

# 論理学 演習問題 — 解答・解説

氏名

2025 年 11 月 12 日

## 目次

1	問題 1：真理表による証明	2
2	問題 2：カードと発言のパズル	3
3	問題 3：同値変形による証明	5
付録 A	補遺：記法と恒等式	7

## 1 問題 1：真理表による証明

$I$  を真 (True)、 $O$  を偽 (False) として真理表を作成します.

### (1) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (分配法則)

下表は、各組合せに対する各項の真理値を示します. 左辺と右辺の列が一致するため、同値であることが分かります.

表 1  $p \wedge (q \vee r)$  と  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  の真理表

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$
$I$	$I$	$O$	$I$	$I$	$I$	$O$	$I$
$I$	$O$	$I$	$I$	$I$	$O$	$I$	$I$
$I$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$
$O$	$I$	$I$	$I$	$O$	$O$	$O$	$O$
$O$	$I$	$O$	$I$	$O$	$O$	$O$	$O$
$O$	$O$	$I$	$I$	$O$	$O$	$O$	$O$
$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$

### (2) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (分配法則)

同様に、次の真理表で左辺と右辺が一致することが確認できます.

表 2  $p \vee (q \wedge r)$  と  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$  の真理表

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$
$I$	$I$	$O$	$O$	$I$	$I$	$I$	$I$
$I$	$O$	$I$	$O$	$I$	$I$	$I$	$I$
$I$	$O$	$O$	$O$	$I$	$I$	$I$	$I$
$O$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$
$O$	$I$	$O$	$O$	$O$	$I$	$O$	$O$
$O$	$O$	$I$	$O$	$O$	$O$	$I$	$O$
$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$	$O$

## 2 問題 2：カードと発言のパズル

命題変数  $p, q, r$  をそれぞれ以下のように定義します：

- $p$ : でてきたのはダムである
- $\bar{p}$ : でてきたのはディーである
- $q$ : 赤いカードをもっている
- $\bar{q}$ : 黒いカードをもっている
- $I$ : 恒真命題（常に真）
- $O$ : 恒偽命題（常に偽）

ルール:

- 赤のカード ( $q$ ) をもっている人は、正しいことを言う。
- 黒のカード ( $\bar{q}$ ) をもっている人は、間違ったことを言う。

発言  $S$  の内容: 「僕は黒のカードをもったダムか、または赤のカードをもったディーだ。」これを論理式で表すと、以下のようになります：

$$S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$$

パズルの条件: このパズルのルールは、「発言  $S$  が真である」ことと「発言者が赤のカードを持っている ( $q$ )」ことが同値 ( $\equiv$ ) であることを意味します。

- $q \equiv I$  (赤カード) ならば,  $S \equiv I$  (真実を言う)
- $\bar{q} \equiv O$  (黒カード) ならば,  $S \equiv O$  (嘘を言う)

この 2 つの条件を同時に満たすのが,  $S \equiv q$  という関係です。

### 指定された論理展開による証明

このパズルが成立するためには、発言者が赤カードを持っていると仮定した場合（ケース 1）と、黒カードを持っていると仮定した場合（ケース 2）の両方で、矛盾なく同じ結論（ $p$  が  $I$  か  $O$  か）が導かれなければなりません。

#### ケース 1: $q \equiv I$ と仮定する（赤カードを持っている場合）

1. 仮定:  $q \equiv I$  (赤カード) このとき,  $\bar{q} \equiv \bar{I} \equiv O$  (黒カードではない) となります。

2. ルールの適用: 赤カードを持っているので, 発言  $S$  は真実でなければなりません。よって,  $S \equiv I$  となります。

3. 発言  $S$  の内容を評価: 発言  $S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$  に, 仮定  $q \equiv I$  と  $\bar{q} \equiv O$  を代入します。

$$S \equiv (p \wedge O) \vee (\bar{p} \wedge I)$$

4. 論理式の簡略化: 性質  $P \wedge O = O$  および  $P \wedge I = P$  を用います。

$$S \equiv O \vee \bar{p}$$

性質  $P \vee O = P$  を用います。

$$S \equiv \bar{p}$$

5. 結論の導出: ステップ 2 (ルール) より  $S \equiv I$  であり, ステップ 4 (発言内容) より  $S \equiv \bar{p}$  です。したがって, この 2 つは等しくなければなりません。

$$I \equiv \bar{p}$$

これは,  $p \equiv O$  を意味します。この仮定 (赤カード) は, 発言者がディーである場合 ( $p \equiv O$ ) に矛盾なく成立します。

#### ケース 2: $q \equiv O$ と仮定する (黒カードを持っている場合)

1. 仮定:  $q \equiv O$  (赤カードではない=黒カード) このとき,  $\bar{q} \equiv \bar{O} \equiv I$  (黒カード) となります。

2. ルールの適用: 黒カードを持っているので, 発言  $S$  は嘘 (間違い) でなければなりません。よって,  $S \equiv O$  となります。

3. 発言  $S$  の内容を評価: 発言  $S \equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$  に, 仮定  $q \equiv O$  と  $\bar{q} \equiv I$  を代入します。

$$S \equiv (p \wedge I) \vee (\bar{p} \wedge O)$$

4. 論理式の簡略化: 性質  $P \wedge I = P$  および  $P \wedge O = O$  を用います。

$$S \equiv p \vee O$$

性質  $P \vee O = P$  を用います。

$$S \equiv p$$

5. 結論の導出: ステップ 2 (ルール) より  $S \equiv O$  であり, ステップ 4 (発言内容) より  $S \equiv p$  です。したがって, この 2 つは等しくなければなりません。

$$O \equiv p$$

これは,  $p \equiv O$  を意味します。この仮定 (黒カード) も, 発言者がディーである場合 ( $p \equiv O$ ) に矛盾なく成立します。

## 結論

ケース 1 (赤カード) の場合も,  $p \equiv O$  (ダムではない) が導かれました。ケース 2 (黒カード) の場合も,  $p \equiv O$  (ダムではない) が導かれました。どちらの場合も一貫して  $p \equiv O$  となり, 矛盾は生じません。 $p$  は「でてきたのはダムである」という命題だったので,  $p \equiv O$  は「でてきたのがダムであることは偽である」を意味します。したがって, でてきたのはディー ( $\bar{p} \equiv I$ ) です。

## 3 問題 3: 同値変形による証明

使用する主な法則:

- $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$
- ド・モルガンの法則:  $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ ,  $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
- 分配律:  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ,  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- その他の恒等式:  $A \vee \bar{A} \equiv I$ ,  $A \wedge \bar{A} \equiv O$ ,  $A \vee O \equiv A$ ,  $A \wedge I \equiv A$ ,  $A \vee I \equiv I$ ,  $A \wedge O \equiv O$

$$(1) (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \equiv p$$

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) &\equiv p \vee (q \wedge \bar{q}) \quad (\text{分配法則 } (A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)) \\ &\equiv p \vee O \quad (\text{矛盾律 } q \wedge \bar{q} \equiv O) \\ &\equiv p \quad (\text{同一律 } p \vee O \equiv p)\end{aligned}$$

よって示された.

$$(2) (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q) \equiv p$$

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q) &\equiv (\overline{p \rightarrow q}) \vee (p \wedge q) \quad (A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B) \\ &\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q) \\ &\equiv (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &\equiv p \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則 } (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \equiv X \wedge (Y \vee Z)) \\ &\equiv p \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\ &\equiv p \quad (\text{同一律 } p \wedge I \equiv p)\end{aligned}$$

よって示された.

$$(3) (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv I$$

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv (\overline{p \wedge q}) \vee (p \rightarrow q) \quad (A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B) \\
 &\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}, p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q) \\
 &\equiv \bar{p} \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee q \quad (\text{結合・交換}) \\
 &\equiv \bar{p} \vee (\bar{q} \vee q) \quad (\text{冪等律 } \bar{p} \vee \bar{p} \equiv \bar{p}) \\
 &\equiv \bar{p} \vee I \quad (\text{排中律 } \bar{q} \vee q \equiv I) \\
 &\equiv I \quad (\text{同一律 } \bar{p} \vee I \equiv I)
 \end{aligned}$$

よって示された.

$$(4) (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$$

$$\begin{aligned}
 (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) &\equiv (\overline{p \vee q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{含意の定義 } A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B) \\
 &\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\
 &\equiv ((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee p) \wedge ((\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee q) \quad (\text{分配法則}) \\
 &\equiv (\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee q) \quad (\text{分配法則}) \\
 &\equiv I \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge I \quad (\text{排中律 } \bar{p} \vee p \equiv I, \bar{q} \vee q \equiv I) \\
 &\equiv (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{同一律 } I \wedge A \equiv A) \\
 &\equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \quad (\text{交換律})
 \end{aligned}$$

よって示された.

本ドキュメントでは、命題の否定を表すために、単一の変数には  $\bar{a}$  のような形式を用い、複合式には  $\overline{aB}$  のような形式を用いています。これは、視覚的な明確さを保つためです。

## 付録 A 補遺：記法と恒等式

本ドキュメントで使用した略記と恒等式の一覧をまとめます。授業や試験での参照に便利です。

- $I$  : 真 (True)
- $O$  : 偽 (False)
- $\bar{A}$  : 命題  $A$  の否定
- $A \rightarrow B$  :  $A$  ならば  $B$  (含意)