電子工学 (5E) 試験対策 統合完全版・改

詳細解説・計算過程完全記述・記述対策強化版

概要

本資料は、試験範囲として提示された 19 個の重要ポイント、および過去 2 年分の試験問題を網羅した完全対策資料である。特に、教科書では省略されがちな「式変形の途中経過」「定数代入時の指数の扱い」「物理現象の直感的理解」に重点を置いている。記述問題での減点を防ぎ、計算問題で完答することを目的とする。

目次

第 I 部
試験範囲ポイント完全解説 (①〜⑲)

試験範囲の 19 ポイントについて、単なる用語説明に留まらず、「なぜそうなるのか」「試験でどう問われるか」まで踏み込んで解説する。

1　エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①〜⑦)

① 価電子帯、禁制帯、伝導帯とはなにか

固体中の電子が取りうるエネルギー準位の構造（バンド構造）に関する定義である。

バンド構造の 3 要素

価電子帯 (Valence Band) 原子核に束縛されている電子（価電子）が充満しているエネルギー帯。

- **特徴**: 電子が詰まっているため身動きが取れず、ここにある電子は電気伝導（電流）に寄与しない。
- **温度の影響**: 絶対零度 ($0\,[\mathrm{K}]$) では完全に満たされているが、温度が上がると一部の電子がここから励起され、正孔（ホール）ができる。

禁制帯 (Forbidden Band / Band Gap) 量子力学的な制約により、電子が存在することのできないエネルギー領域。

- **バンドギャップ** E_g: 価電子帯の頂上と伝導帯の底のエネルギー差。
- **分類**: この幅が広いと絶縁体、適度だと半導体、重なっていると金属（導体）になる。

伝導帯 (Conduction Band) 原子の束縛を離れ、結晶内を自由に動き回れる電子（自由電子）が存在するエネルギー帯。

- **電気伝導**: ここに電子が存在して初めて電流が流れる。

※**金属（導体）の特異性**: 金属では「価電子帯」と「伝導帯」が重なっているか、価電子帯自体が完全に埋まっておらず空き席がある状態である。そのため、わずかなエネルギー（室温の熱など）で電子が自由電子となり、高い導電性を示す。

② 外部エネルギーの入射により電子が放出されるしくみ

通常、電子は物質内部の「ポテンシャルの井戸」に閉じ込められている。これを脱出させる（電子放出）ためのプロセスの本質は以下の通りである。

1. **エネルギー準位**: 電子は通常、エネルギーの低い状態（価電子帯やフェルミ準位付近）にある。
2. **外部励起**: 外部からエネルギー ΔE を与える。エネルギー源の種類により名称が変わる。
   - 熱エネルギー (kT) → **熱電子放出**
   - 光エネルギー $(h\nu)$ → **光電子放出**
   - 強電界 (E) → **電界放出** (トンネル効果) / ショットキー放出
   - 電子衝突 $(1/2mv^2)$ → **二次電子放出**
3. **脱出条件**: 電子の持つ全エネルギーが、表面の障壁高さ（真空準位 E_{vac}）を超えたとき、電子は表面を突き抜けて真空中に飛び出す。

③ 金属内電子が金属外に飛び出さない理由

「なぜ常温の金属を置いておくだけでは電子が飛び出さないのか？」という問いへの物理的解答。

- **電位障壁 (Potential Barrier)**: 金属表面には、電子を閉じ込めるエネルギーの壁が存在する。
- **鏡像力 (Image Force)**: 電子が金属表面からわずかに外に出ようとすると、金属表面に正電荷（ホール）が誘導される。クーロン力により、正電荷が電子（負電荷）を引き戻そうとする力が働く。これが壁の正体である。
- **エネルギー不足**: 室温 ($300\,[\mathrm{K}]$) の熱エネルギー $kT \approx 0.026\,[\mathrm{eV}]$ は、一般的な金属の仕事関数 $\phi \approx 4 \sim 5\,[\mathrm{eV}]$ に比べてあまりに小さいため、確率的に飛び出す電子はほぼ皆無である。

④ 電子放出の共通的基礎（各用語の厳密な定義と関係式）

記述問題や計算問題の基礎となる定義式。図をイメージしながら理解すること。

重要公式と定義

$$\phi = W - E_{\mathrm{F}} \quad \Longleftrightarrow \quad W = E_{\mathrm{F}} + \phi \tag{1}$$

真空準位 (Vacuum Level, E_{vac}) 真空中に静止した「自由な電子」が持つエネルギー。これを基準 ($E = 0$) とする場合と、ここを脱出ゴールとする場合がある。

全障壁 W (Potential Barrier Height) 金属のポテンシャル底（電子が存在しうる最低エネルギー）から、真空準位までの高さ。

フェルミ準位 E_{F} (Fermi Level) 統計力学的に定義される基準準位。

- **絶対零度**: 電子が詰まっている最高エネルギー面。
- **有限温度**: 電子存在確率が 50% であるエネルギー準位。

仕事関数 ϕ (Work Function)「フェルミ準位にある電子」を「真空準位」まで引き上げるために最低限必要な追加エネルギー。

$$\phi[\,[\mathrm{eV}]] \quad \text{または} \quad e\phi[\,[\mathrm{J}]]$$

※材料固有の値であり、表面の状態（汚れや酸化）によって変化する。

【注意】単位の混同に注意

仕事関数 ϕ は通常 $[\mathrm{eV}]$ (電子ボルト) で与えられる。しかし、計算式（例えば $h\nu = e\phi + K$）ではジュール $[\mathrm{J}]$ に統一する必要がある。

$$1\,[\mathrm{eV}] = 1.60 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

必ず計算前に換算すること。

⑤ 金属内電子のエネルギー（絶対零度における状態）

- **パウリの排他律**: 1 つの量子状態には 1 つの電子しか入れない。
- **積み上げ**: 絶対零度 ($T = 0\,[\mathrm{K}]$) では、電子はエネルギーの低い準位から順に、隙間なくびっしりと詰まっていく。

- **フェルミ面**: 詰め込まれた電子の、一番上のエネルギー面がフェルミ準位 E_F と一致する。それより上には電子は 1 つも存在しない。

⑥ フェルミ準位とフェルミ分布関数の意味

電子が「あるエネルギー準位 E」に存在する確率を与える統計力学の基本関数。

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_\mathrm{F}}{kT}\right)} \tag{2}$$

- **意味**: エネルギー E の準位が電子によって占有されている確率 $(0 \leq F(E) \leq 1)$。
- **$E = E_\mathrm{F}$ のとき**: 指数部は $\exp(0) = 1$ となるため、温度 T に関わらず $F(E_\mathrm{F}) = 1/2$ となる。これがフェルミ準位の定義である。
- **$E \gg E_\mathrm{F}$ のとき (ボルツマン近似)**: 分母の 1 が無視でき、$F(E) \approx \exp\left(-\frac{E - E_\mathrm{F}}{kT}\right)$ となる。これは古典的なボルツマン分布と一致し、熱電子放出の式の導出根拠となる。

⑦ エネルギー準位図のグラフ $F(E), n(E)$

試験でグラフを描く、あるいは選ぶ問題が出る可能性がある。

分布関数 $F(E)$ の形状

- $T = 0\,[\mathrm{K}]$: E_F で垂直に落ちる階段関数（ステップ関数）。E_F 以下は 1、以上は 0。
- $T > 0\,[\mathrm{K}]$: E_F 付近で角が取れ、なだらかに変化するシグモイド曲線。高温ほど傾きが緩やかになり、高エネルギー側へ裾野が広がる（これが熱電子放出の原因）。

状態密度 $D(E)$ と電子密度 $n(E)$

- **状態密度 $D(E)$**: 電子が入れる「席」の数。自由電子モデルでは $D(E) \propto \sqrt{E}$（放物線）。
- **電子密度 $n(E)$**: 実際にそこにいる電子の数。

$$n(E) = D(E) \times F(E) \propto \sqrt{E} \cdot F(E)$$

グラフ形状は、E_F までは放物線で増え、E_F 付近で急激にゼロになる「山型」となる。

2 熱電子放出 (⑧〜⑩)

⑧ 熱電子の飽和電流密度 (ダッシュマン・リチャードソンの式)

電子工学において最も重要な式の一つ。計算問題の 8 割はこれに関連する。

公式: リチャードソン・ダッシュマンの式

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad [\mathrm{A/m^2}] \tag{3}$$

- J: 電流密度（単位面積あたりの電流 $[\mathrm{A/m^2}]$）
- A: リチャードソン定数（理論値 $\approx 1.20 \times 10^6 [\mathrm{A/m^2K^2}]$）
- T: **絶対温度 [K]** $(= [°\mathrm{C}] + 273.15)$
- $e\phi$: 仕事関数（エネルギー障壁の高さ [J]）

- k: ボルツマン定数

式の物理的意味:「T^2」は電子の衝突頻度などに由来し、「exp」項はエネルギー障壁を超える確率（ボルツマン因子）を表す。温度 T が少し上がるだけで、指数関数の効果により J は爆発的に増加する。

⑨ リチャードソン線から仕事関数と A を求める方法

実験データから材料定数 (ϕ, A) を決定する手法。
式を変形し、線形関係（$Y = aX + b$）を見出す。

$$\ln\left(\frac{J}{T^2}\right) = \ln A - \frac{e\phi}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

- 縦軸 (Y軸): $\ln\left(J/T^2\right)$
- 横軸 (X軸): $1/T$（逆温度）

このプロット（リチャードソンプロット）は**右下がりの直線**となる。

- **傾き (Slope)**: $-\frac{e\phi}{k} \to$ 傾きの絶対値から仕事関数 ϕ を算出できる。
- **Y 切片 (Intercept)**: $\ln A \to$ ここから定数 A を決定できる。

⑩ 熱陰極の具備条件

優れた電子放出材料（カソード）が満たすべき条件。記述問題頻出。

1. **仕事関数 ϕ が小さいこと**: これが最重要。ϕ が小さいほど、低い温度で多量の電子を放出できる（省エネ）。
2. **高い放出電流密度 J が得られること**: 動作温度において十分な電子流を供給できること。
3. **融点が高く、蒸気圧が低いこと**: 動作温度で溶けたり、蒸発して痩せ細ったりしないこと（長寿命化）。
4. **機械的強度が強いこと**: 高温でも変形したり折れたりしないこと。
5. **化学的に安定であること**: 残留ガスと反応して表面が変質（中毒）し、仕事関数が悪化しないこと。
6. **陰極能率（放出効率）が高いこと**: 加熱電力 1W あたりに得られる電流値 [mA/W] が大きいこと。

代表的な陰極材料

- **タングステン (W)**: 融点が高い (3655 [K]) が、仕事関数も大きい (4.5 [eV])。高電圧・高出力管向け。
- **トリウムタングステン (Th-W)**: W 中にトリウムを添加。表面に単原子層を形成し、ϕ を 2.6 [eV] まで下げる。
- **酸化物陰極 (Oxide)**: BaO, SrO などを塗布。$\phi \approx 1.0$ [eV] と非常に低い。ブラウン管や蛍光灯など一般用途向け。

3　光電子放出 (⑪〜⑬)

⑪ 光電子放出条件

光の粒子性（光子）に基づく現象。

- 入射光子エネルギー $h\nu$ が、電子を束縛している仕事関数 $e\phi$ に勝つ必要がある。

$$h\nu \geq e\phi$$

- 光の強さ（明るさ）を上げても、振動数 ν が足りなければ電子は 1 個も出ない（古典波動論では説明できない点)。

⑫ アインシュタインの式、限界周波数、限界波長

エネルギー保存則の式である。

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi \tag{4}$$

- $K_{\max}$: 放出される電子の最大運動エネルギー
- $h\nu$: 入ってくるエネルギー（収入）
- $e\phi$: 出るために支払うエネルギー（税金・コスト）

限界値の定義: $K_{\max} = 0$（ギリギリ放出される状態）とおくことで求められる。

- **限界周波数** ν_0: $h\nu_0 = e\phi \implies \nu_0 = \frac{e\phi}{h}$
- **限界波長** λ_0: $\frac{hc}{\lambda_0} = e\phi \implies \lambda_0 = \frac{hc}{e\phi}$

重要: 入射光の波長 λ が λ_0 より**短くないと**（エネルギーが高くないと）放出されない。長波長側が NG である点に注意。

⑬ 量子効率、光電感度

効率を表す 2 つの指標。

量子効率 (Quantum Efficiency, η_q)「個数の比率」。単位なし（または %)。

$$\eta_q = \frac{\text{放出された電子の数 } N_e}{\text{入射した光子の数 } N_p}$$

通常、金属では 10^{-4} 以下と低いが、半導体光電面では $0.1 \sim 0.3$ に達する。

光電感度 (Spectral Responsivity, S)「電気的出力の比率」。単位は [A/W]。

$$S = \frac{\text{光電流 } I\,[[\mathrm{A}]]}{\text{入射光パワー } P\,[[\mathrm{W}]]}$$

実用的なセンサー性能評価に使われる。

4　二次電子放出 (⑭〜⑰)

⑭ 二次電子放出の原理

外部から高速の電子（一次電子）を物質に衝突させた際、物質内部の電子がエネルギーを受け取って放出される現象。

- 一次電子は物質内部へ侵入しながら、衝突を繰り返してエネルギーを失う。

- その過程で励起された内部電子（二次電子）が表面に向かって移動する。
- 表面障壁を超えるエネルギーを持ったまま表面に到達できたものだけが放出される。

⑮ 放出比の測定方法

二次電子放出比 δ (Secondary Emission Yield):

$$\delta = \frac{I_s(\text{二次電子流})}{I_p(\text{一次電子流})}$$

- $\delta > 1$: 入射した電子より多くの電子が出てくる $\rightarrow$ **増幅作用**がある。
- $\delta < 1$: 電子が吸収されて減る。

⑯ 放出特性曲線（なぜ山なりになるのか？）

一次電子の加速電圧 V_p（衝突エネルギー）と δ の関係は極大値を持つ。

1. **上昇域**: V_p が低いときは、エネルギーが増えるほど生成される二次電子の数が増えるため、δ は上昇する。
2. **ピーク** δ_{max}: ある電圧（数百 V 程度）で最大となる。
3. **下降域**: さらに V_p を上げると、一次電子は物質の**深部**まで侵入してしまう。深い場所で発生した二次電子は、表面まで戻ってくる間に散乱されてエネルギーを失い、脱出できなくなる。そのため、高電圧すぎると逆に効率が落ちる。

⑰ 光電子増倍管 (PMT) の原理

極微弱な光を検出する真空管デバイス。「光電効果」と「二次電子放出」のハイブリッド。

1. **光電面 (Photocathode)**: 入射光を受け、光電効果により**光電子**を放出する。（変換: 光子 $\rightarrow$ 電子）
2. **ダイノード部 (Dynodes)**: 電子増倍電極群。1 段あたり δ 倍に電子を増やす。n 段あれば、トータルのゲインは $G = \delta^n$ となる。
   - 例: $\delta = 4, n = 10$ なら $4^{10} \approx 100\text{万倍}$ の増幅。
3. **陽極 (Anode)**: 増倍された電子群（雪崩）を回収し、電流として出力する。

5　電界放出と電界計算 (⑱〜⑲)

⑱ ショットキー効果 (Schottky Effect)

熱電子放出において、電極間に強い電界をかけたときに放出電流が増加する現象。

- **メカニズム**:
  1. 金属表面には「鏡像力による引き戻す力（ポテンシャル）」がある。
  2. そこに「外部からの加速電界（直線的に下がるポテンシャル）」が加わる。
  3. 両者を合成すると、ポテンシャル障壁の**頂点が下がり** ($\Delta\phi$)、かつ**壁の厚さが薄くなる**。
- **結果**: 実効的な仕事関数が $\phi' = \phi - \Delta\phi$ に減少するため、熱電子が飛び出しやすくなる。
- **数式**: 仕事関数の低下量 $\Delta\phi$ は $\sqrt{E}$（電界の平方根）に比例する。

※これに対し、常温で極めて強い電界をかけ、障壁をトンネル効果で突き抜けるのが「(冷) 電界放出 (Field Emission / Fowler-Nordheim tunneling)」である。区別に注意。

⑲ 電界と電位の計算手順（ポアソン・ラプラス）

記述問題の山場であり、多くの学生が躓くポイント。ここでは、物理法則の根源（ガウスの法則）から出発し、試験で問われる微分方程式の形になるまでを**一切の飛躍なく**解説する。

基礎方程式の導出（ガウスの法則からポアソン方程式へ）

この流れは記述問題で「導出過程を書け」と問われる可能性があるため、論理ステップを暗記すること。

【重要導出】ポアソン方程式とラプラス方程式の導出

Step 1: ガウスの法則（積分形）の確認

空間内の任意の閉曲面 S を考え、その内部の体積を V、内部にある総電荷を Q とする。「閉曲面から出る電気力線の総本数（電束）は、内部の電荷量に等しい」という法則である。

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_V \rho \, \mathrm{d}v$$

ここで $\boldsymbol{D}$ は電束密度、ρ は体積電荷密度である。

Step 2: ガウスの発散定理の適用

数学の定理「面積分 $\to$ 体積分への変換」を用いる。

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) \, \mathrm{d}v$$

これと Step 1 の式を比較すると、どちらも体積分 $\int_V \ldots \mathrm{d}v$ の形になる。

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) \, \mathrm{d}v = \int_V \rho \, \mathrm{d}v$$

Step 3: 微分形（マクスウェル方程式）へ

任意の体積 V で上記が成り立つためには、被積分関数同士が等しくなければならない。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad \text{（ガウスの法則の微分形）}$$

Step 4: 電界と電位の関係を代入

(1) 構成方程式: $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$（真空中の場合）

(2) 電位の定義: 静電場において電界は電位 V の勾配（マイナス）で表される。$\boldsymbol{E} = -\nabla V$ これらを Step 3 に代入する。

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \rho \quad \xrightarrow{\boldsymbol{E}=-\nabla V} \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0(-\nabla V)) = \rho$$

Step 5: ポアソン方程式の完成

ε_0 を定数として外に出し、$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$（ラプラシアン）を用いると：

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 V = \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

これが**ポアソンの方程式**である。電荷 ρ が存在する場合の電位分布を記述する。

Step 6: ラプラス方程式（電荷がない場合）
もし空間に電荷が存在しない（$\rho = 0$）ならば、右辺はゼロになる。

$$\nabla^2 V = 0$$

これを**ラプラスの方程式**と呼ぶ。

1 次元計算パターン (試験で実際に解く式)

実際の試験問題では、平板電極などを想定して「1 次元（x 方向のみ）」の変化を考えることが多い。この場合、ラプラシアン ∇^2 は単純な 2 階微分 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ に置き換わる。

パターン別の微分方程式と解法

基本式（1 次元ポアソン方程式）：

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

【パターン 1: 空間電荷なし ($\rho = 0$)】方程式: $\dfrac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$（ラプラス方程式）

- 1 回積分: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = C_1$（電界 E は一定）
- 2 回積分: $V = C_1 x + C_2$（電位は直線的に変化）
- 平行平板コンデンサの電位分布そのものである。

【パターン 2: 一様な空間電荷 ($\rho = \mathrm{const}$)】方程式: $\dfrac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

- 1 回積分: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} x + C_1$（電界は傾きをもつ直線）
- 2 回積分: $V = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} x^2 + C_1 x + C_2$（電位は放物線を描く）

【パターン 3: 空間電荷制限電流 (Child-Langmuir 則の基礎)】講義で扱われた「距離に依存する電荷分布 $\rho(x) = -kx^{-1/2}$」のケース（初速度 0 の電子が加速されるモデル）。方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2}$$

手順 1 (1 回積分: 電界):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \int \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} \mathrm{d}x = \frac{k}{\varepsilon_0}[2x^{1/2}] + C_1$$

境界条件「カソード ($x = 0$) で電界 0」とすると $C_1 = 0$。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{\varepsilon_0} x^{1/2}$$

手順 2 (2 回積分: 電位):

$$V = \int \frac{2k}{\varepsilon_0} x^{1/2} \mathrm{d}x = \frac{2k}{\varepsilon_0}[\frac{2}{3} x^{3/2}] + C_2$$

境界条件「カソード ($x = 0$) で電位 0」とすると $C_2 = 0$。

結論:

$$V = \frac{4k}{3\varepsilon_0} x^{3/2}$$

これを逆に解くと $x \propto V^{2/3}$ や、電流 J と電圧 V の関係 ($J \propto V^{3/2}$: 3/2 乗則) が導かれる。

第 II 部

過去問 詳細解法 (2024・2023)

計算の途中経過を省略せず、思考のプロセス、式変形、単位変換のタイミングを記述する。「なぜその公式を使うのか？」という着眼点も併記した。

6　2024 年度 試験問題 詳細解説

問 1. エネルギーバンドの名称

問題の意図: アルカリ金属（Na）の電子配置とバンド構造の対応理解。

- 図の下部（内殻）: K 殻・L 殻は電子で満員 $\rightarrow$ **[(a) 充満帯]**
- 帯の隙間: 電子が入れない $\rightarrow$ **[(b) 禁制帯]**
- 図の上部（最外殻）: Na は 3s 軌道に電子が 1 個（定員 2 個の半分）しか入っていない。空席があるため、電子は自由に動ける。つまり、価電子帯と伝導帯が同一化している $\rightarrow$ **[(c) 価電子帯, (d) 伝導帯]** の両性質を持つ（重複選択）。

問 2. 金属表面のエネルギー準位（穴埋め）

物理用語の正確な定義を問う問題。

- (1) 金属内で最もエネルギーが **[(d) 大きい]** 電子は、絶対零度ではフェルミ準位にある。（小さい、ではない）
- (2) E_F は **[(e) フェルミ]** エネルギー。
- (3) バンド底部 B の集合体は **[(b) 価電子帯]**。
- (4) 真空へ出た電子は束縛がないので **[(j) 自由電子]**。
- (5)(6) 足りないエネルギー差 ϕ は **[(g) 仕事関数]**。

問 3. 熱電子放出（タングステン電極の仕事関数 ϕ）

重要度: S (計算問題の本丸) **問題**: $T = 2000\,[\mathrm{K}]$, 半径 $r = 1.25 \times 10^{-4}\,[\mathrm{m}]$, 長さ $L = 0.1\,[\mathrm{m}]$, 電流 $I = 2.00\,[\mathrm{mA}]$。$\phi\,[\mathrm{eV}]$ を求めよ。

計算プロセス詳細: 計算ステップ

1. 表面積 S の算出: 円筒の側面積 $S = 2\pi rL$

$$\begin{aligned} S &= 2 \times 3.14159 \times (1.25 \times 10^{-4}) \times 0.1 \\ &= (2 \times 1.25) \times 0.1 \times \pi \times 10^{-4} \\ &= 2.5 \times 0.1 \times \pi \times 10^{-4} = 0.25\pi \times 10^{-4} \approx 7.854 \times 10^{-5}\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

2. 電流密度 J の算出: $J = I/S$。I をアンペアに直す ($2\,[\mathrm{mA}] = 2 \times 10^{-3}\,[\mathrm{A}]$)。

$$J = \frac{2.00 \times 10^{-3}}{7.854 \times 10^{-5}} = \frac{2.00}{7.854} \times 10^2 \approx 0.2546 \times 100 = 25.46\,[\mathrm{A/m^2}]$$

3. 式変形 (ϕ を求める):

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad \xrightarrow{\ln\text{ をとる}} \quad \ln J = \ln\left(AT^2\right) - \frac{e\phi}{kT}$$

$$\frac{e\phi}{kT} = \ln\left(AT^2\right) - \ln J = \ln\left(\frac{AT^2}{J}\right)$$

$$\phi = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{AT^2}{J}\right) \quad [\,[\mathrm{eV}]]$$

※ $\frac{kT}{e}$ は「熱電圧」相当の値、ln の中身は無次元数となる。

4. 数値代入と対数計算:

- 係数項: $\frac{kT}{e} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 2000}{1.60 \times 10^{-19}} = \frac{2760}{1.60} \times 10^{-4} \approx 0.1725\,[\mathrm{eV}]$
- 対数項の中身 ($X = AT^2/J$): $A = 1.20 \times 10^6$ とする。

$$X = \frac{(1.20 \times 10^6) \times (2000)^2}{25.46} = \frac{1.20 \times 4.0 \times 10^{12}}{25.46} = \frac{4.8 \times 10^{12}}{25.46} \approx 1.885 \times 10^{11}$$

- $\ln X$ の計算 (試験で関数電卓が使えない場合の近似): $\ln\left(1.885 \times 10^{11}\right) = \ln(1.885) + 11\ln(10) \approx 0.63 + 11(2.30) = 0.63 + 25.3 = 25.93$

5. 最終計算:

$$\phi = 0.1725 \times 25.93 \approx 4.473\,[\mathrm{eV}]$$

答: $4.47 \sim 4.48\,[\mathrm{eV}]$

問 4. 光電子の最大速度 V_m

問題: $\phi = 1.68\,[\mathrm{eV}]$, $\lambda = 520\,[\mathrm{nm}]$. 最大速度 V_m を求めよ。

計算プロセス詳細: エネルギー保存則の活用

1. 光子エネルギー $h\nu$ (単位: J):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{520 \times 10^{-9}} = \frac{19.89 \times 10^{-26}}{5.20 \times 10^{-7}} = 3.825 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

2. 仕事関数 $e\phi$ (単位: J): 必ず eV → J 換算を行う。

$$e\phi = 1.68 \times (1.60 \times 10^{-19}) = 2.688 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

3. 運動エネルギー K_{max}:

$$K_{max} = h\nu - e\phi = (3.825 - 2.688) \times 10^{-19} = 1.137 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$$

4. 速度 V_m への変換: $K = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2K/m}$

$$V_m = \sqrt{\frac{2 \times 1.137 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{2.274}{9.11} \times 10^{12}} = \sqrt{0.2496} \times 10^6$$

$\sqrt{0.25} = 0.5$ なので、

$$V_m \approx 0.4996 \times 10^6 \approx 5.00 \times 10^5\,[\mathrm{m/s}]$$

答: $5.00 \times 10^5\,[\mathrm{m/s}]$

問 5. 二次電子放出材料

表（省略）から δ_{max} が最大のものを選ぶ。**答**: **MgO (酸化マグネシウム)** **補足**: 一般に金属 (≈ 1) より酸化物や半導体 (> 1) の方が二次電子放出比は高い。

問 6. 光電子増倍管 (PMT)

(1) 応用: スーパーカミオカンデ、シンチレーションカウンタ、血液分析装置など。「極微弱光の検出」がキーワード。

(2) 出力電流計算: $P = 1.98 \times 10^{-5}\,[\mathrm{W}], \eta = 27.0\,[\mathrm{mA/W}], \delta = 3.51, n = 6$ 段。

計算プロセス詳細: 多段増幅計算

1. **光電面での初期電流** I_0: 感度 $\eta = 27\,[\mathrm{mA/W}] = 0.027\,[\mathrm{A/W}]$

$$I_0 = P \times \eta = (1.98 \times 10^{-5}) \times 0.027 \approx 5.346 \times 10^{-7}\,[\mathrm{A}]$$

2. **総合利得** G:

$$G = \delta^n = 3.51^6$$

計算: $3.51^2 \approx 12.32$, $12.32^3 \approx 1869$ (概算) 3. **出力電流** I:

$$I = I_0 \times G = 5.346 \times 10^{-7} \times 1869 \approx 9991 \times 10^{-7}\,[\mathrm{A}] \approx 1.00\,[\mathrm{mA}]$$

答: $1.00\,[\mathrm{mA}]$

問 7. ショットキー効果

記述キーワード：「鏡像力ポテンシャル」「外部電界ポテンシャル」「合成障壁」「$\Delta\phi$ の低下」「頂点の金属側への移動」。これらを組み合わせて、「電界により仕事関数が実効的に下がり、熱電子放出が増える現象」と説明する。

問 8. 電界計算（記述手順）

ポアソン方程式 $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ を出発点とし、積分 1 回目 $\rightarrow$ 電界の式 (積分定数 C1)、積分 2 回目 $\rightarrow$ 電位の式 (積分定数 C2)、境界条件 ($V(0) = 0$ など) を代入して C1, C2 を決定する、という手順を箇条書きにする。

7　2023 年度 試験問題 詳細解説

問 1. 鏡像力と電位障壁

(1) クーロン力: 金属表面から距離 x にある電子 $(-e)$ は、壁の反対側距離 x にある鏡像電荷 $(+e)$ と引き合う。電荷間距離は $2x$。

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}$$

(3) ポテンシャルエネルギー: 力の積分（無限遠基準）。

$$W(x) = \int_x^\infty |F|\mathrm{d}r = \int_x^\infty \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

積分計算:

$$\begin{aligned} W &= \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_x^\infty \\ &= \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(0-\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 x}\,[[\mathrm{J}]] \end{aligned}$$

eV 単位で答える場合は e で割る $\rightarrow \frac{e}{16\pi\varepsilon_0 x}\,[[\mathrm{eV}]]$

問 3. モリブデン線の半径 r

2024 年の逆問題。

1. $T = 2000, \phi = 4.27\,[\mathrm{eV}]$ から J を計算。$\frac{e\phi}{kT} \approx 24.75$ $J = 1.2\times10^6\times2000^2\times e^{-24.75} \approx 4.8\times10^{12}\times 1.78\times10^{-11} \approx 85.4\,[\mathrm{A/m^2}]$
2. $I = J\times S = J\times 2\pi rL$ より $r = \frac{I}{2\pi LJ}$。$I = 22.8\,[\mathrm{mA}]$ を代入して $r \approx 4.26\times10^{-4}\,[\mathrm{m}]$。

問 6. 3 次元電位からの電界導出

$V = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$。$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$。合成関数の微分: $\frac{\partial}{\partial x}(u^{-1/2}) = -\frac{1}{2}u^{-3/2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$。$u = x^2+y^2+z^2$ なので $u_x = 2x$。

$$E_x = -\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x\right) = x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

ベクトル表記なら $\boldsymbol{E} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$（点電荷の電界と同じ形）。

第 III 部

重要演習課題 (レポート課題・記述対策)

本番で差がつく計算問題を、検算可能なレベルまで展開する。

課題 1: フィラメント設計 (L を求める)

条件: $T = 2500\,[\mathrm{K}], r = 1.50 \times 10^{-4}\,[\mathrm{m}], I = 2.00\,[\mathrm{mA}], \phi = 4.52\,[\mathrm{eV}]$。必要な長さ L を求めよ。

計算プロセス詳細: 逆算のフロー

1. 指数項 $\exp(-e\phi/kT)$ の計算:

$$\frac{e\phi}{kT} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 4.52}{1.38 \times 10^{-23} \times 2500} = \frac{7.232}{3.45} \times 10^{4} \times 10^{-4} \approx 20.962$$

$$\exp(-20.962) \approx 7.876 \times 10^{-10}$$

2. 電流密度 J の計算: $A = 1.20 \times 10^{6}$ とする。

$$J = (1.20 \times 10^{6}) \times (2500)^2 \times (7.876 \times 10^{-10})$$

$$J = 7.50 \times 10^{12} \times 7.876 \times 10^{-10} \approx 5907\,[\mathrm{A/m^2}]$$

3. 長さ L の計算: $S = I/J$, かつ $S = 2\pi r L$ なので、

$$L = \frac{I}{2\pi r J} = \frac{2.00 \times 10^{-3}}{2\pi \times (1.50 \times 10^{-4}) \times 5907}$$

分母: $2\pi \times 1.5 \approx 9.42$ 分母全体: $9.42 \times 10^{-4} \times 5907 \approx 5.567$

$$L = \frac{0.002}{5.567} \approx 0.000359\,[\mathrm{m}]$$

答: $L \approx 3.59 \times 10^{-4}\,[\mathrm{m}]$ $(0.36\,[\mathrm{mm}])$

課題 4: 電界ベクトル導出の注意点

記述でよくある間違いを防ぐためのチェックポイント。

【注意】偏微分の符号ミスに注意

電界の定義は $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ である。マイナスを忘れがちなので注意すること。

- 正: ポテンシャルが下がる方向に力（電界）が働く。
- 計算: V を微分した後、最後に符号を反転させるのを忘れないこと。

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

もし $V = kx^2$ なら、$E_x = -2kx$ となる。

Good Luck on Your Exam!

この資料の計算を一度自分の手でトレースすれば、必ず合格点に到達します。