# 論理学 演習問題 — 解答・解説

氏名

2025 年 11 月 12 日

## 目次

## 1　問題 1：真理表による証明

$I$ を真（True）、$O$ を偽（False）として真理表を作成します.

### (1) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$（分配法則）

下表は，各組合せに対する各項の真理値を示します．左辺と右辺の列が一致するため，同値であることが分かります.

表 1　$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ の真理表

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \vee r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $I$ | $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $O$ | $I$ |
| $I$ | $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $O$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |
| $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |
| $O$ | $I$ | $O$ | $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |
| $O$ | $O$ | $I$ | $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |
| $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |

### (2) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$（分配法則）

同様に，次の真理表で左辺と右辺が一致することが確認できます.

表 2　$p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ の真理表

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $p \vee q$ | $p \vee r$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $I$ | $O$ | $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $O$ | $I$ | $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $O$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $O$ | $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $I$ | $O$ | $O$ |
| $O$ | $O$ | $I$ | $O$ | $O$ | $O$ | $I$ | $O$ |
| $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |

# 2　問題 2：カードと発言のパズル

命題変数 $p, q, r$ をそれぞれ以下のように定義します：

- $p$: でてきたのはダムである
- $\bar{p}$: でてきたのはディーである
- $q$: 赤いカードをもっている
- $\bar{q}$: 黒いカードをもっている
- $I$: 恒真命題（常に真）
- $O$: 恒偽命題（常に偽）

ルール:

- 赤のカード ($q$) をもっている人は，正しいことを言う。
- 黒のカード ($\bar{q}$) をもっている人は，間違ったことを言う。

発言 $S$ の内容:「僕は黒のカードをもったダムか，または赤のカードをもったディーだ。」これを論理式で表すと，以下のようになります：

$$S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$$

パズルの条件: このパズルのルールは，「発言 $S$ が真である」ことと「発言者が赤のカードを持っている ($q$)」ことが同値（≡）であることを意味します。

- $q \equiv I$（赤カード）ならば，$S \equiv I$（真実を言う）
- $q \equiv O$（黒カード）ならば，$S \equiv O$（嘘を言う）

この 2 つの条件を同時に満たすのが，$S \equiv q$ という関係です。

## 指定された論理展開による証明

このパズルが成立するためには，発言者が赤カードを持っていると仮定した場合（ケース 1）と，黒カードを持っていると仮定した場合（ケース 2）の両方で，矛盾なく同じ結論（$p$ が $I$ か $O$ か）が導かれなければなりません。

### ケース 1: $q \equiv I$ と仮定する (赤カードを持っている場合)

1. 仮定: $q \equiv I$（赤カード）このとき，$\bar{q} \equiv \bar{I} \equiv O$（黒カードではない）となります。

2. ルールの適用: 赤カードを持っているので，発言 $S$ は真実でなければなりません。よって，$S \equiv I$ となります。

3. 発言 $S$ の内容を評価: 発言 $S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ に，仮定 $q \equiv I$ と $\bar{q} \equiv O$ を代入します。

$$S \equiv (p \wedge O) \vee (\bar{p} \wedge I)$$

4. 論理式の簡略化: 性質 $P \wedge O = O$ および $P \wedge I = P$ を用います。

$$S \equiv O \vee \bar{p}$$

性質 $P \vee O = P$ を用います。

$$S \equiv \bar{p}$$

5. 結論の導出: ステップ 2（ルール）より $S \equiv I$ であり，ステップ 4（発言内容）より $S \equiv \bar{p}$ です。したがって，この 2 つは等しくなければなりません。

$$I \equiv \bar{p}$$

これは，$p \equiv O$ を意味します。この仮定（赤カード）は，発言者がディーである場合 ($p \equiv O$) に矛盾なく成立します。

### ケース 2: $q \equiv O$ と仮定する (黒カードを持っている場合)

1. 仮定: $q \equiv O$（赤カードではない＝黒カード）このとき，$\bar{q} \equiv \bar{O} \equiv I$（黒カード）となります。

2. ルールの適用: 黒カードを持っているので，発言 $S$ は嘘（間違い）でなければなりません。よって，$S \equiv O$ となります。

3. 発言 $S$ の内容を評価: 発言 $S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ に，仮定 $q \equiv O$ と $\bar{q} \equiv I$ を代入します。

$$S \equiv (p \wedge I) \vee (\bar{p} \wedge O)$$

4. 論理式の簡略化: 性質 $P \wedge I = P$ および $P \wedge O = O$ を用います。

$$S \equiv p \vee O$$

性質 $P \vee O = P$ を用います。

$$S \equiv p$$

5. 結論の導出: ステップ 2（ルール）より $S \equiv O$ であり，ステップ 4（発言内容）より $S \equiv p$ です。したがって，この 2 つは等しくなければなりません。

$$O \equiv p$$

これは，$p \equiv O$ を意味します。この仮定（黒カード）も，発言者がディーである場合 ($p \equiv O$) に矛盾なく成立します。

**結論**

ケース 1（赤カード）の場合も，$p \equiv O$（ダムではない）が導かれました。ケース 2（黒カード）の場合も，$p \equiv O$（ダムではない）が導かれました。どちらの場合も一貫して $p \equiv O$ となり，矛盾は生じません。$p$ は「でてきたのはダムである」という命題だったので，$p \equiv O$ は「でてきたのがダムであることは偽である」を意味します。したがって，でてきたのは**ディー** ($\bar{p} \equiv I$) です。

## 3　問題 3：同値変形による証明

使用する主な法則：

- $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$
- ド・モルガンの法則: $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}, \quad \overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
- 分配律: $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- その他の恒等式: $A \vee \bar{A} \equiv I$, $A \wedge \bar{A} \equiv O$, $A \vee O \equiv A$, $A \wedge I \equiv A$, $A \vee I \equiv I$, $A \wedge O \equiv O$

### (1) $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \equiv p$

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) &\equiv p \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (\text{分配法則 } (A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)) \\
&\equiv p \vee O \quad (\text{矛盾律 } q \wedge \bar{q} \equiv O) \\
&\equiv p \quad (\text{同一律 } p \vee O \equiv p)
\end{aligned}
$$

よって示された.

### (2) $(p \to q) \to (p \wedge q) \equiv p$

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to (p \wedge q) &\equiv (\overline{p \to q}) \vee (p \wedge q) \quad (A \to B \equiv \bar{A} \vee B) \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (p \to q \equiv \bar{p} \vee q) \\
&\equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\
&\equiv p \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則 } (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \equiv X \wedge (Y \vee Z)) \\
&\equiv p \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\
&\equiv p \quad (\text{同一律 } p \wedge I \equiv p)
\end{aligned}
$$

よって示された.

(3) $(p \wedge q) \to (p \to q) \equiv I$

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \to q) &\equiv (\overline{p \wedge q}) \vee (p \to q) \quad (A \to B \equiv \bar{A} \vee B) \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \quad (\text{ド・モルガン},\ p \to q \equiv \bar{p} \vee q) \\
&\equiv \bar{p} \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee q \quad (\text{結合・交換}) \\
&\equiv \bar{p} \vee (\bar{q} \vee q) \quad (\text{冪等律 } \bar{p} \vee \bar{p} \equiv \bar{p}) \\
&\equiv \bar{p} \vee I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\
&\equiv I \quad (\text{同一律 } \bar{p} \vee I \equiv I)
\end{aligned}
$$

よって示された.

(4) $(p \vee q) \to (p \wedge q) \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$

$$
\begin{aligned}
&(p \vee q) \to (p \wedge q) \\
&\qquad \equiv (\overline{p \vee q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{含意の定義 } A \to B \equiv \bar{A} \vee B) \\
&\qquad \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\
&\qquad \equiv \big((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee p\big) \wedge \big((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q\big) \quad (\text{分配法則}) \\
&\qquad \equiv (\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則}) \\
&\qquad \equiv I \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{p} \vee p \equiv I, \bar{q} \vee q \equiv I) \\
&\qquad \equiv (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{同一律 } I \wedge A \equiv A) \\
&\qquad \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{交換律})
\end{aligned}
$$

よって示された.

本ドキュメントでは、命題の否定を表すために、単一の変数には $\bar{a}$ のような形式を用い、複合式には $\overline{aB}$ のような形式を用いています．これは、視覚的な明確さを保つためです．

# 付録 A　補遺：記法と恒等式

本ドキュメントで使用した略記と恒等式の一覧をまとめます．授業や試験での参照に便利です．

- $I$：真 (True)
- $O$：偽 (False)
- $\overline{A}$：命題 $A$ の否定
- $A \to B$：$A$ ならば $B$（含意）