制御工学における安定判別問題

長野高専
電気電子工学科 5 年 XX 番 氏名

2025 年 8 月 4 日

1　問題 2 の解説

閉ループ伝達関数が $G(s) = \frac{K}{s(1+sT)}$ で与えられる閉ループ系について、入力 $r(t) = 1 + t\ (t \geq 0)$ に対する定常偏差を 0.1、減衰率 $\zeta = 0.5$ にする K と T を求めよ。

1.1　閉ループ伝達関数の導出

まず，この系の閉ループ伝達関数 $W(s)$ を求めます．

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{s(1+sT)}}{1+\frac{K}{s(1+sT)}} = \frac{K}{s(1+sT)+K} = \frac{K}{s^2T+s+K}$$

標準的な 2 次系の形式に合わせるため，分母分子を T で割ります．

$$W(s) = \frac{K/T}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$$

1.2　特性方程式と減衰率の関係

2 次遅れ系の標準形は $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ です．ここで，ζ は減衰率，ω_n は固有角周波数です．手順 1 で求めた閉ループ伝達関数の分母（特性方程式）と比較します．

$$s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T} = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$$

係数を比較すると，以下の関係が得られます．

$$\omega_n^2 = \frac{K}{T} \tag{1}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \tag{2}$$

問題の条件より $\zeta = 0.5$ なので，これを (2) 式に代入します．

$$2 \times 0.5 \times \omega_n = \frac{1}{T}$$

$$\omega_n = \frac{1}{T}$$

この $\omega_n = \frac{1}{T}$ を (1) 式に代入します.

$$\left(\frac{1}{T}\right)^2 = \frac{K}{T}$$
$$\frac{1}{T^2} = \frac{K}{T}$$

両辺に T^2 を掛けると（$T \neq 0$),

$$1 = KT$$

これにより，K と T の関係式が得られました.

1.3 定常偏差の計算

入力 $r(t) = 1 + t$ は，ステップ入力 $r_1(t) = 1$ とランプ入力 $r_2(t) = t$ の和です．この系の偏差 $E(s)$ は，最終値の定理を用いて定常偏差 e_{ss} を求めることで計算できます.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

この制御系は 1 型（開ループ伝達関数 $G(s)$ が s を 1 つ分母に持つ）であるため,

- ステップ入力 $r_1(t) = 1$ に対する定常位置偏差は $\mathbf{0}$ となります.
- ランプ入力 $r_2(t) = t$ に対する定常速度偏差 e_v は，$e_v = \frac{1}{K_v}$ で与えられます.

速度偏差定数 K_v は次のように計算されます.

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{s(1+sT)} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{1+sT} = K$$

したがって，定常速度偏差は $e_v = \frac{1}{K}$ となります．入力全体 $r(t) = 1 + t$ に対する定常偏差 e_{ss} は，それぞれの入力に対する定常偏差の和になるので,

$$e_{ss} = 0 + \frac{1}{K} = \frac{1}{K}$$

1.4 K と T の値を決定

問題の条件より，定常偏差は 0.1 なので,

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = 0.1$$

よって，$K = \frac{1}{0.1} = 10$．手順 2 で求めた関係式 $1 = KT$ に $K = 10$ を代入します.

$$1 = 10 \cdot T$$
$$\text{よって}, T = \frac{1}{10} = 0.1$$

答え: $K = 10, T = 0.1$

2　問題 3 の解説

右図の制御系で安定かつ定常速度偏差が 0.05 以下であるためのゲイン定数 K を求めよ。ただし $A(s) = \frac{K(1+0.65s)}{1+2s}$, $B(s) = \frac{5}{s(1+s)}$

2.1　開ループ伝達関数の導出

この系の開ループ伝達関数 $G(s)$ は，$A(s)$ と $B(s)$ の積で与えられます．

$$G(s) = A(s)B(s) = \frac{K(1+0.65s)}{1+2s} \cdot \frac{5}{s(1+s)} = \frac{5K(1+0.65s)}{s(1+s)(1+2s)}$$

2.2　安定性の条件（ラウス・フルビッツの安定判別法）

閉ループ系が安定であるためには，特性方程式 $1 + G(s) = 0$ のすべての根の実部が負である必要があります．

$$\begin{aligned} 1 + \frac{5K(1+0.65s)}{s(1+s)(1+2s)} &= 0 \\ s(1+s)(1+2s) + 5K(1+0.65s) &= 0 \\ s(1+3s+2s^2) + 5K + 3.25Ks &= 0 \\ 2s^3 + 3s^2 + s + 5K + 3.25Ks &= 0 \end{aligned}$$

s の次数で整理します．

$$2s^3 + 3s^2 + (1+3.25K)s + 5K = 0$$

この特性方程式からラウス配列を作成します．

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 1+3.25K \\ s^2 & 3 & 5K \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

ここで，b_1 と c_1 を計算します．

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3(1+3.25K) - 2(5K)}{3} = \frac{3 + 9.75K - 10K}{3} = \frac{3 - 0.25K}{3} \\ c_1 &= \frac{b_1(5K) - 3(0)}{b_1} = 5K \end{aligned}$$

系が安定であるためには，ラウス配列の第 1 列の要素がすべて正である必要があります．

1. $2 > 0$ (OK)
2. $3 > 0$ (OK)
3. $b_1 > 0 \Rightarrow \frac{3-0.25K}{3} > 0 \Rightarrow 3 - 0.25K > 0 \Rightarrow 3 > 0.25K \Rightarrow 12 > K$
4. $c_1 > 0 \Rightarrow 5K > 0 \Rightarrow K > 0$

したがって，系が安定であるための K の範囲は $0 < K < 12$ となります．

2.3 定常速度偏差の条件

定常速度偏差 e_{ss} は，速度偏差定数 K_v を用いて $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ と表されます．

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{5K(1+0.65s)}{s(1+s)(1+2s)} = \lim_{s\to 0} \frac{5K(1+0.65s)}{(1+s)(1+2s)}$$

$s = 0$ を代入すると，

$$K_v = \frac{5K(1+0)}{(1+0)(1+0)} = 5K$$

定常速度偏差は $e_{ss} = \frac{1}{5K}$ となります．問題の条件より，定常速度偏差が 0.05 以下である必要があるので，

$$\frac{1}{5K} \leq 0.05$$
$$\frac{1}{5K} \leq \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

逆数をとると不等号の向きが変わります．

$$5K \geq 20$$
$$K \geq 4$$

2.4 最終的な K の範囲

求めるゲイン定数 K は，安定性の条件と定常速度偏差の条件の両方を満たす必要があります．

- 安定性の条件: $0 < K < 12$
- 定常速度偏差の条件: $K \geq 4$

この 2 つの条件の共通範囲を求めます．

答え: $4 \leq K < 12$