

# 電気電子工学実験報告書

テーマ名 自動制御実験（2次遅れ系の周波数応答）

報告者 5 年（ E 組） 番号 234 B 班 柳原魁人

実験場所 情報工学実験室 指導担当 鈴木 宏

共同実験者 石坂知尋，倉科純太郎，中井智大，中澤耕平

実験日 令和 7 年 11 月 28 日

提出期限 令和 7 年 12 月 12 日 ⇒ 提出日 令和 7 年 月 日

（再提出期限 令和 年 月 日 ⇒ 再提出日 令和 年 月 日）

評価項目		評価
実習評価	(1) 自ら積極的に実験に取り組めた	
	(2) 実験装置を適切に使用でき，正確に実験を行なえた	
	(3) グループ内で協力的に実験が行なえた	
報告書評価	(1) 結果のまとめかた（図表を含む）	
	(2) 結果に対する考察	
	(3) 報告事項／課題（正しい解答や適切な引用など）	
	(4) 報告書としての体裁が整っているか	

## 1 目的

2 次遅れ系となる回路（Sallen-Key 型ローパスフィルタ）を作成し、その周波数応答を測定した。測定結果から伝達関数を算出し、理論値と比較することで、周波数応答と伝達関数の関係を理解することを目的とする。

## 2 原理および理論計算

本実験では、オペアンプを用いたアクティブフィルタを使用して 2 次遅れ系の回路を作成した。

### 2.1 伝達関数の導出

実験で使用した回路図を図 1 に示す。

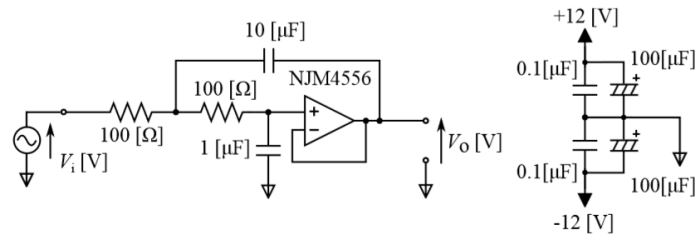


図 1 アクティブフィルタの回路構成 (Sallen-Key Topology)

この回路の伝達関数  $G(s)$  は、キルヒホッフの法則より次のように導出できる。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{1}{CR}\right)^2}{s^2 + \frac{2}{\alpha CR}s + \left(\frac{1}{CR}\right)^2} \quad (1)$$

標準的な 2 次遅れ系の伝達関数  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  と係数を比較すると、各パラメータは以下のようになる。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \quad (2)$$

### 2.2 理論値の算出

使用した素子の定数は  $\alpha C = 10 \mu\text{F}$ ,  $C/\alpha = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $R = 100 \Omega$  である。これらよりキャパシタンス  $C$  および係数  $\alpha$  を計算すると、

$$C^2 = (\alpha C) \cdot (C/\alpha) = 10 \cdot 0.5 = 5.0 \implies C = \sqrt{5} \mu\text{F} \approx 2.236 \mu\text{F} \quad (3)$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha C}{C/\alpha} = \frac{10}{0.5} = 20 \implies \alpha = \sqrt{20} \approx 4.472 \quad (4)$$

となった。したがって、理論的な減衰係数  $\zeta$  および固有角周波数  $\omega_n$  は以下の通りである。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0.2236, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \approx 4472 \text{ rad/s} \quad (5)$$

このとき、共振ピーク値  $M_p$  および共振角周波数  $\omega_p$  は次のように予測される。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2.29 \quad (\approx 7.21 \text{ dB}) \quad (6)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 4472 \cdot \sqrt{1-2(0.05)^2} \approx 4243 \text{ rad/s} \quad (\approx 675 \text{ Hz}) \quad (7)$$

### 3 実験方法および使用機器

#### 3.1 使用機器

本実験で使用した主要機器を表 1 に示す。

表 1 使用機器一覧

No.	機器名	メーカー / 型番	定格・仕様	管理番号
1	発振器	KENWOOD / AG-203D	10 Hz ~ 1 MHz	60800025
2	オシロスコープ	Tektronix / TBS1052B	50 MHz, 1 GS/s	W5022S10030760
3	直流安定化電源	KENWOOD / PD18-10AD	0 ~ 18 V, 10 A	005153, 005156

#### 3.2 実験方法

回路に入力電圧  $V_i \approx 1.5 \text{ V}_{\text{p-p}}$  の正弦波を入力し、周波数を 100 Hz から 7 kHz まで変化させた。各周波数における入出力電圧の振幅および位相差をオシロスコープで測定した。共振点付近では周波数間隔を細かく設定し、ピークの値を正確に測定できるようにした。

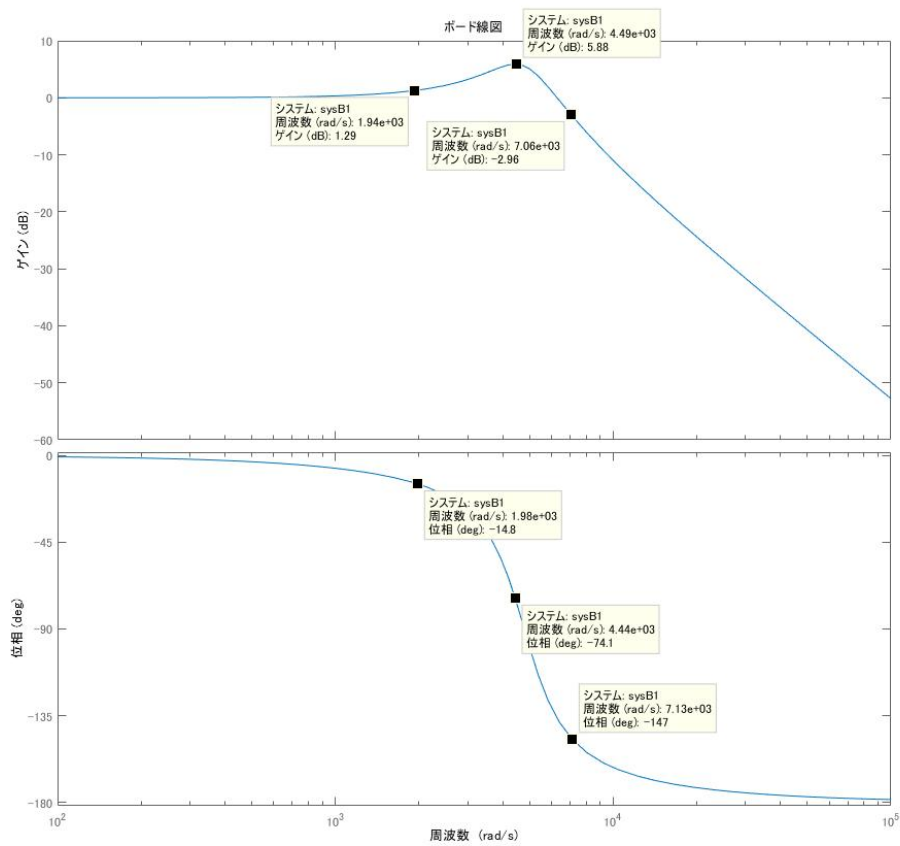
### 4 実験結果

測定結果の一部を表 2 に、周波数応答のグラフを図 2 に示す。共振周波数付近（707.3 Hz）で、ゲインが最大になるピークが確認できた。

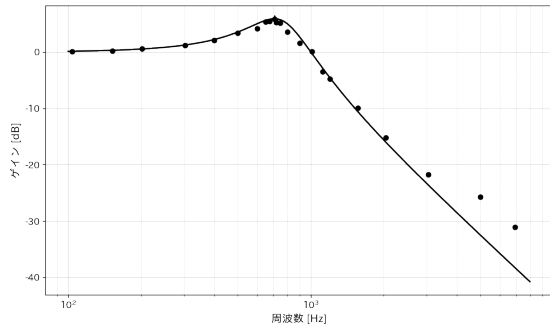
また、MATLAB によるシミュレーション結果（ボード線図）と、実測値のゲイン・位相プロットを比較のために並べて示した。図 2 の (a) は MATLAB シミュレーション、(b) は実測のゲイン、(c) は実測の位相である。

表 2 周波数応答 測定結果 (抜粋)

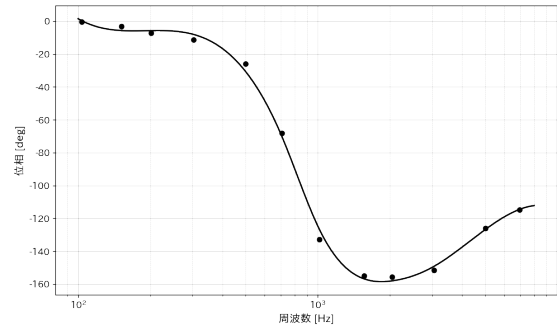
周波数 $f$ [Hz]	角周波数 $\omega$ [rad/s]	$V_i$ [V]	$V_o$ [V]	電圧比 $V_o/V_i$	ゲイン $G$ [dB]	遅れ $t$ [ms]	位相 $\theta$ [°]
103.7	651.57	1.50	1.52	1.013	0.12	0.01	-0.37
151.7	953.16	1.62	1.66	1.025	0.21	0.06	-3.28
201.7	1267.32	1.50	1.60	1.067	0.56	0.10	-7.26
303.4	1906.32	1.50	1.72	1.147	1.19	0.10	-11.36
400.0	2513.27	1.58	2.00	1.266	2.05		
499.7	3139.71	1.54	2.26	1.468	3.33	0.14	-25.90
600.0	3769.91	1.54	2.50	1.623	4.21		
650.0	4084.07	1.50	2.78	1.853	5.36		
677.0	4253.72	1.50	2.80	1.867	5.42		
707.3	4444.10	1.50	2.96	1.973	<b>5.90</b>	0.27	-68.24
720.0	4523.89	1.50	2.76	1.840	5.30		
746.0	4687.26	1.50	2.72	1.813	5.17		
800.0	5026.55	1.50	2.26	1.507	3.56		
900.0	5654.87	1.58	1.90	1.203	1.60		
1013.0	6364.87	1.50	1.52	1.013	0.12	0.36	-132.74
1120.0	7037.17	1.50	1.00	0.667	-3.52		
1200.0	7539.82	1.56	0.90	0.577	-4.78		
1559.0	9795.49	1.60	0.512	0.320	-9.90	0.28	-154.90
2040.0	12 817.70	1.50	0.26	0.173	-15.22	0.21	-155.69
3050.0	19 163.72	1.50	0.122	0.081	-21.79	0.14	-151.52
5001.0	31 422.21	1.50	0.078	0.052	-25.68	0.07	-126.03
6936.0	43 580.17	1.50	0.042	0.028	-31.06	0.05	-114.86



(a) MATLAB による理論・シミュレーション（ボード線図）



(b) 実測：ゲイン



(c) 実測：位相

図 2 比較図：(a) MATLAB シミュレーション, (b) 実測ゲイン, (c) 実測位相

## 5 考察

### 5.1 実験結果からの伝達関数の導出と検証

実験で得られたゲインのピーク値から、実際の伝達関数のパラメータ ( $\zeta, \omega_n$ ) を逆算する。

### 5.1.1 $\zeta$ と $\omega_n$ の導出

実験データのピーク値  $M_p$  とその周波数  $f_p$  は以下の値が得られた。

$$M_p(\text{実験値}) = 1.973 \quad (5.90 \text{ dB}), \quad f_p = 707.3 \text{ Hz} \quad (8)$$

理論的に共振ピーク値  $M_p$  は減衰係数  $\zeta$  を用いて次式で表される。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (9)$$

この式を  $\zeta$  について解くために両辺を 2 乗して整理する。

$$M_p^2 = \frac{1}{4\zeta^2(1-\zeta^2)} \iff 4M_p^2\zeta^4 - 4M_p^2\zeta^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

$\zeta^2$  についての 2 次方程式として解の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{4M_p^2 \pm \sqrt{(4M_p^2)^2 - 16M_p^2}}{8M_p^2} \\ &= \frac{4M_p^2 \pm 4M_p^2\sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{8M_p^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、共振が起こる条件は  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  (つまり  $\zeta^2 < 1/2$ ) である。 $\sqrt{1 - 1/M_p^2}$  は正の値なので、+ を選ぶと  $\zeta^2 > 1/2$  となり条件を満たさない。よって - を選択する。したがって、 $\zeta$  は次の式で計算できる。

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2}} \quad (12)$$

ここに実験値  $M_p = 1.973$  を代入して計算すると、以下の値になった。

$$\zeta_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{1.973^2}}}{2}} \approx \mathbf{0.262679} \quad (\text{計算のため桁数を保持}) \quad (13)$$

次に、共振角周波数  $\omega_p = 2\pi f_p$  の関係式  $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$  を変形して、固有角周波数  $\omega_n$  を求めた。

$$\omega_{n,\text{exp}} = \frac{2\pi \cdot 707.3}{\sqrt{1 - 2\zeta_{\text{exp}}^2}} \approx \frac{2\pi \cdot 707.3}{\sqrt{1 - 2(0.262679)^2}} \approx 4786.92 \text{ rad/s} \quad (14)$$

以上より、実験結果から求めた伝達関数  $G_{\text{exp}}(s)$  は以下のようになる。

$$\begin{aligned} G_{\text{exp}}(s) &= \frac{\omega_{n,\text{exp}}^2}{s^2 + 2\zeta_{\text{exp}}\omega_{n,\text{exp}}s + \omega_{n,\text{exp}}^2} \\ &= \frac{(4786.92)^2}{s^2 + 2(0.262679)(4786.92)s + (4786.92)^2} \\ &= \frac{2.2914603 \times 10^7}{s^2 + 2.514879 \times 10^3 s + 2.2914603 \times 10^7} \end{aligned} \quad (15)$$

## 5.2 理論値と実験値の比較検討

理論値と実験値を比較し、その誤差率を表 3 にまとめた。

表 3 理論値と実験値の比較

パラメータ	理論値実験値誤差率 [%]		
減衰係数 $\zeta$	0.224	0.263	+17.4
固有角周波数 $\omega_n$ [rad/s]	4472	4787	+7.0

誤差要因の考察：

1. **静電容量の公差:** セラミックコンデンサやフィルムコンデンサには通常  $\pm 5\% \sim 10\%$  程度の公差がある。 $\omega_n$  は  $C$  に反比例するため、実際の容量が理論値より小さければ  $\omega_n$  は大きくなる。本実験の  $+7\%$  という誤差は、コンデンサの個体差による影響だと考えられる。
2. **オペアンプの特性:** 理論式では理想的なオペアンプを仮定しているが、実際には周波数特性の限界がある。特に  $\omega_n$  付近の高周波域では位相遅れが生じやすく、これが減衰係数  $\zeta$  の値に影響を与えた可能性がある。

## 5.3 2 次遅れ系としての検証

図 2 のグラフを確認すると、共振周波数より高い周波数では、周波数が 10 倍になるとにゲインが約  $-40\text{ dB}$  低下している ( $-40\text{ dB/dec}$  の傾きに近い)。また位相も、低周波の  $0^\circ$  から高周波の  $-180^\circ$  へ変化しており、共振点付近でちょうど  $-90^\circ$  を通過している。これらの特徴は 2 次遅れ系の理論的な挙動と一致しているため、作成した回路は 2 次遅れ系として正しく動作していると言える。

## 6 参考文献

1. 鈴木 宏: 自動制御実験テキスト, 国立長野高専 電気電子工学科.
2. 制御工学 教科書 P127 ~ P128.