离散系统的零极点分析

实验涉及的MATLAB子函数

1.zplane

功能： 显示离散系统的零极点分布图。

调用格式：

zplane(z，p)；绘制由列向量z确定的零点、列向量p确定的极点构成的零极点分 布图。

zplane(b，a)；绘制由行向量b和a构成的系统函数确定的零极点分布图。

［hz，hp，ht］＝zplane(z，p)；执行后可得到3个句柄向量：hz为零点线句柄，hp为极点线句柄，ht为坐标轴、单位圆及文本对象的句柄。

2.roots

功能： 求多项式的根。

调用格式：

r＝roots(a)；由多项式的分子或分母系数向量求根向量。其中，多项式的分子或分母系数按降幂排列，得到的根向量为列向量。

实验原理

1.离散系统的因果性和稳定性

1)因果系统

由理论分析可知，一个离散系统的因果性在时域中必须满足的充分必要条件是：

$$h(n)=0 \qquad n<0$$

即系统的冲激响应必须是右序列。

在变换域，极点只能在z平面上一个有界的以原点为中心的圆内。如果系统函数是一个多项式，则分母上z的最高次数应大于分子上z的最高次数。

2)稳定系统

在时域中，离散系统稳定的充分必要条件是：它的冲激响应绝对可加，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$$

在变换域，则要求所有极点必须在z平面上以原点为中心的单位圆内。

3)因果稳定系统

综合系统的因果性和稳定性两方面的要求可知，一个因果稳定系统的充分必要条件是：系统函数的全部极点必须在z平面上以原点为中心的单位圆内。

2.系统极点的位置对系统响应的影响

系统极点的位置对系统响应有着非常明显的影响。下面举例说明系统的极点分别是实数和复数时的情况，使用MATLAB提供的zplane子函数制作零极点分布图进行分析。

例12-1 研究z右半平面的实数极点对系统响应的影响。

已知系统的零-极点增益模型分别为：

求这些系统的零极点分布图以及系统的冲激响应，判断系统的稳定性。

$$H_1(z)=\frac{z}{z-0.85},\qquad H_2(z)=\frac{z}{z-1},\qquad H_3(z)=\frac{z}{z-1.5}$$

解 根据公式写出zpk形式的列向量，求系统的零极点分布图以及系统的冲激响应。程序如下：

```
%在右半平面的实数极点的影响
z1＝［0］′；p1＝［0.85］′；k＝1；
［b1，a1］＝zp2tf(z1，p1，k)；
subplot(3，2，1)，zplane(z1，p1)；
ylabel('极点在单位圆内')；
subplot(3，2，2)，impz(b1，a1，20)；
z2＝［0］′；p2＝［1］′；
```

```
［b2，a2］＝zp2tf(z2，p2，k)；
subplot(3，2，3)，zplane(z2，p2)；
ylabel('极点在单位圆上')；
subplot(3，2，4)，impz(b2，a2，20)；
z3＝［0］'；p3＝［1.5］'；
［b3，a3］＝zp2tf(z3，p3，k)；
subplot(3，2，5)，zplane(z3，p3)；
ylabel('极点在单位圆外')；
subplot(3，2，6)，impz(b3，a3，20)；
```

由图12-1可见，这3个系统的极点均为实数且处于z平面的右半平面。由图可知，当极点处于单位圆内，系统的冲激响应曲线随着频率的增大而收敛；当极点处于单位圆上，系统的冲激响应曲线为等幅振荡；当极点处于单位圆外，系统的冲激响应曲线随着频率的增大而发散。

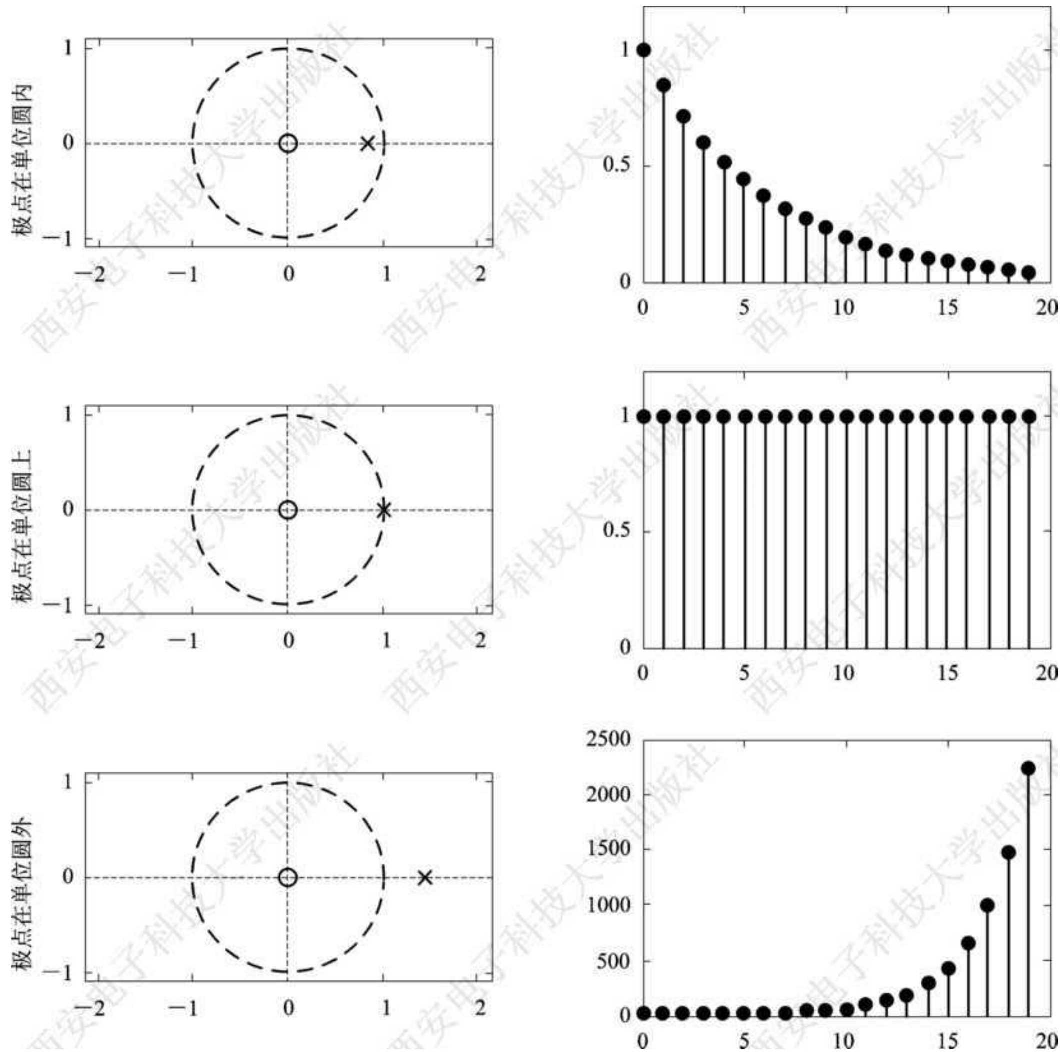

图12-1 处于z右半平面的实数极点对系统响应的影响

例12-2 研究z左半平面的实数极点对系统响应的影响。已知系统的零-极点增益模型分别为

$$H_1(z)=\frac{z}{z+0.85},\qquad H_2(z)=\frac{z}{z+1},\qquad H_3(z)=\frac{z}{z+1.5}$$

求这些系统的零极点分布图以及系统的冲激响应，判断系统的稳定性。

解 根据公式写出zpk形式的列向量，求系统的零极点分布图以及系统的冲激响应。程序如下：

```
%在左半平面的实数极点的影响
z1＝［0］′；p1＝［－0.85］′；k＝1；
［b1，a1］＝zp2tf(z1，p1，k)；
subplot(3，2，1)，zplane(z1，p1)；
ylabel(′极点在单位圆内′)；
subplot(3，2，2)，impz(b1，a1，20)；
z2＝［0］′；p2＝［－1］′；
［b2，a2］＝zp2tf(z2，p2，k)；
```

```
subplot(3，2，3)，zplane(z2，p2)；
ylabel('极点在单位圆上')；
subplot(3，2，4)，impz(b2，a2，20)；
z3＝［0］'；p3＝［－1.5］'；
［b3，a3］＝zp2tf(z3，p3，k)；
subplot(3，2，5)，zplane(b3，a3)；
ylabel('极点在单位圆外')；
subplot(3，2，6)，impz(z3，p3，20)；
```

由图12-2可见，这3个系统的极点均为实数且处于z平面的左半平面。由图可知，当极点处于单位圆内，系统的冲激响应曲线随着频率的增大而收敛；当极点处于单位圆上，系统的冲激响应曲线为等幅振荡；当极点处于单位圆外，系统的冲激响应曲线随着频率的增大而发散。

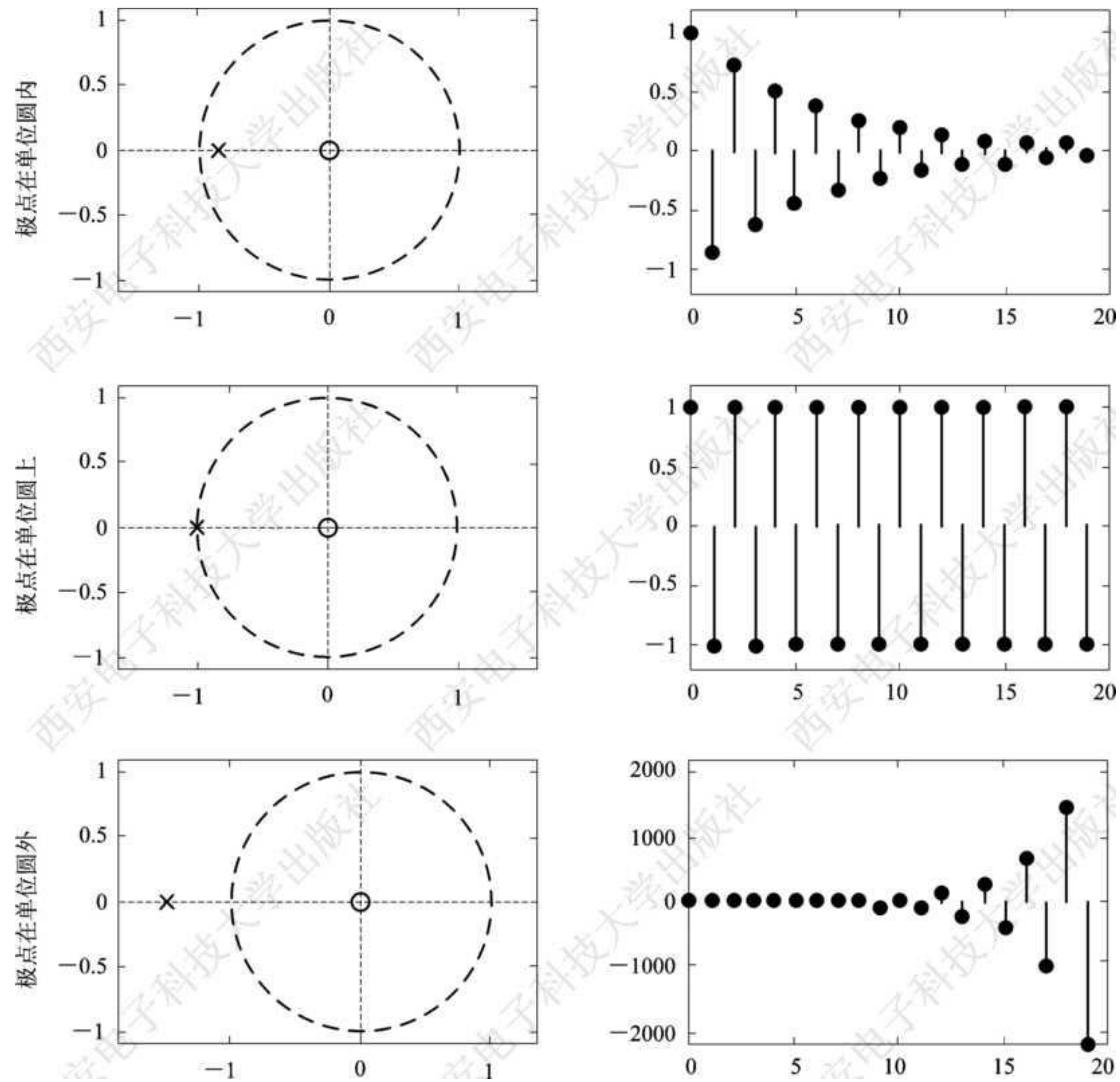

图12-2 处于z左半平面的实数极点对系统响应的影响

例12-3 研究z右半平面的复数极点对系统响应的影响。已知系统的零-极点增益模型分别为

$$H_1(z) = \frac{z(z-0.3)}{(z-0.5-0.7j)(z-0.5+0.7j)}$$

$$H_2(z) = \frac{z(z-0.3)}{(z-0.6-0.8j)(z-0.6+0.8j)}$$

$$H_3(z) = \frac{z(z-0.3)}{(z-1-j)(z-1+j)}$$

求这些系统的零极点分布图以及系统的冲激响应，判断系统的稳定性。

解 根据公式写出zpk形式的列向量，求系统的零极点分布图以及系统的冲激响应。程序如下：

```
%复数极点的影响
z1=[0.3，0]′；p1=[0.5+0.7j，0.5-0.7j]′；k=1；
[b1，a1]=zp2tf(z1，p1，k)；
subplot(3，2，1)，zplane(b1，a1)；
ylabel('极点在单位圆内')；
subplot(3，2，2)，impz(b1，a1，20)；
z2=[0.3，0]′；p2=[0.6+0.8j，0.6-0.8j]′；
[b2，a2]=zp2tf(z2，p2，k)；
```

```
subplot(3，2，3)，zplane(b2，a2)；
ylabel('极点在单位圆上')；
subplot(3，2，4)，impz(b2，a2，20)；
z3=［0.3，0］'；p3=［1+j，1-j］'；
［b3，a3］=zp2tf(z3，p3，k)；
subplot(3，2，5)，zplane(b3，a3)；
ylabel('极点在单位圆外')；
subplot(3，2，6)，impz(b3，a3，20)；
```

由图12-3可见，这3个系统的极点均为复数且处于z平面的右半平面。由图可知，当极点处于单位圆内，系统的冲激响应曲线随着频率的增大而收敛；当极点处于单位圆上，系统的冲激响应曲线为等幅振荡；当极点处于单位圆外，系统的冲激响应曲线随着频率的增大而发散。

由系统的极点分别为实数和复数的情况，我们可以得到结论：系统只有在极点处于单位圆内才是稳定的。

3.系统的因果稳定性实例分析

在MATLAB中提供了roots子函数，用于求多项式的根。配合使用zplane子函数制作零极点分布图，可以帮助我们进行系统因果稳定性的分析。

例12-4 已知离散时间系统函数为

$$H(z)=\frac{z-1}{z^2-2.5z+1}$$

求该系统的零极点及零极点分布图，并判断系统的因果稳定性。

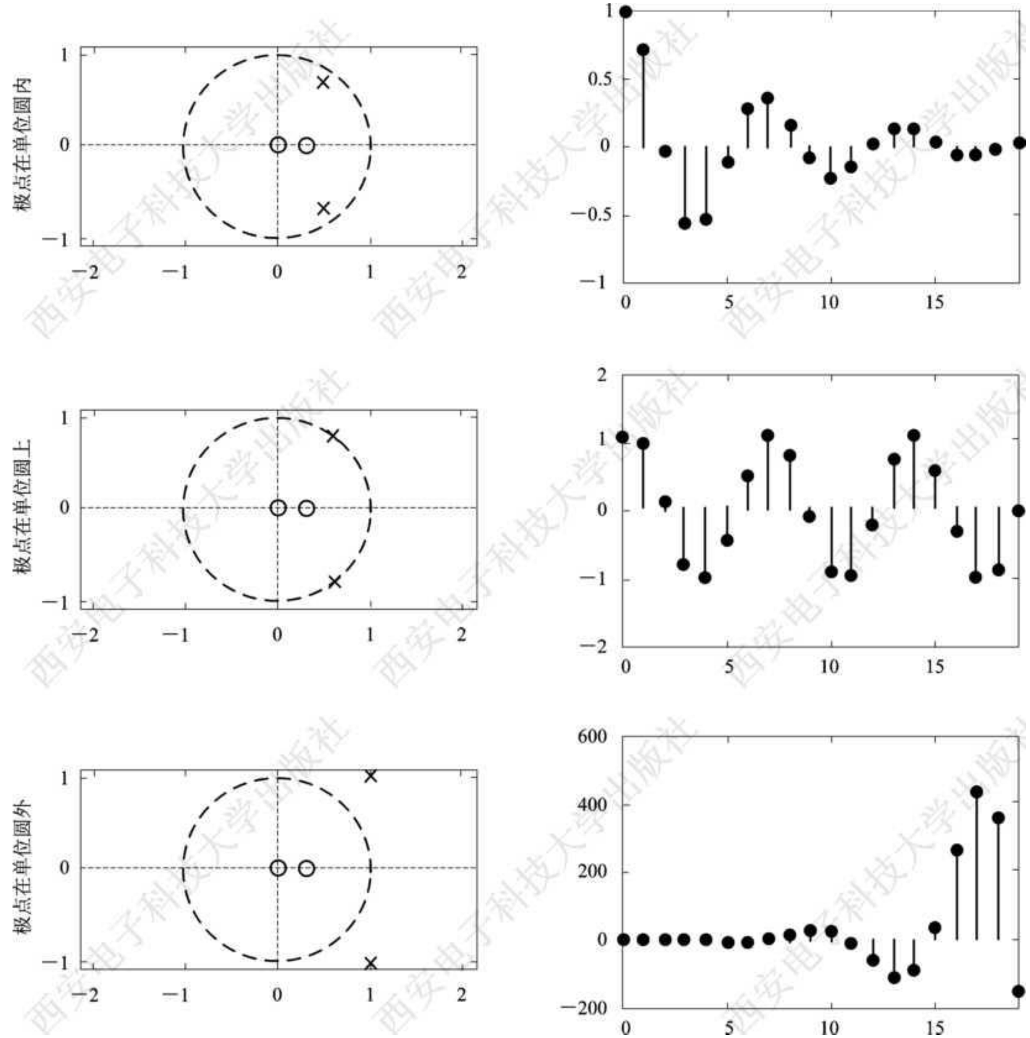

图12-3 处于z右半平面的复数极点对系统响应的影响

解 该题给出的公式是按z的降幂排列。MATLAB程序如下：

```
b＝［0，1，－1］；a＝［1，－2.5，1］；
rz＝roots(b)                              %求系统的零点
rp＝roots(a)                              %求系统的极点
subplot(1，2，1)，zplane(b，a)；          %求系统的零极点分布图
title(′系统的零极点分布图′)；
subplot(1，2，2)，impz(b，a，20)；
title(′系统的冲激响应′)；
xlabel(′n′)；ylabel(′h(n)′)；
```

程序运行结果如下：

rz＝

1

rp＝

2.0000

0.5000

零极点分布图如图12-4所示，系统的冲激响应如图12-5所示。

由运行结果和图12-4可见，该系统有一个极点rp1＝2，在单位圆外；由图12-5可见，该系统的冲激响应曲线随着n增大而发散。因此，该系统不是因果稳定系统。

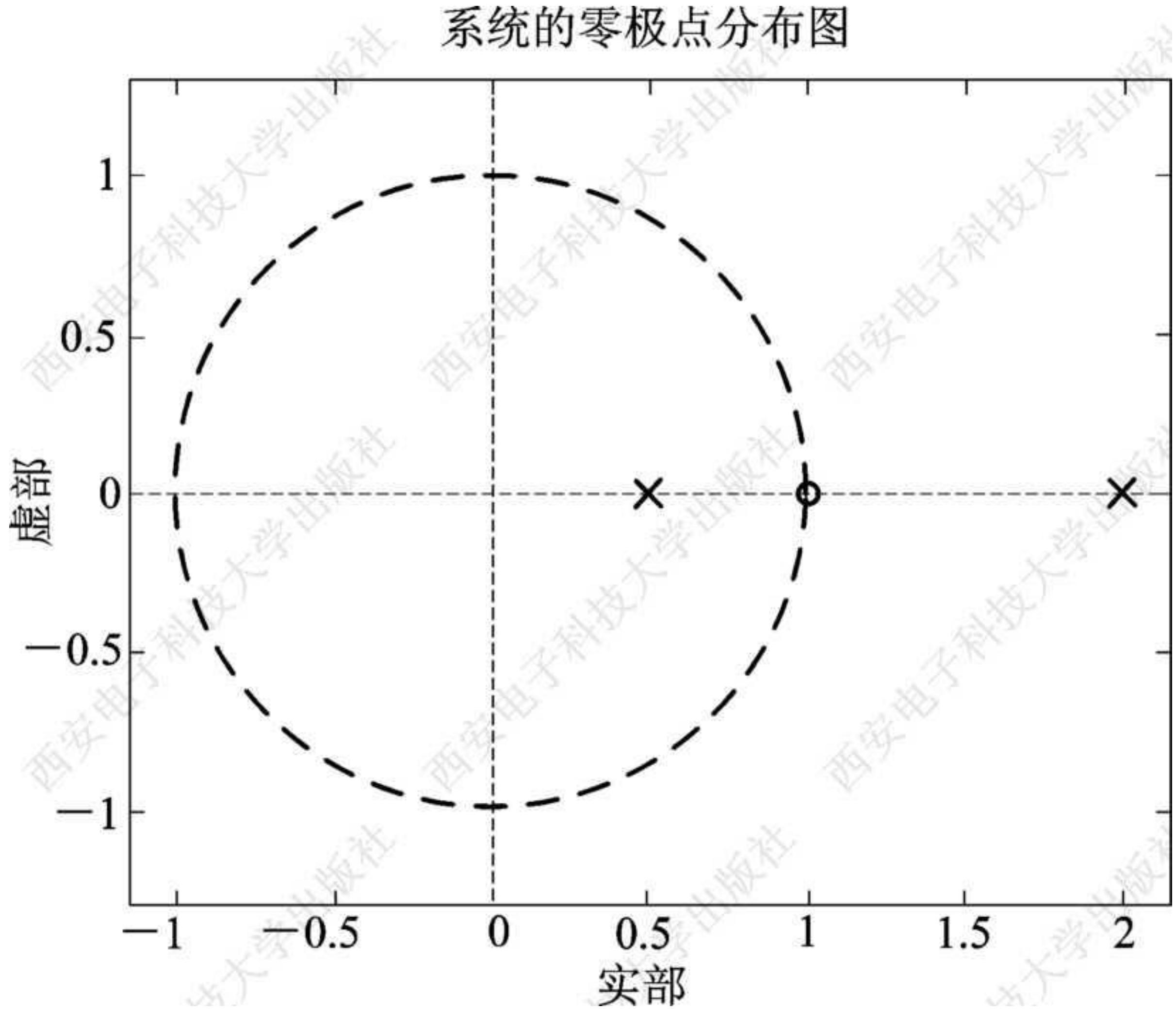

图12-4 例12-4的零极点分布图

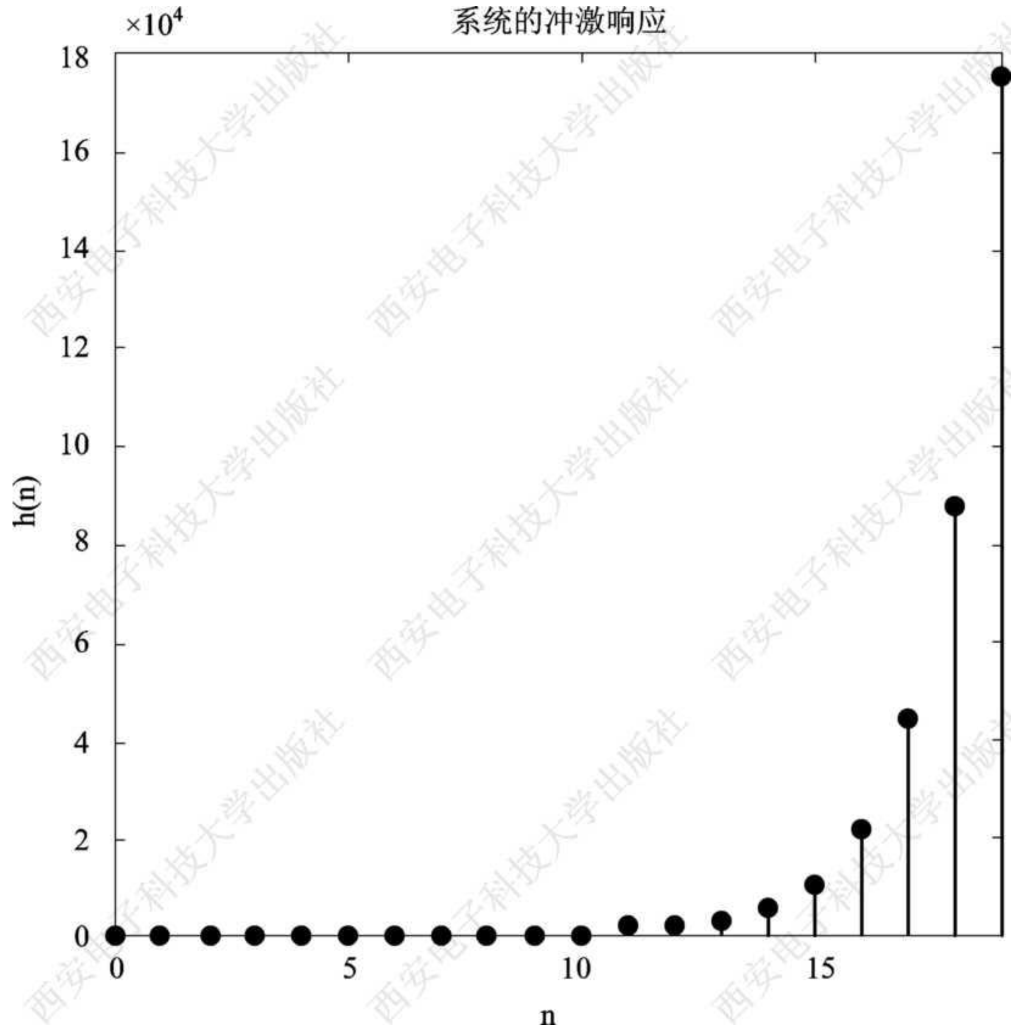

图12-5 例12-4系统的冲激响应图

例12-5 已知离散时间系统函数为

$$H(z)=\frac{0.2+0.1z^{-1}+0.3z^{-2}+0.1z^{-3}+0.2z^{-4}}{1-1.1z^{-1}+1.5z^{-2}-0.7z^{-3}+0.3z^{-4}}$$

求该系统的零极点及零极点分布图，并判断系统的因果稳定性。

解 MATLAB程序如下：

```
b＝［0.2，0.1，0.3，0.1，0.2］；
a＝［1，－1.1，1.5，－0.7，0.3］；
rz＝roots(b)
rp＝roots(a)
```

```
subplot(1，2，1)，zplane(b，a)；
title(′系统的零极点分布图′)；
subplot(1，2，2)，impz(b，a，20)；
title(′系统的冲激响应′)；
xlabel(′n′)；ylabel(′h(n)′)；
```

程序运行结果如下：

rz＝

－0.5000＋0.8660i

－0.5000－0.8660i

0.2500＋0.9682i

0.2500－0.9682i

rp＝

0.2367＋0.8915i

0.2367－0.8915i

0.3133＋0.5045i

0.3133－0.5045i

零极点分布图如图12-6所示，系统的冲激响应如图12-7所示。

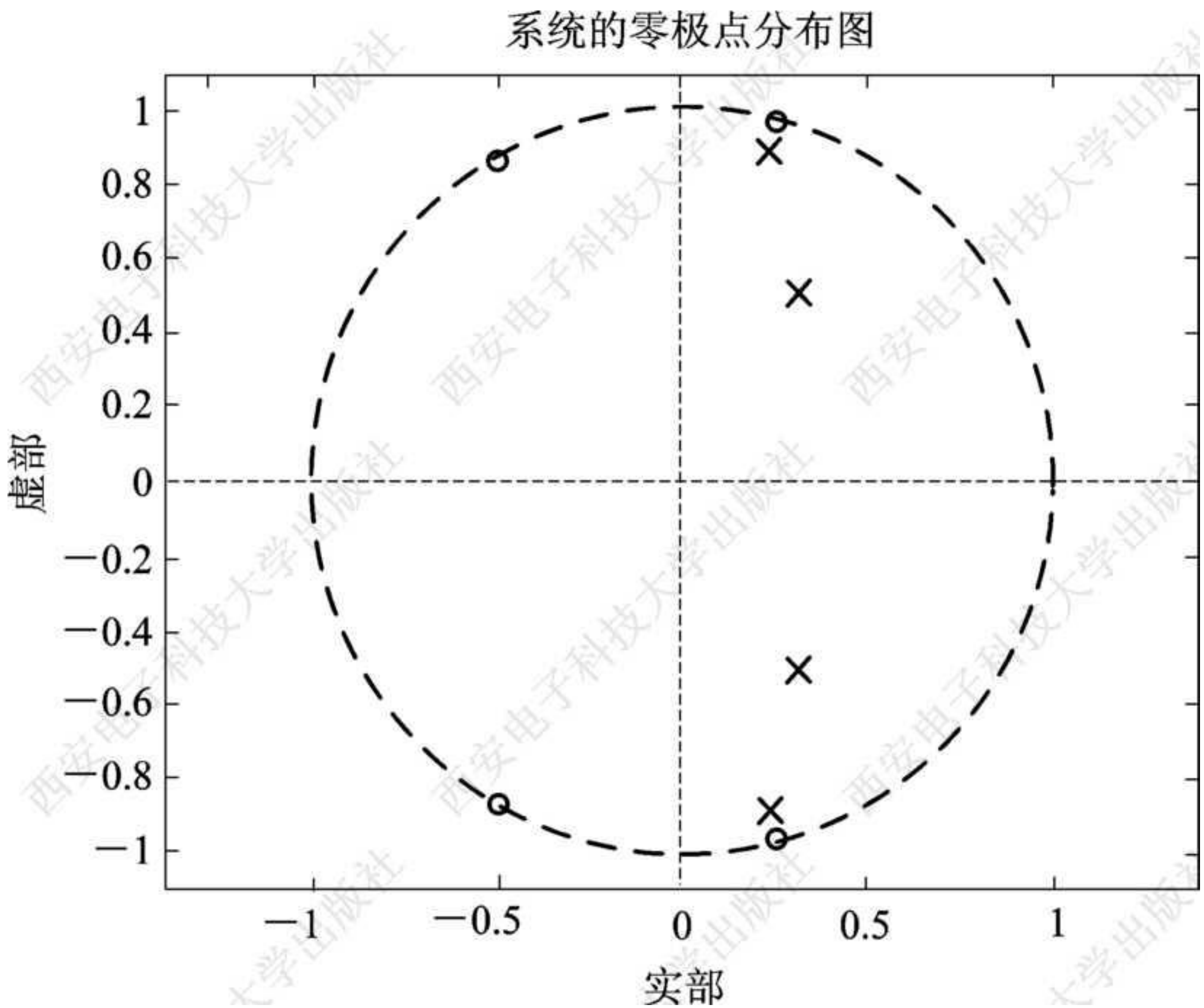

图12-6 例12-5的零极点分布图

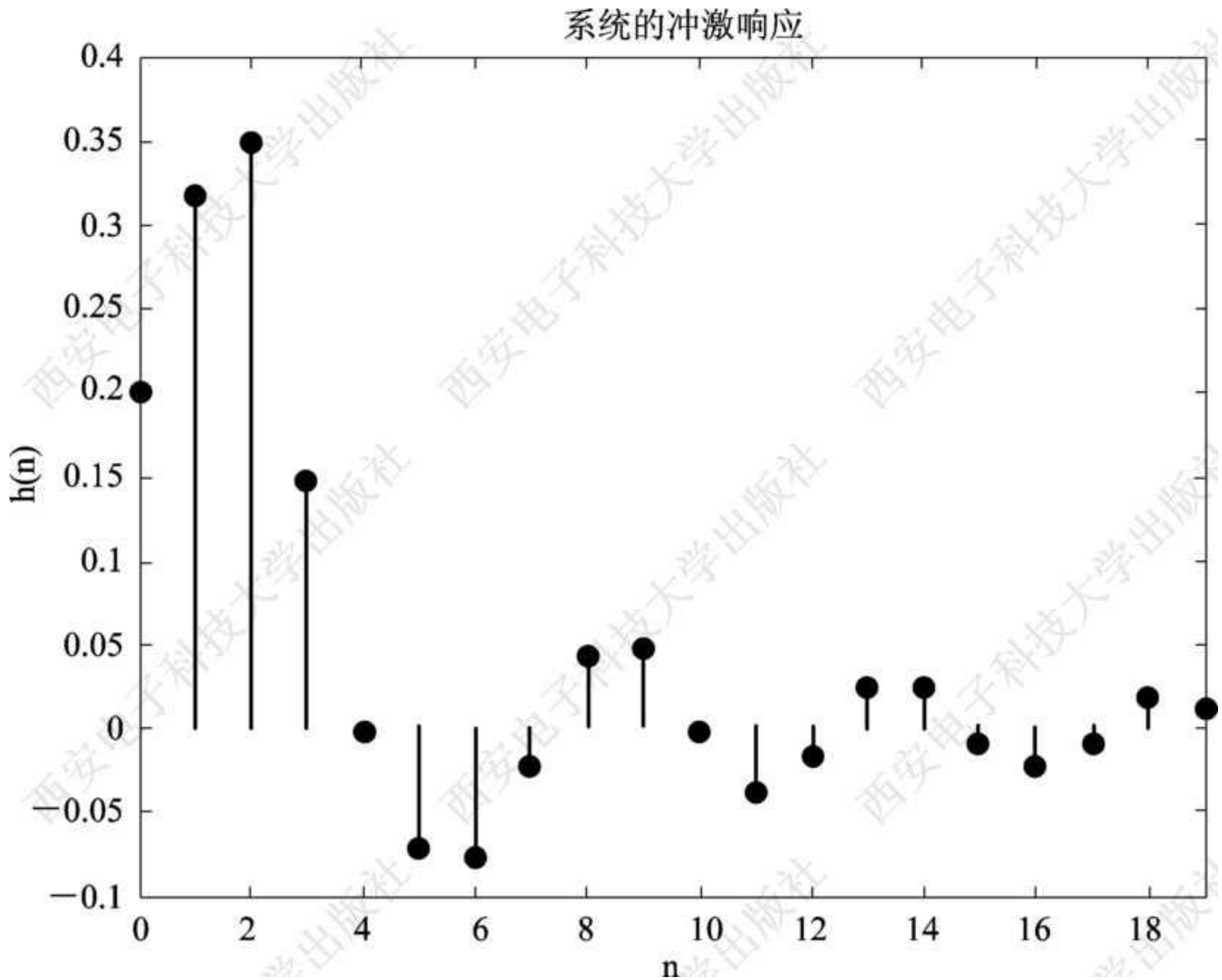

图12-7 例12-5系统的冲激响应图

由运行结果和图12-6零极点分布图可见，该系统的所有极点均在单位圆内；由图12-7可见，该系统的冲激响应曲线随着n增大而收敛。因此，该系统是一个因果稳定系统。

4.系统零极点的位置对系统频率响应的影响

系统零极点的位置对系统响应有着非常明显的影响。为了更清楚地观察零极点对系统的影响，我们选择最简单的一阶系统为例，且仅选择其中一种情况进行分析。实际情况要比例题复杂，如零点或极点不在原点、零极点之间的相对位置等情况。

例12-6 观察系统极点的位置对幅频响应的影响。

已知一阶离散系统的传递函数为 $H(z)=\dfrac{z-q_1}{z-p_1}$，

假设系统的零点q_1在原点，极点p_1分别取0.2、0.5、0.8，比较它们的幅频响应曲线，从中了解系统极点的位置对幅频响应有何影响。

解 MATLAB程序如下：

z＝［0］′；k＝1；　　　　　%设零点在原点处，k为1

n＝(0：500)*pi/500；

p1＝［0.2］′；　　%极点在0.2处

［b_1，a_1］＝zp2tf(z，p1，k)；%由zpk模式求tf模式b和a系数

［h1，w］＝freqz(b_1，a_1，n)；%求系统的频率响应

subplot(2，3，1)，zplane(b_1，a_1)；%作零极点分布图

title(′极点p1＝0.2′)；

```
p2＝［0.5］′；                %极点在0.5处
［b2，a2］＝zp2tf(z，p2，k)；
［h2，w］＝freqz(b2，a2，n)；
subplot(2，3，2)，zplane(b2，a2)；
title(′极点p1＝0.5′)；
p3＝［0.8］′；                %极点在0.8处
［b3，a3］＝zp2tf(z，p3，k)；
［h3，w］＝freqz(b3，a3，n)；
subplot(2，3，3)，zplane(b3，a3)；
title(′极点p1＝0.8′)；
```

%同时显示p1分别取0.2、0.5、0.8时的幅频响应

subplot(2，1，2)，plot(w/pi，abs(h1)，w/pi，abs(h2)，w/pi，abs(h3))；

axis(［0，1，0，5］)；

text(0.08，1，′p1＝0.2′)；%在曲线上标注文字说明

text(0.05，2，′p1＝0.5′)；

text(0.08，3.5，′p1＝0.8′)；title(′幅频特性′)；

三种情况下的零极点分布图和幅频响应曲线见图12-8。

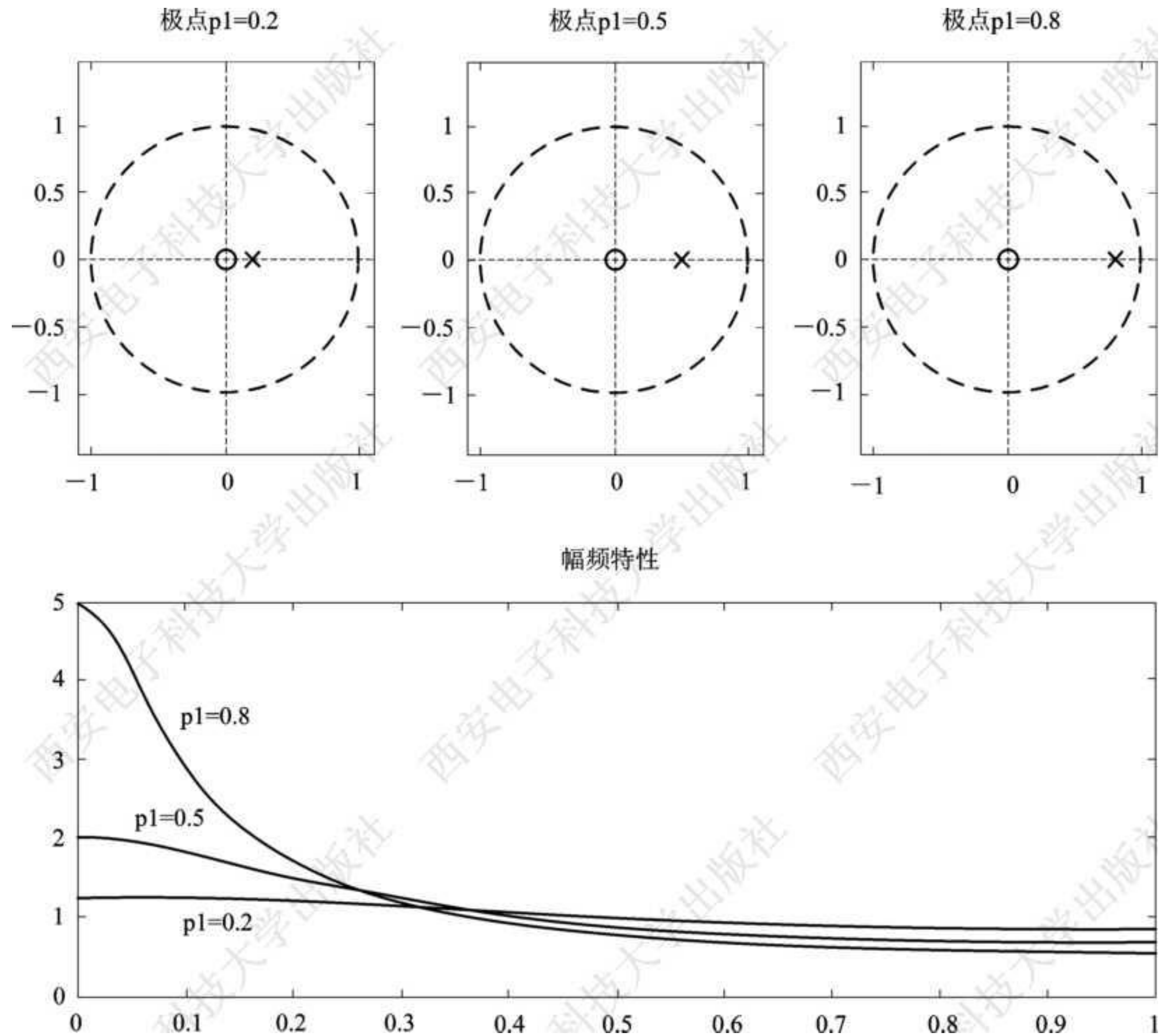

图12-8 例12-6系统极点的位置对幅频响应的影响

由图12-8可见，这些一阶系统是滤波性能较差的低通滤波器。单位圆内越靠近单位圆的极点，对系统幅度响应凸峰的位置及峰度影响越明显。如在$\omega \to 0$处，$p_1 = 0.8$时比$p_1 = 0.2$和$p_1 = 0.5$接近单位圆，因此幅度响应凸峰的峰度比其它两种情况陡峭。

例12-7 观察系统零点的位置对幅频响应的影响。

已知一阶离散系统的传递函数为$H(z)=\dfrac{z-q_1}{z-p_1}$，假设系统的极点$p_1$在原点，零点$q_1$分别取0.2、0.5、0.8，比较它们的幅频响应曲线，从中了解系统零点的位置对幅频响应有何影响。

解 MATLAB程序如下：

```
p＝［0］′；k＝1；
%设极点在原点处，k为1
n＝(0：500)*pi/500；
z1＝［0.2］′；%零点在0.2处
［b1，a1］＝zp2tf(z1，p，k)；
［h1，w］＝freqz(b1，a1，n)；
subplot(2，3，1)，zplane(b1，a1)；
title(′零点q1＝0.2′)；
```

```
z2＝［0.5］′;                %零点在0.5处
［b2，a2］＝zp2tf(z2，p，k);
［h2，w］＝freqz(b2，a2，n);
subplot(2，3，2)，zplane(b2，a2);
title(′零点q1＝0.5′);
z3＝［0.8］′;                %零点在0.8处
［b3，a3］＝zp2tf(z3，p，k);
［h3，w］＝freqz(b3，a3，n);
subplot(2，3，3)，zplane(b3，a3);
title(′零点q1＝0.8′);
```

%同时显示q1分别取0.2、0.5、0.8时的幅频响应

subplot(2，1，2)，plot(w/pi，abs(h1)，w/pi，abs(h2)，w/pi，abs(h3))；

text(0.2，1，′q1＝0.2′)；

text(0.1，1.4，′q1＝0.5′)；

text(0.2，1.7，′q1＝0.8′)；title(′幅频特性′)；

三种情况下的零极点分布图和幅频响应曲线见图12-9。

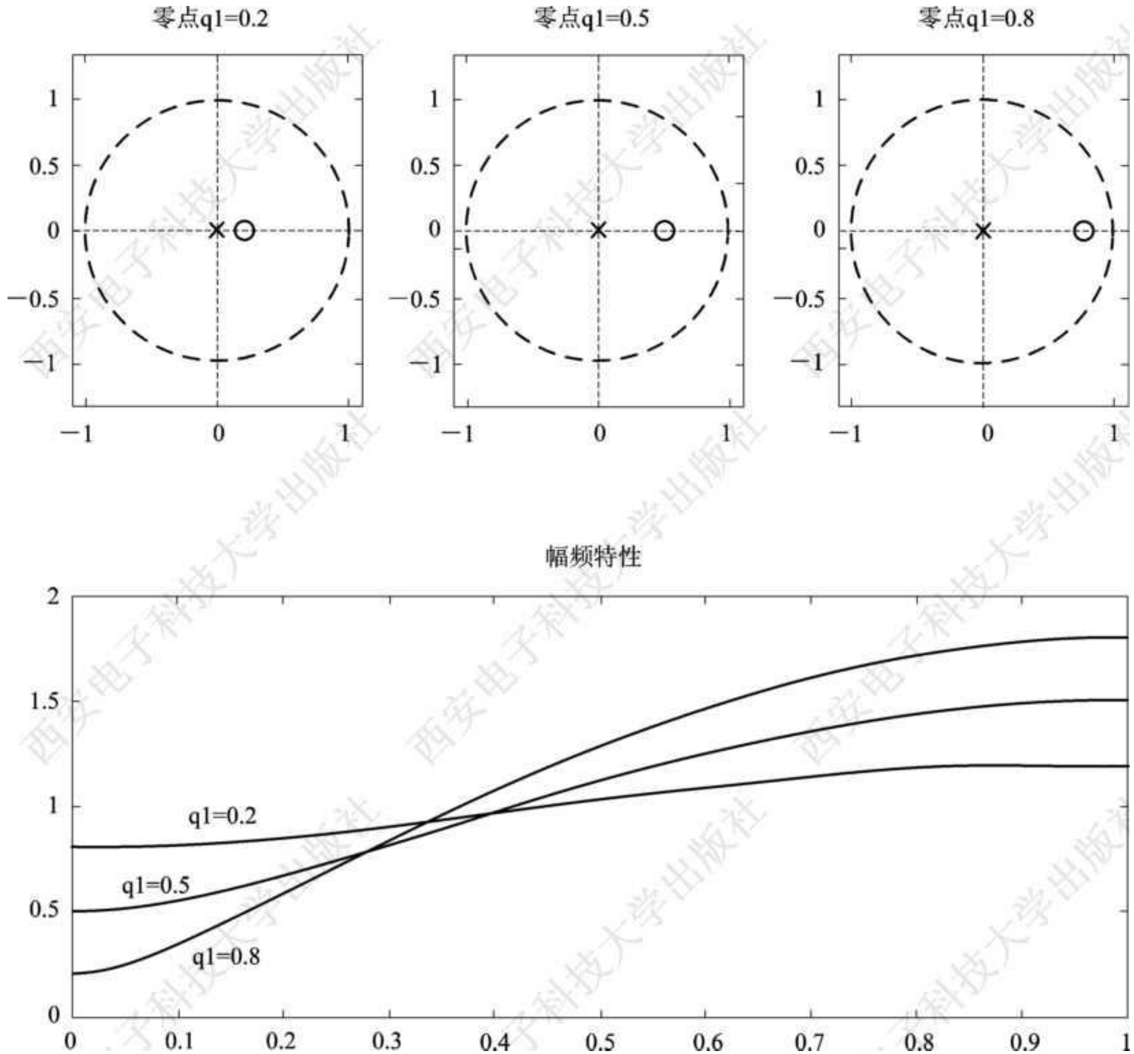

图12-9 例12-7系统零点的位置对幅频响应的影响

由图12-9可见，这些一阶系统是滤波性能较差的高通滤波器。零点的位置越接近单位圆，对系统幅度响应的凹谷的位置及深度的影响越明显。如在$\omega \to 0$处，$q_1 = 0.8$时比$q_1 = 0.2$和$q_1 = 0.5$接近单位圆，因此幅度响应凹谷的深度比其它两种情况明显。