

演習問題 解答 — 述語論理と量化子 (2)

問題 2

次の命題を示せ：

$$\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \implies \forall x (p(x) \vee q(x)).$$

【思考プロセス（下書き）】

$X = \{a_1, a_2\}$ という有限集合なので、量化子 \forall を論理積 \wedge に書き換えて命題論理に落とし込む。題意は $LHS \Rightarrow RHS$ の証明である。LHS（仮定）は p が全員真 または q が全員真。RHS（結論）は各個体について p か q のどちらかが真。表記簡略化のため $p_i := p(a_i)$, $q_i := q(a_i)$ ($i = 1, 2$) とおく。

方針：RHS を分配律で展開し、その中に LHS の項が含まれていることを示す（命題論理の恒真式 $A \implies A \vee B$ を用いる）。

【解答（清書）】

$p_i = p(a_i)$, $q_i = q(a_i)$ ($i = 1, 2$) とおく。定義より

$$\begin{aligned} LHS &= (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2), \\ RHS &= (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2). \end{aligned}$$

RHS を分配律で展開すると

$$\begin{aligned} RHS &\equiv ((p_1 \vee q_1) \wedge p_2) \vee ((p_1 \vee q_1) \wedge q_2) \\ &\equiv (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \\ &\equiv (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee (q_1 \wedge p_2). \end{aligned}$$

ここで $(p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2)$ は仮定 (LHS) に他ならない。命題論理において $A \implies A \vee B$ は恒真であるから、

$$LHS \implies RHS$$

が成り立つ。すなわち

$$\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \implies \forall x (p(x) \vee q(x))$$

が示された。 ■