

画像処理・画像処理工学 レポート課題 1

詳細解説付き解答

2025 年 11 月 21 日

レポート作成の方針：思考プロセスの明示

本レポートでは、単に最終的な回答を示すだけでなく、問題解決に至るまでの「思考の順序」「数式の選定理由」「計算の途中経過」を詳細に記述する。これにより、画像処理および光学の初学者が論理展開を追体験できるように構成した。

1 問題 1

1.1 複合レンズによる像の位置と大きさ

1.1.1 思考プロセスと解析

複合レンズ系の問題は、一度に全体を考えるのではなく、光が進む順序に従って「レンズごとに」計算を行うのが定石である。

1. **ステップ 1 (レンズ A)**：物体から出た光がレンズ A によって結ぶ「中間像」の位置と大きさを求める。
2. **ステップ 2 (座標変換)**：レンズ A による像を、レンズ B にとっての「新たな物体」と見なし、レンズ B からの距離（物体距離）を再計算する。
3. **ステップ 3 (レンズ B)**：レンズ B によってできる「最終的な像」の位置と大きさを求める。

1.1.2 計算・導出過程

■1. 凸レンズ A による中間像の導出 レンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ を使用する。ここで各変数は以下の通りである。

- a : レンズから物体までの距離
- b : レンズから像までの距離（正なら実像、負なら虚像）
- f : 焦点距離（凸レンズなので正）

まず、像の位置 b_A を求めるために公式を b について解きやすい形に変形する。

$$\frac{1}{b_A} = \frac{1}{f_A} - \frac{1}{a_A}$$

与えられた値 $a_A = 16\text{ cm}$, $f_A = 12\text{ cm}$ を代入し、通分して計算する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_A} &= \frac{1}{12} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{4}{48} - \frac{3}{48} \quad (\text{分母を最小公倍数 } 48 \text{ で通分}) \\ &= \frac{1}{48}\end{aligned}$$

逆数をとり、

$$b_A = 48\text{ cm}$$

$b_A > 0$ なので、レンズ A の後方 48 cm の位置に実像ができることがわかる。

次に倍率 m_A を計算する。倍率の公式は $m = -\frac{b}{a}$ である。

$$m_A = -\frac{b_A}{a_A} = -\frac{48}{16} = -3$$

倍率が負であることは「倒立像」であることを意味する。元の物体の大きさ $h = 2.0\text{ cm}$ より、中間像の大きさ $|h'_A|$ は以下となる。

$$|h'_A| = h \times |m_A| = 2.0 \times 3 = 6.0\text{ cm}$$

■2. レンズ B にとっての物体距離の設定 レンズ A で作られた中間像が、レンズ B の物体となる。レンズ A と B の間隔は 63 cm である。中間像はレンズ A の後方 48 cm にあるため、レンズ B から見た物体距離 a_B は、レンズ間距離から b_A を引いた残りとなる。

$$a_B = (\text{レンズ間距離}) - b_A = 63 - 48 = 15 \text{ cm}$$

■3. 凸レンズ B による最終像の導出 同様にレンズの公式を用いて、最終的な像の位置 b_B を求め る。与えられた値は $a_B = 15 \text{ cm}$ 、 $f_B = 10 \text{ cm}$ である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_B} &= \frac{1}{f_B} - \frac{1}{a_B} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{15} \\ &= \frac{3}{30} - \frac{2}{30} \quad (\text{分母を最小公倍数 } 30 \text{ で通分}) \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

逆数をとり、

$$b_B = 30 \text{ cm}$$

$b_B > 0$ より、レンズ B の後方（光の進行方向）に実像ができる。

最後に最終倍率 m_B と最終的な像の大きさ h'_B を求める。

$$m_B = -\frac{b_B}{a_B} = -\frac{30}{15} = -2$$

最終的な像の大きさは、中間像の大きさにこの倍率を掛けることで求められる。

$$|h'_B| = |h'_A| \times |m_B| = 6.0 \times 2 = 12.0 \text{ cm}$$

（参考：全体の倍率は $m_{total} = m_A \times m_B = (-3) \times (-2) = 6$ なので、元の 2.0cm の 6 倍で 12.0cm、かつ正の値なので正立像となる。）

解答

- 像の位置: 凸レンズ B の後方 30 cm
 - 像の大きさ: 12.0 cm
-

1.2 各デバイスの ppi 計算と比較

1.2.1 思考プロセス

画素密度 (ppi: pixels per inch) とは、「1 インチあたりの画素数」を指す。画面サイズは通常「対角線のインチ数」で与えられるため、単純に縦や横の画素数を割ることはできない。したがって、以下の手順で計算する。

1. 三平方の定理を用いて、対角線上の総画素数（ピクセル距離）を算出する。

2. これを対角線の物理的な長さ（インチ）で割り算する。

計算式:

$$\text{ppi} = \frac{\text{対角画素数}}{\text{対角インチ数}} = \frac{\sqrt{w_p^2 + h_p^2}}{d_i}$$

1.2.2 計算・導出過程

■A. Google Pixel 10

- 画素数: 1080×2424
- 画面サイズ: 6.3 インチ

まず、対角線上の画素数を計算する。

$$\begin{aligned}\text{対角画素数} &= \sqrt{1080^2 + 2424^2} \\ &= \sqrt{1,166,400 + 5,875,776} \\ &= \sqrt{7,042,176} \\ &\approx 2653.71\end{aligned}$$

これをインチ数で割る。

$$\text{ppi} = \frac{2653.71}{6.3} \approx 421.22\dots$$

■B. iPad (A16)

- 画素数: 2360×1640
- 画面サイズ: 10.9 インチ

同様に対角画素数を求める。

$$\begin{aligned}\text{対角画素数} &= \sqrt{2360^2 + 1640^2} \\ &= \sqrt{5,569,600 + 2,689,600} \\ &= \sqrt{8,259,200} \\ &\approx 2873.88\end{aligned}$$

ppi を計算する。

$$\text{ppi} = \frac{2873.88}{10.9} \approx 263.65\dots$$

■C. EIZO EV2740S

- 画素数: 3840×2160 (4K UHD)
- 画面サイズ: 27.0 インチ

$$\begin{aligned}\text{対角画素数} &= \sqrt{3840^2 + 2160^2} \\ &= \sqrt{14,745,600 + 4,665,600} \\ &= \sqrt{19,411,200} \\ &\approx 4405.81\end{aligned}$$

ppi を計算する。

$$\text{ppi} = \frac{4405.81}{27.0} \approx 163.17\dots$$

解答

一般的にディスプレイの仕様では整数値（四捨五入）で表記されることが多いため、整数値で回答する。

デバイス名	計算結果	解答（整数）
Google Pixel 10	421.22...	421 ppi
iPad (A16)	263.65...	264 ppi
EIZO EV2740S	163.17...	163 ppi

1.3 8 近傍鮮鋭化フィルタの導出

1.3.1 思考プロセス

「画像の鮮鋭化（シャープニング）」とは、画像のエッジ（輪郭）を強調する処理である。これは、元の画像に「エッジ成分」を加算することで実現できる。

$$\text{鮮鋭化画像} = \text{元画像} + (\text{エッジ成分} \times k) \quad (\text{通常 } k = 1)$$

ここで、エッジ成分を抽出するために「2次微分（ラプラシアン）」を用いる。8近傍ラプラシアンフィルタは、上下左右だけでなく斜め方向の変化も考慮した2次微分フィルタである。

1.3.2 導出過程

■1. 差分による2次微分の定義 デジタル画像は離散データであるため、微分は差分で近似する。ある画素 $f(i)$ の2次微分 f'' は、「右隣との差」と「左隣との差」の差分として定義される。

$$f''(i) \approx \{f(i+1) - f(i)\} - \{f(i) - f(i-1)\} = f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)$$

つまり、係数は $(1, -2, 1)$ となる。これを2次元（画像）の全方向に適用する。

■2. 全4方向の2次差分の総和 8近傍ラプラシアン $\nabla^2 f$ は、以下の4つの方向の2次微分の和として定義される。

- 水平方向 (x): $f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)$
- 垂直方向 (y): $f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)$
- 対角方向 1 (\nwarrow): $f(i+1, j+1) - 2f(i, j) + f(i-1, j-1)$
- 対角方向 2 (\nearrow): $f(i-1, j+1) - 2f(i, j) + f(i+1, j-1)$

これら4つの式を全て足し合わせるとどうなるか、注目画素 $f(i, j)$ とその周辺画素に注目して整理する。

- 周辺画素 (8個): それぞれの方向の式で1回ずつ登場し、係数はすべて +1 である。
- 中心画素 $f(i, j)$: 4つの式すべてに登場し、係数は毎回 -2 である。

$$\text{中心の係数合計} = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$$

これにより、8近傍ラプラシアンフィルタ W_L のカーネル（行列）が得られる。

$$W_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このフィルタは、エッジ部分（輝度が変化する場所）で大きな値を返し、平坦な部分では $1 \times 8 + (-8) = 0$ となる性質を持つ。

■3. 鮮鋭化フィルタへの変換 鮮鋭化は「元画像からラプラシアン（エッジ成分）を引く」ことで計算される。（※ラプラシアンの中央が負の値 -8 なので、引くことで中央の係数がプラスになり、コントラストが強調される）

$$W_S = W_{\text{元画像}} - W_{\text{ラプラシアン}}$$

ここで $W_{\text{元画像}}$ は、中心だけが 1 で他が 0 の単位インパルスフィルタである。

$$W_S = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{元画像}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{エッジ成分}}$$

行列の引き算を成分ごとに行う。

- 中心以外: $0 - 1 = -1$
- 中心: $1 - (-8) = 1 + 8 = 9$

解答

導出された 8 近傍鮮鋭化フィルタのオペレータ：

$$W_S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.4 Sobel フィルタによるエッジの強度と方向の算出

1.4.1 思考プロセス

Sobel フィルタは、画像のノイズを抑えながら（平滑化しながら）微分を行うフィルタである。計算は「畳み込み演算（積和演算）」によって行う。

- エッジ強度 G : $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ で求める。勾配ベクトルの大きさである。
- エッジ方向 θ : $\arctan(G_y/G_x)$ で求める。勾配ベクトルの向きである。

ここで、Sobel オペレータは以下の通り定義される。

$$S_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.2 計算・導出過程：注目画素 A

画素 A 周辺の画素値：

$$\text{Image}_A = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 100 \\ 50 & 50 & 100 \\ 100 & 100 & 150 \end{pmatrix}$$

■1. x 方向微分 (G_x) の計算 S_x と Image_A の対応する位置の要素を掛けて足し合わせる。 S_x の中央列はすべて 0 なので、計算から省略できる。

$$\begin{aligned} G_x &= \underbrace{(-1 \times 50) + (-2 \times 50) + (-1 \times 100)}_{\text{左列 (負の係数)}} + \underbrace{(1 \times 100) + (2 \times 100) + (1 \times 150)}_{\text{右列 (正の係数)}} \\ &= (-50 - 100 - 100) + (100 + 200 + 150) \\ &= -250 + 450 \\ &= 200 \end{aligned}$$

■2. y 方向微分 (G_y) の計算 同様に S_y を適用する。 S_y の中央行はすべて 0 である。

$$\begin{aligned} G_y &= \underbrace{(-1 \times 50) + (-2 \times 50) + (-1 \times 100)}_{\text{上段 (負の係数)}} + \underbrace{(1 \times 100) + (2 \times 100) + (1 \times 150)}_{\text{下段 (正の係数)}} \\ &= (-50 - 100 - 100) + (100 + 200 + 150) \\ &= -250 + 450 \\ &= 200 \end{aligned}$$

■3. 強度と方向の算出

- 強度: $G_A = \sqrt{200^2 + 200^2} = 200\sqrt{2} \approx 282.8$
- 方向: $\theta_A = \arctan\left(\frac{200}{200}\right) = \arctan(1)$ 。 $G_x > 0, G_y > 0$ なので第 1 象限であり、角度は 45° 。

1.4.3 計算・導出過程：注目画素 B

画素 B 周辺の画素値：

$$\text{Image}_B = \begin{pmatrix} 150 & 250 & 250 \\ 150 & 150 & 250 \\ 100 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

■1. x 方向微分 (G_x) の計算

$$\begin{aligned} G_x &= \underbrace{(-1 \cdot 150) + (-2 \cdot 150) + (-1 \cdot 100)}_{\text{左列}} + \underbrace{(1 \cdot 250) + (2 \cdot 250) + (1 \cdot 200)}_{\text{右列}} \\ &= (-150 - 300 - 100) + (250 + 500 + 200) \\ &= -550 + 950 \\ &= 400 \end{aligned}$$

■2. y 方向微分 (G_y) の計算

$$\begin{aligned} G_y &= \underbrace{(-1 \cdot 150) + (-2 \cdot 250) + (-1 \cdot 250)}_{\text{上段}} + \underbrace{(1 \cdot 100) + (2 \cdot 100) + (1 \cdot 200)}_{\text{下段}} \\ &= (-150 - 500 - 250) + (100 + 200 + 200) \\ &= -900 + 500 \\ &= -400 \end{aligned}$$

■3. 強度と方向の算出

- 強度: $G_B = \sqrt{400^2 + (-400)^2} = 400\sqrt{2} \approx 565.7$
- 方向: $\theta_B = \arctan\left(\frac{-400}{400}\right) = \arctan(-1)$ 。 $G_x > 0, G_y < 0$ なので第4象限であり、角度は -45° 。

比較と考察

表 1 計算結果の比較

項目	注目画素 A	注目画素 B
G_x (横方向変化)	200	400
G_y (縦方向変化)	200	-400
エッジ強度 G	283	566
エッジ方向 θ	45° (右上)	-45° (右下)

考察:

- 強度の違い: 画素 B 周辺のエッジ強度は A の 2 倍である。これは、画素 B 周辺の方が「輝度の変化がより激しい (コントラストが高い)」ことを意味している。
- 方向の違い: A は左下から右上へ明るくなるエッジ、B は左上から右下へ明るくなるエッジであり、エッジの向きが直交していることが数値的に示された。