

画像処理・画像処理工学 レポート課題 1

詳細解説付き解答

2025 年 11 月 21 日

1 問題 1：複合レンズ光学系における結像

1.1 解析の指針

複合レンズ系における像の位置と大きさは、光の進行順序に従い、個々のレンズによる結像を順次計算することで求められる。具体的には以下の手順で解析を行う。

1. レンズ A 単体による結像位置（中間像）と倍率を算出する。
2. 中間像をレンズ B に対する物体（虚物体または実物体）として扱い、レンズ B からの物体距離を再定義する。
3. レンズ B による最終的な結像位置と倍率を算出する。

1.2 計算・導出過程

1.2.1 1. 凸レンズ A による中間像の導出

レンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ を用いて解析を行う。ここで、 a は物体距離、 b は像距離、 f は焦点距離とする。

まず、レンズ A に関する諸量を設定する。

- 物体距離 $a_A = 16 \text{ cm}$
- 焦点距離 $f_A = 12 \text{ cm}$

像の位置 b_A を求めるため、公式を変形し値を代入する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_A} &= \frac{1}{f_A} - \frac{1}{a_A} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{4}{48} - \frac{3}{48} \\ &= \frac{1}{48}\end{aligned}$$

したがって、

$$b_A = 48 \text{ cm}$$

$b_A > 0$ であるため、レンズ A の後方 48 cm の位置に実像が形成される。

次に、レンズ A による倍率 m_A を計算する。

$$m_A = -\frac{b_A}{a_A} = -\frac{48}{16} = -3$$

倍率が負であるため、倒立像となる。中間像の大きさ $|h'_A|$ は、元の物体の大きさ $h = 2.0 \text{ cm}$ を用いて以下のように求められる。

$$|h'_A| = h \times |m_A| = 2.0 \times 3 = 6.0 \text{ cm}$$

1.2.2 2. レンズ B に対する物体距離の再定義

レンズ A とレンズ B の間隔は $L = 63 \text{ cm}$ である。レンズ A による中間像はレンズ A の後方 48 cm に位置するため、レンズ B から見た物体距離 a_B は次のように計算される。

$$a_B = L - b_A = 63 - 48 = 15 \text{ cm}$$

$a_B > 0$ であるため、中間像はレンズ B の前方に位置し、実物体として機能する。

1.2.3 3. 凸レンズ B による最終像の導出

レンズ B に関して、 $a_B = 15 \text{ cm}$ 、 $f_B = 10 \text{ cm}$ を用いて、最終像の位置 b_B を求める。

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_B} &= \frac{1}{f_B} - \frac{1}{a_B} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{15} \\ &= \frac{3}{30} - \frac{2}{30} \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

したがって、

$$b_B = 30 \text{ cm}$$

$b_B > 0$ より、レンズ B の後方に実像が結ばれる。

最終的な倍率 m_B および像の大きさ $|h'_B|$ を算出する。

$$m_B = -\frac{b_B}{a_B} = -\frac{30}{15} = -2$$

最終的な像の大きさは、中間像の大きさにこの倍率を乗じることで得られる。

$$|h'_B| = |h'_A| \times |m_B| = 6.0 \times 2 = 12.0 \text{ cm}$$

解答

- 像の位置: 凸レンズ B の後方 30 cm
- 像の大きさ: 12.0 cm

2 問題 2：ディスプレイデバイスの画素密度算出

2.1 理論的背景

画素密度 (ppi: pixels per inch) は、単位インチあたりの画素数を示す指標である。ディスプレイのサイズは対角線の長さ（インチ）で示されるため、画素密度を求めるには対角線上の総画素数を算出し、それを画面サイズで除算する必要がある。

計算式は以下の通り定義される。

$$\text{ppi} = \frac{\sqrt{W^2 + H^2}}{D}$$

ここで、 W は水平画素数、 H は垂直画素数、 D は対角線インチ数である。

2.2 各デバイスにおける計算

2.2.1 A. Google Pixel 10

- 画素数: 1080×2424
- 画面サイズ: 6.3 インチ

まず、対角線上の画素数（ピクセル距離）を計算する。

$$\begin{aligned}\text{対角画素数} &= \sqrt{1080^2 + 2424^2} \\ &= \sqrt{1,166,400 + 5,875,776} \\ &= \sqrt{7,042,176} \\ &\approx 2653.71\end{aligned}$$

これを画面サイズで除算し、画素密度を求める。

$$\text{ppi} = \frac{2653.71}{6.3} \approx 421.22 \dots$$

2.2.2 B. iPad (A16)

- 画素数: 2360×1640
- 画面サイズ: 10.9 インチ

同様に対角画素数を算出する。

$$\begin{aligned}\text{対角画素数} &= \sqrt{2360^2 + 1640^2} \\ &= \sqrt{5,569,600 + 2,689,600} \\ &= \sqrt{8,259,200} \\ &\approx 2873.88\end{aligned}$$

画素密度を計算する。

$$\text{ppi} = \frac{2873.88}{10.9} \approx 263.65 \dots$$

2.2.3 C. EIZO EV2740S

- 画素数: 3840×2160 (4K UHD)
- 画面サイズ: 27.0 インチ

対角画素数を算出する。

$$\begin{aligned}\text{対角画素数} &= \sqrt{3840^2 + 2160^2} \\ &= \sqrt{14,745,600 + 4,665,600} \\ &= \sqrt{19,411,200} \\ &\approx 4405.81\end{aligned}$$

画素密度を計算する。

$$\text{ppi} = \frac{4405.81}{27.0} \approx 163.17 \dots$$

解答

計算結果を四捨五入し、整数値で記載する。

デバイス名	計算値	解答
Google Pixel 10	421.22...	421 ppi
iPad (A16)	263.65...	264 ppi
EIZO EV2740S	163.17...	163 ppi

3 問題 3：8 近傍鮮鋭化フィルタの導出

3.1 鮮鋭化の原理

画像の鮮鋭化は、元画像に対してエッジ成分（高周波成分）を加算することで実現される。数学的には以下の式で表される。

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

ここで $\nabla^2 f(x, y)$ はラプラシアン（2 次微分）であり、画像の平坦部では 0 に近い値を、エッジ部では大きな値を持つ。このラプラシアンを元の画像から引く（係数が負になるため、実際には中心画素を強調することと同義）ことで、エッジのコントラストが強調される。

3.2 ラプラシアンフィルタの係数導出

デジタル画像は離散的なグリッドデータであるため、連続関数の微分は「差分」によって近似される。

3.2.1 1. 1 次元における 2 階差分の定義

ある関数 $f(x)$ の 1 階微分 $f'(x)$ は、隣接する値との差分で近似できる。

$$f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$$

2 階微分 $f''(x)$ は、1 階微分の変化率、すなわち「差分の差分」として定義される。

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx f'(x) - f'(x-1) \\ &= \{f(x+1) - f(x)\} - \{f(x) - f(x-1)\} \\ &= f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) \end{aligned}$$

この式は、注目画素 $f(x)$ とその両隣の画素 $f(x+1), f(x-1)$ を用いて 2 次変化（凹凸）を検出するフィルタとなる。係数は $(1, -2, 1)$ である。

3.2.2 2. 2 次元（8 近傍）への拡張

画像上の画素 $f(i, j)$ における全方向的な 2 次微分（ラプラシアン）を求めるため、水平・垂直・対角の計 4 方向について、上記の 2 階差分を適用する。

各方向における 2 階差分は以下の通り導出される。

水平方向 (x) 水平方向に並ぶ 3 画素 $(i-1, j), (i, j), (i+1, j)$ に着目する。上記の 1 次元の式を x 軸に適用すると、

$$D_x = f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)$$

垂直方向 (y) 垂直方向に並ぶ 3 画素 $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ に着目する。同様に y 軸に適用すると、

$$D_y = f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)$$

対角方向 1 (左上-右下) 座標 $(i-1, j-1), (i, j), (i+1, j+1)$ のラインを軸とみなす。斜め方向の隣接関係において同様の 2 階差分をとると、

$$D_{d1} = f(i+1, j+1) - 2f(i, j) + f(i-1, j-1)$$

対角方向 2 (右上-左下) 座標 $(i+1, j-1), (i, j), (i-1, j+1)$ のラインを軸とみなす。

$$D_{d2} = f(i-1, j+1) - 2f(i, j) + f(i+1, j-1)$$

3.2.3 3. 8 近傍ラプラシアンの総和計算

等方的なエッジ検出を行うため、上記 4 方向の成分を全て足し合わせる。

$$\nabla^2 f(i, j) \approx D_x + D_y + D_{d1} + D_{d2}$$

この和において、各画素の係数がどのように加算されるかを確認する。

- **中心画素 $f(i, j)$:** 4 つの式すべてにおいて、項 $-2f(i, j)$ が含まれている。

$$\text{係数の総和} = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$$

- **周囲 8 近傍の画素:** それぞれの画素は、いずれか 1 つの式に 1 度だけ登場し、その係数はすべて +1 である。

これにより、8 近傍ラプラシアンフィルタのカーネル W_L は以下の行列となる。

$$W_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.4 4. 鮮鋭化フィルタの完成

鮮鋭化画像は「元画像 - ラプラシアン」で計算される。元画像を恒等的に出力するフィルタ（インパルス）は中心のみ 1 で他は 0 である。ここからラプラシアンフィルタを減算する。

$$W_S = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{元画像}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ラプラシアン}}$$

各要素の計算：

- **中心:** $1 - (-8) = 9$
- **周辺:** $0 - 1 = -1$

以上より、求める 8 近傍鮮鋭化フィルタのオペレータが得られる。

解答

$$W_S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4 問題 4 : Sobel フィルタによるエッジ解析

4.1 解析手法

Sobel フィルタを用いて、指定された画素におけるエッジ強度 G とエッジ方向 θ を算出する。各画素に対し、水平方向微分フィルタ S_x と垂直方向微分フィルタ S_y を畳み込み、その結果 G_x, G_y から以下を求める。

- エッジ強度: $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$
- エッジ方向: $\theta = \arctan(G_y/G_x)$

使用するオペレータ :

$$S_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 注目画素 A における計算

対象領域の画素値 :

$$\text{Image}_A = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 100 \\ 50 & 50 & 100 \\ 100 & 100 & 150 \end{pmatrix}$$

4.2.1 微分値の算出

水平方向成分 G_x : S_x と画素値を要素ごとに乗算して総和をとる。

$$\begin{aligned} G_x &= (-1 \cdot 50) + (0 \cdot 50) + (1 \cdot 100) \\ &\quad + (-2 \cdot 50) + (0 \cdot 50) + (2 \cdot 100) \\ &\quad + (-1 \cdot 100) + (0 \cdot 100) + (1 \cdot 150) \\ &= -50 + 100 - 100 + 200 - 100 + 150 \\ &= 200 \end{aligned}$$

垂直方向成分 G_y : 同様に S_y を用いて計算する。

$$\begin{aligned} G_y &= (-1 \cdot 50) + (-2 \cdot 50) + (-1 \cdot 100) \\ &\quad + (0 \cdot 50) + (0 \cdot 50) + (0 \cdot 100) \\ &\quad + (1 \cdot 100) + (2 \cdot 100) + (1 \cdot 150) \\ &= -50 - 100 - 100 + 0 + 100 + 200 + 150 \\ &= 200 \end{aligned}$$

4.2.2 強度と方向の導出

- 強度: $G = \sqrt{200^2 + 200^2} = 200\sqrt{2} \approx 282.8$
- 方向: $\tan \theta = \frac{200}{200} = 1$ 。 $G_x > 0, G_y > 0$ より第 1 象限であるため、 $\theta = 45^\circ$ 。

4.3 注目画素 B における計算

対象領域の画素値：

$$\text{Image}_B = \begin{pmatrix} 150 & 250 & 250 \\ 150 & 150 & 250 \\ 100 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

4.3.1 微分値の算出

水平方向成分 G_x ：

$$\begin{aligned} G_x &= (-1 \cdot 150) + (1 \cdot 250) \\ &\quad + (-2 \cdot 150) + (2 \cdot 250) \\ &\quad + (-1 \cdot 100) + (1 \cdot 200) \\ &= -150 + 250 - 300 + 500 - 100 + 200 \\ &= 400 \end{aligned}$$

垂直方向成分 G_y ：

$$\begin{aligned} G_y &= (-1 \cdot 150) + (-2 \cdot 250) + (-1 \cdot 250) \\ &\quad + (1 \cdot 100) + (2 \cdot 100) + (1 \cdot 200) \\ &= -150 - 500 - 250 + 100 + 200 + 200 \\ &= -900 + 500 \\ &= -400 \end{aligned}$$

4.3.2 強度と方向の導出

- 強度: $G = \sqrt{400^2 + (-400)^2} = 400\sqrt{2} \approx 565.7$
- 方向: $\tan \theta = \frac{-400}{400} = -1$ 。 $G_x > 0, G_y < 0$ より第 4 象限であるため、 $\theta = -45^\circ$ 。

考察と解答まとめ

表 1 Sobel フィルタ解析結果

項目	注目画素 A	注目画素 B
G_x	200	400
G_y	200	-400
エッジ強度 G	283	566
エッジ方向 θ	45°	-45°