# 論理トレーニング レポート課題

学籍番号 氏名

2026 年 1 月 31 日

# 問題

## 1. 命題論理の同値変形

$p, q, r, s$ を命題とするとき、次の (1), (2) を同値変形により示せ。

(1)

$$(p \wedge q) lor (r \wedge s) \equiv (p lor r) \wedge (p lor s) \wedge (q lor r) \wedge (q lor s)$$

(2)

$$(p lor q) \wedge (r lor s) \equiv (p \wedge r) lor (p \wedge s) lor (q \wedge r) lor (q \wedge s)$$

## 2. 述語論理と量化子

命題関数 $p(x), q(x)$ $(x \in X)$ に対して、次が成り立つ。

(1)

$$\forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x) \equiv \forall x\ (p(x) \wedge q(x))$$

(2)

$$\forall x\ p(x) lor \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x\ (p(x) lor q(x))$$

(3)

$$\exists x\ (p(x) lor q(x)) \equiv \exists x\ p(x) lor \exists x\ q(x)$$

(4)

$$\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$$

$X = \{a_1, a_2\}$ とするとき、同値変形により (2) を示せ。

(Hint: $\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \to \forall x\ (p(x) \vee q(x)) \equiv I$ を示す。)

## 3. 命題関数の真理値判定

次の命題関数 $p(\epsilon, N)$ に対して、(1), (2) はそれぞれどんな命題か。また、その真理値を答えよ。

$$\epsilon \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$N \in \mathbb{N}$$
$$p(\epsilon, N) : N\epsilon > 1$$

(1)

$$\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)$$

(2)

$$\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)}$$

## 4. ε -N 論法による極限証明

$\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$ であることを、ε -N 論法を用いて証明せよ。

## 5. ε - δ 論法による極限証明

$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ であることを、ε - δ 論法を用いて証明せよ。

# 解答

## 1. 命題論理の同値変形

$p, q, r, s$ を命題とする。

### (1) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

*Proof.* 右辺に対し、分配法則 $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ を適用して整理する。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \big[(p \vee r) \wedge (p \vee s)\big] \wedge \big[(q \vee r) \wedge (q \vee s)\big] \\
&= \big[p \vee (r \wedge s)\big] \wedge \big[q \vee (r \wedge s)\big] && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (r \wedge s) \vee (p \wedge q) && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \\
&= \text{左辺}
\end{aligned}$$

■

### (2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

*Proof.* 左辺に対し、分配法則を順次適用して展開する。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (p \vee q) \wedge (r \vee s) \\
&= \big((p \vee q) \wedge r\big) \vee \big((p \vee q) \wedge s\big) && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s) && (\because \text{Distributive Law}) \\
&= (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) && (\because \text{Commutativity}) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

■

## 2. 述語論理と量化子

$X = \{a_1, a_2\}$ とする。

$$\forall x \in X, p(x) \vee \forall x \in X, q(x) \implies \forall x \in X, (p(x) \vee q(x))$$

*Proof.* 定義域が有限集合であるため、$\forall x$ を要素ごとの論理積に書き換える。$p(a_i) = p_i,\ q(a_i) = q_i$ とおく。

$$
\begin{aligned}
\text{結論（右辺）} &= (p_1 \lor q_1) \land (p_2 \lor q_2) \\
&= (p_1 \land p_2) \lor (p_1 \land q_2) \lor (q_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) && \text{(展開)}
\end{aligned}
$$

一方、仮定（左辺）は $(p_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2)$ である。論理和の導入則 $A \implies A \lor B$ より、

$$(p_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) \implies (p_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) \lor \underbrace{(p_1 \land q_2) \lor (q_1 \land p_2)}_{\text{追加項}}$$

したがって、左辺 $\implies$ 右辺 が成立する。 ■

## 3. 命題関数の真理値判定

定義：$p(\epsilon, N) : N\epsilon > 1 \quad (\epsilon > 0, N \in \mathbb{N})$

### (1) $\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)$

**意味：**「任意の正数 $\epsilon$ に対し、$N\epsilon > 1$ を満たす自然数 $N$ が存在する」
**真理値：真**

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } N > \frac{1}{\epsilon}$$

このとき,

$$N > \frac{1}{\epsilon} \implies N\epsilon > 1$$

（Archimedean Property）

### (2) $\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)}$

**真理値：偽**

$$
\begin{aligned}
\overline{\forall \epsilon \ \exists N \ p(\epsilon, N)} &\equiv \exists \epsilon \ \overline{\exists N \ p(\epsilon, N)} && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \exists \epsilon \ \forall N \ \overline{p(\epsilon, N)} && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \overline{p(\epsilon, N)} \\
&\equiv \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \overline{N\epsilon > 1} && (p(\epsilon, N) \text{ の定義より}) \\
&\equiv \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, N\epsilon \leq 1 \\
&\equiv \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, N \leq \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

**意味：**「ある正数 $\epsilon$ が存在して、全ての自然数 $N$ に対して $N\epsilon \leq 1$ が成り立つ」

しかし、任意の実数 $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ に対して，$N > M$ を満たす自然数 $N$ が存在する（アルキメデスの公理)。したがって、いかなる $\epsilon > 0$ に対しても、$N\epsilon > 1$ を満たす自然数が存在し，命題と矛盾する。

$$\therefore (2) \text{ の命題は偽}$$

## 4. $\epsilon - N$ 論法による極限証明

命題：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

*Proof.* $\forall\epsilon>0$ に対し、アルキメデスの公理より

$$\exists N\in\mathbb{N}\quad \text{s.t.}\quad N>\frac{1}{\epsilon}$$

が存在する。任意の $n>N$ について、

$$n>N>\frac{1}{\epsilon}\implies\frac{1}{n}<\epsilon$$

よって、

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon$$

以上より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。 ■

## 5. $\epsilon - \delta$ 論法による極限証明

### 【ノート】$\delta$ の導出過程

$|x-1|<\delta$ ならば $|x^2-1|<\epsilon$ となる $\delta$ を逆算する。

$$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|x-1|\cdot|x+1|$$

$\delta\le 1$ と設定すれば、

$$\begin{aligned}|x-1|<1&\implies -1<x-1<1\\&\implies 0<x<2\\&\implies |x+1|<3\end{aligned}$$

したがって $|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<3|x-1|$。これが $\epsilon$ より小さくするには、$|x-1|<\frac{\epsilon}{3}$ が必要。両条件を満たすため,

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\epsilon}{3}\right\}$$

### 【証明】

命題：$\displaystyle\lim_{x\to1}x^2=1$

*Proof.* $\forall\epsilon>0$ に対し、$\delta=\min\left\{1,\frac{\epsilon}{3}\right\}$ とおく。

$0<|x-1|<\delta$ なる $x$ について評価を行う。

1. $\delta\le 1$ より、

$$|x-1|<1\implies 0<x<2\implies |x+1|<3$$

2. $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ より、

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= |x-1||x+1| \\ &< \frac{\epsilon}{3} \cdot 3 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x \to 1} x^2 = 1$ ■