論理トレーニング レポート課題

学籍番号 氏名

2026 年 1 月 30 日

解答

1. 命題論理の同値変形

p, q, r, s を命題とする。

(1) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

Proof. 右辺に対し、分配法則 $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ を適用して整理する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \big[(p \vee r) \wedge (p \vee s)\big] \wedge \big[(q \vee r) \wedge (q \vee s)\big] \\
&= \big[p \vee (r \wedge s)\big] \wedge \big[q \vee (r \wedge s)\big] && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (r \wedge s) \vee (p \wedge q) && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \\
&= \mathrm{LHS}
\end{aligned}$$

■

(2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

Proof. 左辺に対し、分配法則を順次適用して展開する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= (p \vee q) \wedge (r \vee s) \\
&= \big((p \vee q) \wedge r\big) \vee \big((p \vee q) \wedge s\big) && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s) && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) && (\because \text{Commutativity}) \\
&= \mathrm{RHS}
\end{aligned}$$

■

2. 述語論理と量化子

$X = \{a_1, a_2\}$ とする。

$$\forall x \in X, p(x) \vee \forall x \in X, q(x) \implies \forall x \in X, (p(x) \vee q(x))$$

Proof. 定義域が有限集合であるため、$\forall x$ を要素ごとの論理積に書き換える。$p(a_i) = p_i,\ q(a_i) = q_i$ とおく。

$$
\begin{aligned}
\text{Conclusion (RHS)} &= (p_1 \lor q_1) \land (p_2 \lor q_2) \\
&= (p_1 \land p_2) \lor (p_1 \land q_2) \lor (q_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) \qquad \text{(展開)}
\end{aligned}
$$

一方、仮定（LHS）は $(p_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2)$ である。論理和の導入則 $A \implies A \lor B$ より、

$$(p_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) \implies (p_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) \lor \underbrace{(p_1 \land q_2) \lor (q_1 \land p_2)}_{\text{Additional terms}}$$

したがって、LHS $\implies$ RHS が成立する。 ■

3. 命題関数の真理値判定

定義：$p(\epsilon, N) : N\epsilon > 1 \quad (\epsilon > 0, N \in \mathbb{N})$

(1) $\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)$

真理値：真

アルキメデスの公理（Archimedean Property）より、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad N > \frac{1}{\epsilon}$$

このとき $N\epsilon > 1$ が成り立つ。

(2) $\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)}$

真理値：偽

命題 (1) の否定を考える。

$$\neg(\forall \epsilon \exists N, N\epsilon > 1) \equiv \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, N\epsilon \leq 1$$

これは「ある定数 $1/\epsilon$ が全ての自然数 N の上界である」ことを意味するが、$\mathbb{N}$ は上に有界ではないため矛盾。よって元の命題は偽である。

4. $\epsilon - N$ 論法による極限証明

命題：$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Proof. $\forall \epsilon > 0$ に対し、アルキメデスの公理より

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad N > \frac{1}{\epsilon}$$

が存在する。任意の $n > N$ について、

$$n > N > \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{1}{n} < \epsilon$$

よって、

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

以上より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。 ■

5. $\epsilon - \delta$ 論法による極限証明

命題：$\displaystyle\lim_{x\to 1} x^2 = 1$

Proof. $\forall \epsilon > 0$ に対し、$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\}$ とおく。

$0 < |x-1| < \delta$ なる x について評価を行う。

1. $\delta \leq 1$ より、

$$|x-1| < 1 \implies 0 < x < 2 \implies |x+1| < 3$$

2. $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ より、

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= |x-1||x+1| \\ &< \frac{\epsilon}{3} \cdot 3 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ ■