トンネル効果と電位障壁

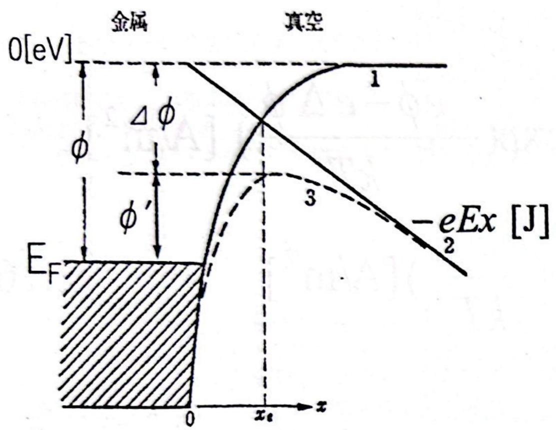
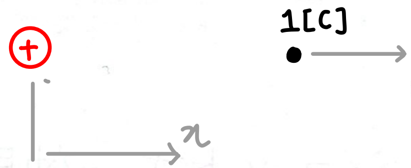


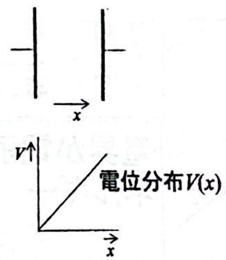
図 2.20 金属表面の正の電界による仕事関数の減少

第3章
真空中の電子の運動



§ 3.1 電位分布と電界

1次元の場合の電位分布と電界



$$E = -\frac{dV}{dx} \; [V/m]$$

$$dV = -E\,dx$$

$$V = \int dV = \int -E\,dx$$

電界は電位分布の傾きを負にしたもの

3次元の場合の電位分布と電界

電位分布は、x,y,zの関数となり $V(x,y,z)$であらわされる

電界は、x,y,z方向の各成分Ex,Ey,Ezで構成される

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

電界をベクトルで表現すると

$$\mathbb{E}=\mathbb{E}_x+\mathbb{E}_y+\mathbb{E}_z$$

$$\mathbb{E}=-\nabla V=-\mathrm{grad}\,V$$

$$=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbb{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\mathbb{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbb{k}\right)$$

例　電位分布が次のようになっている空間の電界の x,y,z方向の各成分Ex,Ey,Ezを求めよ。また電界をベクトルで表せ

$$V=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad [\mathrm{V}]$$

3.1.1 電位分布を求めるための基礎方程式

(1) 空間電荷，電束，電界

■電位分布：ある空間の位置ごとの電位の分布

■空間電荷：空間に存在する電荷。その空間の電位分布や電界に影響を及ぼす
(Space Charge)

■空間電荷密度：ρ [c/m³]

■電束：電界の様子を表すために考えられた仮想の線。
+1[C]の電荷から1本の電束が出て，−1[C]の電荷に入る

電気力線：+1[C]の電荷から $1/\varepsilon_0$ 本の電気力線が出て，−1[C]の電荷に入る

■電束密度D：単位断面積あたりの電束数

電束密度 [C/m²]　電気力線の密度 E [本/m²] → [V/m]

(2) 空間電荷による電位分布および電界への影響

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0}$$

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

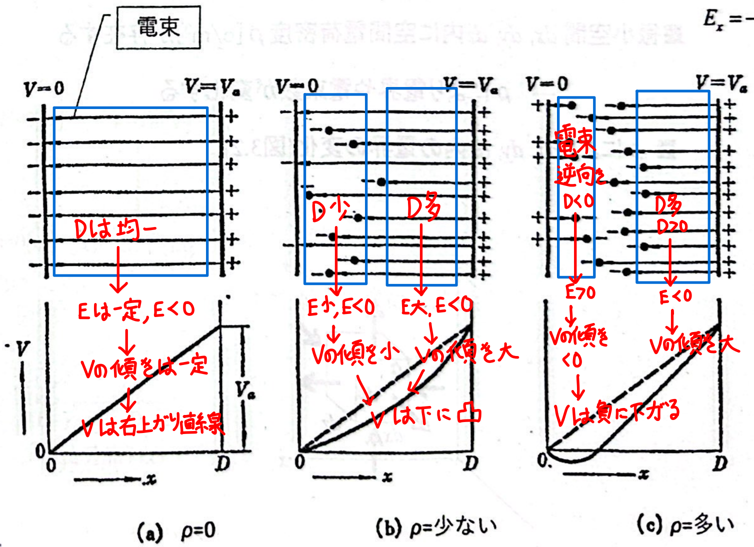


図 3.1　空間電荷（電子）による電位分布の変化
（a）空間電荷のないとき　（b）空間電荷の少ないとき　（c）空間電荷の多いとき

ポアッソンおよびラプラス方程式

（電位分布と空間電荷の関係を表す）

■ポアッソンの方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.4)$$

■ラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (3.5)$$

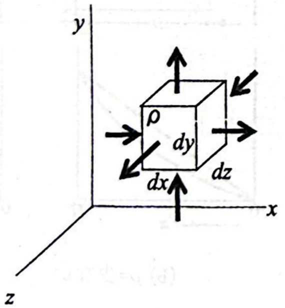
空間電荷から電位分布と電界が求められる

ポアッソンおよびラプラス方程式の導出

■微小空間 dx, dy, dz内に空間電荷密度 ρ [c/m³]が存在する

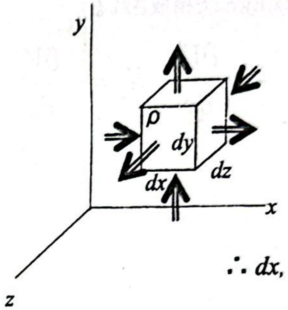
→ ρにより電界や電束数が変化する

■ ρによるdx, dy, dz内の電界の変化(図3.2)



■ dx, dy, dzから外にわき出る電束数

$D=\varepsilon_0 E \quad \rightarrow \quad$ 電束数 $= D\times$面積 $=\varepsilon_0 E\times$面積



∴ dx, dy, dzから外にわき出る電束数は

x方向に

y方向に

z方向に

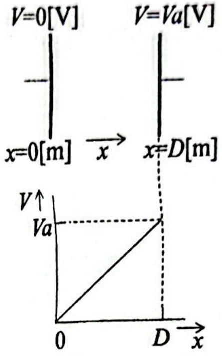
■ガウスの法則を適用して、ポアッソンとラプラスの方程式が求まる

ガウスの法則
「ある空間からの外向きの電束数」=「その空間内にある電荷量」

3.1.2 平行平面電極間の電位分布と電界

● ポアッソン、ラプラスの方程式を用いると、
電荷分布 ⟶ 電位分布 ⟶ 電界が求められている

(1) 空間電荷なし($\rho=0$)の場合



電位分布$V(x)$

$\rho=0$なので、ラプラスの方程式を用いる

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\underset{0}{\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}}+\underset{0}{\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}}=0$$

… y, z方向に電位変化がないので

よって

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \quad (3.7)$$

を解けばいい。これを積分して

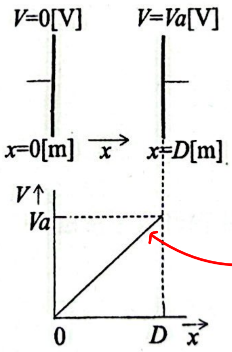
$$\frac{\partial V}{\partial x}=0+c$$

さらに積分して

$$V=cx+c' \cdots ①$$

<境界条件>

$x=0 \longrightarrow V=0$
$x=D \longrightarrow V=Va$



電位分布$V(x)$

したがって電位分布は

$$V=\frac{Va}{D}x \ [V] \quad (3.8)$$ … 電位分布は直線

となる。

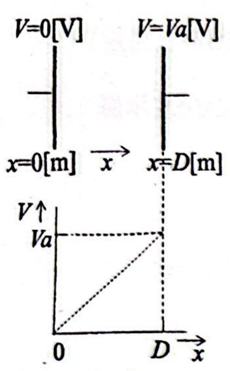
電界は

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{Va}{D}, \quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

ベクトルで表すと

$$\vec{E}=-\frac{Va}{D}\vec{i} \ [V/m]$$

(2) 空間電荷あり($\rho=-kx^{-1/2}$)の場合



電位分布$V(x)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}}_{=0}+\underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}}_{=0}=-\left(-\frac{kx^{-1/2}}{\varepsilon_0}\right)$$

・・y,z方向に電位変化がないので

よって

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{k}{\varepsilon_0}x^{-\frac{1}{2}} \qquad (3.11)$$

を解けばいい。これを積分して

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{k}{\varepsilon_0}2x^{\frac{1}{2}}+C$$

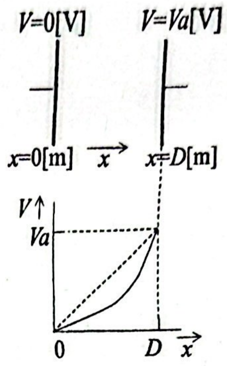
さらに積分して

$$V=\frac{k}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+Cx+C' \quad \cdots ①$$

<境界条件>

$x=0 \longrightarrow V=0$

$x=D \longrightarrow V=Da$



電位分布$V(x)$

したがって電位分布は

$$V=\boxed{\frac{Va}{D}x}-\boxed{\frac{4}{3}\frac{k}{\varepsilon_0}\left(D^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)x} \ [V] \qquad (3.12)$$

・・電位分布は下に凸

となる

空間電荷=0の時の電位分布

空間電荷による電位の低下

電界は

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\left\{\frac{Va}{D}-\frac{4}{3}\frac{k}{\varepsilon_0}\left(D^{1/2}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \ [V/m]$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=0 \quad [V/m]$$

ベクトルで表すと

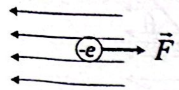
$$\vec{E}=-\left\{\frac{Va}{D}-\frac{4}{3}\frac{k}{\varepsilon_0}\left(D^{1/2}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)\right\}\vec{i} \quad [V/m]$$

テスト

§ 3.2 静電界中の電子の運動
3.2.1 電界による電子の加速

■電子の運動方程式を考える

電界 $\vec{E}$



電子に働く力の関係は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-e\vec{E}\quad[\mathrm{N}]$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{e}{m}\vec{E}\quad[\mathrm{m/s^2}]$$

x,y,z方向に分解して

$$\frac{dv_x}{dt}=-\frac{e}{m}E_x\quad[\mathrm{m/s^2}]$$

$$\frac{dv_y}{dt}=-\frac{e}{m}E_y\quad[\mathrm{m/s^2}]$$

$$\frac{dv_z}{dt}=-\frac{e}{m}E_z\quad[\mathrm{m/s^2}]$$

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{dv_y}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{dv_z}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dz}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-\frac{e}{m}E_x\quad[\mathrm{m/s^2}]\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-\frac{e}{m}E_y\quad[\mathrm{m/s^2}]\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=-\frac{e}{m}E_z\quad[\mathrm{m/s^2}]\end{aligned}\right\}\quad(3.23)$$

電子の運動方程式
加速度と電界の強さ関係

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial x}\quad[\mathrm{m/s^2}]\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial y}\quad[\mathrm{m/s^2}]\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{e}{m}\frac{\partial V}{\partial z}\quad[\mathrm{m/s^2}]\end{aligned}\right\}\quad(3.24)$$

電子の運動方程式
加速度と電界の強さ関係

電子の運動方程式を解くと、電子の加速度、速度、電位が求められる

3.2.2 平行平面電極間の電子の運動

■t=0[s]で陰極を出発した電子のt秒後の加速度，速度，位置を求める

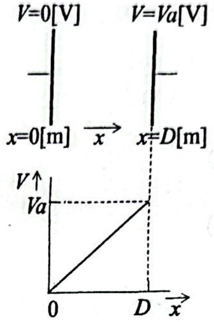


図3.5改

(3.23)式または(3.24)式を用いればよい。
ここでは(3.23)式を用いる。電界は

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{V_a}{D}\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=0\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=0\quad[\mathrm{V/m}]\quad(3.25改)$$

であるから，(3.23)式に代入して

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{e}{m}\left(-\frac{V_a}{D}\right),\ \frac{d^2y}{dt^2}=0,\ \frac{d^2z}{dt^2}=0\quad[\mathrm{m/s^2}]$$

y, z方向には電位変化ないので，加速度，速度，位置は変化ない。したがってx方向について解く。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{e}{m}\frac{V_a}{D}\quad[\mathrm{m/s^2}]\quad(3.26)$$

積分

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e}{m}\frac{V_a}{D}t\quad[\mathrm{m/s}]\quad(3.27)$$

t秒後の速度・ tに比例

積分

$$x=\frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{V_a}{D}t^2\quad[\mathrm{m}]\quad(3.28)$$

t秒後の位置…t^2に比例

自由落下の式と比較 $y=\frac{1}{2}gt^2$

■電子走行時間τ・・・電子が陰極から陽極までに達する時間

(3.28)式で x=D とおいたときのtがτである

$$\tau=\sqrt{\frac{2m}{eV_a}}D\quad[\mathrm{s}]\quad(3.29)$$