

8近傍鮮鋭化フィルタの導出（詳細版）

この資料は、8近傍ラプラシアンフィルタを導出する過程を経て、図A-2（課題資料）に示される8近傍鮮鋭化フィルタのオペレータを導出する手順を、各画素の座標とオペレータ（行列）の対応関係を明記しながら詳細に説明します。

1. 鮮鋭化フィルタの基本原則

画像の鮮鋭化（シャープニング）は、画像のぼやけた部分（エッジや輪郭）を強調する処理です。この処理は、「元の画像」から「ぼけ成分」を引き算することで実現されます。

画像処理において、「ぼけ成分（エッジ）」を抽出する代表的な方法が、**ラプラシアン（Laplacian）**と呼ばれる2次微分フィルタです。

したがって、注目画素 (i, j) の鮮鋭化後の値 $g(i, j)$ は、元の画像の値 $f(i, j)$ と、その点におけるラプラシアン $\nabla^2 f(i, j)$ を用いて、以下の式で表されます。

$$g(i, j) = f(i, j) - \nabla^2 f(i, j)$$

この関係を 3×3 の空間フィルタオペレータ（カーネル）で考えます。鮮鋭化オペレータを W_S 、ラプラシアンオペレータを W_L 、そして元の画像をそのまま出力するオペレータ（単位オペレータ）を W_I とすると、上記の式はオペレータ同士の引き算として表現できます。

$$W_S = W_I - W_L$$

2. ステップ1：8近傍ラプラシアンフィルタ W_L の導出

まず、「ぼけ成分」を抽出するための「8近傍ラプラシアンオペレータ W_L 」を導出します。

ラプラシアンは、各方向の2次差分（変化の変化率）の総和で表されます。**4近傍**の場合は「x方向（横）」と「y方向（縦）」のみを考慮しますが、**8近傍**の場合は、それらに加えて「2つの斜め方向」も考慮に入れます。

注目画素を $f(i, j)$ として、各方向の2次差分は以下のように定義されます。

- **x方向:**

$$f_{xx} = \{f(i+1, j) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i-1, j)\} = f(i-1, j) + f(i+1, j) - 2f(i, j)$$
- **y方向:**

$$f_{yy} = \{f(i, j+1) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i, j-1)\} = f(i, j-1) + f(i, j+1) - 2f(i, j)$$
- **斜め方向1 (左上-右下):**

$$f_{diag1} = \{f(i+1, j+1) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i-1, j-1)\} = f(i-1, j-1) + f(i+1, j+1) - 2f(i, j)$$
- **斜め方向2 (右上-左下):**

$$f_{diag2} = \{f(i+1, j-1) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i-1, j+1)\} = f(i-1, j+1) + f(i+1, j-1) - 2f(i, j)$$

8近傍ラプラシアン $\nabla^2 f(i, j)$ は、これら4つの2次差分すべての和 ($f_{xx} + f_{yy} + f_{diag1} + f_{diag2}$) です。すべてを足し合わせると、注目画素 $f(i, j)$ の係数は $(-2) \times 4 = -8$ となり、その周囲8画素の係数はすべて 1 となります。

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(i, j) = & 1 \cdot f(i-1, j-1) + 1 \cdot f(i-1, j) + 1 \cdot f(i-1, j+1) \\ & + 1 \cdot f(i, j-1) - 8 \cdot f(i, j) + 1 \cdot f(i, j+1) \\ & + 1 \cdot f(i+1, j-1) + 1 \cdot f(i+1, j) + 1 \cdot f(i+1, j+1)\end{aligned}$$

この式は、オペレータ W_L と f の畳み込み（相関）演算

$\nabla^2 f(i, j) = \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 W_L(i+k, j+l) \cdot f(i+k, j+l)$ を表しています。オペレータ W_L の各要素は、上式の $f(\dots)$ に対応する係数となります。

$$W_L = \begin{array}{ccc|ccc} \text{(f(i-1, j-1)の係数)} & \text{(f(i-1, j)の係数)} & \text{(f(i-1, j+1)の係数)} & 1 & 1 & 1 \\ \text{(f(i, j-1)の係数)} & \text{(f(i, j)の係数)} & \text{(f(i, j+1)の係数)} & 1 & -8 & 1 \\ \text{(f(i+1, j-1)の係数)} & \text{(f(i+1, j)の係数)} & \text{(f(i+1, j+1)の係数)} & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

これが8近傍ラプラシアンフィルタのオペレータです。

3. ステップ2：8近傍鮮鋭化フィルタ W_S の導出

次に、ステップ1で求めた W_L を使い、基本原理の式 $W_S = W_I - W_L$ から鮮鋭化オペレータ W_S を導出します。

まず、**単位オペレータ** W_I を定義します。これは、元の画像 $f(i, j)$ をそのまま出力する ($g(i, j) = f(i, j)$ となる) フィルタです。 $g(i, j) = 1 \cdot f(i, j)$ であり、他のすべての近傍画素の係数が 0 となるため、オペレータは以下のようになります。

$$W_I = \begin{array}{ccc|ccc} \text{(f(i-1, j-1)の係数)} & \text{(f(i-1, j)の係数)} & \text{(f(i-1, j+1)の係数)} & 0 & 0 & 0 \\ \text{(f(i, j-1)の係数)} & \text{(f(i, j)の係数)} & \text{(f(i, j+1)の係数)} & 0 & 1 & 0 \\ \text{(f(i+1, j-1)の係数)} & \text{(f(i+1, j)の係数)} & \text{(f(i+1, j+1)の係数)} & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

この W_I と W_L を使って、 $W_S = W_I - W_L$ の行列引き算を実行します。

$$W_S = \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

オペレータの各要素（座標）ごとに計算します。

$$W_S = \begin{array}{ccc|ccc} (0-1) & (0-1) & (0-1) & -1 & -1 & -1 \\ (0-1) & (1-(-8)) & (0-1) & -1 & 9 & -1 \\ (0-1) & (0-1) & (0-1) & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

4. 結論

上記の導出過程により、8近傍鮮鋭化フィルタのオペレータ W_S が得られました。

$$\text{8近傍鮮鋭化オペレータ } W_S = \begin{matrix} & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}$$