論理トレーニング
レポート課題

科　　番　　氏名

2026 年 1 月 30 日

問題

1. 命題論理の同値変形

p, q, r, s を命題とするとき、次の (1), (2) を同値変形により示せ。

(1)

$$(p \land q) \lor (r \land s) \equiv (p \lor r) \land (p \lor s) \land (q \lor r) \land (q \lor s) \tag{1}$$

(2)

$$(p \lor q) \land (r \lor s) \equiv (p \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land r) \lor (q \land s) \tag{2}$$

2. 述語論理と量化子

命題関数 $p(x), q(x)$ $(x \in X)$ に対して、次が成り立つ。

(1)

$$\forall x\ p(x) \land \forall x\ q(x) \equiv \forall x\ (p(x) \land q(x)) \tag{3}$$

(2)

$$\forall x\ p(x) \lor \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \lor q(x)) \tag{4}$$

(3)

$$\exists x\ (p(x) \lor q(x)) \equiv \exists x\ p(x) \lor \exists x\ q(x) \tag{5}$$

(4)

$$\exists x\ (p(x) \land q(x)) \Rightarrow \exists x\ p(x) \land \exists x\ q(x) \tag{6}$$

$X = \{a_1, a_2\}$ とするとき、同値変形により (2) を示せ。

(Hint: $\forall x\ p(x) \lor \forall x\ q(x) \to \forall x\ (p(x) \lor q(x)) \equiv I$ を示す。)

3. 命題関数の真理値判定

次の命題関数 $p(\epsilon, N)$ に対して、(1), (2) はそれぞれどんな命題か。また、その真理値を答えよ。

$$\epsilon \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \tag{7}$$
$$N \in \mathbb{N} \tag{8}$$
$$p(\epsilon, N) : N\epsilon > 1 \tag{9}$$

(1)

$$\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N) \tag{10}$$

(2)

$$\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)} \tag{11}$$

4. ε-N 論法による極限証明

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ であることを、ε-N 論法を用いて証明せよ。

5. ε-δ 論法による極限証明

$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ であることを、ε-δ 論法を用いて証明せよ。

解答

1. 命題論理の同値変形

(1) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

【戦略】

左辺の $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ を展開する際、分配法則を繰り返し適用することで右辺を得る。

【形式的証明】

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (r \wedge s) &\equiv ((p \wedge q) \vee r) \wedge ((p \wedge q) \vee s) \quad (\text{分配法則}) &(1)\\ &\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee s) \quad (\text{分配法則}) &(2)\\ &\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s) \quad (\text{交換法則}) &(3)\end{aligned}$$

(2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

【戦略】

左辺の $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ に対して分配法則を適用し、展開する。

【形式的証明】

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv ((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \vee q) \wedge s) \quad (\text{分配法則}) &(4)\\ &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s) \quad (\text{分配法則}) &(5)\\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) \quad (\text{交換・結合法則}) &(6)\end{aligned}$$

2. 述語論理と量化子

$X = \{a_1, a_2\}$ のとき、(2) を同値変形により示す

以下を証明する：

$$\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x)) \equiv I \qquad (7)$$

【発見的考察】

左辺 $\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x))$ を分析する。

定義により：

$$\forall x\ p(x) \equiv p(a_1) \wedge p(a_2) \tag{8}$$

$$\forall x\ q(x) \equiv q(a_1) \wedge q(a_2) \tag{9}$$

$$\forall x\ (p(x) \vee q(x)) \equiv (p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2)) \tag{10}$$

したがって証明すべき式は：

$$(p(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge q(a_2)) \Rightarrow (p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2)) \tag{11}$$

【形式的証明】

$$(p(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge q(a_2)) \Rightarrow (p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2)) \tag{12}$$

$$\equiv \overline{(p(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge q(a_2))} \vee ((p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2))) \tag{13}$$

$$(\text{含意の定義 } A \to B \equiv \bar{A} \vee B) \tag{14}$$

$$\equiv \overline{(p(a_1) \wedge p(a_2))} \wedge \overline{(q(a_1) \wedge q(a_2))} \vee ((p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2))) \tag{15}$$

$$(\text{ド・モルガンの法則}) \tag{16}$$

$$\equiv (\bar{p}(a_1) \vee \bar{p}(a_2)) \wedge (\bar{q}(a_1) \vee \bar{q}(a_2)) \vee ((p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2))) \tag{17}$$

$$(\text{ド・モルガンの法則}) \tag{18}$$

後半部分を展開：

$$((p(a_1) \vee q(a_1)) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2))) \tag{19}$$

$$\equiv (p(a_1) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2))) \vee (q(a_1) \wedge (p(a_2) \vee q(a_2))) \quad (\text{分配法則}) \tag{20}$$

$$\equiv (p(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (p(a_1) \wedge q(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge q(a_2)) \tag{21}$$

$$(\text{分配法則}) \tag{22}$$

前半部分と合わせると、全体は以下の恒等式に帰着：

$$(\bar{p}(a_1) \vee \bar{p}(a_2)) \wedge (\bar{q}(a_1) \vee \bar{q}(a_2)) \vee (p(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (p(a_1) \wedge q(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge p(a_2)) \vee (q(a_1) \wedge q(a_2)) \equiv I \tag{23}$$

任意の真理値割り当てに対して、左辺は常に真であることが確認できるため、同値式は恒真（トートロジー）である。 ■

3. 命題関数の真理値判定

命題の意味と真理値

(1) $\forall \epsilon\ \exists N\ p(\epsilon, N)$

【意味】:「すべての正の実数 ϵ に対して、ある自然数 N が存在して、$N\epsilon > 1$ が成り立つ」

【真理値】: **真（True）**

【根拠】: $\epsilon > 0$ が任意に与えられたとき、アルキメデスの公理により、$N > \frac{1}{\epsilon}$ を満たす自然数 N が存在する。このとき $N\epsilon > 1$ が成立する。

(2) $\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)}$

【意味】:「存在して、ある正の実数 ϵ が存在して、すべての自然数 N に対して、$N\epsilon \leq 1$ である」

【形式的表現】:

$$\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)} \equiv \exists \epsilon \ \overline{\exists N \ p(\epsilon, N)} \equiv \exists \epsilon \ \forall N \ \overline{p(\epsilon, N)} \tag{1}$$

すなわち:

$$\exists \epsilon \ \forall N \ (N\epsilon \leq 1) \tag{2}$$

【真理値】:**真(True)**

【根拠】:例えば $\epsilon = 0.001$ を選ぶと、これはすべての自然数 N に対して $N \times 0.001 \leq 1$ が成り立つことが明らかである。

4. ε-N 論法による極限証明

命題:$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

【発見的考察(Scratchpad)】

$\epsilon > 0$ が任意に与えられたとき、

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} \tag{1}$$

を成立させたい。したがって、$N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$($\frac{1}{\epsilon}$ 以上の最小整数)とすれば、$n > N$ ならば $n > \frac{1}{\epsilon}$ となり、所望の不等式が得られる。

【形式的証明】

定義:$\lim_{n \to \infty} a_n = L$ とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して、$n > N$ ならば $|a_n - L| < \epsilon$ が成り立つことである。

証明:

任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ と定める。

このとき、$n > N$ ならば、

$$n > N \geq \frac{1}{\epsilon} \tag{2}$$

$$\frac{1}{n} < \epsilon \tag{3}$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \tag{4}$$

したがって、定義により $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ が成立する。 ■

5. ε-δ 論法による極限証明

命題:$\displaystyle\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

【発見的考察（Scratchpad）】

$\epsilon > 0$ が与えられたとき、

$$|x^2 - 1| < \epsilon \tag{1}$$

を成立させたい。ここで $|x^2 - 1| = |x-1||x+1|$ と因数分解できる。
x が 1 の近くにあると仮定し、例えば $|x-1| < 1$ と制限すると、$0 < x < 2$ となり、

$$|x+1| < 3 \tag{2}$$

したがって、

$$|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < 3|x-1| \tag{3}$$

$|x^2 - 1| < \epsilon$ を得るには、

$$3|x-1| < \epsilon \iff |x-1| < \frac{\epsilon}{3} \tag{4}$$

が十分である。よって、$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\}$ とすればよい。

【形式的証明】

定義：$\lim_{x \to a} f(x) = b$ とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - b| < \epsilon$ が成り立つことである。
証明：

任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\}$ と定める。
$0 < |x-1| < \delta$ ならば、

1. $|x-1| < 1$ より $0 < x < 2$、したがって $|x+1| < 3$
2. $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$

以上より、

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= |x-1||x+1| \quad (5) \\ &< 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} \quad \text{（上記 (1), (2) より）} \quad (6) \\ &= \epsilon \quad (7) \end{aligned}$$

したがって、定義により $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ が成立する。 ■