制御工学における安定判別法の演習

長野高専 電気電子工学科 5 年 34 番 柳原魁人

2025 年 7 月 22 日

1　伝達関数の極に基づく安定判別

1.1　問題 1(1) の解答と解説

問題: 以下の伝達関数の安定性を，極を求めて判定せよ．

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 3}$$

解答プロセス:

1. 特性方程式の特定:
   伝達関数の分母多項式をゼロとおくことで，特性方程式を得る．
   $$s^2 - 2s + 3 = 0$$
2. 極の計算:
   この 2 次方程式を解の公式 $s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ を用いて解く．
   $$s = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
   $$s = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$
   $$s = \frac{2 \pm j2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm j\sqrt{2}$$
3. 極の配置と安定性の判定:
   得られた極は $s_1 = 1 + j\sqrt{2}$ と $s_2 = 1 - j\sqrt{2}$ である．
   これらの極の実数部は共に $\mathrm{Re}(s) = +1$ であり，正の値である．
   これは，極が複素 s 平面の右半平面（RHP）に存在することを示す．

結論:
右半平面に極が存在するため，このシステムは不安定である．

1.2　問題 1(2) の解答と解説

問題: 以下の伝達関数の安定性を，極を求めて判定せよ．

$$\frac{1}{s^3+4s^2+7s+6}$$

解答プロセス:

1. 特性方程式の特定:
   特性方程式は以下のようになる．
   $$P(s)=s^3+4s^2+7s+6=0$$
2. 極の計算（高次方程式の因数分解）:
   3 次以上の方程式では，まず有理根定理などを用いて整数の根を探すのが一般的である．定数項 6 の約数（$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$）を候補として代入する．
   - $s=-1$ を試す: $P(-1)=(-1)^3+4(-1)^2+7(-1)+6=-1+4-7+6=2\neq 0$
   - $s=-2$ を試す: $P(-2)=(-2)^3+4(-2)^2+7(-2)+6=-8+16-14+6=0$

   $s=-2$ が根であることがわかったため，$(s+2)$ が $P(s)$ の因数であることがわかる．次に，多項式の割り算（組立除法など）を行い，残りの因子を求める．
   $$(s^3+4s^2+7s+6)\div(s+2)=s^2+2s+3$$
   これにより，特性方程式は次のように因数分解できる．
   $$(s+2)(s^2+2s+3)=0$$
3. すべての極の導出:
   各因数がゼロとなる条件から，すべての極を求める．
   - 第 1 の因子から: $s+2=0\Rightarrow s_1=-2$
   - 第 2 の因子から: $s^2+2s+3=0$ を解の公式で解く．

   $$s=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}$$
   $$s=\frac{-2\pm j2\sqrt{2}}{2}=-1\pm j\sqrt{2}$$
   したがって，3 つの極は $s_1=-2, s_2=-1+j\sqrt{2}, s_3=-1-j\sqrt{2}$ となる．
4. 極の配置と安定性の判定:
   各極の実数部を確認する．
   - $\mathrm{Re}(s_1)=-2$（負）
   - $\mathrm{Re}(s_2)=-1$（負）
   - $\mathrm{Re}(s_3)=-1$（負）

すべての極の実数部が負であり，s 平面の左半平面（LHP）に配置されている．

結論:
すべての極が左半平面に存在するため，このシステムは安定である．

2 ラウスの安定判別法

2.1 問題 3(1) の解答と解説

問題: 特性方程式が $s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0$ で与えられる伝達関数の安定性を，ラウスの安定判別法から判定せよ．

解答プロセス:

1. ラウス配列の構成:
   特性方程式の係数は $a_4 = 1, a_3 = 3, a_2 = 4, a_1 = 3, a_0 = 2$ である．

表 1 ラウス配列の構成過程

s^4	1	4	2
s^3	3	3	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

各要素を計算する．

- s^2 の行:

$$b_1 = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$b_2 = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

- s^1 の行:

$$c_1 = \frac{3 \cdot 3 - 3 \cdot 2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

- s^0 の行:

$$d_1 = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 0}{1} = 2$$

2. 完成したラウス配列と安定性の判定:
   完成した配列は表 2 の通りである．
   第 1 列の要素は $[1, 3, 3, 1, 2]$ である．すべての要素が正であり，符号の変化はない．

結論:
ラウス配列の第 1 列に符号変化がないため，このシステムは安定である．

表 2　完成したラウス配列

s^4	1	4	2
s^3	**3**	3	0
s^2	**3**	2	
s^1	**1**		
s^0	**2**		

2.2　問題 3(2) の解答と解説

問題: 特性方程式が $2s^4 + 4s^3 + s^2 + 2s + 3 = 0$ で与えられる伝達関数の安定性を判定し，不安定の場合は不安定極の数も求めよ．

解答プロセス:

1. ラウス配列の構成と特殊ケースの発生:
   係数は $a_4 = 2, a_3 = 4, a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 3$ である．

   表 3　ラウス配列（特殊ケース発生）

s^4	2	1	3
s^3	4	2	0
s^2	b_1	b_2	

   s^2 の行の第 1 要素 b_1 を計算する．

   $$b_1 = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

   第 1 列に 0 が現れたため，これは特殊ケース 1 に該当する．

2. ε 法の適用:
   $b_1 = 0$ を微小な正の数 ε で置き換えて計算を続行する．

   $$b_2 = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 0}{4} = 3$$

   修正された配列は表 4 のようになる．
   残りの要素を計算する．
   - s^1 の行:
   $$c_1 = \frac{\varepsilon \cdot 2 - 4 \cdot 3}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon - 12}{\varepsilon}$$
   - s^0 の行:
   $$d_1 = \frac{c_1 \cdot 3 - \varepsilon \cdot 0}{c_1} = 3$$

3. 第 1 列の符号評価 ($\varepsilon \to 0^+$):
   第 1 列の要素は $[2, 4, \varepsilon, \frac{2\varepsilon-12}{\varepsilon}, 3]$ である．ε を微小な正の数として，各要素の符号を評価する．

表 4　微小量法を適用したラウス配列

s^4	2	1	3
s^3	4	2	0
s^2	ε	3	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

- s^4 の行: 2 (正)
- s^3 の行: 4 (正)
- s^2 の行: ε (正)
- s^1 の行: $\frac{2\varepsilon-12}{\varepsilon} \approx \frac{-12}{\varepsilon}$ (負)
- s^0 の行: 3 (正)

符号の系列は $[+,+,+,-,+]$ となる．

4. 符号変化の回数と安定性の判定:
   第 1 列の符号は，s^2 の行から s^1 の行へ移る際に正から負へ変化し，s^1 の行から s^0 の行へ移る際に負から正へ変化している．符号変化は合計で 2 回である．

結論:
第 1 列の符号変化が 2 回あるため，このシステムは不安定であり，右半平面に 2 個の不安定極を持つ．

2.3　問題 3(3) の解答と解説

問題: 特性方程式が $2s^4 + s^3 + 4s^2 + s + 2 = 0$ で与えられる伝達関数の安定性を判定し，不安定の場合は不安定極の数も求めよ．

解答プロセス:

1. ラウス配列の構成と特殊ケースの発生:
   係数は $a_4 = 2, a_3 = 1, a_2 = 4, a_1 = 1, a_0 = 2$ である．

表 5　ラウス配列（ケース 2 発生）

s^4	2	4	2
s^3	1	1	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		

s^2 の行の要素を計算する．

$$b_1 = \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$b_2 = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{1} = 2$$

次に，s^1 の行の要素 c_1 を計算する．

$$c_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

s^1 の行の他の要素も 0 となり，この行のすべての要素が 0 になる．これは特殊ケース 2 に該当する．

2. 補助多項式の利用:
ゼロの行 (s^1 の行) の 1 つ上の行 (s^2 の行) の係数 $[2, 2]$ から補助多項式 $P(s)$ を作る．s^2 の行は s^2 の項から始まるので，
$$P(s) = 2s^2 + 2s^0 = 2s^2 + 2$$
この補助多項式を s で微分する．
$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s$$
この微分の係数 $[4, 0]$ を，ゼロになった s^1 の行に代入する．
3. 修正されたラウス配列と安定性の判定:
修正された配列で計算を続行する．

表 6　補助多項式を用いて修正したラウス配列

s^4	2	4	2
s^3	**1**	1	0
s^2	**2**	2	
s^1	**4**	0	
s^0	d_1		

s^0 の行の要素 d_1 を計算する．
$$d_1 = \frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{4} = 2$$
完成した配列の第 1 列の要素は $[2, 1, 2, 4, 2]$ である．すべての要素が正であり，符号変化はない．
4. 安定性の最終評価:
第 1 列に符号変化がないことから，右半平面に極は存在しないことがわかる．しかし，補助多項式が現れたことは，システムが厳密に安定ではないことを示している．このシステムの挙動を正確に理解するために，補助方程式 $P(s) = 0$ を解く．
$$2s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s^2 = -1 \Rightarrow s = \pm j$$
これは，システムが虚軸上に一対の極を持つことを意味する．

結論:

右半平面に極はないが，虚軸上に極 ($s = \pm j$) が存在するため，このシステムは安定限界の状態にある．

3　フルビッツの安定判別法

3.1　問題 4(1) の解答と解説

問題: 特性方程式が $s^3 + 7s^2 + 4s + 6 = 0$ で与えられる伝達関数の安定性を，フルビッツの安定判別法から判定せよ．

解答プロセス:

1. 係数の特定:
   $n = 3$ であり，係数は $a_3 = 1, a_2 = 7, a_1 = 4, a_0 = 6$ である．
2. フルビッツ行列の構成:
   3×3 のフルビッツ行列 H を構成する．
   $$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
3. **首座小行列式の計算:**
   - Δ_1:
     $$\Delta_1 = 7$$
   - Δ_2:
     $$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = (7 \cdot 4) - (6 \cdot 1) = 28 - 6 = 22$$
   - Δ_3:
     $$\Delta_3 = \det(H) = \det \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
     第 3 列について余因子展開を行うと計算が容易になる．
     $$\Delta_3 = 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = 6 \cdot 22 = 132$$
4. 安定性の判定:
   計算した小行列式を評価する．
   - $\Delta_1 = 7 > 0$
   - $\Delta_2 = 22 > 0$
   - $\Delta_3 = 132 > 0$

   すべての首座小行列式が正である．

結論:
フルビッツの安定条件をすべて満たしているため，このシステムは安定である．

3.2 問題 4(2) の解答と解説

問題: 特性方程式が $3s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 6 = 0$ で与えられる伝達関数の安定性を，フルビッツの安定判別法から判定せよ．

解答プロセス:

1. 係数の特定:
   $n = 4$ であり，係数は $a_4 = 3, a_3 = 1, a_2 = 5, a_1 = 2, a_0 = 6$ である．
2. フルビッツ行列の構成:
   4×4 のフルビッツ行列 H を構成する．
   $$H = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
3. **首座小行列式の計算:**
   - Δ_1:
     $$\Delta_1 = a_3 = 1$$
     この時点では条件 $\Delta_1 > 0$ を満たしている．
   - Δ_2:
     $$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (1 \cdot 5) - (2 \cdot 3) = 5 - 6 = -1$$
4. 安定性の判定:
   計算した小行列式を評価する．
   - $\Delta_1 = 1 > 0$
   - $\Delta_2 = -1 < 0$

   Δ_2 が負の値となったため，フルビッツの安定条件は満たされない．この時点で，システムが安定でないことが確定する．したがって，Δ_3 と Δ_4 を計算する必要はない．

結論:
第 2 首座小行列式 Δ_2 が負であるため，このシステムは不安定である．