



2次元高速フーリエ変換

フーリエ級数展開

フーリエ級数展開:

任意の周期関数は三角関数の無限級数で表せる

フーリエ級数展開式 $g(t)$ 周期関数, T 周期

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + a_3 \cos \frac{6\pi}{T} t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin \frac{4\pi}{T} t + b_3 \sin \frac{6\pi}{T} t + \dots \end{aligned}$$

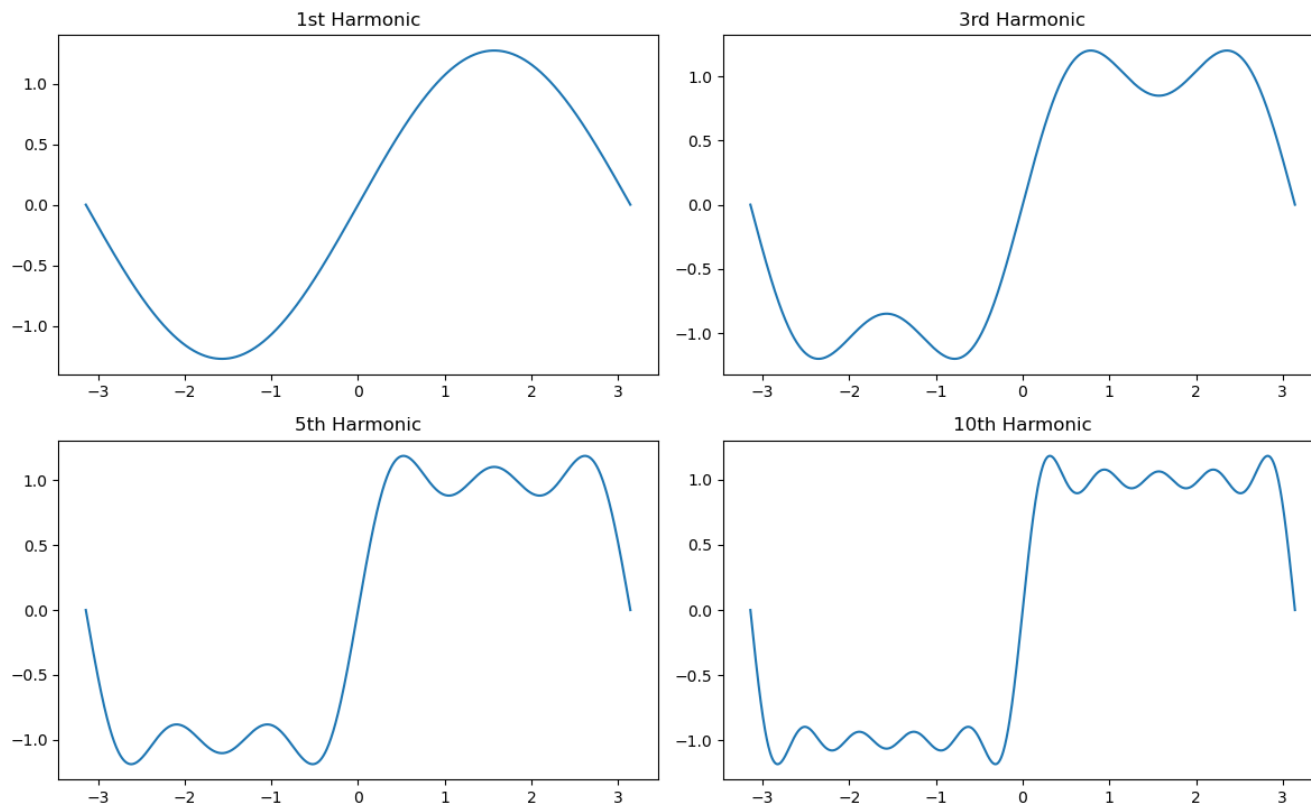
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt$$

フーリエ級数展開の例

例: 矩形波信号をフーリエ級数展開で表現
次数を増やすほど, 矩形波に近づいていく

Fourier Series Approximation of a Square Wave



複素数

二つの実数 x, y が与えられたとき, これに虚数単位 $j = \sqrt{-1}$ をつけて以下のように表現したものを複素数と呼ぶ

$$z = x + jy$$

x を複素数 z の実部, y を虚部といい, それぞれ以下のように表現できる

$$x = \text{Re}[z]$$

$$y = \text{Im}[z]$$

複素数 z において, その虚部の符号を変えたものを z の複素共役という

$$z^* = x - jy$$

複素数 z とその複素共役 z^* の和と積はそれぞれ実数となる

$$\text{和: } z + z^* = 2x$$

$$\text{積: } zz^* = x^2 + y^2$$

複素平面

複素数は, x を横座標, y を縦座標とする二次元平面上の一点として表示することができる. この平面は複素平面と呼ばれる.

複素平面における z の原点からの距離を r とすると, 三平方の定理から

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}$$

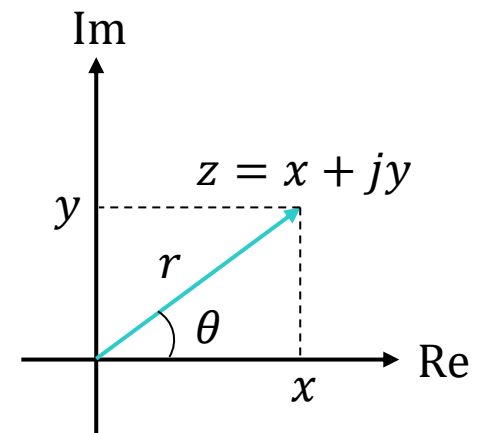
この r は, 複素数 z の絶対値と呼ばれ, $|z|$ と記す.
また, z と原点を結ぶ直線と横軸との間になす角 θ は, z の偏角とよばれ, $\arg(z)$ と記す.
このとき,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

と表されるため, z は以下のように極形式で表すことができる

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$



オイラーの公式

極形式は、オイラーの公式を用いて簡潔に表現できる。
オイラーの公式は次式で与えられる。

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

このとき、 z は以下のように表現できる。

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta}$$

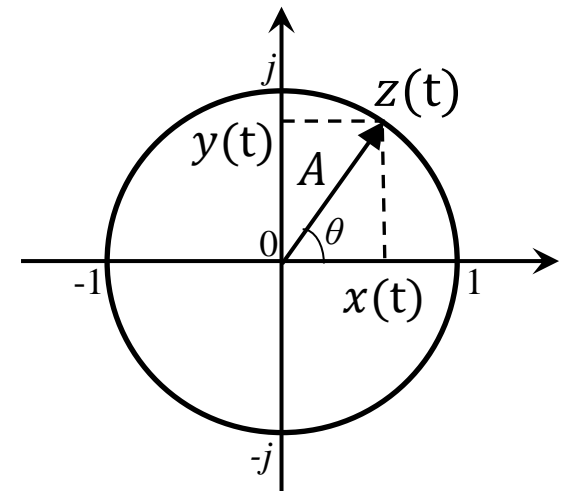
また、複素平面上で半径 A の円運動を考える。
偏角の時間変化を $\theta = \omega t$ とおくと(ω 角周波数)
実部と虚部は、それぞれ正弦波信号で表される。

$$\text{実部: } x(t) = A \cos \omega t$$

$$\text{虚部: } y(t) = A \sin \omega t$$

このとき、複素正弦波信号は以下のように
定義できる。

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + jy(t) \\ &= A(\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= Ae^{j\omega t} \end{aligned}$$

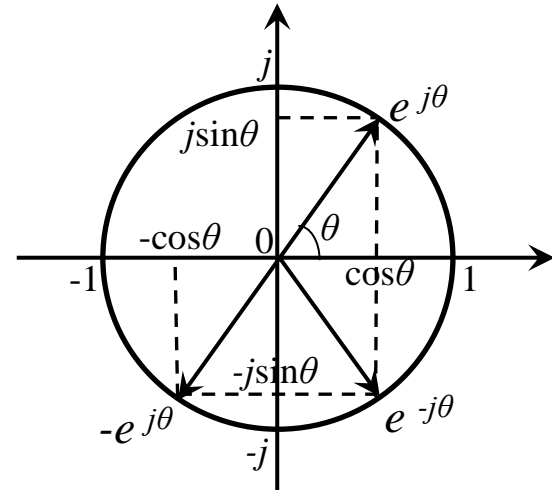


複素フーリエ級数展開

複素正弦波信号を用いて,
正弦波信号は以下のように表現できる.

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



これらの式をフーリエ級数展開の式に代入してまとめると,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

周期関数の複素フーリエ級数展開

フーリエ変換(FT)とフーリエ逆変換(IFT)

フーリエ級数展開を非周期信号へ拡張したものがフーリエ変換となる
フーリエ級数展開の式を改めて示す

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

ここで T を有限値とすると,

周波数間隔 $\Delta f = \frac{1}{T}$ となり, 離散的な周波数 $f_n = n\Delta f$ で表現できる

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi f_n t}$$

$$G_n = \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

フーリエ変換 (FT) とフーリエ逆変換 (IFT)

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j2\pi f_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} e^{j2\pi f_n t}$$

式を整理すると,

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} e^{j2\pi f_n t} \Delta f$$

$T \rightarrow \infty$ とすると, 総和は積分となり,
離散的な周波数 f_n は, 連続周波数 f で表現できる

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \right\} e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

フーリエ変換

フーリエ変換と逆変換(周波数表示)

フーリエ変換 $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$

フーリエ逆変換 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$

角周波数 $\omega = 2\pi f$ を用いても表現できる.

このとき, $df = \frac{1}{2\pi} d\omega$ であるから, フーリエ変換と逆変換(角周波数表示)は,

フーリエ変換 $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$

フーリエ逆変換 $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

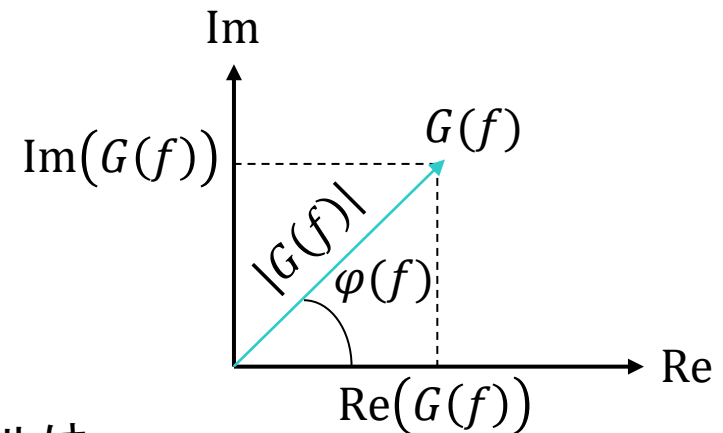
振幅スペクトル・位相スペクトル

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

は複素数となる. 実数部を $\text{Re}(G(f))$,
虚数部を $\text{Im}(G(f))$ と表現すれば

$$G(f) = \text{Re}(G(f)) + j\text{Im}(G(f))$$

となり, 複素平面上のベクトルとなる.
このとき, 振幅スペクトルと位相スペクトルは
以下のように計算できる

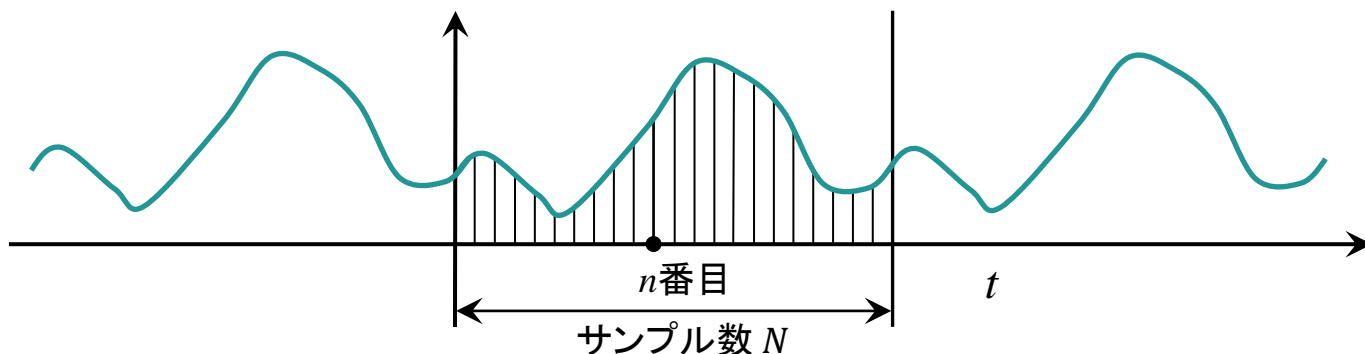


振幅スペクトル $|G(f)| = \sqrt{\text{Re}(G(f))^2 + \text{Im}(G(f))^2}$

位相スペクトル $\varphi(f) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G(f))}{\text{Re}(G(f))} \right\}$

離散フーリエ変換 (DFT)

コンピュータで扱うデータは有限



サンプル周期内の関数が繰り返される周期関数を考える.

フーリエ変換の式について, 時間信号を $t = n$, 周波数信号を $f = k/N$ と離散化を行うと, 有限データに対する離散フーリエ変換 (DFT) 式は,

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

離散フーリエ逆変換 (IDFT) 式は,

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

離散フーリエ変換(DFT)

再度, 離散フーリエ変換式を示す.

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

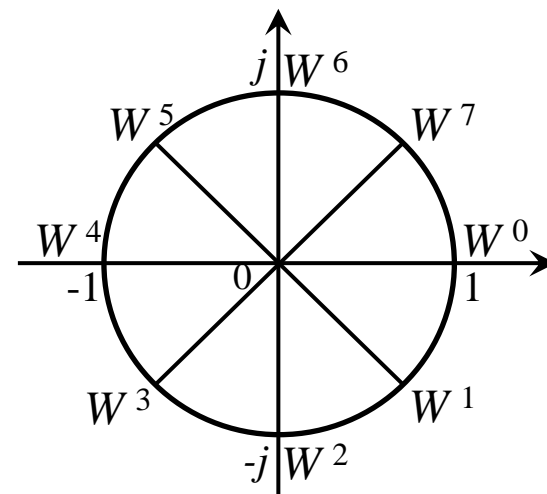
ここで, 式中の指数関数部分を回転因子という.

$$W_N = \exp\left(-\frac{j2\pi}{N}\right) \text{ と置くと,}$$

$$W_N^{kn} = \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad W_N^{-kn} = \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right)$$

$$G(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W_N^{kn}$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k) W_N^{-kn}$$



離散フーリエ変換 (DFT)

$N = 8$ のとき

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \\ G_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\ W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \\ g(4) \\ g(5) \\ g(6) \\ g(7) \end{bmatrix}$$

対称

ここで $G(k) = G_k$ としている.

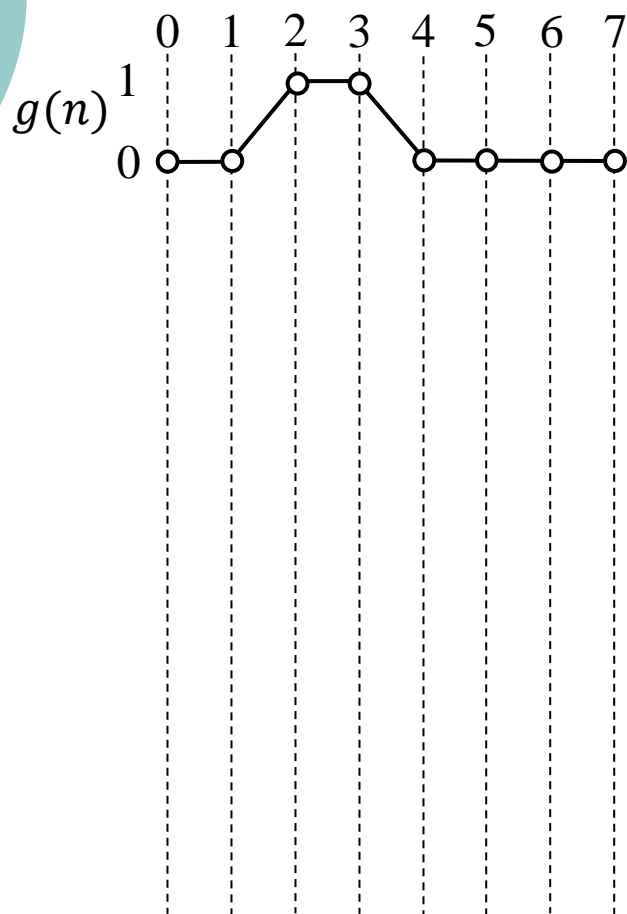
N 個の信号 $g(n)$ を行列 Q で表す. このとき, $G(n)$ を行列 G , 回転因子を要素とする行列 W_N とすると, DFT は以下のように表現できる

$$G = W_N Q$$

離散フーリエ変換(DFT)

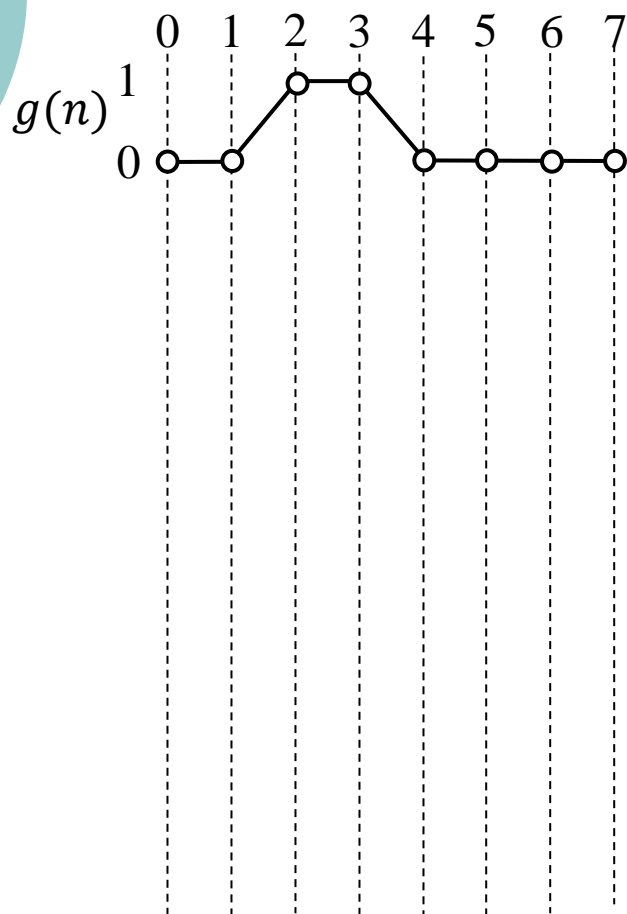
例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする

ヒント: 最初に回転子を求める.



離散フーリエ変換(DFT)

例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



ヒント: 最初に回転子を求める.

$$W^{nk} = \exp\left(-j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad W^{-nk} = \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$W^0 = \exp(-j0) = 1$$

$$W^1 = \exp\left(-j \frac{2\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$W^2 = \exp\left(-j \frac{4\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$W^3 = \exp\left(-j \frac{6\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$W^4 = \exp\left(-j \frac{8\pi}{8}\right) = e^{-j\pi} = -1$$

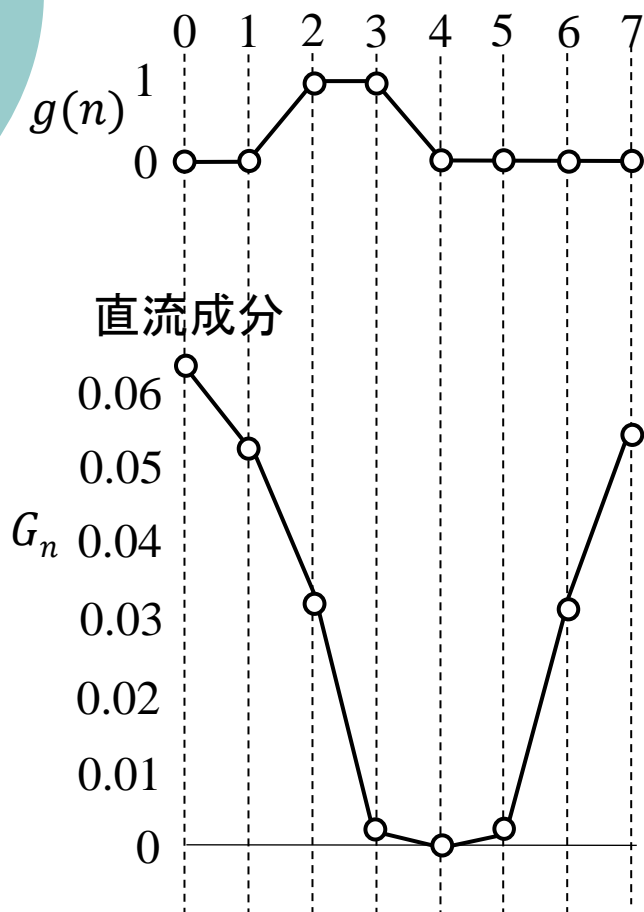
$$W^5 = \exp\left(-j \frac{10\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{5\pi}{4}} = e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$W^6 = \exp\left(-j \frac{12\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{3\pi}{2}} = j$$

$$W^7 = \exp\left(-j \frac{14\pi}{8}\right) = e^{-j\frac{7\pi}{4}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

離散フーリエ変換(DFT)

例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



$$G_0 = \frac{1}{8} \{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ = 0.25 \quad \therefore |G_0|^2 = 0.0625$$

$$G_1 = \frac{1}{8} \{0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1 \cdot (-j) + 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot j + 0 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\} \\ = \frac{1}{8} \{-j + e^{-j\frac{3\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} - j \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_1|^2 = 0.05335$$

$$G_2 = \frac{1}{8} \{-1 + j\} \quad \therefore |G_2|^2 = 0.03125$$

$$G_3 = \frac{1}{8} \{j + e^{-j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + j \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_3|^2 = 0.00915$$

$$G_4 = \frac{1}{8} \{1 - 1\} = 0 \quad \therefore |G_4|^2 = 0$$

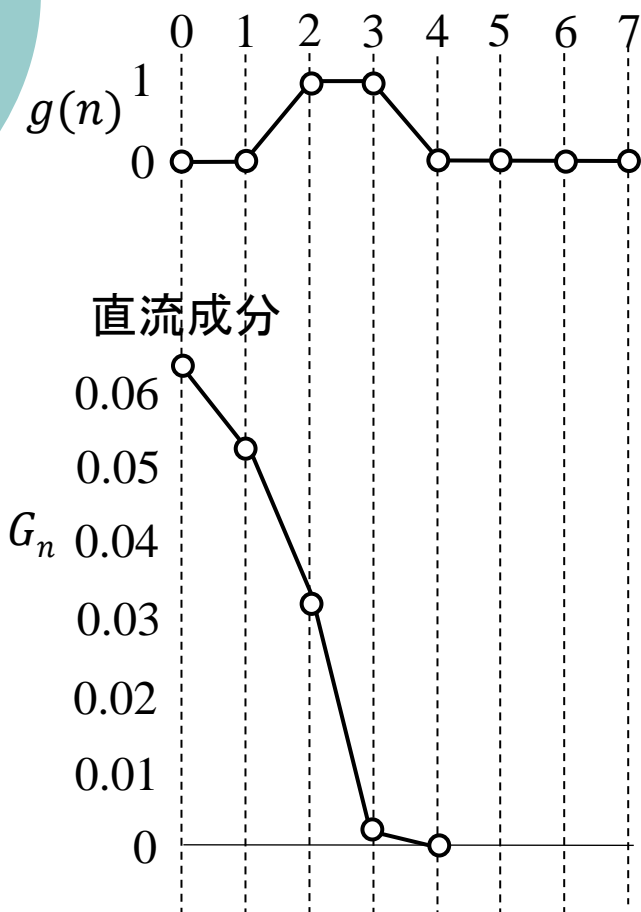
$$G_5 = \frac{1}{8} \{-j + e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} - j \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_5|^2 = 0.00915$$

$$G_6 = \frac{1}{8} \{-1 - j\} \quad \therefore |G_6|^2 = 0.03125$$

$$G_7 = \frac{1}{8} \{j + e^{j\frac{3\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} + j \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_7|^2 = 0.05335$$

離散フーリエ変換(DFT)

例 $N = 8$ のときの次の関数を離散フーリエ変換してパワースペクトル密度関数を求め、下記のグラフ上にプロットする



$$G_0 = \frac{1}{8} \{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \therefore |G_0|^2 = 0.0625$$

$$G_1 = \frac{1}{8} \{0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1 \cdot (-j) + 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}} + 0 \cdot j + 0 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\} \\ = \frac{1}{8} \{-j + e^{-j\frac{3\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} - j \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_1|^2 = 0.05335$$

$$G_2 = \frac{1}{8} \{-1 + j\} \quad \therefore |G_2|^2 = 0.03125$$

$$G_3 = \frac{1}{8} \{j + e^{-j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + j \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_3|^2 = 0.00915$$

$$G_4 = \frac{1}{8} \{1 - 1\} = 0 \quad \therefore |G_4|^2 = 0$$

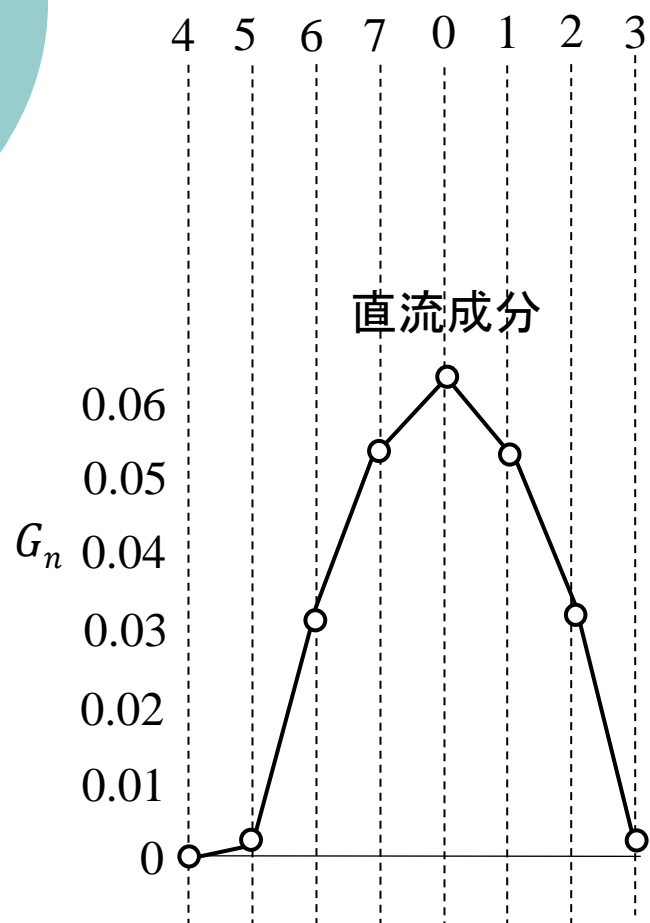
$$G_5 = \frac{1}{8} \{-j + e^{j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} - j \left(1 - \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_5|^2 = 0.00915$$

$$G_6 = \frac{1}{8} \{-1 - j\} \quad \therefore |G_6|^2 = 0.03125$$

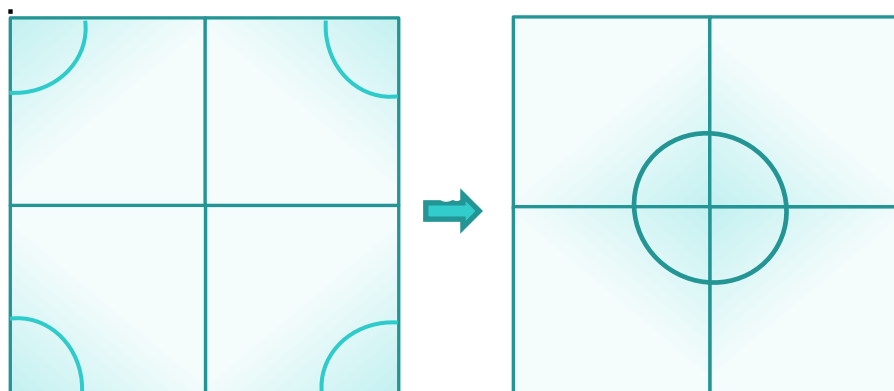
$$G_7 = \frac{1}{8} \{j + e^{j\frac{3\pi}{4}}\} = \frac{1}{8} \left\{ \cos \frac{3\pi}{4} + j \left(1 + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \quad \therefore |G_7|^2 = 0.05335$$

離散フーリエ変換(DFT)

光学系に合わせるため、左右の計算値を入れ替える。



画像の場合も上下左右の計算値を入れ替える



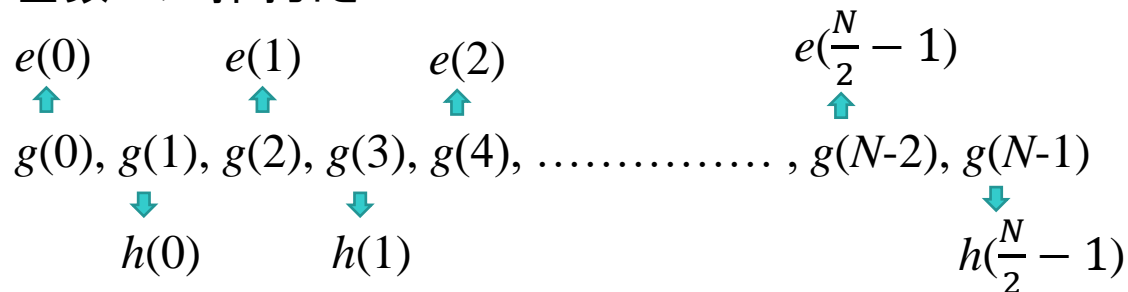
高速フーリエ変換(FFT)

FFT: fast Fourier transform

離散フーリエ変換(DFT)式

$$G_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) W_N^{nk}$$

基数2の時間引きFFT



偶数番目のサンプルからなる数列 $e(n)$

奇数番目のサンプルからなる数列 $h(n)$

ただし, $e(n) = g(2n)$,

$$h(n) = g(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

高速フーリエ変換 (FFT)

$$\begin{aligned} G(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) W_N^{nk} \\ &= g(0)W_N^{0n} + g(2)W_N^{2n} + \dots + g\left(2\left(\frac{N}{2}-1\right)\right)W_N^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)n} \\ &\quad + g(1)W_N^{1n} + g(3)W_N^{3n} + \dots + g\left(2\left(\frac{N}{2}-1\right)+1\right)W_N^{\left(2\left(\frac{N}{2}-1\right)+1\right)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ e(k)W_N^{n(2k)} + h(k)W_N^{n(2k+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e(k)W_N^{n(2k)} + W_N^n \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k)W_N^{n(2k)} \end{aligned}$$

高速フーリエ変換(FFT)

ここで、周期が $N/2$ (半分)の2つのDFTを考える

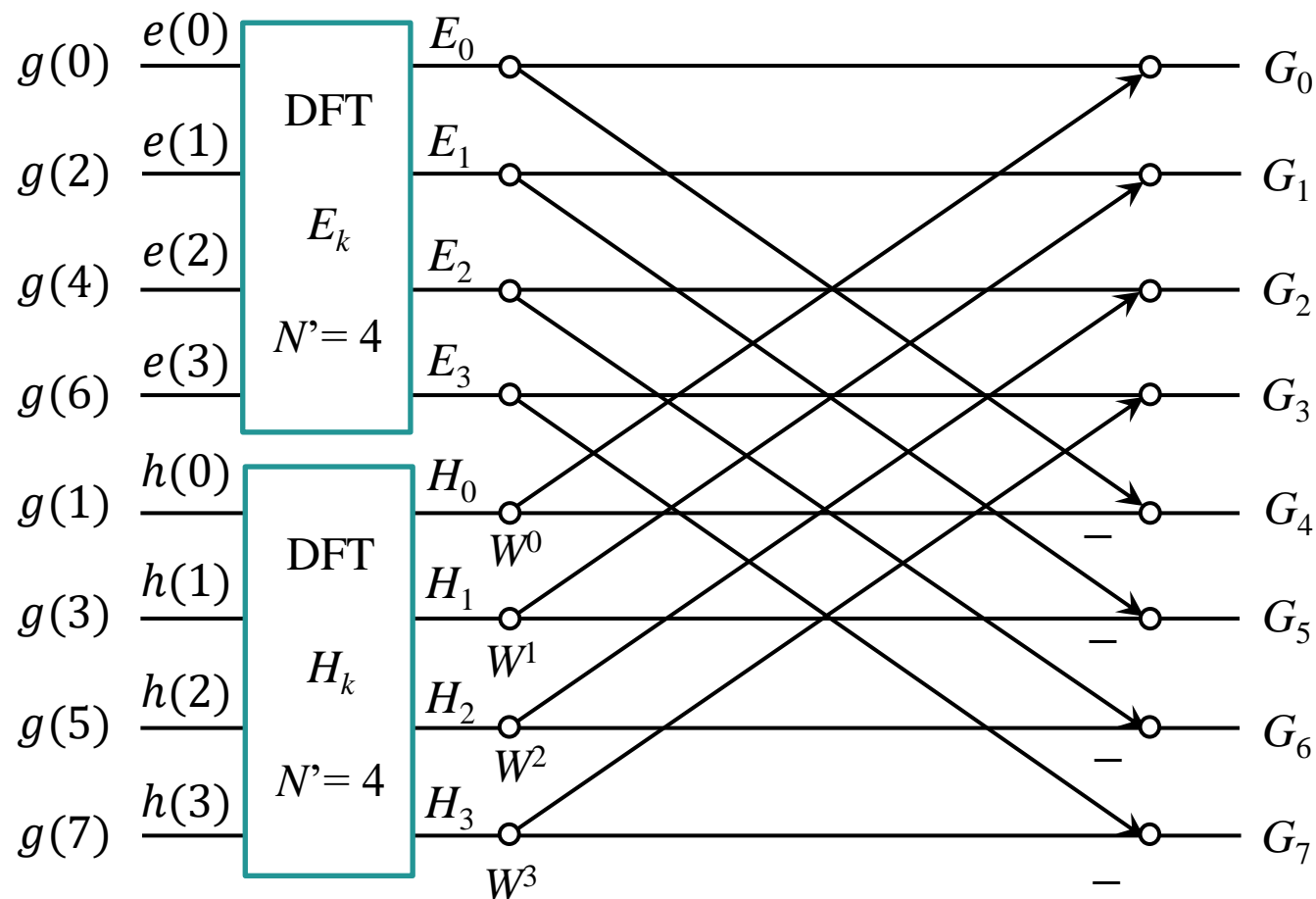
$$E(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e(k) W_{N/2}^{nk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e(k) W_N^{n(2k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$
$$H(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k) W_{N/2}^{nk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k) W_N^{n(2k)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

このとき、 $G(n)$ の前半の係数と後半の係数はそれぞれ
以下のように計算できる

$$G(n) = E(n) + W_N^n H(n)$$
$$G\left(n + \frac{N}{2}\right) = E(n) - W_N^n H(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

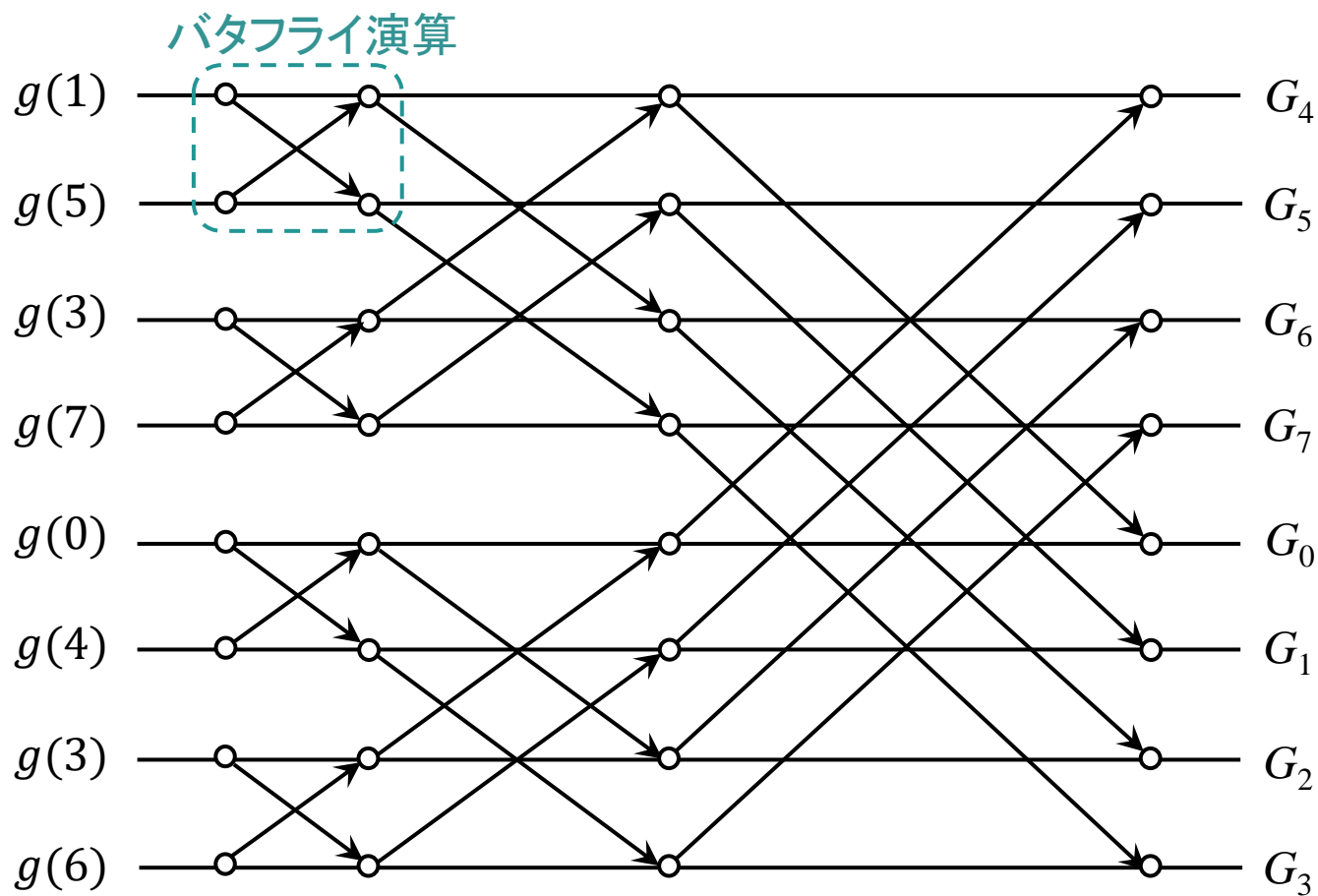
高速フーリエ変換 (FFT)

図で表すと



高速フーリエ変換 (FFT)

繰り返しFFTを分割していくと最終的に $\log_2 N$ 段に分割できる



複素乗算回数は $\frac{N}{2} \log_2 N$ となる

高速フーリエ変換(FFT)

1次元DFTとFFTの計算量の比較

計算量	DFT N^2	FFT $N \cdot \log_2 N$	DFTに対する FFTの速度
$N = 128$	16,384	896	18 倍
$N = 256$	63,536	2,048	31 倍
$N = 512$	262,144	4,608	57 倍
$N = 1024$	1,048,576	10,240	102 倍
$N = 2048$	4,194,304	22,528	186 倍
$N = 4096$	16,777,216	49,152	341 倍

2次元離散フーリエ変換(2D-DFT)

2次元のデータに対して適用できる

連続系

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

離散系

$$\begin{aligned} F(k, l) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) e^{-j2\pi\left(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) W_N^{nk} W_M^{ml} \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F(k, l) W_N^{-nk} W_M^{-ml}$$

1次元DFTとの関係

2次元DFTの式を次のように変形してみる.

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n, m) W_N^{nk} \right] W_M^{ml}$$

ここで, $[\]$ の中身を以下のようにおく.

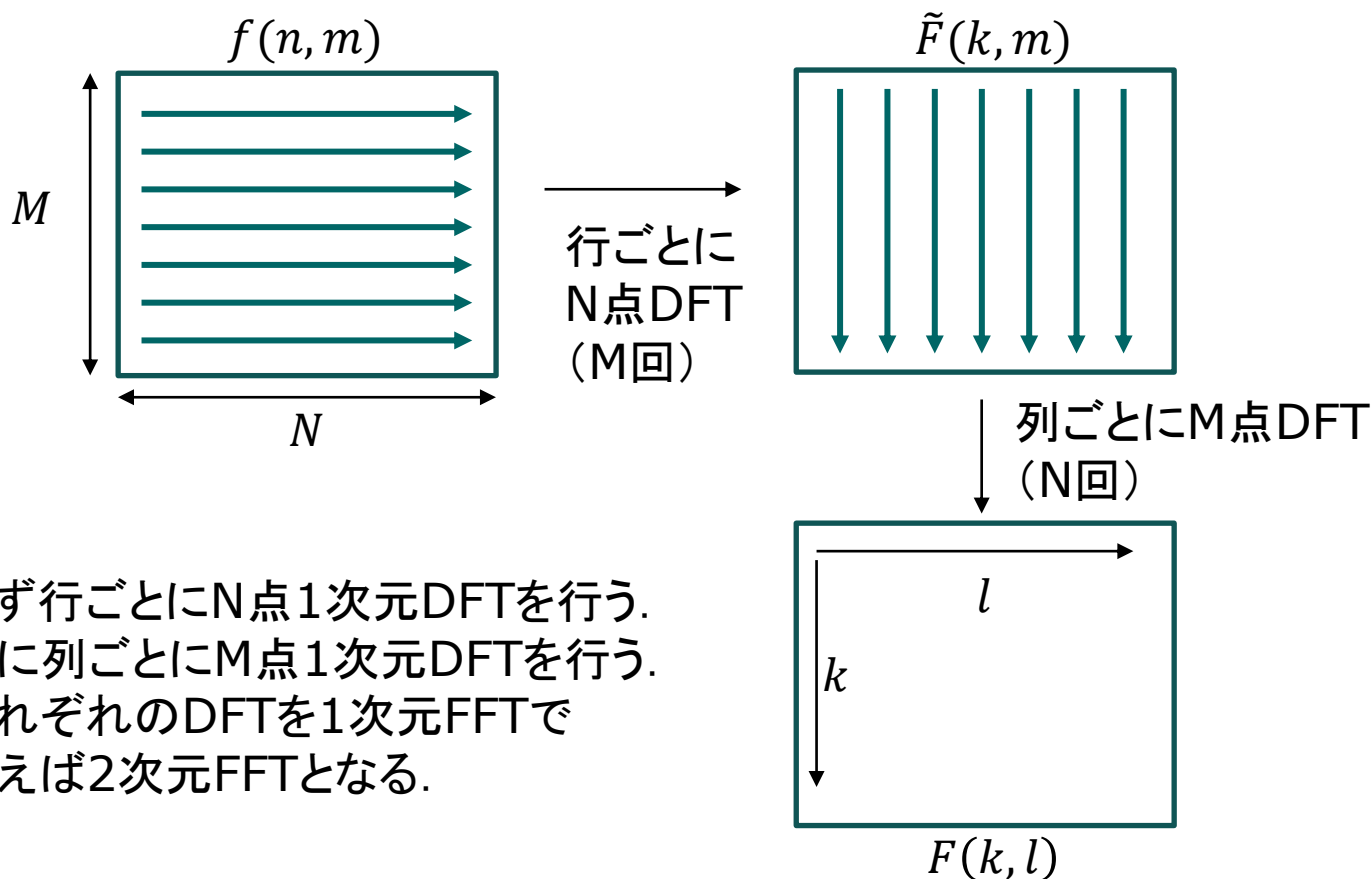
$$\tilde{F}(k, m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n, m) W_N^{nk}$$

これは, 1次元のN点DFTをM回適用することにより求めることができる
次に, 以下の1次元M点DFTをN回計算することで2次元DFTを計算できる

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{F}(k, m) W_M^{ml}$$

2次元高速フーリエ変換(2D-FFT)

2次元DFTは、1次元DFTの組み合わせで計算できる
各1次元DFTに1次元FFTを適用すれば、2次元FFTが実現できる



まず行ごとにN点1次元DFTを行う。
次に列ごとにM点1次元DFTを行う。
それぞれのDFTを1次元FFTで
行えば2次元FFTとなる。