周波数応答演習問題 解答と解説

周波数応答解析は、正弦波入力に対するシステムの定常応答（ゲインと位相）を周波数の関数として評価する手法です。伝達関数 $G(s)$ の複素変数 s を $s = j\omega$ と置換することで周波数伝達関数 $G(j\omega)$ を得ます。ボード線図は、この $G(j\omega)$ のゲイン $|G(j\omega)|$ と位相 $\angle G(j\omega)$ を、それぞれ対数スケールの角周波数 ω に対してプロットしたもので、システムの周波数特性を直感的に理解するために不可欠です。

1 問題 5 の解答

図 6-16 のボード線図で表される要素の伝達関数を求める。

ステップ 1：漸近線の特徴からシステムの構造を推定する

与えられたゲイン線図の漸近線を観察します。

- 低周波域 ($\omega < 20$ rad/s): 傾きが 0 dB/dec の水平な直線です。これはシステムのゲインが周波数に依存しないことを意味し、**比例要素** K の存在を示唆します。
- 高周波域 ($\omega > 20$ rad/s): 傾きが -20 dB/dec の直線です。これはゲインが周波数の 1 乗に反比例して減少することを意味し、**1 次遅れ要素** $\frac{1}{1+Ts}$ の存在を示唆します。

これらの観察から、システムの伝達関数は比例要素と 1 次遅れ要素の積で構成される、以下の形で表せると推定できます。

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{1 + Ts} = \frac{K}{1 + Ts} \tag{1}$$

ステップ 2：低周波域のゲインから比例定数 K を求める

低周波域の漸近線は、ゲインが一定値 23 dB を示しています。これは比例要素 K のゲインに対応します。

$$\begin{aligned} 20\log_{10}(K) &= 23 \\ \log_{10}(K) &= \frac{23}{20} = 1.15 \\ K &= 10^{1.15} \approx 14.1 \end{aligned}$$

ステップ 3：折点角周波数から時定数 T を求める

ゲイン線図の傾きが 0 dB/dec から -20 dB/dec に変化する点を**折点角周波数**と呼びます。グラフから、折点角周波数は $\omega_c = 20$ rad/s です。1 次遅れ要素の折点角周波数は、時定数 T と $\omega_c = 1/T$ の関係にあります。

$$T = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ s}$$

ステップ 4：伝達関数を確定する

ステップ 2 と 3 で求めた K と T の値を式 (1) に代入し、伝達関数を確定します。

$$G(s) = \frac{14.1}{1 + 0.05s} \tag{2}$$

2　問題 6 の解答

図 6-17 のボード線図で表される要素の伝達関数を求める。

ステップ 1：漸近線の特徴からシステムの構造を推定する

ゲイン線図の漸近線の傾きの変化を観察します。

- 低周波域 ($\omega < 0.1$): 傾きが **-20 dB/dec**。これは**積分要素** $\frac{1}{s}$ の存在を示します。
- 第 1 折点 ($\omega_{c1} = 0.1$): 傾きが -20 から -40 dB/dec に変化。傾きが-20 だけ加算されており、これは **1 次遅れ要素** $\frac{1}{1+T_1 s}$ の存在を示します。
- 第 2 折点 ($\omega_{c2} = 2$): 傾きが -40 から -60 dB/dec に変化。同様に、これも **1 次遅れ要素** $\frac{1}{1+T_2 s}$ の存在を示します。

これらの要素と、全体的なゲインを調整する比例要素 K を組み合わせることで、伝達関数は以下の形と推定できます。

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} \cdot \frac{1}{1 + T_2 s} = \frac{K}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \tag{3}$$

ステップ 2：折点角周波数から時定数 T_1, T_2 を求める

各折点角周波数から、対応する 1 次遅れ要素の時定数を計算します。

$$T_1 = \frac{1}{\omega_{c1}} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ s}$$
$$T_2 = \frac{1}{\omega_{c2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ s}$$

ステップ 3：ゲイン定数 K を求める

ゲイン定数 K は、低周波域の漸近線から求めます。この領域では、$s = j\omega$ が小さいため、$1+T_1 s \approx 1$ および $1 + T_2 s \approx 1$ と近似できます。したがって、

$$G(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega}$$

このゲインを dB で表すと、

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left| \frac{K}{j\omega} \right| = 20 \log_{10} \left(\frac{K}{\omega} \right) = 20 \log_{10}(K) - 20 \log_{10}(\omega)$$

グラフから、この直線は点 $(\omega, \text{gain}) = (0.1, 4\ \text{dB})$ を通ることがわかります。この値を代入して K を求めます。

$$\begin{aligned}
4 &= 20\log_{10}(K) - 20\log_{10}(0.1) \\
4 &= 20\log_{10}(K) - 20(-1) \\
4 &= 20\log_{10}(K) + 20 \\
20\log_{10}(K) &= 4 - 20 = -16 \\
\log_{10}(K) &= -\frac{16}{20} = -0.8 \\
K &= 10^{-0.8} \approx 0.158
\end{aligned}$$

（別のアプローチ） 積分要素 $\frac{K}{s}$ のゲイン線図は、角周波数 $\omega = K$ の点で 0dB ラインを横切るという性質があります。低周波域の漸近線は、この積分要素の特性をそのまま表しています。この直線を延長して 0dB ラインとの交点を求めると、そのときの角周波数が K の値となります。低周波域の漸近線の式は $y = -20\log_{10}(\omega) - 16$ でしたので、$y = 0$ とすると、$0 = -20\log_{10}(\omega) - 16 \implies \log_{10}(\omega) = -0.8 \implies \omega = 10^{-0.8} \approx 0.158$ となり、$\omega = K$ の関係から $K \approx 0.158$ が直接求まります。

ステップ 4：伝達関数を確定する

求めた K, T_1, T_2 を式 (2) に代入します。

$$G(s) = \frac{0.158}{s(1+10s)(1+0.5s)} \tag{4}$$

3　問題 7 の解答

図 6-18 のボード線図で表される要素の伝達関数を求める。

ステップ 1：漸近線の特徴からシステムの構造を推定する

ゲイン線図の傾きの変化を観察します。

- 低周波域 $(\omega < 0.2)$: 傾きが **0 dB/dec**。これは**比例要素** K の存在を示します。
- 第 1 折点 $(\omega_z = 0.2)$: 傾きが 0 から +20 dB/dec に変化。傾きが増加しており、これは **1 次進み要素（零点）**$1 + T_z s$ の存在を示します。
- 第 2 折点 $(\omega_p = 1.0)$: 傾きが +20 から 0 dB/dec に変化。傾きが減少しており、これは **1 次遅れ要素（極）**$\frac{1}{1+T_p s}$ の存在を示します。

これらの要素を組み合わせると、伝達関数は以下の形と推定できます。

$$G(s) = K \cdot \frac{1 + T_z s}{1 + T_p s} \tag{5}$$

ステップ 2：低周波域のゲインから比例定数 K を求める

低周波域 ($\omega \to 0$) では、$1 + T_z s \to 1, 1 + T_p s \to 1$ となるため、$G(s) \approx K$ となります。グラフの低周波域の漸近線は -10 dB を示しているので、

$$
\begin{aligned}
20 \log_{10}(K) &= -10 \\
\log_{10}(K) &= -\frac{10}{20} = -0.5 \\
K &= 10^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.316
\end{aligned}
$$

ステップ 3：折点角周波数から時定数 T_z, T_p を求める

- 1 次進み要素の時定数 T_z は、傾きが増加する折点 $\omega_z = 0.2$ から求めます。

$$T_z = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ s}$$

- 1 次遅れ要素の時定数 T_p は、傾きが減少する折点 $\omega_p = 1.0$ から求めます。

$$T_p = \frac{1}{\omega_p} = \frac{1}{1.0} = 1 \text{ s}$$

ステップ 4：伝達関数を確定する

求めた K, T_z, T_p を式 (3) に代入します。

$$G(s) = \frac{0.316(1+5s)}{1+s} \quad \text{または} \quad G(s) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1+5s}{1+s} \tag{6}$$

4　問題 11 の解答

むだ時間要素 $G(s) = e^{-5s}$ のボード線図を描く。

ステップ 1：周波数伝達関数を求める

伝達関数 $G(s) = e^{-Ls}$ (ここで $L = 5$) の s を $j\omega$ で置き換えます。

$$G(j\omega) = e^{-j5\omega}$$

これはオイラーの公式により、$G(j\omega) = \cos(5\omega) - j\sin(5\omega)$ とも表せます。

ステップ 2：ゲインを計算する

ゲインは周波数伝達関数の絶対値です。

$$|G(j\omega)| = |e^{-j5\omega}| = \sqrt{\cos^2(5\omega) + (-\sin(5\omega))^2} = \sqrt{1} = 1$$

ゲインは周波数 ω によらず常に 1 です。これをデシベル [dB] に変換すると、

$$\text{Gain [dB]} = 20\log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

したがって、ゲイン線図は周波数全域で 0 dB の水平な直線となります。

ステップ 3：位相を計算する

位相は周波数伝達関数の偏角です。

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j5\omega} = -5\omega \text{ [rad]}$$

位相は角周波数 ω に比例して、直線的に遅れていきます（マイナスなので「遅れ」）。ボード線図の横軸は対数スケールであるため、位相線は直線ではなく曲線的に描画されます。ω が大きくなるにつれて、位相遅れが無限に増大していくことが特徴です。

ステップ 4：ボード線図の描画

以上の計算結果を基にボード線図を描画します。

- **ゲイン線図**: 全ての周波数で 0 dB の水平線。
- **位相線図**: 原点を通り、角周波数 ω に比例して減少する曲線（片対数グラフのため）。例えば、$\omega = 1$ rad/s のとき、位相は -5 rad となります。

図 1　むだ時間要素 $G(s) = e^{-5s}$ のボード線図