

「制御工学」 第7章演習問題解答

1.

(1) 特性方程式は以下になる。

$$s^2 - 2s + 3 = 0$$

この方程式の解は,

$$s = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \times 3} = 1 \pm j\sqrt{2}$$

となるので, 伝達関数の極は

$$s = 1 \pm j\sqrt{2}$$

である。これより, 極の実数部が正であるため不安定である。(答)

(2) 特性方程式は以下になる。

$$s^3 + 4s^2 + 7s + 6 = 0$$

また, この式の左辺を因数分解すると

$$s^3 + 4s^2 + 7s + 6 = (s + 2)(s^2 + 2s + 3)$$

となる。ここで, $s^2 + 2s + 3 = 0$ を満たす s は

$$s = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \times 3} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

となるので, 伝達関数の極は,

$$s = -2, -1 \pm j\sqrt{2}$$

である。これより, 極の実数部がすべて負であるため, 安定である。(答)

2.

特性方程式は以下になる。

$$LJs^2 + (RJ + LB)s + (RB + K_e K_t) = 0$$

この方程式の解は,

$$s = \frac{-(LB + RJ) \pm \sqrt{(LB + RJ)^2 - 4LJ(RB + K_e K_t)}}{2LJ}$$

となるので, 問題文で与えられている数値を代入し, 伝達関数の極を求めると

$$s = -2.7 \times 10^2, -24$$

を得る。これより, 極の実数部がすべて負であるため, 安定である。(答)

3.

(1) ラウス表を作成すると以下のようになり、第 1 列の符号が変化していないことが確認できるので、安定である。(答)

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 2 \\ s^3 & 3 & 3 & \\ s^2 & 3 & 2 & \\ s^1 & 1 & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

(2) ラウス表を作成していくと、以下のとおり、 s^2 の行の第 1 列目に 0 が出てくるため、このままでは計算を進めることができない。

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 1 & 3 \\ s^3 & 4 & 2 & \\ s^2 & 0 & 3 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

そこで、この 0 を ε に置き換えて、表を完成させると以下のようになる。

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & & 1 & 3 \\ s^3 & 4 & & 2 & \\ s^2 & \varepsilon & & 3 & \\ s^1 & \frac{2\varepsilon-12}{\varepsilon} & & 0 & \\ s^0 & 3 & & & \end{array}$$

最後に、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると、

$$\varepsilon > 0, \frac{2\varepsilon-12}{\varepsilon} < 0$$

となるので、第 1 列の符号は同一ではない。よって、この伝達関数は不安定である。(答)

また、 s^2 の行から s^1 の行で符号が正から負へ、 s^1 の行から s^0 の行で符号が負から正へと反転しているため、不安定極は 2 個存在する。(答)

(3) ラウス表を作成していくと、以下のとおり、 s^2 の行の要素がすべて 0 になるため、このままでは計算を進めることができない。

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 4 & 2 \\ s^3 & 1 & 1 & \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s^1 & 0 & 0 & \\ s^0 & & & \end{array}$$

そこで、以下の補助多項式 $\bar{p}(s)$ を考える。

$$\bar{p}(s) = 2s^2 + 2$$

この式を微分すると以下の式を得る。

$$\frac{d\bar{p}(s)}{ds} = 4s$$

この結果を用いてラウス表を修正し、完成させると以下のようになる。

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 4 & 2 \\ s^3 & 1 & 1 & \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s^1 & 4 & 0 & \\ s^0 & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 4 & 2 \\ s^3 & 1 & 1 & \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s^1 & 4 & 0 & \\ s^0 & & & 2 \end{array}$$

ラウス表より、第 1 列の符号はすべて正なので、この伝達関数に不安定極は存在しない。
ただし、補助方程式 $\bar{p}(s) = 0$ を解くと、

$$2s^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j$$

となるので、虚軸上に極が存在する。よって、この伝達関数は安定限界である。（答）

4.

(1) フルビッツ行列は以下のようになる。

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

また、行列式に関する条件を確認すると、以下のようになる。

$$7 > 0, \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 6 \times 1 = 22 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times 6 \times \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times (7 \times 4 - 6 \times 1) = 6 \times (28 - 6) = 132 > 0$$

(3 列目で列展開)

以上の通り、すべての行列式が正なので、この伝達関数は安定である。（答）

(2) フルビッツ行列は以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

また、行列式に関する条件を確認すると、以下のようになる。

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3 = -1 < 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 行目で行展開})$$

$$= -(1 \times 6 - 0 \times 3) + 2 \times (1 \times 5 - 2 \times 3) = -6 - 2 = -8 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \times 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -48 \quad (4 \text{ 列目で列展開})$$

以上の通り，行列式がすべて正となっていないため，この伝達関数は不安定である。（答）

5.

まず，閉ループ伝達関数を導出すると以下のようなになる。

$$\frac{G(s)K}{1+G(s)K} = \frac{K_t K}{LJs^3 + (RJ + LB)s^2 + (RB + K_e K_t)s + K_t K} \quad (\text{答})$$

また，特性多項式に注目してラウス表を作成すると以下のようなになる。

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & LJ & RB + K_e K_t \\ s^2 & RJ + LB & K_t K \\ s^1 & \frac{(RB + K_e K_t)(RJ + LB) - LJK_t K}{RJ + LB} & \\ s^0 & K_t K & \end{array}$$

物理パラメータはすべて正であることから，ラウス表の第 1 列がすべて正となるための条件は，以下の 2 式が成立することである。

$$\frac{(RB + K_e K_t)(RJ + LB) - LJK_t K}{RJ + LB} > 0, \quad \text{すなわち, } K < \frac{(RB + K_e K_t)(RJ + LB)}{LJK_t},$$

$$\text{および, } K_t K > 0, \quad \text{すなわち, } K > 0$$

よって，求める K の範囲は， $0 < K < \frac{(RB + K_e K_t)(RJ + LB)}{LJK_t}$ である。（答）

6.

$L(s)$ の極は $s=1, -2, -3$ であるので，不安定極が 1 つ存在する。つまり， $R=1$ である。また，図 7-34 より， $L(s)$ のナイキスト軌跡は，点 $(-1, 0)$ を，時計方向に 1 回りしている。つまり， $\pi = -1$ である。よって，閉ループ伝達関数の不安定極の数 Z は以下のように求まる。

$$Z = 1 + 1 = 2$$

以上より，閉ループ伝達関数は不安定である。（答）

7.

まず、 $L(s)$ に不安定極が存在するかどうかを考える。特性多項式に注目してラウス表を作成すると以下になる。

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & LJ & RB + K_e K_t \\ s^2 & RJ + LB & 0 \\ s^1 & \frac{(RB + K_e K_t)(RJ + LB)}{RJ + LB} & \\ s^0 & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} s^3 & LJ & RB + K_e K_t \\ s^2 & RJ + LB & 0 \\ s^1 & RB + K_e K_t & \\ s^0 & 0 & \end{array}$$

ここで、 s^0 の行の第1列が0になっているので、これを $\varepsilon > 0$ と置き換えて考えると、ラウス表の第1列はすべて正なので、 $L(s)$ には不安定極がないことがわかる。よって、簡易化されたナイキストの安定判別法を利用して閉ループ伝達関数の安定性を判別できる。そこで、ベクトル軌跡と点 $(-1, 0)$ の位置関係を考えるために、ベクトル軌跡の概形を求める。具体的には、ベクトル軌跡の実軸交点と虚軸交点、出発点、終点を考え、軌跡の概形を求める。周波数伝達関数 $L(j\omega)$ は、

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{K_t K}{-jLJ\omega^3 - (RJ + LB)\omega^2 + j(RB + K_e K_t)\omega} \\ &= \frac{K_t K}{-(LB + RJ)\omega^2 + j((RB + K_e K_t) - LJ\omega^2)\omega} \end{aligned}$$

となるので、まず、実軸との交点を求めるために、分母の虚数部=0とおくと、以下の式が成り立つ。

$$((RB + K_e K_t) - LJ\omega^2)\omega = 0$$

この式より、ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数 $\omega(>0)$ は以下になる。

$$\omega = \sqrt{\frac{RB + K_e K_t}{LJ}}$$

この ω を $L(j\omega)$ に代入すると、

$$L(j\omega)\Big|_{\omega=\sqrt{\frac{RB+K_e K_t}{LJ}}} = \frac{K_t K}{-(LB + RJ) \cdot \frac{RB + K_e K_t}{LJ}} = -\frac{LJ K_t K}{(LB + RJ)(RB + K_e K_t)}$$

となるので、ベクトル軌跡の実軸交点は $\left(-\frac{LJ K_t K}{(LB + RJ)(RB + K_e K_t)}, 0\right)$ である。また、虚軸との交点を求めるために、分母の実数部=0とおくと、以下の式が成り立つ。

$$(LB + RJ)\omega^2 = 0$$

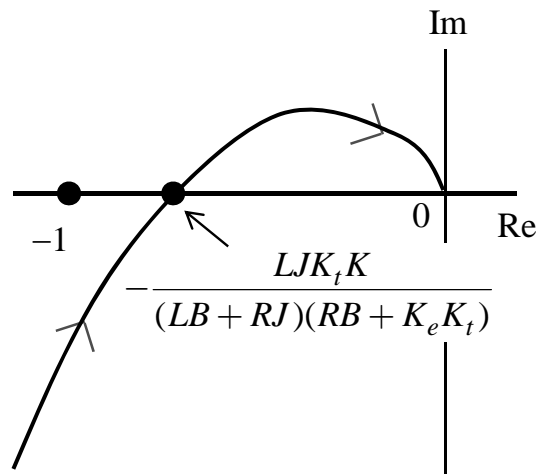
しかし、この式を成立させる $\omega(>0)$ は存在しないので、ベクトル軌跡は虚軸とは交わらない。一方、 $L(j\omega) = \frac{K_t K}{-jLJ\omega^3 - (RJ + LB)\omega^2 + j(RB + K_e K_t)\omega}$ は、 ω が十分小さいとき、 ω に対して ω^2 と ω^3 を無視できるため、

$$L(j\omega) \rightarrow \frac{K_t K}{j(RB + K_e K_t)\omega}$$

と近似できることから、ベクトル軌跡は偏角 -90° の無限遠方から始まる。また、 ω が十分大きいとき、 ω^3 に対して ω^2 と ω を無視できるため、

$$L(j\omega) \rightarrow \frac{K_t K}{-jLJ\omega^3}$$

と近似できることから、ベクトル軌跡は偏角 90° の方向から原点に収束する。以上のことから、ベクトル軌跡の概形は以下ようになる。（ただし、下図は、点 $(-1,0)$ がベクトル軌跡の進行方向に対して常に左側に存在するように描いている）



したがって、簡易化されたナイキストの安定判別法より、点 $(-1,0)$ がベクトル軌跡の進行方向に対して常に左側に存在するためには以下の式が成立すればよい。

$$-1 < -\frac{LJK_t K}{(LB + RJ)(RB + K_e K_t)}$$

よって、フィードバック制御系を安定化する K の範囲は以下の通りとなり、問題 5 で導出した範囲と一致する。

$$0 < K < \frac{(LB + RJ)(RB + K_e K_t)}{LJK_t} \quad (\text{答})$$

また、ベクトル軌跡の実軸交点は $\left(-\frac{LJK_t K}{(LB + RJ)(RB + K_e K_t)}, 0\right)$ なので、ゲイン余裕は以下の式で与えられる。

$$-20 \log \frac{LJK_t K}{(LB + RJ)(RB + K_e K_t)} \quad (\text{答})$$

8.

まず、 $L(s)$ の不安定極の個数を考える。特性方程式が

$$(s+1)^3 = 0$$

であることから、 $L(s)$ の極は $s=-1$ (3重根)なので、 $L(s)$ に不安定極は存在しない。よって、簡易化されたナイキストの安定判別法を利用して、閉ループ伝達関数の安定性を判別できる。そこで、ベクトル軌跡と点 $(-1,0)$ の位置関係を考えるために、ベクトル軌跡の概形を求める。具体的には、ベクトル軌跡の実軸交点と虚軸交点、出発点、終点を考え、軌跡の概形を求める。周波数伝達関数 $L(j\omega)$ は、

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3} = \frac{K}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{K}{(1-3\omega^2) + j\omega(3-\omega^2)}$$

となるので、まず、実軸との交点を求めるために、分母の虚数部=0とおくと、以下の式が成り立つ。

$$\omega(3-\omega^2)=0$$

この式より、ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数 $\omega(>0)$ は以下のようにになる。

$$\omega = \sqrt{3}$$

この ω を $L(j\omega)$ に代入すると、

$$L(j\omega)\big|_{\omega=\sqrt{3}} = \frac{K}{(1-3\cdot\sqrt{3}^2)} = -\frac{K}{8}$$

となるので、ベクトル軌跡の実軸交点は $\left(-\frac{K}{8}, 0\right)$ である。また、虚軸との交点を求めるために、分母の実数部=0とおくと、以下の式が成り立つ。

$$1-3\omega^2=0$$

この式より、ベクトル軌跡が実軸と交わるときの角周波数 $\omega(>0)$ は以下のようにになる。

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

この ω を $L(j\omega)$ に代入すると、

$$L(j\omega)\big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{K}{j\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = -j\frac{3\sqrt{3}K}{8}$$

となるので、ベクトル軌跡の虚軸交点は $\left(0, -j\frac{3\sqrt{3}K}{8}\right)$ である。

一方、 $L(j\omega) = \frac{K}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1}$ は、 ω が十分小さいとき、1に対して ω を含む項を無視できるため、

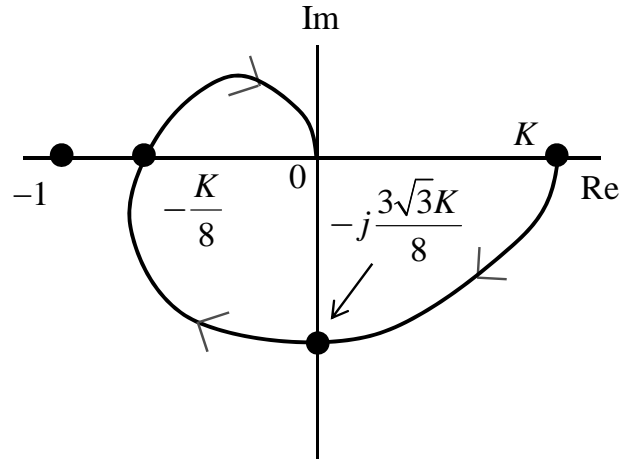
$$L(j\omega) \rightarrow \frac{K}{1} = K$$

と近似できることから、ベクトル軌跡は点 $(K,0)$ から始まる。また、 ω が十分大きいとき、 ω^3 の項に対して他の項を無視できるため、

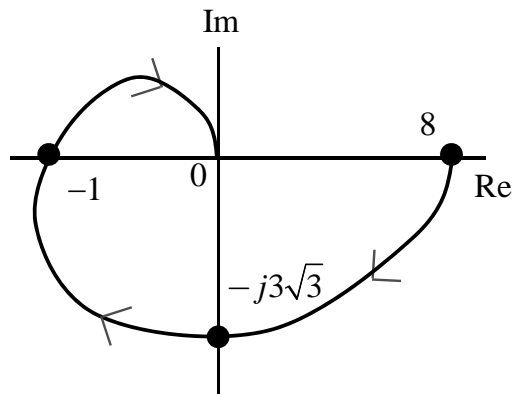
$$L(j\omega) \rightarrow \frac{K}{-j\omega^3}$$

と近似できることから、ベクトル軌跡は偏角 90° の方向から原点に収束する。よって、以下の結論を得る。（答）

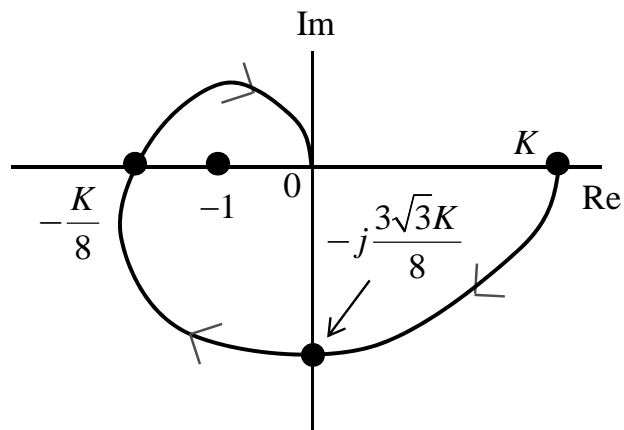
(i) $0 < K < 8$ のとき、下図のように、点 $(-1, 0)$ がベクトル軌跡の進行方向に対して右側に存在するので、閉ループ伝達関数は安定。



(ii) $K = 8$ のとき、下図のように、ベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ を通るので、閉ループ伝達関数は安定限界。



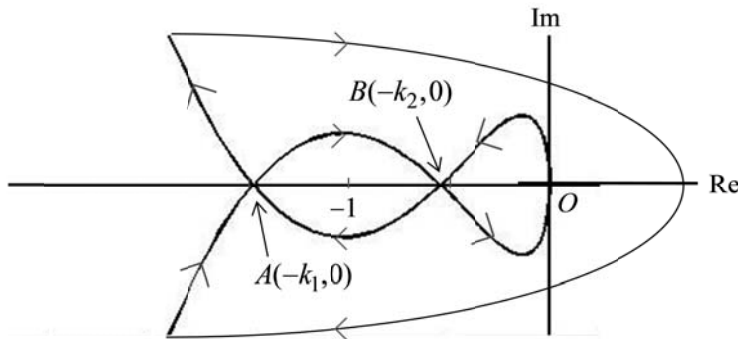
(iii) $K > 8$ のとき、下図のように、ベクトル軌跡の進行方向に対して点 $(-1, 0)$ が右側にあるので、閉ループ伝達関数は不安定。



9.

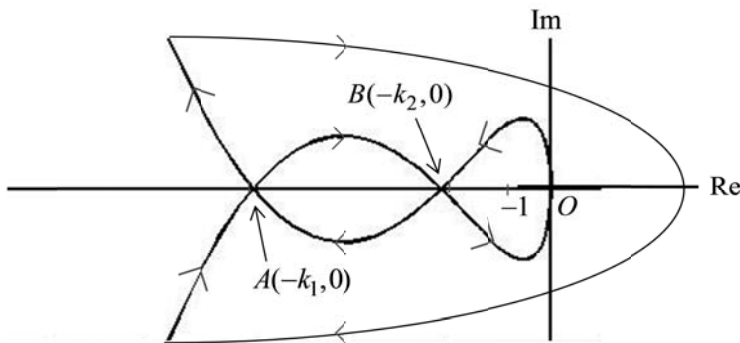
まず、 $L(s)$ の極は、 $s = -1, -10, -5$ であることから、 $L(s)$ に不安定極は存在しない。よって、ナイキスト軌跡が点 $(-1, 0)$ を時計回りする回数が、閉ループ伝達関数の不安定極の数となる。ここで、 $K = \frac{1}{k_1 k_2}$ のときに、ナイキスト軌跡が点 $(-1, 0)$ を通ることに注意すると、 K の大きさによって、以下のように安定判別できる。

- (i) $0 < K < \frac{1}{k_1}$ のとき、問題で与えられた図のように、点 $(-1, 0)$ は点Aよりも左側にあることから、ナイキスト軌跡は点 $(-1, 0)$ を回らない。つまり、ナイキスト軌跡が点 $(-1, 0)$ を時計回りする回数は0であるので、閉ループ伝達関数は安定である。
- (ii) $\frac{1}{k_1} < K < \frac{1}{k_2}$ のとき、ナイキスト軌跡と点 $(-1, 0)$ の位置関係は以下の図のようになる。



この図から、ナイキスト軌跡は、点 $(-1, 0)$ を2回時計回りする。よって、閉ループ伝達関数は不安定で、不安定極の個数は2である。

- (iii) $\frac{1}{k_2} < K$ のとき、ナイキスト軌跡と点 $(-1, 0)$ の位置関係は以下の図のようになる。



この図から、ナイキスト軌跡は、点 $(-1, 0)$ を時計方向、および、反時計方向に、1回ずつ回っているため、回転数の合計は0となる。よって、閉ループ伝達関数は安定である。

- (iv) $K = \frac{1}{k_1 k_2}$ のとき、ナイキスト軌跡は、点 $(-1, 0)$ の上を通過する。よって、これらの場合、閉ループ伝達関数は安定限界である。

10.

ゲイン余裕、および、位相余裕を示す箇所を作図すると下図のようになり，どちらも負の値となることが確認できる。よって，閉ループ伝達関数は不安定である。（答）

