制御工学演習解答

長野高専 電気電子工学科 5 年 34 番 栁原魁人

2025 年 7 月 22 日

1　問題 1

1.1　(1)

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 3}$$

特性方程式: $s^2 - 2s + 3 = 0$
解の公式より:

$$s = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm j2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm j\sqrt{2}$$

極: $s_1 = 1 + j\sqrt{2}, s_2 = 1 - j\sqrt{2}$
実数部が正なので右半平面にあり，システムは不安定.

1.2　(2)

$$\frac{1}{s^3 + 4s^2 + 7s + 6}$$

特性方程式: $s^3 + 4s^2 + 7s + 6 = 0$
$s = -2$ を代入: $(-2)^3 + 4(-2)^2 + 7(-2) + 6 = -8 + 16 - 14 + 6 = 0$
$(s + 2)$ で割ると: $(s + 2)(s^2 + 2s + 3) = 0$
$s_1 = -2$
$s^2 + 2s + 3 = 0$ より: $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm j\sqrt{2}$
極: $s_1 = -2, s_2 = -1 + j\sqrt{2}, s_3 = -1 - j\sqrt{2}$
すべての極の実数部が負なので，システムは安定.

2　問題 3

2.1　(1)

特性方程式: $s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0$

係数: $a_4 = 1, a_3 = 3, a_2 = 4, a_1 = 3, a_0 = 2$
ラウス配列の基本形:

$$\begin{array}{ll} s^4: & a_4 \quad a_2 \quad a_0 \\ s^3: & a_3 \quad a_1 \quad 0 \\ s^2: & b_1 \quad b_2 \\ s^1: & c_1 \\ s^0: & d_1 \end{array}$$

数値を代入したラウス配列:

$$\begin{array}{ll} s^4: & 1 \quad 4 \quad 2 \\ s^3: & 3 \quad 3 \quad 0 \\ s^2: & b_1 \quad b_2 \\ s^1: & c_1 \\ s^0: & d_1 \end{array}$$

計算:

$$b_1 = \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{3} = 3$$

$$b_2 = \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{3} = 2$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot b_2}{b_1} = \frac{3 \cdot 3 - 3 \cdot 2}{3} = 1$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot 0}{c_1} = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 0}{1} = 2$$

完成したラウス配列:

$$\begin{array}{ll} s^4: & 1 \quad 4 \quad 2 \\ s^3: & 3 \quad 3 \quad 0 \\ s^2: & 3 \quad 2 \\ s^1: & 1 \\ s^0: & 2 \end{array}$$

第 1 列: $[1, 3, 3, 1, 2]$ すべて正，符号変化なし．
システムは安定．

2.2 (2)

特性方程式: $2s^4 + 4s^3 + s^2 + 2s + 3 = 0$
係数: $a_4 = 2, a_3 = 4, a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 3$

ラウス配列の基本形:

$$\begin{array}{llll} s^4: & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^3: & a_3 & a_1 & 0 \\ s^2: & b_1 & b_2 & \\ s^1: & c_1 & & \\ s^0: & d_1 & & \end{array}$$

数値を代入したラウス配列:

$$\begin{array}{llll} s^4: & 2 & 1 & 3 \\ s^3: & 4 & 2 & 0 \\ s^2: & b_1 & b_2 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{4} = 0 \text{ (特殊ケース)}$$

$$b_2 = \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 0}{4} = 3$$

計算結果を代入したラウス配列:

$$\begin{array}{llll} s^4: & 2 & 1 & 3 \\ s^3: & 4 & 2 & 0 \\ s^2: & 0 & 3 & \end{array}$$

ϵ 法適用: $b_1 = \epsilon$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot b_2}{b_1} = \frac{\epsilon \cdot 2 - 4 \cdot 3}{\epsilon} = \frac{2\epsilon - 12}{\epsilon} \approx \frac{-12}{\epsilon} \text{ (負)}$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot 0}{c_1} = \frac{\frac{-12}{\epsilon} \cdot 3 - \epsilon \cdot 0}{\frac{-12}{\epsilon}} = \frac{\frac{-36}{\epsilon}}{\frac{-12}{\epsilon}} = 3 \text{ (正)}$$

完成したラウス配列（ε 法適用後）:

$$\begin{array}{llll} s^4: & 2 & 1 & 3 \\ s^3: & 4 & 2 & 0 \\ s^2: & \epsilon & 3 & \\ s^1: & \frac{-12}{\epsilon} & & \\ s^0: & 3 & & \end{array}$$

第 1 列符号: $[+, +, +, -, +]$ 符号変化 2 回
右半平面に 2 個の不安定極．システムは不安定.

2.3 (3)

特性方程式: $2s^4 + s^3 + 4s^2 + s + 2 = 0$

係数: $a_4 = 2, a_3 = 1, a_2 = 4, a_1 = 1, a_0 = 2$

ラウス配列の基本形:

$$\begin{array}{lccc} s^4: & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^3: & a_3 & a_1 & 0 \\ s^2: & b_1 & b_2 & \\ s^1: & c_1 & & \\ s^0: & d_1 & & \end{array}$$

数値を代入したラウス配列:

$$\begin{array}{lccc} s^4: & 2 & 4 & 2 \\ s^3: & 1 & 1 & 0 \\ s^2: & b_1 & b_2 & \\ s^1: & c_1 & & \end{array}$$

計算:

$$b_1 = \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$b_2 = \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{1} = 2$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot b_2}{b_1} = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = 0$$

計算結果を代入したラウス配列:

$$\begin{array}{lccc} s^4: & 2 & 4 & 2 \\ s^3: & 1 & 1 & 0 \\ s^2: & 2 & 2 & \\ s^1: & 0 & & \end{array}$$

$$s^1\text{行がすべて}0\text{ (特殊ケース)}$$

補助多項式の構成: ゼロの行の直前の行（s^2 行）の係数 $[2, 2]$ を使用。s^2 行なので s^2 の項から始まり，係数を 2 つ飛ばしで配置:

$$P(s) = 2s^2 + 2s^0 = 2s^2 + 2$$

補助多項式の微分:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s + 0 = 4s$$

微分の係数 $[4, 0]$ を s^1 行に代入
修正後のラウス配列:

$$\begin{array}{llll} s^4: & 2 & 4 & 2 \\ s^3: & 1 & 1 & 0 \\ s^2: & 2 & 2 & \\ s^1: & 4 & 0 & \\ s^0: & 2 & & \end{array}$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot 0}{c_1} = \frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{4} = 2$$

第 1 列: $[2, 1, 2, 4, 2]$ すべて正，符号変化なし
補助方程式: $2s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = \pm j$
虚軸上に極があるため，システムは安定限界.

3 問題 4

3.1 (1)

特性方程式: $s^3 + 7s^2 + 4s + 6 = 0$
係数: $a_3 = 1, a_2 = 7, a_1 = 4, a_0 = 6$
フルビッツ行列:

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

小行列式の計算:
第 1 首座小行列式：

$$\Delta_1 = a_2 = 7 > 0$$

第 2 首座小行列式：

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 6 \times 1 = 28 - 6 = 22 > 0$$

第 3 首座小行列式：

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

第 3 列で余因子展開すると：

$$\Delta_3 = 0 \times (\text{小行列式}) + 0 \times (\text{小行列式}) + 6 \times \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times (7 \times 4 - 6 \times 1) = 6 \times 22 = 132 > 0$$

すべて正なので，システムは安定.

3.2 (2)

特性方程式: $3s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 6 = 0$

係数: $a_4 = 3, a_3 = 1, a_2 = 5, a_1 = 2, a_0 = 6$

フルビッツ行列:

$$H = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

小行列式の計算:

第 1 首座小行列式：

$$\Delta_1 = a_3 = 1 > 0$$

第 2 首座小行列式：

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2×2 行列式の計算：

$$\Delta_2 = (1 \times 5) - (2 \times 3) = 5 - 6 = -1 < 0$$

$\Delta_2 < 0$ なので，システムは不安定.