

55. Задати множини, наведені нижче, переліченням їх елементів:
 а) $\{x \mid x - \text{дійсне число, } x^2 = 1\}$; б) $\{x \mid x - \text{додатне ціле, } x < 12\}$;
 в) $\{x \mid x - \text{квадрат цілого числа, } x < 100\}$; г) $\{x \mid x - \text{ціле, } x^2 = 2\}$.
56. Задати множини, наведені нижче, зазначивши спільну властивість елементів кожної:
 а) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$; б) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; в) $\{a, e, \epsilon, i, \ddot{i}, o, y, и, ю\}$.
57. Нехай $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$, $D = \{4, 6, 8\}$. Визначити, які з цих множин є підмножинами інших.
58. Визначити, які з наведених нижче виразів правильні:
 а) $x \in \{x\}$; б) $\{x\} \subset \{x\}$; в) $\{x\} \in \{x\}$;
 г) $\{x\} \in \{\{x\}\}$; д) $\emptyset \subset \{x\}$; е) $\emptyset \in \{x\}$.
59. На діаграмі Венна показати співвідношення $A \subset B$ і $B \subset C$.
60. Нехай A , B і C – множини, причому $A \subset B$ і $B \subset C$. Довести, що $A \subset C$.
61. Навести приклад таких двох множин A та B , що $A \in B$ і $A \subset B$.
62. Знайти булеан для кожної з множин, наведених нижче:
 а) $\{a\}$; б) $\{a, b\}$; в) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
63. Чи можна дійти висновку, що $A = B$, якщо ці множини мають рівні булеани? Відповідь обґрунтувати.
64. Визначити, чи кожна з множин, наведених нижче, є булеаном деякої множини:
 а) \emptyset ; б) $\{\emptyset, \{a\}\}$; в) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$; г) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
65. Для кожної з множин, наведених нижче, знайти потужність булеану:
 а) $\{a, b, \{a, b\}\}$; б) $\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$; в) 2^\emptyset .
66. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{x, y\}$. Знайти $A \times B$ та $B \times A$.
67. Нехай A – множина математичних курсів на факультеті прикладної математики та інформатики університету, B – множина доцентів і професорів математики. Що є декартовим добутком $A \times B$?
68. Нехай A – множина. Довести, що $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.
69. Задано множини $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{0, 1\}$. Побудувати декартові добутки:
 а) $A \times B \times C$; б) $C \times B \times A$; в) $C \times A \times B$; г) $B \times B \times B$.
70. Зобразити на координатній площині декартів добуток множин $A \times B$ та $B \times A$. У задачі б) записати також усі елементи декартових добутків.
 а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 5\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 6\}$;
 б) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3 \leq x \leq 5\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3 \leq x \leq 6\}$.
71. Довести, що $A \times B \neq B \times A$, якщо множини A та B непорожні, за виключенням випадку $A = B$.
72. Показати, що кортеж довжиною два (a, b) можна означити в термінах множин як $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. (Вказівка: спочатку довести, що $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ тоді й лише тоді, коли $a = c$ і $b = d$.)
73. Задано множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{0, 3, 6\}$. Знайти множини:
 а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

74. Задано множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ та $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Знайти множини:
 а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.
75. Знайти множини A та B , якщо $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{2, 10\}$, і $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.
76. Довести рівність множин $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
77. Довести рівність множин $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.
78. Довести рівності множин:
 а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
 в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
79. Задано множини A , B та C . Довести рівність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
80. Задано множини $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Побудувати множини:
 а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cup C$; в) $(A \cup B) \cap C$; г) $(A \cap B) \cup C$.
81. Симетричною різницею множин A та B називають множину, яку визначають рівністю $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
 а) Зобразити діаграму Венна множини $A \oplus B$.
 б) Задано множини $A = \{1, 3, 5\}$ та $B = \{1, 2, 3\}$. Побудувати множину $A \oplus B$.
 в) Нехай A та B – довільні множини. Довести рівність $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
82. Чи можна твердити, що $A = B$, якщо для множин A , B та C виконуються рівності:
 а) $A \cup C = B \cup C$; б) $A \cap C = B \cap C$; в) $A \oplus C = B \oplus C$.
83. Нехай A , B та C – довільні множини. Довести, що
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
84. Задано універсальну множину $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:
 а) подати бітовими рядками множини $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 6, 10\}$, $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$;
 б) відновити множини за бітовими рядками 0101111100, 1000000001, 1111111111.
85. Показати, як можна використати операції над бітовими рядками для знаходження значень виразів:
 а) $(A \cup B) \cap C$; б) $(A \cap B) \cup C$; в) $(A \cap D) \cup (B \cap C)$; г) $A \cup B \cup C \cup D$.
 Тут універсальна множина U – латинський алфавіт, який складається з 26 букв, а множини A , B , C та D такі
 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, g, p, t, v\}$,
 $C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\}$, $D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$.
86. Як можна використовуючи бітові рядки знайти об'єднання та перетин n множин, якщо всі вони – підмножини якоїсь універсальної множини U ?
87. Чому f – не функція з R в R ?
 а) $f(x) = 1/x$; б) $f(x) = \pm \sqrt{x^2 + 1}$.
88. Знайти область визначення та область значень для наведених нижче функцій:
 а) функція, яка ставить у відповідність кожному натуральному числу його останню цифру;

- б) функція, яка ставить у відповідність кожному натуральному числу наступне натуральне число;
 в) функція, яка ставить у відповідність кожному бітовому рядку кількість одиничних бітів у ньому;
 г) функція, яка ставить у відповідність кожному бітовому рядку кількість бітів у ньому.

89. Знайти наведені нижче значення:

а) $\lceil 5/6 \rceil$, $\lceil 15/8 \rceil$, $\lceil -3/4 \rceil$; б) $\lfloor -15/8 \rfloor$, $\lfloor 9.9 \rfloor$, $\lfloor 7/8 \rfloor$.

90. Визначити, які з наведених нижче функцій із множини $\{a, b, c, d\}$ у цю ж множину ін'єктивні:

а) $f(a)=b, f(b)=a, f(c)=c, f(d)=d$;

б) $f(a)=b, f(b)=b, f(c)=d, f(d)=c$;

в) $f(a)=d, f(b)=b, f(c)=c, f(d)=b$.

91. Визначити, які з функцій задачі 90 сюр'єктивні.

92. Визначити, які з наведених нижче функцій із множини Z у множини Z ін'єктивні.

а) $f(n)=n-1$; б) $f(n)=n^2+1$;

в) $f(n)=n^3$; г) $f(n)=\lceil n/2 \rceil$.

93. Визначити, які з функцій задачі 92 сюр'єктивні.

94. Навести приклад функції з множини N у множини N , яка:

а) ін'єктивна, але не сюр'єктивна;

б) сюр'єктивна, але не ін'єктивна;

в) одночасно ін'єктивна й сюр'єктивна (але відмінна від тотожної функції $f(n)=n$);

г) не ін'єктивна й не сюр'єктивна.

95. Визначити, які з наведених нижче функцій являють собою бієкції з R в R :

а) $f(x)=2x+1$; б) $f(x)=x^2+1$;

в) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=(x^2+1)/(x^2+2)$.

96. Нехай $f(x)$, $g(x)$ та $h(x)$ такі функції, що $f(x)=O(g(x))$ і $g(x)=O(h(x))$. Довести, що $f(x)=O(h(x))$.

97. Нехай k – натуральне. Довести, що $1^k+2^k+\dots+n^k=O(n^{k+1})$.

98. Для наведених нижче функцій дати настільки добру O -оцінку, наскільки це можливо:

а) $(n^2+8)(n+1)$; б) $(n \log n + n^2)(n^3+2)$;

в) $(n!+2^n)(n^3+\log(n^2+1))$.