

1 周波数応答演習問題（第 6 章 5, 6, 7, 11）解答と解説

1.1 基礎理論

周波数応答解析では、複素変数 s を $j\omega$ に置換することで、伝達関数 $G(s)$ を周波数伝達関数 $G(j\omega)$ として表現する。ボード線図では、ゲイン ($|G(j\omega)|$) と位相 ($\angle G(j\omega)$) を対数周波数に対してプロットし、システムの特性を視覚的に解析する。

表 1 基本伝達要素の漸近ボード線図特性

| 要素 | 伝達関数 $G(s)$ | ゲイン線図の傾き | 位相特性 |
|-------|------------------|--------------------------------------|--------------------------|
| 比例 | K | 0 dB/dec | 0° |
| 積分 | $1/s$ | -20 dB/dec | -90° |
| 微分 | s | +20 dB/dec | $+90^\circ$ |
| 1 次遅れ | $\frac{1}{1+Ts}$ | $\omega < 1/T: 0, \omega > 1/T: -20$ | 0° から -90° |
| 1 次進み | $1 + Ts$ | $\omega < 1/T: 0, \omega > 1/T: +20$ | 0° から $+90^\circ$ |

2 問題 5 の解答

図 6-16 に示されるゲイン線図の解析を行う。

2.1 ステップ 1：ボード線図の観察

- 低周波域：ゲインが一定値 (23 dB)
- 高周波域：-20 dB/dec の傾きで減少
- 折点角周波数： $\omega_c = 20$ rad/s

この特徴から、1 次遅れ系 $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$ と判断される。

2.2 ステップ 2：DC ゲイン (K) の決定

低周波域の漸近線の値から：

$$20 \log_{10}(K) = 23 \text{ dB} \quad (1)$$

$$K = 10^{23/20} = 10^{1.15} \approx 14.1 \quad (2)$$

2.3 ステップ 3：時定数 (T) の決定

1 次遅れ要素の折点角周波数と時定数の関係：

$$\omega_c = \frac{1}{T} = 20 \text{ rad/s} \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ s} \quad (4)$$

2.4 ステップ 4：伝達関数の確定

$$G(s) = \frac{14.1}{1 + 0.05s} \quad (5)$$

3 問題 6 の解答

図 6-17 に示されるゲイン線図の解析を行う。

3.1 ステップ 1：ボード線図の観察

- 初期傾き： -20 dB/dec
- 第 1 折点： $\omega_{c1} = 0.1 \text{ rad/s}$ で傾きが $-20 \rightarrow -40 \text{ dB/dec}$
- 第 2 折点： $\omega_{c2} = 2 \text{ rad/s}$ で傾きが $-40 \rightarrow -60 \text{ dB/dec}$

3.2 ステップ 2：システム構造の特定

初期傾きから積分要素 $\frac{1}{s}$ の存在を確認：

- 基本構造： $G(s) = \frac{K}{s \cdot (\text{他の要素})}$
- 第 1 折点 \rightarrow 極： $T_1 = \frac{1}{\omega_{c1}} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ s}$
- 第 2 折点 \rightarrow 極： $T_2 = \frac{1}{\omega_{c2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ s}$

仮定される伝達関数： $G(s) = \frac{K}{s(1+10s)(1+0.5s)}$

3.3 ステップ 3：ゲイン定数 (K) の決定

低周波域 ($\omega < 0.1 \text{ rad/s}$) では、 $(1 + 10s) \approx 1$ 、 $(1 + 0.5s) \approx 1$ より：

$$G(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega} \quad (6)$$

ゲイン線図上の点 ($\omega = 0.1 \text{ rad/s}$, ゲイン = 4 dB) を使用 :

$$20 \log_{10} \left| \frac{K}{j \cdot 0.1} \right| = 4 \quad (7)$$

$$20 \log_{10}(K) - 20 \log_{10}(0.1) = 4 \quad (8)$$

$$20 \log_{10}(K) - 20(-1) = 4 \quad (9)$$

$$20 \log_{10}(K) + 20 = 4 \quad (10)$$

$$20 \log_{10}(K) = -16 \quad (11)$$

$$K = 10^{-16/20} = 10^{-0.8} \approx 0.158 \quad (12)$$

3.4 ステップ 4 : 伝達関数の確定

$$G(s) = \frac{0.158}{s(1 + 10s)(1 + 0.5s)} \quad (13)$$

4 問題 7 の解答

図 6-18 に示されるゲイン線図の解析を行う.

4.1 ステップ 1 : ボード線図の観察

- 低周波域 : ゲインが一定値 (-10 dB)
- 中周波域 : +20 dB/dec の傾きで増加
- 高周波域 : 再び一定値 (0 dB の傾き)
- 第 1 折点 : $\omega_z = 0.2 \text{ rad/s}$ (傾き : $0 \rightarrow +20 \text{ dB/dec}$)
- 第 2 折点 : $\omega_p = 1.0 \text{ rad/s}$ (傾き : $+20 \rightarrow 0 \text{ dB/dec}$)

4.2 ステップ 2 : システム構造の特定

傾きの変化から零点と極の存在を確認 :

- 第 1 折点 (傾き増加) \rightarrow 零点 : $T_z = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ s}$
- 第 2 折点 (傾き減少) \rightarrow 極 : $T_p = \frac{1}{\omega_p} = \frac{1}{1.0} = 1 \text{ s}$

$$\text{仮定される伝達関数 : } G(s) = K \cdot \frac{1+T_z s}{1+T_p s} = K \cdot \frac{1+5s}{1+s}$$

4.3 ステップ 3 : DC ゲイン (K) の決定

低周波域 ($\omega \rightarrow 0$) では, $(1 + 5s) \rightarrow 1$, $(1 + s) \rightarrow 1$ より :

$$G(0) = K \quad (14)$$

低周波域のゲインが -10 dB より：

$$20 \log_{10}(K) = -10 \quad (15)$$

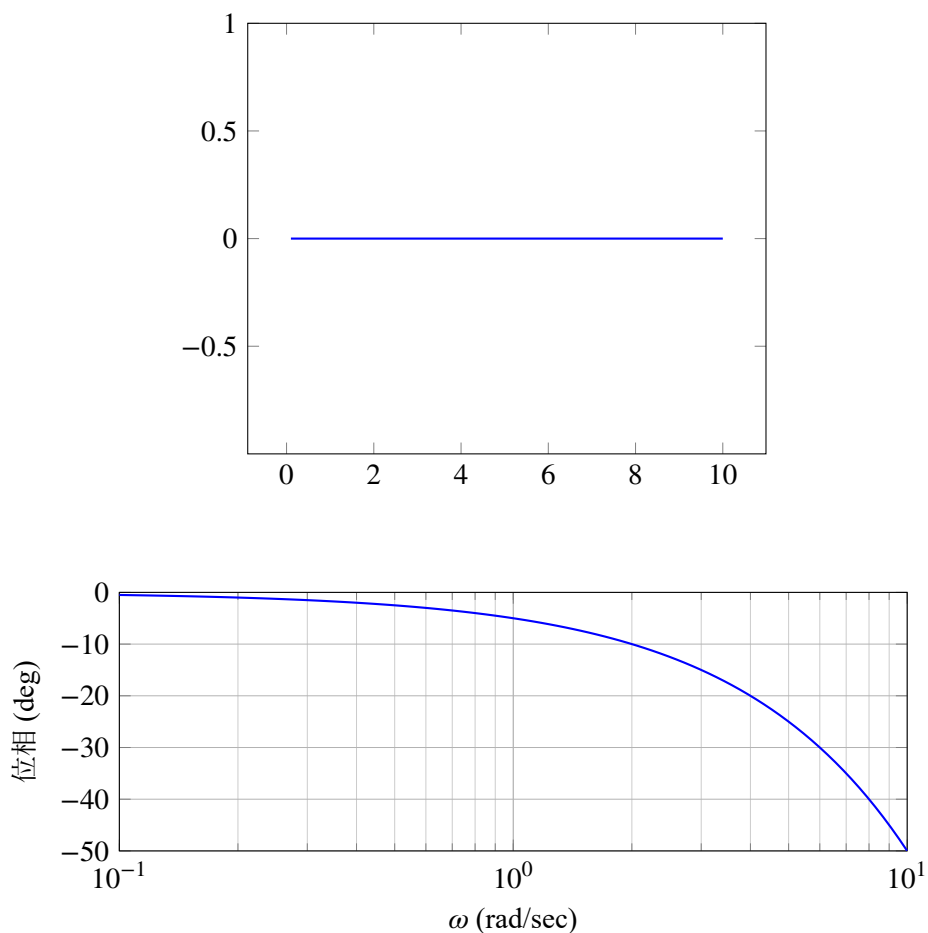
$$K = 10^{-10/20} = 10^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad (16)$$

5 問題 11 の解答

むだ時間要素 $G(s) = e^{-5s}$ のボード線図を描く。

5.1 ボード線図

図 1 むだ時間要素のボード線図



制御系設計において、むだ時間は避けられない要素（例：通信遅延、計算時間）であり、その影響を適切に考慮する必要がある。