Тема 21. Замикання відношень. Відношення еквівалентності

План лекції

- **Замикання відношень**
    - **Рефлексивне замикання відношення**
    - **Симетричне замикання відношення**
    - **Транзитивне замикання відношення. Алгоритм Воршалла**
- **Відношення еквівалентності**
- **Класи еквівалентності**

Замикання відношень

Нехай R – відношення на множині A. Воно може не мати деяких властивостей. Наприклад, це відношення може не бути рефлексивним, симетричним або транзитивним.

Замиканням відношення R за властивістю q називають найменше відношення C, яке має властивість q і таке, що $R \subset C$. Термін „*найменше відношення*" означає, що C є підмножиною будь-якого відношення S, для якого виконуються умови:

1) S має властивість q,

2) $R \subset S$.

Рефлексивне замикання відношення.

Приклад. Відношення $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ на множині $A=\{1, 2, 3\}$ не рефлексивне. Щоб отримати **рефлексивне** замикання відношення R, додамо пари (2, 2) та (3, 3), бо лише цих пари вигляду (a, a) немає в R. Очевидно, що це нове відношення рефлексивне, і R – його підмножина. Більше того, нове відношення являє собою підмножину будь-якого рефлексивного відношення S, для якого $R \subset S$. Отже, ми справді одержали рефлексивне замикання відношення R.

З останнього прикладу зрозумілий спосіб побудови рефлексивного замикання: достатньо додати до відношення R усі ті пари (a, a), де $a\in A$, яких немає в R. Отже, рефлексивне замикання R дорівнює $R\cup\Delta$, де $\Delta=\{(a, a): a\in A\}$. Відношення Δ на множині A називають *діагональним*.

Симетричне замикання відношення.

Приклад. Відношення $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ на множині $A=\{1, 2, 3\}$ не симетричне. Для отримання **симетричного** замикання R додамо пари (2, 1) і (1, 3), бо лише цих пар вигляду (b, a), для яких $(a, b)\in R$, немає в R. Очевидно, це нове відношення симетричне, а R – його підмножина. Окрім того, воно являє собою підмножину будь-якого симетричного відношення S, для якого $R\subset S$. Отже, ми справді одержали симетричне замикання відношення R.

Наведені міркування мають загальний характер: для отримання симетричного замикання потрібно додати всі такі пари (b, a), що $(b, a)\notin R$, але $(a, b)\in R$. Отже, симетричне замикання відношення R дорівнює $R\cup R^{-1}$, де $R^{-1}=\{(b, a) \mid (a,b)\in R\}$.

Транзитивне замикання відношення. Алгоритм Воршалла.

Як знайти **транзитивне** замикання відношення R? Спочатку на прикладі покажемо, що попередня методика не приведе до успіху.

Приклад. На множині {1, 2, 3, 4} задано відношення R={(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)}. Очевидно, воно не транзитивне: не вистачає пар (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1). Додавши ці пари, отримаємо відношення R_1={(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)}. Воно також не транзитивне, бо містить пари (3, 1) та (1, 4), але не містить пари (3, 4).

Отже, побудувати транзитивне замикання відношення складніше, ніж рефлексивне чи симетричне. Покажемо, як це можна зробити.

Шляхом в орієнтованому графі G від вершини a до вершини b називають послідовність дуг $(x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n)$ графа G, де n – невід'ємне ціле, $x_0=a$, $x_n=b$, така, що в цій послідовності термінальна вершина кожної дуги та сама, що й ініціальна вершина наступної дуги шляху. Число n – кількість дуг шляху – називають його довжиною. Сам шлях можна позначити як послідовність вершин, через які він проходить: x_0, x_1, x_2, …, x_n. (Шлях довжиною n проходить через $n+1$ вершину.) Ми розглядаємо порожню множину дуг як *шлях довжиною нуль* від a до a. Шлях довжиною $n\geq 1$, який починається і закінчується в одній і тій самій вершині називають *циклом*.

Шляхом у відношенні R від елемента a до елемента b називають послідовність елементів $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ множини A таких, що $(a, x_1)\in R$, $(x_1, x_2)\in R$, …, $(x_{n-1}, b)\in R$. Покажемо, що процедура відшукання транзитивного замикання відношення R еквівалентна процедурі визначення того, які пари вершин з'єднано шляхом. Зазначимо, що шлях у відношенні R від a до b відповідає шляху з вершини a у вершину b в графі G_R цього відношення.

Теорема. Нехай R – відношення на множині A. Шлях довжиною n від елемента a до елемента b у відношенні R існує тоді й лише тоді, коли $(a, b)\in R^n$.

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. За означенням, шлях від елемента a до елемента b довжиною 1 існує тоді й лише тоді, коли $(a, b)\in R$. Отже, теорема справджується для $n = 1$.

Гіпотеза індукції: нехай теорема справджується для цілого невід'ємного n. Шлях довжиною n+1 існує тоді й лише тоді, коли є такий елемент $c\in A$, що існує шлях довжиною *один* від елемента a до елемента c (тобто, $(a, c)\in R$) та існує шлях довжиною n від елемента c до елемента b (тобто, $(c, b)\in R^{\boldsymbol{n}}$). Отже, з урахуванням індуктивної гіпотези, шлях довжиною n+1 з a в b існує тоді й лише тоді, коли існує такий елемент $c\in A$, що $(a, c)\in R$ та $(c, b)\in R^{\boldsymbol{n}}$. Але такий елемент c існує тоді й лише тоді, коли $(a, b)\in R^{n+1}$. Отже, шлях довжиною n+1 існує тоді й лише тоді, коли $(a, b)\in R^{n+1}$. Теорему доведено.

Нехай R – відношення на множині A. *З'єднувальним* називають відношення R^*, яке складається з таких пар (a, b), що існує шлях від елемента a до елемента b у відношенні R.

Отже, з урахуванням щойно сформульованої теореми, маємо $R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

Приклад. Нехай відношення R задано на множині всіх станцій метро в м. Київ і складається з усіх пар (a,b) таких, що можна без пересадок проїхати від станції a до станції b. Тоді відношення R^n складається з усіх пар (a,b) таких, що можна проїхати від a до b, зробивши щонайбільше $n-1$ пересадку. Відношення R^* складається з усіх пар (a,b) таких, що можна проїхати від a до b, зробивши стільки пересадок, скільки потрібно.

Теорема. Транзитивне замикання відношення R дорівнює з'єднувальному відношенню R^*.

Доведення. Очевидно, що $R \subset R^*$ за означенням. Потрібно довести:

1) відношення R^* – транзитивне;

2) $R^* \subset S$, де S – будь-яке транзитивне відношення таке, що $R \subset S$.

1. Нехай $(a, b) \in R^*$, $(b, c) \in R^*$. Звідси випливає, що існує шлях від елемента a до елемента b та шлях від елемента b до елемента c у відношенні R. Отже, існує шлях від елемента a до елемента c у відношенні R (він проходить через елемент b). Звідси випливає, що $(a, c) \in R^*$, тобто відношення R^* – транзитивне.

2. Нехай відношення S транзитивне та $R \subset S$. Оскільки S транзитивне, то $S^k \subset S$ за теоремою про властивість степеня транзитивного відношення. За означенням $S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$, тому, враховуючи, що $S^k \subset S$, маємо $S^* \subset S$. З умови $R \subset S$ випливає $R^* \subset S^*$, бо кожний шлях в R – це також шлях в S. Отже, $R^* \subset S^* \subset S$. Звідси випливає, що для будь-якого транзитивного відношення S такого, що $R \subset S$, виконується $R^* \subset S$. Це означає, що відношення R^* – транзитивне замикання відношення R. Теорему доведено.

Лема. Нехай R – відношення на n-елементній множині A. Якщо в R існує шлях довжиною щонайменше один від a до b, то існує шлях від a до b, довжина якого не перевищує n. Більше того, коли $a \neq b$, якщо в R існує шлях від a до b довжиною щонайменше один, то існує шлях від a до b, довжина якого не перевищує $n - 1$.

Доведення цієї леми ми тут не наводимо.

Із цієї леми випливає, що транзитивне замикання відношення R є об'єднанням R, R^2, R^3, …, та R^n. Це випливає з того, що шлях в R^* між двома вершинами є тоді і тільки тоді, коли є шлях між цими вершинами в R^i для якогось $i \le n$. Тому

$$R^* = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n,$$

і матричне подання об'єднання відношень є диз'юнкцією матриць цих відношень. Отже матриця транзитивного замикання відношення дорівнює диз'юнкції матриць перших n степенів матриці відношення R. Цей результат складає зміст наступної теореми.

Теорема. Нехай M_R матриця відношення R на множині з n елементів. Тоді

$$M_{R^*} = M_R \vee (M_R)^{[2]} \vee (M_R)^{[3]} \vee \ldots \vee (M_R)^{[n]}.$$

Згідно з алгоритмом, заснованим на цій формулі, для обчислення матриці M_{R^*} потрібно $O(n^4)$ операцій. Ефективнішим для побудови матриці M_{R^*} є алгоритм С. Воршалла (S. Warshall), який вимагає $O(n^3)$ операцій. Розглянемо цей алгоритм.

Припустімо, що R – відношення на n-елементній множині A. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – довільна нумерація елементів цієї множини. В алгоритмі Воршалла використовують *концепцію внутрішніх вершин шляху*. Внутрішніми вершинами шляху $a, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, b$ називають вершини $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$.

Алгоритм Воршалла будує послідовність булевих матриць $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, …, $W^{(n)}$, де $W^{(0)} = M_R$ – матриця відношення R. Елементи матриці $W^{(k)}$ позначимо як $w_{ij}^{(k)}$. Якщо існує шлях із вершини a_i у вершину a_j такий, що всі його **внутрішні** вершини містяться в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, утвореній **першими** k вершинами, то $w_{ij}^{(k)} = 1$, а ні, то $w_{ij}^{(k)} = 0$. Перша й остання вершини такого шляху можуть і не належати множині вершин $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Зазначимо, що $W^{(n)} = M_{R^*}$. Справді, елемент цієї матриці $w_{ij}^{(n)}$ дорівнює 1 тоді й лише тоді, коли існує шлях із вершини a_i до вершини a_j, внутрішні вершини якого належать множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, а це множина всіх вершин.


a_i
a_j
Усі внутрішні вершини в множині $\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$

Рис. 1

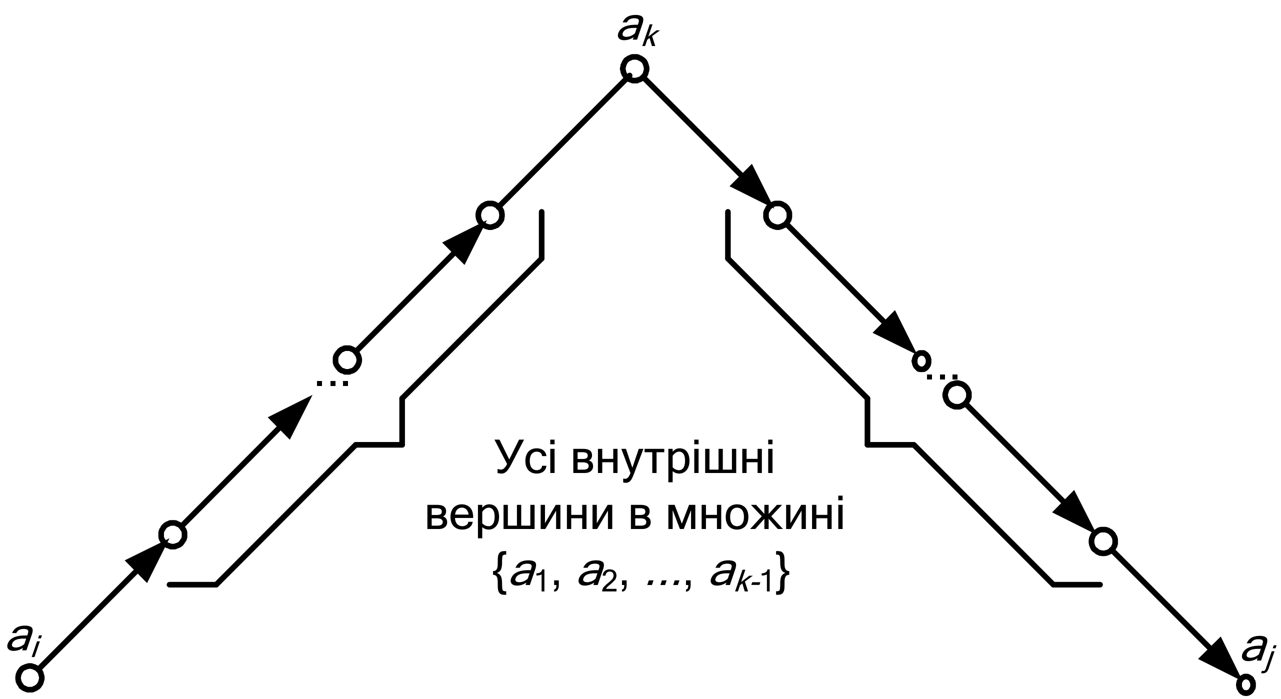

a_k
a_i
a_j
Усі внутрішні
вершини в множині
$\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$

Рис. 2

Алгоритм Воршалла ефективно обчислює матрицю $W^{(k)}$ за матицею $W^{(k-1)}$. Шлях із вершини a_i у вершину a_j із внутрішніми вершинами в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ існує лише в двох випадках.

1. Якщо існує шлях із вершини a_i у вершину a_j із внутрішніми вершинами лише в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ (рис. 1);

2. Якщо існує шлях із вершини a_i у вершину a_k та шлях із вершини a_k у вершину a_j, і кожний із цих шляхів має внутрішні вершини лише в множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ (рис. 2).

У випадку 1 шлях існує тоді і лише тоді, коли $w_{ij}^{(k-1)} = 1$; у випадку 2 – коли обидва елементи $w_{ik}^{(k-1)}$та $w_{kj}^{(k-1)}$ дорівнюють 1. Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \vee \left(w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)}\right), \; k=1, 2, \ldots, n.$$

Наведемо першу версію алгоритму Воршалла на псевдокоді (Kenneth H. Rosen, seventh edition, P. 606).

Алгоритм Воршалла, версія 1

procedure *Warshall* ($\mathbf{M}_R : n \times n$ zero-one matrix)

$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$

for k : = 1 **to** n

  for i : = 1 **to** n

    for j : = 1 **to** n

      $w_{ij} := w_{ij} \vee \left(w_{ik} \wedge w_{kj}\right)$

return W $\{\mathbf{W} = [w_{ij}]$ is $\mathbf{M}_{R^*}\}$

Для практичної реалізації останню формулу зручно перетворити так:

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \vee \left(w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)}\right) = \left(w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{ik}^{(k-1)}\right) \wedge \left(w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}\right) =$$

$$= \begin{cases} w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, \text{ якщо } w_{ik}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, \text{ якщо } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Окрім того, очевидно, що в разі *i*=*k* дії в першому рядку формули можна не виконувати. Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, \text{ якщо } i \neq k \text{ та } w_{ik}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, \text{ якщо } i = k \text{ чи } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Остання формула дає таке правило переходу від матриці $W^{(k-1)}$ до матриці $W^{(k)}$: *для значень i≠k в разі* $w_{ik}^{(k-1)} = 1$ *замінити i-й рядок матриці* $W^{(k-1)}$ *на диз'юнкцію i-го й k-го рядків цієї матриці.* Нижче подано другу версію алгоритму Воршалла на псевдокоді.

Алгоритм Воршалла, версія 2

procedure *Warshall* ($\mathbf{M}_R : n \times n$ zero-one matrix)
$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$
for $k := 1$ **to** n
  for $i := 1$ **to** n
    if $(i \neq k) \wedge (w_{ik} = 1)$ **then**
    for $j := 1$ **to** n
      $w_{ij} := w_{ij} \vee w_{kj}$
return W {$\mathbf{W} = [w_{ij}]$ is $\mathbf{M}_{R^*}$}

Приклад. Відношення задано матрицею M_R. **Для k=1** перший рядок залишаємо без змін ($i=k$), другий і третій рядки заміняємо на диз'юнкцію кожного з них із першим:

$$W^{(0)} = M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для k=2 отримаємо, що $W^{(2)}=W^{(1)}$, бо всі елементи другого стовпця матриці $W^{(1)}$ нульові.

Далі, **для k=3** одержимо:

$$W^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

і, нарешті, коли **k=4** матимемо остаточний результат – матрицю транзитивного замикання:

$$M_{R^*} = W^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	**Stephen Warshall** (November 15, 1935 – December 11, 2006) Після закінчення Гарварду Воршалл працював в ORO (Operation Research Office), де виконував наукові дослідження та розробки для армії Сполучених Штатів. У 1958 році він покинув ORO, щоб перейти у компанію під назвою Technical Operations, де він допоміг побудувати лабораторію досліджень і розробок для військових програмних проектів. У 1961 році він покинув Technical Operations, щоб заснувати Massachusetts Computer Associates. Пізніше, ця компанія стала частиною Applied Data Research (ADR). Після злиття, Воршалл зайняв місце у раді директорів ADR і керував різними проектами. Він залишив ADR в 1982 році та викладав щотижневий клас біблійним івритом у Temple Ahavat Achim у м. Глостер, штат Массачусетс.

Відношення еквівалентності

Розглянемо відношення, які водночас мають декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації.

Відношення на множині A називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Приклад 1. Нехай R – таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a = b)\vee(a = -b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому, являє собою відношенням еквівалентності.

Приклад 2. Нехай R – таке відношення на множині дійсних чисел: aRb тоді й лише тоді, коли $(a-b)$ – ціле число. Оскільки $a-a = 0$ ціле для всіх дійсних чисел a, то aRa для всіх дійсних чисел a. Отже, відношення R рефлексивне. Нехай тепер aRb. Звідси випливає, $a-b$ – ціле число. Але тоді $b-a$ також ціле, звідси bRa, тобто відношення R симетричне. Якщо aRb і bRc, то числа $a-b$ та $b-c$ цілі. Але тоді число $a-c = (a-b)+(b-c)$ також ціле, звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Отже, R – відношення еквівалентності на множині дійсних чисел.

Приклад 3. Конгруентність за модулем *m*. Нехай $m>1$ – ціле число. Доведемо, що $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$ – відношення еквівалентності на множині Z цілих чисел.

За означенням $a \equiv b \pmod{m}$ означає, що m ділить $(a–b)$. Зазначимо, що $a–a = 0$ ділиться на m, бо $0 = 0 \cdot m$. Отже, $a \equiv a \pmod{m}$, відношення рефлексивне. Далі, $a \equiv b \pmod{m}$, якщо $a–b = km$, де k – ціле число. Отже, $b–a = (–k)m$, тобто $b \equiv a \pmod{m}$, і відношення симетричне. Нарешті, нехай $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$. Це означає, що $a–b = km$, $b–c = lm$, де k, l – цілі числа.

Додамо останні дві рівності: $a–b+b–c = (k+l)m$, тобто $a–c = (k+l)m$. Звідси випливає, що $a \equiv c \pmod{m}$, відношення транзитивне. Отже, конгруентність за модулем m – відношення еквівалентності на множині цілих чисел.

Приклад 4. Нехай R – відношення на множині **рядків українських букв** таке, що aRb тоді й тільки тоді, коли $l(a) = l(b)$, де $l(x)$ – довжина рядка x. Чи є R відношенням еквівалентності?

Для будь-якого рядка a очевидно $l(a) = l(a)$, отже, відношення R рефлексивне. Тепер припустімо, що aRb, тому $l(a) = l(b)$. Але тоді $l(b) = l(a)$, тому bRa, отже, відношення R симетричне. Нарешті припустімо, що aRb і bRc. Тоді $l(a) = l(b)$ і $l(b) = l(c)$. Звідси слідує, що $l(a) = l(c)$ і aRc, тобто відношення R транзитивне. Тому що відношення R рефлексивне, симетричне й транзитивне, воно є відношенням еквівалентності.

У наступному прикладі ми розглянемо відношення, яке не є відношеннями еквівалентності.

Приклад 5. Нехай R – відношення на множині дійсних чисел таке, що xRy тоді й тільки тоді, коли $|x-y|<1$. Легко побачити, що це відношення рефлексивне, бо $|x-x|=0<1$ для будь-якого дійсного числа x. Відношення R симетричне, бо коли $|x-y|<1$, то і $|y-x|=|x-y|<1$ для будь-яких дійсних чисел x та y. Проте відношення R не є відношенням еквівалентності, бо воно не транзитивне.

Візьмемо $x=2.8$, $y=1.9$ і $z=1.1$. Тоді $|x-y|=|2.8-1.9|=0.9<1$, $|y-z|=|1.9-1.1|=0.8<1$, але $|x-z|=|2.8-1.1|=1.7>1$.

Класи еквівалентності

Почнемо з розгляду такого простого прикладу. Нехай A – множина учасників наукової конференції. Як R позначимо відношення на множині A яке містить усі пари (x,y), де x та y приїхали на конференцію з одного міста. Маючи на увазі якогось учасника x, ми можемо задати множину всіх учасників цієї конференції, еквівалентних до x за відношенням R. Ця множина містить усіх учасників, які приїхали на конференцію із того самого міста, що й учасник x. Цю підмножину множини A називають класом еквівалентності за відношенням R. Цей приклад приводить до такого означення.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елемента $a\in A$, називають *класом еквівалентності* (елемента a) *за відношенням* R, його позначають як $[a]_R$. Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення $[a]$ для цього класу еквівалентності.

Отже: $[a]_R = \{x\in A \mid (a,x)\in R\}$. Елемент $b\in [a]_R$ називають *представником* цього класу еквівалентності. Будь-який елемент із класу еквівалентності може бути використаний як представник цього класу.

Приклад 6. Знайдемо класи еквівалентності відношення з прикладу 1. Оскільки ціле число еквівалентне до самого до себе та до протилежного числа, то класи еквівалентності за цим відношенням такі: $[a]=\{-a, a\}$, $a\neq 0$ та $[0]=\{0\}$. Зокрема, $[7]=\{-7, 7\}$, $[-5]=\{-5, 5\}$

Приклад 7. Знайдемо класи еквівалентності елементів 0 і 1 для відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 3). Клас еквівалентності елемента 0 містить усі цілі числа b такі, що $0\equiv b(\mathrm{mod}\ 4)$, тобто такі, що діляться на 4. Отже, $[0]=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$. Клас еквівалентності елемента 1 містить усі цілі числа b такі, що $1\equiv b(\mathrm{mod}\ 4)$. Звідси випливає, що $[1]=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$. Класи еквівалентності, подібні до розглянутих у цьому прикладі, називають *класами конгруентності за модулем* m і позначають як $[a]_m$.

Отже, $[0]_4=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$, $[1]_4=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Важливо зазначити, що класи еквівалентності, породжені двома елементами множини A, або збігаються, або не перетинаються. Про це твердить наступна лема.

Лема. Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Тоді такі твердження еквівалентні:

(I) aRb,

(II) $[a] = [b]$,

(III) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

Доведення.

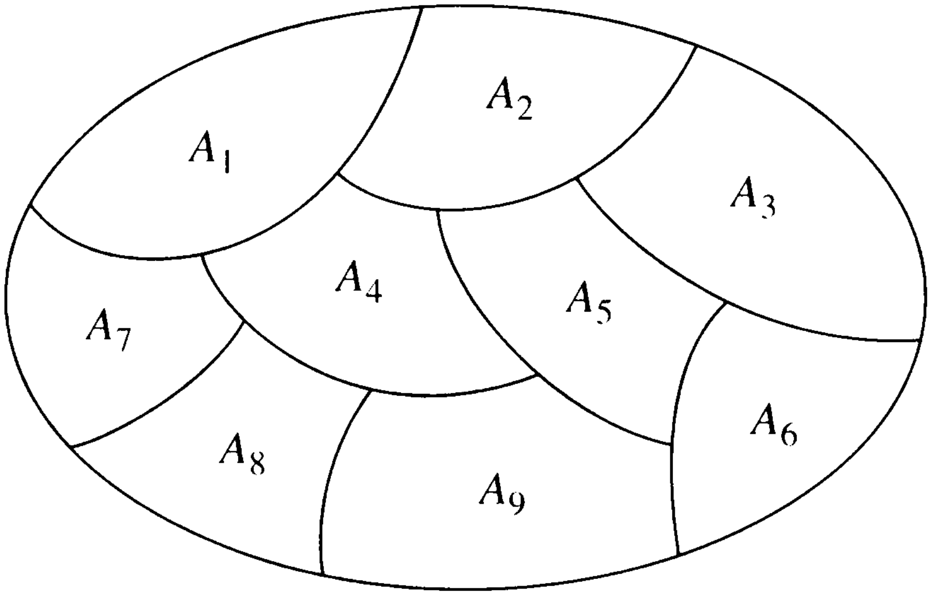
- Спочатку доведемо, що з (I) випливає (II). Припустимо, що aRb. Щоб довести рівність $[a]=[b]$, покажемо, що $[a]\subset[b]$ та $[b]\subset[a]$. Нехай $c\in[a]$, тоді aRc. Оскільки aRb, а R – симетричне відношення, то bRa. Позаяк відношення R транзитивне, то з bRa й aRc випливає bRc, тому $c\in[b]$. Отже, $[a]\subset[b]$. Аналогічно можна довести, що $[b]\subset[a]$.
- Доведемо тепер, що з (II) випливає (III). Справді $[a]\neq\varnothing$, бо $a\in[a]$ внаслідок рефлексивності. Отже, з $[a]=[b]$ випливає $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.
- Нарешті, доведемо, що з (III) випливає (I). Припустимо, що $[a]\cap[b]\neq\varnothing$. Тоді існує такий елемент c, що $c\in[a]$ та $c\in[b]$, тобто aRc та bRc. Із симетричності відношення R випливає cRb. Оскільки відношення R транзитивне, то з aRc та cRb випливає aRb.

Позаяк з (I) випливає (II), з (II) випливає (III) та з (III) випливає (I), то твердження (I), (II), (III) еквівалентні.

Відношення еквівалентності R, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям цієї множини. Цей зв'язок виражено у двох наступних теоремах. Нагадаємо, що систему S підмножин множини A називають розбиттям цієї множини, якщо всі множини системи S непорожні, попарно не перетинаються, і об'єднання їх усіх дорівнює множині A. Більш докладно, розбиття множини A – це система S її підмножин A_i, $i \in I$ (де I – множина індексів), така, що виконуються умови:

1) $A_i \neq \varnothing$ для всіх $i \in I$;
2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ коли $i \neq j$;
3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

(Тут $\bigcup_{i \in I} A_i$ репрезентує об'єднання множин A_i для всіх $i \in I$.) Наступний рисунок ілюструє концепцію розбиття множини.



Приклад 8. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Система множин $S = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ – розбиття цієї множини.

Теорема 1. Кожне відношення еквівалентності R на множині A породжує розбиття множини A на класи еквівалентності.

Доведення. Об’єднання класів еквівалентності за відношенням R – це всі елементи множини A, бо будь-який елемент a з множини A міститься у своєму класі еквівалентності $[a]_R$. Інакше кажучи,

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

Із леми випливає, ці класи еквівалентності або співпадають, або не перетинаються, отже, $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$, коли $[a]_R \neq [b]_R$.

Ці два спостереження показують, що класи еквівалентності за відношенням еквівалентності R, заданим на множині A, формують розбиття цієї множини. Терему доведено.

Приклад 9. Відношення конгруентності за mod 4 (див приклад 8) породжує розбиття множини Z цілих чисел на 4 класи еквівалентності: $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ та $[3]_4$. Вони попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює множині Z.

Ось ці класи:

$$[0]_4 = \{. . . ,-8,-4, 0, 4, 8, . . .\},$$

$$[1]_4 = \{. . . ,-7,-3, 1, 5, 9, . . .\},$$

$$[2]_4 = \{. . . ,-6,-2, 2, 6, 10, . . .\},$$

$$[3]_4 = \{. . . ,-5,-1, 3, 7, 11, . . .\}.$$

Загалом є m різних класів конгруентності за модулем m; вони відповідають m різним остачам, можливим при діленні цілого числа на m. Ці m класів позначають як $[0]_m$, $[1]_m$, …, $[m-1]_m$. Вони й формують розбиття множини цілих чисел за цим відношенням еквівалентності (тобто за відношенням конгруентності за модулем m).

Теорема 2. Будь-яке розбиття множини A визначає на множині A відношення еквівалентності.

Доведення. Нехай $a, b \in A$, будемо вважати, що aRb тоді й лише тоді, коли a та b належать одній множині розбиття. Залишилося довести, що одержане відношення на множині A являє собою відношенням еквівалентності. Для цього потрібно переконатись, що воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Справді, оскільки a належить якійсь множині розбиття, то aRa, тобто відношення рефлексивне. Нехай A_i – якась множина розбиття та $a, b \in A_i$. Тоді й $b, a \in A_i$, тобто з aRb випливає bRa. Симетричність доведено. Нарешті, із aRb і bRc випливає $a, b, c \in A_i$. Звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Теорему доведено.

Приклад 10. Записати упорядковані пари, які формують відношення еквівалентності, яке породжено розбиттям множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ із прикладу 9:

$$S = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}.$$

Тут $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 6\}$, $A_3 = \{5\}$. Пара $(a,b) \in R$ якщо і тільки якщо a та b в одній і тій самій множині розбиття. Пари $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$ і $(3,3)$ належать відношенню, бо $A_1 = \{1, 2, 3\}$ – клас еквівалентності. Пари $(4,4)$, $(4,6)$, $(6,4)$ і $(6,6)$ належать відношенню R, бо множина $A_2 = \{4, 6\}$ є класом еквівалентності. Нарешті, пара $(5,5)$ належить відношенню R, бо $A_3 = \{5\}$ є класом еквівалентності. Ніякі інші пари відношенню еквівалентності R не належать.