ra$, оскільки $(0, a)\in R$, а $(1, b)\notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови $A=B$.

Відношенням на множині A **називають бінарне відношення з A в A. Інакше кажучи, відношенням R на множині A – це підмножина декартового квадрату множини A, тобто $R \subset A^2$.**

Приклад. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}?$$

Очевидно, що $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Подання відношень матрицями та орієнтованими графами

Бінарне відношення на множині A можна подати за допомогою булевої матриці або орієнтованого графа.

Булевою **називають матрицю, елементи якої – нулі та одиниці.**

Матриця, яка задає відношення R на n-елементній множині A, – це булева $n\times n$ матриця $M_R=[m_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, \text{ якщо } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

Орієнтований граф **складається із множини V *вершин* і множини E *дуг*; кожна *дуга* – це упорядкована пара вершин із V. Якщо (a, b) – дуга, то вершину a називають *ініціальною* (або *початковою*), а вершину b – *термінальною* (або *кінцевою*) вершиною дуги. Дугу (a, a), яка має ініціальною й термінальною одну й ту саму вершину a, називають *петлею*.**

Граф G_R, який задає відношення R на множині A, будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j) існує тоді й лише тоді, коли пара $(a_i, a_j) \in R$. Такий граф G_R називають *графом, асоціййованим із відношенням R*, або просто *графом відношення R*.

Приклад. На рисунку зображено матрицю та граф, які задають відношення *ділить*

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$

з попереднього прикладу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$