長野高専 電気電子工学科 5 年 34 番 栁原魁人
2025 年 7 月 14 日

1 周波数応答演習問題（第 6 章 5, 6, 7, 11）解答と解説

1.1 基礎理論

周波数応答解析では，複素変数 s を $j\omega$ に置換することで，伝達関数 $G(s)$ を周波数伝達関数 $G(j\omega)$ として表現する．ボード線図では，ゲイン（$|G(j\omega)|$）と位相（$\angle G(j\omega)$）を対数周波数に対してプロットし，システムの特性を視覚的に解析する．

表 1　基本伝達要素の漸近ボード線図特性

要素	伝達関数 $G(s)$	ゲイン線図の傾き	位相特性
比例	K	0 dB/dec	0°
積分	$1/s$	−20 dB/dec	−90°
微分	s	+20 dB/dec	+90°
1 次遅れ	$\frac{1}{1+Ts}$	$\omega < 1/T$: 0, $\omega > 1/T$: −20	0° から −90°
1 次進み	$1+Ts$	$\omega < 1/T$: 0, $\omega > 1/T$: +20	0° から +90°

2 問題 5 の解答

図 6-16 に示されるゲイン線図より，1 次遅れ系として解析する．

2.1 解法手順

1. DC ゲイン（K）の計算：低周波域の漸近線から $20\log_{10}(K) = 23$ dB

$$K = 10^{23/20} = 10^{1.15} \approx 14.1 \tag{1}$$

2. 時定数（T）の計算：折点角周波数 $\omega_c = 20$ rad/s より

$$T = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ s} \tag{2}$$

2.2 伝達関数

$$G(s) = \frac{14.1}{1 + 0.05s} \tag{3}$$

3 問題 6 の解答

図 6-17 に示されるゲイン線図は初期傾きが −20 dB/dec で，積分要素を含む 2 次系である．

3.1 解法手順

1. システム構造の特定：
   - 初期傾き：-20 dB/dec → 積分要素 $1/s$ を含む
   - 第 1 折点：$\omega_{c1} = 0.1$ rad/s → 極 $T_1 = 10$ s
   - 第 2 折点：$\omega_{c2} = 2$ rad/s → 極 $T_2 = 0.5$ s
2. ゲイン定数（K）の計算：低周波域の漸近線 K/s において，$\omega = 0.1$ rad/s，ゲイン = 4 dB より

$$4 = 20\log_{10}(K) - 20\log_{10}(0.1) \tag{4}$$

$$4 = 20\log_{10}(K) + 20 \tag{5}$$

$$K = 10^{-16/20} = 0.158 \tag{6}$$

3.2 伝達関数

$$G(s) = \frac{0.158}{s(1+10s)(1+0.5s)} \tag{7}$$

4 問題 7 の解答

図 6-18 に示されるゲイン線図は，零点と極を含む位相進み要素である．

4.1 解法手順

1. DC ゲイン（K）の計算：低周波域のゲイン = -10 dB より

$$K = 10^{-10/20} = \frac{1}{\sqrt{10}} \tag{8}$$

2. 零点・極の特定：
   - 零点の折点角周波数：$\omega_z = 0.2$ rad/s → $T_z = 5$ s
   - 極の折点角周波数：$\omega_p = 1.0$ rad/s → $T_p = 1$ s

4.2 伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1+5s}{1+s} \tag{9}$$

この形式は位相進み補償器として制御系の安定性改善に使用される．

5 問題 11 の解答

むだ時間要素 $G(s) = e^{-Ls}$ のボード線図を描く．

5.1 周波数特性

$s = j\omega$ を代入すると：

$$G(j\omega) = e^{-jL\omega} \tag{10}$$

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \text{（全周波数で一定）} \tag{11}$$

$$\angle G(j\omega) = -L\omega\ \mathrm{rad} = -L\omega \cdot \frac{180}{\pi}\ \text{度} \tag{12}$$

5.2 ボード線図の特徴

- ゲイン線図：全周波数にわたって 0 dB の水平線
- 位相線図：原点を通り，角周波数に正比例して負の方向に無限に増大する直線

むだ時間要素の位相遅れは周波数とともに際限なく増大するため，制御系の安定性に深刻な影響を与える可能性がある．

6 まとめ

本演習問題を通じて，ボード線図からシステム同定を行う体系的手法を習得した：

1. 低周波域の傾きからシステムタイプを識別
2. 折点角周波数で極・零点を特定
3. ゲイン定数を算出

これらの解法は，複雑なシステムを基本要素に分解し，個々の特性を組み合わせてシステム全体の挙動を理解する制御工学の基本原則に基づいている．