論理トレーニング レポート課題

氏名

2026 年 1 月 30 日

解答

1. 命題論理の同値変形

(1) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

証明： 右辺を展開して、左辺と一致することを示す。右辺に対し、分配法則 $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)$ を適用して整理する。

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \big((p \vee r) \wedge (p \vee s)\big) \wedge \big((q \vee r) \wedge (q \vee s)\big) \\
&= \big(p \vee (r \wedge s)\big) \wedge \big(q \vee (r \wedge s)\big) \quad \text{（分配法則の逆向き）} \\
&= (r \wedge s) \vee (p \wedge q) \quad \text{（分配法則）} \\
&= (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}$$

よって示された。 ■

(2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

証明： 左辺に対し、分配法則を順次適用して展開する。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (p \vee q) \wedge (r \vee s) \\
&= \big((p \vee q) \wedge r\big) \vee \big((p \vee q) \wedge s\big) \quad \text{（分配法則）} \\
&= (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s) \quad \text{（分配法則）} \\
&= (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s) \quad \text{（交換法則・結合法則）} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

よって示された。 ■

2. 述語論理と量化子

$X = \{a_1, a_2\}$ のとき、以下を示す。

$$\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \implies \forall x\, (p(x) \vee q(x))$$

証明： $p(a_i)$ を p_i、$q(a_i)$ を q_i と略記する。このとき、それぞれの命題は以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺(仮定)} &: (p_1 \wedge p_2) \vee (q_1 \wedge q_2) \\
\text{右辺(結論)} &: (p_1 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2)
\end{aligned}$$

ここで、結論（右辺）を分配法則で展開してみる。

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= (p_1 \lor q_1) \land (p_2 \lor q_2) \\ &= (p_1 \land p_2) \lor (p_1 \land q_2) \lor (q_1 \land p_2) \lor (q_1 \land q_2) \quad \text{（分配法則）}\end{aligned}$$

展開した式の中に、左辺の「$(p_1 \land p_2)$」と「$(q_1 \land q_2)$」が含まれていることがわかる。「A ならば $A \lor B$」は恒真（同一律・包含律）であるため、

$$(\text{左辺}) \implies (\text{右辺})$$

は成り立つ。 ■

3. 命題関数の真理値判定

$p(\epsilon, N) : N\epsilon > 1$ とする。

(1) $\forall \epsilon \, \exists N \, p(\epsilon, N)$

答え：真

理由： どんなに小さな正の数 ϵ に対しても、それより逆数が大きい自然数 N（つまり $N > 1/\epsilon$）を選ぶことができる（アルキメデスの公理）からである。

(2) $\overline{\forall \epsilon \, \exists N \, p(\epsilon, N)}$

この命題は否定をとると、「ある ϵ があって、すべての N で $N\epsilon \leq 1$」という意味になる。

答え：偽

理由： もしこれが正しいとすると、ある数 ϵ に対して $N \leq 1/\epsilon$ が全ての自然数 N で成り立つことになってしまう。しかし、自然数 N はいくらでも大きくできるため、上限があることはありえない。よって矛盾するので偽である。

4. $\epsilon - N$ 論法による極限証明

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ を示す。

証明： 任意の $\epsilon > 0$ をとる。これに対して、$\frac{1}{\epsilon} < N$ となる自然数 N をひとつ選ぶ（アルキメデスの公理により、このような N は必ず存在する）。

このとき、$n > N$ となる全ての n について、

$$n > N > \frac{1}{\epsilon}$$

が成り立つ（実数の順序の推移律）。逆数をとると不等号が逆転して、

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

となる（正の数の逆数をとると不等号が反転する性質）。したがって、

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

が言えるので、極限値は 0 である。 ■

5. $\epsilon - \delta$ 論法による極限証明

$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ を示す。

証明： 任意の $\epsilon > 0$ をとる。ここで、$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\}$ と定める。

$|x-1| < \delta$ のとき、$|x^2-1|$ がどうなるか計算する。まず、$|x^2-1| = |x-1|\,|x+1|$ である（因数分解と絶対値の積の性質）。

さらに $|x-1| < 1$ を仮定すれば $0 < x < 2$ となり、よって $|x+1| < 3$ が得られる（実数の順序の性質）。したがって

$$|x^2-1| = |x-1||x+1| < 3|x-1|$$

となる。ここで $|x^2-1| < \epsilon$ を保証したいので、

$$3|x-1| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たせば十分である（不等式の同値変形）。

1. $\delta \leq 1$ なので、$|x-1| < 1$ である。これより $0 < x < 2$ となるので、$|x+1| < 3$ と評価できる。2. また、$\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ なので、$|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$ である。

以上より、

$$|x^2-1| = |x-1|\,|x+1| < \frac{\epsilon}{3} \cdot 3 = \epsilon \quad \text{（積の不等式）}$$

となり、$|x^2-1| < \epsilon$ が示された。よって、極限値は 1 である。 ■