0.1 平行平面電極間における電子の運動（電界 E と磁界 B の直交）

0.1.1 問題設定

x 方向に向かいあう 1 組の平行平面電極間で電界 E と磁界 B が直交している。原点 0 から電子が初速度 0 で飛び出したときの電子の運動は？

- **電位:** $V = V_a$ [V] $(x = D$ [m]$)$, $V = 0$ [V] $(x = 0$ [m]$)$
- **磁束:** $B(0, 0, B_z)$（手前から奥への磁束）

(3.A) において

電位の傾き：

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_a}{D}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

磁束密度成分（前式に代入）：

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B$$

0.1.2 電子の運動方程式

これより電子の運動方程式は以下のようになる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}\left(\frac{V_a}{D} - B\frac{dy}{dt}\right) \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}B\frac{dx}{dt} \quad [\mathrm{m/s^2}] \quad (3.47)$$

変数変換と整理

速度成分を以下のように置く。

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

これを代入すると：

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m}\left(\frac{V_a}{D} - Bv_y\right) \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{m}Bv_x \quad [\mathrm{m/s^2}] \quad (3.47)$$

定数 A とサイクロトロン角周波数 ω_c を以下のように定義する。

$$A = \frac{eV_a}{mD}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

これを用いて式を整理すると（加速度）：

$$\frac{dv_x}{dt} = A - \omega_c v_y \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \quad [\mathrm{m/s^2}] \quad (3.47)$$

0.1.3　解法と結果

ラプラス変換による速度の導出

与えられた微分方程式：

$$\frac{dv_x}{dt} = A - \omega_c v_y \quad \cdots (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \quad \cdots (2)$$

初期条件：

$$v_x(0) = 0, \quad v_y(0) = 0$$

ラプラス変換を施し、$v_x(t), v_y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $V_x(s), V_y(s)$ とおく。

$$sV_x(s) = \frac{A}{s} - \omega_c V_y(s) \quad \cdots (1')$$

$$sV_y(s) = \omega_c V_x(s) \quad \cdots (2')$$

式 (2') より：

$$V_x(s) = \frac{s}{\omega_c} V_y(s) \quad \cdots (3)$$

これを式 (1') に代入して：

$$s\left(\frac{s}{\omega_c} V_y(s)\right) = \frac{A}{s} - \omega_c V_y(s)$$

$$\frac{s^2}{\omega_c} V_y(s) + \omega_c V_y(s) = \frac{A}{s}$$

$$(s^2 + \omega_c^2) V_y(s) = \frac{A\omega_c}{s}$$

$$V_y(s) = \frac{A\omega_c}{s(s^2 + \omega_c^2)} \quad \cdots (4)$$

式 (3) に代入して：

$$V_x(s) = \frac{s}{\omega_c} \cdot \frac{A\omega_c}{s(s^2 + \omega_c^2)} = \frac{A}{s^2 + \omega_c^2} \quad \cdots (5)$$

逆ラプラス変換：

$$V_x(s) = \frac{A}{\omega_c} \cdot \frac{\omega_c}{s^2 + \omega_c^2}$$

$$v_x(t) = \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

$$V_y(s) = \frac{A\omega_c}{s(s^2+\omega_c^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+\omega_c^2}$$

係数比較より $K_1 = \frac{A}{\omega_c}$, $K_2 = -\frac{A}{\omega_c}$, $K_3 = 0$。

$$V_y(s) = \frac{A}{\omega_c}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_c^2}\right)$$

$$v_y(t) = \frac{A}{\omega_c}(1-\cos(\omega_c t))$$

ラプラス変換で解くと（課題）

t 秒後の速度：

$$v_x = \frac{A}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \quad [\mathrm{m/s}] \quad (3.51)$$

$$v_y = \frac{A}{\omega_c}(1-\cos(\omega_c t)) \quad [\mathrm{m/s}] \quad (3.52)$$

積分による位置の導出

初期条件：

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{A}{\omega_c}\sin(\omega_c \tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c}\left[-\frac{1}{\omega_c}\cos(\omega_c \tau)\right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c^2}(1-\cos(\omega_c t))$$

$$y(t) = \int_0^t v_y(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{A}{\omega_c}(1-\cos(\omega_c \tau))\,d\tau$$

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c}\left([\tau]_0^t - \left[\frac{1}{\omega_c}\sin(\omega_c \tau)\right]_0^t\right)$$

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c^2}(\omega_c t - \sin(\omega_c t))$$

積分（課題）

t 秒後の位置：

$$x = \frac{A}{\omega_c^2}(1 - \cos(\omega_c t)) \quad [\mathrm{m}] \quad (3.53)$$

$$y = \frac{A}{\omega_c^2}(\omega_c t - \sin(\omega_c t)) \quad [\mathrm{m}]$$

0.1.4 電子の運動軌跡を考える

導出された式：

$$x = \frac{A}{\omega_c^2}(1 - \cos(\omega_c t)) \quad [\mathrm{m}]$$

$$y = \frac{A}{\omega_c^2}(\omega_c t - \sin(\omega_c t)) \quad [\mathrm{m}]$$

サイクロイドの式との比較

半径 r の円板の点 P が描くサイクロイドの式：

$$x = r(1 - \cos\theta) \quad [\mathrm{m}]$$

$$y = r(\theta - \sin\theta) \quad [\mathrm{m}]$$

図形的な対応：

- 回転角: $\theta = \omega_c t$
- 回転半径: $r = \frac{A}{\omega_c^2} = \frac{mE}{eB^2}$

電子は電界と磁界が直交する場において、サイクロイド曲線を描いて運動する。