

线性相位FIR数字滤波器

1.线性相位FIR滤波器的特性

与IIR滤波器相比，FIR滤波器在保证幅度特性满足技术要求的同时，很容易做到有严格的线性相位特性。设FIR滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 N ，其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

当滤波器的系数 N 满足一定的对称条件时，就可以获得线性相位。线性相位FIR滤波器共分为四种类型，分别为：

(1)类型Ⅰ，系数对称，即 $h(n) = h(N - 1 - n)$ ， N 为奇数。

(2)类型Ⅱ，系数对称，即 $h(n) = h(N - 1 - n)$ ， N 为偶数。

(3)类型Ⅲ，系数反对称，即 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ ， N 为奇数。

(4)类型Ⅳ，系数反对称，即 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ ， N 为偶数。

对于上述四类线性相位FIR滤波器，提供了一段通用程序，对考虑正负号的幅度频率特性(简称符幅特性)进行求解，程序名为amplres.m，程序如下：

```

function [A, w, type, tao] = amplres(h)
%给定FIR滤波器系数，求滤波器幅特性
%h = FIR滤波器的脉冲响应或分子系数向量
%A = 滤波器的幅特性
%w = 频率向量，在0到pi之间分成500份，501个点
%type = 线性相位滤波器的类型
%tao = 幅特性的群时延
N = length(h); tao = (N - 1)/2;
L = floor((N - 1)/2); %求滤波器的阶次及幅特性的
                        阶次
n = 1: L + 1;

```

```
w = [0: 500] *2*pi/500;      %取滤波器频率向量
```

```
if all(abs(h(n) - h(N - n + 1))<1e - 10)%判断滤波器系  
数, 若为对称
```

```
A = 2*h(n)*cos(((N + 1)/2 - n)'*w) - mod(N, 2)*h(L + 1);
```

```
%对称条件下计算A(两种类型)
```

```
%在N = 奇数时, h(L + 1)多算一倍, 要减掉。N为偶数  
时,
```

```
%乘以mod(N, 2)以取消这项
```

```

type = 2 - mod(N, 2); %判断并给出类型
elseif all(abs(h(n) + h(N - n + 1)) < 1e - 10) & (h(L +
1)*mod(N, 2) == 0) %系数若为反对称
%在N = 奇数时, h(L + 1)为零是奇对称判别条件之一,
%N为偶数时, 乘以mod(N, 2)以取消这项
A = 2*h(n)*sin(((N + 1)/2 - n)'*w); %反对称条件下计
                                     算A(两种类型)
type = 4 - mod(N, 2); %判断并给出类型
else error('错误: 这不是线性相位滤波器!') %滤波器系
                                     数非对称, 报告错误
end

```

另外，FIR滤波器的 $H(z)$ 是 z^{-1} 的 $(N-1)$ 次多项式，它在 z 平面上有 $(N-1)$ 个零点，原点 $z=0$ 是 $(N-1)$ 阶重极点。由于线性相位FIR滤波器的极点都在原点处，因此不存在稳定性的问题。但有必要研究零点对滤波器特性的影响。

下面分别研究和分析上述问题。

2.第一类线性相位滤波器(类型 I)

例13-1 已知FIR线性相位系统 $h = [3, -1, -5, 4, 6, 4, -5, -1, 3]$ ，要求描绘系统的冲激响应和幅特性。解 程序如下：

```
h = [3, -1, -5, 4, 6, 4, -5, -1, 3] ;
```

```
M = length(h); n = 0: M - 1;
```

```
[A, w, type, tao] = ampres(h); type
```

```
subplot(2, 1, 1), stem(n, h);
```

```
ylabel('h(n)'); xlabel('n');
```

```
subplot(2, 1, 2), plot(w/pi, A);
```



```
ylabel('A'); xlabel('\ pi');
```

MATLAB命令窗显示:

```
type = 1
```

由图13-1可见, 这是一个第一类线性相位滤波器。滤波器的系数 N 为奇数(该题 $N = 9$), 且 $h(n) = h(N - 1 - n)$, 幅度特性关于 $\omega = \pi$ 对称, 在 $\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$ 处可以取任何值; 可以用于实现低通、高通、带通、带阻等各种滤波特性。

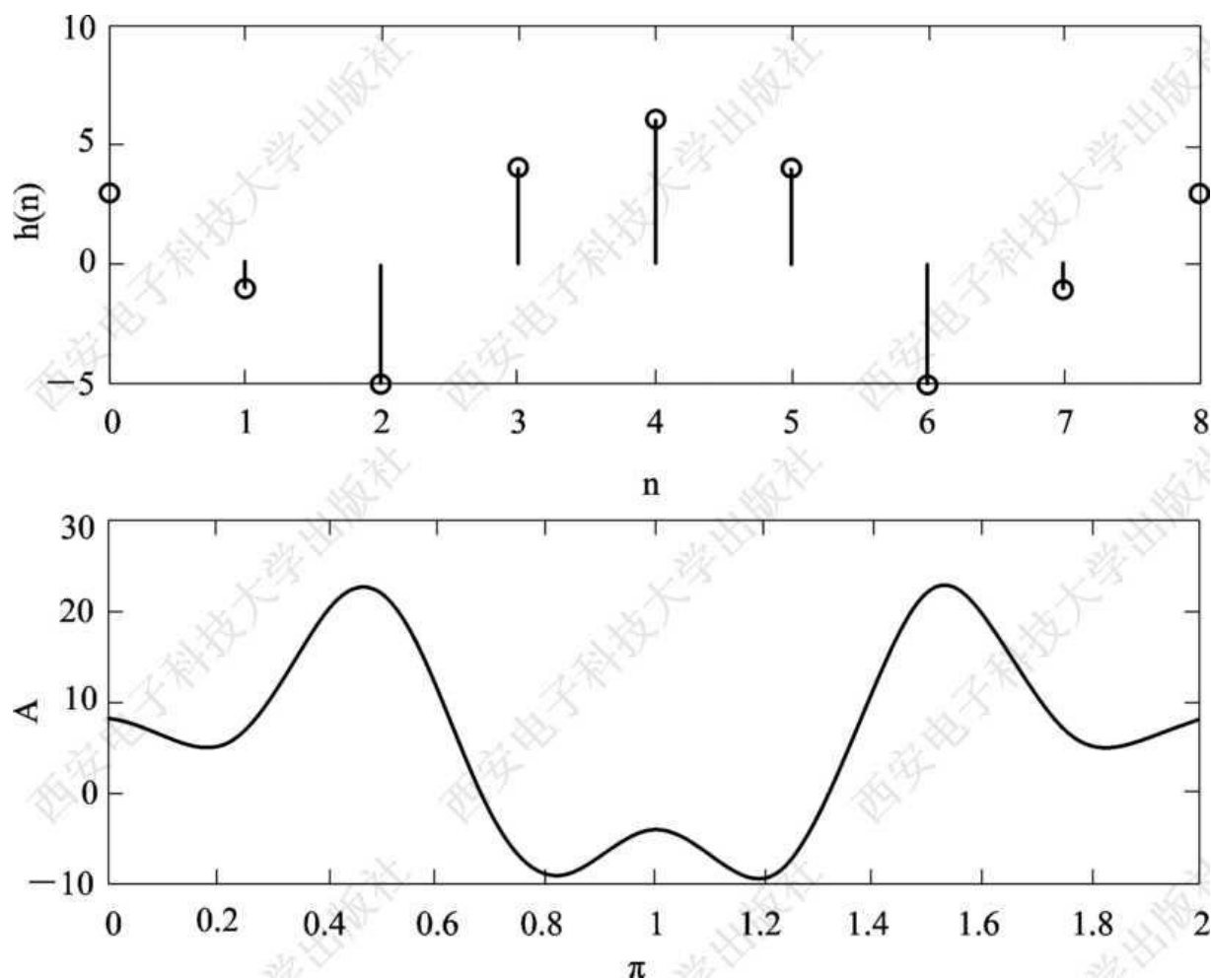


图13-1 类型 I 滤波器冲激响应和幅频特性

3.第二类线性相位滤波器(类型Ⅱ)

例13-2 已知FIR线性相位系统 $h = [3, -1, -5, 4, 4, -5, -1, 3]$ ，要求描绘系统的冲激响应和幅频特性。

解 程序如下：

```
h = [3, -1, -5, 4, 4, -5, -1, 3] ;
```

```
M = length(h); n = 0: M - 1;
```

```
[A, w, type, tao] = amplres(h); type  
subplot(2, 1, 1), stem(n, h);
```

```
ylabel('h(n)'); xlabel('n');  
subplot(2, 1, 2), plot(w/pi, A);  
ylabel('A'); xlabel(' \ pi');  
MATLAB命令窗显示:
```

```
type = 2
```

由图13-2可见，这是一个第二类线性相位滤波器。滤波器的系数 N 为偶数(该题 $N = 8$)，且 $h(n) = h(N - 1 - n)$ ，幅度特性关于 $\omega = \pi$ 反对称，在 $\omega = 0$ 处可以取任何值，在 $\omega = \pi$ 处必定为0；不能用于实现高通和带阻滤波器。

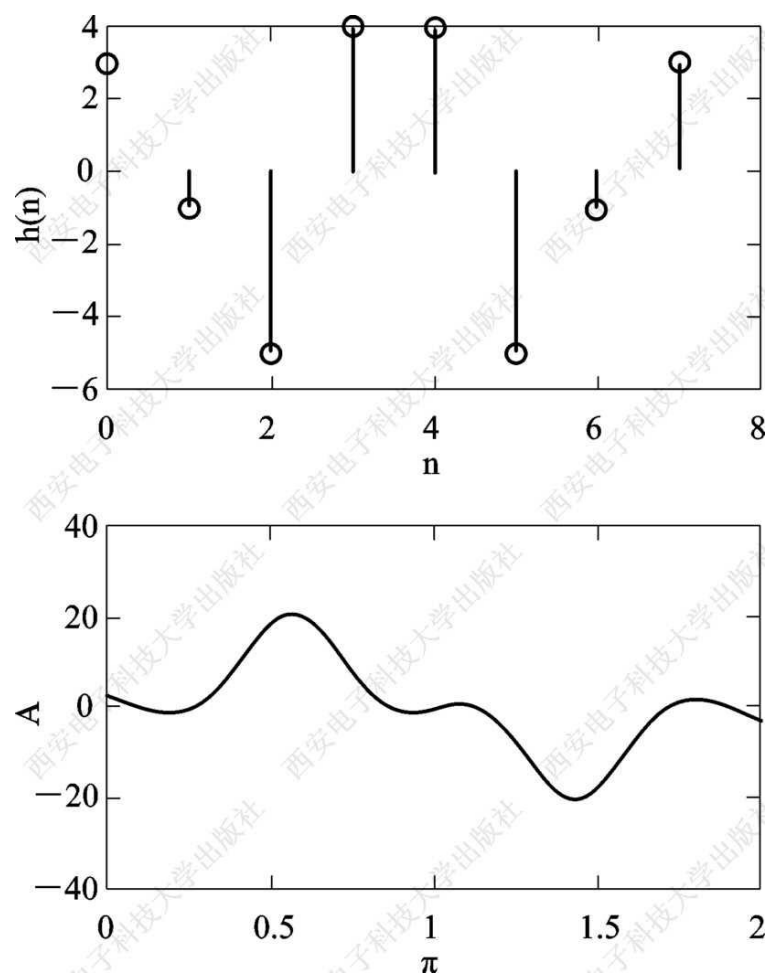


图13-2 类型 II 滤波器冲激响应和幅频特性

4.第三类线性相位滤波器(类型Ⅲ)

例13-3 已知FIR线性相位系统 $h = [3, -1, -5, 4, 0, -4, 5, 1, -3]$ ，要求描绘系统的冲激响应和幅特性。

解 程序如下：

```
h = [3, -1, -5, 4, 0, -4, 5, 1, -3] ;
```

```
M = length(h); n = 0: M - 1;
```

```
[A, w, type, tao] = amplres(h); type  
subplot(2, 1, 1), stem(n, h);
```

```
ylabel('h(n)'); xlabel('n');  
subplot(2, 1, 2), plot(w/pi, A);  
ylabel('A'); xlabel(' \ pi');  
MATLAB命令窗显示:
```

```
type = 3
```

由图13-3可见，这是一个第三类线性相位滤波器。滤波器的系数 N 为奇数(该题 $N = 9$)，且 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ ，幅度特性关于 $\omega = \pi$ 反对称，在 $\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$ 处都必定为0；只能实现带通滤波器。

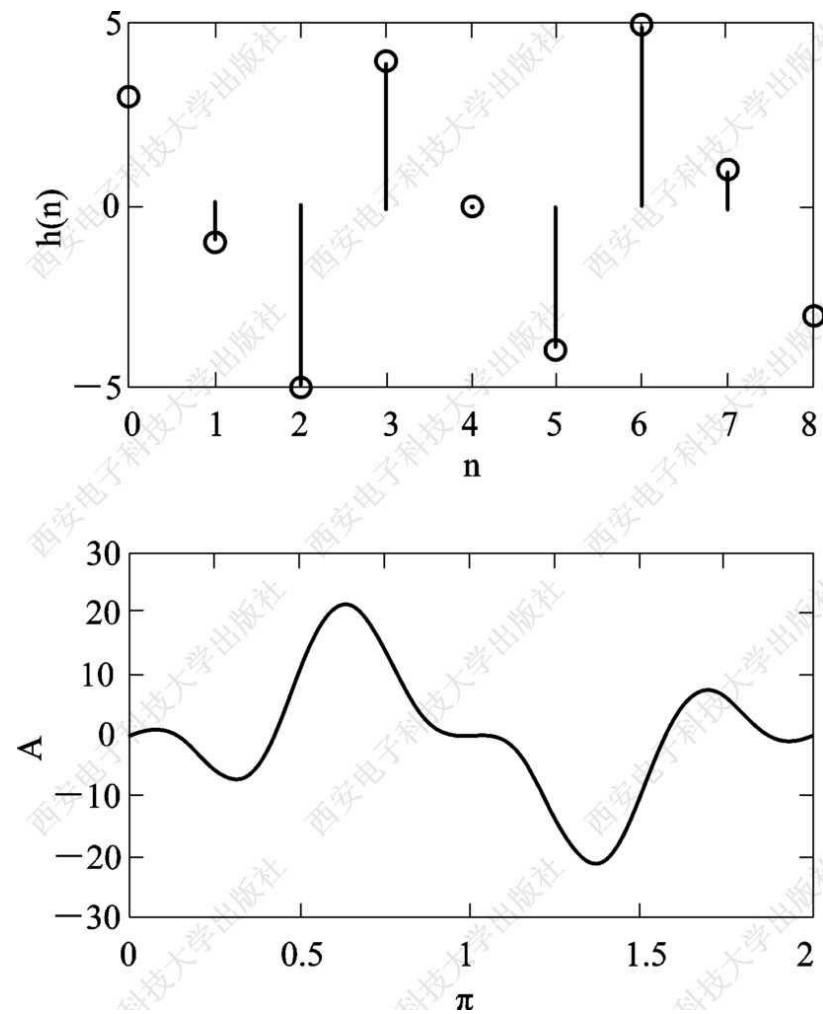


图13-3 类型Ⅲ滤波器冲激响应和幅频特性

5.第四类线性相位滤波器(类型IV)

例13-4 已知FIR线性相位系统 $h = [3, -1, -5, 4, -4, 5, 1, -3]$ ，要求描绘系统的冲激响应和幅频特性。

解 程序如下：

```
h = [3, -1, -5, 4, -4, 5, 1, -3] ;
```

```
M = length(h); n = 0: M - 1;
```

```
[A, w, type, tao] = amplres(h); type
```

```
subplot(2, 1, 1), stem(n, h);
```

```
ylabel('h(n)'); xlabel('n');
```

```
subplot(2, 1, 2), plot(w/pi, A);
```

```
ylabel('A'); xlabel(' \ pi');
```

MATLAB命令窗显示:

```
type = 4
```

由图13-4可见，这是一个第四类线性相位滤波器。滤波器的系数 N 为偶数(该题 $N = 8$)，且 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ ，幅度特性关于 $\omega = \pi$ 对称，在 $\omega = 0$ 必定为0， $\omega = \pi$ 处可以取任何值；不能用于实现低通、带阻滤波器。

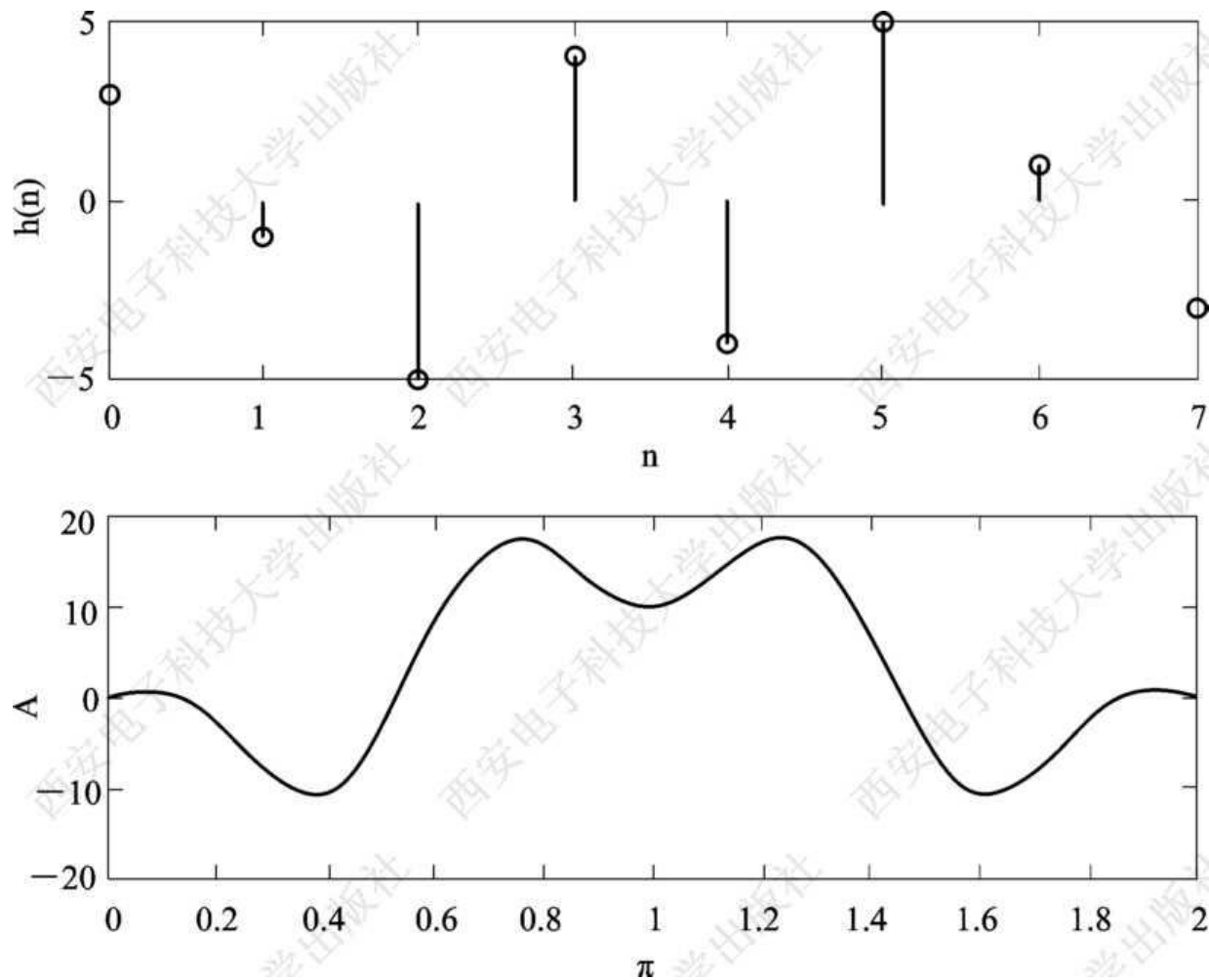


图13-4 类型IV滤波器冲激响应和幅频特性

6.线性相位FIR数字滤波器零点分布特点

线性相位FIR滤波器的零点分为三种情况：

(1)在 $z_i = 1$ 或 $z_i = -1$ 位的零点单独出现；

(2)实数零点或在单位圆上的复数零点按 z_1 与 $\frac{1}{z_1}$ 成对出现；

(3)非单位圆上的复数零点，则按 z_1 、 z_1^* 、 $\frac{1}{z_1}$ 、 $\left(\frac{1}{z_1}\right)^*$ 四个点同时出现。

例13-5 求例13-1线性相位系统的零极点分布图，并证明实数零点和复数零点成组出现的特点。

解 程序如下：

```
h = [3, -1, -5, 4, 6, 4, -5, -1, 3] ;
```

```
M = length(h); n = 0: M - 1;
```

```
rz = roots(h)
```

```
for i = 1: 8
```

```
    r(i) = 1/rz(i);
```

```
end
```

```
r'
```

```
zplane(h, 1)
```

程序执行结果如表13-1和图13-5所示。可以看出，序号为1、2、6、7的四个复数为一组；在实轴上的3、8两个实数为一组；处于单位圆上的4、5为一组。

表13-1 程序执行结果

i	rz	$r=1/rz$
1	$1.1674+0.7868i$	$0.5891+0.3970i$
2	$1.1674-0.7868i$	$0.5891-0.3970i$
3	-1.3732	-0.7283
4	$-0.5391+0.8423i$	$-0.5391+0.8423i$
5	$-0.5391-0.8423i$	$-0.5391-0.8423i$
6	$0.5891+0.3970i$	$1.1674+0.7868i$
7	$0.5891-0.3970i$	$1.1674-0.7868i$
8	-0.7283	-1.3732

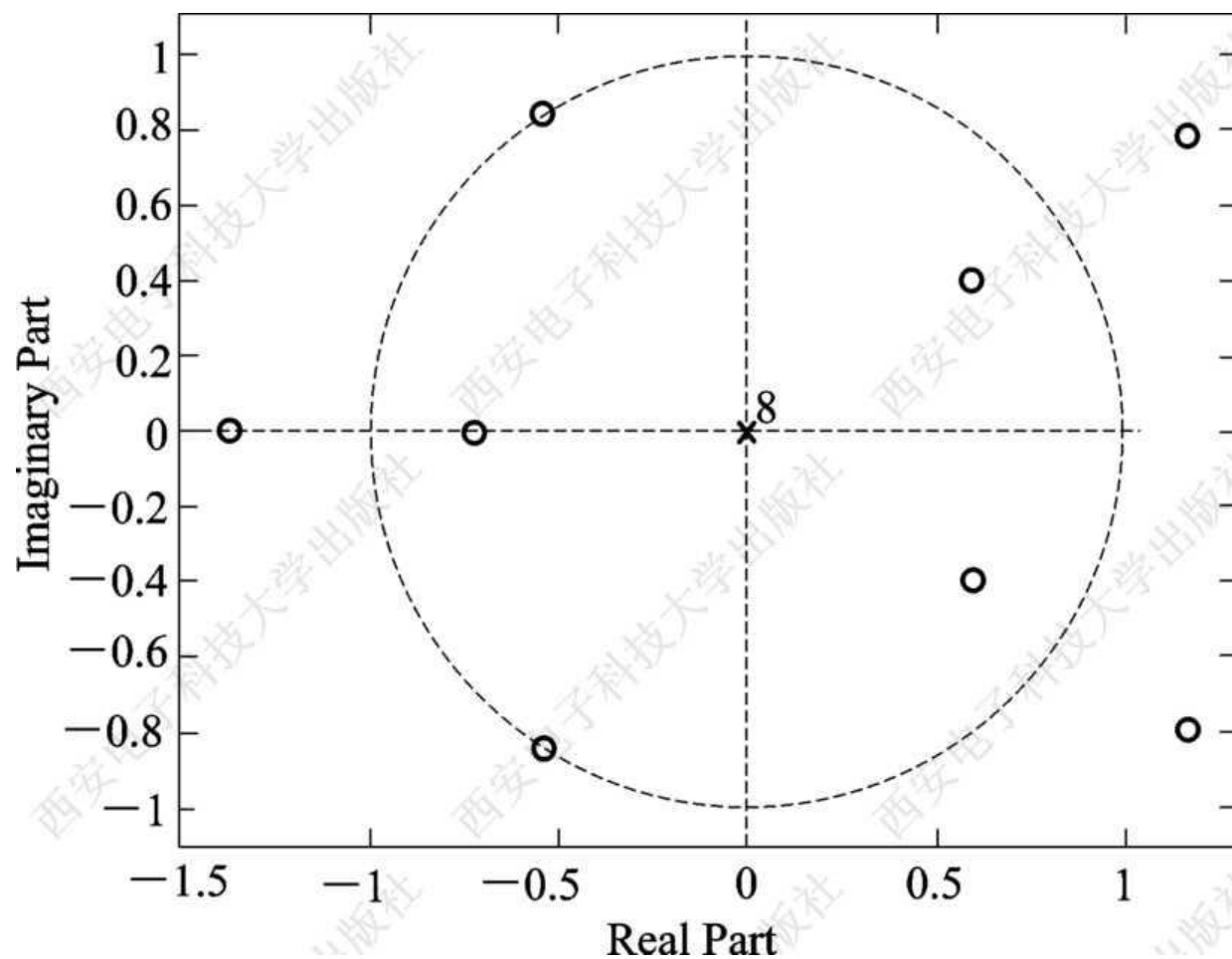
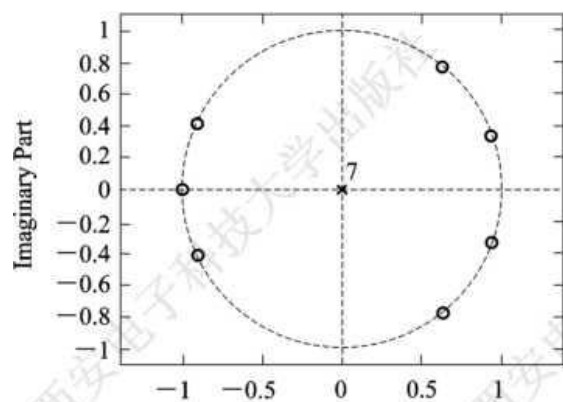


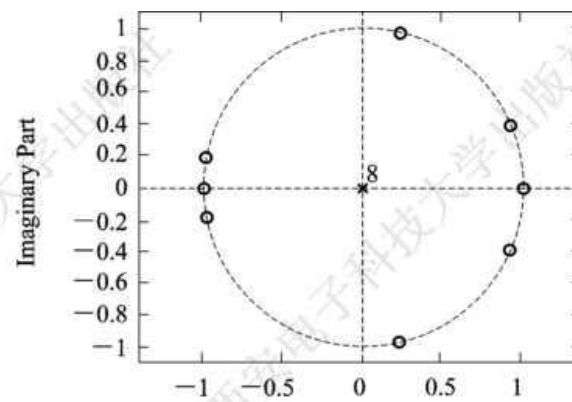
图13-5 第一类线性相位滤波器零极点分布图

例13-6 求例13-2、例13-3、例23[CD*2]4的线性相位系统的零极点分布图。

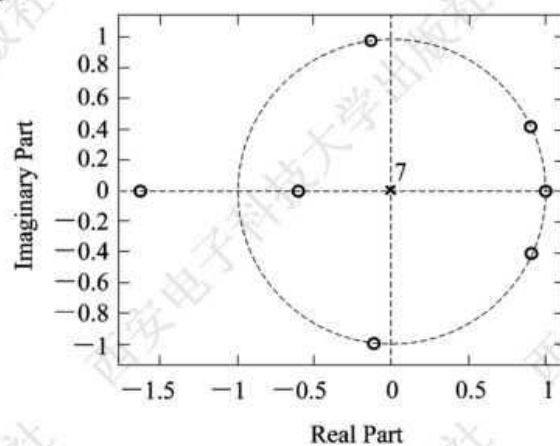
解 程序如例13-5，只需输入不同的h值，结果如图13-6(a)、(b)、(c)所示。



(a) 类型 II



(b) 类型 III



(c) 类型 IV

图13-6 线性相位滤波器零极点分布图