論理学 演習問題 — 解答・解説

氏名

2025 年 11 月 12 日

目次

1　問題 1：真理表による証明

I を真（True）、O を偽（False）として真理表を作成します.

(1) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$（分配法則）

下表は，各組合せに対する各項の真理値を示します．左辺と右辺の列が一致するため，同値であることが分かります.

表 1　$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ の真理表

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	O	I	I	I	O	I
I	O	I	I	I	O	I	I
I	O	O	O	O	O	O	O
O	I	I	I	O	O	O	O
O	I	O	I	O	O	O	O
O	O	I	I	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O

(2) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$（分配法則）

同様に，次の真理表で左辺と右辺が一致することが確認できます.

表 2　$p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ の真理表

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	O	O	I	I	I	I
I	O	I	O	I	I	I	I
I	O	O	O	I	I	I	I
O	I	I	I	I	I	I	I
O	I	O	O	O	I	O	O
O	O	I	O	O	O	I	O
O	O	O	O	O	O	O	O

2　問題 3：同値変形による証明

使用する主な法則：

- $A \to B \equiv \overline{A} \lor B$
- ド・モルガンの法則: $\overline{A \lor B} \equiv \bar{A} \land \bar{B}, \quad \overline{A \land B} \equiv \bar{A} \lor \bar{B}$
- 分配律: $A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C), \quad A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$
- その他の恒等式: $A \lor \bar{A} \equiv I, A \land \bar{A} \equiv O, A \lor O \equiv A, A \land I \equiv A, A \lor I \equiv I, A \land O \equiv O$

(1) $(p \lor q) \land (p \lor \bar{q}) \equiv p$

$$\begin{aligned}(p \lor q) \land (p \lor \bar{q}) &\equiv p \lor (q \land \bar{q}) \quad (\text{分配法則 } (A \lor B) \land (A \lor C) \equiv A \lor (B \land C)) \\ &\equiv p \lor O \quad (\text{矛盾律 } q \land \bar{q} \equiv O) \\ &\equiv p \quad (\text{同一律 } p \lor O \equiv p)\end{aligned}$$

よって示された.

(2) $(p \to q) \to (p \land q) \equiv p$

$$\begin{aligned}(p \to q) \to (p \land q) &\equiv (\overline{p \to q}) \lor (p \land q) \quad (A \to B \equiv \bar{A} \lor B) \\ &\equiv (\bar{p} \lor \bar{q}) \lor (p \land q) \quad (p \to q \equiv \bar{p} \lor q) \\ &\equiv (p \land \bar{q}) \lor (p \land q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &\equiv p \land (\bar{q} \lor q) \quad (\text{分配法則 } (X \land Y) \lor (X \land Z) \equiv X \land (Y \lor Z)) \\ &\equiv p \land I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \lor q \equiv I) \\ &\equiv p \quad (\text{同一律 } p \land I \equiv p)\end{aligned}$$

よって示された.

(3) $(p \wedge q) \to (p \to q) \equiv I$

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \to q) &\equiv (\overline{p \wedge q}) \vee (p \to q) \quad (A \to B \equiv \bar{A} \vee B) \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \quad (\text{ド・モルガン},\ p \to q \equiv \bar{p} \vee q) \\
&\equiv \bar{p} \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee q \quad (\text{結合・交換}) \\
&\equiv \bar{p} \vee (\bar{q} \vee q) \quad (\text{冪等律 } \bar{p} \vee \bar{p} \equiv \bar{p}) \\
&\equiv \bar{p} \vee I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\
&\equiv I \quad (\text{同一律 } \bar{p} \vee I \equiv I)
\end{aligned}
$$

よって示された.

(4) $(p \vee q) \to (p \wedge q) \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$

$$
\begin{aligned}
&(p \vee q) \to (p \wedge q) \\
&\qquad \equiv (\overline{p \vee q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{含意の定義 } A \to B \equiv \bar{A} \vee B) \\
&\qquad \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\
&\qquad \equiv \big((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee p\big) \wedge \big((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q\big) \quad (\text{分配法則}) \\
&\qquad \equiv (\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則}) \\
&\qquad \equiv I \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{p} \vee p \equiv I, \bar{q} \vee q \equiv I) \\
&\qquad \equiv (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{同一律 } I \wedge A \equiv A) \\
&\qquad \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{交換律})
\end{aligned}
$$

よって示された.

付録 A　補遺：記法と恒等式

本ドキュメントで使用した略記と恒等式の一覧をまとめます．授業や試験での参照に便利です．

- I：真 (True)
- O：偽 (False)
- $\bar{A}$：命題 A の否定
- $A \to B$：A ならば B（含意）