

論理トレーニング レポート課題

学籍番号 氏名

2026 年 1 月 31 日

問題

1. 命題論理の同値変形

p, q, r, s を命題とするとき、次の (1), (2) を同値変形により示せ。

$$(1) \quad (p \wedge q) \text{lor} (r \wedge s) \equiv (p \text{lor} r) \wedge (p \text{lor} s) \wedge (q \text{lor} r) \wedge (q \text{lor} s)$$

$$(2) \quad (p \text{lor} q) \wedge (r \text{lor} s) \equiv (p \wedge r) \text{lor} (p \wedge s) \text{lor} (q \wedge r) \text{lor} (q \wedge s)$$

2. 述語論理と量化子

命題関数 $p(x), q(x)$ ($x \in X$) に対して、次が成り立つ。

$$(1) \quad \forall x \, p(x) \wedge \forall x \, q(x) \equiv \forall x \, (p(x) \wedge q(x))$$

$$(2) \quad \forall x \, p(x) \text{lor} \forall x \, q(x) \Rightarrow \forall x \, (p(x) \text{lor} q(x))$$

$$(3) \quad \exists x \, (p(x) \text{lor} q(x)) \equiv \exists x \, p(x) \text{lor} \exists x \, q(x)$$

$$(4) \quad \exists x \, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x \, p(x) \wedge \exists x \, q(x)$$

$X = \{a_1, a_2\}$ とするとき、同値変形により (2) を示せ。

(Hint: $\forall x \, p(x) \vee \forall x \, q(x) \rightarrow \forall x \, (p(x) \vee q(x)) \equiv I$ を示す。)

3. 命題関数の真理値判定

次の命題関数 $p(\epsilon, N)$ に対して、(1), (2) はそれぞれどんな命題か。また、その真理値を答えよ。

$$\begin{aligned} \epsilon &\in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\ N &\in \mathbb{N} \\ p(\epsilon, N) &: N\epsilon > 1 \end{aligned}$$

(1)

$$\forall \epsilon \exists N p(\epsilon, N)$$

(2)

$$\overline{\forall \epsilon \exists N p(\epsilon, N)}$$

4. ϵ -N 論法による極限証明

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であることを、 ϵ -N 論法を用いて証明せよ。

5. ϵ - δ 論法による極限証明

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ であることを、 ϵ - δ 論法を用いて証明せよ。

解答

1. 命題論理の同値変形

p, q, r, s を命題とする。

$$(1) (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

Proof. 右辺に対し、分配法則 $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ を適用して整理する。

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= [(p \vee r) \wedge (p \vee s)] \wedge [(q \vee r) \wedge (q \vee s)] \\ &= [p \vee (r \wedge s)] \wedge [q \vee (r \wedge s)] && (\because \text{Distributive Law}) \\ &= (r \wedge s) \vee (p \wedge q) && (\because \text{Distributive Law}) \\ &= (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \\ &= \text{LHS} \end{aligned}$$

■

$$(2) (p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

Proof. 左辺に対し、分配法則を順次適用して展開する。

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (p \vee q) \wedge (r \vee s) \\ &= ((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \vee q) \wedge s) && (\because \text{Distributive Law}) \\ &= (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s) && (\because \text{Distributive Law}) \\ &= (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) && (\because \text{Commutativity}) \\ &= \text{RHS} \end{aligned}$$

■

2. 述語論理と量子化

$X = \{a_1, a_2\}$ とする。

$$\forall x \in X, p(x) \vee \forall x \in X, q(x) \implies \forall x \in X, (p(x) \vee q(x))$$

Proof. 定義域が有限集合であるため、 $\forall x$ を要素ごとの論理積に書き換える。 $p(a_i) = p_i, q(a_i) = q_i$ とおく。

$$\begin{aligned}\text{Conclusion (RHS)} &= (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \\ &= (p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee (q_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \quad (\text{展開})\end{aligned}$$

一方、仮定 (LHS) は $(p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2)$ である。論理和の導入則 $A \implies A \vee B$ より、

$$(p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \implies (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \vee \underbrace{(p_1 \wedge q_2) \vee (q_1 \wedge p_2)}_{\text{Additional terms}}$$

したがって、 $\text{LHS} \implies \text{RHS}$ が成立する。 ■

3. 命題関数の真理値判定

定義： $p(\epsilon, N) : N\epsilon > 1 \quad (\epsilon > 0, N \in \mathbb{N})$

(1) $\forall \epsilon \exists N p(\epsilon, N)$

真理値：真

アルキメデスの公理 (Archimedean Property) より、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad N > \frac{1}{\epsilon}$$

このとき $N\epsilon > 1$ が成り立つ。

(2) $\overline{\forall \epsilon \exists N p(\epsilon, N)}$

真理値：偽

命題 (1) の否定を考える。

$$\neg(\forall \epsilon \exists N, N\epsilon > 1) \equiv \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, N\epsilon \leq 1$$

これは「ある定数 $1/\epsilon$ が全ての自然数 N の上界である」ことを意味するが、 \mathbb{N} は上に有界ではないため矛盾。よって元の命題は偽である。

4. $\epsilon - N$ 論法による極限証明

命題： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Proof. $\forall \epsilon > 0$ に対し、アルキメデスの公理より

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad N > \frac{1}{\epsilon}$$

が存在する。任意の $n > N$ について、

$$n > N > \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{1}{n} < \epsilon$$

よって、

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

以上より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。 ■

5. $\epsilon - \delta$ 論法による極限証明

【ノート】 δ の導出過程

証明を構成するため、 δ がどのように定められるべきかを逆算する。

目標： $|x - 1| < \delta$ ならば $|x^2 - 1| < \epsilon$ とする δ を見つける。

Step 1: $|x^2 - 1|$ を因数分解

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= |(x - 1)(x + 1)| \\ &= |x - 1| \cdot |x + 1| \end{aligned}$$

Step 2: $|x + 1|$ を制御する

$|x - 1|$ に上界を課す。 $\delta \leq 1$ と設定すれば、

$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta \leq 1 &\implies -1 < x - 1 < 1 \\ &\implies 0 < x < 2 \\ &\implies 1 < x + 1 < 3 \\ &\implies |x + 1| < 3 \end{aligned}$$

Step 3: $|x - 1|$ に他の条件を課す

$|x^2 - 1| < \epsilon$ にするには、

$$|x - 1| \cdot |x + 1| < \epsilon$$

と Step 2 から $|x + 1| < 3$ であるから、

$$|x - 1| \cdot 3 < \epsilon \implies |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

Step 4: 両条件を満たす δ を選ぶ

Step 2 から $\delta \leq 1$ 、Step 3 から $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ が必要。両方を満たすには、

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{3} \right\}$$

とすればよい。これにより：

- $\delta \leq 1$ より $|x + 1| < 3$ が保証
- $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ より $|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$ が保証
- 結果として $|x^2 - 1| < \epsilon$

【証明】

命題： $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

Proof. $\forall \epsilon > 0$ に対し、 $\delta = \min \{1, \frac{\epsilon}{3}\}$ とおく。

$0 < |x - 1| < \delta$ なる x について評価を行う。

1. $\delta \leq 1$ より、

$$|x - 1| < 1 \implies 0 < x < 2 \implies |x + 1| < 3$$

2. $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ より、

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= |x - 1||x + 1| \\ &< \frac{\epsilon}{3} \cdot 3 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

■