

画像処理・画像処理工学 レポート課題 1 解答

2025 年 11 月 17 日

1 問題 1

1.1 複合レンズによる像の位置と大きさ

1.1.1 計算・導出過程

■ステップ1：凸レンズAによる中間像の計算 まず、凸レンズAによってできる中間像の位置 b_A をレンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ を用いて求める。与えられた値は、物体距離 $a_A = 16\text{ cm}$ 、焦点距離 $f_A = 12\text{ cm}$ である。

$$\begin{aligned}\frac{1}{16} + \frac{1}{b_A} &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{b_A} &= \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{4}{48} - \frac{3}{48} = \frac{1}{48} \\ b_A &= 48\text{ cm}\end{aligned}$$

次に、中間像の大きさを求めるために倍率 m_A を計算する。

$$m_A = -\frac{b_A}{a_A} = -\frac{48}{16} = -3$$

元の物体の大きさが $h = 2.0\text{ cm}$ なので、中間像の大きさ h'_A は、

$$h'_A = h \times |m_A| = 2.0 \times 3 = 6.0\text{ cm}$$

■ステップ2：凸レンズBによる最終的な像の計算 ステップ1でできた中間像を、凸レンズBの物体と考える。凸レンズBから中間像までの距離（物体距離 a_B ）は、AB間の距離 63 cm と b_A から計算できる。

$$a_B = 63 - b_A = 63 - 48 = 15\text{ cm}$$

凸レンズBの焦点距離 $f_B = 10\text{ cm}$ を用いて、最終的な像の位置 b_B を求める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{15} + \frac{1}{b_B} &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{b_B} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3}{30} - \frac{2}{30} = \frac{1}{30} \\ b_B &= 30\text{ cm}\end{aligned}$$

最後に、最終的な像の大きさを求めるために倍率 m_B を計算する。

$$m_B = -\frac{b_B}{a_B} = -\frac{30}{15} = -2$$

中間像の大きさ $h'_A = 6.0\text{ cm}$ から、最終的な像の大きさ h'_B は、

$$h'_B = h'_A \times |m_B| = 6.0 \times 2 = 12.0\text{ cm}$$

答え

- 像の位置: 凸レンズBの後方 30 cm
- 像の大きさ: 12.0 cm

1.2 各デバイスの ppi 計算と比較

1.2.1 計算・導出過程

ppi (pixels per inch) は、画面の横 (w_p) と縦 (h_p) の画素数、および画面の対角線の長さ d_i (インチ) を用いて、以下の公式で計算する。

$$\text{ppi} = \frac{\sqrt{w_p^2 + h_p^2}}{d_i}$$

■A. Google Pixel 10 ($w_p = 1080, h_p = 2424, d_i = 6.3$)

$$\text{ppi} = \frac{\sqrt{1080^2 + 2424^2}}{6.3} = \frac{\sqrt{1166400 + 5875776}}{6.3} = \frac{\sqrt{7042176}}{6.3} \approx \frac{2653.7}{6.3} \approx 421.22$$

■B. iPad (A16) ($w_p = 2360, h_p = 1640, d_i = 10.9$)

$$\text{ppi} = \frac{\sqrt{2360^2 + 1640^2}}{10.9} = \frac{\sqrt{5569600 + 2689600}}{10.9} = \frac{\sqrt{8259200}}{10.9} \approx \frac{2873.9}{10.9} \approx 263.66$$

■C. EIZO EV2740S ($w_p = 3840, h_p = 2160, d_i = 27.0$)

$$\text{ppi} = \frac{\sqrt{3840^2 + 2160^2}}{27.0} = \frac{\sqrt{14745600 + 4665600}}{27.0} = \frac{\sqrt{19411200}}{27.0} \approx \frac{4405.8}{27.0} \approx 163.18$$

答え

各デバイスの ppi を整数値で求めるところ以下の通りである。

デバイス名	ppi (整数値)
Google Pixel 10	421 ppi
iPad (A16)	264 ppi
EIZO EV2740S	163 ppi

1.3 8 近傍鮮鋭化フィルタの導出

1.3.1 導出過程

鮮鋭化フィルタは、「元の画像」に「エッジ成分」を足し合わせることで得られる。これをフィルタオペレータで表現すると以下の関係になる。

$$W_S(\text{鮮鋭化}) = W_I(\text{単位}) - W_L(\text{ラプラシアン})$$

この式におけるラプラシアンフィルタ W_L を、その基本原理である 2 次差分から導出する。

■ステップ 1：各方向の 2 次差分の導出 デジタル画像における微分は、隣接する画素値の差分（変化量）で近似される。2 次微分は、その「変化量の変化量」を計算することで求められる。注目画素を $f(i, j)$ とする。

- x 方向 2 次差分 (f_{xx})

1. まず、注目画素 $f(i, j)$ 周辺の x 方向の一次差分（変化量）を考える。
 - 右隣との差分: $f(i+1, j) - f(i, j)$
 - 左隣との差分: $f(i, j) - f(i-1, j)$
2. 次に、これらの差分のさらに差分を取ることで、2 次差分を求める。

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \{f(i+1, j) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i-1, j)\} \\&= f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)\end{aligned}$$

- y 方向 2 次差分 (f_{yy})

1. 同様に、y 方向の一次差分を考える。
 - 下隣との差分: $f(i, j+1) - f(i, j)$
 - 上隣との差分: $f(i, j) - f(i, j-1)$
2. これらの差分から 2 次差分を求める。

$$\begin{aligned}f_{yy} &= \{f(i, j+1) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i, j-1)\} \\&= f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)\end{aligned}$$

- 斜め方向 1 (左上-右下) 2 次差分 (f_{d1})

1. 左上から右下への対角線方向の一次差分を考える。
 - 右下隣との差分: $f(i+1, j+1) - f(i, j)$
 - 左上隣との差分: $f(i, j) - f(i-1, j-1)$
2. これらの差分から 2 次差分を求める。

$$\begin{aligned}f_{d1} &= \{f(i+1, j+1) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i-1, j-1)\} \\&= f(i+1, j+1) - 2f(i, j) + f(i-1, j-1)\end{aligned}$$

- 斜め方向 2 (右上-左下) 2 次差分 (f_{d2})

1. 右上から左下への対角線方向の一次差分を考える。
 - 左下隣との差分: $f(i-1, j+1) - f(i, j)$
 - 右上隣との差分: $f(i, j) - f(i+1, j-1)$
2. これらの差分から 2 次差分を求める。

$$\begin{aligned}f_{d2} &= \{f(i-1, j+1) - f(i, j)\} - \{f(i, j) - f(i+1, j-1)\} \\&= f(i-1, j+1) - 2f(i, j) + f(i+1, j-1)\end{aligned}$$

■ステップ 2: 8 近傍ラプラシアンフィルタ (W_L) の導出 8 近傍ラプラシアン $\nabla^2 f$ は、これら 4 方向すべての 2 次差分の総和として定義される。

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{d1} + f_{d2}$$

ステップ 1 で導出した 4 つの式をすべて足し合わせると、注目画素 $f(i, j)$ の係数は-8、周囲 8 画素の係数はすべて 1 となる。この係数を 3x3 の行列に配置することで、8 近傍ラプラシアンフィルタ W_L が得られる。

$$W_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■ステップ3: 8近傍鮮鋭化フィルタ (W_S) の導出 単位オペレータ W_I (適用しても画像が変化しないフィルタ) と, W_L を用いて W_S を計算する.

$$W_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_S = W_I - W_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-1 & 0-1 \\ 0-1 & 1-(-8) & 0-1 \\ 0-1 & 0-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

答え

導出された8近傍鮮鋭化フィルタのオペレータは以下の通りである.

$$W_S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.4 Sobel フィルタによるエッジの強度と方向の算出

1.4.1 計算・導出過程

Sobel フィルタは, x 方向と y 方向のオペレータを用いて一次微分を計算する.

$$S_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

エッジ強度 G と方向 θ は以下の式で求める.

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

■注目画素 A Aを中心とする3x3領域:

$$\text{Image}_A = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 100 \\ 50 & 50 & 100 \\ 100 & 100 & 150 \end{pmatrix}$$

- 一次微分:

$$G_x = (100 \times 1 + 100 \times 2 + 150 \times 1) - (50 \times 1 + 50 \times 2 + 100 \times 1) = (100 + 200 + 150) - (50 + 100 + 100) = 450 - 250 = 200$$

$$G_y = (100 \times 1 + 100 \times 2 + 150 \times 1) - (50 \times 1 + 50 \times 2 + 100 \times 1) = (100 + 200 + 150) - (50 + 100 + 100) = 450 - 250 = 200$$

- エッジ強度:

$$G_A = \sqrt{200^2 + 200^2} = \sqrt{40000 + 40000} = \sqrt{80000} \approx 282.84$$

- エッジ方向:

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{200}{200}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$$

■注目画素 B Bを中心とする 3x3 領域:

$$\text{Image}_B = \begin{pmatrix} 150 & 250 & 250 \\ 150 & 150 & 250 \\ 100 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

- 一次微分:

$$G_x = (250 \times 1 + 250 \times 2 + 200 \times 1) - (150 \times 1 + 150 \times 2 + 100 \times 1) = (250 + 500 + 200) - (150 + 300 + 100) = 950 - 550 = 400$$

$$G_y = (100 \times 1 + 100 \times 2 + 200 \times 1) - (150 \times 1 + 250 \times 2 + 250 \times 1) = (100 + 200 + 200) - (150 + 500 + 250) = 500 - 900 = -400$$

- エッジ強度:

$$G_B = \sqrt{400^2 + (-400)^2} = \sqrt{160000 + 160000} = \sqrt{320000} \approx 565.69$$

- エッジ方向:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{-400}{400}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ$$

答えと両者の比較

	注目画素 A	注目画素 B
x 方向微分 G_x	200	400
y 方向微分 G_y	200	-400
エッジ強度 G	約 282.8	約 565.7
エッジ方向 θ	45°	-45°

■比較

- エッジ強度: 注目画素 B のエッジ強度は A の約 2 倍であり, B 周辺の方がより急峻な輝度変化 (強いエッジ) があることを示している.
- エッジ方向: A のエッジは輝度が左下から右上 (45°) に向かって最も強くなる向きであるのに対し, B のエッジは左上から右下 (-45°) に向かって最も強くなる向きであり, 両者のエッジの傾きが異なることを示している.