

電気電子工学実験報告書

テーマ名 自動制御実験（2次遅れ系の周波数応答）

報告者 5 年 (E 組) 番号 234 B 班 柳原魁人

実験場所 情報工学実験室 指導担当 鈴木 宏

共同実験者 石坂知尋, 倉科純太郎, 中井智大, 中澤耕平

実験日 令和 年 月 日

提出期限 令和 年 月 日 ⇒ 提出日 令和 年 月 日

評価項目		評価
実習評価	(1) 自ら積極的に実験に取り組めた	
	(2) 実験装置を適切に使用でき、正確に実験を行なえた	
	(3) グループ内で協力的に実験が行なえた	
報告書評価	(1) 結果のまとめかた（図表を含む）	
	(2) 結果に対する考察	
	(3) 報告事項／課題（正しい解答や適切な引用など）	
	(4) 報告書としての体裁が整っているか	

1 目的

2 次遅れ系の制御系を電子回路（Sallen-Key 型ローパスフィルタ）で実現し、その周波数応答を実験により測定した。測定結果から伝達関数を導出・検証することで、周波数応答と伝達関数の関係を物理的および数学的側面から理解するとともに、自動制御および電子回路に関する専門的知見を深めることを目的とする。

2 原理および理論計算

本実験では 2 次遅れ系の挙動を模倣するため、オペアンプを用いたアクティブフィルタを使用する。

2.1 伝達関数の導出

実験で使用した回路図を図 1 に示す。

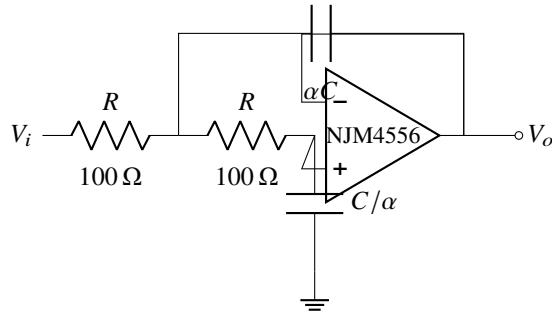


図 1 アクティブフィルタの回路構成 (Sallen-Key Topology)

この回路の伝達関数 $G(s)$ は、キルヒ霍ッフの法則より以下の通り導出される。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{1}{CR}\right)^2}{s^2 + \frac{2}{\alpha CR}s + \left(\frac{1}{CR}\right)^2} \quad (1)$$

標準的な 2 次遅れ系の伝達関数 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ と係数比較を行うことで、各パラメータは次のように定義される。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \quad (2)$$

2.2 理論値の算出

使用素子の定数は $\alpha C = 10 \mu\text{F}$, $C/\alpha = 0.5 \mu\text{F}$, $R = 100 \Omega$ である。これらよりキャパシタンス C および係数 α は、

$$C^2 = (\alpha C) \cdot (C/\alpha) = 10 \cdot 0.5 = 5.0 \implies C = \sqrt{5} \mu\text{F} \approx 2.236 \mu\text{F} \quad (3)$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha C}{C/\alpha} = \frac{10}{0.5} = 20 \implies \alpha = \sqrt{20} \approx 4.472 \quad (4)$$

と求められる。したがって、理論的な減衰係数 ζ および固有角周波数 ω_n は以下の通りとなる。

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx \mathbf{0.2236}, \quad \omega_n = \frac{1}{CR} \approx 4472 \text{ rad/s} \quad (5)$$

このとき、共振ピーク値 M_p および共振角周波数 ω_p は次式で予測される。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx \mathbf{2.29} \quad (\approx 7.21 \text{ dB}) \quad (6)$$

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \approx 4472 \cdot \sqrt{1-2(0.05)} \approx 4243 \text{ rad/s} \quad (\approx 675 \text{ Hz}) \quad (7)$$

3 実験方法および使用機器

3.1 使用機器

本実験で使用した主要機器を表 1 に示す。

表 1 使用機器一覧

No.	機器名	メーカー / 型番	定格・仕様	管理番号
1	発振器	KENWOOD / AG-203D	10 Hz ~ 1 MHz -	
2	オシロスコープ	Tektronix / TBS1052B	50 MHz, 1 GS/s -	
3	直流安定化電源	KENWOOD / PD18-10AD	0 ~ 18 V, 10 A -	
4	デジタルマルチメータ FLUKE / 179		True RMS -	

3.2 実験方法

回路に入力電圧 $V_i \approx 1.5 \text{ V}_{\text{p-p}}$ の正弦波を印加し、周波数を 100 Hz から 7 kHz まで変化させた。各周波数における入出力電圧の振幅および位相差をオシロスコープにて測定した。特に共振点付近では周波数間隔を細かく設定し、ピーク特性の正確な測定を試みた。

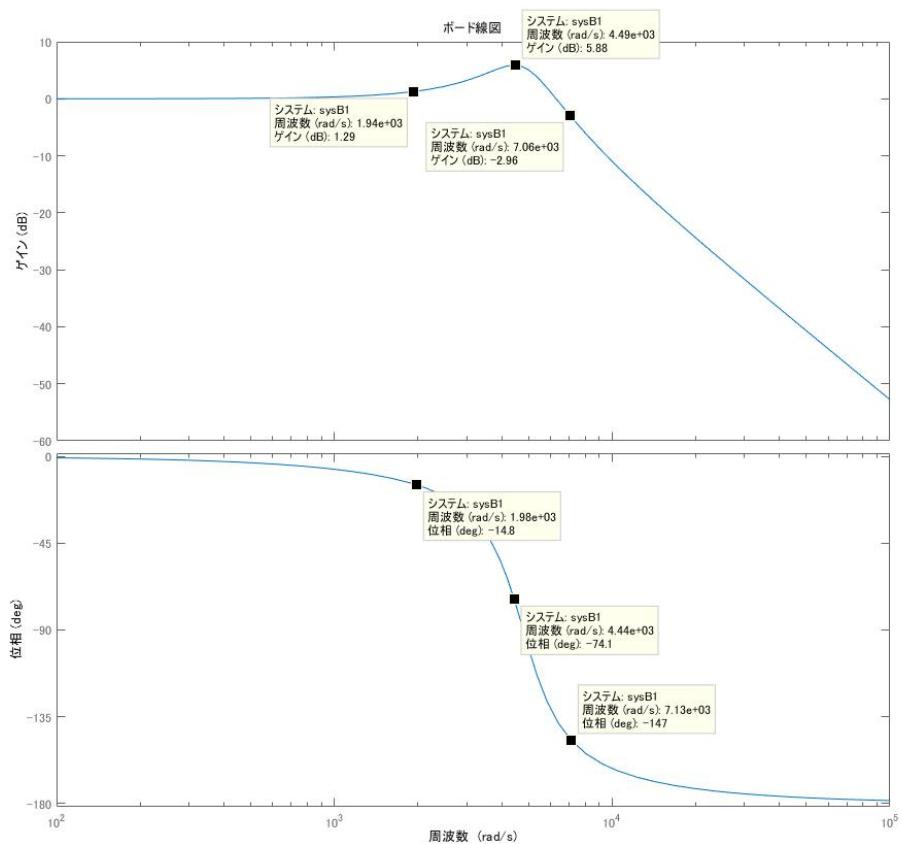
4 実験結果

測定結果の抜粋を表 2 に、周波数応答のグラフを図 2 に示す。共振周波数付近 (707.3 Hz) において、明瞭なゲインのピークが観測された。

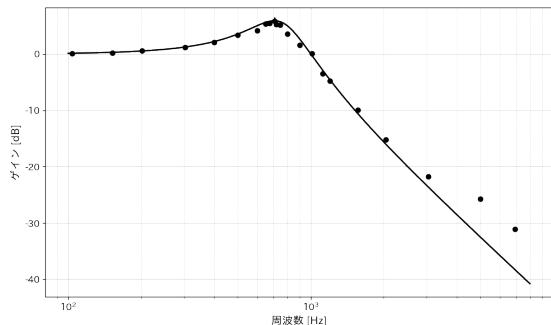
また、MATLAB による理論（シミュレーション）ボード線図と、実測値のゲイン・位相プロットを以下に示す。図 2 は、(a) MATLAB シミュレーションによるボード線図、(b) 実測のゲインプロット、(c) 実測の位相プロットを示す。

表2 周波数応答 測定結果（抜粋）

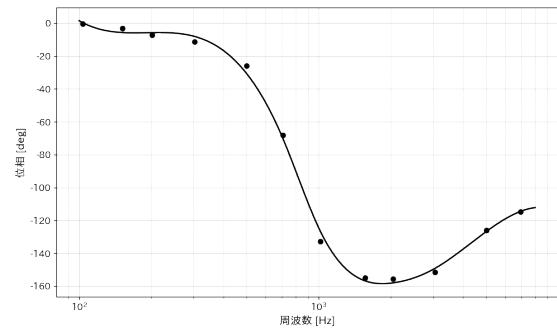
周波数 f [Hz]	角周波数 ω [rad/s]	V_i [V]	V_o [V]	電圧比 V_o/V_i	ゲイン G [dB]	遅れ t [ms]	位相 θ [°]
103.7	651.57	1.50	1.52	1.013	0.12	0.01	-0.37
151.7	953.16	1.62	1.66	1.025	0.21	0.06	-3.28
201.7	1267.32	1.50	1.60	1.067	0.56	0.10	-7.26
303.4	1906.32	1.50	1.72	1.147	1.19	0.10	-11.36
400.0	2513.27	1.58	2.00	1.266	2.05		
499.7	3139.71	1.54	2.26	1.468	3.33	0.14	-25.90
600.0	3769.91	1.54	2.50	1.623	4.21		
650.0	4084.07	1.50	2.78	1.853	5.36		
677.0	4253.72	1.50	2.80	1.867	5.42		
707.3	4444.10	1.50	2.96	1.973	5.90	0.27	-68.24
720.0	4523.89	1.50	2.76	1.840	5.30		
746.0	4687.26	1.50	2.72	1.813	5.17		
800.0	5026.55	1.50	2.26	1.507	3.56		
900.0	5654.87	1.58	1.90	1.203	1.60		
1013.0	6364.87	1.50	1.52	1.013	0.12	0.36	-132.74
1120.0	7037.17	1.50	1.00	0.667	-3.52		
1200.0	7539.82	1.56	0.90	0.577	-4.78		
1559.0	9795.49	1.60	0.512	0.320	-9.90	0.28	-154.90
2040.0	12817.70	1.50	0.26	0.173	-15.22	0.21	-155.69
3050.0	19163.72	1.50	0.122	0.081	-21.79	0.14	-151.52
5001.0	31422.21	1.50	0.078	0.052	-25.68	0.07	-126.03
6936.0	43580.17	1.50	0.042	0.028	-31.06	0.05	-114.86



(a) MATLAB による理論・シミュレーション（ボード線図）



(b) 実測：ゲイン



(c) 実測：位相

図 2 比較図：(a) MATLAB シミュレーション, (b) 実測ゲイン, (c) 実測位相

5 考察

5.1 実験結果からの伝達関数の導出と検証

実験で得られたゲイン特性のピーク情報から、実際の伝達関数パラメータ (ζ, ω_n) を逆算する。

5.1.1 ζ と ω_n の導出

実験データのピーク値 M_p とその周波数 f_p は以下の通りであった。

$$M_p(\text{実験値}) = 1.973 \quad (5.90 \text{ dB}), \quad f_p = 707.3 \text{ Hz} \quad (8)$$

理論的に共振ピーク値 M_p は減衰係数 ζ の関数として次式で与えられる。

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (9)$$

この式を ζ について解くために両辺を 2 乗し、整理を行う。

$$M_p^2 = \frac{1}{4\zeta^2(1-\zeta^2)} \iff 4M_p^2\zeta^4 - 4M_p^2\zeta^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

これは ζ^2 に関する 2 次方程式とみなせる。解の公式を用いて ζ^2 を求める。

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \frac{4M_p^2 \pm \sqrt{(4M_p^2)^2 - 16M_p^2}}{8M_p^2} \\ &= \frac{4M_p^2 \pm 4M_p^2\sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{8M_p^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、共振現象が生じる条件は $\zeta < 1/\sqrt{2}$ (すなわち $\zeta^2 < 1/2$) である。 $\sqrt{1 - 1/M_p^2} > 0$ であるため、複号のうち正 (+) を選択すると $\zeta^2 > 1/2$ となり条件を満たさない。したがって、複号は負 (-) を選択する。ゆえに、 ζ は次式で表される。

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_p^2}}}{2}} \quad (12)$$

ここに実験値 $M_p = 1.973$ を代入すると、

$$\zeta_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{1.973^2}}}{2}} \approx 0.262679 \quad (\text{保留: 有効数字を最大限保持}) \quad (13)$$

と算出される。次に、共振角周波数 $\omega_p = 2\pi f_p$ の関係式 $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ より、固有角周波数 ω_n を逆算する。

$$\omega_{n,\text{exp}} = \frac{2\pi \cdot 707.3}{\sqrt{1 - 2\zeta_{\text{exp}}^2}} \approx \frac{2\pi \cdot 707.3}{\sqrt{1 - 2(0.262679)^2}} \approx 4786.92 \text{ rad/s} \quad (14)$$

以上より、実験結果に基づく伝達関数 $G_{\text{exp}}(s)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} G_{\text{exp}}(s) &= \frac{\omega_{n,\text{exp}}^2}{s^2 + 2\zeta_{\text{exp}}\omega_{n,\text{exp}} s + \omega_{n,\text{exp}}^2} \\ &= \frac{(4786.92)^2}{s^2 + 2(0.262679)(4786.92)s + (4786.92)^2} \\ &= \frac{2.2914603 \times 10^7}{s^2 + 2.514879 \times 10^3 s + 2.2914603 \times 10^7} \end{aligned} \quad (15)$$

5.2 理論値と実験値の比較検討

理論値と実験値を比較し、その誤差率を表3にまとめる。

表3 理論値と実験値の比較

パラメータ	理論値	実験値	誤差率 [%]
減衰係数 ζ	0.224	0.263	+17.4
固有角周波数 ω_n [rad/s]	4472	4787	+7.0

誤差要因の分析：

1. 静電容量の公差: 一般的なセラミックコンデンサやフィルムコンデンサの公差は $\pm 5\% \sim 10\%$ である。 $\omega_n \propto 1/C$ であるため、実際の容量が理論値より小さければ ω_n は高く観測される。本実験の +7% という誤差は、素子ばらつきの範囲内で十分に説明できる。
2. オペアンプの特性: 理論式は理想オペアンプ（無限大の入力インピーダンスと利得）を仮定しているが、実際には有限の利得帯域幅積（GB 積）を持つ。特に ω_n 付近の高周波域では位相遅れが理論より大きくなり、見かけ上の減衰係数 ζ を変化させる要因となる。

5.3 2次遅れ系としての検証

図2より、共振周波数以降の減衰特性を確認すると、周波数が10倍になるごとの減衰（ロールオフ）は理論的な -40 dB/dec に近似している（例：3 kHzで約 -22 dB, 7 kHzで約 -31 dB）。また、位相特性においても、低周波域の 0° から高周波域の -180° へ推移しており、共振点付近で -90° を通過している。これらの周波数応答の特徴は2次遅れ系の理論的挙動と一致しており、本アクティブフィルタは2次遅れ系として正常に機能していると結論付けられる。

6 参考文献

1. 鈴木 宏: 自動制御実験テキスト, 国立長野高専 電気電子工学科.
2. 制御工学 教科書 P127 ~ P128.