# Тема 22. . Відношення часткового порядку. Застосування в інформаційних технологіях

## План лекції

- Відношення часткового порядку
- Діаграма Гассе
- Максимальні та мінімальні елементи
- Решітки
- Решіткова модель інформаційного потоку
- Топологічне сортування

## ***Відношення часткового порядку***

Ми дуже часто використовуємо відношення для упорядкування якихось чи всіх елементів множини. Наприклад, ми упорядковуємо слова, використовуючи відношення, яке складається з пар слів $(x, y)$, де $x$ є перед $y$ у словнику. Ми плануємо проєкти використовуючи відношення, що містить пари $(x, y)$, де $x$ та $y$ – це завдання проєкту такі, що $x$ має бути завершеним до початку $y$. Ми впорядковуємо множину цілих чисел, використовуючи відношення, яке містить пари $(x, y)$, де $x$ менше $y$. Коли ми в будь-яке з цих відношень додамо **всі пари** виду $(x, x)$, то отримаємо відношення яке є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

***Ці властивості як раз і характеризують відношення, які використовують для упорядкування елементів множини.***

---

Відношення $R$ на множині $A$ називають *відношенням часткового порядку* (або *частковим порядком*), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне. Множину $A$ з частковим порядком $R$ називають *частково впорядкованою множиною* й позначають $(A, R)$.

---

**Приклад 1.** Нехай $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Відношення $R$ задамо як звичайне порівняння чисел: $(a, b)\in R$ тоді й лише тоді, коли $a \le b$ ($a, b\in A$). Неважко безпосередньо переконатись, що це частковий порядок на множині $A$.

**Приклад 2.** Нехай $A$ – множина з прикладу 1. Відношення $R_1$ задамо так: $(a, b)\in R_1$ тоді й лише тоді, коли $a$ ділить $b$. Отже: $R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 12), (3, 6), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12)\}$.

Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині $A$.

Два елементи $a$ та $b$ частково впорядкованої множини $(A, R)$ називають *порівнюваними*, якщо $aRb$ або $bRa$. Якщо $a$ та $b$ – такі елементи, що ні $aRb$, ні $bRa$, то їх називають *непорівнюваними*.

**Приклад 3.** Елементи 3 та 4 множини $(A, R_1)$ із прикладу 2 – непорівнювані.

Якщо $(A, R)$ – частково впорядкована множина, у якій будь-які два елементи порівнювані, то її називають *лінійно*, або *тотально впорядкованою*, а частковий порядок $R$ – *лінійним*, або *тотальним* порядком.

Отже, множина $(A, R)$ із прикладу 1 лінійно впорядкована, множина $(A, R_1)$ із прикладу 2 частково впорядкована, але не лінійно впорядкована. Лінійно впорядковану множину називають також *ланцюгом*.

**Приклад 4.** Нехай $A = E_2^n$ – множина всіх векторів довжиною $n$ з булевими компонентами (тобто з компонентами 0, 1). Задамо частковий порядок на цій множині так: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ тоді й лише тоді, коли $a_i \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Цей частковий порядок не лінійний. Наприклад, не можна порівняти вектори (010000) і (101000).

Наступний приклад ілюструє відношення, яке не є частковим порядком.

**Приклад 5.** Нехай $R$ – відношення на множині людей таке, що $xRy$ якщо і тільки якщо $x$ молодший ніж $y$. Покажемо, що це відношення не є частковим порядком. Зазначимо, відношення $R$ <u>антисиметричне</u>, бо якщо людина $x$ молодша ніж людина $y$, то людина $y$ не є молодшою $x$. Отже, коли $(x, y) \in R$, то $(y, x) \notin R$. Відношення $R$ <u>транзитивне</u>, бо коли людина $x$ молодша $y$, а $y$ молодша $z$, то $x$ молодша $z$. Отже, коли $xRy$ і $yRz$, то $xRz$. Проте, відношення $R$ <u>не рефлексивне</u>, Бо людина не може бути молодшою від самої себе. Отже, $(x, x) \notin R$ для всіх людей $x$. Із цього випливає, що $R$ не є відношенням часткового порядку.

## *Лексикографічний порядок*

Слова в словнику розташовують у словниковому, або *лексикографічному* порядку, який ґрунтується на впорядкованості букв алфавіту.

Лексикографічний порядок можна визначити на декартовому добутку $n$ частково впорядкованих множин $(A_1, \le_1)$, $(A_2, \le_2)$, …, $(A_n, \le_n)$. Визначимо частковий порядок $\le$ на $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ так:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) < (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

якщо $a_1 <_1 b_1$, або є ціле $i > 0$ таке, що $a_1 = b_1$, …, $a_i = b_i$, але $a_{i+1} <_{i+1} b_{i+1}$.

Визначимо тепер лексикографічний порядок рядків (слів). Припустімо, що маємо рядки, компонентами яких є елементи лінійно впорядкованої множини $S$:

$$a_1 a_2 \ldots a_m \text{ і } b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Нехай $t = \min(m, n)$. Тоді $a_1 a_2 \ldots a_m$ менше $b_1 b_2 \ldots b_n$ якщо і тільки якщо

$$a_1 a_2 \ldots a_t < b_1 b_2 \ldots b_t, \text{ або}$$

$$a_1 a_2 \ldots a_t = b_1 b_2 \ldots b_t \text{ та } m < n.$$

Наприклад, *похід* < *похідна*.

## Діаграма Гассе

Зробимо таке спостереження. Багато дуг в орієнтованому графі для скінченної впорядкованої множини можна не зображати, бо вони присутні обов'язково. Наприклад, розглянемо орієнтований граф для відношення часткового порядку $\{(a,b) \mid a \le b\}$ на множині $\{1, 2, 3, 4\}$, який зображено на рис. 1(a). Оскільки це відношення – частковий порядок, то воно рефлексивне, і його граф має петлі у всіх вершинах. На рис. 1(b), петлі не показані. Тому що відношення часткового порядку транзитивне, ми можемо не показувати дуги, наявність яких зумовлена властивістю транзитивності. На рис. 1(c) дуги (1, 3), (1, 4) і (2, 4) не показано, бо вони мають бути присутні. Якщо ми домовимось, що всі дуги «спрямовані вверх» (як це показано на рисунку), то стрілки можна не ставити, на рис. 1(c) стрілок немає.

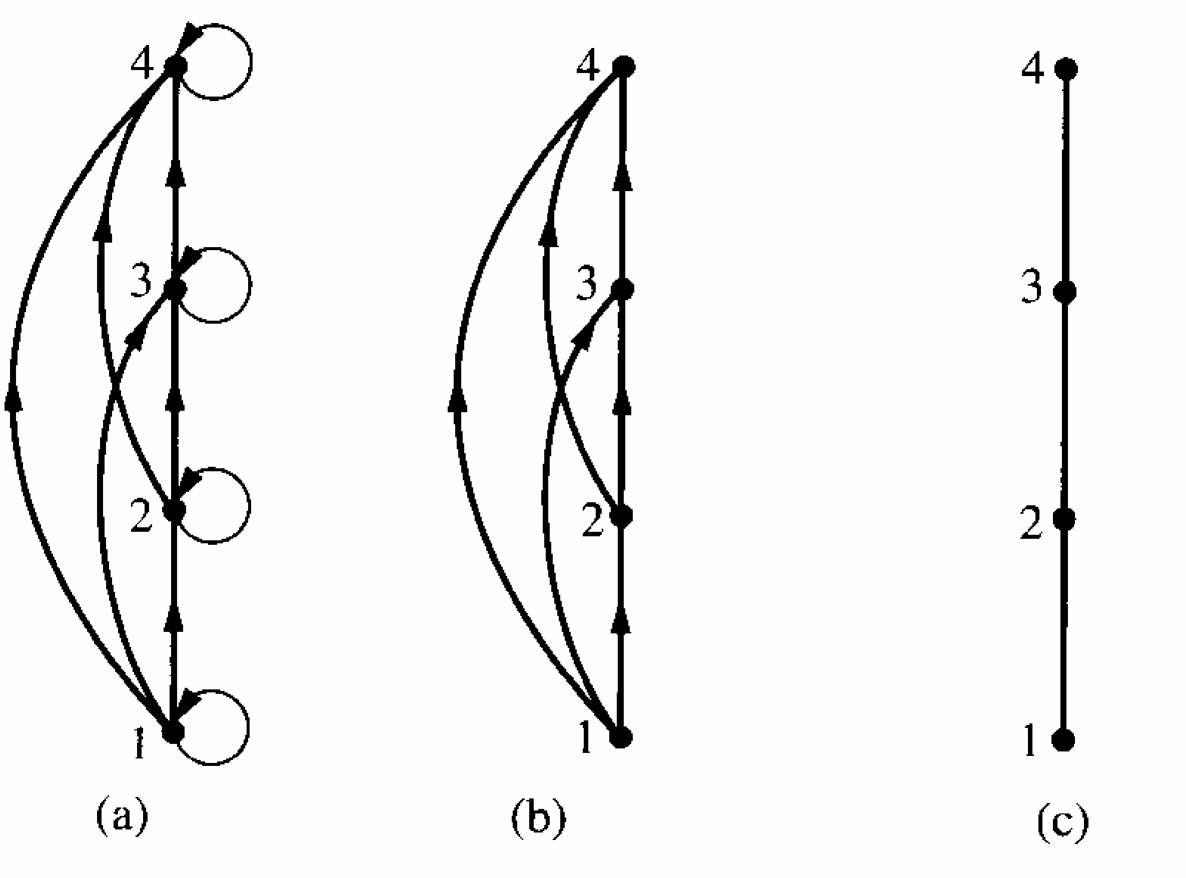


**Рис. 1. Побудова діаграми Гассе для ({1, 2, 3, 4}, ≤)**

Усі ці кроки коректно визначені й у випадку скінченної множини $A$ потрібна тільки скінченна кількість таких кроків. У результаті отримують *діаграму Гассе* (*Helmut Hasse*), яка містить усю інформацію, потрібну для подання відношення часткового порядку.

**Приклад 6.** Побудуємо діаграму Гассе для відношення часткового порядку «ділить» на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Почнемо з орієнтованого графа, асоційованого з відношенням $R_1$ (рис. 2(a)). Вилучимо всі петлі (рис. 2(b)), а потім – усі дуги, зумовлені властивістю транзитивності, це дуги (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 8), (2, 12), (3, 12). Переконаємося, що напрямок всіх дуг – знизу вверх, і усунемо стрілки. Отримаємо діаграму Гассе. (рис. 2(c)).

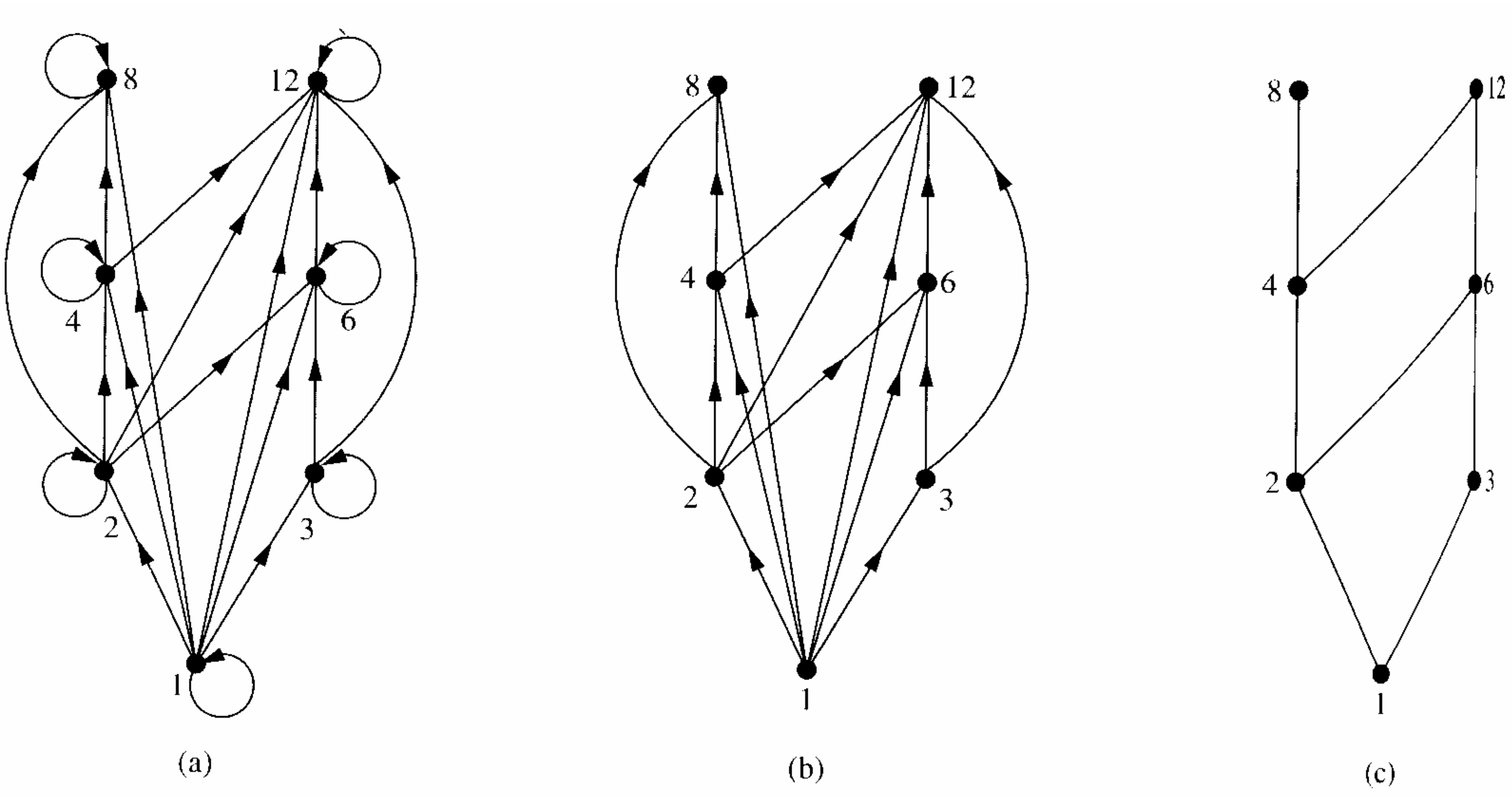


**Рис. 2. Побудова діаграми Гассе для ({1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, |)**

Гельмут Гассе
(Helmut Hasse)
1898 – 1979 рр.
Народився в Німеччині, м. Кассель.

**ВАЖЛИВО!!!**

Символом $\leq$ часто позначають довільне відношення часткового порядку: у частково впорядкованій множині $(A, R)$ запис $a \leq b$ означає, що $(a, b) \in R$. Довільну частково впорядковану множину часто позначають як $(A, \leq)$. Використовують також запис $a < b$, який означає, що $a \leq b$, але $a \neq b$. Коли $a < b$, то кажуть, що *a передує b* ($a$ менше, ніж $b$) або *b виходить з a* ($b$ більше ніж $a$). Елемент $b \in A$ *безпосередньо виходить* з $a \in A$ тоді й лише тоді, коли $a < b$ і не існує такого елемента $u \in A$, що $a < u < b$. У такому разі також елемент *a безпосередньо передує* елементу $b$.

Є алгоритм, який дає змогу побудувати діаграму Гассе для частково впорядкованої множини без використання графа відношення. Цей алгоритм ґрунтується на такій властивості. Нехай $(A, R)$ – скінченна частково впорядкована множина; тоді $a_1 < a_n$ у тому й лише тому разі, якщо існує послідовність $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, у якій $a_{i+1}$ безпосередньо виходить з $a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Зобразимо кожний елемент $a_i \in A$ точкою $a_i$ на площині й розглянемо всі впорядковані пари $(a_i, a_j)$. Точку $a_j$ розмістимо вище точки $a_i$ тоді й лише тоді, коли $a_i < a_j$, і з'єднаємо точки $a_i$ та $a_j$ лінією, якщо $a_j$ безпосередньо виходить з $a_i$. Одержимо діаграму Гассе; у ній існує шлях, який веде від точки $a_n$ до точки $a_m$, якщо $a_n < a_m$.

## *Максимальні та мінімальні елементи.*

Елементи частково впорядкованих множин, які мають певні екстремальні властивості, дуже важливі в багатьох застосуваннях. Елемент частково впорядкованої множини називають *максимальним*, якщо він не менший за будь-який елемент цієї множини. Отже, $a$ – максимальний елемент частково впорядкованої множини $(A, \leq)$, якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $a < b$. Аналогічно, елемент називають *мінімальним*, якщо він не більший за будь-який елемент частково впорядкованої множини. Отже, елемент $a$ – мінімальний, якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $b < a$. Максимальні та мінімальні елементи легко визначити на діаграмі Гассе: це, відповідно, „верхні” й „нижні” її елементи (для „верхніх” елементів немає висхідних ребер, а „нижніх” – низхідних).

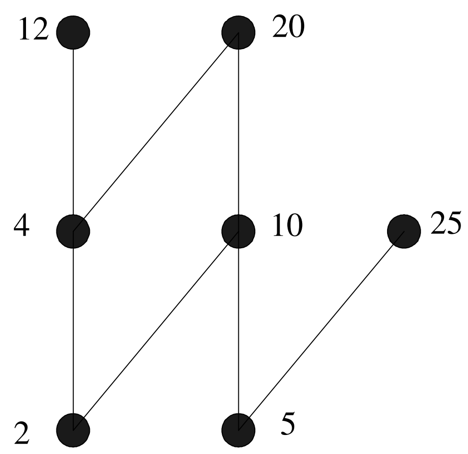


**Рис. 3. Діаграма Гассе для ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |)**

**Приклад 7.** Знайдемо максимальні й мінімальні елементи частково впорядкованої множини ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |). Діаграму Гассе для цієї множини зображено на рис. 3. Із неї доходимо висновку, що максимальні елементи – 12, 20 і 25, а мінімальні – 2 та 5.

Цей приклад свідчить, що частково впорядкована множина може мати більше одного максимального чи мінімального елемента.

Іноді існує елемент частково впорядкованої множини, який більший за будь-який інший елемент. Такий елемент називають найбільшим елементом. Отже, $a$ – *найбільший елемент* частково впорядкованої множини $(A, \leq)$, якщо $b \leq a$ для всіх $b \in A$. Найбільший елемент, якщо він існує, – єдиний. Аналогічно, елемент називають найменшим, якщо він менший за будь-який інший елемент частково впорядкованої множини. Це означає, що $a$ – *найменший елемент* $(A, \leq)$, якщо $a \leq b$ для всіх $b \in A$. Найменший елемент єдиний, якщо він існує.

**Приклад 8.** Визначити, чи мають частково впорядковані множини, репрезентовані діаграмами на рис. 4, найбільший елемент і найменший елемент.

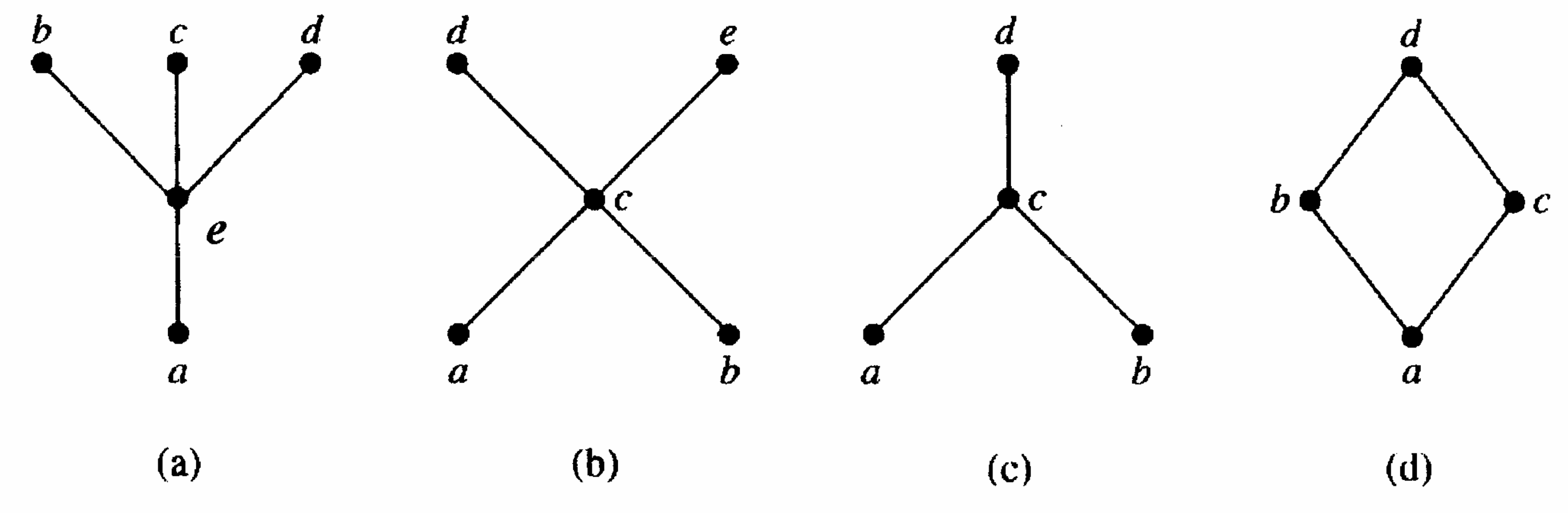


**Рис. 4. Діаграми Гассе для чотирьох частково впорядкованих множин**

Найменший елемент частково впорядкованої множини (a) – це $a$. Ця множина не має найбільшого елемента. Частково впорядкована множина (b) не має ні найменшого, ні найбільшого елемента. Множина (c) не має найменшого елемента; її найбільший елемент – це $d$. Множина з діаграмою Гассе (d) має найменший елемент $a$ і найбільший елемент $d$.

Іноді можливо знайти елемент, який більше (або дорівнює) всіх елементів підмножини $B$ частково впорядкованої множини $(A, \leq)$. Якщо $u$ – елемент $A$ такий, що $b \leq u$ для всіх елементів $b \in B$, то $u$ називають *верхньою гранню* підмножини $B$. Аналогічно, може бути елемент менший або рівний ніж усі елементи підмножини $B$. Якщо $l$ – елемент множини $A$ такий, що $l \leq b$ для всіх елементів $b \in B$, то $l$ називають *нижньою гранню* підмножини $B$.

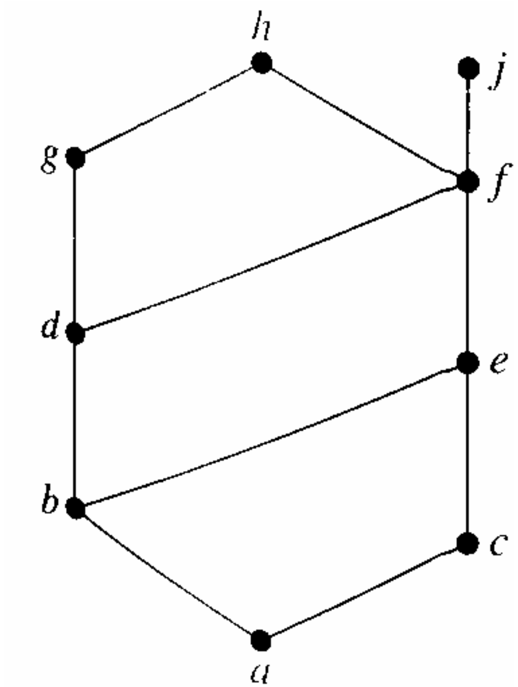


**Рис. 5. Діаграма Гассе для частково впорядкованої множини**

**Приклад 9.** Знайдемо нижні та верхні грані підмножин $\{a, b, c\}$, $\{j, h\}$ та $\{a, c, d, f\}$ частково впорядкованої множини з діаграмою Гассе, зображеною на рис. 5. Верхні грані підмножини $\{a, b, c\}$ – це $e$, $f$, $j$ та $h$, але ї тільки одна нижня грань – $a$. Підмножина $\{j, h\}$ немає жодної верхньої грані, а її нижні грані – $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ та $f$. Верхні грані $\{a, c, d, f\}$ – $f$, $h$ та $j$, а її нижня грань – тільки $a$.

Елемент $x$ називають *найменшою верхньою гранню* підмножини $B$, якщо $x$ є верхньою гранню, меншою за будь-яку іншу верхню грань $B$. Очевидно, найменша верхня грань єдина, якщо вона існує. Отже, $x$ є найменшою верхньою гранню підмножини $B$, якщо $b \le x$ – коли $b \in B$, і $x \le z$ – коли $z$ є верхньою гранню $B$. Аналогічно, елемент $y$ називають *найбільшою нижньою гранню* підмножини $B$, якщо $y$ є нижньою гранню $B$ і $z \le y$ для будь-якої нижньої грані $z$ підмножини $B$. Найбільша нижня грань єдина, якщо вона існує.

Найменшу верхню грань підмножини $B$ позначають як lub(B), а найбільшу нижню – як glb(B).

**Приклад 10.** Знайдемо найбільшу нижню грань і найменшу верхню грань, якщо вони існують, підмножини $\{b, d, g\}$ частково впорядкованої множини з рис. 5. Верхні грані $\{b, d, g\}$ – це $g$ та $h$. Тому що $g < h$, $g$ є найменшою верхньою гранню. Нижні грані $\{b, d, g\}$ – $a$ та $b$. Оскільки $a < b$, то $b$ – найбільша нижня грань.

## Решітки

Частково впорядковану множину, у якій кожна пара елементів має як найменшу верхню, так і найбільшу нижню грані, називають *решіткою*. Решітки мають багато спеціальних властивостей. Більше того, решітки використовують у багатьох різних застосуваннях, таких як моделювання інформаційних потоків і відіграє важливу роль у булевій алгебрі.

Далі розглянемо приклади.

**Приклад 11.** Визначимо, чи є решітками частково впорядковані множини, які подано діаграмами на рис. 6.

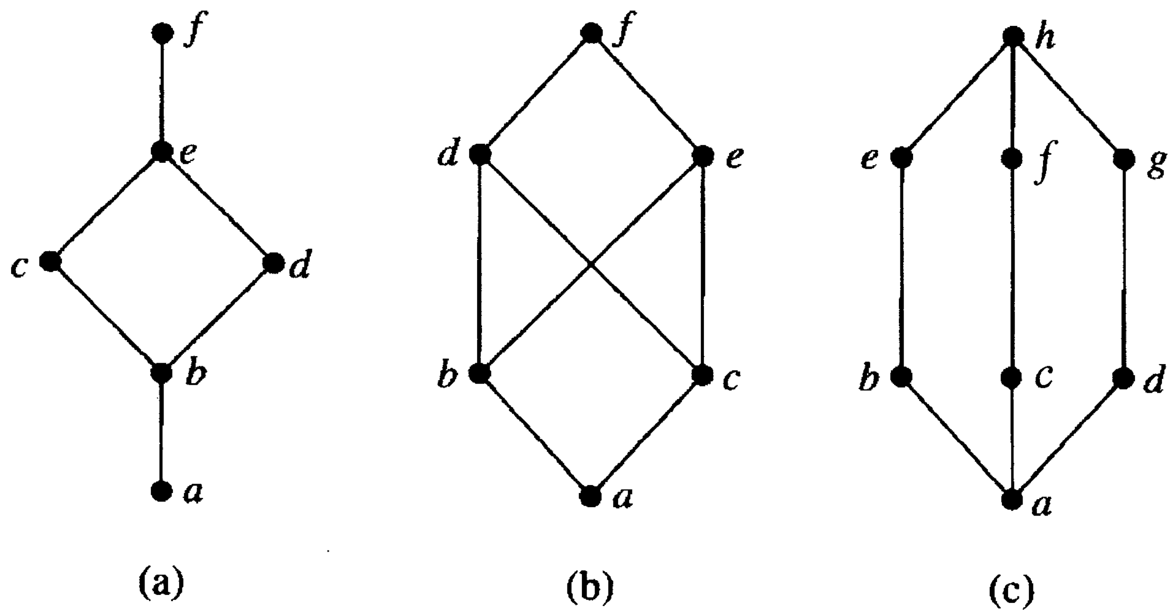


**Рис. 6. Діаграми Гассе для трьох частково впорядкованих множин**

Частково впорядковані множини, подані діаграмами (a) і (c) – решітки, бо в цих множинах кожна пара елементів має як найменшу верхню, так і найбільшу нижню грані. (Цей факт пропонується перевірити самостійно.) З іншого боку, частково впорядкована множина з діаграмою Гассе (b) не є решіткою, бо пара елементів $b$ та $c$ не має найменшої верхньої грані. Щоб це побачити, зауважимо, що кожний з елементів $d$, $e$ та $f$ є верхньою гранню, але жодний з цих трьох елементів не є меншим порівняно з двома іншими.

**Приклад 12.** Визначимо чи є решіткою частково впорядкована множина ($\boldsymbol{N}$, |), де $\boldsymbol{N}$ – множина натуральних (цілих додатних) чисел. Нехай $a$ та $b$ – два додатних цілих числа. Найменша верхня грань і найбільша нижня грань цих двох чисел – це найменше спільне кратне і найбільший спільний дільник цих цілих, відповідно (цей факт пропонується перевірити самостійно). Отже, ця частково впорядкована множина – решітка.

**Приклад 13.** Визначимо, чи є решітками частково впорядковані множини ({1, 2, 3, 4, 5}, |) та ({1, 2, 4, 8, 16}, |). Оскільки 2 і 3 не мають жодної верхньої грані в ({1, 2, 3, 4, 5}, |), то вони не мають і найменшої верхньої грані. Отже, перша частково впорядкована множина не є решіткою.

Кожні два елементи другої частково впорядкованої множини мають як найменшу верхню, так і найбільшу нижню грані. Найменша верхня грань двох елементів цієї частково впорядкованої множини – це найбільший елемент, а найбільша нижня грань двох елементів – це найменший елемент. Отже, друга множина – решітка.

## Решіткова модель інформаційного потоку

У багатьох випадках потік інформації від однієї людини або комп'ютерної програми до іншої обмежують з міркувань безпеки. Ми можемо використовувати решітку як модель для представлення різних політик організації безпеки інформаційного потоку. Наприклад, одну з таких політик – *багаторівневу політику безпеки* – використовують в урядових і військових системах США. Кожній частині інформації присвоєно *клас безпеки*, і кожен клас безпеки представлено парою ($A$, $C$), де $A$ – *рівень повноважень*, $C$ – *категорія*. Людям і комп'ютерним програмам дозволено доступ до інформації з конкретного обмеженого набору класів безпеки.

Типові рівні повноважень, які використовують в уряді США, такі: не секретно (0), конфіденційно (1), таємно (2), і цілком таємно (3). (Інформацію називають, відповідно до класифікації, *конфіденційною*, *секретною* або *надсекретною*.) Категорії, які використовують у класах безпеки, є підмножинами множини всіх угрупувань, які мають відношення до тієї чи іншої області, яка є важливою. Кожне угрупування подає певну предметну область. Наприклад, якщо множина угрупувань є {*шпигуни*, *кроти*, *подвійні агенти*}, то є **вісім** різних категорій, по одній для кожної з восьми підмножин множини угрупувань, наприклад, {*шпигуни*, *кроти*}.

Ми можемо визначити класи безпеки, вказавши, що $(A_1, C_1) \le (A_2, C_2)$ тоді й тільки тоді, коли $A_1 \le A_2$ і $C_1 \subset C_2$. Інформації дозволено надходити з класу безпеки $(A_1, C_1)$ до класу безпеки $(A_2, C_2)$, якщо й тільки якщо $(A_1, C_1) \le (A_2, C_2)$. Наприклад, інформації дозволено надходити з класу безпеки (*таємно*, {*шпигуни*, *кроти*}) у клас безпеки (*цілком таємно*, {*шпигуни*, *кроти*, *подвійні агенти*}). У той час як інформація не може надходити з класу безпеки (*цілком таємно*, {*шпигуни*, *кроти*}) у будь-який з класів безпеки (*таємно*, {*шпигуни*, *кроти*, *подвійні агенти*}) або (*цілком таємно*, {*шпигуни*}).

Можна довести, множина всіх класів безпеки (позначимо її $S$) з частковим порядком, який було щойно визначено, утворює решітку.

## *Топологічне сортування*

Хороший приклад використання частково впорядкованих множин – процес топологічного сортування. Мається на увазі сортування елементів, для яких визначено відношення часткового порядку, тобто порядок задано не для всіх, а лише для деяких пар. Із цілком зрозумілих міркувань будемо вважати, що частково впорядкована множина, яка підлягає топологічному сортуванню, скінченна. Ми вже знаємо, що частковий порядок можна подати у вигляді діаграми Гассе. Мета топологічного сортування – перетворити частковий порядок на лінійний.

**Почнемо з означення.**

---

Лінійний порядок $\le$ називають *сумісним* із частковим порядком $R$, якщо з $a\,R\,b$ випливає $a \le b$. Побудову лінійного порядку, сумісного із заданим частковим порядком, називають *топологічним сортуванням*.

---

Наведемо два приклади застосування топологічного сортування.

**1.** Певна задача (наприклад, технічний проєкт) розпадається на низку підзадач. Виконання деяких підзадач можливе лише після завершення інших. Якщо підзадачу $v$ потрібно виконати до підзадачі $w$, то будемо писати $v < w$. Топологічне сортування означає такий розподіл робіт, за якого кожна з підзадач не розпочнеться до завершення всіх підзадач, які потрібно виконати до неї.

**2.** В університетських програмах певні курси потрібно читати раніше за інші, бо останні ґрунтуються на попередньо викладеному матеріалі. Якщо для курсу $w$ потрібно спочатку ознайомитись із курсом $v$, то пишемо $v < w$. Тут топологічне сортування означає, що жоден курс не можна читати раніше, ніж ті, що його підтримують

---

**Теорема.** Кожна скінченна непорожня частково впорядкована множина $(A, R)$ має принаймні один мінімальний елемент.

---

---

## Алгоритм топологічного сортування

Крок 1. Ініціалізація. Виконати $k:=1$.

Ітерація.

Крок 2. Виконати $a_k :=$ мінімальний елемент множини $A$.

Крок 3. Виконати $A:=A\setminus\{a_k\}$.

Крок 4. Виконати $k:=k+1$.

Крок 5. Закінчення. Якщо $A=\varnothing$, то зупинитись ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – результат топологічного сортування множини $A$). Інакше перейти до кроку 2.

---

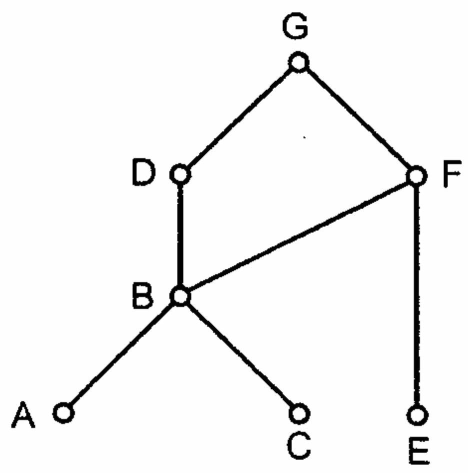

Рис. 7

**Приклад 14.** У комп'ютерній компанії згідно з якимось проєктом потрібно виконати сім завдань. Деякі з них можна розпочати лише після завершення певних інших завдань. Частковий порядок на множині завдань задамо так: $X < Y$, якщо завдання $Y$ не можна розпочати до завершення завдання $X$. Діаграму Гассе для множини цих завдань подано на рис. 7. Потрібно знайти порядок, у якому ці завдання можна виконати для завершення всього проєкту.

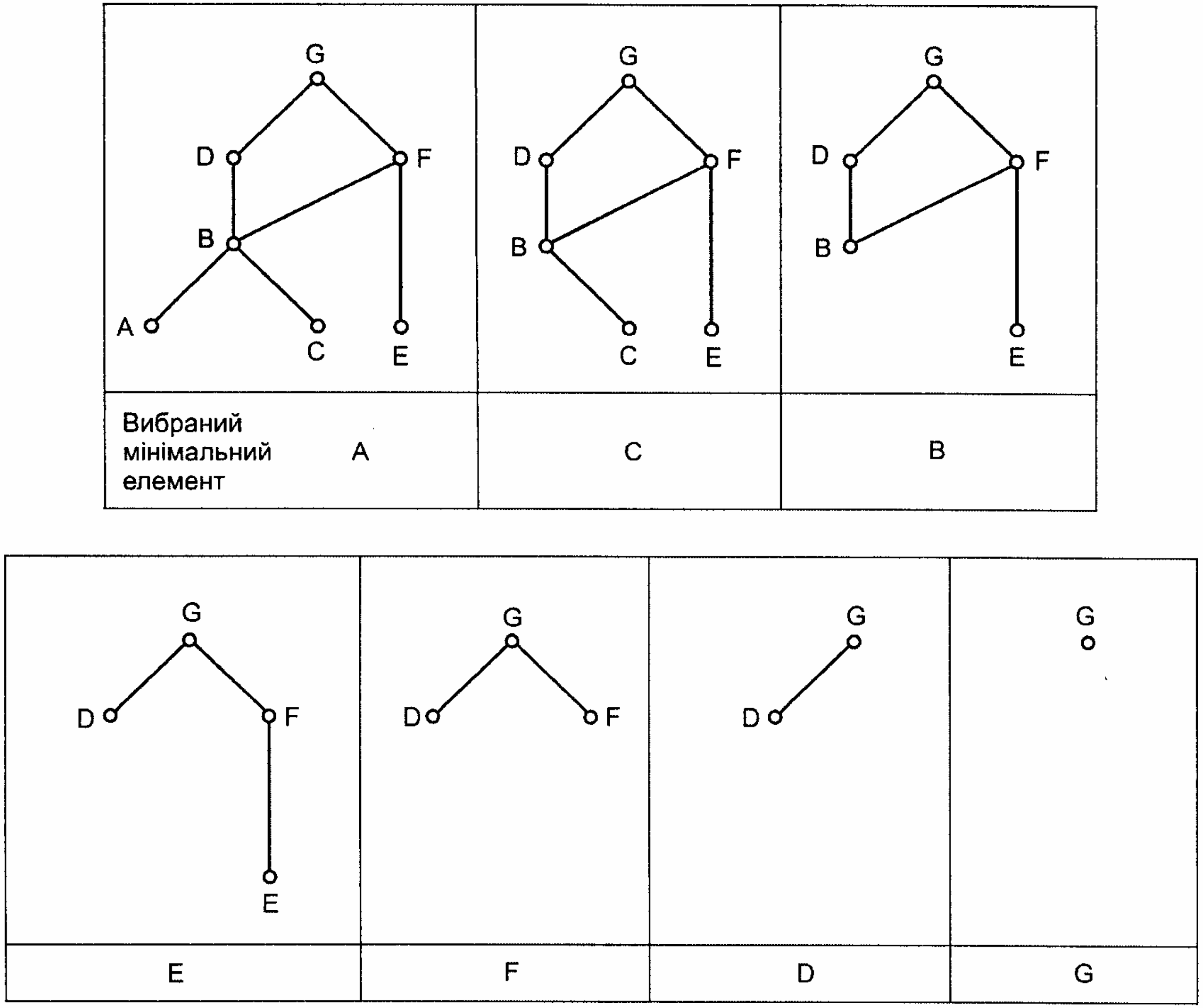


**Рис. 8**

Очевидно, порядок виконання цих завдань можна дістати, виконавши топологічне сортування множини всіх завдань. Послідовність кроків такого сортування наведено на рис. 8. Результат цього сортування $A < C < B < E < F < D < G$ визначає можливий порядок виконання завдань.