时域抽样与信号的重建

离散时间信号大多由连续时间信号(模拟信号)抽样获得。在模拟信号进行数字化处理的过程中，主要经过A/D转换、数字信号处理、D/A转换和低通滤波等过程，如图4-2所示。其中，A/D转换器的作用是将模拟信号进行抽样、量化、编码，变成数字信号。经过处理后的数字信号则由D/A转换器重新恢复成模拟信号。

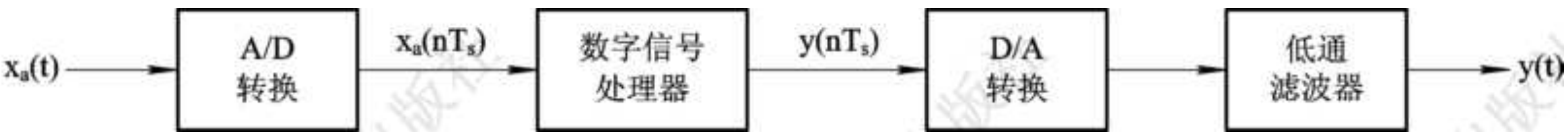

图4-2 对模拟信号进行数字化处理的过程

如果A/D转换电路输出的信号频谱已经发生了混叠现象，则信号再经过后面的数字信号处理电路和D/A转换电路就没有实际使用的意义了。因此，信号进行A/D转换时，采样频率的确定是非常重要的。

图4-3表示了一个连续时间信号$x_a(t)$、对应的抽样后获得的信号 $\hat{x}_a(t)$ 以及对应的频谱。在信号进行处理的过程中，要使有限带宽信号$x_a(t)$被抽样后能够不失真地还原出原模拟信号，抽样信号$p(t)$的周期T_s及抽样频率F_s的取值必须符合奈奎斯特(Nyquist)定理。假定$x_a(t)$的最高频率为f_m，则应有$F_s \geq 2f_m$，即$\Omega_s \geq 2\Omega_m$。

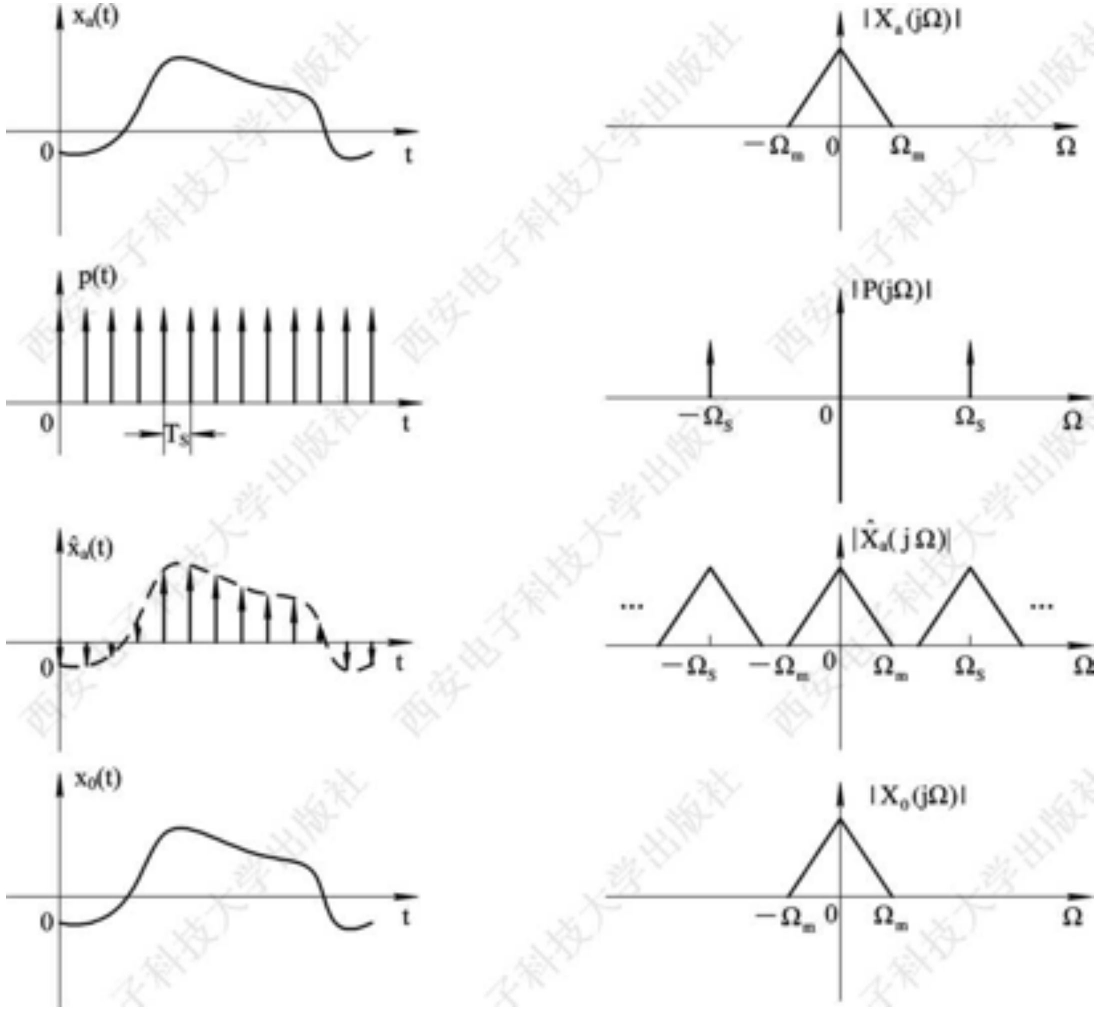

图4-3 连续时间信号的抽样及其对应的频谱

从图4-3中我们可以看出，由于F_s的取值符合大于两倍的信号最高频率f_m，因此只要经过一个低通滤波器，抽样信号$\hat{x}_a(t)$就能不失真地还原出原模拟信号。反之，如果F_s的取值小于两倍的信号最高频率f_m，则频谱

将发生混叠，抽样信号$\left|\hat{X}_a(\omega)\right|$将无法不失真地还原出原模拟信号。

下面，我们用MATLAB程序来仿真演示信号从抽样到恢复的全过程。

1.对连续信号进行采样

在实际使用中，绝大多数信号都不是严格意义上的带限信号。为了研究问题的方便，我们选择两个正弦频率叠加的信号作为研究对象。

例4-1 已知一个连续时间信号 $f(t)=\sin(2\pi f_0 t)+\frac{1}{3}\sin(6\pi f_0 t)$，$f_0$＝1 Hz，取最高有限带宽频率$f_m$＝$5f_0$。分别显示原连续时间信号波形和$F_s>2f_m$、$F_s$＝$2f_m$、$F_s<2f_m$三种情况下抽样信号的波形。

解 分别取$F_s=f_m$、$F_s=2f_m$和$F_s=3f_m$来研究问题。

MATLAB程序如下：

```
dt＝0.1；f0＝1；T0＝1/f0；
fm＝5*f0；Tm＝1/fm；
t＝－2：dt：2；
f＝sin(2*pi*f0*t)＋1/3*sin(6*pi*f0*t)；%建立原连续信号
subplot(4，1，1)，plot(t，f)；
axis(［min(t)max(t)1.1*min(f)1.1*max(f)］)；
title('原连续信号和抽样信号')；
fori＝1：3；
```

fs＝i*fm；Ts＝1/fs；%确定采样频率和周期

n＝－2：Ts：2；

f＝sin(2*pi*f0*n)＋1/3*sin(6*pi*f0*n)；%生成抽样信号

subplot(4，1，i＋1)，stem(n，f，′filled′)；

axis(［min(n)max(n)1.1*min(f)1.1*max(f)］)；

end

结果如图4-4所示。

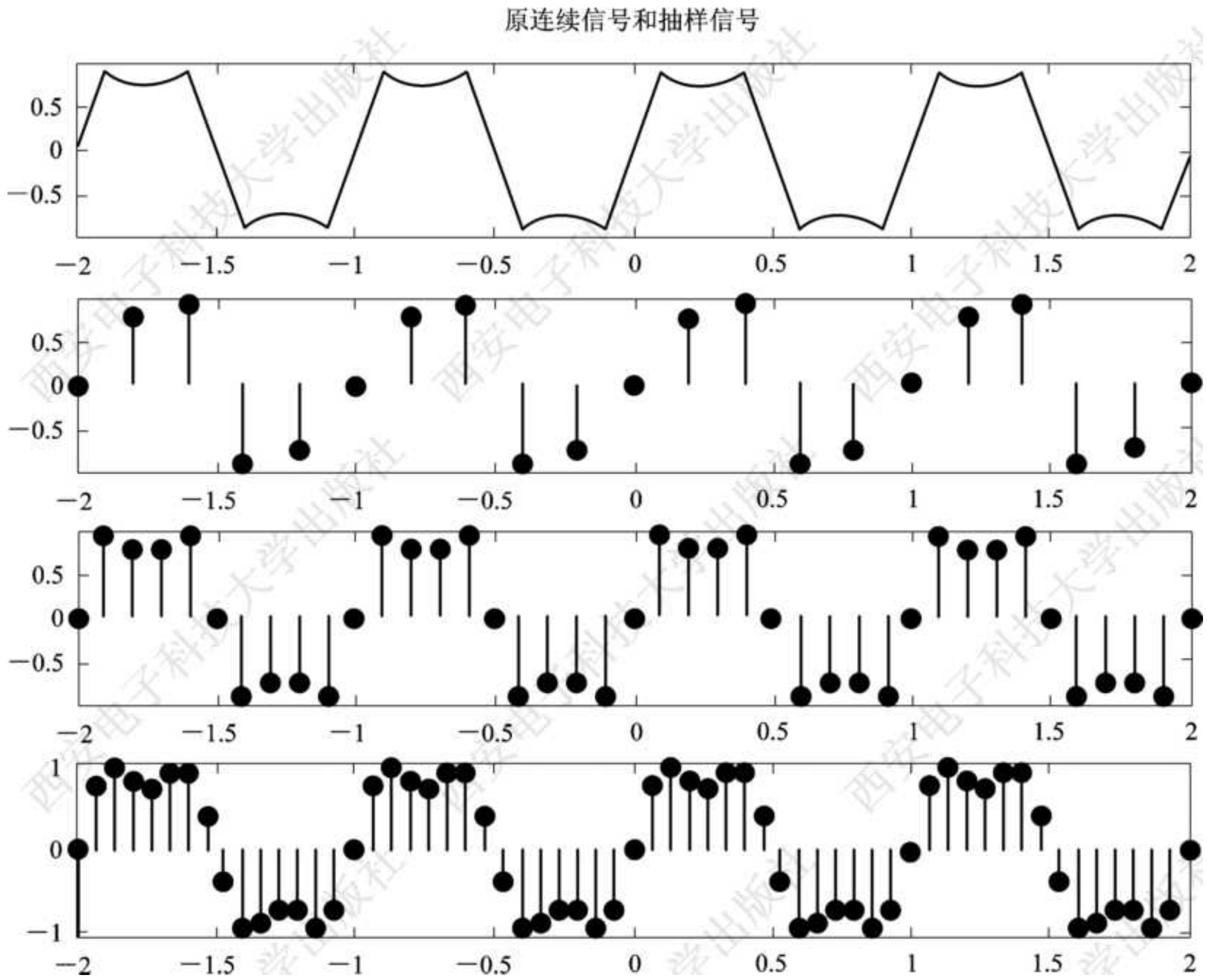

图4-4 连续信号及其抽样信号波形

2.连续信号和抽样信号的频谱

根据理论分析已知，信号的频谱图可以很直观地反映出抽样信号能否恢复还原模拟信号波形。因此，我们对上述三种情况下的时域信号波形求振幅频谱，来进一步分析和证明时域抽样定理。

例4-2 求解例4-1中原连续信号波形和$F_s<2f_m$、$F_s=2f_m$、$F_s>2f_m$三种情况下的抽样信号波形所对应的幅度谱。

解 图4-5依次表示原连续信号和$F_s<2f_m$、$F_s=2f_m$、$F_s>2f_m$抽样信号的频谱，与图4-4上各时域信号一一对应。由图可见，当满足$F_s\geq 2f_m$条件时，抽样信号的频谱没有混叠现象；当不满足$F_s\geq 2f_m$条件时，抽样信号的频谱发生了混叠，即图4-5第2行$F_s<2f_m$的频谱图，在$f_m=5f_0$的范围内，频谱出现了镜像对称的部分。

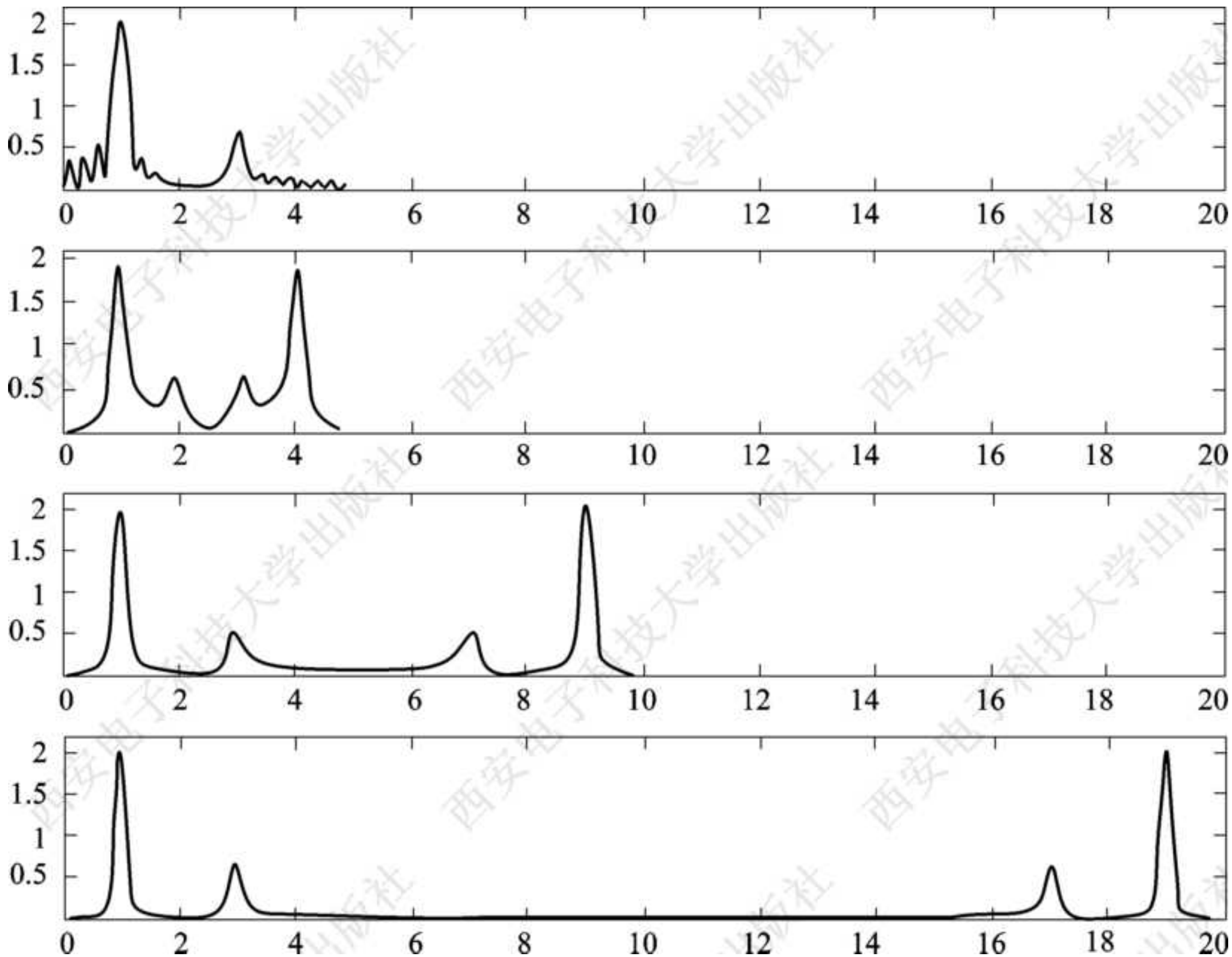

图4-5 连续信号及其抽样信号的振幅频谱

抽样信号波形所对应的幅度谱MATLAB程序如下：

dt＝0.1；f0＝1；T0＝1/f0；　%输入基波的频率、计算周期

t＝－2：dt：2；

N＝length(t)；%求时间轴上采样点数

f＝sin(2*pi*f0*t)＋1/3*sin(6*pi*f0*t)；%建立原连续信号

fm＝5*f0；Tm＝1/fm；%最高频率取基波的5倍频

wm＝2*pi*fm；

k＝0：N－1；

w1＝k*wm/N；%在频率轴上生成N个采样频率点

F1＝f*exp(－j*t′*w1)*dt；%对原信号进行傅里叶变换

subplot(4，1，1)，plot(w1/(2*pi)，abs(F1))；

axis(［0max(4*fm)1.1*min(abs(F1))1.1*max(abs(F1))］)；

%生成fs<2fm，fs＝2fm，fs>2fm三种抽样信号的振幅频谱

fori＝1：3；

ifi<＝2c＝0，elsec＝1，end

fs＝(i＋c)*fm；Ts＝1/fs；%确定采样频率和周期

n＝－2：Ts：2；

```
f＝sin(2*pi*f0*n)＋1/3*sin(6*pi*f0*n)； %生成抽样信号
N＝length(n)；%求时间轴上采样点数
wm＝2*pi*fs；
k＝0：N－1；
w＝k*wm/N；
F＝f*exp(－j*n′*w)*Ts；%对抽样信号进行傅里叶变换
subplot(4，1，i＋1)，plot(w/(2*pi)，abs(F))；
axis(［0max(4*fm)1.1*min(abs(F))1.1*max(abs(F))］)；
end
```

3.由内插公式重建信号

满足奈奎斯特(Nyquist)抽样定理的信号 $\hat{x}_a(t)$ ，只要经过一个理想的低通滤波器，将原信号有限带宽以外的频率部分滤除，就可以重建$x_a(t)$信号，如图4-6(a)所示。

信号重建一般采用两种方法：一是用时域信号与理想滤波器系统的单位冲激响应进行卷积积分来求解；二是设计实际的模拟低通滤波器对信号进行滤波。我们首先来讨论第一种方法。

(a) 抽样信号通过低通滤波器重建示意图

(b) 理想低通滤波器频率特性

图4-6 抽样信号经过理想低通滤波器重建$x_a(t)$信号

理想低通滤波器的频域特性为一矩形，如图4-6(b)所示，其单位冲激响应为

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\Omega)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过滤波器输出，其结果应为$\hat{x}_a(t)$与$h(t)$的卷积积分：

$$y_a(t) = x_a(t) = \hat{x}_a(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau\tau h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \tag{4-1}$$

式(4-1)称为内插公式。由式可见，$x_a(t)$信号可以由其抽样值$x_a(nT)$及内插函数重构。MATLAB中提供了sinc函数，可以很方便地使用内插公式。

例4-3 用时域卷积推导出的内插公式重建例4-1给定的信号。

解 MATLAB程序如下：

f0＝1；T0＝1/f0；dt＝0.01；　　　%输入基波的频率、周期

fm＝5*f0；Tm＝1/fm；%最高频率为基波的5倍频

t＝0：dt：3*T0；

x＝sin(2*pi*f0*t)＋1/3*sin(6*pi*f0*t)；%建立原连续信号

subplot(4，1，1)，plot(t，x)；

```
axis( [min(t)max(t)1.1*min(x)1.1*max(x)] );
title('用时域卷积重建抽样信号');
fori＝1：3；
fs＝i*fm；Ts＝1/fs；%确定采样频率和周期
n＝0：(3*T0)/Ts        %生成n序列
t1＝0：Ts：3*T0；      %生成t序列
x1＝sin(2*pi*n*f0/fs)＋1/3*sin(6*pi*n*f0/fs)；  %生成
                                                抽样信号
T－N＝ones(length(n)，1)*t1－n'*Ts*ones(1，
length(t1))；               %生成t－nT矩阵
```

```
xa＝x1*sinc(fs*T－N)；%内插公式
subplot(4，1，i＋1)，plot(t1，xa)；
axis(［min(t1)max(t1)1.1*min(xa)1.1*max(xa)］)；
end
```

原信号与重建信号的结果如图4-7所示。

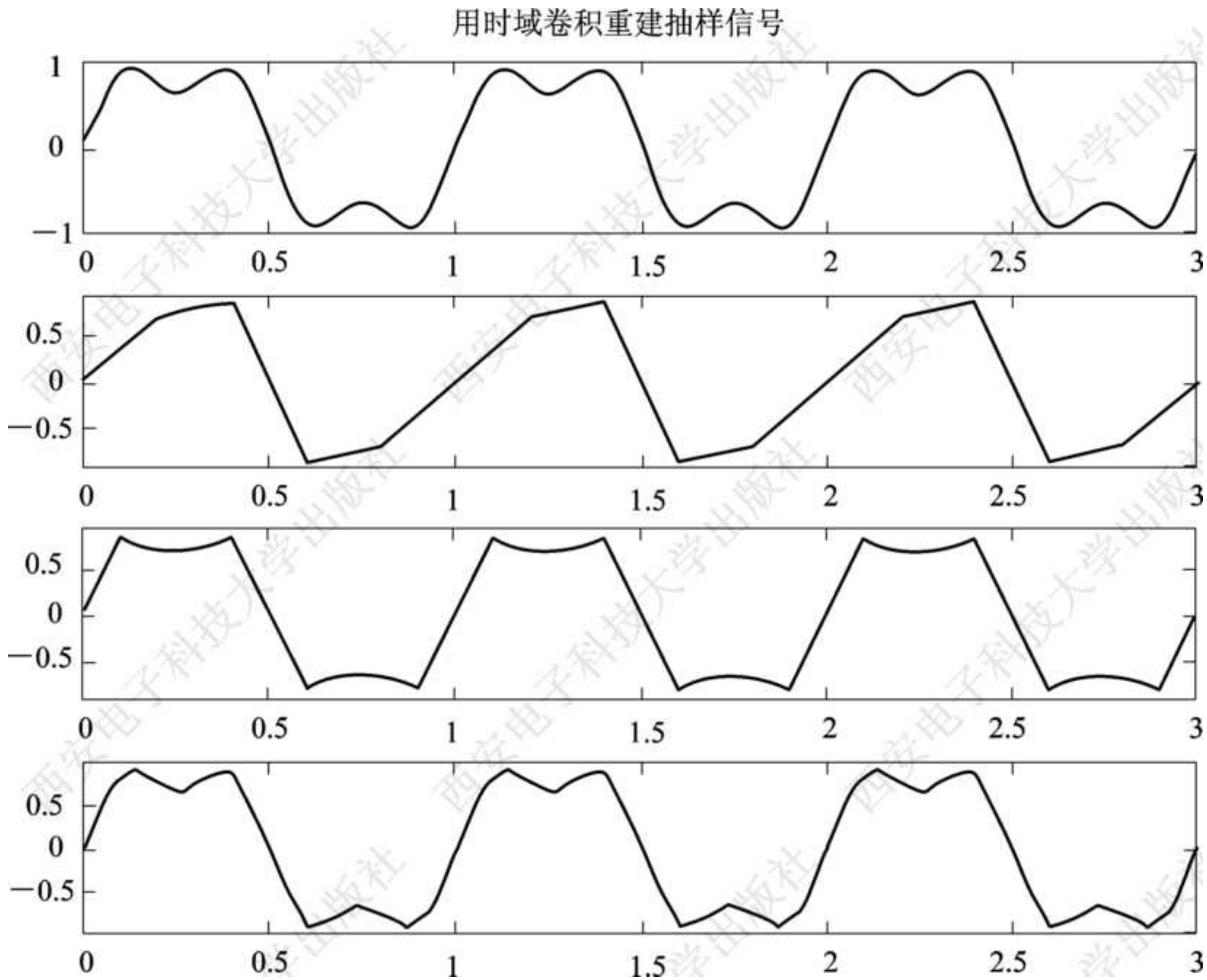

图4-7 用时域卷积内插公式重建信号