

電子工学 (5E) 試験対策 統合完全版・改

詳細解説・計算過程完全記述・用語完全定義版

概要

本資料は、電子工学の試験対策における**「これ一冊で完結する」**バイブルを目指したものである。数式の変形過程はもちろん、問題文に登場する「モリブデン線」「鏡像力」といった専門用語についても、初学者がつまづかないよう詳細な定義と物理的イメージを付記した。教科書やノートを開かずとも、この資料だけで理解と演習が完了するように設計されている。

目次

第Ⅰ部	試験範囲ポイント完全解説 (①～⑱)	2
1	エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①～⑦)	2
2	熱電子放出 (⑧～⑩)	4
3	光電子放出 (⑪～⑬)	6
4	二次電子放出 (⑭～⑰)	7
5	電界放出と電界計算 (⑱～⑲)	8
第Ⅱ部	過去問 詳細解法 (2024・2023)	11
6	2024 年度 試験問題 詳細解説	11
7	2023 年度 試験問題 詳細解説	14
第Ⅲ部	重要演習課題 (レポート課題・記述対策)	15

第 I 部

試験範囲ポイント完全解説 (①～⑱)

試験範囲の 19 ポイントについて、単なる用語説明に留まらず、「なぜそうなるのか」「試験でどう問われるか」まで踏み込んで解説する。

1 エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①～⑦)

① 価電子帯、禁制帯、伝導帯とはなにか

固体中の電子が取りうるエネルギー準位の構造（バンド構造）に関する定義である。

バンド構造の 3 要素

価電子帯 (Valence Band) 原子核に束縛されている電子（価電子）が充満しているエネルギー帯。

- 直感的イメージ: 満員電車。電子がぎゅうぎゅう詰めで身動きが取れない状態。
- 特徴: ここにある電子は電気伝導（電流）に寄与しない。
- 温度の影響: 絶対零度 (0 [K]) では完全に満たされているが、温度が上がると一部の電子がエネルギーを得て上の階（伝導帯）へ移動し、空席（正孔）ができる。

禁制帯 (Forbidden Band / Band Gap) 量子力学的な制約により、電子が存在することのできないエネルギー領域。

- 直感的イメージ: 建物の 1 階（価電子帯）と 2 階（伝導帯）の間にある「吹き抜け空間」。ここに人は立てない。
- バンドギャップ E_g : この幅が広いと絶縁体、適度だと半導体、重なっていると金属（導体）になる。

伝導帯 (Conduction Band) 原子の束縛を離れ、結晶内を自由に動き回れる電子（自由電子）が存在するエネルギー帯。

- 直感的イメージ: ガラガラの 2 階フロア。電子は自由に走り回れる。
- 電気伝導: ここに電子が存在して初めて電流が流れる。

※**金属（導体）の特異性**: 金属では「価電子帯」と「伝導帯」が重なっているか、価電子帯自体が完全に埋まっておらず空き席がある状態である。そのため、わずかなエネルギー（室温の熱など）で電子が自由電子となり、高い導電性を示す。

② 外部エネルギーの入射により電子が放出されるしくみ

通常、電子は物質内部の「ポテンシャルの井戸（エネルギーの低い安定した場所）」に閉じ込められている。これを脱出させる（電子放出）ためのプロセスの本質は以下の通りである。

1. **定常状態**: 電子は通常、エネルギーの低い状態（価電子帯やフェルミ準位付近）にある。
2. **外部励起**: 外部からエネルギー ΔE を与える。エネルギー源の種類により名称が変わる。
 - 熱エネルギー (kT) → **熱電子放出** (ヒーターで加熱)
 - 光エネルギー ($h\nu$) → **光電子放出** (光を当てる)
 - 強電界 (E) → **電界放出** (強い電圧で引っ張る)

- 電子衝突 ($1/2mv^2$) → 二次電子放出 (別の電子をぶつける)

3. 脱出条件: 電子の持つ全エネルギーが、表面の障壁高さ (真空準位 E_{vac}) を超えたとき、電子は表面を突き抜けて真空中に飛び出す。

③ 金属内電子が金属外に飛び出さない理由

「なぜ常温の金属を置いておくだけでは電子が飛び出さないのか？」という問いへの物理的解答。

- 電位障壁 (Potential Barrier): 金属表面には、電子を閉じ込めるエネルギーの壁が存在する。
- 鏡像力 (Image Force): 電子が金属表面からわずかに外に出ようとする、金属表面に正電荷 (ホール) が誘導される。クーロン力により、正電荷が電子 (負電荷) を引き戻そうとする力が働く。これが壁の正体である。
- エネルギー不足: 室温 (300 [K]) の熱エネルギー $kT \approx 0.026$ [eV] は、一般的な金属の仕事関数 $\phi \approx 4 \sim 5$ [eV] に比べてあまりに小さいため、確率的に飛び出す電子はほぼ皆無である。

④ 電子放出の共通的基础 (各用語の厳密な定義と関係式)

記述問題や計算問題の基礎となる定義式。図をイメージしながら理解すること。

重要公式と定義

$$\phi = W - E_F \quad \Longleftrightarrow \quad W = E_F + \phi \quad (1)$$

【用語解説】用語解説

真空準位 (Vacuum Level, E_{vac}) 真空中に静止した「自由な電子」が持つエネルギー。これをエネルギー基準 ($E = 0$) とする場合と、ここを脱出ゴールとする場合がある。

全障壁 W (Potential Barrier Height) 金属の底 (電子が存在する最低エネルギー) から、真空準位までの高さ。電子が脱出するために超えなければならない「壁の全高」。

フェルミ準位 E_F (Fermi Level) **電子のエネルギーの基準点**。絶対零度において、電子が詰まっている「水面」の高さのこと。これより下は満員、上は空っぽ。

仕事関数 ϕ (Work Function) 「フェルミ準位にある電子 (表面付近のエリート電子)」を「真空準位 (外の世界)」まで引き上げるために最低限必要な追加エネルギー。

$$\phi [\text{eV}] \quad \text{または} \quad e\phi [\text{J}]$$

※材料固有の値であり、表面の状態 (汚れや酸化) によって変化する。

【注意】単位の混同に注意

仕事関数 ϕ は通常 [eV] (電子ボルト) で与えられる。しかし、計算式 (例えば $h\nu = e\phi + K$) ではジュール [J] に統一する必要がある。

$$1 [\text{eV}] = 1.60 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

必ず計算前に換算すること。

⑤ 金属内電子のエネルギー（絶対零度における状態）

- **パウリの排他律:** 「1つの量子状態（席）には1つの電子しか入れない」という量子力学のルール。
- **積み上げ:** 絶対零度 ($T = 0$ [K]) では、電子はエネルギーの低い順位から順に、隙間なくびっしりと詰まっていく。
- **フェルミ面:** 詰め込まれた電子の、一番上のエネルギー面がフェルミ準位 E_F と一致する。それより上には電子は1つも存在しない。

⑥ フェルミ準位とフェルミ分布関数の意味

電子が「あるエネルギー準位 E 」に存在する確率を与える統計力学の基本関数。

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \quad (2)$$

- **意味:** エネルギー E の準位が電子によって占有されている確率 ($0 \leq F(E) \leq 1$)。
- $E = E_F$ のとき: 指数部は $\exp(0) = 1$ となるため、温度 T に関わらず $F(E_F) = 1/2$ となる。これがフェルミ準位の定義である。
- $E \gg E_F$ のとき (ボルツマン近似): 分母の 1 が無視でき、 $F(E) \approx \exp\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right)$ となる。これは古典的なボルツマン分布と一致し、熱電子放出の式の導出根拠となる。

⑦ エネルギー準位図のグラフ $F(E), n(E)$

試験でグラフを描く、あるいは選ぶ問題が出る可能性がある。

分布関数 $F(E)$ の形状 • $T = 0$ [K]: E_F で垂直に落ちる階段関数（ステップ関数）。 E_F 以下は確率 1、以上は確率 0。

- $T > 0$ [K]: E_F 付近で角が取れ、なだらかに変化するシグモイド曲線。高温ほど傾きが緩やかになり、高エネルギー側へ裾野が広がる（これが熱電子放出の原因）。

状態密度 $D(E)$ と電子密度 $n(E)$ • **状態密度 $D(E)$:** 電子が入れる「席」の数。自由電子モデルでは $D(E) \propto \sqrt{E}$ （放物線）。

- **電子密度 $n(E)$:** 実際にそこにいる電子の数。

$$n(E) = D(E) \times F(E) \propto \sqrt{E} \cdot F(E)$$

グラフ形状は、 E_F までは放物線で増え、 E_F 付近で急激にゼロになる「山型」となる。

2 熱電子放出 (⑧～⑩)

⑧ 熱電子の飽和電流密度 (ダッシュマン・リチャードソンの式)

電子工学において最も重要な式の一つ。計算問題の 8 割はこれに関連する。

公式: リチャードソン・ダッシュマンの式

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad [\text{A/m}^2] \quad (3)$$

- J : 電流密度 (単位面積あたりの電流 $[\text{A/m}^2]$)
- A : リチャードソン定数 (理論値 $\approx 1.20 \times 10^6 [\text{A/m}^2\text{K}^2]$)
- T : 絶対温度 $[\text{K}]$ ($= [^\circ\text{C}] + 273.15$)
- $e\phi$: 仕事関数 (エネルギー障壁の高さ $[\text{J}]$)
- k : ボルツマン定数

式の物理的意味: 「 T^2 」は電子の衝突頻度などに由来し、「 \exp 」項はエネルギー障壁を超える確率 (ボルツマン因子) を表す。温度 T が少し上がるだけで、指数関数の効果により J は爆発的に増加する。

⑨ リチャードソン線から仕事関数と A を求める方法

実験データから材料定数 (ϕ, A) を決定する手法。

式を変形し、線形関係 ($Y = aX + b$) を見出す。

$$\ln\left(\frac{J}{T^2}\right) = \ln A - \frac{e\phi}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

- 縦軸 (Y 軸): $\ln(J/T^2)$
- 横軸 (X 軸): $1/T$ (逆温度)

このプロット (リチャードソンプロット) は右下がりの直線となる。

- 傾き (Slope): $-\frac{e\phi}{k} \rightarrow$ 傾きの絶対値から仕事関数 ϕ を算出できる。
- Y 切片 (Intercept): $\ln A \rightarrow$ ここから定数 A を決定できる。

⑩ 熱陰極の具備条件

優れた電子放出材料 (カソード) が満たすべき条件。記述問題頻出。

1. 仕事関数 ϕ が小さいこと: これが最重要。 ϕ が小さいほど、低い温度で多量の電子を放出できる (省エネ)。
2. 高い放出電流密度 J が得られること: 動作温度において十分な電子流を供給できること。
3. 融点が高く、蒸気圧が低いこと: 動作温度で溶けたり、蒸発して痩せ細ったりしないこと (長寿命化)。
4. 機械的強度が強いこと: 高温でも変形したり折れたりしないこと。
5. 化学的に安定であること: 残留ガスと反応して表面が変質 (中毒) し、仕事関数が悪化しないこと。
6. 陰極能率 (放出効率) が高いこと: 加熱電力 1W あたりに得られる電流値 $[\text{mA/W}]$ が大きいこと。

代表的な陰極材料

- タングステン (W): 融点が高い ($3655 [\text{K}]$) が、仕事関数も大きい ($4.5 [\text{eV}]$)。高電圧・高出力管向け。
- トリウムタングステン (Th-W): W 中にトリウム (Th) を添加。表面に単原子層を形成し、 ϕ を $2.6 [\text{eV}]$ まで下げる。
- 酸化物陰極 (Oxide): BaO, SrOなどを塗布。 $\phi \approx 1.0 [\text{eV}]$ と非常に低い。ブラウン管や蛍光灯な

3 光電子放出 (⑪～⑬)

⑪ 光電子放出条件

光の粒子性（光子）に基づく現象。

- 入射光子エネルギー $h\nu$ が、電子を束縛している仕事関数 $e\phi$ に勝つ必要がある。

$$h\nu \geq e\phi$$

- 光の強さ（明るさ）を上げても、振動数 ν が足りなければ電子は 1 個も出ない（古典波動論では説明できない点）。

⑫ アインシュタインの式、限界周波数、限界波長

エネルギー保存則の式である。

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi \quad (4)$$

- K_{\max} : 放出される電子の最大運動エネルギー
- $h\nu$: 入ってくるエネルギー（収入）
- $e\phi$: 出るために支払うエネルギー（税金・コスト）

限界値の定義: $K_{\max} = 0$ （ギリギリ放出される状態）とおくことで求められる。

- 限界周波数 ν_0 : $h\nu_0 = e\phi \implies \nu_0 = \frac{e\phi}{h}$
- 限界波長 λ_0 : $\frac{hc}{\lambda_0} = e\phi \implies \lambda_0 = \frac{hc}{e\phi}$

重要: 入射光の波長 λ が λ_0 より短くないと（エネルギーが高くないと）放出されない。長波長側が NG である点に注意。

⑬ 量子効率、光電感度

効率を表す 2 つの指標。

量子効率 (Quantum Efficiency, η_q) 「個数の比率」。単位なし（または %）。

$$\eta_q = \frac{\text{放出された電子の数 } N_e}{\text{入射した光子の数 } N_p}$$

通常、金属では 10^{-4} 以下と低いが、半導体光電面では $0.1 \sim 0.3$ に達する。

光電感度 (Spectral Responsivity, S) 「電氣的出力の比率」。単位は [A/W]。

$$S = \frac{\text{光電流 } I \text{ [[A]]}}{\text{入射光パワー } P \text{ [[W]]}}$$

実用的なセンサー性能評価に使われる。

4 二次電子放出 (⑭～⑰)

⑭ 二次電子放出の原理

外部から高速の電子（一次電子）を物質に衝突させた際、物質内部の電子がエネルギーを受け取って放出される現象。

- 一次電子は物質内部へ侵入しながら、衝突を繰り返してエネルギーを失う。
- その過程で励起された内部電子（二次電子）が表面に向かって移動する。
- 表面障壁を超えるエネルギーを持ったまま表面に到達できたものだけが放出される。

⑮ 放出比の測定方法

二次電子放出比 δ (Secondary Emission Yield):

$$\delta = \frac{I_s(\text{二次電子流})}{I_p(\text{一次電子流})}$$

- $\delta > 1$: 入射した電子より多くの電子が出てくる → **増幅作用**がある（電子が増える）。
- $\delta < 1$: 電子が吸収されて減る。

⑯ 放出特性曲線（なぜ山なりになるのか？）

一次電子の加速電圧 V_p （衝突エネルギー）と δ の関係は極大値を持つ。

1. **上昇域**: V_p が低いときは、エネルギーが増えるほど生成される二次電子の数が増えるため、 δ は上昇する。
2. **ピーク δ_{max}** : ある電圧（数百 V 程度）で最大となる。
3. **下降域**: さらに V_p を上げると、一次電子は物質の**深部**まで侵入してしまう。深い場所で発生した二次電子は、表面まで戻ってくる間に散乱されてエネルギーを失い、脱出できなくなる。そのため、高電圧すぎると逆に効率が落ちる。

⑰ 光電子増倍管 (PMT) の原理

極微弱な光を検出する真空管デバイス。「光電効果」と「二次電子放出」のハイブリッド。

1. **光電面 (Photocathode)**: 入射光を受け、光電効果により**光電子**を放出する。(変換: 光子 → 電子)
2. **ダイノード部 (Dynodes)**: 電子増倍電極群。1 段あたり δ 倍に電子を増やす。 n 段あれば、トータルのゲインは $G = \delta^n$ となる。
 - 例: $\delta = 4, n = 10$ なら $4^{10} \approx 100$ 万倍 の増幅。
3. **陽極 (Anode)**: 増倍された電子群（雪崩）を回収し、電流として出力する。

5 電界放出と電界計算 (⑱～⑲)

⑱ ショットキー効果 (Schottky Effect)

熱電子放出において、電極間に強い電界をかけたときに放出電流が増加する現象。

【用語解説】 ショットキー効果の仕組み

1. **元々の壁:** 金属表面には「鏡像力」による高い壁がある。
2. **電界の追加:** ここに「外部電界（電子を引っ張り出す力）」を加えると、ポテンシャルが右下がりの直線になる。
3. **合成:** 「鏡像力」と「外部電界」を足し合わせると、ポテンシャルの山の頂点が低くなり ($\Delta\phi$)、かつ壁が薄くなる。

- **結果:** 実効的な仕事関数が $\phi' = \phi - \Delta\phi$ に減少するため、熱電子が飛び出しやすくなる。
- **数式:** 仕事関数の低下量 $\Delta\phi$ は \sqrt{E} (電界の平方根) に比例する。

※これに対し、常温で極めて強い電界をかけ、障壁をトンネル効果で突き抜けるのが「(冷) 電界放出 (Field Emission)」である。区別に注意。

⑲ 電界と電位の計算手順 (ポアソン・ラプラス)

記述問題の山場であり、多くの学生が躓くポイント。ここでは、物理法則の根源（ガウスの法則）から出発し、試験で問われる微分方程式の形になるまでを**一切の飛躍なく**解説する。

基礎方程式の導出 (ガウスの法則からポアソン方程式へ)

この流れは記述問題で「導出過程を書け」と問われる可能性があるため、論理ステップを暗記すること。

【重要導出】ポアソン方程式とラプラス方程式の導出

Step 1: ガウスの法則 (積分形) の確認

空間内の任意の閉曲面 S を考え、その内部の体積を V 、内部にある総電荷を Q とする。「閉曲面から出る電気力線の総本数 (電束) は、内部の電荷量に等しい」という法則である。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_V \rho dv$$

ここで \mathbf{D} は電束密度、 ρ は体積電荷密度である。

Step 2: ガウスの発散定理の適用

数学の定理「面積分 \rightarrow 体積分への変換」を用いる。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv$$

これと Step 1 の式を比較すると、どちらも体積分 $\int_V \dots dv$ の形になる。

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \int_V \rho dv$$

Step 3: 微分形（マクスウェル方程式）へ

任意の体積 V で上記が成り立つためには、被積分関数同士が等しくなければならない。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{ガウスの法則の微分形})$$

Step 4: 電界と電位の関係を代入

(1) 構成方程式: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (真空中の場合)

(2) 電位の定義: 静電場において電界は電位 V の勾配 (マイナス) で表される。 $\mathbf{E} = -\nabla V$ これらを Step 3 に代入する。

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad \xrightarrow{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 (-\nabla V)) = \rho$$

Step 5: ポアソン方程式の完成

ε_0 を定数として外に出し、 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ (ラプラシアン) を用いると:

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 V = \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

これがポアソンの方程式である。電荷 ρ が存在する場合の電位分布を記述する。

Step 6: ラプラス方程式 (電荷がない場合)

もし空間に電荷が存在しない ($\rho = 0$) ならば、右辺はゼロになる。

$$\nabla^2 V = 0$$

これをラプラスの方程式と呼ぶ。

1 次元計算パターン (試験で実際に解く式)

実際の試験問題では、平板電極などを想定して「1 次元 (x 方向のみ)」の変化を考えることが多い。この場合、ラプラシアン ∇^2 は単純な 2 階微分 $\frac{d^2}{dx^2}$ に置き換わる。

パターン別の微分方程式と解法

基本式 (1 次元ポアソン方程式):

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

【パターン 1: 空間電荷なし ($\rho = 0$)】 方程式: $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$ (ラプラス方程式)

- 1 回積分: $\frac{dV}{dx} = C_1$ (電界 E は一定)
- 2 回積分: $V = C_1 x + C_2$ (電位は直線的に変化)
- 平行平板コンデンサの電位分布そのものである。

【パターン 2: 一様な空間電荷 ($\rho = \text{const}$)】 方程式: $\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- 1 回積分: $\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} x + C_1$ (電界は傾きをもつ直線)
- 2 回積分: $V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} x^2 + C_1 x + C_2$ (電位は放物線を描く)

【パターン 3: 空間電荷制限電流 (Child-Langmuir 則の基礎)】 講義で扱われた「距離に依存する電荷分

布 $\rho(x) = -kx^{-1/2}$ のケース（初速度 0 の電子が加速されるモデル）。方程式:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2}$$

手順 1 (1 回積分: 電界):

$$\frac{dV}{dx} = \int \frac{k}{\varepsilon_0} x^{-1/2} dx = \frac{k}{\varepsilon_0} [2x^{1/2}] + C_1$$

境界条件「カソード ($x = 0$) で電界 0」とすると $C_1 = 0$ 。

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2k}{\varepsilon_0} x^{1/2}$$

手順 2 (2 回積分: 電位):

$$V = \int \frac{2k}{\varepsilon_0} x^{1/2} dx = \frac{2k}{\varepsilon_0} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right] + C_2$$

境界条件「カソード ($x = 0$) で電位 0」とすると $C_2 = 0$ 。

結論:

$$V = \frac{4k}{3\varepsilon_0} x^{3/2}$$

これを逆に解くと $x \propto V^{2/3}$ や、電流 J と電圧 V の関係 ($J \propto V^{3/2}$: 3/2 乗則) が導かれる。

第 II 部

過去問 詳細解法 (2024・2023)

計算の途中経過を省略せず、思考のプロセス、式変形、単位変換のタイミングを記述する。「なぜその公式を使うのか？」という着眼点も併記した。

6 2024 年度 試験問題 詳細解説

問 1. エネルギーバンドの名称

問題の意図: アルカリ金属 (Na) の電子配置とバンド構造の対応理解。

- 図の下部 (内殻): K 殻・L 殻は電子で満員 \rightarrow **[(a) 充満帯]**
- 帯の隙間: 電子が入れない \rightarrow **[(b) 禁制帯]**
- 図の上部 (最外殻): Na は 3s 軌道に電子が 1 個 (定員 2 個の半分) しか入っていない。空席があるため、電子は自由に動ける。つまり、価電子帯と伝導帯が同一化している \rightarrow **[(c) 価電子帯, (d) 伝導帯]** の両性質を持つ (重複選択)。

問 2. 金属表面のエネルギー準位 (穴埋め)

物理用語の正確な定義を問う問題。

- (1) 金属内で最もエネルギーが **[(d) 大きい]** 電子は、絶対零度ではフェルミ準位にある。(小さい、ではない)
- (2) E_F は **[(e) フェルミ]** エネルギー。
- (3) バンド底部 B の集合体は **[(b) 価電子帯]**。
- (4) 真空へ出た電子は束縛がないので **[(j) 自由電子]**。
- (5)(6) 足りないエネルギー差 ϕ は **[(g) 仕事関数]**。

問 3. 熱電子放出 (タングステン電極の仕事関数 ϕ)

重要度: S (計算問題の本丸) 問題: $T = 2000 \text{ [K]}$, 半径 $r = 1.25 \times 10^{-4} \text{ [m]}$, 長さ $L = 0.1 \text{ [m]}$, 電流 $I = 2.00 \text{ [mA]}$ 。 $\phi \text{ [eV]}$ を求めよ。

計算プロセス詳細: 計算ステップ

1. 表面積 S の算出: 円筒の側面積 $S = 2\pi rL$

$$\begin{aligned} S &= 2 \times 3.14159 \times (1.25 \times 10^{-4}) \times 0.1 \\ &= (2 \times 1.25) \times 0.1 \times \pi \times 10^{-4} \\ &= 2.5 \times 0.1 \times \pi \times 10^{-4} = 0.25\pi \times 10^{-4} \approx 7.854 \times 10^{-5} \text{ [m}^2\text{]} \end{aligned}$$

2. 電流密度 J の算出: $J = I/S$. I をアンペアに直す ($2 [\text{mA}] = 2 \times 10^{-3} [\text{A}]$).

$$J = \frac{2.00 \times 10^{-3}}{7.854 \times 10^{-5}} = \frac{2.00}{7.854} \times 10^2 \approx 0.2546 \times 100 = 25.46 [\text{A/m}^2]$$

3. 式変形 (ϕ を求める):

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \xrightarrow{\ln \text{をとる}} \ln J = \ln(AT^2) - \frac{e\phi}{kT}$$

$$\frac{e\phi}{kT} = \ln(AT^2) - \ln J = \ln\left(\frac{AT^2}{J}\right)$$

$$\phi = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{AT^2}{J}\right) \quad [[\text{eV}]]$$

※ $\frac{kT}{e}$ は「熱電圧」相当の値、 \ln の中身は無次元数となる。

4. 数値代入と対数計算:

- 係数項: $\frac{kT}{e} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 2000}{1.60 \times 10^{-19}} = \frac{2760}{1.60} \times 10^{-4} \approx 0.1725 [\text{eV}]$
- 対数項の中身 ($X = AT^2/J$): $A = 1.20 \times 10^6$ とする。

$$X = \frac{(1.20 \times 10^6) \times (2000)^2}{25.46} = \frac{1.20 \times 4.0 \times 10^{12}}{25.46} = \frac{4.8 \times 10^{12}}{25.46} \approx 1.885 \times 10^{11}$$

- $\ln X$ の計算 (試験で関数電卓が使えない場合の近似): $\ln(1.885 \times 10^{11}) = \ln(1.885) + 11 \ln(10) \approx 0.63 + 11(2.30) = 0.63 + 25.3 = 25.93$

5. 最終計算:

$$\phi = 0.1725 \times 25.93 \approx 4.473 [\text{eV}]$$

答: $4.47 \sim 4.48 [\text{eV}]$

問 4. 光電子の最大速度 V_m

問題: $\phi = 1.68 [\text{eV}]$, $\lambda = 520 [\text{nm}]$. 最大速度 V_m を求めよ。

計算プロセス詳細: エネルギー保存則の活用

1. 光子エネルギー $h\nu$ (単位: J):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{520 \times 10^{-9}} = \frac{19.89 \times 10^{-26}}{5.20 \times 10^{-7}} = 3.825 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

2. 仕事関数 $e\phi$ (単位: J): 必ず $\text{eV} \rightarrow \text{J}$ 換算を行う。

$$e\phi = 1.68 \times (1.60 \times 10^{-19}) = 2.688 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

3. 運動エネルギー K_{max} :

$$K_{max} = h\nu - e\phi = (3.825 - 2.688) \times 10^{-19} = 1.137 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

4. 速度 V_m への変換: $K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2K/m}$

$$V_m = \sqrt{\frac{2 \times 1.137 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{2.274}{9.11} \times 10^{12}} = \sqrt{0.2496} \times 10^6$$

$\sqrt{0.25} = 0.5$ なので、

$$V_m \approx 0.4996 \times 10^6 \approx 5.00 \times 10^5 \text{ [m/s]}$$

答: $5.00 \times 10^5 \text{ [m/s]}$

問 5. 二次電子放出材料

表（省略）から δ_{max} が最大のものを選ぶ。答: **MgO (酸化マグネシウム)** 補足: 一般に金属 (≈ 1) より酸化物や半導体 (> 1) の方が二次電子放出比は高い。

問 6. 光電子増倍管 (PMT)

(1) 応用: スーパーカミオカンデ、シンチレーションカウンタ、血液分析装置など。「極微弱光の検出」がキーワード。

(2) 出力電流計算: $P = 1.98 \times 10^{-5} \text{ [W]}$, $\eta = 27.0 \text{ [mA/W]}$, $\delta = 3.51$, $n = 6$ 段。

計算プロセス詳細: 多段増幅計算

1. 光電面での初期電流 I_0 : 感度 $\eta = 27 \text{ [mA/W]} = 0.027 \text{ [A/W]}$

$$I_0 = P \times \eta = (1.98 \times 10^{-5}) \times 0.027 \approx 5.346 \times 10^{-7} \text{ [A]}$$

2. 総合利得 G :

$$G = \delta^n = 3.51^6$$

計算: $3.51^2 \approx 12.32$, $12.32^3 \approx 1869$ (概算) 3. 出力電流 I :

$$I = I_0 \times G = 5.346 \times 10^{-7} \times 1869 \approx 9991 \times 10^{-7} \text{ [A]} \approx 1.00 \text{ [mA]}$$

答: 1.00 [mA]

問 7. ショットキー効果

記述キーワード: 「鏡像力ポテンシャル」「外部電界ポテンシャル」「合成障壁」「 $\Delta\phi$ の低下」「頂点の金属側への移動」。これらを組み合わせて、「電界により仕事関数が実効的に下がり、熱電子放出が増える現象」と説明する。

問 8. 電界計算 (記述手順)

ポアソン方程式 $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ を出発点とし、積分 1 回目 \rightarrow 電界の式 (積分定数 C1)、積分 2 回目 \rightarrow 電位の式 (積分定数 C2)、境界条件 ($V(0) = 0$ など) を代入して C1, C2 を決定する、という手順を簡条書きにする。

7 2023 年度 試験問題 詳細解説

問 1. 鏡像力と電位障壁

【用語解説】鏡像力 (Image Force) とは？

金属表面の前に電子（マイナス）がいると、金属表面にはプラスの電荷が集まります。これをあたかも「鏡の向こう側（壁の奥 x の位置）にプラスの電荷（鏡像電荷）がいる」とみなして計算する手法です。

(1) クーロン力: 金属表面から距離 x にある電子 ($-e$) は、壁の反対側距離 x にある鏡像電荷 ($+e$) と引き合う。電荷間距離は $2x$ 。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$$

(3) ポテンシャルエネルギー: 力の積分（無限遠基準）。

$$W(x) = \int_x^\infty |F| dr = \int_x^\infty \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

積分計算:

$$\begin{aligned} W &= \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_x^\infty \\ &= \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0} \left(0 - \left(-\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x} \text{ [[J]]} \end{aligned}$$

eV 単位で答える場合は e で割る $\rightarrow \frac{e}{16\pi\epsilon_0 x} \text{ [[eV]]}$

問 3. モリブデン線の半径 r

【用語解説】モリブデン (Mo) とは？

融点が高く ($2623 [^\circ\text{C}]$)、高温でも強度を保つ金属。タングステンと同様に電子管のヒータやグリッド（網）などの材料として使われる。試験では「仕事関数 ϕ が異なるだけの別の金属」として扱えば OK。

2024 年の逆問題。

1. $T = 2000, \phi = 4.27 \text{ [eV]}$ から J を計算。 $\frac{e\phi}{kT} \approx 24.75$ $J = 1.2 \times 10^6 \times 2000^2 \times e^{-24.75} \approx 4.8 \times 10^{12} \times 1.78 \times 10^{-11} \approx 85.4 \text{ [A/m}^2\text{]}$
2. $I = J \times S = J \times 2\pi r L$ より $r = \frac{I}{2\pi L J}$ 。 $I = 22.8 \text{ [mA]}$ を代入して $r \approx 4.26 \times 10^{-4} \text{ [m]}$ 。

問 6. 3次元電位からの電界導出

$V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ 。 $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ 。合成関数の微分: $\frac{\partial}{\partial x}(u^{-1/2}) = -\frac{1}{2}u^{-3/2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ 。 $u = x^2 + y^2 + z^2$ なので $u_x = 2x$ 。

$$E_x = -\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x \right) = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

ベクトル表記なら $\mathbf{E} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (点電荷の電界と同じ形)。

第III部

重要演習課題 (レポート課題・記述対策)

本番で差がつく計算問題を、検算可能なレベルまで展開する。

課題 1: フィラメント設計 (L を求める)

条件: $T = 2500$ [K], $r = 1.50 \times 10^{-4}$ [m], $I = 2.00$ [mA], $\phi = 4.52$ [eV]。必要な長さ L を求めよ。

計算プロセス詳細: 逆算のフロー

1. 指数項 $\exp(-e\phi/kT)$ の計算:

$$\frac{e\phi}{kT} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 4.52}{1.38 \times 10^{-23} \times 2500} = \frac{7.232}{3.45} \times 10^4 \times 10^{-4} \approx 20.962$$
$$\exp(-20.962) \approx 7.876 \times 10^{-10}$$

2. 電流密度 J の計算: $A = 1.20 \times 10^6$ とする。

$$J = (1.20 \times 10^6) \times (2500)^2 \times (7.876 \times 10^{-10})$$
$$J = 7.50 \times 10^{12} \times 7.876 \times 10^{-10} \approx 5907 \text{ [A/m}^2\text{]}$$

3. 長さ L の計算: $S = I/J$, かつ $S = 2\pi rL$ なので、

$$L = \frac{I}{2\pi rJ} = \frac{2.00 \times 10^{-3}}{2\pi \times (1.50 \times 10^{-4}) \times 5907}$$

分母: $2\pi \times 1.5 \approx 9.42$ 分母全体: $9.42 \times 10^{-4} \times 5907 \approx 5.567$

$$L = \frac{0.002}{5.567} \approx 0.000359 \text{ [m]}$$

答: $L \approx 3.59 \times 10^{-4}$ [m] (0.36 [mm])

課題 4: 電界ベクトル導出の注意点

記述でよくある間違いを防ぐためのチェックポイント。

【注意】偏微分の符号ミスに注意

電界の定義は $\mathbf{E} = -\nabla V$ である。マイナスを忘れがちなので注意すること。

- 正: ポテンシャルが下がる方向に力（電界）が働く。
- 計算: V を微分した後、最後に符号を反転させるのを忘れないこと。

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

もし $V = kx^2$ なら、 $E_x = -2kx$ となる。

Good Luck on Your Exam!

この資料の計算を一度自分の手でトレースすれば、必ず合格点に到達します。