

電子工学 (5E) 試験対策 統合完全版

ポイント①～⑱網羅解説 & 過去問・レポート課題詳細解法

目次

第Ⅰ部	試験範囲ポイント完全解説 (①～⑱)	2
1	エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①～⑦)	2
2	熱電子放出 (⑧～⑩)	4
3	光電子放出 (⑪～⑬)	5
4	二次電子放出 (⑭～⑰)	5
5	電界放出と電界計算 (⑱～⑲)	6
第Ⅱ部	過去問 詳細解法 (2024・2023)	8
第Ⅲ部	重要演習課題 (レポート課題・記述対策)	11

第 I 部

試験範囲ポイント完全解説 (①～⑱)

試験範囲として提示された 19 個のポイントについて、教科書やノートの内容を補完し、記述問題にも対応できるよう詳細に解説します。

1 エネルギーバンドと電子放出の基礎 (①～⑦)

① 価電子帯、禁制帯、伝導帯とはなにか

価電子帯 (Valence Band) 原子核に束縛された電子 (価電子) が詰まっているエネルギー帯。通常、ここにある電子は電気伝導に寄与しません。

禁制帯 (Forbidden Band) 電子が存在することができないエネルギー領域。価電子帯と伝導帯の間のエネルギー差 (バンドギャップ) を指します。

伝導帯 (Conduction Band) 電子が原子の束縛を離れて自由に動くことができるエネルギー帯。ここに電子が励起されると電流が流れます。

※**金属の特徴**: 金属 (導体) では「価電子帯」と「伝導帯」が重なっているか、価電子帯に空きがあるため、室温でも電子は自由に動くことができます (自由電子)。

② 外部エネルギーの入射により電子が放出されるしくみ

エネルギーバンド図において、電子は通常、エネルギーの低い「ポテンシャルの井戸」の中にいます。外部から熱・光・強電界・電子衝突などのエネルギーを与えられると、電子のエネルギー準位が上昇 (励起) します。そのエネルギーが、物質表面の壁の高さである**真空準位**を超えたとき、電子は原子の束縛を断ち切って外部 (真空) へ飛び出します。

③ 金属内電子が金属外に飛び出さない理由

金属表面には**電位障壁 (Potential Barrier)** が存在するからです。電子が表面から外に出ようとする、金属表面に残された正電荷 (プラス) が電子 (マイナス) を引き戻そうとするクーロン力が働きます。これを**鏡像力 (イメージ力)** と呼びます。この力が壁となり、常温・無刺激の状態では電子は脱出できません。

④ 電子放出の共通的基础 (各用語の関係)

以下は電子放出に関わる主要なエネルギー項とその関係です (図や式で把握してください)。

$$\phi = W - E_F \quad (1)$$

- **真空準位 (Vacuum level)**: 真空中に”自由”な電子が存在するエネルギーを基準として $E = 0$ に取ることが多い。外へ放出するにはこのレベルまでエネルギーを得る必要がある。
- **全障壁 W (Potential barrier)**: 金属側の基準 (バンド底や局所ポテンシャル) から真空準位までのエネルギー差。真空側に出るための最大の障壁高さを表す。

- **フェルミ準位 E_F (Fermi level)**: 金属内で電子が占める最高エネルギー ($T = 0K$ での最高占有エネルギー)。通常は金属内部の基準に対する値で表す。
- **仕事関数 ϕ (Work function)**: フェルミ準位にある電子を真空準位まで持ち上げるのに必要なエネルギー差。式で表すと

$$\phi = W - E_F,$$

単位に注意 (ϕ が eV の場合、エネルギーとしては $e\phi$ [J] を用いる)。

- **電子の全エネルギー**: 金属内部の電子の全エネルギーは運動エネルギー K と位置 (ポテンシャル) エネルギー U の和で表され、

$$E_{\text{total}} = K + U.$$

真空準位を基準に見たとき、放出条件は

$$E_{\text{total}} + \Delta E_{\text{ext}} \geq 0,$$

すなわち外部から与えられるエネルギー ΔE_{ext} (熱・光・電界など) により、この不等式が満たされれば電子は脱出できる。

- **光電子放出の条件 (単純形)**: 単一光子過程では、入射光子エネルギー $h\nu$ が仕事関数に相当するエネルギーを上回る必要がある。表記の仕方により

$$h\nu \geq e\phi \quad (\text{J 単位の } \phi), \quad \text{あるいは} \quad h\nu/e \geq \phi \quad (\phi \text{ が eV の場合})$$

と表される。

⑤ 金属内電子のエネルギー (絶対零度における状態)

- **絶対温度 $T = 0K$** : 電子はエネルギーの低い準位から順に隙間なく詰まっています。
- **最高エネルギー**: 金属内電子は、最高で**フェルミ準位 E_F** までのエネルギーを持っています。それ以上の準位に電子は存在しません。

⑥ フェルミ準位とフェルミ分布関数の意味

- **フェルミ分布関数 $F(E)$** : あるエネルギー準位 E に電子が存在する確率 (0~1) を表す関数です。

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \quad (2)$$

- **フェルミ準位 E_F の定義 ($T > 0K$)**: 電子が存在する確率 $F(E)$ がちょうど **1/2 (50%)** になるエネルギー準位のことです。

⑦ エネルギー準位図のグラフ $F(E), n(E)$

- **$F(E)$ (分布関数)**:
 - $T = 0K$: E_F までは確率 1、それ以上は 0 (階段状)。
 - $T > 0K$: E_F 付近でなだらかに変化する曲線 (高温ほど裾野が広がる)。
- **$n(E)$ (電子密度)**: 実際に存在する電子の数分布。

$$n(E) \propto \sqrt{E} \times F(E)$$

放物線状の状態密度と、分布関数の積で表されます。 E_F 付近に多くの電子が存在します。

2 熱電子放出 (⑧～⑩)

⑧ 熱電子の飽和電流密度 (ダッシュマン・リチャードソンの式)

最も重要な公式です。温度 T と仕事関数 ϕ で電流密度 J が決まります。

公式暗記

$$J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \quad [\text{A/m}^2] \quad (3)$$

- A : リチャードソン定数 ($1.20 \times 10^6 [\text{A/m}^2\text{K}^2]$)
- k : ボルツマン定数
- T : 絶対温度 [K] (= 摂氏 + 273)

⑨ リチャードソン線から仕事関数と A を求める方法

リチャードソンの式を変形して対数 (log) をとります。

$$\ln\left(\frac{J}{T^2}\right) = \ln A - \frac{e\phi}{k} \cdot \frac{1}{T}$$

これを $Y = b - aX$ の形に見立てます。

- 縦軸 $Y = \ln(J/T^2)$
- 横軸 $X = 1/T$

としてグラフ (リチャードソンプロット) を描くと右下がりの直線になります。

- 直線の傾き: $-\frac{e\phi}{k} \rightarrow$ ここから 仕事関数 ϕ が求まる。
- Y 切片: $\ln A \rightarrow$ ここから 定数 A が求まる。

⑩ 熱陰極の具備条件

熱陰極 (熱電子放出を利用する陰極) に求められる主な条件を整理します。ここでの指標は、放出電流密度 J 、放出効率 (陰極能率) S ($[\text{A/W}]$)、運用寿命などです。

1. 仕事関数 ϕ が小さいこと: 同じ放出量を得るのに必要な温度 (エネルギー) を下げられるため、低温で運用できる。低い ϕ は放出電流密度を高める主要因。
2. 高い放出電流密度 J を得られること: 必要な電流を安定して供給できること。単位は $[\text{A/m}^2]$ で、用途に応じた十分な J を得られる材料が望ましい。
3. 陰極能率 (放出効率) S が高いこと (A/W): ヒータに与える入力パワーあたり得られる放出電流が大きいほど、消費電力が小さくすみ効率が良い。
4. 融点・熱安定性が高いこと: 高温での動作に堪え、形状や性能が劣化しにくい (融点が高い金属は材料的に有利)。
5. 寿命が長いこと (化学的・蒸発耐性): 高温での蒸発や化学反応、外的なイオン打撃などで性能が低下しに

くく、安定して長期間動作すること。

6. 真空中での安定性（不活性性・低蒸気圧）：真空での表面汚染や反応に強く、作動環境で仕事関数が変わりにくいこと。

extbf 備考：実際には材料ごとにトレードオフがあります。例えばタングステン（W）は融点が高く長寿命である一方、仕事関数が大きく高温が必要です。酸化物陰極（BaO / SrO）は低仕事関数で高効率だが、長時間の高温露出や汚染により劣化する場合があります。

extbf 代表材料：タングステン（W）、酸化物陰極（BaO/SrO：酸化バリウム・酸化ストロンチウム）、酸化モリブデン系など。用途により最適な材料が異なります（高出力用途は W、低消費電力・高効率用途は酸化物陰極など）。

3 光電子放出 (⑪～⑬)

⑪ 光電子放出条件

入射する光子のエネルギー $h\nu$ が、電子の脱出コスト（仕事関数 $e\phi$ ）以上である必要があります。

$$h\nu \geq e\phi$$

⑫ アインシュタインの式、限界周波数、限界波長

- ・ アインシュタインの式（エネルギー保存則）:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi$$

（飛び出す運動エネルギー）＝（入ってきた光エネルギー）－（脱出コスト）

- ・ 限界周波数 ν_0 ：電子放出が始まる最低の振動数。（ $h\nu_0 = e\phi$ ）
- ・ 限界波長 λ_0 ：電子放出が始まる最長の波長。

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{e\phi}$$

これより波長が短い光でないと放出されません（光のエネルギーは波長に反比例するため）。

⑬ 量子効率、光電感度

量子効率 η_q 「数」の割合。入射した光子 1 個あたり、何個の電子が放出されたか。

光電感度 S 「電流」の割合。入射した光パワー 1W あたり、何アンペアの電流が得られたか ($S = I/P$ [A/W])。

4 二次電子放出 (⑭～⑰)

⑭ 二次電子放出の原理

加速された電子（一次電子）が固体表面に衝突し、その運動エネルギーを固体内の電子に与えます。エネルギーを受け取った電子（二次電子）が、表面のポテンシャル障壁を超えて外部へ放出される現象です。

⑮ 放出比の測定方法

二次電子放出比 δ は、一次電子 1 個に対して何個の二次電子が出たかの比率です。

$$\delta = \frac{I_s(\text{二次電子流})}{I_p(\text{一次電子流})}$$

$\delta > 1$ のとき、電子が増倍（増幅）されます。

⑯ 放出特性曲線（なぜ山なりになるのか？）

横軸に一次電子の加速電圧 V_p 、縦軸に放出比 δ をとったグラフは山型になります。

- **低電圧領域:** 電圧を上げると衝突エネルギーが増えるため、たたき出される二次電子の数 (δ) は増加します。
- **ピーク (V_{pmax}):** δ が最大値 δ_{max} になります。
- **高電圧領域:** さらに電圧を上げると、一次電子が物質の奥深くまで入り込みすぎます。内部で発生した二次電子が表面まで戻ってくる間にエネルギーを失ってしまうため、逆に放出される数は減少します。

⑰ 光電子増倍管 (PMT) の原理

「光電効果」と「二次電子放出」を組み合わせた高感度センサです。

1. **光電面:** 光を受けて光電子を放出する（光 → 電子）。
2. **ダイノード（増倍部）:** 多段の電極に電子を衝突させ、二次電子放出を繰り返して電子をネズミ算式に増やす（雪崩増幅）。
3. **アノード:** 増えた電子を集めて電流として出力する。

5 電界放出と電界計算 (⑱～⑲)

⑱ ショットキー効果

金属表面に強い電界 E をかけると、電子が放出しやすくなる現象です。

- **原理:** 「鏡像力によるポテンシャルカーブ」と「外部電界による直線ポテンシャル」が合成されます。
- **結果:** 電位障壁の頂点が低くなり ($\Delta\phi$)、かつ位置が金属側に移動します。
- 仕事関数が見かけ上減少するため、熱電子放出電流が増加します。

⑲ 電界の強さと電位、ベクトル表記、ポアソン・ラプラスの方程式

【記述試験・レポート課題 4 対応重要項目】

空間内の電位 V と電界 E の間には、微分（勾配）の関係があります。

1. 電位 V と電界 E のベクトル関係

電界ベクトル E は、電位 V の勾配 (Gradient) の逆符号で定義されます。電位が高い方から低い方へ向かう傾きが電界の向きです。

重要公式

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\text{grad } V$$

成分表示 (直交座標系) では：

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

※ ∇ (ナブラ) はベクトル微分演算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ です。レポート課題 4 のように V が座標の関数で与えられた場合、各成分を偏微分して符号を変えることで電界を求めます。

2. 支配方程式 (ポアソン・ラプラス)

電位 V は空間内の電荷分布 ρ によって決定されます。

- ポアソンの方程式 (電荷 ρ がある場合) :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1 次元モデル (極板間など) では $\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ として積分計算に用います。

- ラプラスの方程式 (電荷がない場合 $\rho = 0$) :

$$\nabla^2 V = 0$$

3. 計算手順のまとめ (1 次元の場合)

記述問題で「電界と電位を求めよ」と問われた場合の定石です。

- 出発点: ポアソン方程式 $\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
- 第 1 積分: x で積分し、電界 $E_x = -\frac{dV}{dx}$ を求める (積分定数 C_1 出現)。
- 第 2 積分: もう一度積分し、電位 V を求める (積分定数 C_2 出現)。
- 境界条件: 与えられた条件 (例: $x = 0, V = 0$) を代入し、 C_1, C_2 を決定する。

第 II 部

過去問 詳細解法 (2024・2023)

計算の省略を一切せず、途中式を完全に記述しました。

2024 年度 試験問題

問 3. タングステン電極の仕事関数 ϕ

問題: $T = 2000[\text{K}]$ 、半径 $r = 1.25 \times 10^{-4}[\text{m}]$ 、長さ $L = 0.1[\text{m}]$ 、電流 $I = 2.00[\text{mA}]$ 。仕事関数 ϕ を求めよ。

解法: 1. 表面積 S の計算 (端面无視、側面積のみ)

$$S = 2\pi rL = 2 \times \pi \times (1.25 \times 10^{-4}) \times 0.100$$

$$S \approx 7.854 \times 10^{-5} [\text{m}^2]$$

2. 電流密度 J の計算

$$J = \frac{I}{S} = \frac{2.00 \times 10^{-3} [\text{A}]}{7.854 \times 10^{-5} [\text{m}^2]} \approx 25.46 [\text{A}/\text{m}^2]$$

3. リチャードソンの式から ϕ を逆算式: $J = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right)$ 両辺を AT^2 で割る:

$$\frac{J}{AT^2} = \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right)$$

自然対数 (\ln) をとる:

$$\ln\left(\frac{J}{AT^2}\right) = -\frac{e\phi}{kT}$$

ϕ について解く:

$$\phi = -\frac{kT}{e} \ln\left(\frac{J}{AT^2}\right) = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{AT^2}{J}\right)$$

4. 数値代入

- 係数部分: $\frac{kT}{e} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 2000}{1.60 \times 10^{-19}} = \frac{2.76 \times 10^{-20}}{1.60 \times 10^{-19}} = 0.1725 [\text{eV}]$
- 対数の中身: $\frac{AT^2}{J} = \frac{1.20 \times 10^6 \times (2000)^2}{25.46} = \frac{4.8 \times 10^{12}}{25.46} \approx 1.885 \times 10^{11}$
- 対数計算: $\ln(1.885 \times 10^{11}) = \ln(1.885) + 11 \ln(10) \approx 0.634 + 11(2.30) \approx 25.96$

$$\phi = 0.1725 \times 25.96 \approx 4.478$$

答: $\phi \approx 4.48 [\text{eV}]$

問 4. 光電子の最大速度 V_m

問題: $\phi = 1.68[\text{eV}]$ 、波長 $\lambda = 520[\text{nm}]$ 。

解法: 1. 光子エネルギー $h\nu$ の計算 (J 単位へ)

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{520 \times 10^{-9}}$$

$$h\nu = \frac{19.89 \times 10^{-26}}{5.20 \times 10^{-7}} \approx 3.825 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

2. 仕事関数 $e\phi$ のジュール換算

$$e\phi = 1.68 \times (1.60 \times 10^{-19}) = 2.688 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

3. 運動エネルギーの計算 (アインシュタインの式)

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - e\phi$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = (3.825 - 2.688) \times 10^{-19} = 1.137 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

4. 速度 V_m の計算

$$v_m^2 = \frac{2 \times 1.137 \times 10^{-19}}{m} = \frac{2.274 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}} \approx 0.2496 \times 10^{12}$$

$$v_m = \sqrt{0.2496 \times 10^{12}} \approx 0.4996 \times 10^6$$

答: $V_m \approx 5.00 \times 10^5 [\text{m/s}]$

問 6. 光電子増倍管の出力電流

問題: 入射 $P = 1.98 \times 10^{-5} [\text{W}]$ 、感度 $\eta = 27.0 [\text{mA/W}]$ 、増倍比 $\delta = 3.51$ 、段数 $n = 6$ 。

解法: 1. 初期光電流 I_0 の計算 単位に注意: $\text{mA} \rightarrow \text{A} (\times 10^{-3})$

$$I_0 = P \times \eta = (1.98 \times 10^{-5}) \times (27.0 \times 10^{-3})$$

$$I_0 = 53.46 \times 10^{-8} = 5.346 \times 10^{-7} [\text{A}]$$

2. 増倍率 (ゲイン) G の計算

$$G = \delta^n = 3.51^6$$

$$G = 3.51 \times 3.51 \times \dots \approx 1869$$

3. 出力電流 I の計算

$$I = I_0 \times G = 5.346 \times 10^{-7} \times 1869$$

$$I \approx 9991 \times 10^{-7} \approx 1.00 \times 10^{-3} [\text{A}]$$

答: $I \approx 1.00 [\text{mA}]$

2023 年度 試験問題

問 1. 鏡像力と電位障壁

(1) 力の大きさ: 金属表面から距離 x に電子、反対側距離 x に鏡像電荷。距離合計 $2x$ 。

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \times e}{(2x)^2} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$$

(3) 電位障壁 W の計算 (積分):

$$W = \int_x^\infty |F| dr = \int_x^\infty \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$W = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_x^\infty = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0} \left(0 - \left(-\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x} [\text{J}]$$

eV 単位にするため e で割る: 答: $\frac{e}{16\pi\epsilon_0 x} [\text{eV}]$

問 3. モリブデン線の半径 r

問題: $T = 2000$, $I = 22.8\text{mA}$, $L = 0.1$, $\phi = 4.27\text{eV}$ 。解法: 1. 電流密度 J の理論値を先に計算指数部:

$$\frac{e\phi}{kT} = \frac{1.60 \times 10^{-19} \times 4.27}{1.38 \times 10^{-23} \times 2000} \approx \frac{6.832}{0.276} \times 10^4 \approx 24.75$$

$$J = AT^2 \exp(-24.75) = (1.20 \times 10^6) \times (2000)^2 \times (1.78 \times 10^{-11})$$

$$J = 4.8 \times 10^{12} \times 1.78 \times 10^{-11} \approx 85.6 [\text{A/m}^2]$$

2. 半径 r の逆算

$$I = J \times S = J \times 2\pi r L$$

$$r = \frac{I}{2\pi L J} = \frac{22.8 \times 10^{-3}}{2\pi \times 0.1 \times 85.6}$$

$$r = \frac{0.0228}{53.78} \approx 4.24 \times 10^{-4} [\text{m}]$$

問 4. 限界波長 λ_0

解法:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{e\phi} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{1.60 \times 10^{-19} \times 1.72}$$

$$\lambda_0 = \frac{19.89 \times 10^{-26}}{2.752 \times 10^{-19}} \approx 7.227 \times 10^{-7} [\text{m}]$$

答: $\approx 723 [\text{nm}]$

問 6. 電界の強さ E_x

問題: 電位 $V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ のとき E_x を求めよ。解法: 電界の定義: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ として偏微分する (合成関数の微分)。

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \times \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \times (2x)$$

$$= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

符号を反転して電界にする:

$$E_x = -(-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

第 III 部

重要演習課題 (レポート課題・記述対策)

提出レポート課題として課された問題の詳細解答です。試験でも同様の数値計算や記述（特に課題 4 のベクトル演算）が出題される可能性が高いため、プロセスを完璧に理解してください。

課題 1: 熱電子放出とフィラメント設計

条件:

- 温度 $T = 2500$ [K]
- 半径 $r = 1.50 \times 10^{-4}$ [m]
- 全電流 $I = 2.00 \times 10^{-3}$ [A]
- 仕事関数 $\phi = 4.52$ [eV]

【ステップ 1】リチャードソン定数 A の理論値導出

定数 A は以下の理論式で与えられます。

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\pi m e k^2}{h^3} \\ &= \frac{4\pi (9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(1.38 \times 10^{-23})^2}{(6.63 \times 10^{-34})^3} \\ &\approx 1.201 \times 10^6 [\text{A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}] \end{aligned}$$

※試験では $A = 1.20 \times 10^6$ が与えられることが一般的ですが、導出を問われる可能性もあるため式と値を覚えておきましょう。

【ステップ 2】電流密度 J の算出

リチャードソン・ダッシュマンの式を用います。

$$\begin{aligned} J &= AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) \\ \text{指数部の計算: } &\frac{(1.60 \times 10^{-19}) \times 4.52}{(1.38 \times 10^{-23}) \times 2500} \approx \frac{7.232}{3.45} \times 10^4 \times 10^{-4} \approx 20.962 \\ J &= (1.201 \times 10^6) \times (2500)^2 \times \exp(-20.962) \\ &= (7.506 \times 10^{12}) \times (7.876 \times 10^{-10}) \\ &\approx 5.912 \times 10^3 [\text{A/m}^2] \end{aligned}$$

【ステップ 3】フィラメント長 L の決定

全電流 I は電流密度 J と表面積 S の積です。

$$S = 2\pi rL \quad \text{より} \quad I = J \cdot (2\pi rL)$$

よって、

$$\begin{aligned} L &= \frac{I}{2\pi rJ} \\ &= \frac{2.00 \times 10^{-3}}{2\pi \times (1.50 \times 10^{-4}) \times (5.912 \times 10^3)} \\ &= \frac{2.00 \times 10^{-3}}{5.572} \\ &\approx 3.589 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\therefore L \approx 3.59 \times 10^{-4} [\text{m}]$$

課題 2: 光電子効果と最大速度

条件:

- 仕事関数 $\phi = 4.27 [\text{eV}]$
- 波長 $\lambda = 45.5 [\text{nm}] = 4.55 \times 10^{-8} [\text{m}]$

解答プロセス: 光電効果の式 $\frac{hc}{\lambda} = e\phi + \frac{1}{2}mv_m^2$ を v_m について解きます。

1. 光エネルギー $h\nu$ (J):

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})(3.00 \times 10^8)}{4.55 \times 10^{-8}} \approx 4.371 \times 10^{-18} [\text{J}]$$

2. 仕事関数 $e\phi$ (J):

$$e\phi = (1.60 \times 10^{-19}) \times 4.27 \approx 6.832 \times 10^{-19} = 0.6832 \times 10^{-18} [\text{J}]$$

3. 運動エネルギー K :

$$K = h\nu - e\phi = (4.371 - 0.683) \times 10^{-18} = 3.688 \times 10^{-18} [\text{J}]$$

4. 速度 v_m :

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.688 \times 10^{-18}}{9.11 \times 10^{-31}}} \\ &= \sqrt{\frac{7.376}{9.11} \times 10^{13}} = \sqrt{0.8096 \times 10^{13}} = \sqrt{8.096 \times 10^{12}} \\ &\approx 2.845 \times 10^6 \end{aligned}$$

$$\therefore v_m \approx 2.85 \times 10^6 [\text{m/s}]$$

課題 3: 二次電子放出比と PMT 入力計算

条件:

- 二次電子放出比 $\delta = 4.0$

- 段数 $n = 10$
- コレクタ電流（出力） $I_o = 0.125 \times 10^{-3} [\text{A}]$

解答プロセス: 総合利得（ゲイン） G は δ^n で表されます。

$$I_o = I_p \cdot \delta^n \quad \Longleftrightarrow \quad I_p = \frac{I_o}{\delta^n}$$

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{0.125 \times 10^{-3}}{4.0^{10}} \\ &= \frac{1.25 \times 10^{-4}}{1048576} \quad (\because 2^{20} \approx 10^6) \\ &\approx \frac{1.25 \times 10^{-4}}{1.05 \times 10^6} \\ &\approx 1.192 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

$$\therefore I_p \approx 1.19 \times 10^{-10} [\text{A}]$$

課題 4: 電位分布からの電界ベクトル導出

条件:

$$V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} [\text{V}]$$

電界 \mathbf{E} を求めよ。

解答プロセス: ポイント⑨で解説した通り、電界は電位の勾配（gradient）の逆符号です。

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ と置くと $V = r^{-1}$ です。 x についての偏微分を行います（合成関数の微分）。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2x) \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

電界 E_x はこれにマイナスを掛けたものなので、

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y, z についても対称性より同様の結果となります。

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) [\text{V/m}]$$

※ ベクトル表記 (x, y, z) や \mathbf{r}/r^3 といった表記でも正解となります。