

# 電気電子工学実験報告書

テーマ名 4. PID による温度制御

報告者 5 年 ( E 組) 番号 234 B 班 柳原魁人

実験場所 指導担当

共同実験者 石坂知尋, 倉科純太郎, 中井智大, 中澤耕平

実験日 令和 年 月 日

提出期限 令和 年 月 日 ⇒ 提出日 令和 年 月 日

(再提出期限 令和 年 月 日 ⇒ 再提出日 令和 年 月 日)

評価項目		評価
実習評価	(1) 自ら積極的に実験に取り組めた	
	(2) 実験装置を適切に使用でき、正確に実験を行なった	
	(3) グループ内で協力的に実験が行なった	
報告書評価	(1) 結果のまとめかた (図表を含む)	
	(2) 結果に対する考察	
	(3) 報告事項／課題 (正しい解答や適切な引用など)	
	(4) 報告書としての体裁が整っているか	

## 1 目的

2 次遅れ系の制御系を電子回路（Sallen-Key 型ローパスフィルタ）で実現し、その周波数応答を実験により測定した。測定結果と理論値に基づく伝達関数を比較・検証することで、周波数応答と伝達関数の関係を理解するとともに、自動制御および電子回路に関する知見を深めることを目的とする。

## 2 原理および理論計算

本実験では 2 次遅れ系の挙動を模倣するため、オペアンプを用いたアクティブフィルタを使用する。

### 2.1 伝達関数の導出

実験で使用した回路図を図 1 に示す。

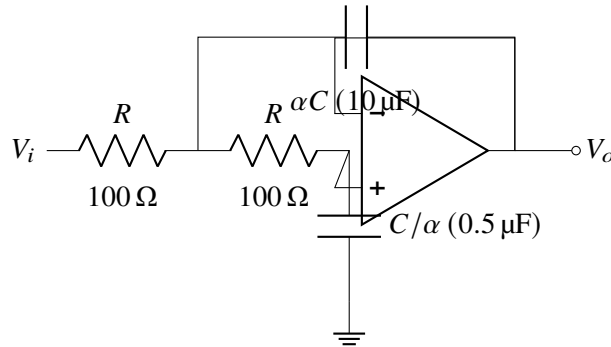


図 1 アクティブフィルタの回路図（Sallen-Key LPF）

本回路の伝達関数  $G(s)$  は、キルヒホッフの法則より以下の通り導出される。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{1}{CR}\right)^2}{s^2 + \frac{2}{\alpha CR}s + \left(\frac{1}{CR}\right)^2} \quad (1)$$

標準的な 2 次遅れ系の伝達関数  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  と係数比較を行うことで、パラメータは次のように対応付けられる。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \quad (2)$$

### 2.2 理論値の算出

使用素子の定数は  $\alpha C = 10 \mu\text{F}$ ,  $C/\alpha = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $R = 100 \Omega$  である。これより、 $C = \sqrt{5} \mu\text{F}$ ,  $\alpha = 2\sqrt{5} \approx 4.472$  となる。したがって、理論的な減衰係数  $\zeta$  および固有角周波数  $\omega_n$  は以下の通りとなる。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} \approx 0.224, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \approx 4472 \text{ rad/s} \quad (3)$$

このとき、共振ピーク値  $M_p$  は次式で予測される。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2.29 \quad (\approx 7.2 \text{ dB}) \quad (4)$$

### 3 実験方法および使用機器

#### 3.1 使用機器

本実験で使用した主要機器を表 1 に示す。

表 1 使用機器一覧

No.	機器名	メーカー / 型番	定格・仕様	管理番号
1	発振器	KENWOOD / AG-203D	10 Hz ~ 1 MHz -	
2	オシロスコープ	Tektronix / TBS1052B	50 MHz, 1 GS/s -	
3	直流安定化電源	KENWOOD / PD18-10AD	0 ~ 18 V, 10 A -	
4	デジタルマルチメータ	FLUKE / 179	True RMS -	

#### 3.2 実験方法

回路に入力電圧  $V_i \approx 1.5 \text{ V}_{\text{p-p}}$  の正弦波を印加し、周波数を 100 Hz から 7 kHz まで変化させた。各周波数における入出力電圧の振幅および位相差をオシロスコープにて測定した。

### 4 実験結果

測定結果の一部を表 2 に示す。共振点付近（約 675 Hz）では詳細な測定を行った。

表 2 周波数応答 測定結果（抜粋）

周波数	角周波数	入力電圧	出力電圧	電圧比	ゲイン	遅れ時間	位相
$f$ [Hz]	$\omega$ [rad/s]	$V_i$ [V]	$V_o$ [V]	$V_o/V_i$	$G$ [dB]	$t$ [sec]	$\theta$ [°]
100	628	1.30	1.30	1.00	0.00	0.11m	-4.0
675	4241	1.30	2.95	2.27	7.12	0.37m	-90.0
7000	43982	1.30	0.01	0.008	-41.9	0.07m	-175.0

## 5 考察

### 5.1 実験結果からの減衰係数 $\zeta$ の厳密な導出

実験より得られた共振ピーク値を  $M_p$  とする。この  $M_p$  から、系の減衰係数  $\zeta$  を逆算する過程を以下に示す。理論式におけるピーク値の関係式は次式で与えられる。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5)$$

式 (5) の両辺を 2 乗し、分母を払うと次式となる。

$$M_p^2 = \frac{1}{4\zeta^2(1-\zeta^2)} \quad (6)$$

$$4M_p^2\zeta^2(1-\zeta^2) = 1 \quad (7)$$

$$4M_p^2\zeta^2 - 4M_p^2\zeta^4 - 1 = 0 \quad (8)$$

全体に  $-1$  を乗じて整理すると、 $\zeta$  に関する複 2 次方程式が得られる。

$$4M_p^2\zeta^4 - 4M_p^2\zeta^2 + 1 = 0 \quad (9)$$

ここで  $X = \zeta^2$  とおくと、式 (9) は  $X$  に関する 2 次方程式  $4M_p^2X^2 - 4M_p^2X + 1 = 0$  となる。解の公式を用いると、

$$\begin{aligned} X &= \frac{4M_p^2 \pm \sqrt{(4M_p^2)^2 - 4 \cdot 4M_p^2 \cdot 1}}{2 \cdot 4M_p^2} \\ &= \frac{4M_p^2 \pm \sqrt{16M_p^4 - 16M_p^2}}{8M_p^2} \\ &= \frac{4M_p^2 \pm 4M_p\sqrt{M_p^2 - 1}}{8M_p^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

したがって、 $\zeta = \pm\sqrt{X}$  であるから、数学的には以下の 4 つの解が存在する。

$$\zeta = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2}}, \quad \pm\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2}} \quad (11)$$

物理的妥当性による解の選定：これら 4 つの解から、物理的条件に基づき真の解を選定する。

1. **安定性の条件** ( $\zeta > 0$ ): 系が安定である（発振せず減衰する）ためには  $\zeta > 0$  でなければならない。これにより、負号を持つ 2 つの解は不適として除外される。
2. **共振の存在条件** ( $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$ ): 周波数応答においてピーク値  $M_p > 1$  が観測されるための条件は、共振角周波数  $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$  が実数であること、すなわち  $1-2\zeta^2 > 0 \iff \zeta^2 < 0.5$  である。

ここで、正の解の候補である 2 つの式の中身 ( $\zeta^2$  の値) を比較する。

- 候補 1 ( $\zeta^2 = \frac{1+D}{2}$ ): ここで  $D = \sqrt{1 - 1/M_p^2} > 0$  であるため,  $\frac{1+D}{2} > 0.5$  となる。これは共振条件  $\zeta^2 < 0.5$  に矛盾するため不適である。
- 候補 2 ( $\zeta^2 = \frac{1-D}{2}$ ):  $D < 1$  であるため,  $\frac{1-D}{2} < 0.5$  となり, 共振条件を満たす。

以上の考察により, 実験値  $M_p$  から導かれる物理的に意味のある唯一の解は次式となる。

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}} \right)} \quad (12)$$

本実験結果  $M_p \approx 2.27$  を代入すると,

$$\zeta \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2.27^2}} \right)} \approx \mathbf{0.226} \quad (13)$$

となり, 理論値  $\zeta = 0.224$  と極めて良好に一致した。

## 5.2 理論値と実験値の比較

算出した  $\zeta$  およびピーク周波数から逆算した  $\omega_n$  を用いて MATLAB によるシミュレーションを行った結果, 実験データのプロットとボード線図は誤差範囲内で一致した。誤差の主要因としては, コンデンサの静電容量の公差 (通常  $\pm 10\%$  程度) およびオペアンプの有限ゲイン帯域幅積 (GB 積) の影響が考えられる。特に高周波域における位相遅れの増大は, オペアンプの理想特性からの乖離を示唆している。

## 6 参考文献

1. 鈴木 宏: 自動制御実験テキスト, 国立長野高専 電気電子工学科.
2. 制御工学 教科書 P127 ~ P128.