IIR数字滤波器的直接设计

实验涉及的MATLAB子函数

1.butter

功能： 巴特沃斯(Butterworth)模拟或数字滤波器设计。

调用格式：

［b，a］＝butter(n，wn)；设计截止频率为wn的n阶巴特沃斯数字滤波器，即

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b(1)+b(2)z^{-1}+\cdots+b(n+1)z^{-n}}{1+a(2)z^{-1}+\cdots+a(n+1)z^{-n}} \tag{15-1}$$

其中，截止频率是幅度下降到 处的频率。$wn\in[0,1]$，1对应0.5Fs(取样频率)。$wn=[w1,w2]$时，产生数字带通滤波器。

$[b,a]=butter(n,wn,'ftype')$；可设计高通和带阻数字滤波器。ftype＝high时，设计高通滤波器；ftype＝stop时，设计带阻滤波器，此时$wn=[w1,w2]$。

$[b,a]=butter(n,wn,'s')$；设计截止频率为wn的n阶巴特沃斯模拟低通或带通滤波器，其中$wn>0$。即

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b(1)s^{n}+b(2)s^{n-1}+\cdots+b(n+1)}{s^{n}+a(2)s^{n-1}+\cdots+a(n+1)}$$

［b，a］＝butter(n，wn，′ftype′，′s′)；设计截止频率为wn的n阶巴特沃斯模拟高通或带阻滤波器。

［z，p，k］＝butter(n，wn)和［z，p，k］＝butter(n，wn，′ftype′)可得到巴特沃斯滤波器的零极点增益表示。

［A，B，C］＝butter(n，wn)和［A，B，C］＝butter(n，wn，′ftype′)可得到巴特沃斯滤波器的状态空间表示。

2.cheby1

功能： 切比雪夫Ⅰ型滤波器设计(通带等波纹)。

调用格式：

[b，a] ＝cheby1(n，Rp，Wn)；设计截止频率为wn的n阶切比雪夫Ⅰ型数字低通和带通滤波器。

[b，a] ＝cheby1(n，Rp，Wn，′ftype′)；设计截止频率为wn的n阶切比雪夫Ⅰ型数字高通和带阻滤波器。

[b，a] ＝cheby1(n，Rp，Wn，′s′)；设计切比雪夫Ⅰ型模拟低通和带通滤波器。

［b，a］＝cheby1(n，Rp，Wn，′ftype′，′s′)；设计模拟高通和带阻滤波器。

［z，p，k］＝cheby1(...)；可得到切比雪夫Ⅰ型滤波器的零极点增益表示。

［A，B，C，D］＝cheby1(...)；可得到切比雪夫Ⅰ型滤波器的状态空间表示。

说明：切比雪夫Ⅰ型滤波器其通带内为等波纹，阻带内为单调。切比雪夫Ⅰ型滤波器的下降斜率比Ⅱ型大，但其代价是在通带内的波纹较大。

与butter函数类似，cheby1函数可设计数字域和模拟域的切比雪夫Ⅰ型滤波器，其通带内的波纹由Rp(分贝)确定。其它各公式的使用方法与butter函数相同，可参考相应公式。

3.cheby2

功能： 切比雪夫Ⅱ型滤波器设计(阻带等波纹)。

调用格式：

[b，a] =cheby2(n，As，Wn)；设计截止频率为wn的n阶切比雪夫Ⅱ型数字低通和带通滤波器。

[b，a] =cheby2(n，As，Wn，′ftype′)；设计截止频率为wn的n阶切比雪夫Ⅱ型数字高通和带阻滤波器。

[b，a] =cheby2(n，As，Wn，′s′)；设计切比雪夫Ⅱ型模拟低通和带通滤波器。

[b，a] =cheby2(n，As，Wn，′ftype′，′s′)；设计模拟高通和带阻滤波器。

［z，p，k］＝cheby2(...)；可得到切比雪夫Ⅱ型滤波器的零极点增益表示。

［A，B，C，D］＝cheby2(...)；可得到切比雪夫Ⅱ型滤波器的状态空间表示。

说明：cheby2函数其通带内为单调，阻带内为等波纹，因此，由As确定阻带内的波纹。其它各公式的使用方法与butter函数相同，可参考相应公式。

4.ellip

功能： 椭圆滤波器设计。

调用格式：

[b，a] =ellip(n，Rp，As，Wn)；设计截止频率为wn的n阶椭圆数字低通和带通滤波器。

[b，a] =ellip(n，Rp，As，Wn，'ftype')；设计截止频率为wn的n阶椭圆数字高通和带阻滤波器。

[b，a] =ellip(n，Rp，As，Wn，'s')；设计椭圆模拟低通和带通滤波器。

[b，a] =ellip(n，Rp，As，Wn，'ftype'，'s')；设计模拟高通和带阻滤波器。

［z，p，k］＝ellip(...)；可得到椭圆滤波器的零极点增益表示。

［A，B，C，D］＝ellip(...)；可得到椭圆滤波器的状态空间表示。

Ellip函数可得到下降斜度更大的滤波器，但在通带和阻带内均为等波动的。椭圆滤波器能以最低的阶数实现指定的性能。

三、实验原理

1.用直接法设计模拟和数字滤波器

在前面讨论IIR数字滤波器设计的实验中，我们采用先设计模拟低通原型滤波器，再变换成实际模拟滤波器的方法，如图15-1所示的方法1。这个过程一般要使用以下几条程序：

```
[z0，p0，k0] =buttap(n);        %归一化原型设计
ba=k0*real(poly(z0));  %求原型滤波器系数b
aa=real(poly(p0));  %求原型滤波器系数a
[ba1，aa1] =lp2lp(ba，aa，Omgc);  %变换为模拟低通滤波器系数b，a
```

本实验介绍的设计模拟滤波器的方法——直接法，则采用图15-1所示的方法2。只需用一条程序就可替代上面4行程序，即

[ba_1，aa_1] = butter(n，wc，′s′)；

这条程序执行后，将生成一组实际的模拟滤波器系数。这条程序中的′s′是不能缺少的，如果不加′s′，则设计的结果是数字滤波器，如

[bd，ad] = butter(n，wn)；

这条程序执行后，整个设计已经进行到图15-1所示的最后一步。

下面分别介绍各类实际模拟滤波器和数字滤波器的设计。

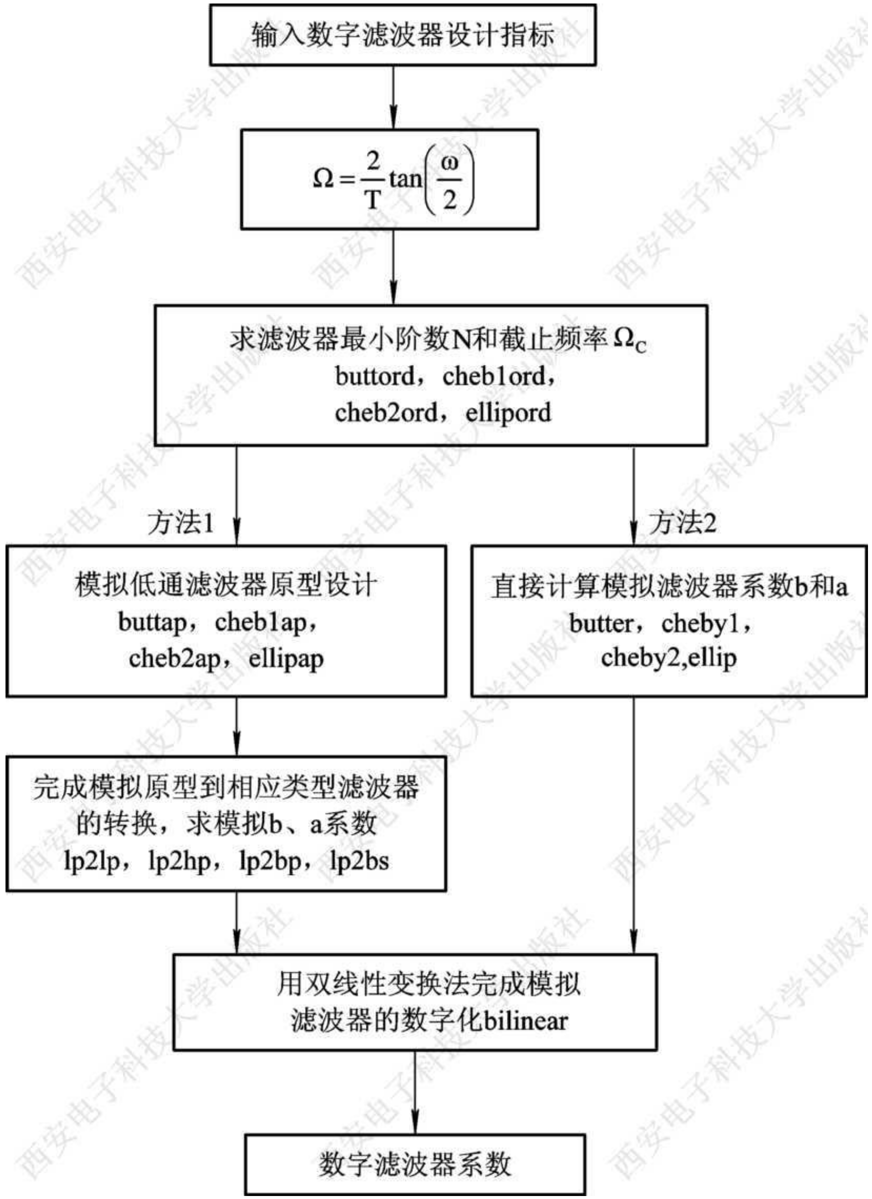

图15-1 IIR数字滤波器的设计步骤

2.IIR数字滤波器设计方法的比较

例15-1 设计一个巴特沃斯数字低通滤波器，要求通带$f_p = 150$ Hz，$R_p = 3$ dB；阻带$f_s = 250$ Hz，$A_s = 20$ dB，滤波器采样频率$F_s = 800$ Hz。

解 用图15-1所示的方法1、方法2及数字滤波器直接法求解，程序如下：

```
%数字滤波器指标
fp = 150;  fs = 250;  Fs = 800;  T = 1/Fs;
wp = fp/Fs*2*pi;          %数字滤波器的通带截止频率
ws = fs/Fs*2*pi;  %数字滤波器的阻带截止频率
```

Rp = 3；As = 20；%输入滤波器的通阻带衰减指标

%转换为模拟滤波器指标

Omgp = (2/T)*tan(wp/2)；

Omgs = (2/T)*tan(ws/2)；

［n，Omgc］ = buttord(Omgp，Omgs，Rp，As，′s′) %计算阶数n和截止频率

%方法1：模拟原型滤波器计算

［z0，p0，k0］ = buttap(n)；%归一化巴特沃斯原型设计

ba = k0*real(poly(z0))；%求原型滤波器系数b

aa＝real(poly(p0))； %求原型滤波器系数a

［ba_1， aa_1］ ＝lp2lp(ba， aa， Omgc)；%变换为模拟低通滤波器

［bd1， ad1］ ＝bilinear(ba_1， aa_1， Fs)%双线性变换

［H1， w1］ ＝freqz(bd1， ad1)；

dbH1＝20*log10(abs(H1)/max(abs(H1)))； %化为分贝值

%方法2：直接求模拟滤波器系数

［ba_2， aa_2］ ＝butter(n， Omgc， ′s′)；

%用双线性变换法计算数字滤波器系数

```
［bd2， ad2］ ＝bilinear(ba2， aa2， Fs)    %双线
                                         性变换
［H2， w2］ ＝freqz(bd2， ad2)；
dbH2＝20*log10(abs(H2)/max(abs(H2)))； %化为分贝值
%方法3： 直接求数字滤波器系数
［n3， wc3］ ＝buttord(wp/pi， ws/pi， Rp， As)；
［bd3， ad3］ ＝butter(n3， wc3)
［H3， w3］ ＝freqz(bd3， ad3)；
dbH3＝20*log10(abs(H3)/max(abs(H3)))； %化为分贝值
subplot(3， 2， 1)， plot(w1/2/pi*Fs， dbH1， 'k')；
```

title('方法1幅度响应(dB)')；axis(［0，Fs/2，－40，5］)；

ylabel(' dB')；

set(gca，'XTickMode'，'manual'，'XTick'，［0，fp，fs，Fs/2］)；

set(gca，'YTickMode'，'manual'，'YTick'，［－50，－20，－3，0］)；grid

subplot(3，2，2)，plot(w1/2/pi*Fs，angle(H1)/pi*180，'k')；

title('相位响应')；axis(［0，Fs/2，－180，180］)；

ylabel(' \ phi')；

set(gca, ′XTickMode′, ′manual′, ′XTick′, [0, fp, fs, Fs/2]);

set(gca, ′YTickMode′, ′manual′, ′YTick′, [–180, 0, 180]); grid

作图部分只给出了方法1的程序，其余两种方法的作图程序基本与方法1相同。

程序运行结果如下:

n = 3

Omgc = 1.1133e + 003

bd1 = 0.0911 0.2734 0.2734 0.0911

ad1 = 1.0000 – 0.6526 0.4465 – 0.0649

bd2 = 0.0911 0.2734 0.2734 0.0911

ad2 = 1.0000 – 0.6526 0.4465 – 0.0649

bd3 = 0.0911 0.2734 0.2734 0.0911

ad3 = 1.0000 – 0.6526 0.4465 – 0.0649

频率响应特性曲线如图15-2所示。

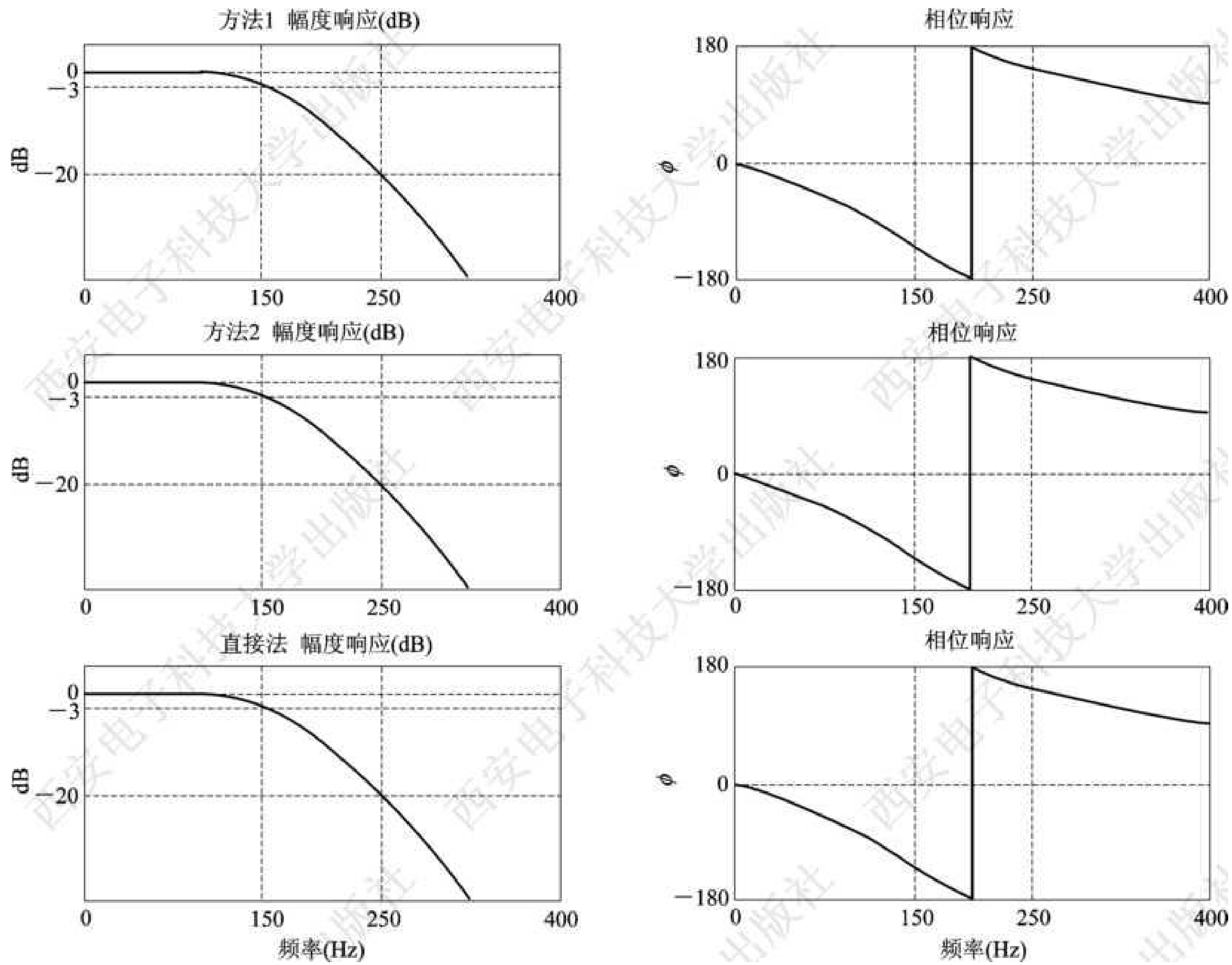

图15-2 三种方法设计的IIR数字滤波器的频率响应

由上述三种方法设计数字滤波器的结果看，三组数据和图形完全相同；从程序结构上看，直接法比其它两种方法简单得多。

另外，由于大规模集成电路和计算机技术的迅速发展，模拟滤波器的设计只是为了最终设计数字滤波器进行的前期准备，因此，下面的讨论以数字滤波器的设计为主，不再讨论模拟滤波器的设计。

3.用MATLAB直接法设计IIR数字滤波器

例15-2 采用MATLAB直接法设计一个巴特沃斯数字高通滤波器，要求：$\omega_p = 0.25\pi$，$R_p = 1$ dB；$\omega_s = 0.4\pi$，$A_s = 20$ dB，滤波器采样频率$F_s = 200$Hz。要求描绘其幅频特性和相频特性曲线，列写系统传递函数表达式。解 程序如下：

```
ws = 0.25;              %数字滤波器的阻带截止频率
wp = 0.4;  %数字滤波器的通带截止频率
Rp = 1;  As = 20;  %输入滤波器的通阻带衰减指标
Fs = 200;
```

［n，wc］＝buttord(wp，ws，Rp，As)%计算阶数n和截止频率

［b，a］＝butter(n，wc，′high′)%直接求数字高通滤波器系数

freqz(b，a)；%求数字系统的频率特性

程序执行结果如图15-3(a)所示。从图中可见，横轴是归一化的频率坐标，其单位是π，长度对应采样频率的一半。如果要显示实际的频率数值，则应输入下一条程序：

freqz(b，a，512，Fs)；%求数字系统的频率特性

此时执行的结果如图15-3(b)所示。从图中可见，横轴是实际的频率坐标，其单位为Hz，长度对应采样频率的一半。两个图形是完全一致的，差别仅在于频率轴的标注。

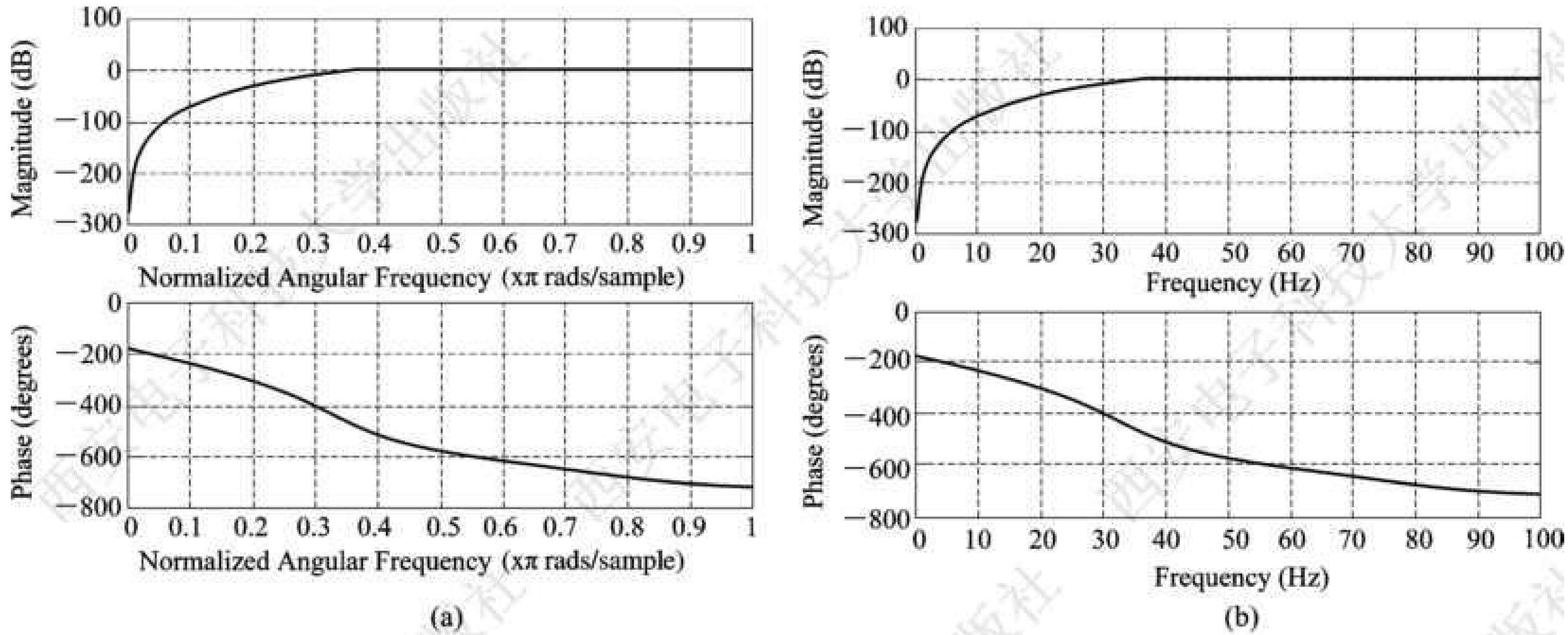

图15-3 用直接法设计的巴特沃斯数字高通滤波器特性

程序执行结果如下：

n = 6

wc = 0.3475

b = 0.1049 – 0.6291 1.5728 – 2.0971 1.5728 – 0.6291 0.1049

a = 1.0000 – 1.8123 2.0099 – 1.2627 0.5030 – 0.1116 0.0110

该系统的传递函数应为

$$H(z)=\frac{0.1049-0.6291z^{-1}+1.5728z^{-2}-2.0971z^{-3}+1.5728z^{-4}-0.6291z^{-5}+0.1049z^{-6}}{1-1.8123z^{-1}+2.0099z^{-2}-1.2627z^{-3}+0.503z^{-4}-0.1116z^{-5}+0.011z^{-6}}$$

例15-3 采用MATLAB直接法设计一个切比雪夫Ⅰ型数字带通滤波器，要求：$\omega_{p1} = 0.25\pi$，$\omega_{p2} = 0.75\pi$，$R_p = 1$ dB；$\omega_{s1} = 0.85\pi$，$\omega_{s1} = 0.15\pi$，$A_s = 20$ dB。请描绘滤波器归一化的绝对和相对幅频特性、相频特性、零极点分布图，列出系统传递函数式。

解 程序如下：

ws1 = 0.15；ws2 = 0.85；　　　　%数字滤波器的阻带截止频率

ws = ［ws1，ws2］；

wp1＝0.25； wp2＝0.75； %数字滤波器的通带截止频率

wp＝［wp1， wp2］；

Rp＝1； As＝20； %输入滤波器的通阻带衰减指标

［n， wc］ ＝cheb$_1$ord(wp， ws， Rp， As)%计算阶数n和截止频率

［b， a］ ＝cheby1(n， Rp， wc)%直接求数字带通滤波器系数

［H， w］ ＝freqz(b， a)； %求数字系统的频率特性

```
dbH = 20*log10((abs(H) + eps)/max(abs(H)));   %化为分贝值
subplot(2， 2， 1)， plot(w/pi， abs(H))；
subplot(2， 2， 2)， plot(w/pi， angle(H))；
subplot(2， 2， 3)， plot(w/pi， dbH)；
subplot(2， 2， 4)， zplane(b， a)；
```

程序执行结果为

$n = \ 3$

$wc = 0.2500\ 0.7500$

$b = 0.1321\ \ 0\quad -0.3964\ 0\quad 0\quad -0.1321$

$a = 1.0000\ \ -0.0000\quad 0.34320.0000\ 0.6044$

$-0.0000\ \ 0.2041$

特性曲线如图15-4所示。

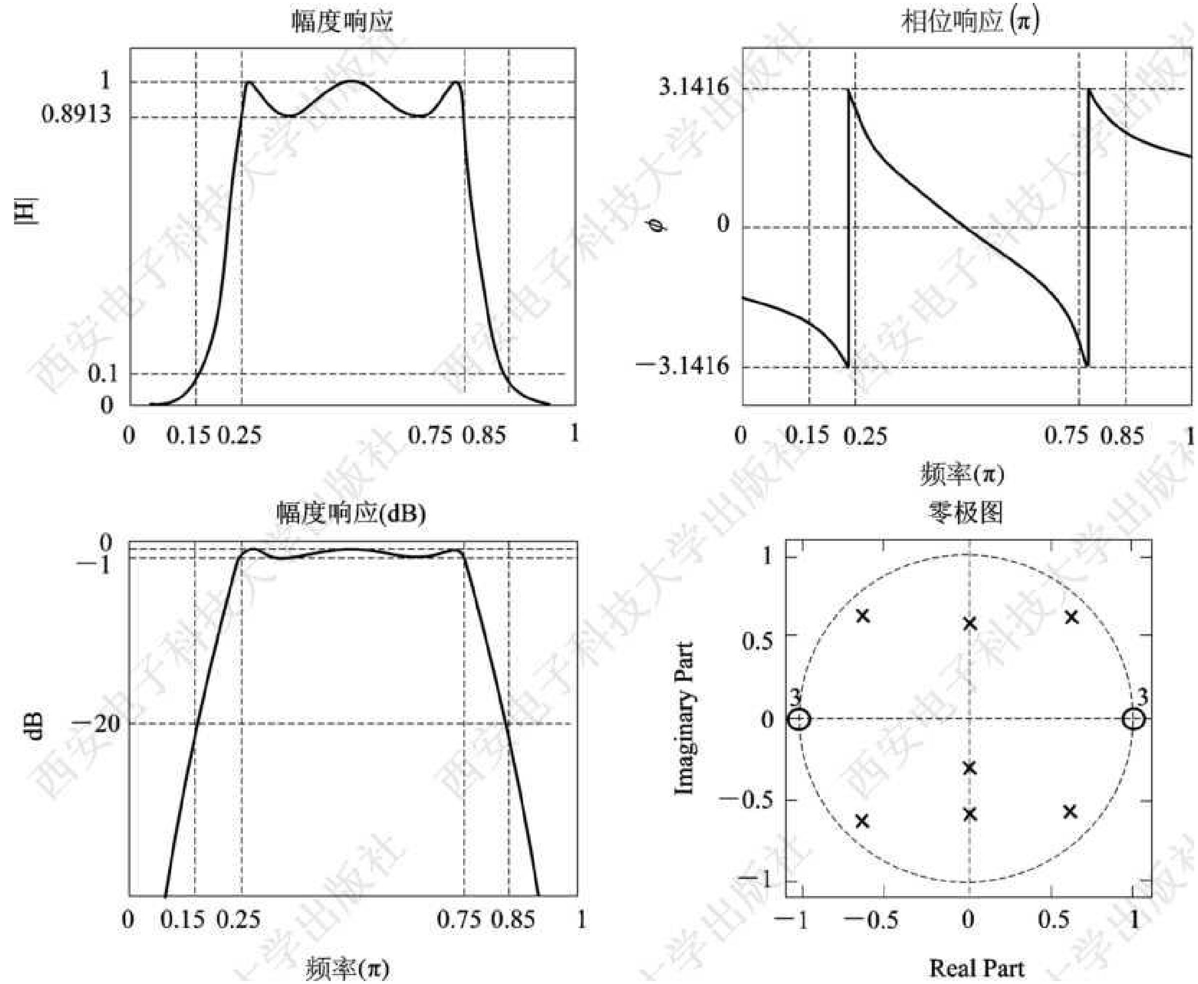

图15-4 用直接法设计的切比雪夫Ⅰ型数字带通滤波器特性

由图15-4可以看出，这是一个归一化的频率响应曲线，基本满足通阻带设计指标。该系统是一个6阶的切比雪夫Ⅰ型数字带通滤波器，其传递函数为

$$H(z)=\frac{0.1049-0.6291z^{-1}+1.5728z^{-2}-2.0971z^{-3}+1.5728z^{-4}-0.6291z^{-5}+0.1049z^{-6}}{1-1.8123z^{-1}+2.0099z^{-2}-1.2627z^{-3}+0.503z^{-4}-0.1116z^{-5}+0.011z^{-6}}$$

例15-4 采用MATLAB直接法设计一个切比雪夫Ⅱ型数字带阻滤波器，要求：$f_{p1} = 1.5$ kHz，$f_{p2} = 8.5$ kHz，$R_p = 1$ dB；$f_{s1} = 2.5$ kHz，$f_{s2} = 7.5$ kHz，$A_s = 20$ dB，滤波器采样频率$F_s = 20$ kHz。请描绘滤波器的绝对和相对幅频特性、相频特性、零极点分布图，列出系统传递函数。

解 该例题给出的条件是实际频率，在编程时，首先要将其化为数字频率，再把其求出的结果化为实际频率进行标注。

Fs = 20;

ws1 = 2.5/(Fs/2); ws2 = 7.5/(Fs/2); %数字滤波器的阻带截止频率

ws＝［ws1，ws2］；

wp1＝1.5/(Fs/2)；wp2＝8.5/(Fs/2)；%数字滤波器的通带截止频率

wp＝［wp1，wp2］；

Rp＝1；As＝20；%输入滤波器的通阻带衰减指标

［n，wc］＝$cheb_2ord$(wp，ws，Rp，As)%计算阶数n和截止频率

［b，a］＝cheby2(n，As，wc，′stop′)%直接求数字带通滤波器系数

［H， w］ ＝freqz(b， a， 512， Fs)；%求数字系统的频率特性

作图部分的程序省略，程序执行结果为

n＝ 3

wc＝0.2401 0.7599

b＝0.1770 －0.0000 0.2059 －0.0000 0.2059 －0.0000 0.1770

a＝1.0000 －0.0000 －0.7134 0.0000 0.5301 －0.0000 －0.0509

特性曲线如图15-5所示。

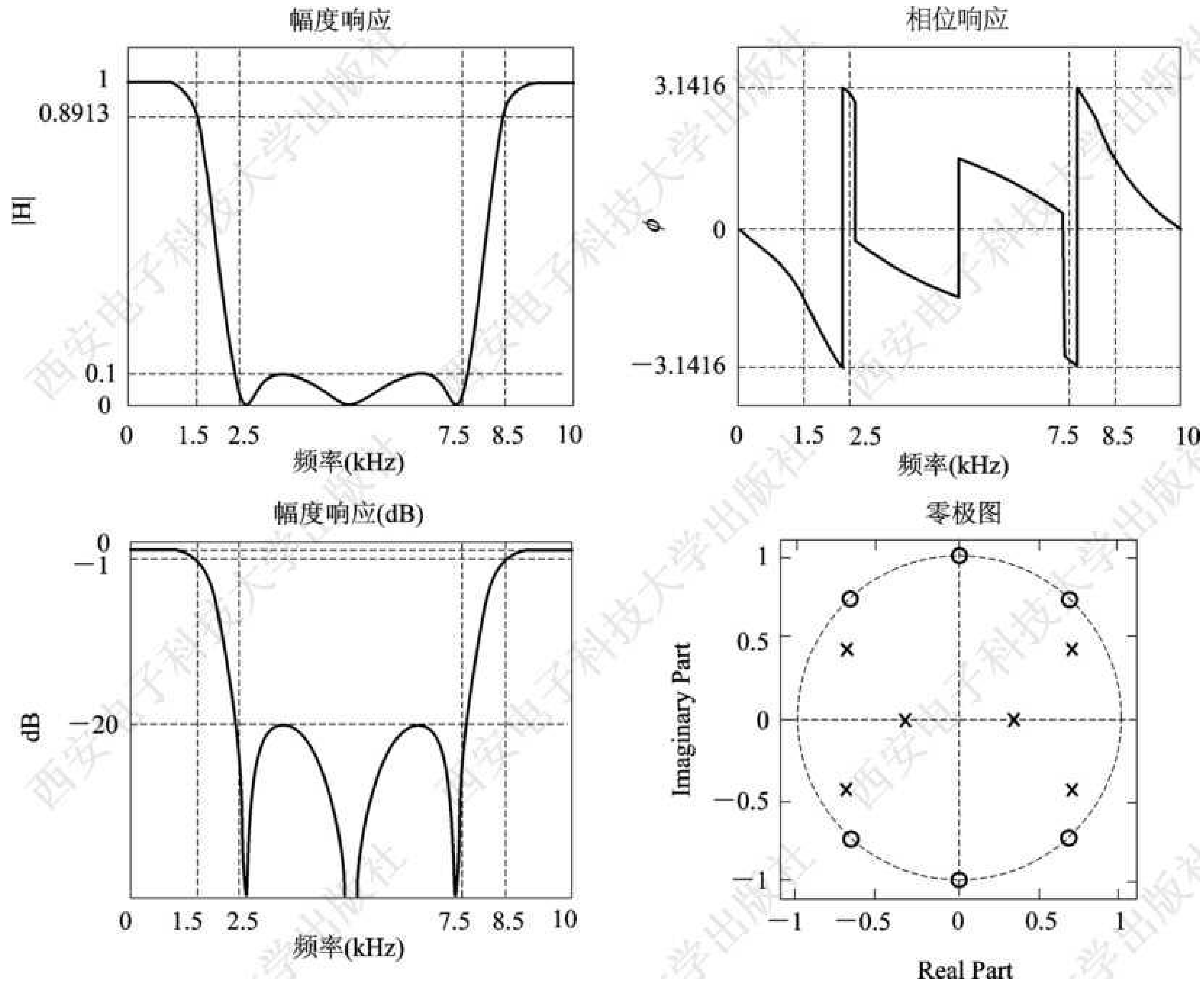

图15-5 用直接法设计的切比雪夫Ⅱ型数字带阻滤波器特性

由图15-5可以看出，这是一个实际的频率响应曲线，横轴上使用实际频率值，以 kHz为单位，频率响应基本满足通阻带设计指标。该系统是一个6阶的切比雪夫Ⅱ型数字带阻滤波器，其传递函数为

$$H(z)=\frac{0.177+0.2059\,z^{-2}+0.2059\,z^{-4}+0.177\,z^{-6}}{1-0.7134\,z^{-2}+0.5301\,z^{-4}-0.0509\,z^{-6}}$$

4.采样频率对数字滤波器传递函数系数的影响

在前面的IIR数字滤波器设计中，从设计指标到频率响应曲线、零极点分布图都满足要求，是否实际的系统就一定能实现呢？回答是否定的。原因在于：MATLAB与DSP硬件系统在运算精度、动态范围上是不同的。MATLAB计算的精度往往高于硬件系统能够达到的精度。在DSP上使用C或汇编语言进行运算，一般采用单精度的浮点数或定点数。另外，A/D、D/A转换使用的芯片，其位数通常也比较低。这些都将造成一定的误差。

例如，DSP采用定点运算，首先需要对IIR数字滤波器设计的一组传递函数系数进行归一化处理，然后再转换为一组定点数，即化为一组－32768～32767之间的整数。下面我们来观察不同采样频率对经处理后的数字滤波器系数的影响。

例15-5 按与例15-1相同的指标，设计一个巴特沃斯数字低通滤波器，要求通带$f_p = 150$ Hz，$R_p = 3$ dB；阻带$f_s = 250$ Hz，$A_s = 20$ dB。改变滤波器采样频率F_s，观察不同采样频率对经处理后的数字滤波器系数的影响。

解 编写下列程序：

```
%采样频率对数字滤波器传递函数系数的影响
Fs = 600;                %输入数字滤波器采样频率
fp = 150; wp = fp/Fs*2;  %输入数字滤波器设计指标
fs = 250; ws = fs/Fs*2;
```

```
Rp = 1； As = 20； %输入滤波器的通阻带衰减指标
 [n， wc] = buttord(wp， ws， Rp， As)； %计算阶数n
                                        和截止频率
 [b， a] = butter(n， wc)%直接求数字低通滤波器系数
%进行归一化，转换成－32768到32767之间的整数
c = max(abs(b))； d = max(abs(a))；
maxba = max(c， d)； %寻找系数中最大的数
bd = round(b/maxba*32767)%进行系数处理
ad = round(a/maxba*32767)
zplane(b， a)；
```

根据提示，在MATLAB命令窗输入采样频率Fs的数据，将显示如下结果：

Fs = 600

b = 0.3324 0.9972 0.9972 0.3324

a = 1.0000 0.9687 0.5842 0.1064

bd = 10892 32676 32676 10892

ad = 32767 31741 19141   3488

此时，由图15-6(a)所示的零极点分布图上可以看见，这是一个稳定的系统。当$F_s = 600$ Hz时，既满足$F_s \geq 2f_s$，又不是远大于$2f_s$时设计出的数字滤波器系数在数量级上比较一致，且没有出现大于1的系数，不会由于进行定点数的处理而损失某些数据。

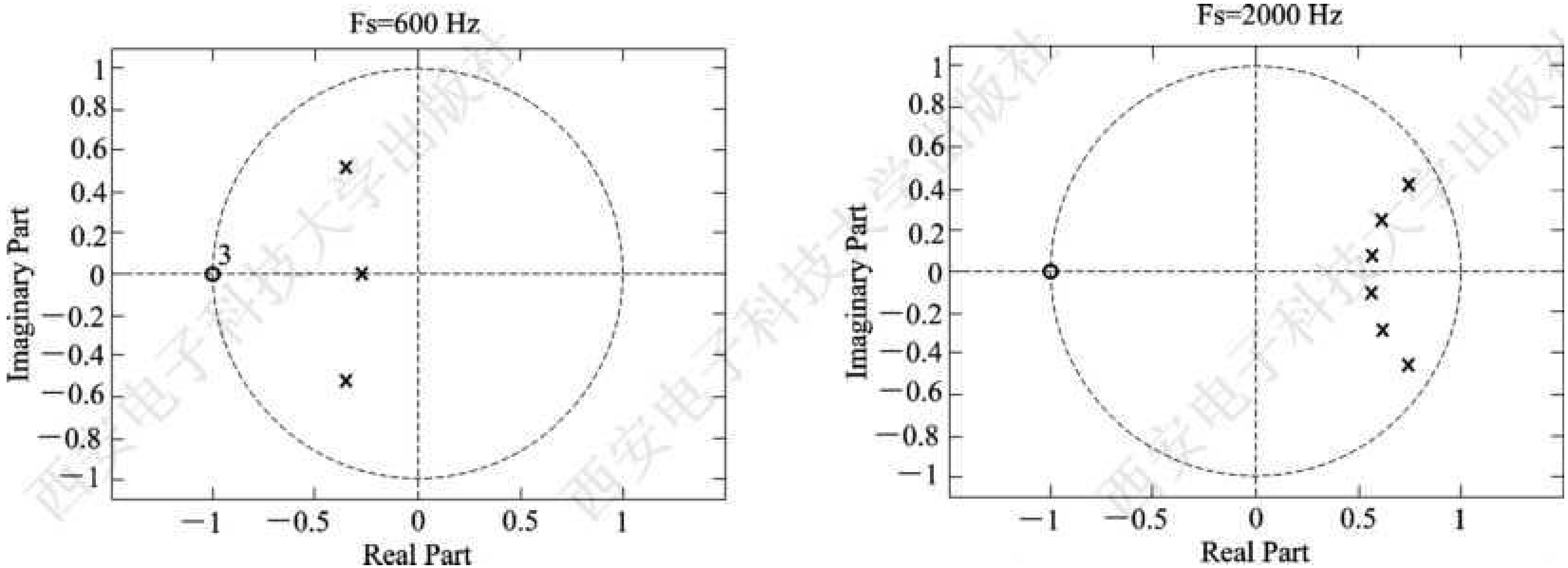

图15-6 输入不同采样频率时得到的零极点分布图

将Fs加大到2000Hz，观察下列数据：

Fs = 2000

b = 0.0002 0.0010 0.0026 0.0034 0.0026 0.0010 0.0002

a = 1.0000 – 3.8778 6.5266 – 6.0382 3.2201 – 0.9349 0.1151

出现系数除a0外大于1的情况。由于a0必须为1，对应定点处理后为32767，因此其它大于1的数将区别正、负系数，分别进行归一化处理。得到：

bd = 6 34 85 113 85 34 6

ad = 32767 – 32768 – 32768 – 32768 – 32768 – 30632 3771

此时，由图15-6(b)所示的零极点分布图上可以看见，这是一个稳定的系统。但由于原大于1的系数被归一，损失了部分信息，因此再把这些数据输入DSP等硬件系统进行处理时，这个数字滤波器就会出现很大误差，甚至不能实现。