提出期限：2025 年 11 月 27 日 (木) 12:30

電子工学 課題 1 レポート

学籍番号：　　　　　　　　　氏名：

使用定数

本講義ノート（第 2 章 電子放出）および配布資料に基づき、以下の物理定数を用いる。

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\,[\mathrm{J \cdot K^{-1}}] \qquad e = 1.60 \times 10^{-19}\,[\mathrm{C}]$$
$$m = 9.11 \times 10^{-31}\,[\mathrm{kg}] \qquad h = 6.63 \times 10^{-34}\,[\mathrm{J \cdot s}]$$
$$c = 3.00 \times 10^{8}\,[\mathrm{m/s}]$$

課題 1

条件:

- 温度 $T = 2500\,[\mathrm{K}]$
- タングステンフィラメント半径 $r = 1.50 \times 10^{-4}\,[\mathrm{m}]$
- 全電流 $I = 2.00 \times 10^{-3}\,[\mathrm{A}]$
- 仕事関数 $\phi = 4.52\,[\mathrm{V}]$（※エネルギー値 $4.52\,[\mathrm{eV}]$ に相当）

解答:

講義資料の式 (2.7) リチャードソン・ダッシュマンの式より、電流密度 J は次式で表される。

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \tag{2.7}$$

ここでリチャードソン定数 A の理論値を導出・確認する。

$$\begin{aligned}
A &= \frac{4\pi mek^2}{h^3} \\
&= \frac{4\pi \times (9.11 \times 10^{-31}) \times (1.60 \times 10^{-19}) \times (1.38 \times 10^{-23})^2}{(6.63 \times 10^{-34})^3} \\
&= \frac{12.566 \times 9.11 \times 1.60 \times 1.9044}{291.43} \times \frac{10^{-31} \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-46}}{10^{-102}} \\
&= \frac{348.8}{291.4} \times 10^{(-96)-(-102)} \\
&\approx 1.197 \times 10^{6}\,[\mathrm{A \cdot m^{-2} \cdot K^{-2}}]
\end{aligned}$$

本計算では、講義で示された標準的な理論値 $A \approx 1.20 \times 10^{6}$ を採用する。

次に、指数項の引数（仕事関数のエネルギー換算項）を計算する。

$$
\begin{aligned}
\frac{e\phi}{kT} &= \frac{(1.60 \times 10^{-19}) \times 4.52}{(1.38 \times 10^{-23}) \times 2500} \\
&= \frac{7.232 \times 10^{-19}}{3.450 \times 10^{-20}} \\
&= \frac{7.232}{3.450} \times 10^{1} \\
&\approx 20.9623
\end{aligned}
$$

これを式 (2.7) に代入し、電流密度 J を求める。

$$
\begin{aligned}
J &= (1.20 \times 10^{6}) \times (2500)^2 \times \exp(-20.9623) \\
&= (1.20 \times 10^{6}) \times (6.25 \times 10^{6}) \times (7.874 \times 10^{-10}) \\
&= (1.20 \times 6.25 \times 7.874) \times 10^{(6+6-10)} \\
&= 59.055 \times 10^{2} \\
&\approx 5.906 \times 10^{3}\,[\mathrm{A/m^2}]
\end{aligned}
$$

電極の側面積 $S = 2\pi r L$ と全電流 $I = JS$ の関係より、必要なフィラメント長 L を逆算する。

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{I}{J \cdot 2\pi r} \\
&= \frac{2.00 \times 10^{-3}}{(5.906 \times 10^{3}) \times 2\pi \times (1.50 \times 10^{-4})} \\
&= \frac{2.00 \times 10^{-3}}{(5.906 \times 2\pi \times 1.50) \times 10^{-1}} \\
&= \frac{2.00 \times 10^{-3}}{55.66 \times 10^{-1}} \\
&= 0.03593 \times 10^{-2} \\
&= 3.593 \times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

有効数字 3 桁で整理する。

$$
\therefore L = 3.59 \times 10^{-4}\,[\mathrm{m}]
$$

課題 2

条件:

- 仕事関数 $\phi = 4.27\,[\mathrm{V}]$（エネルギー $\phi = 4.27\,[\mathrm{eV}]$）
- 入射光波長 $\lambda = 45.5\,[\mathrm{nm}] = 4.55 \times 10^{-8}\,[\mathrm{m}]$

解答:

アインシュタインの光電効果の式（講義ノート §2.3 参照）より

$$
h\nu = e\phi + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{hc}{\lambda} = e\phi + K_{\max} \tag{1}
$$

まず、入射光子のエネルギー $E = hc/\lambda$ を算出する。

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{(6.63 \times 10^{-34}) \times (3.00 \times 10^{8})}{4.55 \times 10^{-8}} \\
&= \frac{19.89}{4.55} \times \frac{10^{-26}}{10^{-8}} \\
&= 4.3714 \times 10^{-18}\,[\mathrm{J}]
\end{aligned}
$$

次に、仕事関数のエネルギー項 $W = e\phi$ をジュール単位で算出する。

$$
\begin{aligned}
W &= 1.60 \times 10^{-19} \times 4.27 \\
&= 6.832 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]
\end{aligned}
$$

光電子の最大運動エネルギー $K_{\max}$ を求める。桁数を合わせるため $E = 43.71 \times 10^{-19}\,[\mathrm{J}]$ として計算する。

$$
\begin{aligned}
K_{\max} &= E - W \\
&= (43.714 - 6.832) \times 10^{-19} \\
&= 36.882 \times 10^{-19} \\
&= 3.688 \times 10^{-18}\,[\mathrm{J}]
\end{aligned}
$$

最大速度 v を導出する。

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \times (3.688 \times 10^{-18})}{9.11 \times 10^{-31}}} \\
&= \sqrt{\frac{7.376}{9.11} \times 10^{13}} \\
&= \sqrt{0.8096 \times 10 \times 10^{12}} \\
&= \sqrt{8.096} \times 10^{6} \\
&\approx 2.845 \times 10^{6}
\end{aligned}
$$

有効数字 3 桁で整理する。

$$
\therefore v = 2.85 \times 10^{6}\,[\mathrm{m/s}]
$$

課題 3

条件:

- 二次電子放出比 $\delta = 4.0$
- ダイノード段数 $n = 10$
- コレクタ電流 $I_o = 0.125 \times 10^{-3}\,[\mathrm{A}]$

解答:

光電子増倍管の総合利得（ゲイン）G は、各段での増幅率の積となるため次式で与えられる。

$$
G = \delta^{n} = 4.0^{10}
$$

ここで 4^{10} の値を近似計算する（$2^{10} = 1024 \approx 1.024 \times 10^3$ を利用）。

$$\begin{aligned} G &= (2^2)^{10} = 2^{20} = (2^{10})^2 \\ &\approx (1.024 \times 10^3)^2 \\ &\approx 1.049 \times 10^6 \end{aligned}$$

光電面からの一次光電流 I_p は、関係式 $I_o = GI_p$ より逆算される。

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{I_o}{G} \\ &= \frac{0.125 \times 10^{-3}}{1.049 \times 10^6} \\ &= \frac{0.125}{1.049} \times 10^{-9} \\ &\approx 0.1191 \times 10^{-9} \\ &= 1.191 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

有効数字 3 桁で整理する。

$$\therefore I_p = 1.19 \times 10^{-10}\,[\mathrm{A}]$$

課題 4

条件: 電位分布 $V(x, y, z)$ が次式で与えられる（点電荷による電位分布の形状）。

$$V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\,[\mathrm{V}]$$

解答:

静電場における電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ は、電位 V の勾配（gradient）として定義される（ノート §3.1 参照）。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

まず x 成分について偏微分を行う。合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x) \\ &= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

したがって、電界の x 成分 E_x は以下の通りとなる。

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y, z 成分についても式の対称性より同様である。

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

答:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)\,[\mathrm{V/m}]$$

または成分表示にて、

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y = \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z = \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$