Тема 20. Відношення та їхні властивості

План лекції

- Означення відношення
- Функції як відношення
- Подання відношень матрицями та орієнтованими графами
- Властивості бінарних відношень на множині
- Теоретико-множинні операції над відношеннями
- Композиція відношень
    - Теорема про властивість степеня транзитивного відношення
- Операції над булевими матрицями
- Операції над відношеннями через матриці відношень

Відношення та їхні властивості

Означення відношення

***Бінарне відношення з множини A в множину B* – це підмножина *R* декартового добутку *A*×*B* цих множин: $R\subset A\times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з *A* в *B* – це якась множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині *A*, а другий – множині *B*. Якщо $(a, b)\in R$, то пишуть *aRb*.**

Приклад 1. Нехай $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{a, b\}$ та задано відношення $R=\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$. Отже, $0Ra$, оскільки $(0, a)\in R$, а $(1, b)\notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови $A=B$.

***Відношенням на множині A* називають бінарне відношення з *A* в *A*. Інакше кажучи, відношенням *R* на множині *A* – це підмножина декартового квадрату множини *A*, тобто $R\subset A^2$.**

Приклад 2. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}?$$

Очевидно, що R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)}.

Функції як відношення

Нагадаємо, що функція f із множини A в множину B кожному елементу множини A ставить у відповідність точно один елемент множини B. Графік функції f – це множина упорядкованих пар (a,b) таких, що $b = f(a)$. Тому що графік функції f є підмножиною $A \times B$, він є відношенням із A в B. Більше того, графік функції має таку властивість, що кожний елемент з A є **першим елементом точно одної впорядкованої пари**.

Відношення можна використати для того, щоб задати відповідність «один до багатьох» між елементами множин A та B, у якій елементу $a \in A$ може відповідати **більше ніж один** елемент множини B. Тоді як функція репрезентує відношення, коли кожному елементу множини A відповідає **точно один** елемент множини B.

<u>**Висновок.** Відношення можна розглядати як узагальнення графіків функцій. Їх можна використовувати для зображення ширшого ніж функції класу взаємозв’язків між множинами.</u>

Подання відношень матрицями та орієнтованими графами

Бінарне відношення на множині A можна подати за допомогою булевої матриці або орієнтованого графа.

Булевою **називають матрицю, елементи якої – нулі та одиниці.**

Матриця, яка задає відношення R на n-елементній множині A, – це булева $n\times n$ матриця $M_R=[m_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, n$, де

$$m_{ij}=\begin{cases}1, \text{ якщо } (a_i, a_j)\in R,\\ 0, \text{ якщо } (a_i, a_j)\notin R.\end{cases}$$

Орієнтований граф **складається із множини** ***V вершин*** **і множини** ***E дуг*****; кожна** ***дуга*** **– це упорядкована пара вершин із** ***V*****. Якщо (*****a*****,** ***b*****) – дуга, то вершину** ***a*** **називають** ***ініціальною*** **(або** ***початковою*****), а вершину** ***b*** **–** ***термінальною*** **(або** ***кінцевою*****) вершиною дуги. Дугу (*****a*****,** ***a*****), яка має ініціальною й термінальною одну й ту саму вершину** ***a*****, називають** ***петлею*****.**

Граф G_R, який задає відношення R на множині A, будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j) існує тоді й лише тоді, коли пара $(a_i, a_j)\in R$. Такий граф G_R називають *графом, асоційованим із відношенням* R, або просто *графом відношення* R.

Приклад 3. На рис. 1 зображено матрицю та граф, які задають відношення *ділить* з прикладу 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

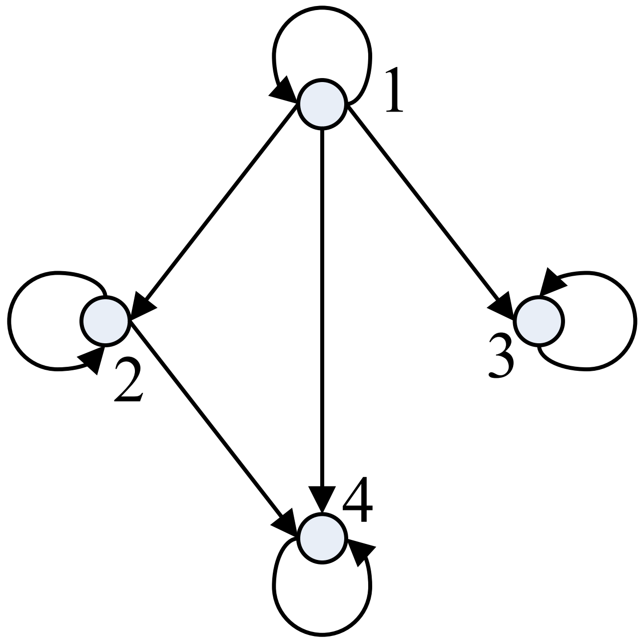


Рис. 1

Властивості бінарних відношень на множині

Розглянемо властивості відношень на множині A.

Відношення R на множині A називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$;

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$;

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

$R_6 = \{(3, 4)\}$.

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні,

Відношення R на множині A називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$.

Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1, R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині A називають *симетричним*, якщо для будь-яких $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \in R$.

У прикладі 4 лише відношення R_2 та R_3 симетричні.

Відношення R на множині A називають *антисиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, випливає, що $a = b$.

Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a).

У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4, R_5 та R_6. У кожному з них немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a, b) \in R$ та $(b, a) \in R$.

Важливо зазначити, що властивості симетричності й антисиметричності не антагоністичні: існують відношення, які мають обидві ці властивості.

Приклад 5. Відношення $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ (*діагональне відношення*) на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ є симетричним і антисиметричним одночасно.

Приклад 6. Відношення R_1 з прикладу 4 ані симетричне, ані антисиметричне.

Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \notin R$.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Відношення R на множині A називають *транзитивним*, якщо для будь-яких $a, b, c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, випливає $(a, c) \in R$.

Відношення R_4, R_5 та (зверніть увагу!) R_6 із прикладу 4 транзитивні. Справді, якщо пари (a, b) та (b, c) належать цим відношенням, то й пара (a, c) теж належить.

Відношення R_1, R_2, R_3 із прикладу 4 не транзитивні: $(3, 4) \in R_1$, $(4, 1) \in R_1$, але $(3, 1) \notin R_1$; $(2, 1) \in R_2$, $(1, 2) \in R_2$, але $(2, 2) \notin R_2$; $(2, 1) \in R_3$, $(1, 4) \in R_3$, але $(2, 4) \notin R_3$.

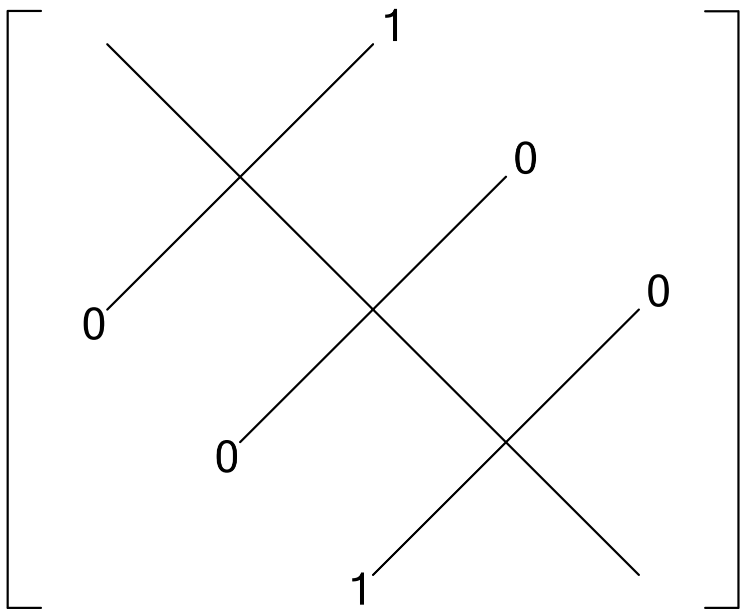


Рис. 2

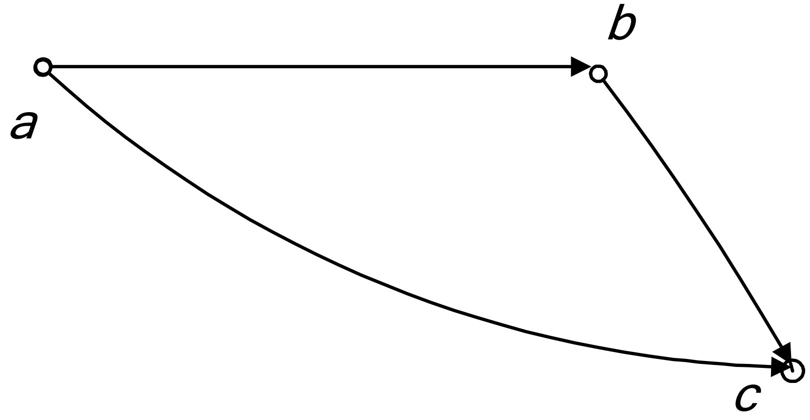
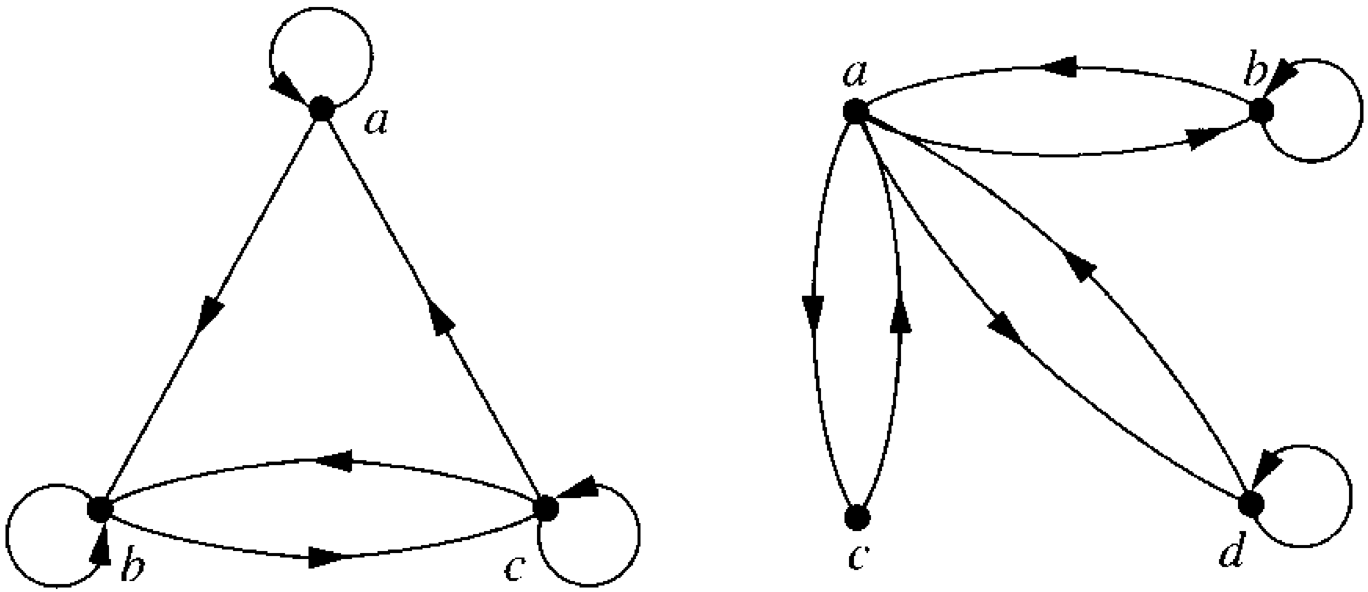


Рис. 3

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються на матрицях і графах цих відношень. Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі. Матриця M_R симетричного відношення симетрична. Матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij}=1$, випливає $m_{ji}=0$ (але може бути $m_{ij}=m_{ji}=0$) (рис. 2).

Граф G_R рефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині. У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) (рис. 3).

Приклад 7. На рис. 4 зображено орієнтовані графи відношень R та S. Для кожного з відношення визначити, чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним.



(*а*) Орієнтований граф відношення *R* **(*б*) Орієнтований граф відношення *S***

Рис. 4

Теоретико-множинні операції над відношеннями

Оскільки відношення з множини A в множину B – підмножина декартового добутку $A\times B$, то над будь-якими двома відношеннями з A в B можна виконувати звичайні теоретико-множинні операції.

Приклад. Нехай $A=\{1, 2, 3\}$ та $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Визначимо відношення R_1 та R_2 з A в B:

$R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

$R_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Тоді

$R_1\cup R_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$,

$R_1\cap R_2=\{(1, 1)\}$,

$R_1\setminus R_2=\{(2, 2), (3, 3)\}$,

$R_2\setminus R_1=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Композиція відношень

Нехай R – відношення із множини A в множину B, а S – відношення із множини B в множину C.

Композицією відношень R і S називають відношення, яке складається з усіх можливих упорядкованих пар (a, c), де $a \in A$, $c \in C$, для яких існує такий елемент $b \in B$, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in S$.

Композицію відношень R та S позначають як $S \circ R$ (ми пишемо справа перше з двох відношень, які беруть участь у композиції, як і для композиції функцій).

Приклад. Знайдемо композицію відношень R і S, де R – відношення з множини $A=\{1,2,3\}$ в множину $B=\{1, 2, 3, 4\}$:

$$R=\{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\};$$

S – відношення з множини B в множину $C=\{0, 1, 2\}$:

$$S=\{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

$$S \circ R=\{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Нехай R – відношення на множині A. Степінь R^n, n=1, 2, 3 …, означають за допомогою рекурсії:

$R^1=R$,

$R^{n+1}=R^n\circ R$.

Отже, зокрема

$R^2=R\circ R$,

$R^3=R^2\circ R=(R\circ R)\circ R$.

Приклад 8. Нехай на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо R^n, $n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно отримаємо:

$R^2=R\circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$,

$R^3=R^2\circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,

$R^4=R^3\circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,

тобто $R^4=R^3$. Можна переконатись, що $R^5=R^4$.

Теорема. Якщо $R^2 \subset R$, то відношення транзитивне.

Доведення. За означенням композиції, якщо $(a, b) \in R$ та $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R^2$. Оскільки $R^2 \subset R$, то це означає, що $(a, c) \in R$. Отже, відношення R транзитивне.

Теорема про властивість степеня транзитивного відношення. Нехай R – транзитивне відношення на множині A. Тоді $R^n \subset R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. У разі $n = 1$ твердження теореми тривіальне. Гіпотеза індукції: $R^n \subset R$. Для завершення доведення потрібно переконатись, що із цієї гіпотези випливає включення $R^{n+1} \subset R$. Припустімо, що $(a, b) \in R^{n+1}$. Оскільки $R^{n+1} = R^n \circ R$, то існує такий елемент $x \in A$, що $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R^n$. За індуктивною гіпотезою $R^n \subset R$, звідки випливає, що $(x, b) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R$ випливає, що $(a, b) \in R$. Отже, $R^{n+1} \subset R$.

Операції над булевими матрицями

Уведемо операції над булевими матрицями (тобто матрицями з елементами 0 і 1).

Диз'юнкція булевих $m\times n$ матриць P та Q – це $m\times n$ матриця $Z = P\vee Q$, елементи якої $z_{ij} = p_{ij}\vee q_{ij}$, де $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$.

Кон'юнкція булевих $m\times n$ матриць P та Q – це $m\times n$ матриця $Z = P\wedge Q$, елементи якої $z_{ij} = p_{ij}\wedge q_{ij}$, де $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$.

Нехай P – $m\times k$ матриця, Q – $k\times n$ матриця. Тоді *булевий добуток* матриць P та Q – це $m\times n$ матриця $Z = P\odot Q$, елементи якої

$$z_{ij} = (p_{i1}\wedge q_{1j})\vee(p_{i2}\wedge q_{2j})\vee\ldots\vee(p_{ik}\wedge q_{kj}),$$

або, коротше,

$$z_{ij} = \bigvee_{r=1}^{k}\left(p_{ir}\wedge q_{rj}\right),$$

де $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$.

Зазначимо, що булевий добуток матриць обчислюють за аналогією зі звичайним добутком цих матриць

$$z_{ij} = \sum_{r=1}^{k}\left(p_{ir}\cdot q_{rj}\right) \text{ (тобто «рядок на стовпчик»)},$$

тільки множення замінено на кон'юнкцію $\wedge$, а додавання – на диз'юнкцію $\vee$.

Приклад. Знайти булевий добуток матриць **A** і **B**, якщо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Булевий добуток $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ обчислюємо так

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Булевий степінь для булевих $n \times n$ матриць (позначають як $A^{[r]}$, r – натуральне) означають так:

$$A^{[r]} = \underbrace{A \odot A \odot \ldots \odot A}_{r \text{ разів}}$$

Це означення коректне, оскільки булевий добуток матриць асоціативний. За означенням уважають $A^{[0]} = I_n$, де I_n – одинична $n \times n$ матриця.

Операції над відношеннями через матриці відношень

Операції над відношеннями легко виразити через матриці, які задають ці відношення. Переконатись у цьому пропонується самостійно (для цього потрібно проаналізувати означення відповідних операцій над відношеннями та над булевими матрицями).

$$\boxed{\begin{aligned} M_{R_1 \cup R_2} &= M_{R_1} \vee M_{R_2}, \\ M_{R_1 \cap R_2} &= M_{R_1} \wedge M_{R_2}. \end{aligned}}$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S.$$

Зверніть увагу на порядок множення матриць!!!

$$M_{R^k} = (M_R)^{[k]}.$$

Зауваження. Для транзитивності відношення потрібно, щоб булевий квадрат матриці відношення (булевий добуток матриці саму на себе) був «менше чи дорівнював» матриці відношення. Це означає таке: якщо (i, j) елемент булевого квадрату цієї матриці дорівнює 1, то (i, j) елемент самої матриці також дорівнює 1. Це випливає з того, що коли для відношення R виконується умова $R^2 \subset R$, то R – транзитивне.