

## 演習問題 解答 — 述語論理と量子子 (2)

### 問題 2

次の命題を示せ：

$$\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \implies \forall x (p(x) \vee q(x)).$$

#### 【思考プロセス (下書き)】

$X = \{a_1, a_2\}$  という有限集合なので、量子子  $\forall$  を論理積  $\wedge$  に書き換えて命題論理に落とし込む。題意は  $\text{LHS} \implies \text{RHS}$  の証明である。LHS (仮定) は  $p$  が全員真 または  $q$  が全員真。RHS (結論) は 各個体について  $p$  か  $q$  のどちらかが真。表記簡略化のため  $p_i := p(a_i)$ ,  $q_i := q(a_i)$  ( $i = 1, 2$ ) とおく。

方針：RHS を分配律で展開し、その中に LHS の項が含まれていることを示す (命題論理の恒真式  $A \implies A \vee B$  を用いる)。

#### 【解答 (清書)】

$p_i = p(a_i)$ ,  $q_i = q(a_i)$  ( $i = 1, 2$ ) とおく。定義より

$$\text{LHS} = (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2),$$

$$\text{RHS} = (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2).$$

RHS を分配律で展開すると

$$\begin{aligned} \text{RHS} &\equiv ((p_1 \vee q_1) \wedge p_2) \vee ((p_1 \vee q_1) \wedge q_2) \\ &\equiv (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \\ &\equiv (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee (q_1 \wedge p_2). \end{aligned}$$

ここで  $(p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2)$  は仮定 (LHS) に他ならない。命題論理において  $A \implies A \vee B$  は恒真であるから、

$$\text{LHS} \implies \text{RHS}$$

が成り立つ。すなわち

$$\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \implies \forall x (p(x) \vee q(x))$$

が示された。 ■