
2次元高速フーリエ変換

フーリエ級数展開

フーリエ級数展開:

任意の周期関数は三角関数の無限級数で表せる

フーリエ級数展開式 $g(t)$ 周期関数, T 周期

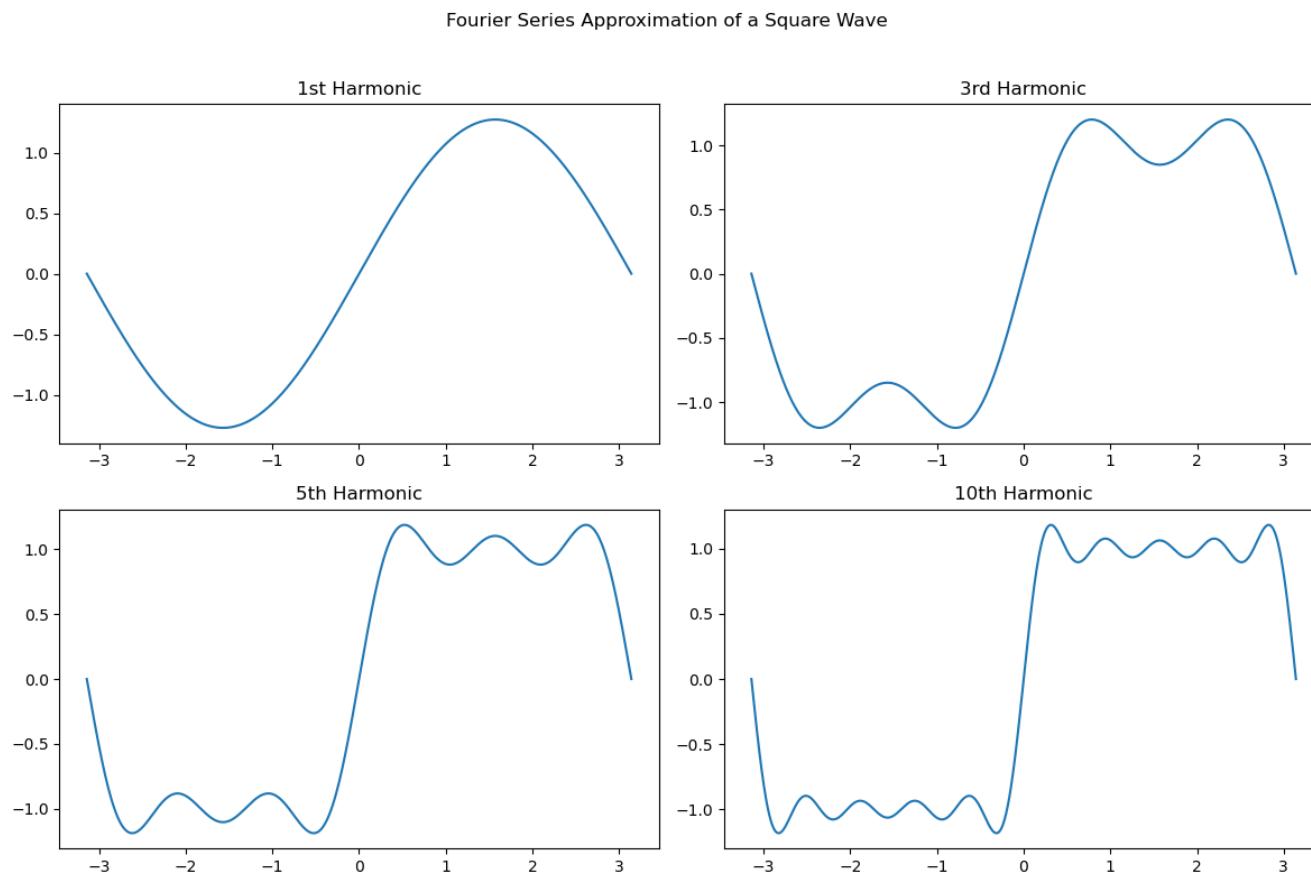
$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + a_3 \cos \frac{6\pi}{T} t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin \frac{4\pi}{T} t + b_3 \sin \frac{6\pi}{T} t + \dots \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt$$

フーリエ級数展開の例

例：矩形波信号をフーリエ級数展開で表現
次数を増やすほど、矩形波に近づいていく



複素数

二つの実数 x, y が与えられたとき, これに虚数単位 $j = \sqrt{-1}$ をつけて
以下のように表現したものを複素数と呼ぶ

$$z = x + jy$$

x を複素数 z の実部, y を虚部といい, それぞれ以下のように表現できる

$$x = \operatorname{Re}[z]$$

$$y = \operatorname{Im}[z]$$

複素数 z において, その虚部の符号を変えたものを z の複素共役という

$$z^* = x - jy$$

複素数 z とその複素共役 z^* の和と積はそれぞれ実数となる

和: $z + z^* = 2x$

積: $zz^* = x^2 + y^2$

複素平面

複素数は、 x を横座標、 y を縦座標とする二次元平面上の一つの点として表示することができる。この平面は複素平面と呼ばれる。

複素平面における z の原点からの距離を r とすると、
三平方の定理から

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}$$

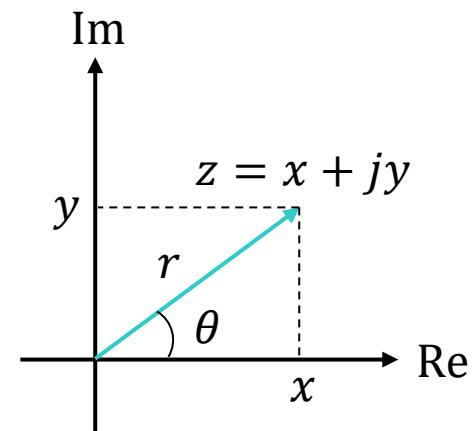
この r は、複素数 z の絶対値と呼ばれ、 $|z|$ と記す。
また、 z と原点を結ぶ直線と横軸との間で
なす角 θ は、 z の偏角とよばれ、 $\arg(z)$ と記す。
このとき、

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

と表されるため、 z は以下のように極形式で
表すことができる

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$



オイラーの公式

極形式は、オイラーの公式を用いて簡潔に表現できる。
オイラーの公式は次式で与えられる。

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

このとき、 z は以下のように表現できる。

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta}$$

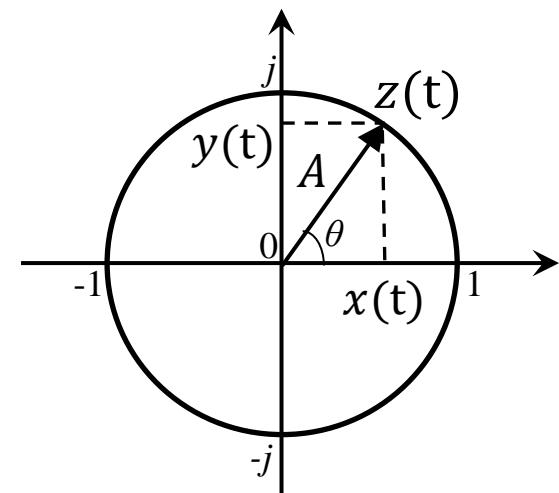
また、複素平面上で半径 A の円運動を考える。
偏角の時間変化を $\theta = \omega t$ とおくと(ω 角周波数)
実部と虚部は、それぞれ正弦波信号で表される。

実部: $x(t) = A \cos \omega t$

虚部: $y(t) = A \sin \omega t$

このとき、複素正弦波信号は以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + jy(t) \\ &= A(\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= Ae^{j\omega t} \end{aligned}$$

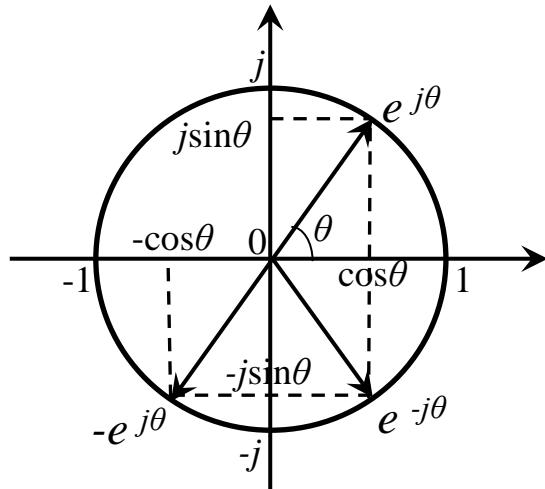


複素フーリエ級数展開

複素正弦波信号を用いて、
正弦波信号は以下のように表現できる。

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



これらの式をフーリエ級数展開の式に代入してまとめると、

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

周期関数の複素フーリエ級数展開

フーリエ変換(FT)とフーリエ逆変換(IFT)

フーリエ級数展開を非周期信号へ拡張したものがフーリエ変換となる
フーリエ級数展開の式を改めて示す

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

ここで T を有限値とすると、

周波数間隔 $\Delta f = \frac{1}{T}$ となり、離散的な周波数 $f_n = n\Delta f$ で表現できる

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi f_n t}$$

$$G_n = \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

フーリエ変換(FT)とフーリエ逆変換(IFT)

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi f_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} e^{j2\pi f_n t}$$

式を整理すると、

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} e^{j2\pi f_n t} \Delta f$$

$T \rightarrow \infty$ とすると、総和は積分となり、
離散的な周波数 f_n は、連続周波数 f で表現できる

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \right\} e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

フーリエ変換

フーリエ変換と逆変換(周波数表示)

フーリエ変換 $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$

フーリエ逆変換 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$

角周波数 $\omega = 2\pi f$ を用いても表現できる。

このとき, $df = \frac{1}{2\pi} d\omega$ であるから, フーリエ変換と逆変換(角周波数表示)は,

フーリエ変換 $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$

フーリエ逆変換 $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

振幅スペクトル・位相スペクトル

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

は複素数となる。実数部を $\text{Re}(G(f))$ 、虚数部を $\text{Im}(G(f))$ と表現すれば

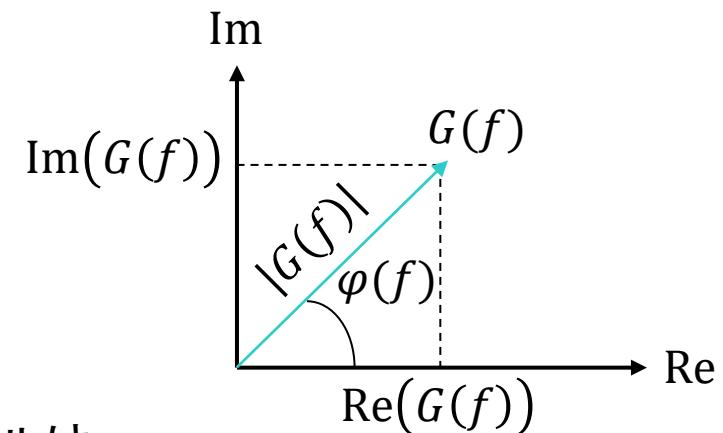
$$G(f) = \text{Re}(G(f)) + j\text{Im}(G(f))$$

となり、複素平面上のベクトルとなる。

このとき、振幅スペクトルと位相スペクトルは
以下のように計算できる

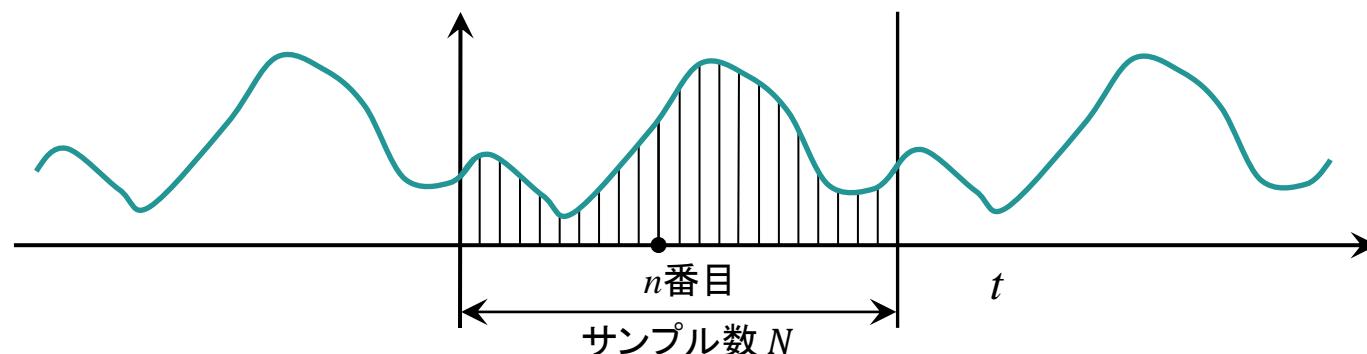
振幅スペクトル $|G(f)| = \sqrt{\text{Re}(G(f))^2 + \text{Im}(G(f))^2}$

位相スペクトル $\varphi(f) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G(f))}{\text{Re}(G(f))} \right\}$



離散フーリエ変換(DFT)

コンピュータで扱うデータは有限



サンプル周期内の関数が繰り返される周期関数を考える。

フーリエ変換の式について、時間信号を $t = n$, 周波数信号を $f = k/N$ と離散化を行うと、有限データに対する離散フーリエ変換(DFT)式は、

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

離散フーリエ逆変換(IDFT)式は、

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

離散フーリエ変換(DFT)

再度、離散フーリエ変換式を示す。

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

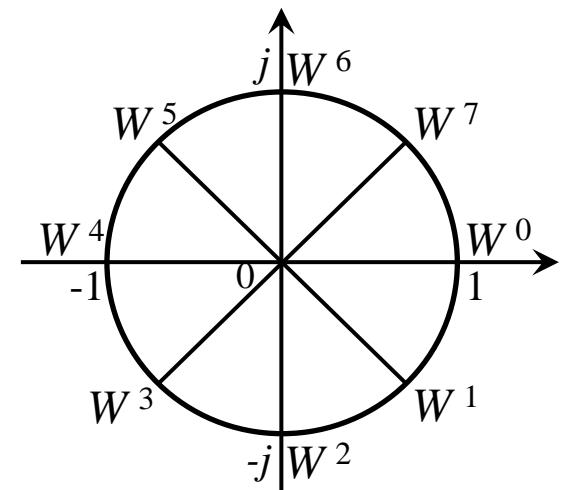
ここで、式中の指数関数部分を回転因子という。

$$W_N = \exp\left(-\frac{j2\pi}{N}\right) \text{ と置くと,}$$

$$W_N^{kn} = \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad W_N^{-kn} = \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

$$G(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W_N^{kn}$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k) W_N^{-kn}$$



離散フーリエ変換(DFT)

$N = 8$ のとき

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \\ G_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\ W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \\ g(4) \\ g(5) \\ g(6) \\ g(7) \end{bmatrix}$$

対称

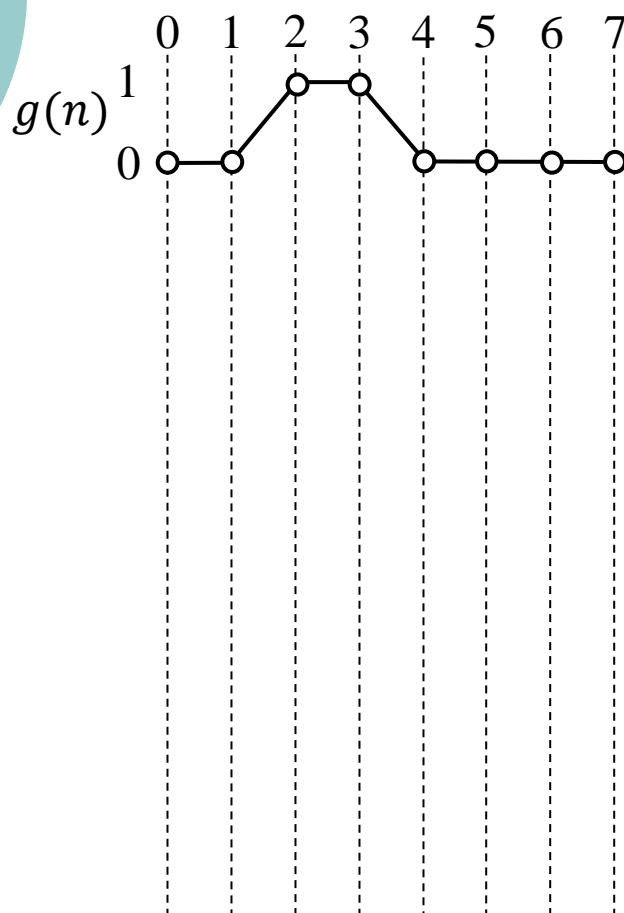
ここで $G(k) = G_k$ としている。

N 個の信号 $g(n)$ を行列 Q で表す。このとき、 $G(n)$ を行列 G 、回転因子を要素とする行列 W_N とすると、DFT は以下のように表現できる

$$G = W_N Q$$

離散フーリエ変換(DFT)

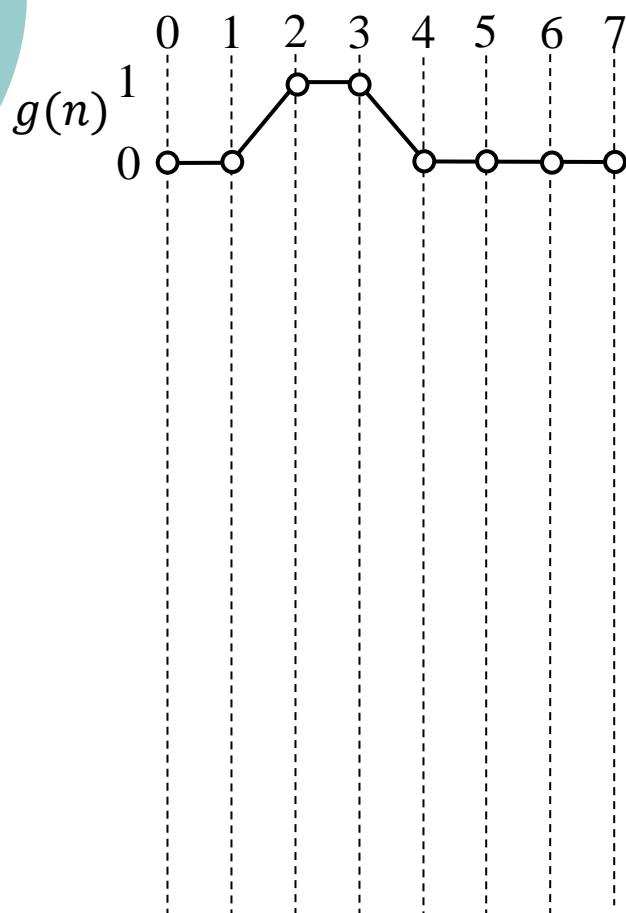
例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



ヒント: 最初に回転子を求める。

離散フーリエ変換(DFT)

例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



ヒント: 最初に回転子を求める。

$$W^{nk} = \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad W^{-nk} = \exp\left(j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$W^0 = \exp(-j0) = 1$$

$$W^1 = \exp\left(-j\frac{2\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$W^2 = \exp\left(-j\frac{4\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$W^3 = \exp\left(-j\frac{6\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$W^4 = \exp\left(-j\frac{8\pi}{8}\right) = e^{-j\pi} = -1$$

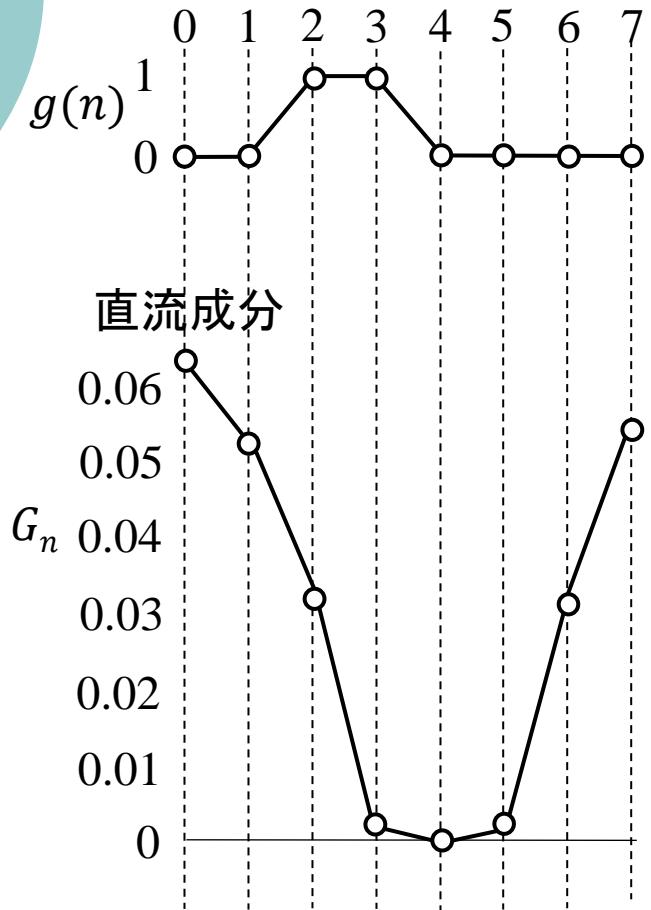
$$W^5 = \exp\left(-j\frac{10\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{5\pi}{4}} = e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$W^6 = \exp\left(-j\frac{12\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{3\pi}{2}} = j$$

$$W^7 = \exp\left(-j\frac{14\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{7\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

離散フーリエ変換(DFT)

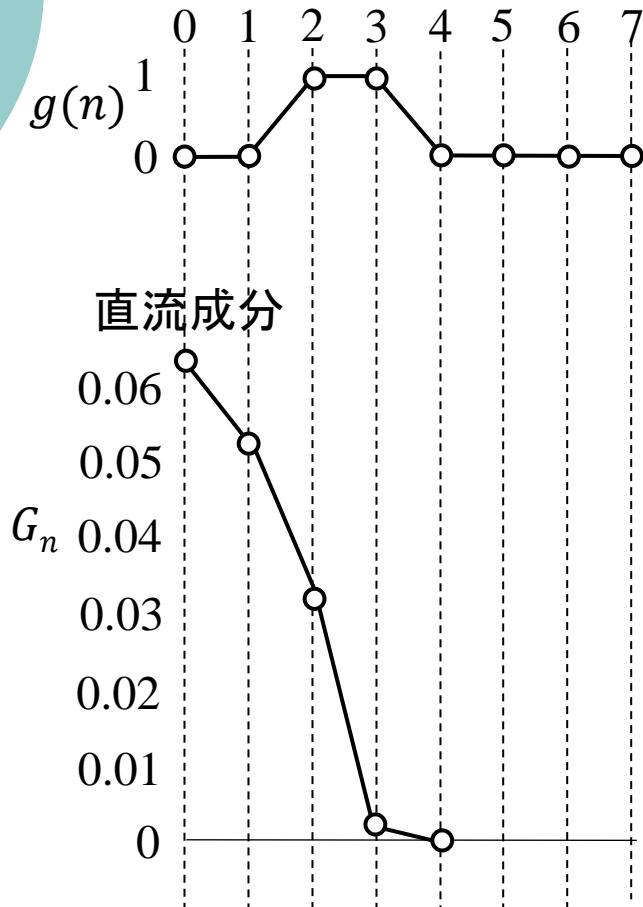
例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



$$G_0 = \frac{1}{8} \{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \therefore |G_0|^2 = 0.0625$$
$$G_1 = \frac{1}{8} \left\{ 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1 \cdot (-j) + 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot j + 0 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \right\}$$
$$= \frac{1}{8} \left\{ -j + e^{-j\frac{3\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} - j \cdot \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_1|^2 = 0.05335$$
$$G_2 = \frac{1}{8} \{-1 + j\} \quad \therefore |G_2|^2 = 0.03125$$
$$G_3 = \frac{1}{8} \left\{ j + e^{-j\frac{\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + j \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_3|^2 = 0.00915$$
$$G_4 = \frac{1}{8} \{1 - 1\} = 0 \quad \therefore |G_4|^2 = 0$$
$$G_5 = \frac{1}{8} \left\{ -j + e^{j\frac{\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} - j \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_5|^2 = 0.00915$$
$$G_6 = \frac{1}{8} \{-1 - j\} \quad \therefore |G_6|^2 = 0.03125$$
$$G_7 = \frac{1}{8} \left\{ j + e^{j\frac{3\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} + j \cdot \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_7|^2 = 0.05335$$

離散フーリエ変換(DFT)

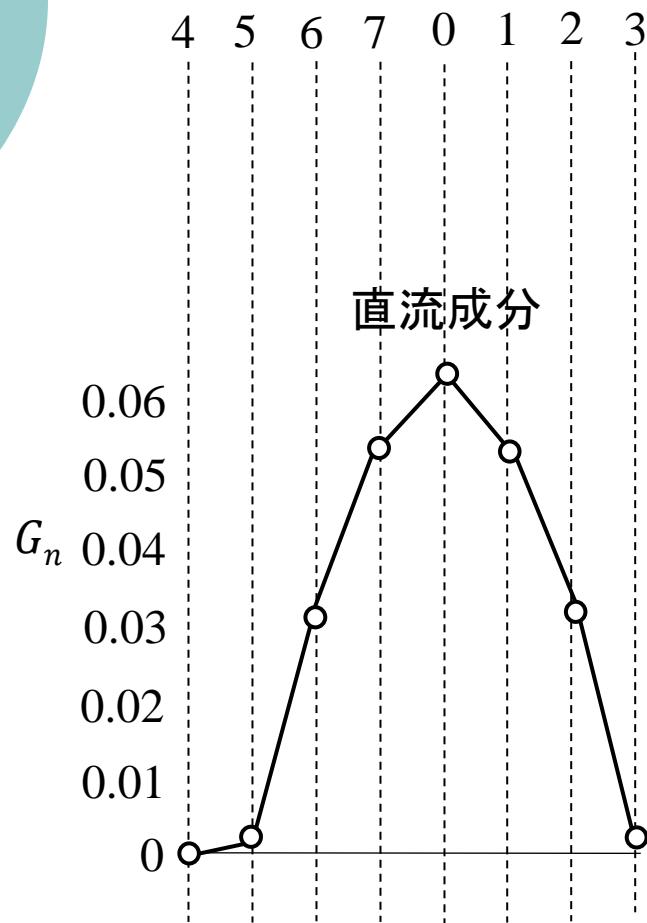
例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



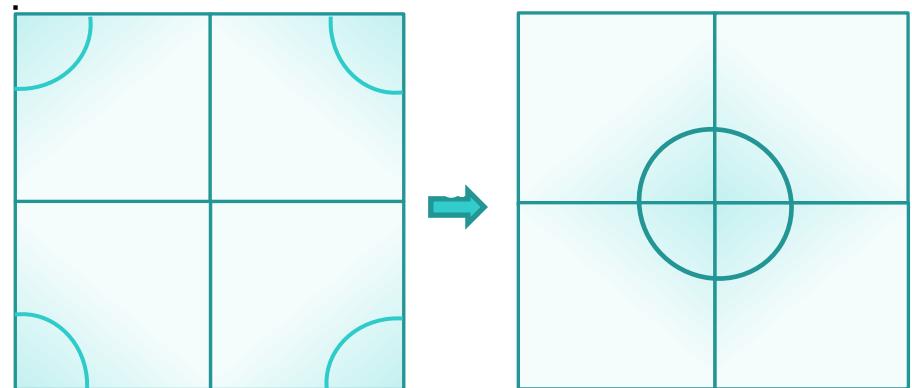
$$G_0 = \frac{1}{8} \{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$\therefore |G_0|^2 = 0.0625$$
$$G_1 = \frac{1}{8} \left\{ 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1 \cdot (-j) + 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot j + 0 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \right\}$$
$$= \frac{1}{8} \left\{ -j + e^{-j\frac{3\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} - j \cdot \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\}$$
$$\therefore |G_1|^2 = 0.05335$$
$$G_2 = \frac{1}{8} \{-1 + j\}$$
$$\therefore |G_2|^2 = 0.03125$$
$$G_3 = \frac{1}{8} \left\{ j + e^{-j\frac{\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + j \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$
$$\therefore |G_3|^2 = 0.00915$$
$$G_4 = \frac{1}{8} \{1 - 1\} = 0$$
$$\therefore |G_4|^2 = 0$$
$$G_5 = \frac{1}{8} \left\{ -j + e^{j\frac{\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} - j \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$
$$\therefore |G_5|^2 = 0.00915$$
$$G_6 = \frac{1}{8} \{-1 - j\}$$
$$\therefore |G_6|^2 = 0.03125$$
$$G_7 = \frac{1}{8} \left\{ j + e^{j\frac{3\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} + j \cdot \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\}$$
$$\therefore |G_7|^2 = 0.05335$$

離散フーリエ変換(DFT)

光学系に合わせるため、左右の計算値を入れ替える。



画像の場合も上下左右の計算値を入れ替える



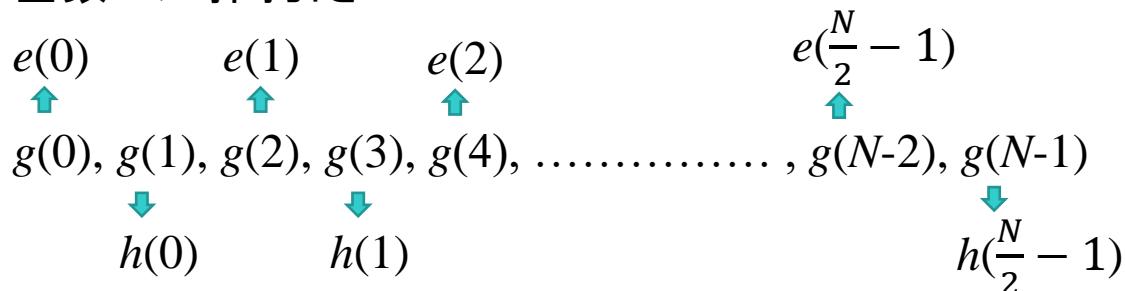
高速フーリエ変換(FFT)

FFT: fast Fourier transform

離散フーリエ変換(DFT)式

$$G_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) W_N^{nk}$$

基底2の時間引きFFT



偶数番目のサンプルからなる数列 $e(n)$

奇数番目のサンプルからなる数列 $h(n)$

ただし, $e(n) = g(2n),$

$$h(n) = g(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

高速フーリエ変換(FFT)

$$G(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) W_N^{nk}$$

$$\begin{aligned} &= g(0)W_N^{0n} + g(2)W_N^{2n} + \dots + g\left(2\left(\frac{N}{2}-1\right)\right)W_N^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)n} \\ &\quad + g(1)W_N^{1n} + g(3)W_N^{3n} + \dots + g\left(2\left(\frac{N}{2}-1\right)+1\right)W_N^{\left(2\left(\frac{N}{2}-1\right)+1\right)n} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \{e(k)W_N^{n(2k)} + h(k)W_N^{n(2k+1)}\}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e(k)W_N^{n(2k)} + W_N^n \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k)W_N^{n(2k)}$$

高速フーリエ変換(FFT)

ここで、周期が $N/2$ (半分) の 2 つの DFT を考える

$$E(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e(k) W_{N/2}^{nk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e(k) W_N^{n(2k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

$$H(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k) W_{N/2}^{nk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k) W_N^{n(2k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

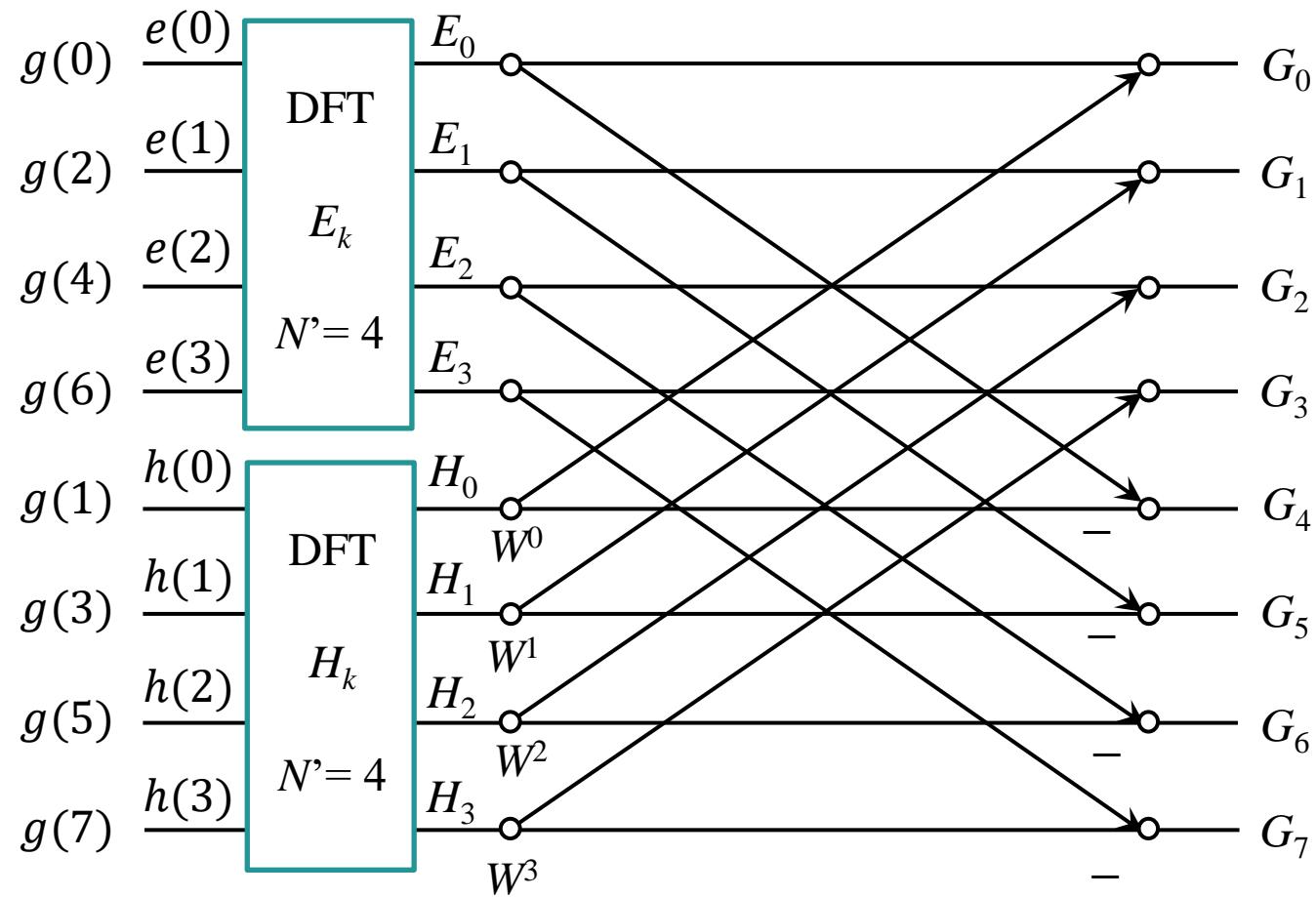
このとき、 $G(n)$ の前半の係数と後半の係数はそれぞれ
以下のように計算できる

$$G(n) = E(n) + W_N^n H(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

$$G\left(n + \frac{N}{2}\right) = E(n) - W_N^n H(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

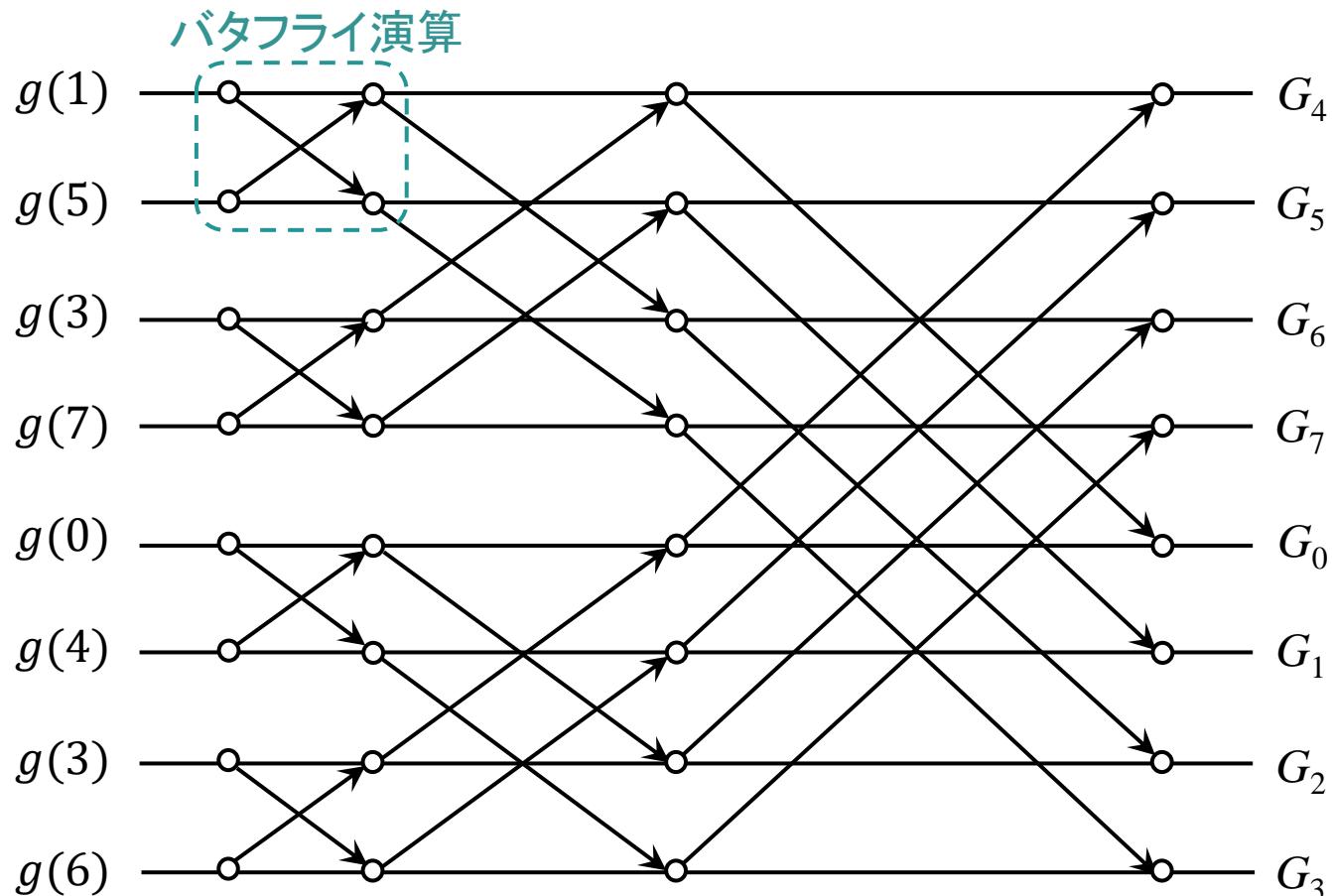
高速フーリエ変換(FFT)

図で表すと



高速フーリエ変換(FFT)

繰り返しFFTを分割していくと最終的に $\log_2 N$ 段に分割できる



複素乗算回数は $\frac{N}{2} \log_2 N$ となる

高速フーリエ変換(FFT)

1次元DFTとFFTの計算量の比較

計算量	DFT	FFT	DFTに対するFFTの速度
$N = 128$	$16,384$	896	18 倍
$N = 256$	$63,536$	$2,048$	31 倍
$N = 512$	$262,144$	$4,608$	57 倍
$N = 1024$	$1,048,576$	$10,240$	102 倍
$N = 2048$	$4,194,304$	$22,528$	186 倍
$N = 4096$	$16,777,216$	$49,152$	341 倍

2次元離散フーリエ変換(2D-DFT)

2次元のデータに対して適用できる

連続系

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

離散系

$$\begin{aligned} F(k, l) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) e^{-j2\pi\left(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) W_N^{nk} W_M^{ml} \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F(k, l) W_N^{-nk} W_M^{-ml}$$

1次元DFTとの関係

2次元DFTの式を次のように変形してみる.

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n, m) W_N^{nk} \right] W_M^{ml}$$

ここで, []の中身を以下のようにおく.

$$\tilde{F}(k, m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n, m) W_N^{nk}$$

これは、1次元のN点DFTをM回適用することにより求めることができる
次に、以下の1次元M点DFTをN回計算することで2次元DFTを計算できる

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{F}(k, m) W_M^{ml}$$

2次元高速フーリエ変換(2D-FFT)

2次元DFTは、1次元DFTの組み合わせで計算できる
各1次元DFTに1次元FFTを適用すれば、2次元FFTが実現できる

