制御工学における安定判別法

ラウス・フルビッツ法とナイキスト法の徹底解説

はじめに：なぜ安定性解析が重要なのか？ 制御システムを設計する上で、最も基本的な要件は「安定性」です。システムが不安定だと、入力に対して出力が発散してしまい、制御不能な状態に陥ります。例えば、ロボットアームが暴走したり、温度制御システムが異常加熱したりする原因となります。この資料では、システムの安定性を数学的に判別するための 2 つの強力な手法、「ラウス・フルビッツの安定判別法」と「ナイキストの安定判別法」について、例題を通して体系的に学びます。

1 問題 1：ゲイン K の安定範囲の導出

問題設定

フィードバック制御系の開ループ伝達関数が $G(s) = \frac{K}{s(s^2+3s+12)}$、フィードバックが単位フィードバック $H(s) = 1$ で与えられる。このシステムが安定となるためのゲイン K の範囲を求めよ。

1.1 アプローチ 1：ラウス・フルビッツの安定判別法

ラウス法とは？ ラウス・フルビッツの安定判別法は、システムの**特性方程式**の係数だけを使って、安定性を判断する代数的な手法です。わざわざ方程式の根を解かなくても、根が複素平面の右半面（不安定領域）に存在するかどうかを判定できます。**キーポイント：**ラウス配列と呼ばれる表を作成し、その第 1 列の符号を調べる。

1.1.1 Step 1: 特性方程式を求める

安定性は、閉ループ伝達関数の分母、すなわち特性方程式 $1 + G(s)H(s) = 0$ の根で決まります。分母を払って整理すると、以下の特性方程式が得られます。

$$
\begin{aligned}
&1 + \frac{K}{s(s^2+3s+12)} \cdot 1 = 0 \\
&s(s^2+3s+12) + K = 0 \\
&\implies \boldsymbol{s^3 + 3s^2 + 12s + K = 0}
\end{aligned}
$$

1.1.2 Step 2: ラウス配列を構築する

特性方程式 $s^3 + 3s^2 + 12s + K = 0$ の係数 $(a_3 = 1, a_2 = 3, a_1 = 12, a_0 = K)$ を使って、ラウス配列を作成します。

s^3	$a_3 = 1$	$a_1 = 12$
s^2	$a_2 = 3$	$a_0 = K$
s^1	b_1	b_2
s^0	c_1	c_2

b_1, c_1 を計算します。

$$b_1 = \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2} = \frac{3 \cdot 12 - 1 \cdot K}{3} = \frac{36 - K}{3}$$
$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_0 - a_2 \cdot b_2}{b_1} = \frac{\frac{36-K}{3} \cdot K - 3 \cdot 0}{\frac{36-K}{3}} = K$$

完成したラウス配列は以下のようになります。

s^3	1	12
s^2	3	K
s^1	$\frac{36-K}{3}$	0
s^0	K	0

1.1.3 Step 3: 安定条件を適用する

ラウスの安定条件

システムが安定であるための必要十分条件は、**ラウス配列の第 1 列の要素がすべて正である**こと。

第 1 列の要素 $1, 3, \frac{36-K}{3}, K$ がすべて正である必要があります。

1. $1 > 0$ (OK)
2. $3 > 0$ (OK)
3. $\frac{36-K}{3} > 0 \implies 36 - K > 0 \implies \boldsymbol{K < 36}$
4. $K > 0 \implies \boldsymbol{K > 0}$

これらの条件をすべて満たす K の範囲は $0 < K < 36$ となります。

ラウス法による結論

ラウス・フルビッツの安定判別法により、システムが安定となるゲイン K の範囲は $\mathbf{0 < K < 36}$ である。

1.2　アプローチ 2：ナイキストの安定判別法

ナイキスト法とは？ ナイキストの安定判別法は、**開ループ伝達関数の周波数応答** $G(j\omega)H(j\omega)$ のベクトル軌跡（ナイキスト線図）を描き、それが複素平面上の点 $(-1, 0)$ をどのように囲むかによって安定性を判断する図形的な手法です。**キーポイント：**$Z = N + P$ という関係式に基づき、閉ループ系の安定性を判定する。

1.2.1　Step 1: 不安定な開ループ極の数 P を求める

開ループ伝達関数 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2+3s+12)}$ の極（分母=0 の根）を調べます。$s(s^2 + 3s + 12) = 0$ の極は $s = 0$ と $s^2 + 3s + 12 = 0$ の解です。$s^2 + 3s + 12 = 0$ の解は $s = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{39}}{2}$ です。これらの極はすべて複素平面の左半面または虚軸上にあります。したがって、右半面にある不安定な開ループ極の数は $\boldsymbol{P = 0}$ です。

1.2.2　Step 2: 安定条件を決定する

ナイキストの安定条件

閉ループ系が安定である条件は、閉ループ系の不安定な極の数 Z がゼロであること、すなわち $\boldsymbol{Z = 0}$。ナイキストの定理 $Z = N + P$ より、安定条件は $\boldsymbol{N = -P}$ となる。

今回は $P = 0$ なので、安定条件は $\boldsymbol{N = 0}$ となります。これは、**ナイキスト線図が点 (-1, 0) を囲まない**ことを意味します。

1.2.3　Step 3: ナイキスト線図が実軸と交わる点を計算する

$s = j\omega$ を代入して周波数伝達関数を求め、実部と虚部に分けます。

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(-\omega^2 + 3j\omega + 12)} = \frac{K}{(12 - \omega^2)j\omega - 3\omega^2}$$

有理化すると、

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(12-\omega^2)} \cdot \frac{-3\omega^2 - j\omega(12-\omega^2)}{-3\omega^2 - j\omega(12-\omega^2)} = \frac{K(-3\omega^2 - j\omega(12-\omega^2))}{9\omega^4 + \omega^2(12-\omega^2)^2} \\
\mathrm{Re}[G(j\omega)] &= \frac{-3K\omega^2}{9\omega^4 + \omega^2(12-\omega^2)^2} \\
\mathrm{Im}[G(j\omega)] &= \frac{-K\omega(12-\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(12-\omega^2)^2}
\end{aligned}$$

軌跡が実軸と交わるのは、虚部 $\mathrm{Im}[G(j\omega)] = 0$ のときです。$12 - \omega^2 = 0 \implies \boldsymbol{\omega^2 = 12} \implies \omega = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

このときの実部の値は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}|_{\omega^2=12} &= \frac{-3K(12)}{9(12)^2 + 12(12-12)^2} \\
&= \frac{-36K}{9 \cdot 144 + 0} = \frac{-36K}{1296} = -\boldsymbol{\frac{K}{36}}
\end{aligned}$$

1.2.4 Step 4: 安定条件を適用する

安定条件 $N = 0$ を満たすには、実軸との交点 $-\frac{K}{36}$ が、臨界点 -1 よりも右側にある必要があります。

$$-\frac{K}{36} > -1$$

両辺に -36 を掛けると、不等号の向きが反転します。

$$\boldsymbol{K < 36}$$

ゲイン K は正の値なので、$K > 0$ も考慮します。

ナイキスト法による結論

ナイキストの安定判別法により、システムが安定となるゲイン K の範囲は $\mathbf{0 < K < 36}$ である。

2 結論の比較と検証

ラウス法、ナイキスト法という全く異なる 2 つのアプローチから、同じ $\mathbf{0 < K < 36}$ という結論が得られました。これにより、解析の正しさが強く裏付けられます。特に、ラウス法で安定限界を示した $K = 36$ は、ナイキスト線図がちょうど点 $(-1, 0)$ を通過するゲインと一致しており、両手法の関連性の深さを示しています。

3 問題 2：システムの安定性判別

問題設定

開ループ伝達関数が $G(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+5)}$, $H(s) = 1$ で与えられるシステムの安定性を判別せよ。

3.1 ラウス・フルビッツ法による解析

3.1.1 Step 1: 特性方程式

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{6}{s(s+2)(s+5)} &= 0 \\
s(s^2 + 7s + 10) + 6 &= 0 \\
\implies \boldsymbol{s^3 + 7s^2 + 10s + 6} &\boldsymbol{= 0}
\end{aligned}
$$

3.1.2 Step 2: ラウス配列

係数 $(1, 7, 10, 6)$ を用いて配列を作成します。

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{7 \cdot 10 - 1 \cdot 6}{7} = \frac{64}{7} \\
c_1 &= 6
\end{aligned}
$$

s^3	1	10
s^2	7	6
s^1	$\frac{64}{7}$	0
s^0	6	0

3.1.3 Step 3: 判定

第 1 列の要素 $(1, 7, \frac{64}{7}, 6)$ は**すべて正**です。

ラウス法による結論

ラウス配列の第 1 列の符号がすべて正であるため、このシステムは**安定**である。

3.2 ナイキスト法による解析

3.2.1 Step 1: P の算定

開ループ極は $s = 0, -2, -5$ であり、すべて左半面または虚軸上にあるため $\boldsymbol{P = 0}$。安定条件は $\boldsymbol{N = 0}$ となります。

3.2.2 Step 2: 実軸との交点

$s = j\omega$ を代入して周波数伝達関数を求めます。分母を展開し、実部と虚部に整理します。

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{6}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+5)} \\ &= \frac{6}{j\omega(-\omega^2+7j\omega+10)} \\ &= \frac{6}{-j\omega^3-7\omega^2+10j\omega} \\ &= \frac{6}{-7\omega^2+j\omega(10-\omega^2)} \end{aligned}$$

この式から、虚部がゼロになるのは $10-\omega^2=0 \implies \omega=\sqrt{10}$ のときです。

このときの実部の値は,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[G(j\omega)]|_{\omega^2=10} &= \frac{-42\omega^2}{49\omega^4+\omega^2(10-\omega^2)^2}|_{\omega^2=10} \\ &= \frac{-42(10)}{49(10)^2+0} = \frac{-420}{4900} = -\mathbf{\frac{3}{35}} \end{aligned}$$

3.2.3 Step 3: ナイキスト線図の主要な点の評価と安定性判別

ナイキスト線図の概形を把握するために、いくつかの重要な周波数における $G(j\omega)$ の座標を求めます。

■1. $\omega \to 0^+$ (始点)　ω がゼロに近づくとき、伝達関数は積分要素 $1/s$ の影響で支配されます。

$$\lim_{\omega\to0^+} G(j\omega) = \lim_{\omega\to0^+} \frac{6}{j\omega(2)(5)} = \lim_{\omega\to0^+} \frac{0.6}{j\omega} = \lim_{\omega\to0^+} -j\frac{0.6}{\omega}$$

これは、ベクトル軌跡が虚軸の負の無限遠から出発することを示します。座標は $(0,-\infty)$ に相当します。

■2. $\omega=\omega_\pi=\sqrt{10}$ (実軸との交点)　虚部がゼロになる周波数 $\omega_\pi=\sqrt{10}$ での座標は、既に計算した通りです。$G(j\sqrt{10})=-\frac{3}{35}\approx-0.086$ この点の座標は $\left(-\frac{3}{35},0\right)$ です。

■3. $\omega\to\infty$ (終点)　ω が非常に大きくなるとき、分母の次数が分子より 3 次高いため、値はゼロに収束します。

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{6}{(j\omega)^3} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{6}{-j\omega^3} = 0$$

これは、ベクトル軌跡が原点 $(0,0)$ に収束することを示します。

■安定性の判定　実軸との交点 $(-\frac{3}{35},0)$ は、臨界点 $(-1,0)$ よりも右側にあります。$P=0$ であり、ナイキスト線図は $(-1,0)$ を囲まないため、$N=0$ です。$Z=N+P=0+0=0$ となり、閉ループ系は安定です。

ナイキスト法による結論

ナイキスト線図が臨界点 $(-1,0)$ を囲まないため、このシステムは**安定**である。

図 1　$G(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+5)}$ のナイキスト線図