- Діаграма Гассе – графічне подання частково впорядкованої множини. Для її отримання в графі відношення вилучають усі петлі та усувають дуги, які наявні в ньому внаслідок транзитивності. Після цього розташовують на площині всі вершини графа так, щоб початкова вершина кожної дуги була нижче кінцевої вершини й усувають усі стрілки.
- Лінійний порядок, що сумісний із заданим частковим порядком R, – це лінійний порядок $\leq$ такий, що з aRb випливає $a \leq b$.
- Топологічне сортування – це побудова лінійного порядку, сумісного із заданим частковим порядком.
- Замикання відношення R за властивістю q – це найменше відношення C, яке має властивість q і таке, що $R \subset C$. Термін «найменше відношення» означає, що C є підмножиною будь-якого відношення S, для якого виконуються умови: 1) S має властивість q; 2) $R \subset S$.
- Шлях від елемента a до елемента b у відношенні R – це шлях з вершини a у вершину b в графі G_R відношення R.
- З'єднувальне відношення R^* складається з таких пар (a, b), що існує шлях від елемента a до елемента b у відношенні R.
- Рефлексивне замикання відношення R на множині A дорівнює $R \cup \Delta$, де $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$.
- Симетричне замикання відношення R на множині A дорівнює $R \cup R^{-1}$, де $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.
- Транзитивне замикання відношення дорівнює з'єднувальному відношенню, яке побудоване за заданим відношенням.
- Алгоритм Уоршалла – це алгоритм для знаходження транзитивного замикання відношення.
- n-арне відношення на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – це підмножина декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.
- Реляційна модель даних – модель для подання баз даних, яка ґрунтується на n-арних відношеннях.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Записати всі впорядковані пари, які утворюють відношення R із множини $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ в множину $B=\{0, 1, 2, 3\}$, де $(a, b) \in R$ якщо й лише якщо:

а) $a = b$;

б) $a + b = 4$;

в) $a > b$;

г) a ділить b;

д) НСД$(a, b) = 1$; (0; 1), (0

е) НСК$(a, b) = 2$.

Тут НСД – найбільший спільний дільник, НСК – найменше спільне кратне.

2. Для кожного з відношень на множині $\{1, 2, 3, 4\}$, наведених нижче, визначити, чи воно рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне:

а) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$;

б) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

в) $\{(2, 4), (4, 2)\}$;

г) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$;

д) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

е) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$.

3. Визначити, чи відношення R на множині всіх людей рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне, де $(a, b) \in R$ якщо й лише якщо:

а) a вищий, ніж b; ірр

б) a та b народилися в один і той самий день;

в) a має те саме прізвище, що й b;

г) a та b мають спільних дідуся й бабусю.

4. Визначити, чи відношення R на множині цілих чисел рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, де $(x, y) \in R$ якщо й лише якщо:

а) $x \neq y$;

б) $xy \geq 1$;

в) $x = y + 1$ або $x = y - 1$;

г) x та y обидва або від'ємні, або невід'ємні;

д) $x = y^2$;

е) $x \geq y^2$.

Нехай R – відношення з множини A в множину B. Відношення $\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$ називають *доповнювальним*. Відношення $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ із множини B в множину A називають *оберненим*.

5. Нехай R – відношення на множині цілих чисел, $R = \{(a,b) \mid a < b\}$. Знайти:

а) $\overline{R}$; б) R^{-1}.

6. Нехай R – відношення на множині натуральних чисел, $R = \{(a,b) \mid a \text{ ділить } b\}$. Знайти:

а) $\overline{R}$; б) R^{-1}.

7. Записати всі 16 різних відношень на множині $\{0, 1\}$. Скільки з них містять пару $(0, 1)$?

8. Скільки з 16 відношень на множині $\{0, 1\}$, записаних у розв'язанні задачі 7:

а) рефлексивні;

б) іррефлексивні;

в) симетричні;

г) антисиметричні;

д) асиметричні;

е) транзитивні?

9. Скільки різних відношень на множині з n елементів:

а) симетричні;

б) антисиметричні;

в) асиметричні;

г) іррефлексивні;

д) рефлексивні й симетричні;

е) ні рефлексивні, ні іррефлексивні?

10. Скільки є транзитивних відношень на множині з n елементів, якщо:

а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$?

11. Знайти помилку у «доведенні» такої «теореми».

Теорема. Нехай R – симетричне й транзитивне відношення на множині A. Тоді R рефлексивне.

Доведення. Нехай $a \in A$. Виберемо такий елемент $b \in A$, що $(a, b) \in R$. Оскільки відношення R симетричне, то й $(b, a) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$ випливає $(a, a) \in R$. Отже, відношення R рефлексивне.

12. Довести, що відношення R на множині A симетричне тоді й лише тоді, коли $R = R^{-1}$, де R^{-1} – обернене відношення (див. інформацію перед задачею 5).

13. Довести, що відношення R на множині A антисиметричне тоді й лише тоді, коли $R \cap R^{-1}$ – підмножина діагонального відношення $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

14. Довести, що відношення R на множині A рефлексивне тоді й лише тоді, коли обернене відношення R^{-1} рефлексивне.

15. Довести, що відношення R на множині A рефлексивне тоді й лише тоді, коли доповнювальне відношення $\overline{R}$ іррефлексивне (див. інформацію перед задачею 5).

16. Задати кожне з відношень на множині $\{1, 2, 3\}$, наведених нижче, за допомогою матриці:

а) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$;

б) $\{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$;

в) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$;

г) $\{(1,3),(3,1)\}$.

17. Виписати впорядковані пари елементів відношення на множині $\{1,2,3\}$, які відповідають наведеним нижче матрицям (рядки та стовпці відповідають числам, розміщеним у порядку зростання):

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Визначити, які з цих відношень рефлексивні, іррефлексивні, симетричні, антисиметричні, асиметричні, транзитивні.

18. Для кожного з відношень задачі 16 побудувати граф.

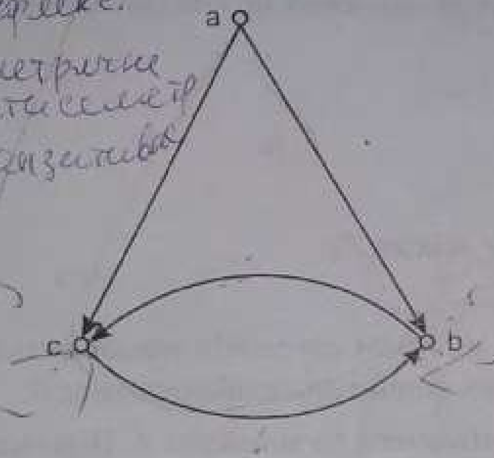
19. Для кожного з відношень задачі 17 побудувати граф.

20. На множині $A=\{a, b, c, d\}$ задано відношення $R=\{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$. Побудувати граф цього відношення.

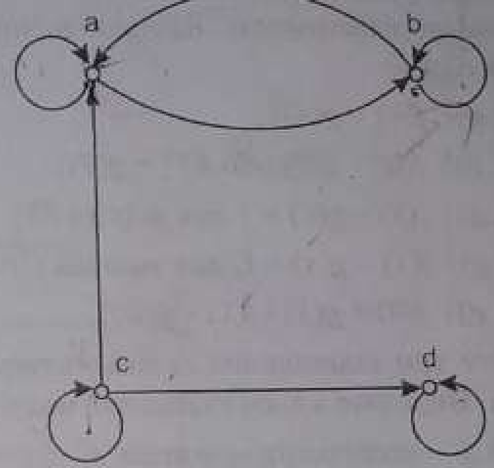
21. Записати впорядковані пари елементів, які утворюють кожне відношення, подане графами, і визначити властивості цих відношень.

рефлекс.

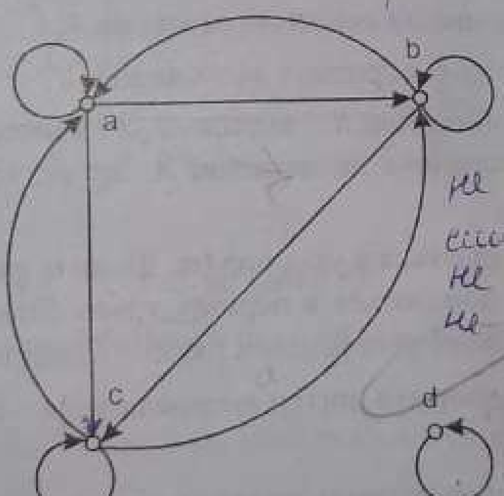
ні симетричне
ні антисиметр
не транзитивне



а)



б)



не рефлекс.
симетричне
не антисиметр
не транзитивне

в)

22. Які з наведених нижче відношень на множині $\{0, 1, 2, 3\}$ являють собою відношеннями еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

а) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

б) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;

в) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;

г) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;

д) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$.

23. Які з наступних відношень на множині всіх людей являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

а) $\{(a, b) \mid a$ та b одного віку$\}$;

б) $\{(a, b) \mid a$ та b мають одних і тих самих батьків$\}$;

в) $\{(a, b) \mid a$ та b мають спільного одного з батьків$\}$;

г) $\{(a, b) \mid a$ та b зустрілись$\}$;

д) $\{(a, b) \mid a$ та b розмовляють спільною мовою$\}$.

24. Які з наступних відношень на множині всіх функцій із Z у Z являють собою відношення еквівалентності? Зазначити, чому інші відношення не є відношеннями еквівалентності:

а) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$;

б) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0)$ або $f(1) = g(1)\}$;

в) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1$ для всіх $x \in Z\}$;

г) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = C$ для якогось $C \in Z$ і для всіх $x \in Z\}$;

д) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1)$ і $f(1) = g(0)\}$.

25. Задайте три відношення еквівалентності на множині студентів вашої академічної групи. Визначте класи еквівалентності для цих відношень еквівалентності.

26. Нехай A – непорожня множина, f – функція, визначена на множині A. Відношення R складається з усіх упорядкованих пар (x, y) таких, що $f(x) = f(y)$:

а) довести, що R – відношення еквівалентності на A;

б) які класи еквівалентності породжує відношення R?

27. Нехай A – непорожня множина, R – відношення еквівалентності на A. Довести, що існує така функція, визначена на множині A, що $(x, y) \in R$ тоді й лише тоді, коли $f(x) = f(y)$.

28. Відношення R, яке складається з усіх пар (α, β), де α та β – бітові рядки довжиною не менше ніж три, що збігаються в перших трьох бітах, являє собою відношення еквівалентності на множині всіх бітових рядків. Довести.

29. Довести, що тотожність формул логіки висловлювань – відношення еквівалентності на множині всіх формул.

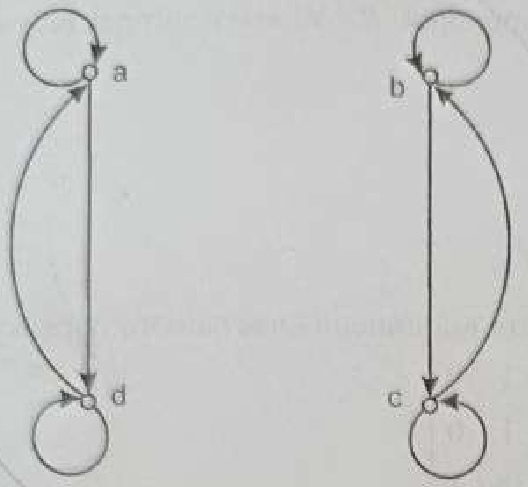
30. Визначити, які з наведених матриць подають відношення еквівалентності:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

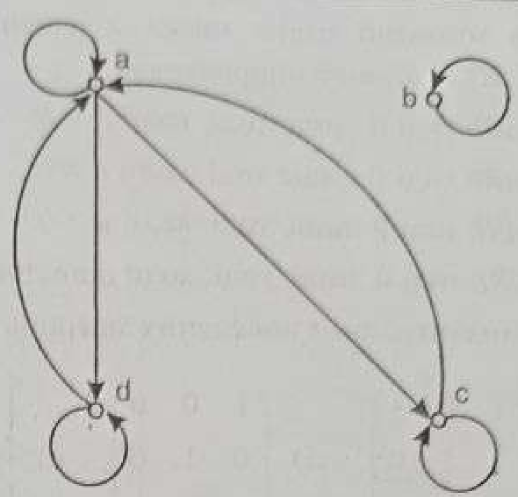
31. Визначити, які з графів являють собою графи відношень еквівалентності (див. рис. до задачі).

32. Довести, що відношення R на множині всіх бітових рядків таке, що $\alpha\ R\ \beta$ тоді й лише тоді, коли α та β мають однакову кількість одиниць, являє собою відношення еквівалентності.

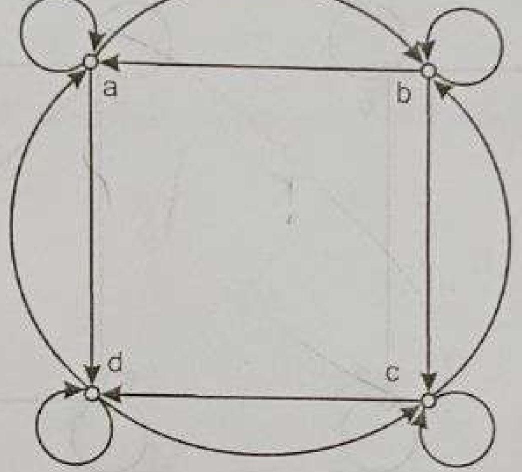
33. Для відношень еквівалентності із задач 22–24 наведіть класи еквівалентності.



а)



б)



в)

Рис. до задачі 31.

34. Знайти клас еквівалентності бітового рядка 011 для відношення еквівалентності із задачі 32.

35. Для бітових рядків, наведених нижче, знайти класи еквівалентності відношення еквівалентності із задачі 28:

а) 010; б) 1011; в) 11111; г) 01010101.

36. Знайти класи конгруентності $[4]_m$ для таких значень m:

а) 2; б) 3; в) 6; г) 8.

37. Опишіть кожний із класів конгруентності за mod 6.

38. Які з наступних систем підмножин – розбиття множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Для кожної системи підмножин, що являє собою розбиттям множини A, побудувати відповідне відношення еквівалентності на множині A:

а) {~~{1, 2},~~ {2, 3, 4}, {4, 5, 6}}; б) {{1}, {2, 3, 6}, {4}, {5}};

в) {{2, 4, 6}, {1, 3, 5}}; г) {{1, 4, 5}, {2, 6}}.

39. Скільки різних відношень еквівалентності можна задати на множині з чотирьох елементів?

40. На множині цілих чисел Z задано відношення R. У яких випадках множина (Z, R) частково впорядкована:

а) aRb тоді й лише тоді, коли $a = b$;

б) aRb тоді й лише тоді, коли $a \neq b$;

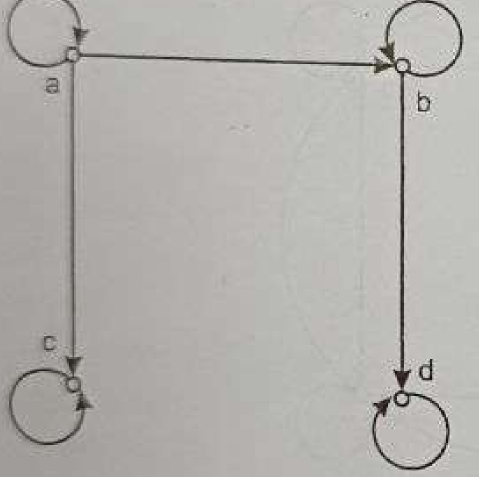
в) aRb тоді й лише тоді, коли $a \geq b$;

г) aRb тоді й лише тоді, коли a не ділить b?

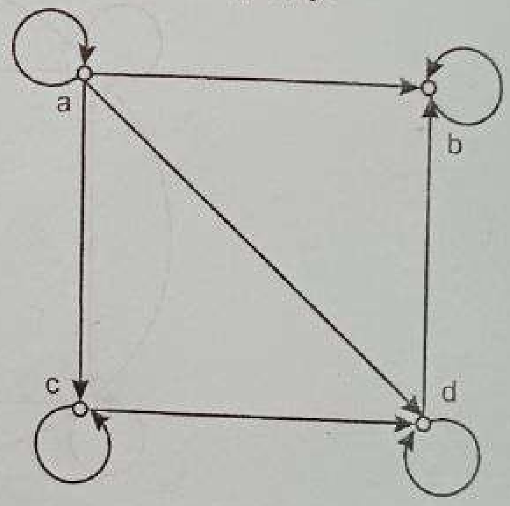
41. Визначити, які з наведених матриць подають відношення часткового порядку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

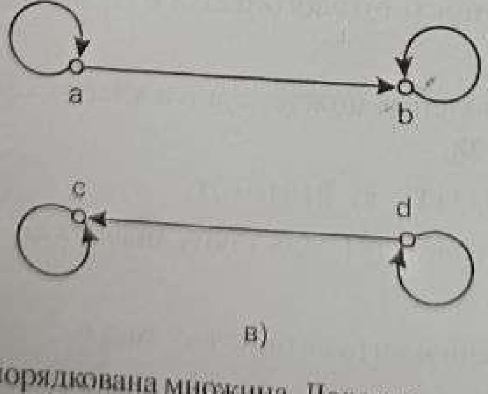
42. Які з наведених графів подають відношення часткового порядку?



а)



б)



в)

43. Нехай (A, R) – частково впорядкована множина. Довести, що множина (A, R^{-1}) також частково впорядкована. Тут R^{-1} – обернене відношення (див. інформацію перед задачею 5).

44. Побудувати діаграму Гассе для відношення «більше чи дорівнює» на множині $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

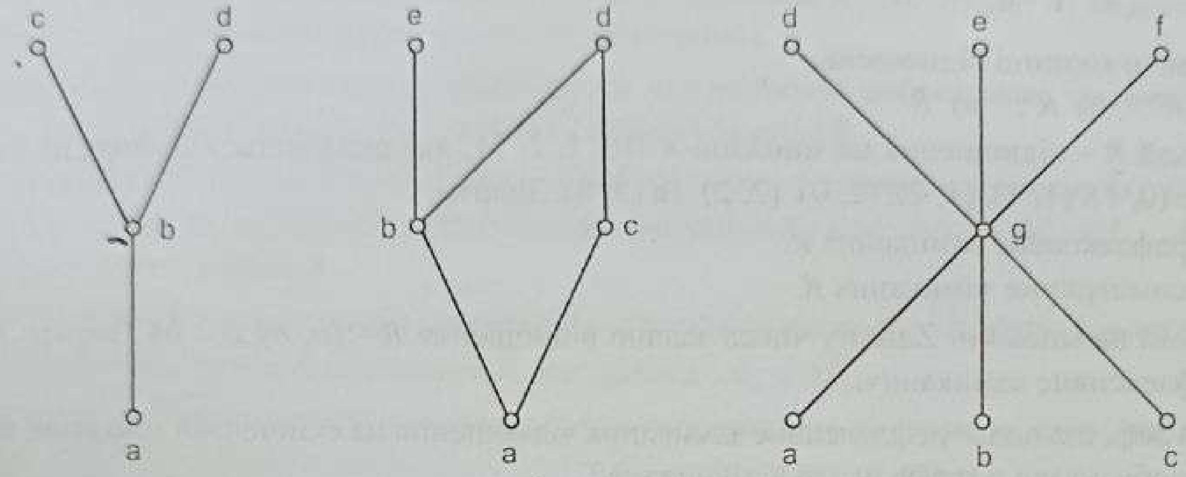
45. Побудувати діаграму Гассе для відношення $R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}$ на множині A:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; б) $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;

в) $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$; г) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

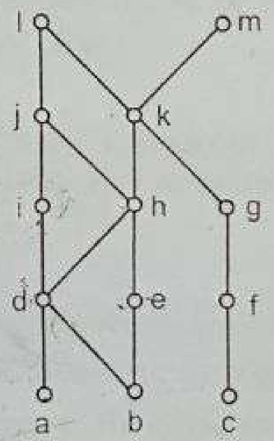
46. Побудувати діаграму Гассе для відношення $R = \{(A, B) \mid A \subset B\}$ на булеані $P(A)$, де $A = \{a, b, c\}$ (див. підрозділ 1.12).

47. Записати всі впорядковані пари відношення часткового порядку з такою діаграмою Гассе:



а) б) в)

48. Для відношення часткового порядку, поданого діаграмою Гассе, знайти максимальні та мінімальні елементи.



49. Для частково впорядкованої множини (A, R), де $A = \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$, $R = \{(a, b) \mid a$ ділить $b\}$, знайти максимальні та мінімальні елементи.

50. Виконати топологічне сортування для частково впорядкованої множини, заданої діаграмою Гассе із задачі 48.

51. Виконати топологічне сортування для частково впорядкованої множини (A, R), де $A = \{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$, $R = \{(a, b) \mid a$ ділить $b\}$.

52. Знайти відмінну від наведеної в прикладі 5.17 послідовність робіт для виконання завдань, з яких складається проект комп'ютерної компанії.

53. Нехай R та S – відношення на множині $A=\{1, 2, 3\}$, задані матрицями

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці відношень:

а) $R \cup S$; б) $R \cap S$; в) $R \oplus S$; г) $S \circ R$; д) $R \circ R$.

54. Нехай відношення R задано матрицею

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці відношень:

а) R^2; б) R^3; в) R^4.

55. Нехай R – відношення на множині $A=\{0, 1, 2, 3\}$, яке складається з упорядкованих пар (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2) та (3, 0). Знайти:

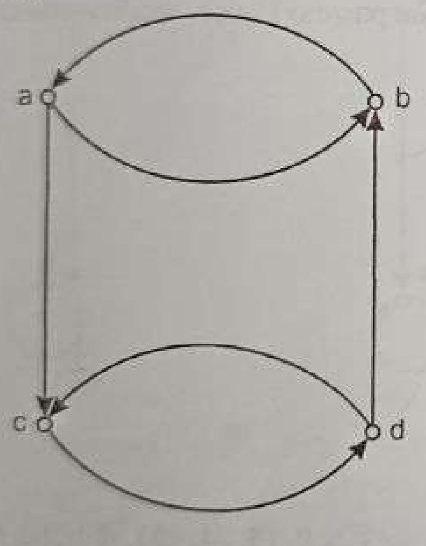
а) рефлексивне замикання R;

б) симетричне замикання R.

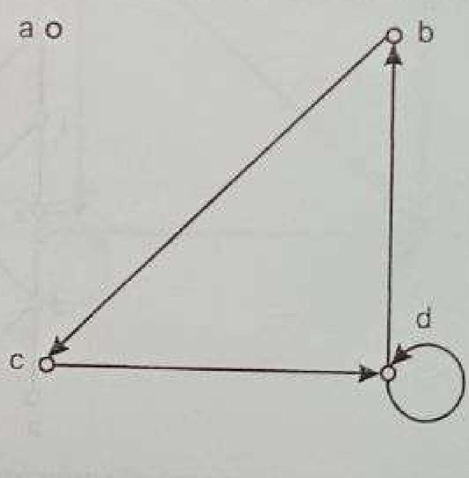
56. Нехай на множині Z цілих чисел задано відношення $R=\{(a, b) | a \neq b\}$. Знайти його рефлексивне замикання.

57. Як граф, що подає рефлексивне замикання відношення на скінченній множині, можна побудувати з графа цього відношення?

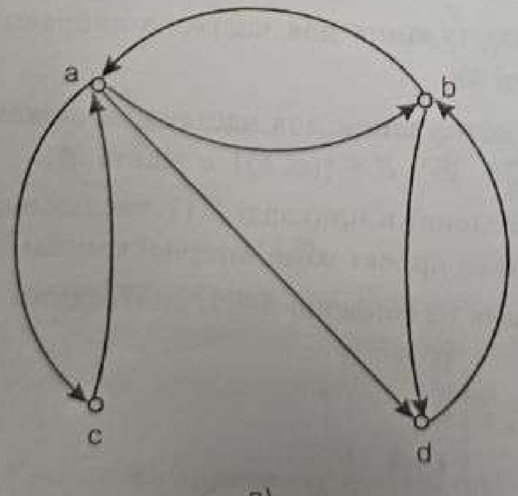
58. Побудувати граф рефлексивного замикання для кожного з відношень, поданих графами:



а)



б)



в)

59. Як граф, що подає симетричне замикання відношення на скінченній множині, можна побудувати з графа цього відношення?

60. Побудувати графи симетричного замикання відношень, поданих графами задачі 58.

61. Знайти найменше відношення, яке містить відношення $R=\{(a, b)| \ a > b\}$ на множині цілих чисел і водночас рефлексивне та симетричне.

62. Побудувати граф найменшого відношення, яке водночас рефлексивне та симетричне, для кожного з відношень, поданих графами задачі 58.

63. Відношення R на скінченній n-елементній множині A подано матрицею M_R. Довести, що матриця, яка подає рефлексивне замикання R, має вигляд $M_R \vee I_n$, де I_n – одинична $n{\times}n$ матриця.

64. Відношення R на скінченній множині A подано матрицею M_R. Довести, що матриця, яка подає симетричне замикання R, має вигляд $M_R \vee M_R^T$.

65. Довести, що замикання відношення R за властивістю q, якщо воно існує, являє собою перетин усіх відношень, що містять R і мають властивість q.

66. Нехай R – відношення на множині $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, яке складається з упорядкованих пар $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$. Знайти:

а) R^2, б) R^3, в) R^4, г) R^5, д) R^6, е) R^*.

67. Нехай відношення R утворено парами (a, b), де a та b – міста, між якими є пряма авіалінія. Коли пара (a, b) міститься в:

а) R^2, б) R^3, в) R^*?

68. Нехай R – відношення на множині всіх студентів, яке складається з усіх пар (a, b), де студенти a та b слухають принаймні один спільний курс і $a{\neq}b$. Коли пара (a, b) міститься в:

а) R^2, б) R^3, в) R^*?

69. Нехай відношення R рефлексивне. Довести, що відношення R^* також рефлексивне.

70. Нехай відношення R симетричне. Довести, що відношення R^* також симетричне.

71. Нехай відношення R іррефлексивне. Чи обов'язково буде іррефлексивним відношення R^2?

72. За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання відношень на множині $\{1, 2, 3, 4\}$:

а) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$;

б) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

в) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;

г) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.

73. За алгоритмом Уоршалла побудувати транзитивні замикання відношень на множині $\{a, b, c, d, e\}$:

а) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$;

б) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$;

в) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$;

г) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$