

# 電子工学 (5E) 試験対策 統合完全版・改

詳細解説・計算過程完全記述・用語完全定義版

## 概要

本資料は、電子工学の試験対策における\*\*「これ一冊で完結する」\*\*バイブルを目指したものである。数式の変形過程はもちろん、問題文に登場する「モリブデン線」「鏡像力」といった専門用語についても、初学者がつまずかないよう詳細な定義と物理的イメージを付記した。教科書やノートを開かずとも、この資料だけで理解と演習が完了するように設計されている。

## 目次

第 I 部	試験範囲ポイント完全解説 (①～⑯)	2
1	エネルギー・バンドと電子放出の基礎 (①～⑦)	2
2	熱電子放出 (⑧～⑩)	4
3	光電子放出 (⑪～⑬)	6
4	二次電子放出 (⑭～⑯)	7
5	電界放出と電界計算 (⑰～⑲)	8
第 II 部	試験範囲ポイント要約 (基礎知識)	10
6	エネルギー・バンドと電子放出	10
7	電子放出の 4 形態	10
第 III 部	2024 年度 模範解答 (詳細版)	11
第 IV 部	2023 年度 模範解答 (詳細版)	14

## 第Ⅰ部

# 試験範囲ポイント完全解説 (①~⑯)

試験範囲の 19 ポイントについて、単なる用語説明に留まらず、「なぜそうなるのか」「試験でどう問われるか」まで踏み込んで解説する。

## 1 エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①~⑯)

### ① 價電子帯、禁制帯、伝導帯とはなにか

固体中の電子が取りうるエネルギー準位の構造（バンド構造）に関する定義である。

#### バンド構造の 3 要素

**價電子帯 (Valence Band)** 原子核に束縛されている電子（価電子）が充満しているエネルギー帯。

- **直感的イメージ:** 満員電車。電子がぎゅうぎゅう詰めで身動きが取れない状態。
- **特徴:** ここにある電子は電気伝導（電流）に寄与しない。
- **温度の影響:** 絶対零度 ( $0 [K]$ ) では完全に満たされているが、温度が上がると一部の電子がエネルギーを得て上の階（伝導帯）へ移動し、空席（正孔）ができる。

**禁制帯 (Forbidden Band / Band Gap)** 量子力学的な制約により、電子が存在することのできないエネルギー領域。

- **直感的イメージ:** 建物の 1 階（價電子帯）と 2 階（伝導帯）の間にある「吹き抜け空間」。ここには人は立たない。
- **バンドギャップ  $E_g$ :** この幅が広いと絶縁体、適度だと半導体、重なっていると金属（導体）になる。

**伝導帯 (Conduction Band)** 原子の束縛を離れ、結晶内を自由に動き回れる電子（自由電子）が存在するエネルギー帯。

- **直感的イメージ:** ガラガラの 2 階フロア。電子は自由に走り回れる。
- **電気伝導:** ここに電子が存在して初めて電流が流れる。

**※金属（導体）の特異性:** 金属では「價電子帯」と「伝導帯」が重なっているか、價電子帯自体が完全に埋まっておらず空き席がある状態である。そのため、わずかなエネルギー（室温の熱など）で電子が自由電子となり、高い導電性を示す。

### ② 外部エネルギーの入射により電子が放出されるしくみ

通常、電子は物質内部の「ポテンシャルの井戸（エネルギーの低い安定した場所）」に閉じ込められている。これを脱出させる（電子放出）ためのプロセスの本質は以下の通りである。

1. **定常状態:** 電子は通常、エネルギーの低い状態（價電子帯やフェルミ準位付近）にある。
2. **外部励起:** 外部からエネルギー  $\Delta E$  を与える。エネルギー源の種類により名称が変わる。
  - 热エネルギー ( $kT$ ) → **熱電子放出** (ヒーターで加熱)
  - 光エネルギー ( $h\nu$ ) → **光電子放出** (光を当てる)
  - 強電界 ( $E$ ) → **電界放出** (強い電圧で引っ張る)

- 電子衝突  $(1/2mv^2) \rightarrow$  二次電子放出 (別の電子をぶつける)
3. 脱出条件: 電子の持つ全エネルギーが、表面の障壁高さ (真空準位  $E_{vac}$ ) を超えたとき、電子は表面を突き抜けて真空中に飛び出す。

### ③ 金属内電子が金属外に飛び出さない理由

「なぜ常温の金属を置いておくだけでは電子が飛び出さないのか?」という問い合わせへの物理的解答。

- 電位障壁 (Potential Barrier): 金属表面には、電子を閉じ込めるエネルギーの壁が存在する。
- 鏡像力 (Image Force): 電子が金属表面からわずかに外に出ようとすると、金属表面に正電荷 (ホール) が誘導される。クーロン力により、正電荷が電子 (負電荷) を引き戻そうとする力が働く。これが壁の正体である。
- エネルギー不足: 室温 (300 [K]) の熱エネルギー  $kT \approx 0.026$  [eV] は、一般的な金属の仕事関数  $\phi \approx 4 \sim 5$  [eV] に比べてあまりに小さいため、確率的に飛び出す電子はほぼ皆無である。

### ④ 電子放出の共通的基礎 (各用語の厳密な定義と関係式)

記述問題や計算問題の基礎となる定義式。図をイメージしながら理解すること。

#### 重要公式と定義

$$\phi = W - E_F \iff W = E_F + \phi \quad (1)$$

#### 【用語解説】用語解説

**真空準位 (Vacuum Level,  $E_{vac}$ )** 真空中に静止した「自由な電子」が持つエネルギー。これをエネルギー基準 ( $E = 0$ ) とする場合と、ここを脱出ゴールとする場合がある。

**全障壁  $W$  (Potential Barrier Height)** 金属の底 (電子が存在しうる最低エネルギー) から、真空準位までの高さ。電子が脱出するために超えなければならない「壁の全高」。

**フェルミ準位  $E_F$  (Fermi Level)** 電子のエネルギーの基準点。絶対零度において、電子が詰まっている「水面」の高さのこと。これより下は満員、上は空っぽ。

**仕事関数  $\phi$  (Work Function)** 「フェルミ準位にある電子 (表面付近のエリート電子)」を「真空準位 (外の世界)」まで引き上げるために最低限必要な追加工エネルギー。

$$\phi [\text{eV}] \quad \text{または} \quad e\phi [\text{J}]$$

※材料固有の値であり、表面の状態 (汚れや酸化) によって変化する。

#### 【注意】単位の混同に注意

仕事関数  $\phi$  は通常 [eV] (電子ボルト) で与えられる。しかし、計算式 (例えば  $h\nu = e\phi + K$ ) ではジュール [J] に統一する必要がある。

$$1 \text{ [eV]} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ [J]}$$

必ず計算前に換算すること。

## ⑤ 金属内電子のエネルギー（絶対零度における状態）

- パウリの排他律: 「1つの量子状態（席）には1つの電子しか入れない」という量子力学のルール。
- 積み上げ: 絶対零度 ( $T = 0 \text{ [K]}$ ) では、電子はエネルギーの低い順位から順に、隙間なくびっしりと詰まっていく。
- フェルミ面: 詰め込まれた電子の、一番上のエネルギー面がフェルミ準位  $E_F$  と一致する。それより上には電子は1つも存在しない。

## ⑥ フェルミ準位とフェルミ分布関数の意味

電子が「あるエネルギー準位  $E$ 」に存在する確率を与える統計力学の基本関数。

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} \quad (2)$$

- 意味: エネルギー  $E$  の準位が電子によって占有されている確率 ( $0 \leq F(E) \leq 1$ )。
- $E = E_F$  のとき: 指数部は  $\exp(0) = 1$  となるため、温度  $T$  に関わらず  $F(E_F) = 1/2$  となる。これがフェルミ準位の定義である。
- $E \gg E_F$  のとき（ボルツマン近似）: 分母の 1 が無視でき、 $F(E) \approx \exp\left(-\frac{E-E_F}{kT}\right)$  となる。これは古典的なボルツマン分布と一致し、熱電子放出の式の導出根拠となる。

## ⑦ エネルギー準位図のグラフ $F(E), n(E)$

試験でグラフを描く、あるいは選ぶ問題が出る可能性がある。

- 分布関数  $F(E)$  の形状
- $T = 0 \text{ [K]}$ :  $E_F$  で垂直に落ちる階段関数（ステップ関数）。 $E_F$  以下は確率 1、以上は確率 0。
  - $T > 0 \text{ [K]}$ :  $E_F$  付近で角が取れ、なだらかに変化するシグモイド曲線。高温ほど傾きが緩やかになり、高エネルギー側へ裾野が広がる（これが熱電子放出の原因）。
- 状態密度  $D(E)$  と電子密度  $n(E)$
- 状態密度  $D(E)$ : 電子が入れる「席」の数。自由電子モデルでは  $D(E) \propto \sqrt{E}$ （放物線）。
  - 電子密度  $n(E)$ : 実際にそこにいる電子の数。

$$n(E) = D(E) \times F(E) \propto \sqrt{E} \cdot F(E)$$

グラフ形状は、 $E_F$  までは放物線で増え、 $E_F$  付近で急激にゼロになる「山型」となる。

## 2 熱電子放出（⑧～⑩）

### ⑧ 熱電子の飽和電流密度（ダッシュマン・リチャードソンの式）

電子工学において最も重要な式の一つ。計算問題の 8 割はこれに関連する。

### 公式: リチャードソン・ダッシュマンの式

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad [\text{A}/\text{m}^2] \quad (3)$$

- $J$ : 電流密度 (単位面積あたりの電流 [ $\text{A}/\text{m}^2$ ])
- $A$ : リチャードソン定数 (理論値  $\approx 1.20 \times 10^6 [\text{A}/\text{m}^2\text{K}^2]$ )
- $T$ : 絶対温度 [K] ( $= [{}^\circ\text{C}] + 273.15$ )
- $e\phi$ : 仕事関数 (エネルギー障壁の高さ [J])
- $k$ : ボルツマン定数

式の物理的意味: 「 $T^2$ 」は電子の衝突頻度などに由来し、「 $\exp$ 」項はエネルギー障壁を超える確率 (ボルツマン因子) を表す。温度  $T$  が少し上がるだけで、指数関数の効果により  $J$  は爆発的に増加する。

### ⑨ リチャードソン線から仕事関数と $A$ を求める方法

実験データから材料定数 ( $\phi, A$ ) を決定する手法。

式を変形し、線形関係 ( $Y = aX + b$ ) を見出す。

$$\ln\left(\frac{J}{T^2}\right) = \ln A - \frac{e\phi}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

- 縦軸 ( $Y$  軸):  $\ln(J/T^2)$
- 横軸 ( $X$  軸):  $1/T$  (逆温度)

このプロット (リチャードソンプロット) は右下がりの直線となる。

- 傾き (Slope):  $-\frac{e\phi}{k}$  → 傾きの絶対値から仕事関数  $\phi$  を算出できる。
- Y 切片 (Intercept):  $\ln A$  → ここから定数  $A$  を決定できる。

### ⑩ 热陰極の具備条件

優れた電子放出材料 (カソード) が満たすべき条件。記述問題頻出。

1. 仕事関数  $\phi$  が小さいこと: これが最重要。 $\phi$  が小さいほど、低い温度で多量の電子を放出できる (省エネ)。
2. 高い放出電流密度  $J$  が得られること: 動作温度において十分な電子流を供給できること。
3. 融点が高く、蒸気圧が低いこと: 動作温度で溶けたり、蒸発して痩せ細ったりしないこと (長寿命化)。
4. 機械的強度が強いこと: 高温でも変形したり折れたりしないこと。
5. 化学的に安定であること: 残留ガスと反応して表面が変質 (中毒) し、仕事関数が悪化しないこと。
6. 陰極能率 (放出効率) が高いこと: 加熱電力 1W あたりに得られる電流値 [ $\text{mA}/\text{W}$ ] が大きいこと。

### 代表的な陰極材料

- タングステン (W): 融点が高い (3655 [K]) が、仕事関数も大きい (4.5 [eV])。高電圧・高出力管向け。
- トリウムタングステン (Th-W): W 中にトリウム (Th) を添加。表面に単原子層を形成し、 $\phi$  を 2.6 [eV] まで下げる。
- 酸化物陰極 (Oxide): BaO, SrO などを塗布。 $\phi \approx 1.0$  [eV] と非常に低い。ブラウン管や蛍光灯な

ど一般用途向け。

### 3 光電子放出 (⑪～⑬)

#### ⑪ 光電子放出条件

光の粒子性（光子）に基づく現象。

- 入射光子エネルギー  $h\nu$  が、電子を束縛している仕事関数  $e\phi$  に勝つ必要がある。

$$h\nu \geq e\phi$$

- 光の強さ（明るさ）を上げても、振動数  $\nu$  が足りなければ電子は 1 個も出ない（古典波動論では説明できない点）。

#### ⑫ アインシュタインの式、限界周波数、限界波長

エネルギー保存則の式である。

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi \quad (4)$$

- $K_{\max}$ : 放出される電子の最大運動エネルギー
- $h\nu$ : 入ってくるエネルギー（収入）
- $e\phi$ : 出るために支払うエネルギー（税金・コスト）

限界値の定義:  $K_{\max} = 0$  (ギリギリ放出される状態) とおくことで求められる。

- 限界周波数  $\nu_0$ :  $h\nu_0 = e\phi \implies \nu_0 = \frac{e\phi}{h}$
- 限界波長  $\lambda_0$ :  $\frac{hc}{\lambda_0} = e\phi \implies \lambda_0 = \frac{hc}{e\phi}$

重要: 入射光の波長  $\lambda$  が  $\lambda_0$  より短くないと（エネルギーが高くないと）放出されない。長波長側が NG である点に注意。

#### ⑬ 量子効率、光電感度

効率を表す 2 つの指標。

量子効率 (Quantum Efficiency,  $\eta_q$ ) 「個数の比率」。単位なし（または %）。

$$\eta_q = \frac{\text{放出された電子の数 } N_e}{\text{入射した光子の数 } N_p}$$

通常、金属では  $10^{-4}$  以下と低いが、半導体光電面では  $0.1 \sim 0.3$  に達する。

光電感度 (Spectral Responsivity,  $S$ ) 「電気的出力の比率」。単位は [A/W]。

$$S = \frac{\text{光電流 } I [[\text{A}]]}{\text{入射光パワー } P [[\text{W}]}}$$

実用的なセンサー性能評価に使われる。

## 4 二次電子放出 (⑯～⑰)

### ⑯ 二次電子放出の原理

外部から高速の電子（一次電子）を物質に衝突させた際、物質内部の電子がエネルギーを受け取って放出される現象。

- 一次電子は物質内部へ侵入しながら、衝突を繰り返してエネルギーを失う。
- その過程で励起された内部電子（二次電子）が表面に向かって移動する。
- 表面障壁を超えるエネルギーを持ったまま表面に到達できたものだけが放出される。

### ⑰ 放出比の測定方法

二次電子放出比  $\delta$  (Secondary Emission Yield):

$$\delta = \frac{I_s(\text{二次電子流})}{I_p(\text{一次電子流})}$$

- $\delta > 1$ : 入射した電子より多くの電子が出てくる → 増幅作用がある（電子が増える）。
- $\delta < 1$ : 電子が吸収されて減る。

### ⑱ 放出特性曲線（なぜ山なりになるのか？）

一次電子の加速電圧  $V_p$ （衝突エネルギー）と  $\delta$  の関係は極大値を持つ。

- 上昇域:**  $V_p$  が低いときは、エネルギーが増えるほど生成される二次電子の数が増えるため、 $\delta$  は上昇する。
- ピーク  $\delta_{max}$ :** ある電圧（数百 V 程度）で最大となる。
- 下降域:** さらに  $V_p$  を上げると、一次電子は物質の深部まで侵入してしまう。深い場所で発生した二次電子は、表面まで戻ってくる間に散乱されてエネルギーを失い、脱出できなくなる。そのため、高電圧すぎると逆に効率が落ちる。

### ⑲ 光電子増倍管 (PMT) の原理

極微弱な光を検出する真空管デバイス。「光電効果」と「二次電子放出」のハイブリッド。

- 光電面 (Photocathode):** 入射光を受け、光電効果により光電子を放出する。（変換: 光子 → 電子）
- ダイノード部 (Dynodes):** 電子増倍電極群。1段あたり  $\delta$  倍に電子を増やす。 $n$  段あれば、トータルのゲインは  $G = \delta^n$  となる。
  - 例:  $\delta = 4, n = 10$  なら  $4^{10} \approx 100\text{万倍}$  の増幅。
- 陽極 (Anode):** 増倍された電子群（雪崩）を回収し、電流として出力する。

## 5 電界放出と電界計算 (⑯～⑰)

### ⑯ ショットキー効果 (Schottky Effect)

熱電子放出において、電極間に強い電界をかけたときに放出電流が増加する現象。

#### 【用語解説】ショットキー効果の仕組み

1. 元々の壁: 金属表面には「鏡像力」による高い壁がある。
  2. 電界の追加: ここに「外部電界（電子を引っ張り出す力）」を加えると、ポテンシャルが右下がりの直線になる。
  3. 合成: 「鏡像力」と「外部電界」を足し合わせると、ポテンシャルの山の頂点が低くなり ( $\Delta\phi$ )、かつ壁が薄くなる。
- 結果: 実効的な仕事関数が  $\phi' = \phi - \Delta\phi$  に減少するため、熱電子が飛び出しやすくなる。
  - 数式: 仕事関数の低下量  $\Delta\phi$  は  $\sqrt{E}$  (電界の平方根) に比例する。

※これに対し、常温で極めて強い電界をかけ、障壁をトンネル効果で突き抜けるのが「(冷) 電界放出 (Field Emission)」である。区別に注意。

### ⑰ 電界と電位の計算手順 (ポアソン・ラプラス)

記述問題の山場であり、多くの学生が躊躇するポイント。ここでは、物理法則の根源（ガウスの法則）から出発し、試験で問われる微分方程式の形になるまでを\*\*一切の飛躍なく\*\*解説する。

#### 基礎方程式の導出（ガウスの法則からポアソン方程式へ）

この流れは記述問題で「導出過程を書け」と問われる可能性があるため、論理ステップを暗記すること。

#### 【重要導出】ポアソン方程式とラプラス方程式の導出

##### Step 1: ガウスの法則（積分形）の確認

空間内の任意の閉曲面  $S$  を考え、その内部の体積を  $V$ 、内部にある総電荷を  $Q$  とする。「閉曲面から出る電気力線の総本数（電束）は、内部の電荷量に等しい」という法則である。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_V \rho dv$$

ここで  $\mathbf{D}$  は電束密度、 $\rho$  は体積電荷密度である。

##### Step 2: ガウスの発散定理の適用

数学の定理「面積分 → 体積分への変換」を用いる。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv$$

これと Step 1 の式を比較すると、どちらも体積分  $\int_V \dots dv$  の形になる。

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \int_V \rho dv$$

### Step 3: 微分形（マクスウェル方程式）へ

任意の体積  $V$  で上記が成り立つためには、被積分関数同士が等しくなければならない。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{ガウスの法則の微分形})$$

### Step 4: 電界と電位の関係を代入

(1) 構成方程式:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  (真空中の場合)

(2) 電位の定義: 静電場において電界は電位  $V$  の勾配（マイナス）で表される。 $\mathbf{E} = -\nabla V$  これらを Step 3 に代入する。

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad \xrightarrow{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad \nabla \cdot (\epsilon_0 (-\nabla V)) = \rho$$

### Step 5: ポアソン方程式の完成

$\epsilon_0$  を定数として外に出し、 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  (ラプラシアン) を用いると：

$$-\epsilon_0 \nabla^2 V = \rho \iff \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

これがポアソンの方程式である。電荷  $\rho$  が存在する場合の電位分布を記述する。

### Step 6: ラプラス方程式（電荷がない場合）

もし空間に電荷が存在しない ( $\rho = 0$ ) ならば、右辺はゼロになる。

$$\nabla^2 V = 0$$

これをラプラスの方程式と呼ぶ。

## 1 次元計算パターン（試験で実際に解く式）

実際の試験問題では、平板電極などを想定して「1次元 ( $x$  方向のみ)」の変化を考えることが多い。この場合、ラプラス方程式  $\nabla^2$  は単純な2階微分  $\frac{d^2}{dx^2}$  に置き換わる。

### パターン別の微分方程式と解法

基本式（1次元ポアソン方程式）：

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

【パターン 1: 空間電荷なし ( $\rho = 0$ )】方程式:  $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$  (ラプラス方程式)

- 1回積分:  $\frac{dV}{dx} = C_1$  (電界  $E$  は一定)
- 2回積分:  $V = C_1 x + C_2$  (電位は直線的に変化)
- 平行平板コンデンサの電位分布そのものである。

【パターン 2: 一様な空間電荷 ( $\rho = \text{const}$ )】方程式:  $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

- 1回積分:  $\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} x + C_1$  (電界は傾きをもつ直線)
- 2回積分:  $V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 + C_1 x + C_2$  (電位は放物線を描く)

【パターン 3: 空間電荷制限電流 (Child-Langmuir 則の基礎)】講義で扱われた「距離に依存する電荷分

布  $\rho(x) = -kx^{-1/2}$  のケース (初速度 0 の電子が加速されるモデル)。方程式:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2}$$

手順 1 (1 回積分: 電界):

$$\frac{dV}{dx} = \int \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} dx = \frac{k}{\varepsilon_0} [2x^{1/2}] + C_1$$

境界条件「カソード ( $x = 0$ ) で電界 0」とすると  $C_1 = 0$ 。

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2k}{\varepsilon_0} x^{1/2}$$

手順 2 (2 回積分: 電位):

$$V = \int \frac{2k}{\varepsilon_0} x^{1/2} dx = \frac{2k}{\varepsilon_0} \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right] + C_2$$

境界条件「カソード ( $x = 0$ ) で電位 0」とすると  $C_2 = 0$ 。

結論:

$$V = \frac{4k}{3\varepsilon_0} x^{3/2}$$

これを逆に解くと  $x \propto V^{2/3}$  や、電流  $J$  と電圧  $V$  の関係 ( $J \propto V^{3/2}$ : 3/2 乗則) が導かれる。

## 第 II 部

### 試験範囲ポイント要約 (基礎知識)

まずは試験範囲の全体像と、解法の基礎となる物理的概念を確認する。

#### 6 エネルギーバンドと電子放出

##### バンド構造の基本

- 価電子帯 (Valence Band): 電子が充満している帯域。絶縁体ではここは満員で電流が流れない。
- 禁制帯 (Forbidden Band): 電子が存在できないエネルギーギャップ。
- 伝導帯 (Conduction Band): 自由電子が存在できる帯域。ここに電子があるとき電流が流れる。

※金属の場合: 価電子帯と伝導帯が重なっている、あるいは価電子帯に空きがあるため、常に自由電子が存在する。

#### 7 電子放出の 4 形態

- 熱電子放出: 熱エネルギー ( $kT$ ) を与えて放出させる。リチャードソンの式に従う。
- 光電子放出: 光エネルギー ( $h\nu$ ) を与えて放出させる。 $h\nu > \phi$  が条件。
- 二次電子放出: 一次電子を衝突させて放出させる。増倍管に応用。
- 電界放出: 強電界で障壁をトンネルさせる (またはショットキー効果で障壁を下げる)。

## 第 III 部

# 2024 年度 模範解答 (詳細版)

## 問 1. エネルギーバンドの名称

図の (a) は原子単体 (内殻電子)、(b) は結晶化してバンド構造を持った状態を示している。

- (1) 最もエネルギーが低い、電子が詰まった内殻準位 → [(a) 充満帯]
- (2) バンド間の電子が存在できない領域 → [(b) 禁制帯]
- (3)・(4) ナトリウム (Na) はアルカリ金属であり、最外殻の s 軌道が半分しか埋まっていない。したがって、価電子帯と伝導帯が重なっている（あるいは連続している）状態である。

### 答え

- (1) (a) 充満帯 (2) (b) 禁制帯 (3)(4) (c) 価電子帯 および (d) 伝導帯

## 問 2. 金属表面のエネルギー準位 (穴埋め)

- (1) 金属内でエネルギーが最も [(d) 大きい] 電子は (絶対零度において)
- (2) [(e) フェルミ] 準位にある。
- (3) [(b) 価電子帯] の底部 B にある電子が (※金属内の電子が存在する帯域として選択)
- (4) 真空中に飛び出すと [(j) 自由電子] になる。
- (5)  $\phi$  に相当する [(g) 仕事関数] エネルギーを与えることで
- (6) このエネルギー  $\phi$  を [(g) 仕事関数] と呼ぶ。

## 問 3. [計算] タングステンの仕事関数 $\phi$

問題:  $T = 2000$  [K], 半径  $r = 1.25 \times 10^{-4}$  [m], 長さ  $L = 0.1$  [m], 電流  $I = 2.00$  [mA]。

### 計算プロセス詳細: 計算プロセス

#### 1. 表面積 $S$ の計算

$$S = 2\pi rL = 2 \times 3.14159 \times (1.25 \times 10^{-4}) \times 0.1 \approx 7.854 \times 10^{-5} [\text{m}^2]$$

#### 2. 電流密度 $J$ の計算

$$J = \frac{I}{S} = \frac{2.00 \times 10^{-3}}{7.854 \times 10^{-5}} \approx 25.46 [\text{A}/\text{m}^2]$$

#### 3. 仕事関数 $\phi$ の導出 リチャードソン・ダッシュマンの式 $J = AT^2 \exp(-e\phi/kT)$ を変形する。

$$\ln\left(\frac{J}{AT^2}\right) = -\frac{e\phi}{kT} \iff \phi = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{AT^2}{J}\right)$$

#### 4. 数値代入係数項: $\frac{kT}{e} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 2000}{1.60 \times 10^{-19}} \approx 0.1725$ [eV]

対数の中身:  $\frac{AT^2}{J} = \frac{(1.20 \times 10^6) \times (2000)^2}{25.46} \approx 1.885 \times 10^{11}$

対数計算:  $\ln(1.885 \times 10^{11}) \approx \ln(1.885) + 25.33 \approx 0.63 + 25.33 = 25.96$   
 最終計算:  $\phi = 0.1725 \times 25.96 \approx 4.478 \text{ [eV]}$

答え

4.48 [eV]

## 問 4. [計算] 光電子の最大速度 $V_m$

問題:  $\phi = 1.68 \text{ [eV]}, \lambda = 520 \text{ [nm]}$ 。

計算プロセス詳細: 計算プロセス

### 1. 光子エネルギー $h\nu$ (J)

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{520 \times 10^{-9}} = 3.825 \times 10^{-19} \text{ [J]}$$

### 2. 仕事関数 $e\phi$ (J)

$$e\phi = 1.68 \times (1.60 \times 10^{-19}) = 2.688 \times 10^{-19} \text{ [J]}$$

### 3. 最大運動エネルギー $K_{max}$

$$K_{max} = h\nu - e\phi = (3.825 - 2.688) \times 10^{-19} = 1.137 \times 10^{-19} \text{ [J]}$$

### 4. 速度 $V_m$ $K_{max} = \frac{1}{2}mV_m^2$ より

$$V_m = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.137 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} = \sqrt{0.2496 \times 10^{12}}$$

$$V_m \approx 0.50 \times 10^6 \text{ [m/s]}$$

答え

$5.00 \times 10^5 \text{ [m/s]}$

## 問 5. 二次電子放出

(1) 放出条件: 一次電子のエネルギーが物質内の電子を励起し、その電子が表面の電位障壁（仕事関数や電子親和力）を超えて真空中に脱出できるだけのエネルギーを持つこと。一般に、一次電子エネルギーがある閾値（イオン化エネルギー程度）以上である必要がある。

### (2) 材料選択:

- 選択: 酸化マグネシウム (MgO)
- 理由: 表の中で二次電子放出比の最大値  $\delta_{max}$  が 4.0 と最も大きく、一次電子 1 個あたりに放出される二次電子の数が最も多いため、增幅率が高く材料として優れているから。

## 問 6. 光電子増倍管 (PMT)

### (1) 測定対象と応用:

- 対象: 極微弱な光 (フォトン単位の光)。
- 応用例: スーパーカミオカンデ (ニュートリノ観測)、シンチレーションカウンタ、血液分析装置など。

### (2) 出力電流 $I$ の計算:

#### 計算プロセス詳細: 計算プロセス

##### 1. 光電面電流 $I_k$ :

$$I_k = P \times \eta = (1.98 \times 10^{-5}) \times (27.0 \times 10^{-3}) = 5.346 \times 10^{-7} [\text{A}]$$

##### 2. 増倍率 $G$ : ダイノード 6 段なので $\delta^6$

$$G = 3.51^6 \approx 1869$$

##### 3. 出力電流 $I$ :

$$I = I_k \times G = 5.346 \times 10^{-7} \times 1869 \approx 9.99 \times 10^{-4} [\text{A}]$$

#### 答え

**1.00 × 10<sup>-3</sup> [A] (1.00 [mA])**

## 問 7. ショットキー効果 (記述)

金属表面に強い外部電界を加えると、外部電界のポテンシャルと鏡像力のポテンシャルが合成され、電位障壁の頂点が下がり ( $\Delta\phi$ )、かつ壁の厚さが薄くなる現象。これにより、実効的な仕事関数が低下するため、熱電子放出電流が増加する。

## 問 8. 電界の求め方 (記述)

- (1) 方程式: ポアソンの方程式  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  (または  $\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ )
- (2) 手順: 方程式に  $\rho$  の分布関数を代入 → 電位変化の条件を入れて整理  
→ ①  $x$  で 1 回積分する (電界の式が出る)  
→ ② さらに  $x$  で積分する (電位  $V$  の式が出る)  
→ 境界条件を代入して定数を求める  
→ ③ 求めた電位の式  $V(x)$  を  $x$  で微分し、符号を反転させる ( $E_x = -\frac{dV}{dx}$ )  
→  $x$  方向の電界の強さ  $E_x$  を求める。

## 第 IV 部

# 2023 年度 模範解答 (詳細版)

## 問 1. 電子放出の基礎 (鏡像力)

(1) 力の大きさ  $|F|$ : 金属表面を鏡とし、距離  $x$  の反対側に正電荷  $+e$  があるとみなす (クーロンの法則)。電荷間距離は  $2x$  となる。

$$|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e \times e}{(2x)^2} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} [[\text{N}]]$$

(2) 力の方向: 図中の電子  $-e$  から、**金属表面に向かう左向きの矢印**を描く (引力)。

(3) 電位障壁  $W$ : 無限遠を基準として積分する。

$$W = \int_x^\infty |F| dx = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_x^\infty = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x} [[\text{J}]]$$

eV 単位にするため  $e$  で割る:

$$W = \frac{e}{16\pi\varepsilon_0 x} [[\text{eV}]]$$

(4) グラフ: 縦軸  $W$ 、横軸  $x$  のグラフを描く。 $x$  が小さいほど  $W$  は大きく (無限大へ発散)、 $x$  が大きくなると  $W$  はゼロに近づく**反比例の曲線 (双曲線)**を描く。

## 問 2. エネルギー準位図の描画

ポテンシャル井戸の図に対して以下を記入する。

- ① **価電子帯**: 金属内部 (左側の深い部分) の底からフェルミ準位までの、電子が詰まっている領域全体。
- ② **フェルミ準位**: 電子が詰まっている最上面のライン (水面)。点線を引き「 $E_F$ 」と書く。
- ③ **フェルミエネルギー  $E_F$** : 井戸の底からフェルミ準位までの高さを示す矢印。
- ④ **仕事関数  $\phi$** : フェルミ準位から、右側の真空準位 (障壁の平らな頂上) までの高さを示す矢印。

## 問 3. [計算] モリブデン線の半径 $r$

問題:  $L = 0.1 [\text{m}]$ ,  $T = 2000 [\text{K}]$ ,  $I = 22.8 [\text{mA}]$ ,  $\phi = 4.27 [\text{eV}]$ .

### 計算プロセス詳細: 計算プロセス

1. 電流密度  $J$  の算出 (リチャードソンの式) 指数部:  $\frac{e\phi}{kT} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 4.27}{1.38 \times 10^{-23} \times 2000} \approx 24.75$

$$J = AT^2 \exp(-24.75) = (1.20 \times 10^6) \times (2000)^2 \times (1.78 \times 10^{-11})$$

$$J = (4.8 \times 10^{12}) \times (1.78 \times 10^{-11}) \approx 85.44 [\text{A}/\text{m}^2]$$

2. 半径  $r$  の逆算 全電流  $I = 22.8 [\text{mA}] = 0.0228 [\text{A}]$  必要な表面積  $S = \frac{I}{J} = \frac{0.0228}{85.44} \approx 2.668 \times 10^{-4} [\text{m}^2]$

$S = 2\pi rL$  より

$$r = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2.668 \times 10^{-4}}{2 \times 3.14159 \times 0.1} \approx 4.25 \times 10^{-4} [\text{m}]$$

答え

$$4.25 \times 10^{-4} [\text{m}] (0.425 [\text{mm}])$$

## 問 4. [計算] 限界波長 $\lambda_0$

問題:  $\phi = 1.72 [\text{eV}]$ 。

計算プロセス詳細: 計算プロセス

$$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = e\phi \text{ より}$$

$$\lambda_0 = \frac{hc}{e\phi}$$

$$\lambda_0 = \frac{(6.63 \times 10^{-34}) \times (3.00 \times 10^8)}{(1.60 \times 10^{-19}) \times 1.72}$$

$$\lambda_0 = \frac{19.89 \times 10^{-26}}{2.752 \times 10^{-19}} \approx 7.227 \times 10^{-7} [\text{m}]$$

答え

$$7.23 \times 10^{-7} [\text{m}] (723 [\text{nm}])$$

## 問 5. 光電子増倍管とスーパーカミオカンデ

(1) 原理図: (図示の手順) 左から「光」が入射 → 「光電面」から「電子」が放出 → 「ダイノード」で「二次電子」が増殖（ねずみ算式に矢印を描く）→ 「陽極」で回収。

(2) 出力電流  $I$ :

$$I = (P\eta) \times \delta^n = (6.43 \times 10^{-5} \times 15.0 \times 10^{-3}) \times 3.4^5$$

$$I = 9.645 \times 10^{-7} \times 454 \approx 4.38 \times 10^{-4} [\text{A}]$$

答え

$$4.38 \times 10^{-4} [\text{A}]$$

(3) スーパーカミオカンデの概要: 岐阜県の地下深くにある、純水を満たした巨大なタンクの内壁に多数の光電子増倍管を配置した装置。ニュートリノが水中の原子核と反応した際に発生する微弱なチエレンコフ光を検出し、ニュートリノの観測を行う。

## 問 6. [計算] 電位分布からの電界導出

問題:  $V = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  のとき、 $E_x$  を求めよ。

## 計算プロセス詳細: 計算プロセス

電界は電位の勾配（マイナス）である： $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$   
 $u = x^2 + y^2 + z^2$  とおくと、 $V = u^{-1/2}$  である。合成関数の微分を行う。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}u^{-3/2} \cdot (2x) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

したがって、電界  $E_x$  は符号を反転させて、

$$E_x = -\left(-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\right) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

## 答え

$$E_x = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \text{ [V/m]}$$