

論理学 演習問題 — 解答・解説

氏名

2025 年 11 月 12 日

目次

1	問題 1：真理表による証明	2
2	問題 2：カードと発言のパズル	3
3	問題 3：同値変形による証明	4
付録 A	補遺：記法と恒等式	7

1 問題 1：真理表による証明

I を真 (True)、 O を偽 (False) として真理表を作成します。

(1) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (分配法則)

下表は、各組合せに対する各項の真理値を示します。左辺と右辺の列が一致するため、同値であることが分かります。

表 1 $p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ の真理表

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	O	I	I	I	O	I
I	O	I	I	I	O	I	I
I	O	O	O	O	O	O	O
O	I	I	I	O	O	O	O
O	I	O	I	O	O	O	O
O	O	I	I	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O

(2) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (分配法則)

同様に、次の真理表で左辺と右辺が一致することが確認できます。

表 2 $p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ の真理表

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	O	O	I	I	I	I
I	O	I	O	I	I	I	I
I	O	O	O	I	I	I	I
O	I	I	I	I	I	I	I
O	I	O	O	O	I	O	O
O	O	I	O	O	O	I	O
O	O	O	O	O	O	O	O

2 問題 2：カードと発言のパズル

命題変数 p, q, r をそれぞれ以下のように定義します：

- p : でてきたのはダムである
- \bar{p} : でてきたのはディーである
- q : 赤いカードをもっている
- \bar{q} : 黒いカードをもっている
- I : 恒真命題（常に真）
- O : 恒偽命題（常に偽）

ルール:

- 赤のカード (q) をもっている人は、正しいことを言う。
- 黒のカード (\bar{q}) をもっている人は、間違ったことを言う。

発言 S の内容: 「僕は黒のカードをもったダムか、または赤のカードをもったディーだ。」これを論理式で表すと、以下のようになります：

$$S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$$

パズルの条件: このパズルのルールは、「発言 S が真である」ことと「発言者が赤のカードを持っている (q)」ことが同値 (\equiv) であることを意味します。

- $q \equiv I$ (赤カード) ならば, $S \equiv I$ (真実を言う)
- $q \equiv O$ (黒カード) ならば, $S \equiv O$ (嘘を言う)

この 2 つの条件を同時に満たすのが, $S \equiv q$ という関係です。

指定された論理展開による証明

このパズルが成立するためには、発言者が赤カードを持っていると仮定した場合（ケース 1）と、黒カードを持っていると仮定した場合（ケース 2）の両方で、矛盾なく同じ結論（ p が I か O か）が導かれなければなりません。

ケース 1: $q \equiv I$ と仮定する (赤カードを持っている場合)

1. 仮定: $q \equiv I$ (赤カード) このとき, $\bar{q} \equiv \bar{I} \equiv O$ (黒カードではない) となります。
2. ルールの適用: 赤カードを持っているので, 発言 S は真実でなければなりません。よって, $S \equiv I$ となります。
3. 発言 S の内容を評価: 発言 $S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ に, 仮定 $q \equiv I$ と $\bar{q} \equiv O$ を代入します。

$$S \equiv (p \wedge O) \vee (\bar{p} \wedge I)$$

4. 論理式の簡略化: 性質 $P \wedge O = O$ および $P \wedge I = P$ を用います。

$$S \equiv O \vee \bar{p}$$

性質 $P \vee O = P$ を用います。

$$S \equiv \bar{p}$$

5. 結論の導出: ステップ 2 (ルール) より $S \equiv I$ であり, ステップ 4 (発言内容) より $S \equiv \bar{p}$ です。したがって, この 2 つは等しくなければなりません。

$$I \equiv \bar{p}$$

これは, $p \equiv O$ を意味します。この仮定 (赤カード) は, 発言者がディーである場合 ($p \equiv O$) に矛盾なく成立します。

ケース 2: $q \equiv O$ と仮定する (黒カードを持っている場合)

1. 仮定: $q \equiv O$ (赤カードではない=黒カード) このとき, $\bar{q} \equiv \bar{O} \equiv I$ (黒カード) となります。
2. ルールの適用: 黒カードを持っているので, 発言 S は嘘 (間違い) でなければなりません。よって, $S \equiv O$ となります。
3. 発言 S の内容を評価: 発言 $S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ に, 仮定 $q \equiv O$ と $\bar{q} \equiv I$ を代入します。

$$S \equiv (p \wedge I) \vee (\bar{p} \wedge O)$$

4. 論理式の簡略化: 性質 $P \wedge I = P$ および $P \wedge O = O$ を用います。

$$S \equiv p \vee O$$

性質 $P \vee O = P$ を用います。

$$S \equiv p$$

5. 結論の導出: ステップ 2 (ルール) より $S \equiv O$ であり, ステップ 4 (発言内容) より $S \equiv p$ です。したがって, この 2 つは等しくなければなりません。

$$O \equiv p$$

これは, $p \equiv O$ を意味します。この仮定 (黒カード) も, 発言者がディーである場合 ($p \equiv O$) に矛盾なく成立します。

結論

ケース 1 (赤カード) の場合も, $p \equiv O$ (ダムではない) が導かれました。ケース 2 (黒カード) の場合も, $p \equiv O$ (ダムではない) が導かれました。どちらの場合も一貫して $p \equiv O$ となり, 矛盾は生じません。 p は「でてきたのはダムである」という命題だったので, $p \equiv O$ は「でてきたのがダムであることは偽である」を意味します。したがって, でてきたのはディー ($\bar{p} \equiv I$) です。

3 問題 3: 同値変形による証明

使用する主な法則:

- $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$

- ド・モルガンの法則: $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$, $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
- 分配律: $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- その他の恒等式: $A \vee \bar{A} \equiv I$, $A \wedge \bar{A} \equiv O$, $A \vee O \equiv A$, $A \wedge I \equiv A$, $A \vee I \equiv I$, $A \wedge O \equiv O$

$$(1) (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \equiv p$$

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) &\equiv p \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (\text{分配法則 } (A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)) \\ &\equiv p \vee O \quad (\text{矛盾律 } q \wedge \bar{q} \equiv O) \\ &\equiv p \quad (\text{同一律 } p \vee O \equiv p) \end{aligned}$$

よって示された.

$$(2) (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q) \equiv p$$

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q) &\equiv (\overline{p \rightarrow q}) \vee (p \wedge q) \quad (A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B) \\ &\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q) \\ &\equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &\equiv p \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則 } (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \equiv X \wedge (Y \vee Z)) \\ &\equiv p \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\ &\equiv p \quad (\text{同一律 } p \wedge I \equiv p) \end{aligned}$$

よって示された.

$$(3) (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv I$$

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv (\overline{p \wedge q}) \vee (p \rightarrow q) \quad (A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B) \\ &\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \quad (\text{ド・モルガン, } p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q) \\ &\equiv \bar{p} \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee q \quad (\text{結合・交換}) \\ &\equiv \bar{p} \vee (\bar{q} \vee q) \quad (\text{冪等律 } \bar{p} \vee \bar{p} \equiv \bar{p}) \\ &\equiv \bar{p} \vee I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\ &\equiv I \quad (\text{同一律 } \bar{p} \vee I \equiv I) \end{aligned}$$

よって示された.

$$(4) (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$$

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) &\rightarrow (p \wedge q) \\
 &\equiv (\overline{p \vee q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{含意の定義 } A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B) \\
 &\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\
 &\equiv ((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee p) \wedge ((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q) \quad (\text{分配法則}) \\
 &\equiv (\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則}) \\
 &\equiv I \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{p} \vee p \equiv I, \bar{q} \vee q \equiv I) \\
 &\equiv (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{同一律 } I \wedge A \equiv A) \\
 &\equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{交換律})
 \end{aligned}$$

よって示された.

本ドキュメントでは、命題の否定を表すために、単一の変数には \bar{a} のような形式を用い、複合式には \overline{aB} のような形式を用いています。これは、視覚的な明確さを保つためです。

付録 A 補遺：記法と恒等式

本ドキュメントで使った略記と恒等式の一覧をまとめます。授業や試験での参照に便利です。

- I : 真 (True)
- O : 偽 (False)
- \bar{A} : 命題 A の否定
- $A \rightarrow B$: A ならば B (含意)