

# 電気電子工学実験報告書

テーマ名 自動制御実験（2次遅れ系の周波数応答）

報告者 5 年 (E 組) 番号 234 B 班 柳原魁人

実験場所 情報工学実験室 指導担当 鈴木 宏

共同実験者 石坂知尋, 倉科純太郎, 中井智大, 中澤耕平

実験日 令和 7 年 11 月 28 日

提出期限 令和 7 年 12 月 12 日 ⇒ 提出日 令和 7 年    月    日

(再提出期限 令和    年    月    日 ⇒ 再提出日 令和    年    月    日)

評価項目		評価
実習評価	(1) 自ら積極的に実験に取り組めた	
	(2) 実験装置を適切に使用でき、正確に実験を行なえた	
	(3) グループ内で協力的に実験が行なえた	
報告書評価	(1) 結果のまとめかた（図表を含む）	
	(2) 結果に対する考察	
	(3) 報告事項／課題（正しい解答や適切な引用など）	
	(4) 報告書としての体裁が整っているか	

# 1 目的

2 次遅れ系となる回路（Sallen-Key 型ローパスフィルタ）を作成し、その周波数応答を測定した。測定結果から伝達関数を算出し、理論値と比較することで、周波数応答と伝達関数の関係を理解することを目的とする。

## 2 原理および理論計算

本実験では、オペアンプを用いたアクティブフィルタを使用して2次遅れ系の回路を作成した。

### 2.1 伝達関数の導出

実験で使用した回路図を図1に示す。

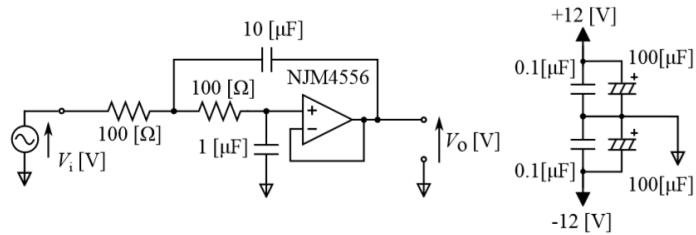


図1 アクティブフィルタの回路構成 (Sallen-Key Topology)

この回路の伝達関数  $G(s)$  は、キルヒホッフの法則より次のように導出できる。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{1}{CR}\right)^2}{s^2 + \frac{2}{\alpha CR}s + \left(\frac{1}{CR}\right)^2} \quad (1)$$

標準的な2次遅れ系の伝達関数  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  と係数を比較すると、各パラメータは以下のようになる。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \quad (2)$$

### 2.2 理論値の算出

使用した素子の定数は  $\alpha C = 10 \mu\text{F}$ ,  $C/\alpha = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $R = 100 \Omega$  である。これらよりキャパシタンス  $C$  および係数  $\alpha$  を計算すると、

$$C^2 = (\alpha C) \cdot (C/\alpha) = 10 \cdot 0.5 = 5.0 \implies C = \sqrt{5} \mu\text{F} \approx 2.236 \mu\text{F} \quad (3)$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha C}{C/\alpha} = \frac{10}{0.5} = 20 \implies \alpha = \sqrt{20} \approx 4.472 \quad (4)$$

となった。したがって、理論的な減衰係数  $\zeta$  および固有角周波数  $\omega_n$  は以下の通りである。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0.2236, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \approx 4472 \text{ rad/s} \quad (5)$$

このとき、共振ピーク値  $M_p$  および共振角周波数  $\omega_p$  は次のように予測される。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx \mathbf{2.29} \quad (\approx 7.21 \text{ dB}) \quad (6)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx 4472 \cdot \sqrt{1 - 2(0.05)} \approx 4243 \text{ rad/s} \quad (\approx 675 \text{ Hz}) \quad (7)$$

### 3 実験方法および使用機器

#### 3.1 使用機器

本実験で使用した主要機器を表 1 に示す。

表 1 使用機器一覧

No.	機器名	メーカー / 型番	定格・仕様	管理番号
1	発振器	KENWOOD / AG-203D	10 Hz ~ 1 MHz	60800025
2	オシロスコープ	Tektronix / TBS1052B	50 MHz, 1 GS/s	W5022S10030760
3	直流安定化電源	KENWOOD / PD18-10AD	0 ~ 18 V, 10 A	005153, 005156

#### 3.2 実験方法

回路に入力電圧  $V_i \approx 1.5 \text{ V}_{\text{p-p}}$  の正弦波を入力し、周波数を 100 Hz から 7 kHz まで変化させた。各周波数における入出力電圧の振幅および位相差をオシロスコープで測定した。共振点付近では周波数間隔を細かく設定し、ピークの値を正確に測定できるようにした。

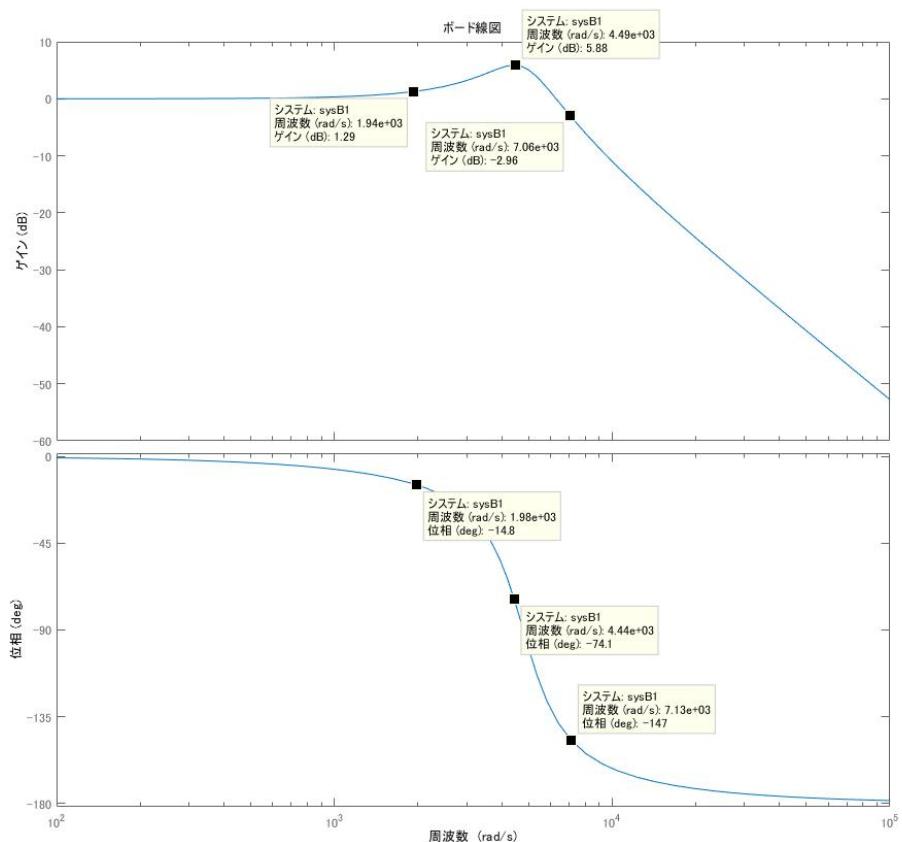
### 4 実験結果

測定結果の一部を表 2 に、周波数応答のグラフを図 2 に示す。共振周波数付近 (707.3 Hz) で、ゲインが最大になるピークが確認できた。

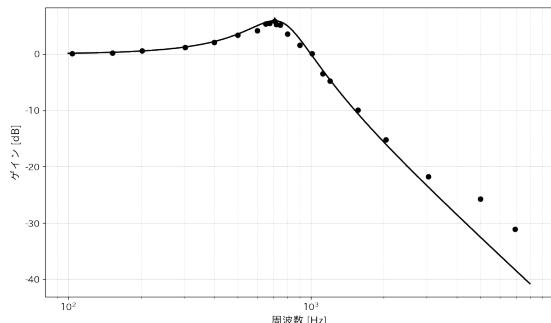
また、MATLAB によるシミュレーション結果（ボード線図）と、実測値のゲイン・位相プロットを比較のために並べて示した。図 2 の (a) は MATLAB シミュレーション、(b) は実測のゲイン、(c) は実測の位相である。

表2 周波数応答 測定結果（抜粋）

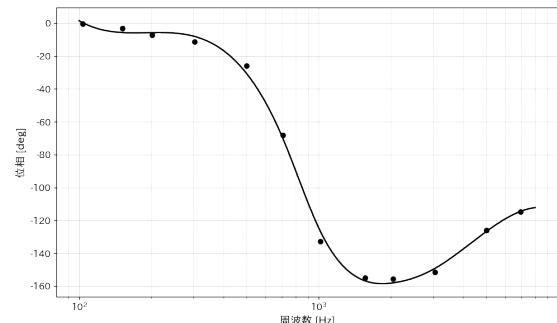
周波数 $f$ [Hz]	角周波数 $\omega$ [rad/s]	$V_i$ [V]	$V_o$ [V]	電圧比 $V_o/V_i$	ゲイン $G$ [dB]	遅れ $t$ [ms]	位相 $\theta$ [°]
103.7	651.57	1.50	1.52	1.013	0.12	0.01	-0.37
151.7	953.16	1.62	1.66	1.025	0.21	0.06	-3.28
201.7	1267.32	1.50	1.60	1.067	0.56	0.10	-7.26
303.4	1906.32	1.50	1.72	1.147	1.19	0.10	-11.36
400.0	2513.27	1.58	2.00	1.266	2.05		
499.7	3139.71	1.54	2.26	1.468	3.33	0.14	-25.90
600.0	3769.91	1.54	2.50	1.623	4.21		
650.0	4084.07	1.50	2.78	1.853	5.36		
677.0	4253.72	1.50	2.80	1.867	5.42		
707.3	4444.10	1.50	2.96	1.973	<b>5.90</b>	0.27	-68.24
720.0	4523.89	1.50	2.76	1.840	5.30		
746.0	4687.26	1.50	2.72	1.813	5.17		
800.0	5026.55	1.50	2.26	1.507	3.56		
900.0	5654.87	1.58	1.90	1.203	1.60		
1013.0	6364.87	1.50	1.52	1.013	0.12	0.36	-132.74
1120.0	7037.17	1.50	1.00	0.667	-3.52		
1200.0	7539.82	1.56	0.90	0.577	-4.78		
1559.0	9795.49	1.60	0.512	0.320	-9.90	0.28	-154.90
2040.0	12817.70	1.50	0.26	0.173	-15.22	0.21	-155.69
3050.0	19163.72	1.50	0.122	0.081	-21.79	0.14	-151.52
5001.0	31422.21	1.50	0.078	0.052	-25.68	0.07	-126.03
6936.0	43580.17	1.50	0.042	0.028	-31.06	0.05	-114.86



(a) MATLAB による理論・シミュレーション（ボード線図）



(b) 実測：ゲイン



(c) 実測：位相

図 2 比較図：(a) MATLAB シミュレーション, (b) 実測ゲイン, (c) 実測位相

## 5 考察

### 5.1 実験結果からの伝達関数の導出と検証

実験で得られたゲインのピーク値から、実際の伝達関数のパラメータ ( $\zeta, \omega_n$ ) を逆算する。

### 5.1.1 $\zeta$ と $\omega_n$ の導出

実験データのピーク値  $M_p$  とその周波数  $f_p$  は以下の値が得られた。

$$M_p(\text{実験値}) = 1.973 \quad (5.90 \text{ dB}), \quad f_p = 707.3 \text{ Hz} \quad (8)$$

理論的に共振ピーク値  $M_p$  は減衰係数  $\zeta$  を用いて次式で表される。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (9)$$

この式を  $\zeta$  について解くために両辺を 2 乗して整理する。

$$M_p^2 = \frac{1}{4\zeta^2(1-\zeta^2)} \iff 4M_p^2\zeta^4 - 4M_p^2\zeta^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

$\zeta^2$  についての 2 次方程式として解の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{4M_p^2 \pm \sqrt{(4M_p^2)^2 - 16M_p^2}}{8M_p^2} \\ &= \frac{4M_p^2 \pm 4M_p^2\sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{8M_p^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、共振が起こる条件は  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  (つまり  $\zeta^2 < 1/2$ ) である。 $\sqrt{1 - 1/M_p^2}$  は正の値なので、+ を選ぶと  $\zeta^2 > 1/2$  となり条件を満たさない。よって - を選択する。したがって、 $\zeta$  は次の式で計算できる。

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2}} \quad (12)$$

ここに実験値  $M_p = 1.973$  を代入して計算すると、以下の値になった。

$$\zeta_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{1.973^2}}}{2}} \approx \mathbf{0.262679} \quad (\text{計算のため桁数を保持}) \quad (13)$$

次に、共振角周波数  $\omega_p = 2\pi f_p$  の関係式  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  を変形して、固有角周波数  $\omega_n$  を求めた。

$$\omega_{n,\text{exp}} = \frac{2\pi \cdot 707.3}{\sqrt{1 - 2\zeta_{\text{exp}}^2}} \approx \frac{2\pi \cdot 707.3}{\sqrt{1 - 2(0.262679)^2}} \approx 4786.92 \text{ rad/s} \quad (14)$$

以上より、実験結果から求めた伝達関数  $G_{\text{exp}}(s)$  は以下のようになる。

$$\begin{aligned} G_{\text{exp}}(s) &= \frac{\omega_{n,\text{exp}}^2}{s^2 + 2\zeta_{\text{exp}}\omega_{n,\text{exp}} s + \omega_{n,\text{exp}}^2} \\ &= \frac{(4786.92)^2}{s^2 + 2(0.262679)(4786.92)s + (4786.92)^2} \\ &= \frac{2.2914603 \times 10^7}{s^2 + 2.514879 \times 10^3 s + 2.2914603 \times 10^7} \end{aligned} \quad (15)$$

## 5.2 理論値と実験値の比較検討

理論値と実験値を比較し、その誤差率を表3にまとめた。

表3 理論値と実験値の比較

パラメータ	理論値	実験値	誤差率 [%]
減衰係数 $\zeta$	0.224	0.263	+17.4
固有角周波数 $\omega_n$ [rad/s]	4472	4787	+7.0

誤差要因の考察：

1. 静電容量の公差: セラミックコンデンサやフィルムコンデンサには通常  $\pm 5\% \sim 10\%$  程度の公差がある。 $\omega_n$  は  $C$  に反比例するため、実際の容量が理論値より小さければ  $\omega_n$  は大きくなる。本実験の +7% という誤差は、コンデンサの個体差による影響だと考えられる。
2. オペアンプの特性: 理論式では理想的なオペアンプを仮定しているが、実際には周波数特性の限界がある。特に  $\omega_n$  付近の高周波域では位相遅れが生じやすく、これが減衰係数  $\zeta$  の値に影響を与えた可能性がある。

### 5.2.1 高周波領域における位相特性の上昇について（オペアンプの影響）

図2cでは、約 2 kHz を超える領域で位相が理論値の  $-180^\circ$  へ収束せず、逆に戻るよう見える。主な原因として考えられるのは、使用したオペアンプの高周波特性の限界である。高周波ではオペアンプの開ループ利得が下がり、位相余裕が減少するため、閉ループでの理想的な応答を保てなくなる。結果として位相が理論値からずれ、元の予定より早く位相の戻りが生じることがある。

## 5.3 2次遅れ系としての検証

図2のグラフを確認すると、共振周波数より高い周波数では、周波数が10倍になるごとにゲインが約  $-40\text{ dB}$  低下している ( $-40\text{ dB}/\text{dec}$  の傾きに近い)。また位相も、低周波の  $0^\circ$  から高周波の  $-180^\circ$  へ変化しており、共振点付近でちょうど  $-90^\circ$  を通過している。これらの特徴は2次遅れ系の理論的な挙動と一致しているため、作成した回路は2次遅れ系として正しく動作していると言える。

## 6 感想

感想としては、配線作業は共同実験者の倉科純太郎くんの協力がなければ完了し得なかった。その他の点では、グループ内の連携が良好であり、実験を円滑に進めることができた。

## 7 参考文献

1. 鈴木 宏: 自動制御実験テキスト, 国立長野高専 電気電子工学科.
2. 制御工学 教科書 P127 ~ P128.