電子工学 (5E) 試験対策 統合完全版

ポイント①〜⑲網羅解説 & 過去問詳細解法

目次

第 I 部
試験範囲ポイント完全解説 (①〜⑲)

試験範囲として提示された 19 個のポイントについて、教科書やノートの内容を補完し、記述問題にも対応できるよう詳細に解説します。

1 エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①〜⑦)

① 価電子帯、禁制帯、伝導帯とはなにか

価電子帯 (Valence Band) 原子核に束縛された電子（価電子）が詰まっているエネルギー帯。通常、ここにある電子は電気伝導に寄与しません。

禁制帯 (Forbidden Band) 電子が存在することができないエネルギー領域。価電子帯と伝導帯の間のエネルギー差（バンドギャップ）を指します。

伝導帯 (Conduction Band) 電子が原子の束縛を離れて自由に動くことができるエネルギー帯。ここに電子が励起されると電流が流れます。

※**金属の特徴**: 金属（導体）では「価電子帯」と「伝導帯」が重なっているか、価電子帯に空きがあるため、室温でも電子は自由に動くことができます（自由電子）。

② 外部エネルギーの入射により電子が放出されるしくみ

エネルギーバンド図において、電子は通常、エネルギーの低い「ポテンシャルの井戸」の中にいます。外部から**熱・光・強電界・電子衝突**などのエネルギーを与えられると、電子のエネルギー準位が上昇（励起）します。そのエネルギーが、物質表面の壁の高さである**真空準位**を超えたとき、電子は原子の束縛を断ち切って外部（真空）へ飛び出します。

③ 金属内電子が金属外に飛び出さない理由

金属表面には**電位障壁 (Potential Barrier)** が存在するからです。電子が表面から外に出ようとすると、金属表面に残された正電荷（プラス）が電子（マイナス）を引き戻そうとするクーロン力が働きます。これを**鏡像力（イメージ力）**と呼びます。この力が壁となり、常温・無刺激の状態では電子は脱出できません。

④ 電子放出の共通的基礎（各用語の関係）

以下の関係式と定義を相関図としてイメージしてください。

$$\boxed{\phi = W - E_{\mathrm{F}} \qquad (1)}$$

- **真空準位 (Vacuum Level)**: 電子が原子から完全に自由になり、静止している状態のエネルギー（基準点 0）。
- **全障壁 W (Potential Barrier)**: 金属の底から真空準位までの高さ。
- **フェルミ準位 E_{F} (Fermi Level)**: 金属内の電子が詰まっている「水面」の高さ。

- **仕事関数** ϕ **(Work Function)**: フェルミ準位（水面）にある電子を、外（真空準位）に引っ張り出すのに必要な「追加コスト」。
- **位置エネルギー (Potential Energy)**: 真空準位を基準 $(E = 0)$ として、金属内部に束縛された電子は**負のポテンシャルエネルギー**を持ちます。電子の全エネルギーは運動エネルギー K と位置エネルギー U の和で表され、

$$E_{\mathrm{total}} = K + U \tag{2}$$

真空準位 (0) より高くなると外部へ脱出できます（$E_{\mathrm{total}} \geq 0$）。
- **外部エネルギー (External Energy)**: 熱・光・電界・電子衝突などの外部から与えられるエネルギーで、電子の運動エネルギーを増加させます。外部エネルギー ΔE_{ext} を与えた結果、放出条件は

$$E_{\mathrm{total}} + \Delta E_{\mathrm{ext}} \geq 0 \tag{3}$$

であり、フェルミ準位近傍から見れば光電子放出の場合は $h\nu \geq e\phi$ などで表されます。

⑤ 金属内電子のエネルギー（絶対零度における状態）

- **絶対温度** $T = 0\,\mathrm{K}$: 電子はエネルギーの低い準位から順に隙間なく詰まっています。
- **最高エネルギー**: 金属内電子は、最高で**フェルミ準位** E_{F} までのエネルギーを持っています。それ以上の準位に電子は存在しません。

⑥ フェルミ準位とフェルミ分布関数の意味

- **フェルミ分布関数** $F(E)$: あるエネルギー準位 E に電子が存在する確率（0〜1）を表す関数です。

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_{\mathrm{F}}}{kT}\right)} \tag{4}$$

- **フェルミ準位** E_{F} **の定義** ($T > 0\,\mathrm{K}$): 電子が存在する確率 $F(E)$ がちょうど **1/2 (50%)** になるエネルギー準位のことです。

⑦ エネルギー準位図のグラフ $F(E), n(E)$

- $F(E)$ **(分布関数)**:
  - $T = 0\,\mathrm{K}$：E_{F} までは確率 1、それ以上は 0（階段状）。
  - $T > 0\,\mathrm{K}$：E_{F} 付近でなだらかに変化する曲線（高温ほど裾野が広がる）。
- $n(E)$ **(電子密度)**: 実際に存在する電子の数分布。

$$n(E) \propto \sqrt{E} \times F(E)$$

放物線状の状態密度と、分布関数の積で表されます。E_{F} 付近に多くの電子が存在します。

2　熱電子放出 (⑧〜⑩)

⑧ 熱電子の飽和電流密度 (ダッシュマン・リチャードソンの式)

最も重要な公式です。温度 T と仕事関数 ϕ で電流密度 J が決まります。

公式暗記

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad [\mathrm{A/m^2}] \tag{5}$$

- A: リチャードソン定数 ($1.20 \times 10^6 [\mathrm{A/m^2K^2}]$)
- k: ボルツマン定数
- T: **絶対温度 [K]** (= 摂氏 + 273)

⑨ リチャードソン線から仕事関数と A を求める方法

リチャードソンの式を変形して対数 (log) をとります。

$$\ln\left(\frac{J}{T^2}\right) = \ln A - \frac{e\phi}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

これを $Y = b - aX$ の形に見立てます。

- 縦軸 $Y = \ln(J/T^2)$
- 横軸 $X = 1/T$

としてグラフ（リチャードソンプロット）を描くと**右下がりの直線**になります。

- **直線の傾き**: $-\frac{e\phi}{k}$ → ここから **仕事関数** ϕ が求まる。
- **Y 切片**: $\ln A$ → ここから **定数** A が求まる。

⑩ 熱陰極の具備条件

良いエミッタ（陰極材料）であるための 3 条件：

1. **仕事関数 ϕ が小さいこと**: 低い温度でも多くの電子を放出できるため。
2. **融点が高いこと**: 高温動作しても溶けないようにするため。
3. **寿命が長いこと**: 高温でも蒸発しにくく、安定していること。

※代表例：タングステン (W)、酸化物陰極 (BaO/SrO)。

3 光電子放出 (⑪〜⑬)

⑪ 光電子放出条件

入射する光子のエネルギー $h\nu$ が、電子の脱出コスト（仕事関数 $e\phi$）以上である必要があります。

$$h\nu \geq e\phi$$

⑫ アインシュタインの式、限界周波数、限界波長

- **アインシュタインの式 (エネルギー保存則)**:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi$$

(飛び出す運動エネルギー) ＝ (入ってきた光エネルギー) － (脱出コスト)

- **限界周波数** ν_0: 電子放出が始まる最低の振動数。($h\nu_0 = e\phi$)
- **限界波長** λ_0: 電子放出が始まる最長の波長。

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{e\phi}$$

これより波長が**短い**光でないと放出されません（光のエネルギーは波長に反比例するため）。

⑬ 量子効率、光電感度

量子効率 η_q「数」の割合。入射した光子 1 個あたり、何個の電子が放出されたか。
光電感度 S「電流」の割合。入射した光パワー 1W あたり、何アンペアの電流が得られたか ($S = I/P$ [A/W])。

4　二次電子放出 (⑭〜⑰)

⑭ 二次電子放出の原理

加速された電子（**一次電子**）が固体表面に衝突し、その運動エネルギーを固体内の電子に与えます。エネルギーを受け取った電子（**二次電子**）が、表面のポテンシャル障壁を超えて外部へ放出される現象です。

⑮ 放出比の測定方法

二次電子放出比 δ は、一次電子 1 個に対して何個の二次電子が出たかの比率です。

$$\delta = \frac{I_s(\text{二次電子流})}{I_p(\text{一次電子流})}$$

$\delta > 1$ のとき、電子が増倍（増幅）されます。

⑯ 放出特性曲線（なぜ山なりになるのか？）

横軸に一次電子の加速電圧 V_p、縦軸に放出比 δ をとったグラフは山型になります。

- **低電圧領域**: 電圧を上げると衝突エネルギーが増えるため、たたき出される二次電子の数（δ）は増加します。
- **ピーク** (V_{pmax}): δ が最大値 δ_{max} になります。
- **高電圧領域**: さらに電圧を上げると、一次電子が物質の**奥深くまで入り込みすぎます**。内部で発生した二次電子が表面まで戻ってくる間にエネルギーを失ってしまうため、逆に放出される数は**減少**します。

⑰ 光電子増倍管 (PMT) の原理

「光電効果」と「二次電子放出」を組み合わせた高感度センサです。

1. **光電面**: 光を受けて光電子を放出する（光 → 電子）。
2. **ダイノード（増倍部）**: 多段の電極に電子を衝突させ、二次電子放出を繰り返して電子をネズミ算式に増やす（雪崩増幅）。

3. **アノード**: 増えた電子を集めて電流として出力する。

5　電界放出と電界計算 (⑱〜⑲)

⑱ ショットキー効果

金属表面に強い電界 E をかけると、電子が放出しやすくなる現象です。

- **原理**:「鏡像力によるポテンシャルカーブ」と「外部電界による直線ポテンシャル」が合成されます。
- **結果**: 電位障壁の頂点が**低くなり** ($\Delta\phi$)、かつ位置が**金属側に移動**します。
- 仕事関数が見かけ上減少するため、熱電子放出電流が増加します。

⑲ 電界と電位の計算手順（ポアソン・ラプラス）

空間に電荷密度 ρ が存在する場合の計算手順（記述問題で問われます）。

1. **ポアソンの方程式を立てる**: 電荷と電位の関係式です。
$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
2. **1 回目の積分**（電界 E を求める）: x で積分します。積分定数 C_1 が現れます。
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \int \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -E_x = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C_1$$
3. **2 回目の積分**（電位 V を求める）: もう一度 x で積分します。積分定数 C_2 が現れます。
$$V = \int \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C_1\right) \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + C_1x + C_2$$
4. **境界条件の適用**: 問題で与えられた条件（例：$x = 0$ で $V = 0$、$x = d$ で $V = V_a$）を代入して連立方程式を解き、積分定数 C_1, C_2 を決定します。

第 II 部

過去問 詳細解法 (2024・2023)

計算の省略を一切せず、途中式を完全に記述しました。

2024 年度 試験問題

問 3. タングステン電極の仕事関数 ϕ

問題: $T = 2000$[K]、半径 $r = 1.25 \times 10^{-4}$[m]、長さ $L = 0.1$[m]、電流 $I = 2.00$[mA]。仕事関数 ϕ を求めよ。

解法: 1. **表面積 S の計算**（端面無視、側面積のみ）

$$S = 2\pi rL = 2 \times \pi \times (1.25 \times 10^{-4}) \times 0.100$$

$$S \approx 7.854 \times 10^{-5}\,[\mathrm{m}^2]$$

2. **電流密度 J の計算**

$$J = \frac{I}{S} = \frac{2.00 \times 10^{-3}[\mathrm{A}]}{7.854 \times 10^{-5}[\mathrm{m}^2]} \approx 25.46\,[\mathrm{A/m}^2]$$

3. **リチャードソンの式から ϕ を逆算**式: $J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right)$ 両辺を AT^2 で割る:

$$\frac{J}{AT^2} = \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right)$$

自然対数 (ln) をとる:

$$\ln\left(\frac{J}{AT^2}\right) = -\frac{e\phi}{kT}$$

ϕ について解く:

$$\phi = -\frac{kT}{e}\ln\left(\frac{J}{AT^2}\right) = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{AT^2}{J}\right)$$

4. **数値代入**

- 係数部分: $\frac{kT}{e} = \frac{1.38\times10^{-23}\times2000}{1.60\times10^{-19}} = \frac{2.76\times10^{-20}}{1.60\times10^{-19}} = 0.1725\,[\mathrm{eV}]$
- 対数の中身: $\frac{AT^2}{J} = \frac{1.20\times10^{6}\times(2000)^2}{25.46} = \frac{4.8\times10^{12}}{25.46} \approx 1.885 \times 10^{11}$
- 対数計算: $\ln(1.885 \times 10^{11}) = \ln(1.885) + 11\ln(10) \approx 0.634 + 11(2.30) \approx 25.96$

$$\phi = 0.1725 \times 25.96 \approx 4.478$$

答: $\phi \approx 4.48\,[\mathrm{eV}]$

問 4. 光電子の最大速度 V_m

問題: $\phi = 1.68$[eV]、波長 $\lambda = 520$[nm]。

解法: 1. **光子エネルギー $h\nu$ の計算 (J 単位へ)**

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^{8}}{520 \times 10^{-9}}$$

$$h\nu = \frac{19.89 \times 10^{-26}}{5.20 \times 10^{-7}} \approx 3.825 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

2. **仕事関数 $e\phi$ のジュール換算**

$$e\phi = 1.68 \times (1.60 \times 10^{-19}) = 2.688 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

3. **運動エネルギーの計算 (アインシュタインの式)**

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = (3.825 - 2.688) \times 10^{-19} = 1.137 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

4. **速度 V_m の計算**

$$v_m^2 = \frac{2 \times 1.137 \times 10^{-19}}{m} = \frac{2.274 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}} \approx 0.2496 \times 10^{12}$$

$$v_m = \sqrt{0.2496 \times 10^{12}} \approx 0.4996 \times 10^{6}$$

答: $V_m \approx 5.00 \times 10^5\,[\mathrm{m/s}]$

問 6. 光電子増倍管の出力電流

問題: 入射 $P = 1.98 \times 10^{-5}$[W]、感度 $\eta = 27.0$[mA/W]、増倍比 $\delta = 3.51$、段数 $n = 6$。

解法: 1. **初期光電流 I_0 の計算**単位に注意: mA $\to$ A ($\times 10^{-3}$)

$$I_0 = P \times \eta = (1.98 \times 10^{-5}) \times (27.0 \times 10^{-3})$$

$$I_0 = 53.46 \times 10^{-8} = 5.346 \times 10^{-7}\,[\mathrm{A}]$$

2. **増倍率（ゲイン）G の計算**

$$G = \delta^n = 3.51^6$$

$$G = 3.51 \times 3.51 \times \cdots \approx 1869$$

3. **出力電流 I の計算**

$$I = I_0 \times G = 5.346 \times 10^{-7} \times 1869$$

$$I \approx 9991 \times 10^{-7} \approx 1.00 \times 10^{-3}\,[\mathrm{A}]$$

答: $I \approx 1.00\,[\mathrm{mA}]$

2023 年度 試験問題

問 1. 鏡像力と電位障壁

(1) **力の大きさ**: 金属表面から距離 x に電子、反対側距離 x に鏡像電荷。距離合計 $2x$。

$$|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e \times e}{(2x)^2} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}$$

(3) **電位障壁 W の計算 (積分)**:

$$W = \int_x^\infty |F|\mathrm{d}r = \int_x^\infty \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$W = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_x^\infty = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(0 - \left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x}\,[\mathrm{J}]$$

eV 単位にするため e で割る: **答**: $\frac{e}{16\pi\varepsilon_0 x}\,[\mathrm{eV}]$

問 3. モリブデン線の半径 r

問題: $T = 2000$, $I = 22.8\text{mA}$, $L = 0.1$, $\phi = 4.27\text{eV}$。**解法**: 1. **電流密度 J の理論値を先に計算**指数部: $\frac{e\phi}{kT} = \frac{1.60\times10^{-19}\times4.27}{1.38\times10^{-23}\times2000} \approx \frac{6.832}{0.276}\times10^4 \approx 24.75$

$$J = AT^2\exp(-24.75) = (1.20\times10^6)\times(2000)^2\times(1.78\times10^{-11})$$

$$J = 4.8\times10^{12}\times1.78\times10^{-11} \approx 85.6\,[\text{A/m}^2]$$

2. **半径 r の逆算**

$$I = J\times S = J\times 2\pi rL$$

$$r = \frac{I}{2\pi LJ} = \frac{22.8\times10^{-3}}{2\pi\times0.1\times85.6}$$

$$r = \frac{0.0228}{53.78} \approx 4.24\times10^{-4}\,[\text{m}]$$

問 4. 限界波長 λ_0

解法:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{e\phi} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3.00\times10^8}{1.60\times10^{-19}\times1.72}$$

$$\lambda_0 = \frac{19.89\times10^{-26}}{2.752\times10^{-19}} \approx 7.227\times10^{-7}\,[\text{m}]$$

答: $\approx 723\,[\text{nm}]$

問 6. 電界の強さ E_x

問題: 電位 $V = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ のとき E_x を求めよ。**解法**: 電界の定義: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $V = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ として偏微分する（合成関数の微分)。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\times\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\times(2x)$$

$$= -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

符号を反転して電界にする:

$$E_x = -(-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$