РОЗДІЛ 1. Множини і відношення. Функції

Тема 2. Відношення еквівалентності

План лекції

- **Властивості бінарних відношень на множині**
- **Відношення еквівалентності.**
- **Конгруентність за модулем m**
- **Класи еквівалентності**

Властивості бінарних відношень на множині

Розглянемо властивості відношень на множині A.

Відношення R на множині A називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$;

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$;

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

$R_6 = \{(3, 4)\}$.

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні, бо вони містять **усі** пари вигляду (a, a), тобто пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4). Решта відношень не рефлексивні. Зокрема, R_1, R_2, R_4, R_6 не містять пари (3, 3).

Відношення R на множині A називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$.

Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1, R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині A називають *симетричним*, якщо для будь-яких $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \in R$.

У прикладі 4 лише відношення R_2 та R_3 симетричні.

Відношення R на множині A називають *антисиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, випливає, що $a = b$.

Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a).

У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4, R_5 та R_6. У кожному з них немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a, b) \in R$ та $(b, a) \in R$.

Важливо зазначити, що властивості симетричності й антисиметричності не антагоністичні: існують відношення, які мають обидві ці властивості.

Наприклад, відношення $R = \varnothing$ на множині $A = \{a\}$ водночас і симетричне, і антисиметричне.

Ще один приклад: відношення $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ (*діагональне відношення*) на множині $A = \{1, 2, 3.4\}$ є симетричним і антисиметричним одночасно.

Є також відношення, які не мають жодної з цих двох властивостей. **Наприклад**, відношення R_1 з прикладу 4 ані симетричне, ані антисиметричне.

Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх a, $b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \notin R$.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Відношення R на множині A називають *транзитивним*, якщо для будь-яких a, b, $c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, випливає $(a, c) \in R$.

Відношення R_4, R_5 та (зверніть увагу!) R_6 із прикладу 4 транзитивні. Справді, якщо пари (a, b) та (b, c) належать цим відношенням, то й пара (a, c) теж належить.

Відношення R_1, R_2, R_3 із прикладу 4 не транзитивні: $(3, 4) \in R_1$, $(4, 1) \in R_1$, але $(3, 1) \notin R_1$; $(2, 1) \in R_2$, $(1, 2) \in R_2$, але $(2, 2) \notin R_2$; $(2, 1) \in R_3$, $(1, 4) \in R_3$, але $(2, 4) \notin R_3$.

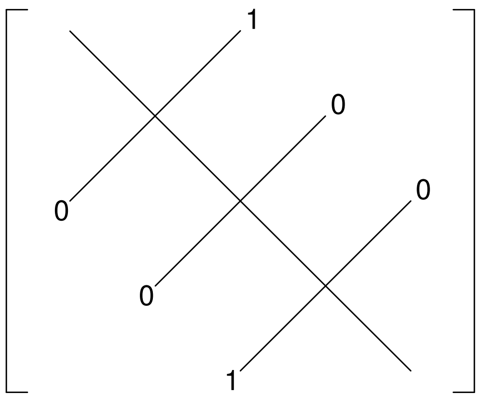


Рис. 2

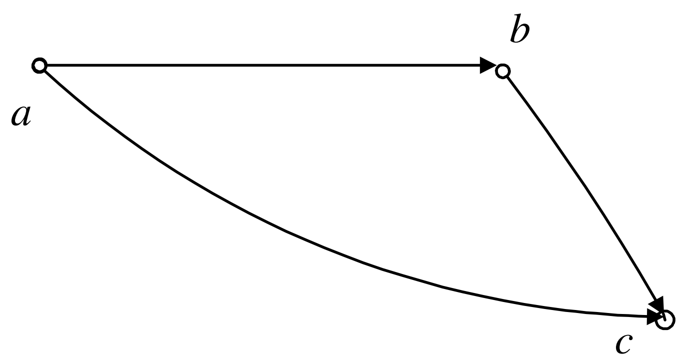
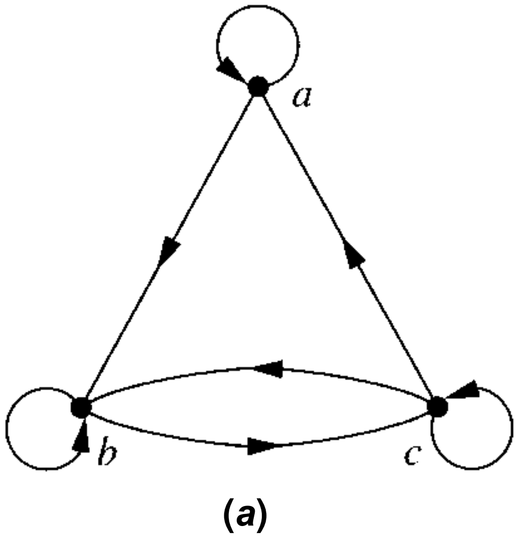


Рис. 3

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються на матрицях і графах цих відношень. Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі. Матриця M_R симетричного відношення симетрична. Матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij}=1$, випливає $m_{ji}=0$ (але може бути $m_{ij}=m_{ji}=0$) (рис. 2).

Граф G_R рефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині. У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) (рис. 3).

Приклад 5. На рис. 4 зображено орієнтовані графи відношень R та S. Для кожного з відношення визначити, чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним.



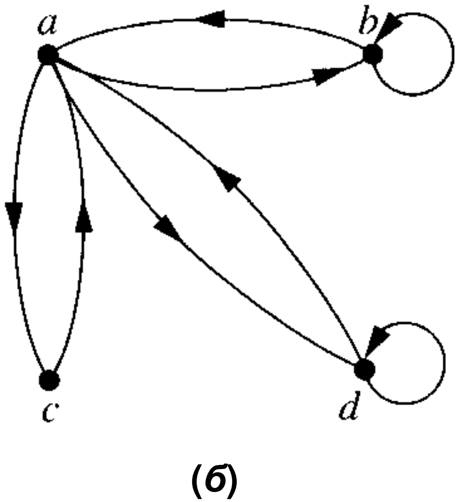


Рис. 4 (*а*) Орієнтований граф відношення *R* (*б*) Орієнтований граф відношення *S*

Оскільки в кожній вершині графа відношення R є петля, то це відношення рефлексивне. Відношення R ані симетричне, ані антисиметричне, бо дуга від a до b є, а дуги від b до a немає, але є дуги в обох напрямках між вершинами b та c. Нарешті, відношення R не транзитивне, бо є дуга від a до b і є дуга від b до c, але немає дуги від a до c.

Оскільки в графі відношення S петля не в кожній вершині, то відношення S не рефлексивне. Це відношення симетричне і не антисиметричне, бо для кожної дуги між різними вершинами є дуга протилежного напрямку. Неважко побачити, що відношення S не транзитивне, бо (c, a) та (a, b) належать S, але (c, b) не належить S.

Відношення еквівалентності

Розглянемо відношення, які водночас мають декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації.

Відношення на множині A називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Відношення еквівалентності дуже важливі в математиці та комп'ютерних науках.

Два елементи a та b, зв'язані відношенням еквівалентності, називають *еквівалентними*. Нотацію $a \sim b$ часто використовують щоб зазначити, що елементи a та b – еквівалентні елементи за якимось відношенням еквівалентності.

Два елементи множини A, пов'язані відношенням еквівалентності, називають *еквівалентними*. Оскільки відношення еквівалентності за означенням рефлексивне, то в будь-якому відношенні еквівалентності кожний елемент множини A еквівалентний до самого себе. Симетричність гарантує, що коли a еквівалентне до b, то і b еквівалентне до a, тому є сенс говорити, що a та b еквівалентні (замість a еквівалентне до b). Більше того, позаяк відношення еквівалентності за означенням транзитивне, то з того, що a та b еквівалентні й b та c еквівалентні, випливає, що a та c також еквівалентні.

Приклад 1. Нехай R – таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a = b)\vee(a = -b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому, являє собою відношенням еквівалентності.

Приклад 2. Нехай R – таке відношення на множині дійсних чисел: aRb тоді й лише тоді, коли $(a–b)$ – ціле число. Оскільки $a–a = 0$ ціле для всіх дійсних чисел a, то aRa для всіх дійсних чисел a. Отже, відношення R рефлексивне. Нехай тепер aRb. Звідси випливає, $a–b$ – ціле число. Але тоді $b–a$ також ціле, звідси bRa, тобто відношення R симетричне. Якщо aRb і bRc, то числа $a–b$ та $b–c$ цілі. Але тоді число $a–c = (a–b)+(b–c)$ також ціле, звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Отже, R – відношення еквівалентності на множині дійсних чисел.

Приклад 3. Конгруентність за модулем *m*. Нехай $m>1$ – ціле число. Доведемо, що $R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod m\}$ – відношення еквівалентності на множині Z цілих чисел.

За означенням $a \equiv b \pmod m$ означає, що m ділить $(a–b)$. Зазначимо, що $a–a = 0$ ділиться на m, бо $0 = 0\cdot m$. Отже, $a \equiv a \pmod m$, відношення рефлексивне. Далі, $a \equiv b \pmod m$, якщо $a–b = km$, де k – ціле число. Отже, $b–a = (–k)m$, тобто $b \equiv a \pmod m$, і відношення симетричне. Нарешті, нехай $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$. Це означає, що $a–b = km$, $b–c = lm$, де k, l – цілі числа.

Додамо останні дві рівності: $a–b+b–c = (k+l)m$, тобто $a–c = (k+l)m$. Звідси випливає, що $a \equiv c \pmod m$, відношення транзитивне. Отже, конгруентність за модулем m – відношення еквівалентності на множині цілих чисел.

Приклад 4. Нехай R – відношення на множині **рядків українських букв** таке, що aRb тоді й тільки тоді, коли $l(a)=l(b)$, де $l(x)$ – довжина рядка x. Чи є R відношенням еквівалентності?

Для будь-якого рядка a очевидно $l(a)=l(a)$, отже, відношення R рефлексивне. Тепер припустімо, що aRb, тому $l(a)=l(b)$. Але тоді $l(b)=l(a)$, тому bRa, отже, відношення R симетричне. Нарешті припустімо, що aRb і bRc. Тоді $l(a)=l(b)$ і $l(b)=l(c)$. Звідси слідує, що $l(a)=l(c)$ і aRc, тобто відношення R транзитивне. Тому що відношення R рефлексивне, симетричне й транзитивне, воно є відношенням еквівалентності.

Приклад 5. Нехай n – додатне ціле і S – множина двійкових рядків. Припустімо, що R_n – відношення на S таке, що sR_nt тоді й лише тоді, коли $s=t$ або обидва рядки s і t складаються щонайменше з n символів і перші n символів у рядках s і t однакові. Отже, кожен рядок довжиною менше ніж n є у відношенні тільки до самого себе; рядок s із щонайменше n символів є у відношенні до рядка t якщо і тільки якщо перші n символів у ньому ті самі, що і в рядку s. Наприклад, нехай $n=3$. Тоді $01R_301$ і $00111R_300101$, але $(01, 010)\notin R_3$ і $(01011, 01110)\notin R_3$.

Покажемо, що для будь-якої множини рядків S і для будь-якого додатного цілого n, R_n є відношенням еквівалентності на S.

Відношення R_n рефлексивне, бо $s=s$, отже sR_ns для будь-якого рядка з S. Якщо sR_nt, то тоді або $s=t$, або s і t мають щонайменше n символів і перші n символів однакові. Це означає, що tR_ns. Ми довели, що відношення R_n симетричне.

Тепер припустімо, sR_nt і tR_nu. Тоді або $s = t$, або s і t мають щонайменше n символів і перші n символів однакові. Аналогічно, або $t = u$ або t і u мають щонайменше n символів і перші n символів однакові. Тому в цьому випадку, як ми розуміємо, s, t і u складаються щонайменше з n символів кожний, та s і u мають першими n символами ті самі, що й t. Отже, sR_nu і відношення R_n транзитивне.

Отже, відношення R_n є відношенням еквівалентності.

У наступному прикладі ми розглянемо відношення, яке не є відношеннями еквівалентності.

Приклад 6. Нехай R – відношення на множині дійсних чисел таке, що xRy тоді й тільки тоді, коли $|x-y|<1$. Легко побачити, що це відношення рефлексивне, бо $|x-x|=0<1$ для будь-якого дійсного числа x. Відношення R симетричне, бо коли $|x-y|<1$, то і $|y-x|=|x-y|<1$ для будь-яких дійсних чисел x та y. Проте відношення R не є відношенням еквівалентності, бо воно не транзитивне.

Візьмемо $x=2.8$, $y=1.9$ і $z=1.1$. Тоді $|x-y|=|2.8-1.9|=0.9<1$, $|y-z|=|1.9-1.1|=0.8<1$, але $|x-z|=|2.8-1.1|=1.7>1$.

Класи еквівалентності

Почнемо з розгляду такого простого прикладу. Нехай A – множина учасників наукової конференції. Як R позначимо відношення на множині A яке містить усі пари (x, y), де x та y приїхали на конференцію з одного міста. Маючи на увазі якогось учасника x, ми можемо задати множину всіх учасників цієї конференції, еквівалентних до x за відношенням R. Ця множина містить усіх учасників, які приїхали на конференцію із того самого міста, що й учасник x. Цю підмножину множини A називають класом еквівалентності за відношенням R. Цей приклад приводить до такого означення.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елемента $a \in A$, називають *класом еквівалентності* (елемента a) *за відношенням* R, його позначають як $[a]_R$. Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення $[a]$ для цього класу еквівалентності.

Отже: $[a]_R = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}$. Елемент $b \in [a]_R$ називають *представником* цього класу еквівалентності. Будь-який елемент із класу еквівалентності може бути використаний як представник цього класу.

Приклад 7. Знайдемо класи еквівалентності відношення з прикладу 1. Оскільки ціле число еквівалентне до самого до себе та до протилежного числа, то класи еквівалентності за цим відношенням такі: $[a]=\{-a, a\}$, $a\neq 0$ та $[0]=\{0\}$. Зокрема, $[7] = \{-7, 7\}$, $[5] = \{-5, 5\}$,

Приклад 8. Знайдемо класи еквівалентності елементів 0 і 1 для відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 3). Клас еквівалентності елемента 0 містить усі цілі числа b такі, що $0 \equiv b \pmod 4$, тобто такі, що діляться на 4. Отже, $[0]=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$. Клас еквівалентності елемента 1 містить усі цілі числа b такі, що $1 \equiv b \pmod 4$. Звідси випливає, що $[1]=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$. Класи еквівалентності, подібні до розглянутих у цьому прикладі, називають *класами конгруентності за модулем m* і позначають як $[a]_m$.

Отже, $[0]_4=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$, $[1]_4=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Важливо зазначити, що класи еквівалентності, породжені двома елементами множини A, або збігаються, або не перетинаються. Про це твердить наступна лема.

Лема. Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Тоді такі твердження еквівалентні:

(I) aRb,
(II) $[a] = [b]$,
(III) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

Доведення. Спочатку доведемо, що з (I) випливає (II). Припустимо, що aRb. Щоб довести рівність $[a]=[b]$, покажемо, що $[a]\subset[b]$ та $[b]\subset[a]$. Нехай $c\in[a]$, тоді aRc. Оскільки aRb, а R – симетричне відношення, то bRa. Позаяк відношення R транзитивне, то з bRa й aRc випливає bRc, тому $c\in[b]$. Отже, $[a]\subset[b]$. Аналогічно можна довести, що $[b]\subset[a]$.

Доведемо тепер, що з (II) випливає (III). Справді $[a]\neq\varnothing$, бо $a\in[a]$ внаслідок рефлексивності. Отже, з $[a]=[b]$ випливає $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.

Нарешті, доведемо, що з (III) випливає (I). Припустимо, що $[a]\cap[b]\neq\varnothing$. Тоді існує такий елемент c, що $c\in[a]$ та $c\in[b]$, тобто aRc та bRc. Із симетричності відношення R випливає cRb. Оскільки відношення R транзитивне, то з aRc та cRb випливає aRb.

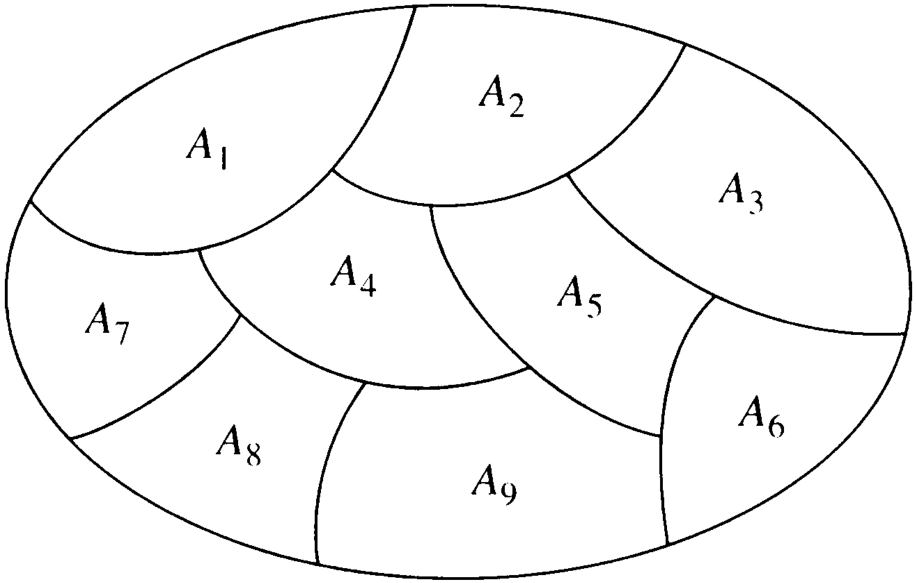
Позаяк з (I) випливає (II), з (II) випливає (III) та з (III) випливає (I), то твердження (I), (II), (III) еквівалентні.

Зауваження. Зверніть увагу на спосіб доведення цієї леми!

Відношення еквівалентності R, задане на множині A, тісно пов'язане з розбиттям цієї множини. Цей зв'язок виражено у двох наступних теоремах. Нагадаємо, що систему S підмножин множини A називають розбиттям цієї множини, якщо всі множини системи S непорожні, попарно не перетинаються, і об'єднання їх усіх дорівнює множині A. Більш докладно, розбиття множини A – це система S її підмножин A_i, $i \in I$ (де I – множина індексів), така, що виконуються умови:

1) $A_i \neq \varnothing$ для всіх $i \in I$;
2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ коли $i \neq j$;
3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

(Тут $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$ репрезентує об'єднання множин A_i для всіх $i \in I$.) Наступний рисунок ілюструє концепцію розбиття множини.



Приклад 9. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Система множин $S = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ – розбиття цієї множини.

Теорема 1. Кожне відношення еквівалентності R на множині A породжує розбиття множини A на класи еквівалентності.

Доведення. Об'єднання класів еквівалентності за відношенням R – це всі елементи множини A, бо будь-який елемент a з множини A міститься у своєму класі еквівалентності $[a]_R$. Інакше кажучи,

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

Із леми випливає, ці класи еквівалентності або співпадають, або не перетинаються, отже, $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$, коли $[a]_R \neq [b]_R$.

Ці два спостереження показують, що класи еквівалентності за відношенням еквівалентності R, заданим на множині A, формують розбиття цієї множини. Терему доведено.

Приклад 10. Відношення конгруентності за $\mathrm{mod}\,4$ (див приклад 8) породжує розбиття множини Z цілих чисел на 4 класи еквівалентності: $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ та $[3]_4$. Вони попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює множині Z.

Ось ці класи:

$[0]_4 = \{. . . ,−8,−4, 0, 4, 8, . . .\}$,
$[1]_4 = \{. . . ,−7,−3, 1, 5, 9, . . .\}$,
$[2]_4 = \{. . . ,−6,−2, 2, 6, 10, . . .\}$,
$[3]_4 = \{. . . ,−5,−1, 3, 7, 11, . . .\}$.

Загалом є m різних класів конгруентності за модулем m; вони відповідають m різним остачам, можливим при діленні цілого числа на m. Ці m класів позначають як $[0]_m$, $[1]_m$, …, $[m-1]_m$. Вони й формують розбиття множини цілих чисел за цим відношенням еквівалентності (тобто за відношенням конгруентності за модулем m).

Теорема 2. Будь-яке розбиття множини A визначає на множині A відношення еквівалентності.

Доведення. Нехай $a, b \in A$, будемо вважати, що aRb тоді й лише тоді, коли a та b належать одній множині розбиття. Залишилося довести, що одержане відношення на множині A являє собою відношенням еквівалентності. Для цього потрібно переконатись, що воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Справді, оскільки a належить якійсь множині розбиття, то aRa, тобто відношення рефлексивне. Нехай A_i – якась множина розбиття та $a, b \in A_i$. Тоді й $b, a \in A_i$, тобто з aRb випливає bRa. Симетричність доведено. Нарешті, із aRb і bRc випливає $a, b, c \in A_i$. Звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Теорему доведено.

Приклад 11. Записати упорядковані пари, які формують відношення еквівалентності, яке породжено розбиттям множини $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ із прикладу 9:

$$S=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}.$$

Тут $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{4, 6\}$, $A_3=\{5\}$. Пара $(a,b)\in R$ якщо і тільки якщо a та b в одній і тій самій множині розбиття. Пари $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$ і $(3,3)$ належать відношенню, бо $A_1=\{1, 2, 3\}$ – клас еквівалентності. Пари $(4,4)$, $(4,6)$, $(6,4)$ і $(6,6)$ належать відношенню R, бо множина $A_2=\{4, 6\}$ є класом еквівалентності. Нарешті, пара $(5,5)$ належить відношенню R, бо $A_3=\{5\}$ є класом еквівалентності. Ніякі інші пари відношенню еквівалентності R не належать.

© Щербина Ю.М., 2021