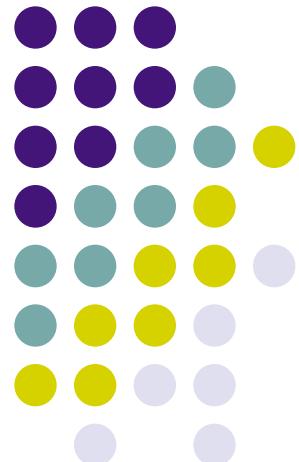


# 数字图像处理

2维傅里叶变换 (Part IV)

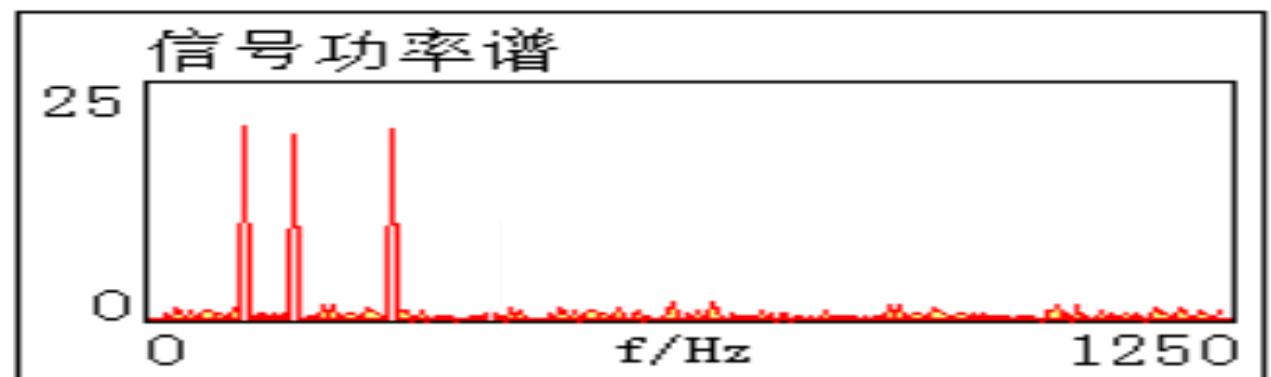
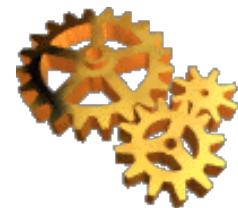
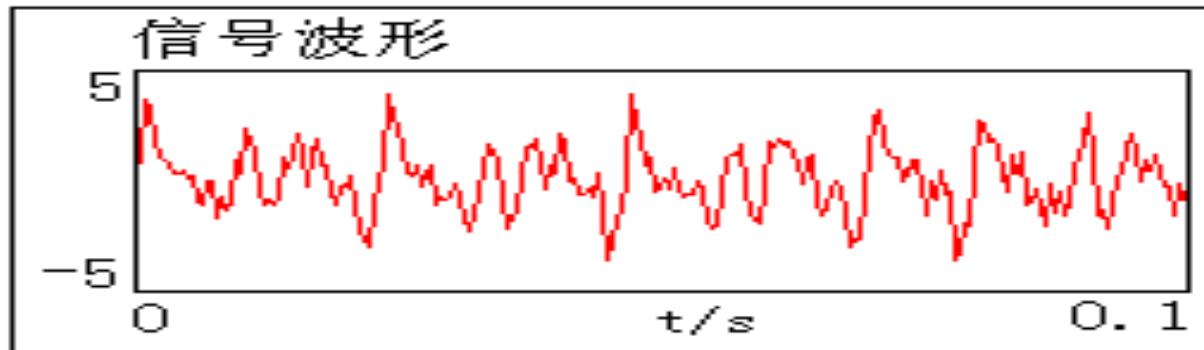




图像是连续信号的量化采样。

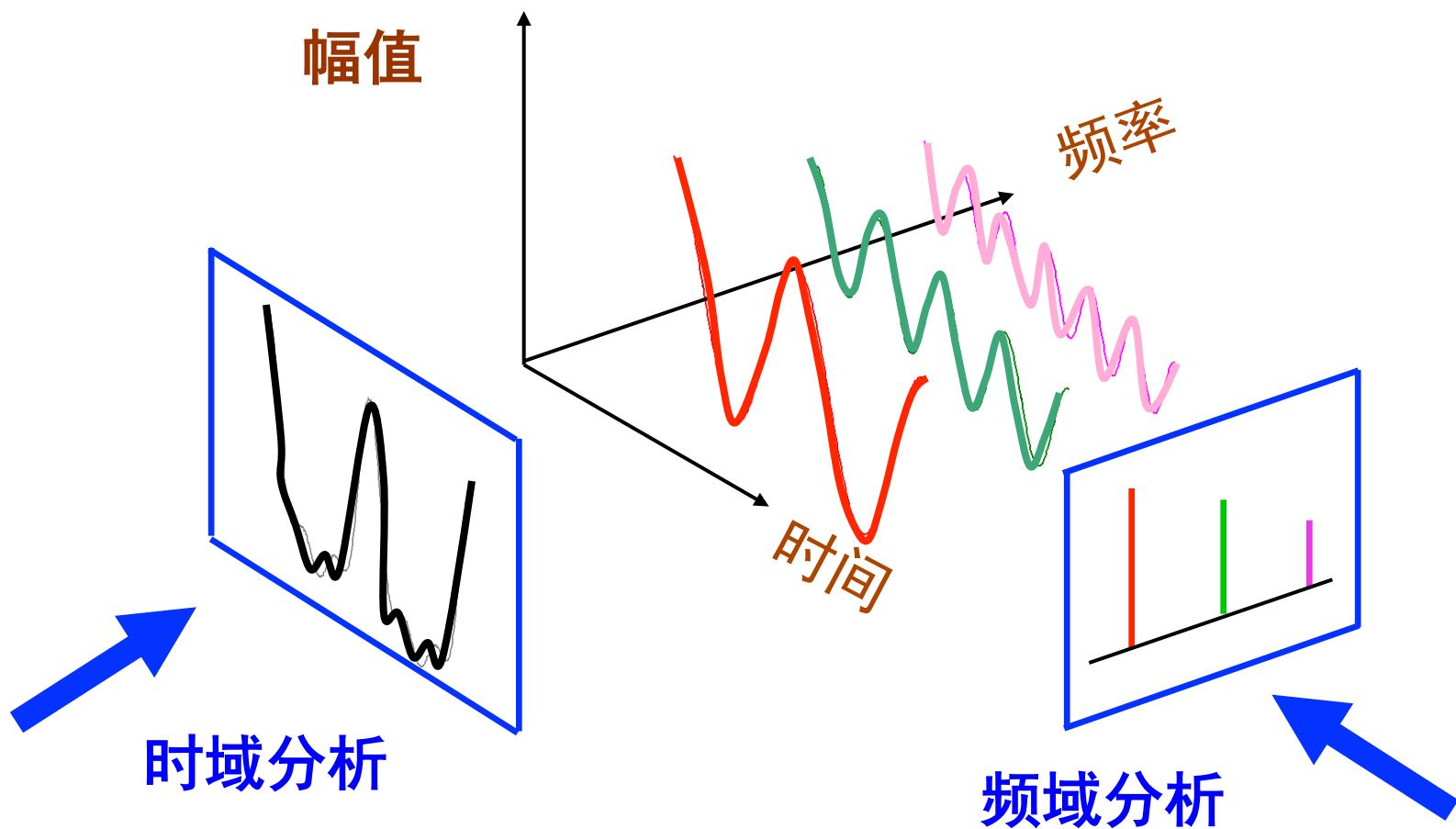
信号通常包括丰富的频域信息。

图例：受噪声干扰的多频率成分信号





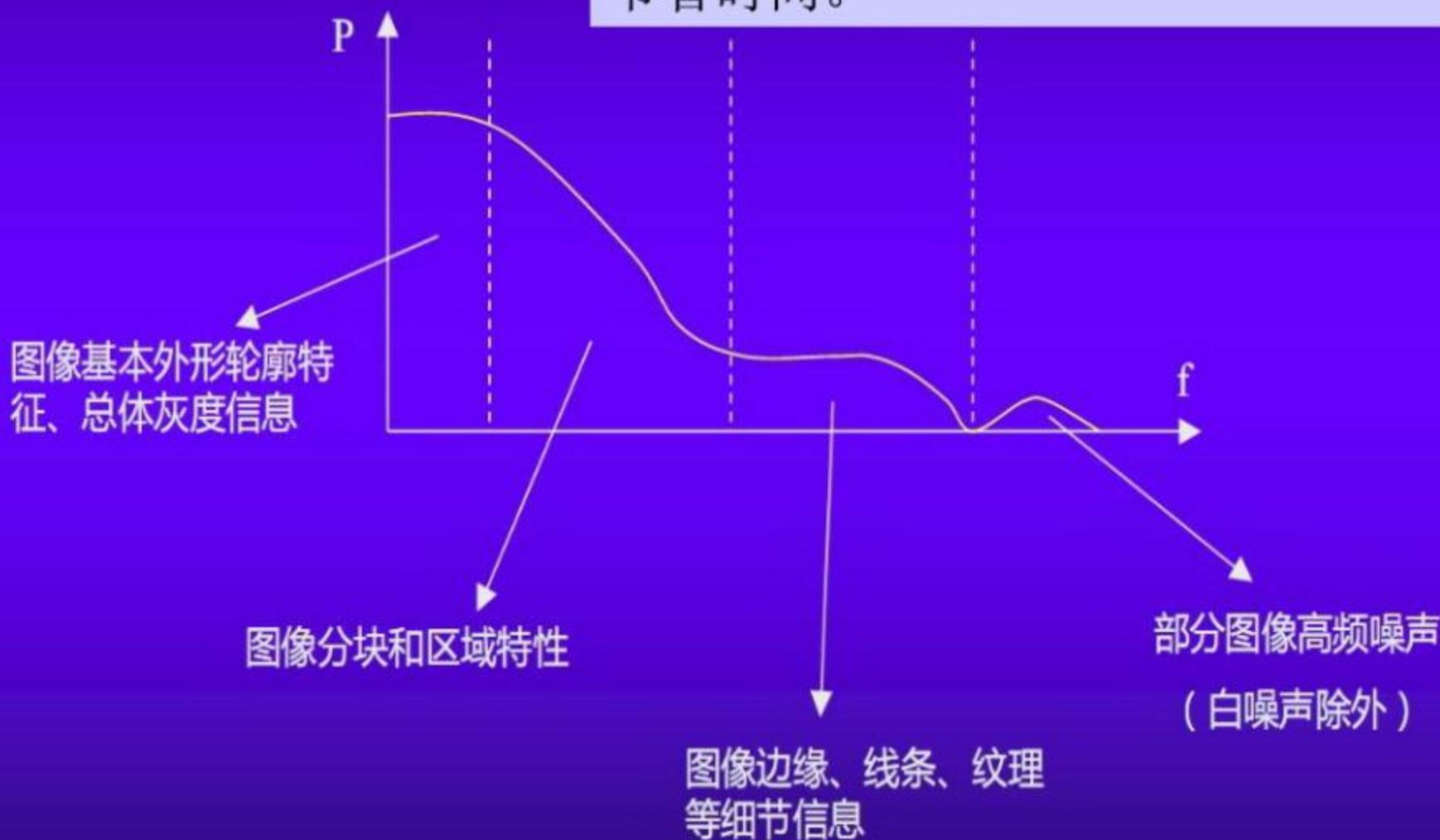
信号频谱 $X(f)$ 代表了信号在不同频率分量成分的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息。



# 为什么要做图像变换？

## 图像信号的频域模型

◆ 变换后的图象，大部分能量都分布于低频谱段，这对以后图象的压缩、传输都比较有利。使得运算次数减少，节省时间。





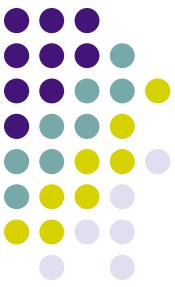
# 怎么把信号分解为频域？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）
- 《热分析理论》



## 傅里叶变换

任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和/或余弦函数之和



# 傅里叶变换的意义

- 回答了频域信息如何表示这个基本问题
- 表示法里面最重要的特征之一
- 带来了信号处理领域的一场革命



# 一维连续傅里叶及其反变换

- 连续函数 $f(x)$ 的傅立叶变换 $F(u)$ :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

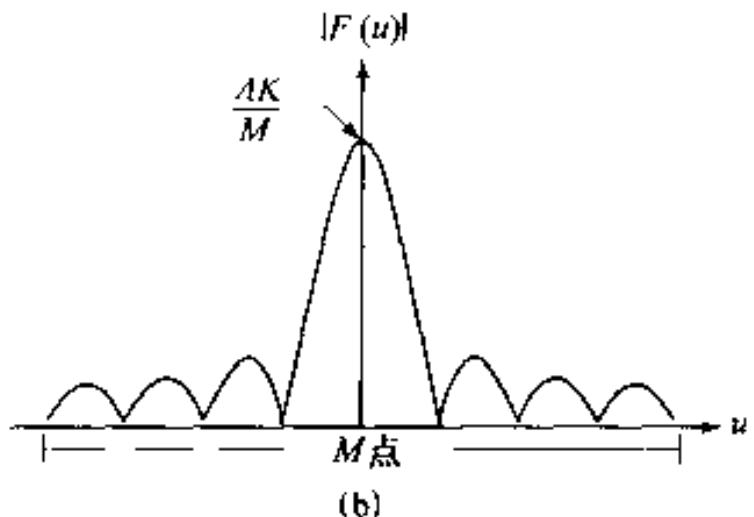
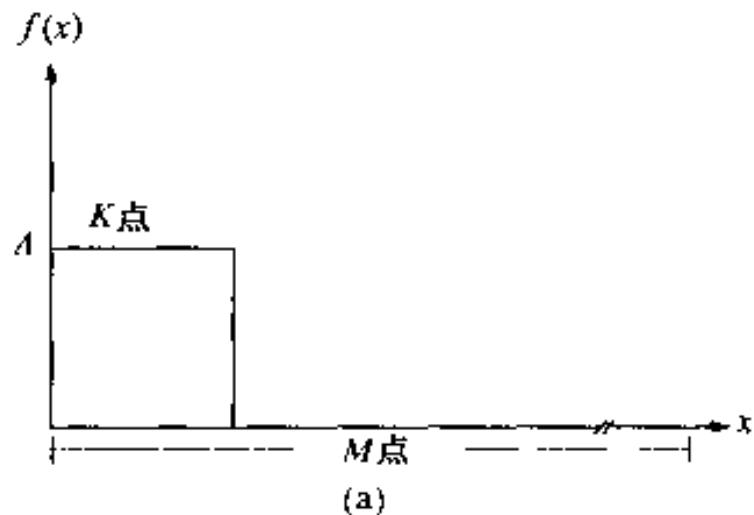
- 傅立叶变换 $F(u)$ 的反变换:

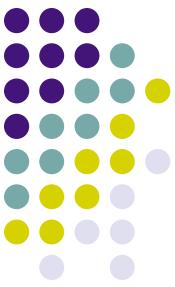
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$



# 一维连续傅立叶变换

- 矩形函数 $f(x)$
- 傅里叶谱函数 $F(u)$





# 一维连续傅立叶变换

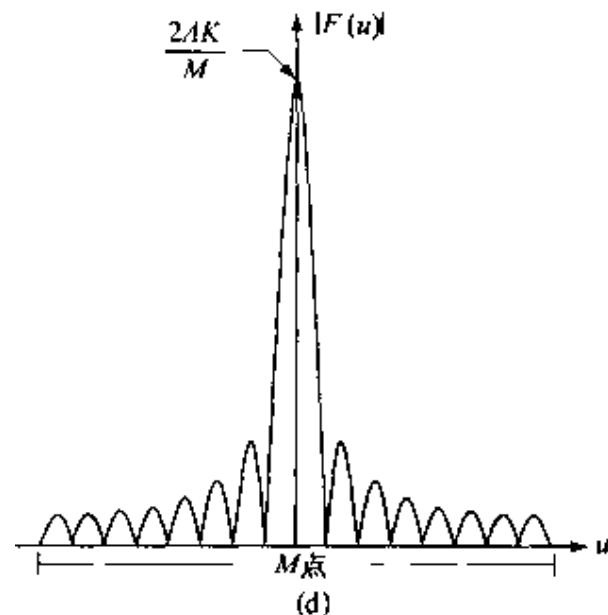
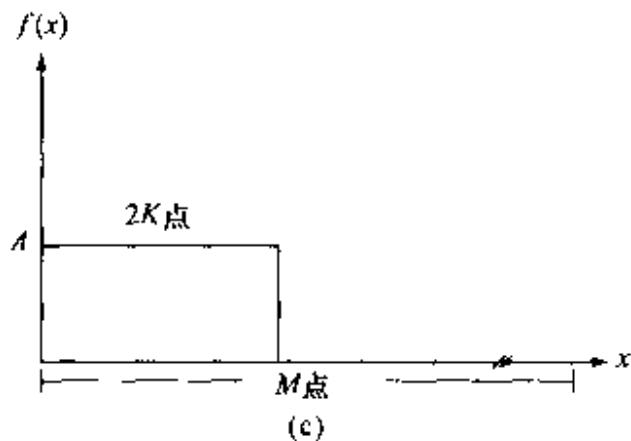
- 计算公式

$$\begin{aligned} \text{解: } F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \\ &= \int_0^X A e^{-j2\pi ux} dx = \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi ux}]_0^X \\ &= \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] = \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j\pi uX} - e^{j\pi uX}] e^{-j\pi uX} \\ &= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi uX) e^{-j\pi uX} \\ |F(u)| &= AX \left| \frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX} \right| \end{aligned}$$

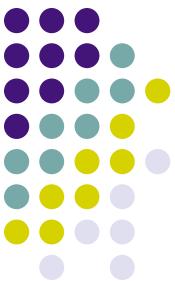


# 一维连续傅立叶变换

- 矩形函数 $f(x)$
- 傅里叶谱函数 $F(u)$



点数增加，傅里叶谱变窄



# 一维离散傅里叶变换DFT及其反变换

- 离散函数 $f(x)$ (其中 $x, u=0,1,2,\dots,N-1$ )的傅立叶变换:

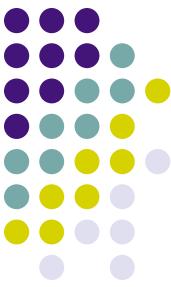
$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

- $F(u)$ 的反变换的反变换:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux/N}$$

计算 $F(u)$ :

- 1) 在指数项中代入 $u=0$ , 然后将所有 $x$ 值相加, 得到 $F(0)$ ;
- 2)  $u=1$ , 对所有 $x$ 的相加, 得到 $F(1)$ ;
- 3) 对所有 $M$ 个 $u$ 重复此过程, 得到全部完整的FT。



- 离散傅里叶变换及其反变换总存在。
- 用欧拉公式得  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) [\cos 2\pi ux / N - j \sin 2\pi ux / N]$$

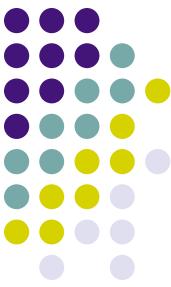
每个  $F(u)$  由  $f(x)$  与对应频率的正弦和余弦乘积和组成；

$u$  值决定了变换的频率成份，因此， $F(u)$  覆盖的域（ $u$  值）称为频率域，其中每一项都被称为 FT 的频率分量。与  $f(x)$  的“时间域”和“时间成份”相对应。



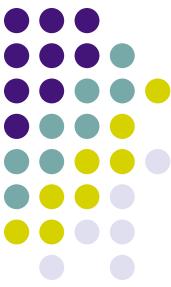
# 一些常用的傅立叶变换函数

函数	$f(t)$	$F(u)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi u^2}$
矩形脉冲	$\Pi(t)$	$\sin(\pi u)/\pi u$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\sin^2(\pi u)/(\pi u)^2$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$u(t)$	$[\delta(u) - j/\pi u]/2$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$[\delta(u+f) + \delta(u-f)]/2$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j[\delta(u+f) - \delta(u-f)]/2$
复指数	$e^{2\pi ft}$	$\delta(u-f)$



# 傅里叶变换的作用

- \* 傅里叶变换将信号分成不同频率成份。类似光学中的分色棱镜把白光按波长(频率)分成不同颜色，称数学棱镜。
- \* 傅里叶变换的成份：直流分量和交流分量
- \* 信号变化的快慢与频率域的频率有关。噪声、边缘、跳跃部分代表图像的高频分量；背景区域和慢变部分代表图像的低频分量



# ■ 二维连续傅里叶变换

## 1) 定义

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

## 2) 逆傅里叶变换

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \quad f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

## 3) 傅里叶变换特征参数

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

频谱/幅度谱/模  $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

能量谱/功率谱  $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$

相位谱  $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$



## 二维DFT傅里叶变换

- 一个图像尺寸为 $M \times N$ 的函数 $f(x,y)$ 的离散傅立叶变换 $F(u,v)$ :

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $F(u, v)$ 的反变换:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

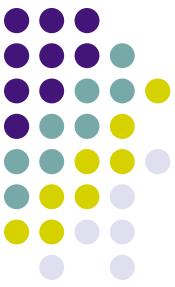


# 二维DFT傅里叶变换

- $(u,v)=(0,0)$ 位置的傅里叶变换值为

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = \bar{f}(x,y)$$

即 $f(x,y)$  的均值，原点 $(0,0)$  的傅里叶变换是图像的平均灰度。 $F(0,0)$  称为频率谱的**直流分量**(系数)，其它 $F(u,v)$  值称为**交流分量**(交流系数)。



# ■ 二维离散傅里叶变换

## 1) 定义

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1$$

$$v = 0, 1, \dots, N-1$$

## 2) 逆傅里叶变换

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

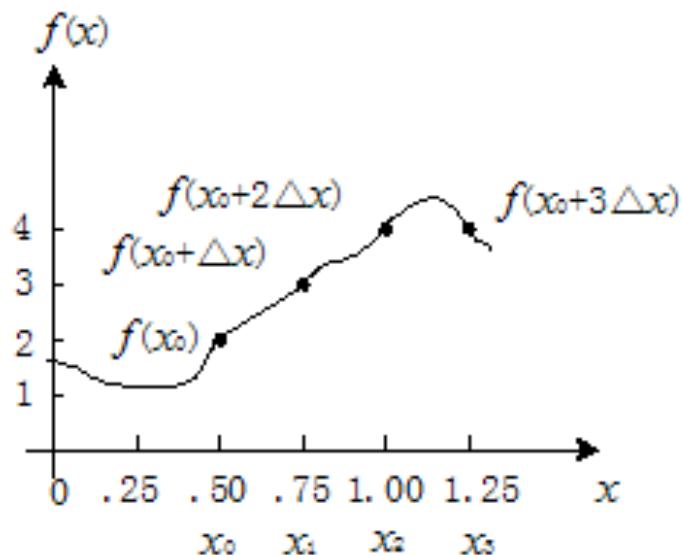
$$x = 0, 1, \dots, M-1$$

$$y = 0, 1, \dots, N-1$$

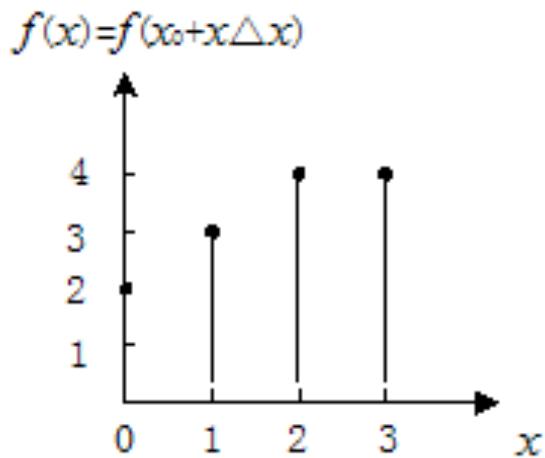
离散的情况下，傅里叶变换和逆傅里叶变换始终存在。



例 设一函数如图 (a) 所示, 如果将此函数在自变量  
 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.75, x_2 = 1.00, x_3 = 1.25$  取样  
并重新定义为图 (b) 离散函数, 求其傅里叶变换。



(a)



(b)



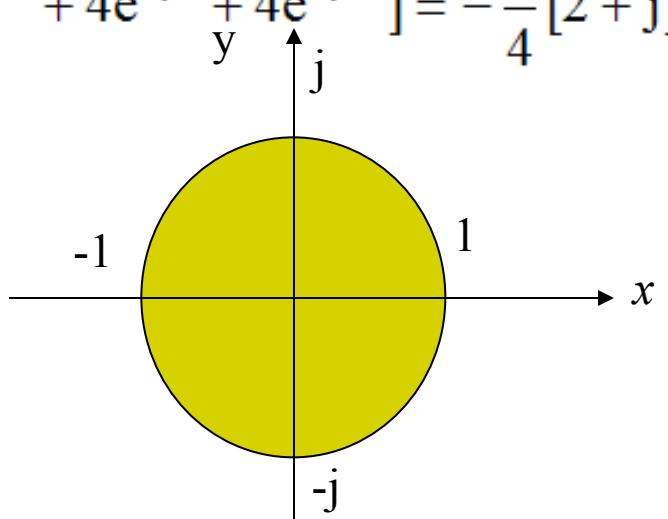
$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp\{0\} \\
 &= (1/4)[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = (1/4)[2 + 3 + 4 + 4] = 3.25
 \end{aligned}$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp\{-j2\pi x/4\} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2}] = \frac{1}{4} [-2 + j]$$

$$F(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp\{-j4\pi x/N\} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j\pi} + 4e^{-j2\pi} + 4e^{-j3\pi}] = -\frac{1}{4} [1 + j0]$$

$$F(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp\{-j6\pi x/4\} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j3\pi} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j9\pi}] = -\frac{1}{4} [2 + j]$$

$$F(u) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$



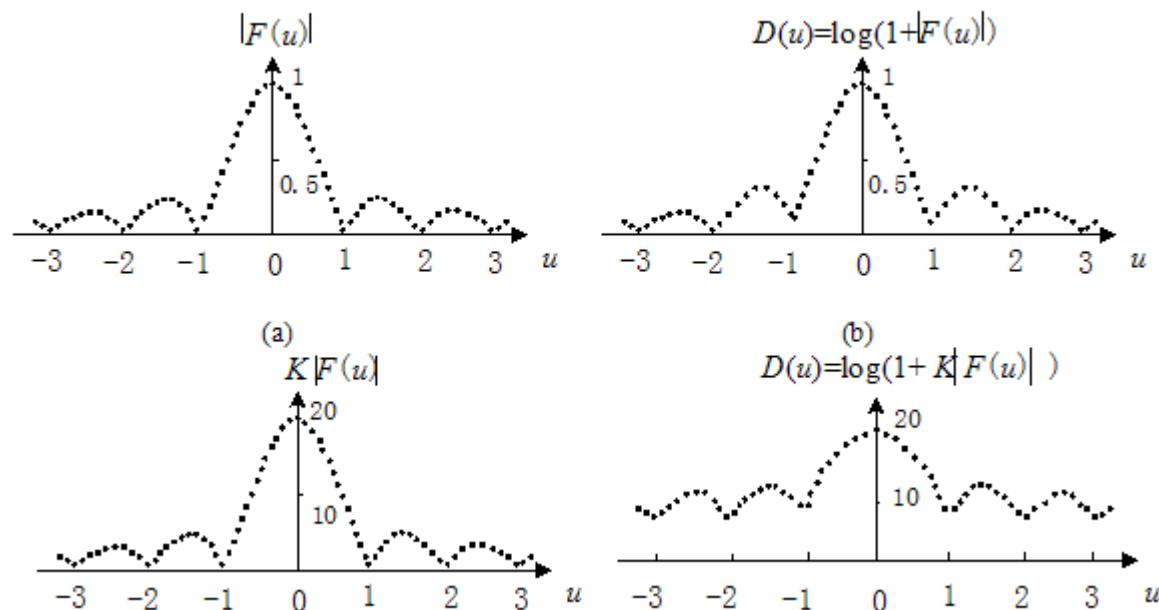


# 图像的频谱幅度随频率增大而迅速衰减

许多图像的傅里叶频谱的幅度随着频率的增大而迅速减小，这使得在显示与观察一副图像的频谱时遇到困难。但以图像的形式显示它们时，其高频项变得越来越不清楚。

解决办法：

对数化



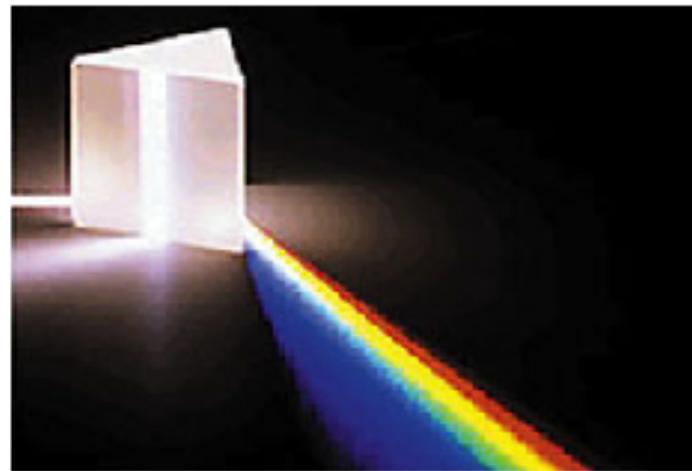


# 傅里叶变换的意义

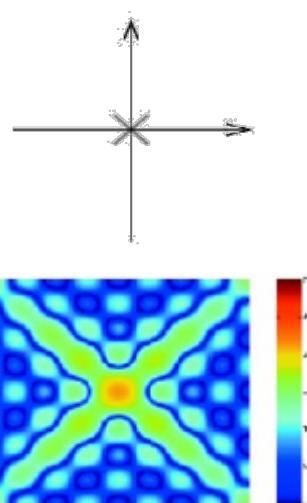
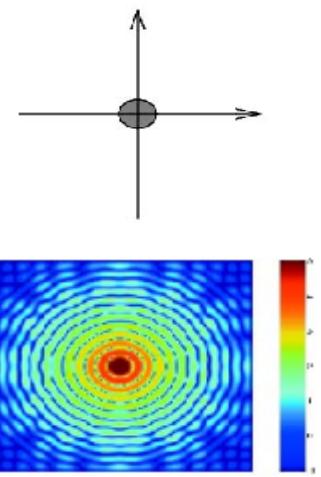
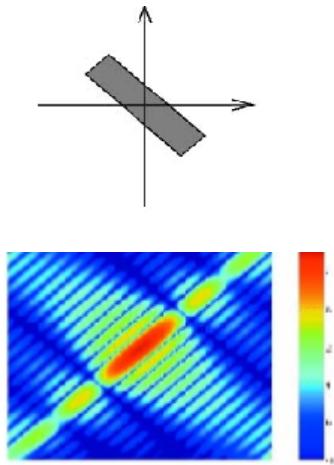
傅里叶变换好比一个玻璃棱镜

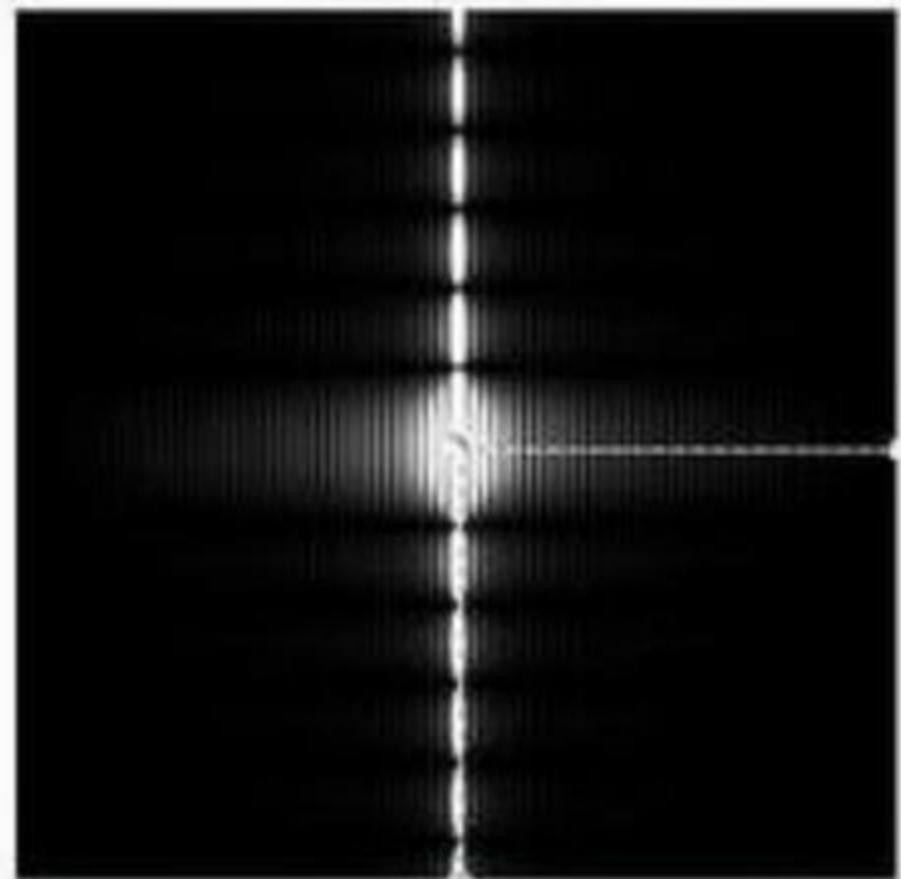
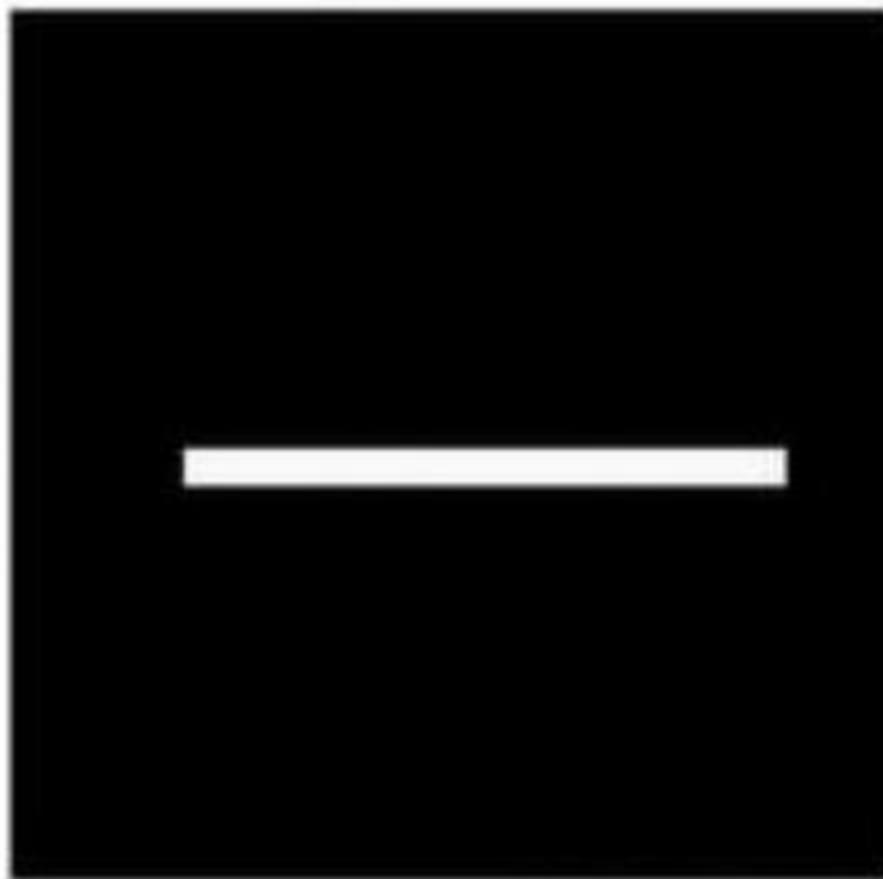
棱镜是可以将光分成不同颜色的物理仪器，每个成分的颜色由波长决定。

傅里叶变换可看做是“数学中的棱镜”，将函数基于频率分成不同的成分。

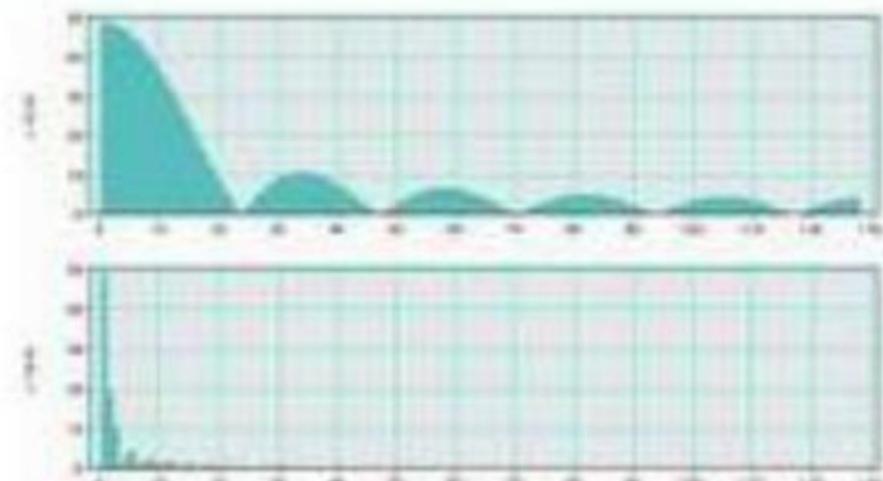


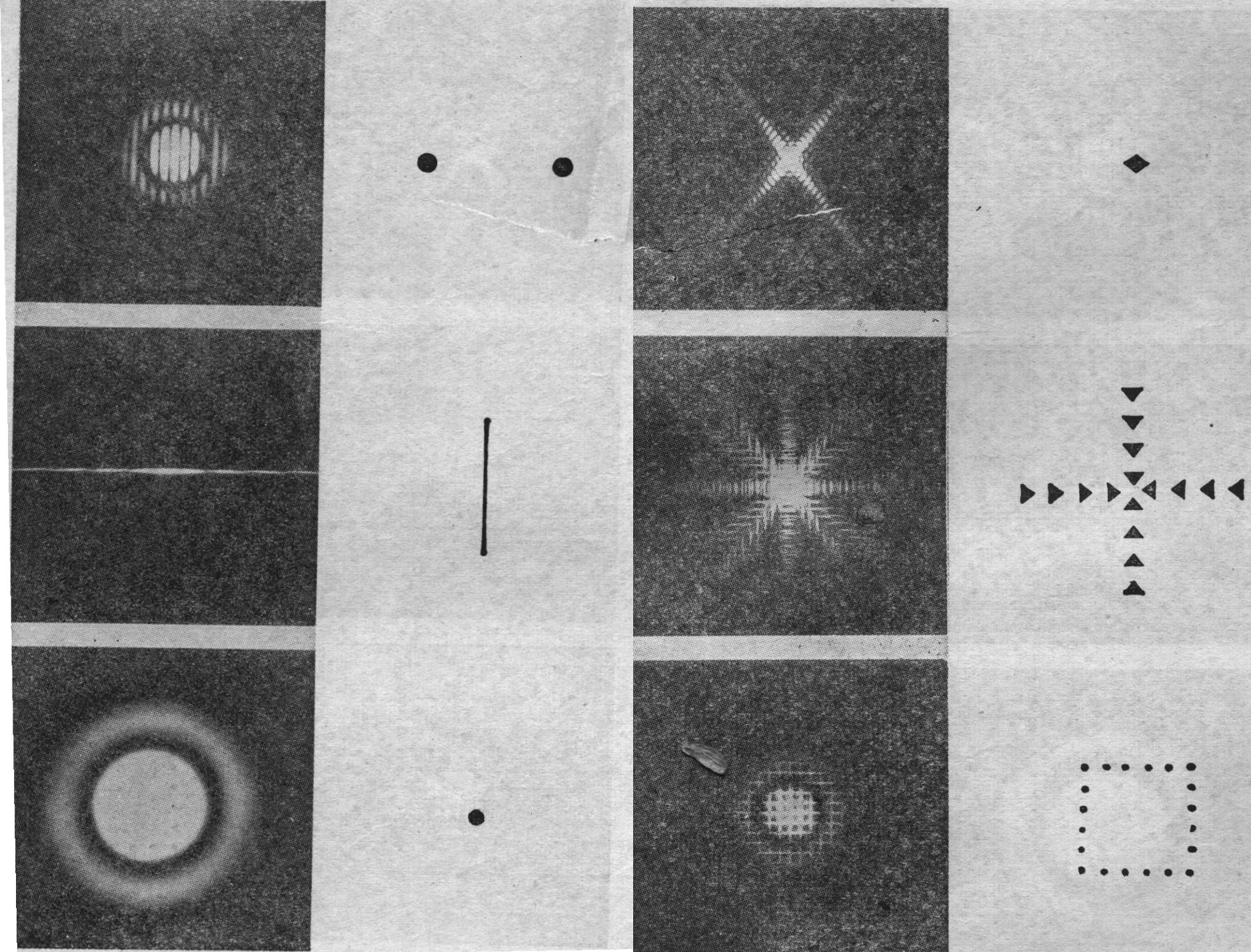
一些图像的傅里叶变换





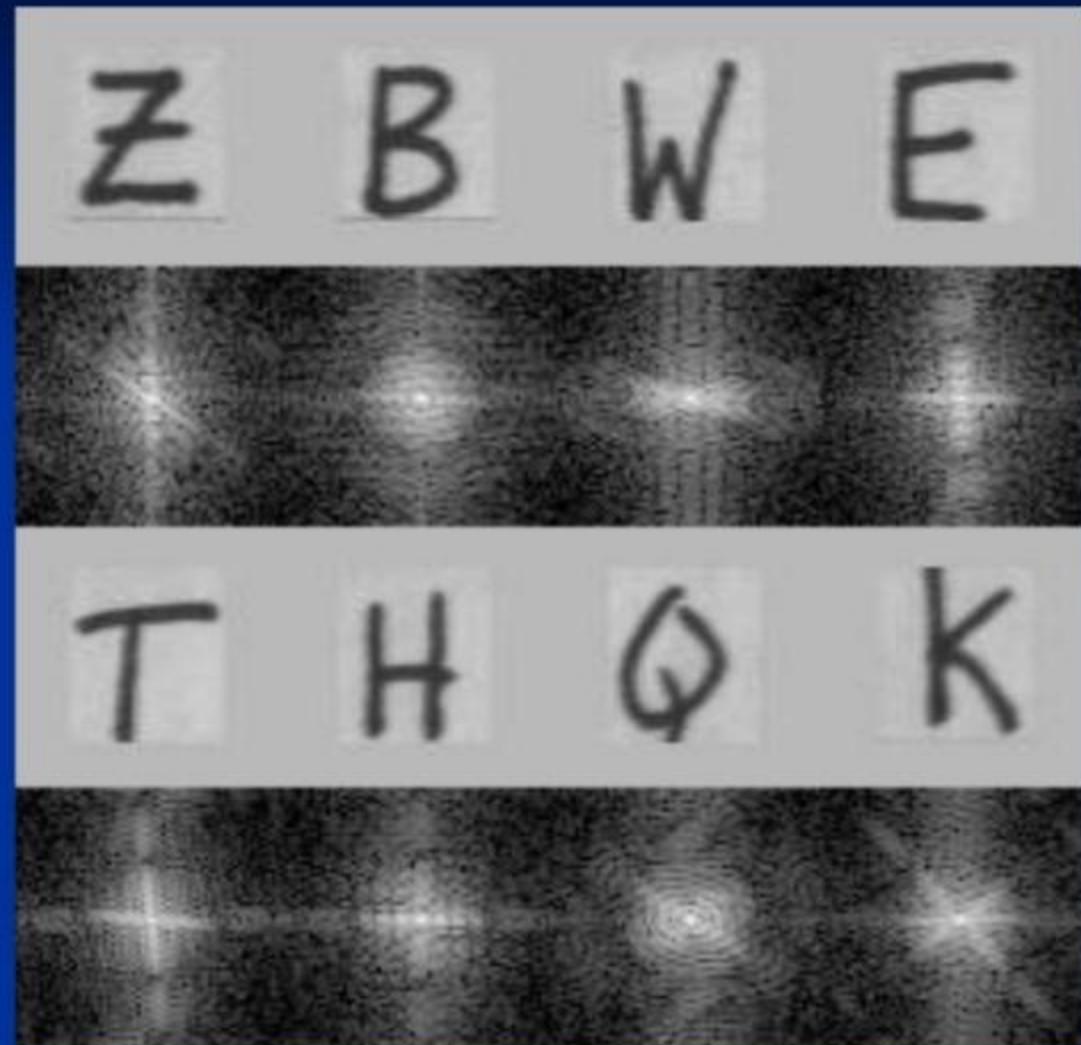
在垂直方向上需要更多的频率分量，所以它的波峰比较宽，而水平方向上的波峰比较窄





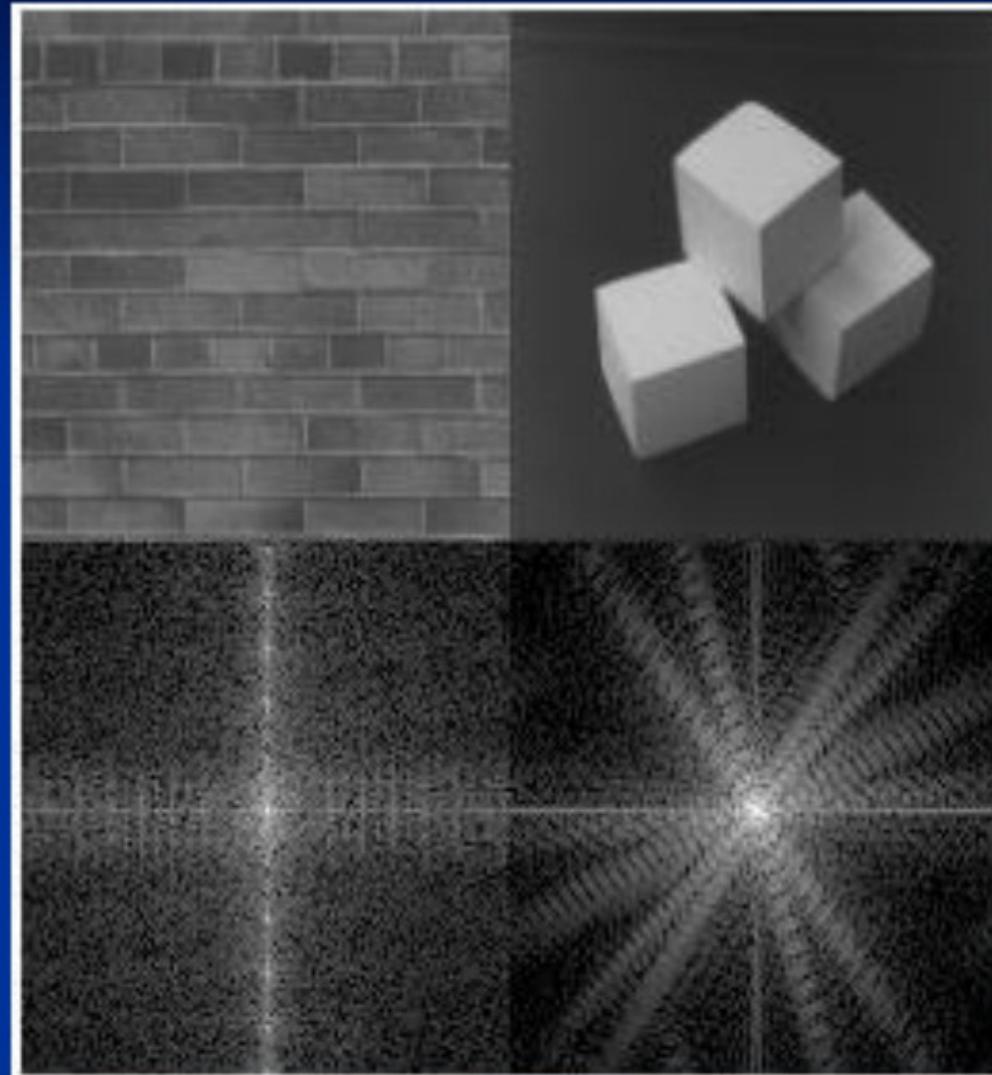
## 有趣的幅度谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线和原始图像中对应的轮廓线是垂直的。如果原始图像中有圆形区域那么幅度谱中也呈圆形分布



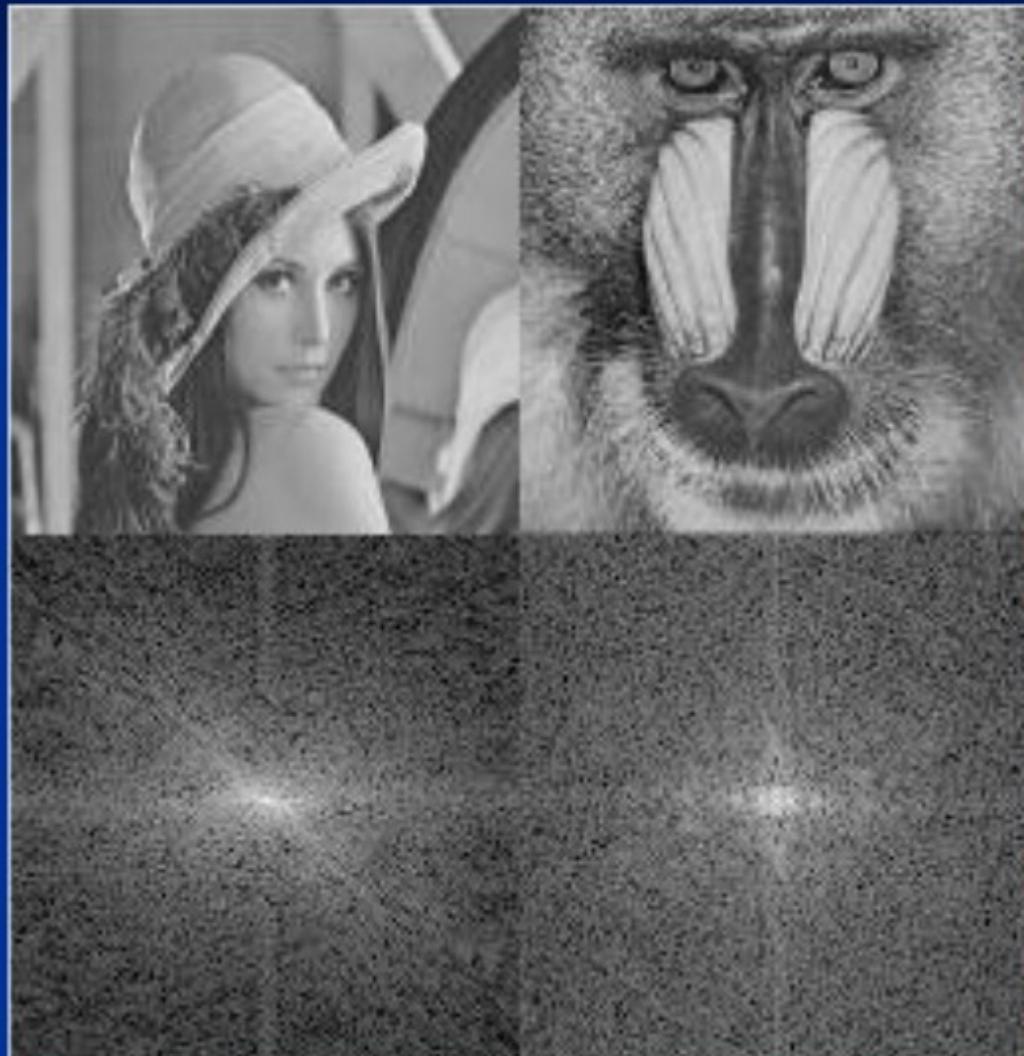
## 有趣的幅度谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线反映出原始图像的灰度级变化，这正是图像的轮廓边



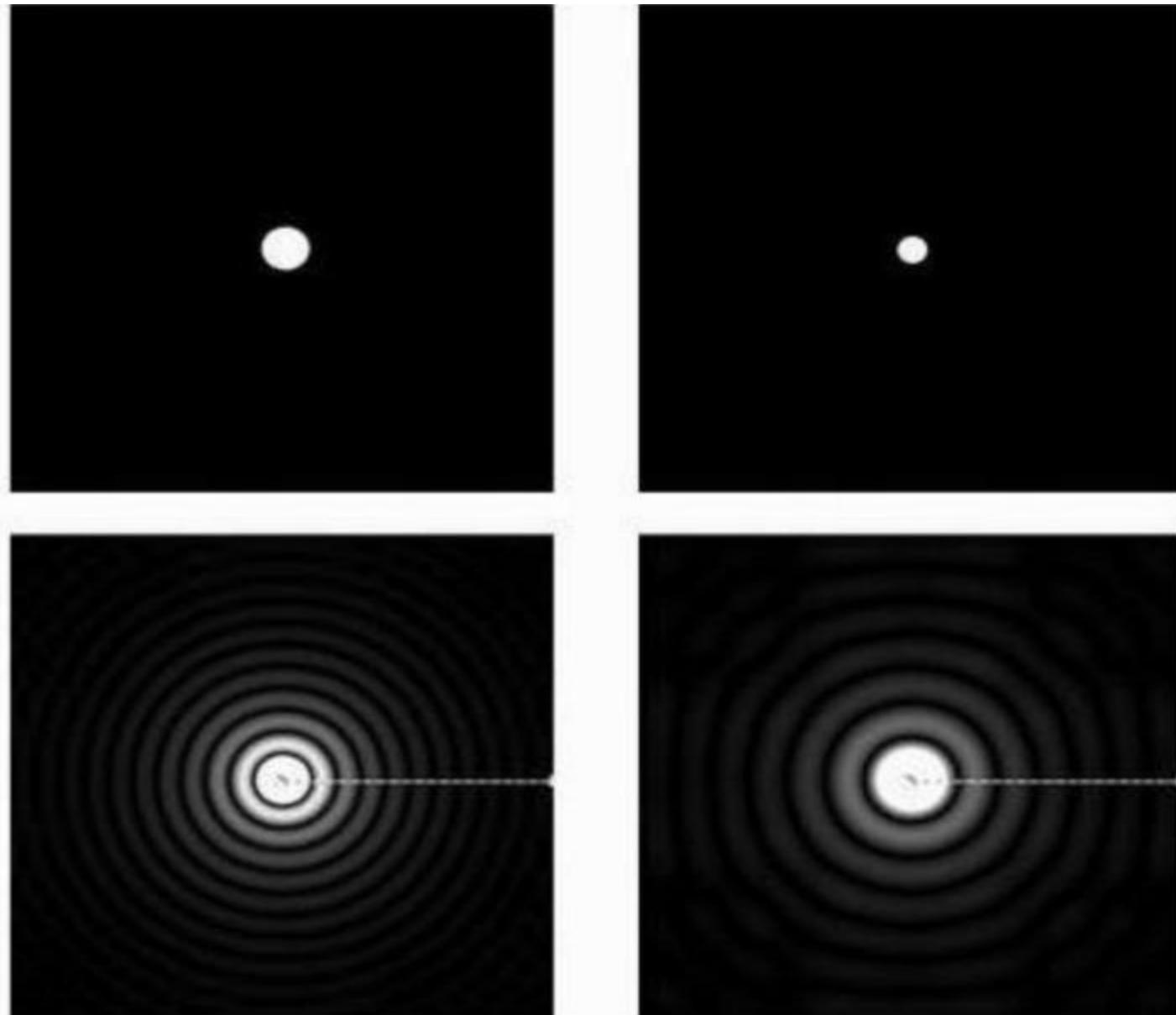
## 有趣的幅度谱

- 这些图像没有特定的结构，左上角到右下角有一条斜线，它可能是由帽子和头发之间的边线产生的
- 两个图像都存在一些小边界



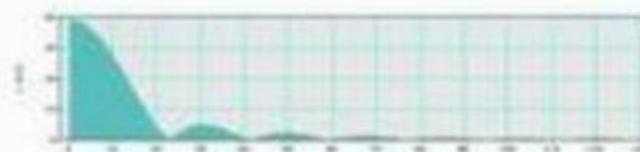
频谱图中暗的点数更多，那么实际图像是比较柔和的，反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分明且边界两边像素差异较大的





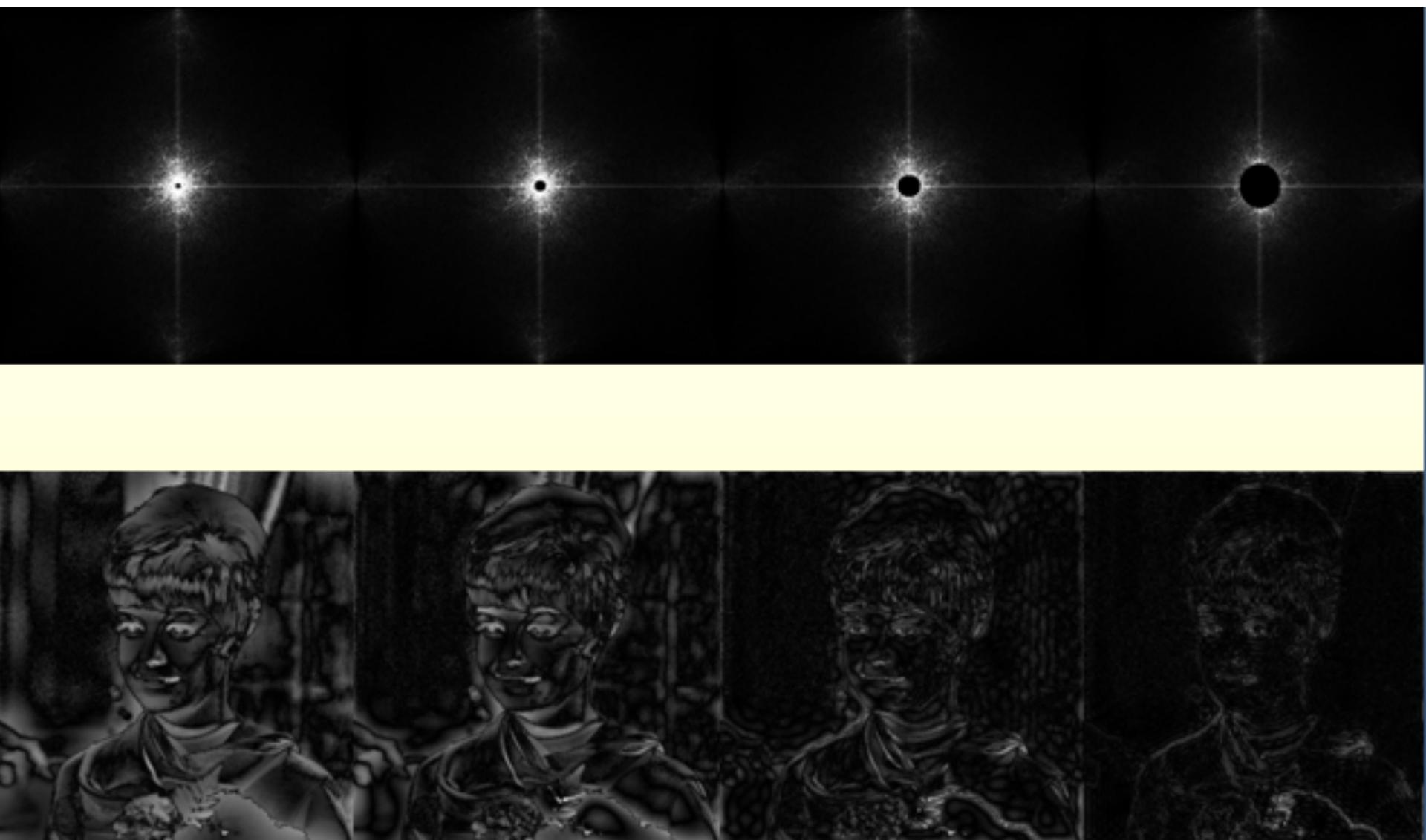
可以看到大圆经傅立叶变换之后，其圆环小；而小圆经傅立叶变换之后，其圆环反而大。

因为越尖锐变换越剧烈的信号总包含着更多的频率成分。



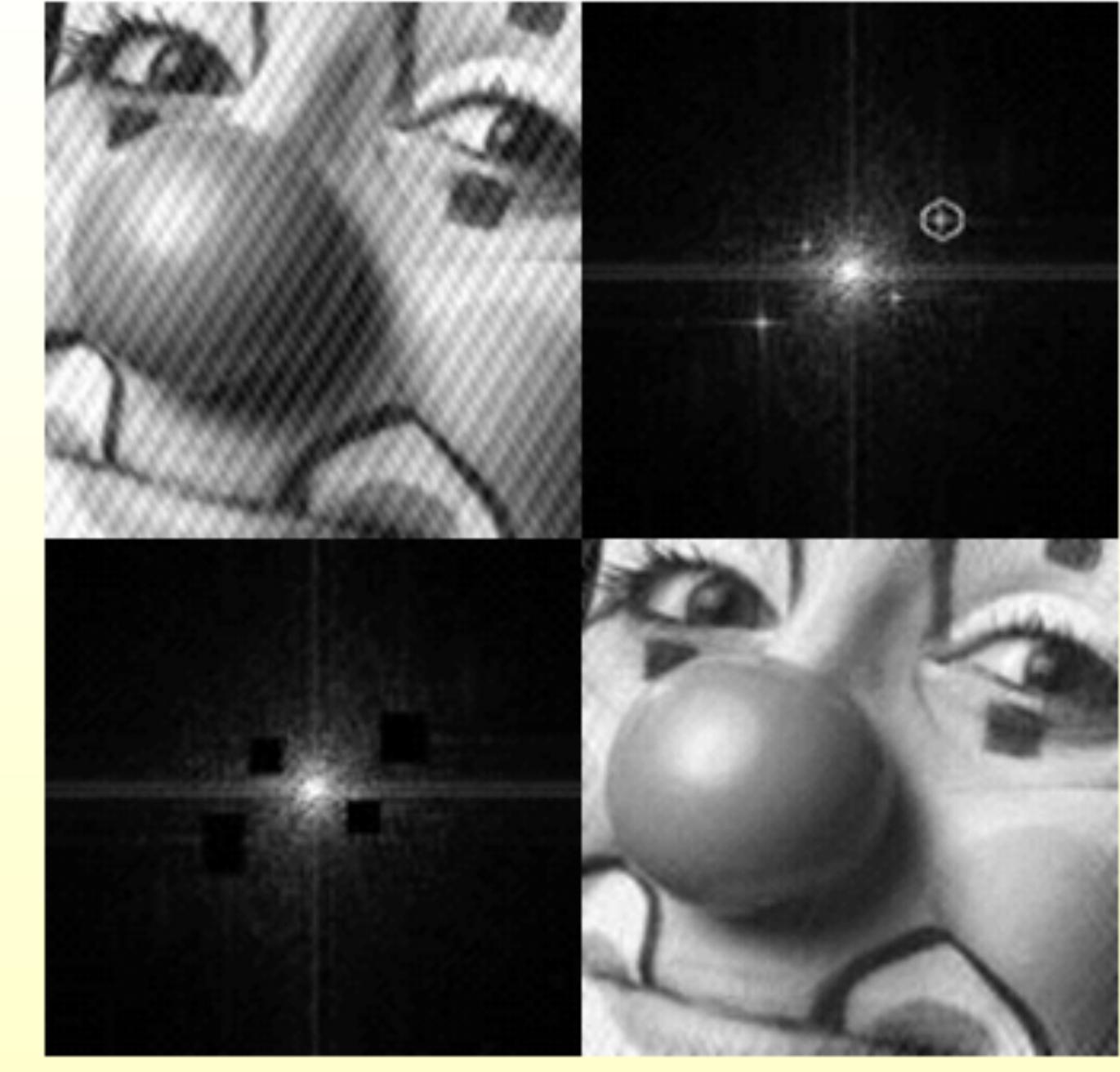


高频部分（距离中心较远区域）越多，图像细节越丰富。反之图像越平滑，显得模糊



高频部分（距离中心较远区域）对应于图像的细节（边缘，线条等）。低频部分（中心部分）对应于图像的整体信息。

通过去除图像  
频域谱的噪声  
点，增强图像



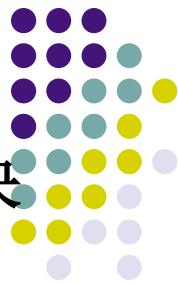


例题：对一幅图像实施二维DFT，显示并观察其频谱。

解：源程序及运行结果如下：

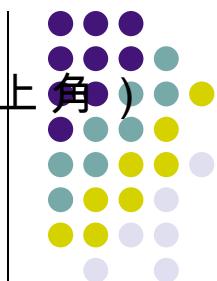
```
%对单缝进行快速傅里叶变换，以三种方式显示频谱，  
%即：直接显示（坐标原点在左上角）；把坐标原点平  
%移至中心后显示；以对数方式显示。
```

```
f=zeros(512,512);  
f(246:266,230:276)=1;  
subplot(221),imshow(f,[]),title('单狭缝图像')  
F=fft2(f); %对图像进行快速傅里叶变换  
S=abs(F);  
subplot(222)  
imshow(S,[]) %显示幅度谱  
title('幅度谱（频谱坐标原点在左上角）')
```

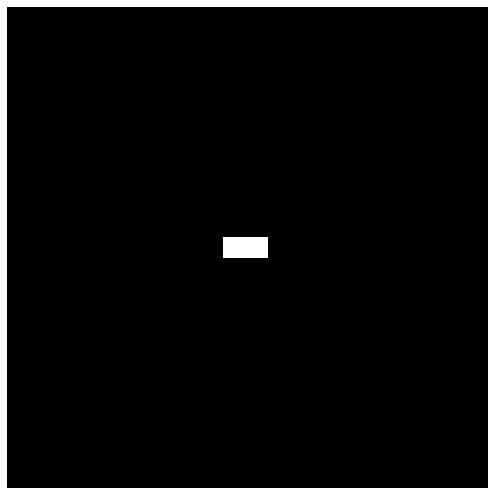


```
Fc=fftshift(F); %把频谱坐标原点由左上角移至屏幕中央  
subplot(223)  
Fd=abs(Fc);  
imshow(Fd,[])  
ratio=max(Fd(:))/min(Fd(:))  
%ratio = 2.3306e+007,动态范围太大，显示器无法正常显示  
title('幅度谱（频谱坐标原点在屏幕中央）')  
S2=log(1+abs(Fc));  
subplot(224)  
imshow(S2,[])  
title('以对数方式显示频谱')
```

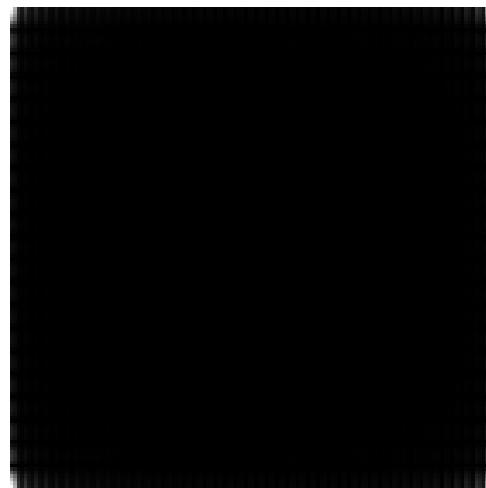
运行上面程序后，结果如下：



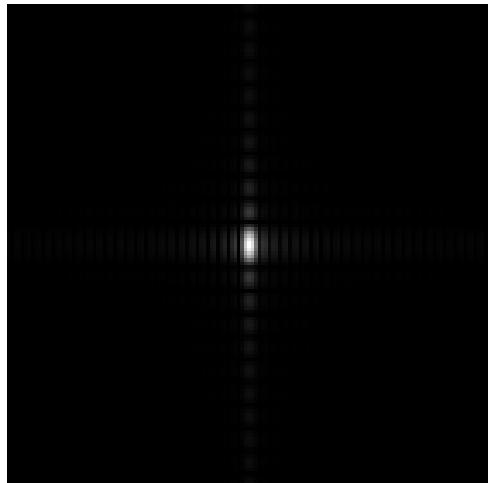
单狭缝图像



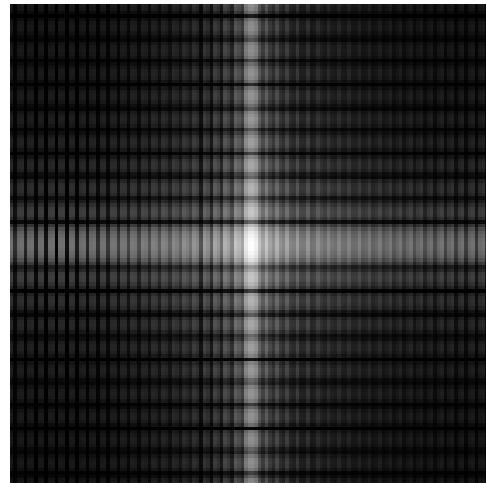
幅度谱 ( 频谱坐标原点在坐上角 )



幅度谱 ( 频谱坐标原点在屏幕中央 )



以对数方式显示频谱





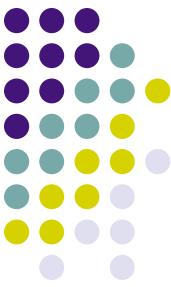
# ■ 二维离散傅里叶变换的性质

## ➤ 线性组合律

$$\begin{cases} f_1(x, y) \Leftrightarrow F_1(u, v) \\ f_2(x, y) \Leftrightarrow F_2(u, v) \end{cases} \Rightarrow c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \Leftrightarrow c_1 F_1(u, v) + c_2 F_2(u, v)$$

证明：

$$\begin{aligned} & DFT [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= c_1 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} + c_2 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= c_1 F_1(u, v) + c_2 F_2(u, v) \end{aligned}$$



%imagelinear.m  
%该程序验证了二维DFT的线性性质

```
f=imread('D:\chenpc\data\thry\chpt4\Fig4.04(a).jpg');  
g=imread('D:\chenpc\data\thry\chpt4\Fig4.30(a).jpg');  
[m,n]=size(g);  
f(m,n)=0;  
f=im2double(f);  
g=im2double(g);  
subplot(221)  
imshow(f,[])  
title('f')  
subplot(222)  
imshow(g,[])  
title('g')
```



```
F=fftshift(fft2(f));
G=fftshift(fft2(g));
subplot(223)
imshow(log(abs(F+G)),[])
FG=fftshift(fft2(f+g));
title('DFT(f)+DFT(g)')
subplot(224)
imshow(log(abs(FG)),[])
title('DFT(f+g)')
```

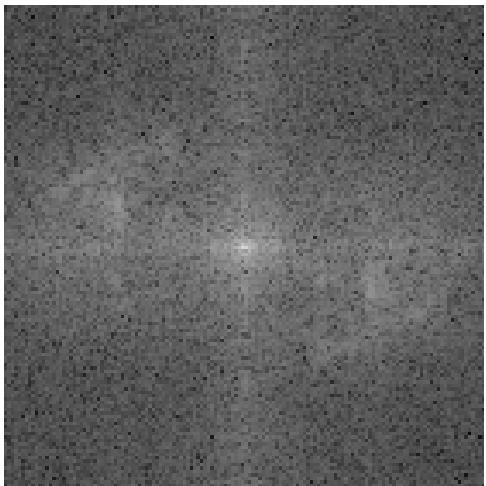
**f**



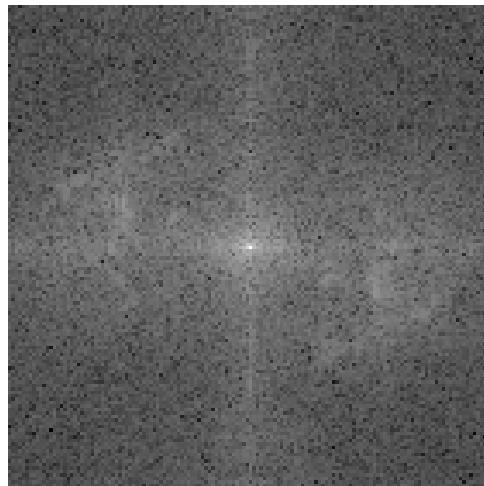
**g**



DFT(f)+DFT(g)



DFT(f+g)





## ➤ 可分离性

二维DFT可视为由沿x,y方向的两个一维DFT所构成。

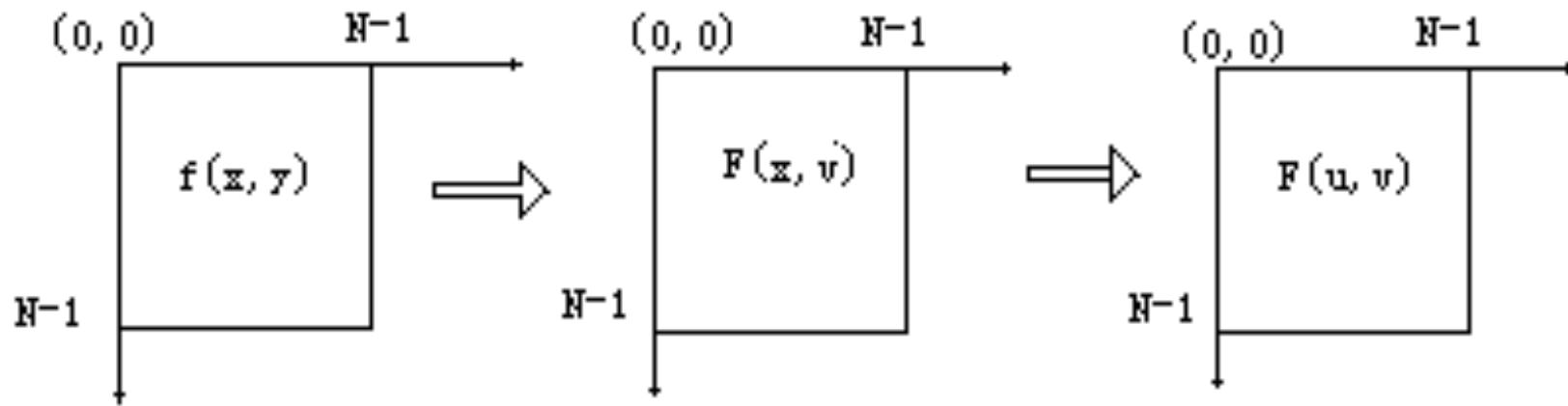
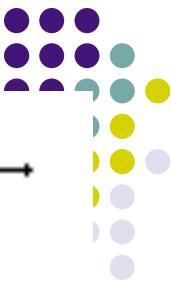
$$\begin{aligned} F(u,v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \left[ \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \right] \cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} F(x,v) \cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{j2\pi\frac{vy}{N}} \right] \cdot e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u,y) \cdot e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases} F(x,v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \sim y \text{ 方向的 DFT} \\ F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x,v) \cdot e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \sim x \text{ 方向的 DFT} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u,y) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{j2\pi\frac{vy}{N}} \sim y \text{ 方向的 IDFT} \\ f(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u,y) \cdot e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \sim x \text{ 方向的 IDFT} \end{cases}$$



例题：编程验证二维离散傅里叶变换可分离为两个一维离散傅里叶变换。

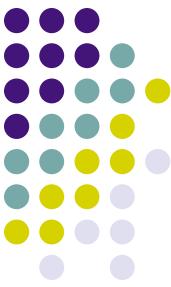
解：

%myseparable.m

%该程序验证了二维DFT的可分离性质

%该程序产生了冈萨雷斯《数字图像处理》（第二版）

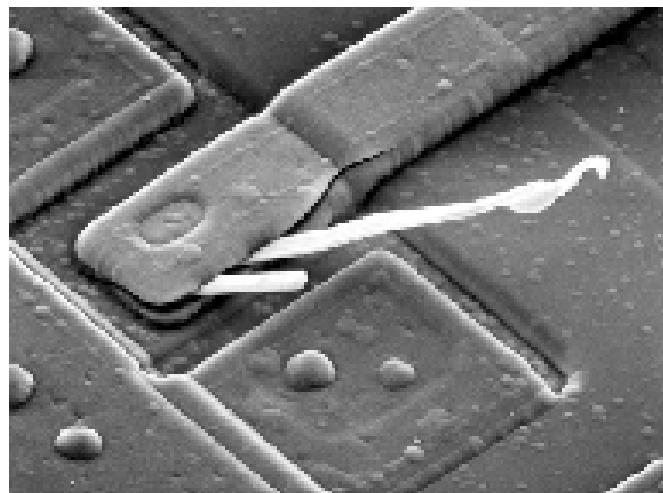
%P125 图4.4



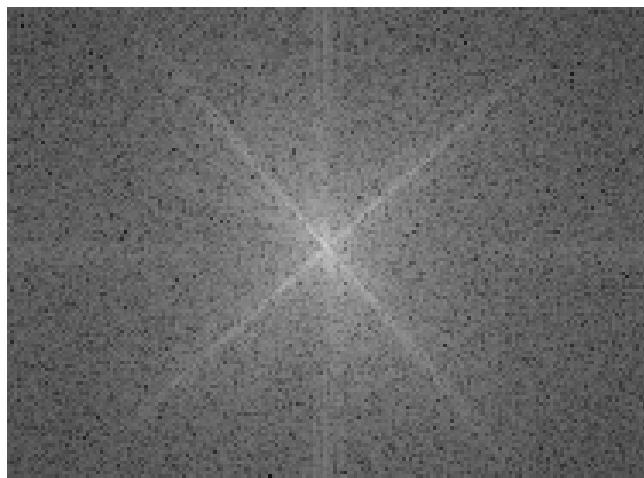
```
f=imread('D:\chenpc\data\thry\chpt4\Fig4.04(a).jpg');
subplot(211)
imshow(f,[])
title('原图')
F=fftshift(fft2(f));
subplot(223)
imshow(log(1+abs(F)),[])
title('用fft2实现二维离散傅里叶变换')
[m,n]=size(f);
F=fft(f);      %沿x方向求离散傅里叶变换
G=fft(F');    %沿y方向求离散傅里叶变换
F=fftshift(G);
subplot(224)
imshow(log(1+abs(F)),[])
title('用fft实现二维离散傅里叶变换')
```



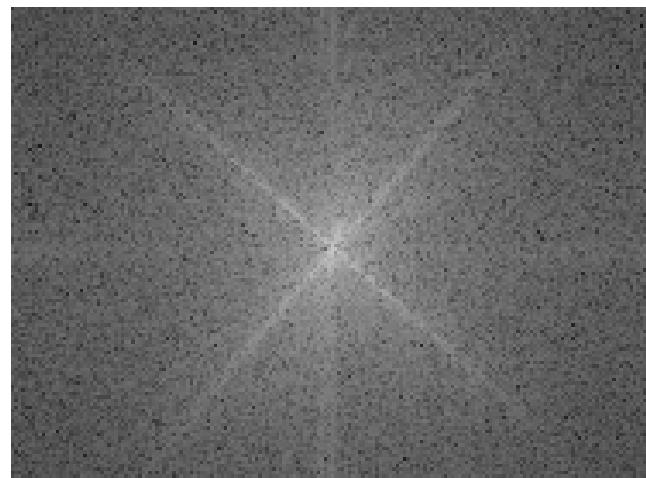
原图



用 fft2 实现二维离散傅里叶变换



用 fft 实现二维离散傅里叶变换





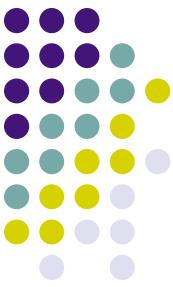
## ➤ 平移性

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \\ f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)} \end{cases}$$

证明：

### (1) 频域移位

$$\begin{aligned} & DFT \left[ f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \right] \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{(u-u_0)x}{M} + \frac{(v-v_0)y}{N}\right)} \\ &= F(u - u_0, v - v_0) \end{aligned}$$



结论：

$$f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

当  $u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}$

$$e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

$$\Rightarrow f(x, y) \cdot (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

即如果需要将频域的坐标原点从显示屏起始点(0, 0)移至显示屏的中心点只要将 $f(x,y)$ 乘以 $(-1)^{x+y}$ 因子再进行傅里叶变换即可实现。

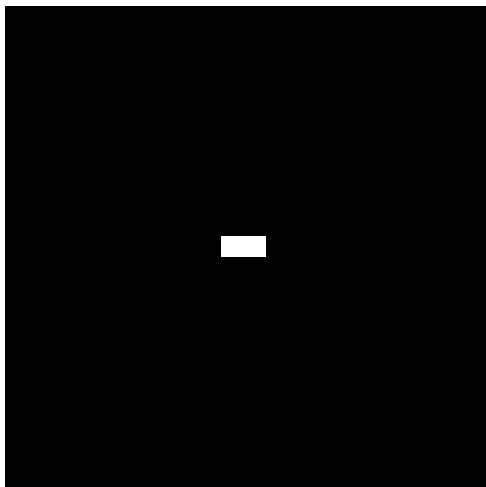
例题：利用 $(-1)^{x+y}$ 对单缝图像 $f(x,y)$ 进行调制，实现把频谱坐标原点移至屏幕正中央的目标。



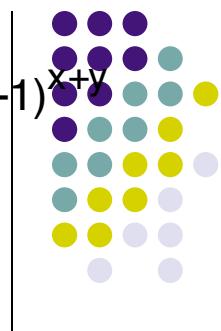
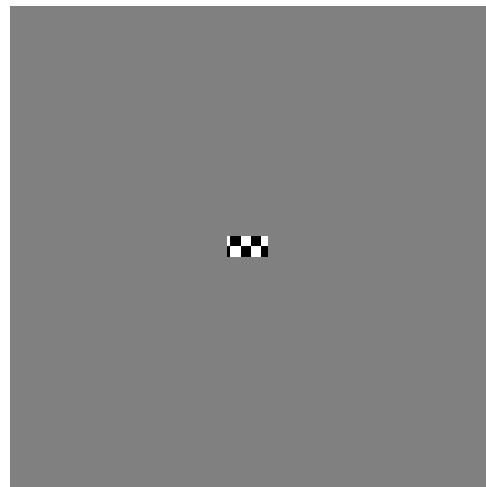
解：完成本题的源程序为：

```
%在傅里叶变换之前，把函数乘以(-1)x+y，相当于把频谱  
%坐标原点移至屏幕窗口正中央。  
  
f(512,512)=0;  
f=mat2gray(f);  
[Y,X]=meshgrid(1:512,1:512);  
f(246:266,230:276)=1;  
g=f.*(-1).^ (X+Y);  
subplot(221),imshow(f,[]),title('原图像f(x,y)')  
subplot(222),imshow(g,[]),title('空域调制图像  
g(x,y)=f(x,y)*(-1)^{x+y}')  
F=fft2(f);  
subplot(223),imshow(log(1+abs(F)),[]),title('f(x,y)的傅里叶频  
谱')  
G=fft2(g);  
subplot(224),imshow(log(1+abs(G)),[]),title('g(x,y)的傅里叶  
频谱')
```

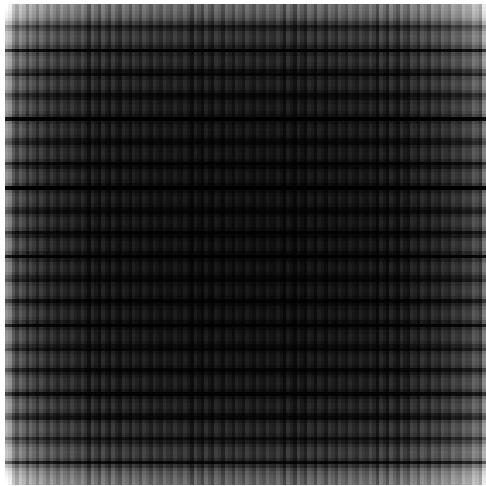
原 图 像  $f(x,y)$



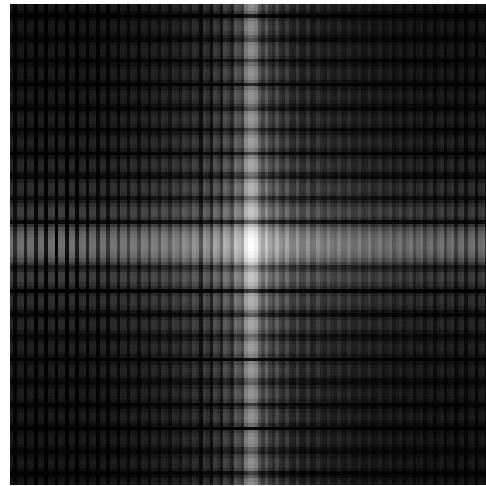
空域调制图像  $g(x,y)=f(x,y)^*(-1)^{x+y}$

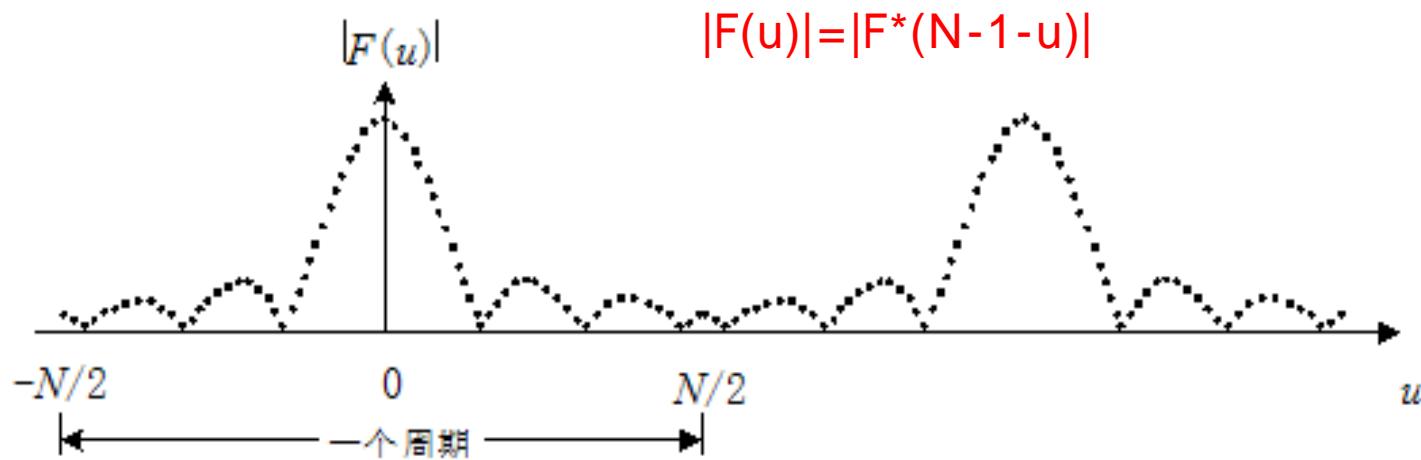


$f(x,y)$ 的傅里叶频谱

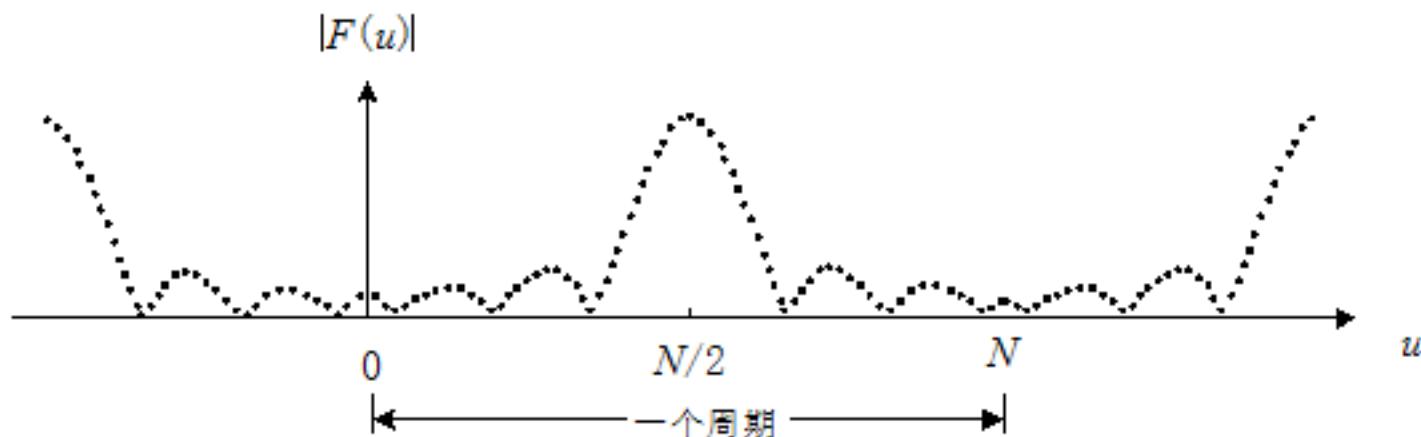


$g(x,y)$ 的傅里叶频谱





(a) 在 $[0 \ N-1]$ 周期中有两个背靠背半周期



(b) 同一区间内有一个完整的周期

这就意味着，坐标原点移到了频谱图像的中间位置，这一点十分重要，尤其是对以后的图像显示和滤波处理。



例题：利用 $(-1)^x$ 对 $f(x)$ 曲线进行调制，达到平移频域坐标原点至屏幕正中央的目的。

%以一维情况为例，说明空域调制对应着频域坐标原点移位。

```
f(1:512)=0;
```

```
f(251:260)=1; %产生宽度为10的窗口函数
```

```
subplot(221),plot(f),title('宽度为10 的窗口函数')
```

```
F=fft(f,512); %进行快速傅里叶变换，延拓周期周期为512
```

```
subplot(222)
```

```
plot(abs(F)) %绘幅度频谱（频谱坐标原点在左边界处）
```

```
title('幅度谱（频谱坐标原点在左边界处）')
```

```
x=251:260;
```

```
f(251:260)=(-1).^x; %把曲线f(x)乘以 $(-1)^x$ ，可以把频谱  
%坐标原点移至屏
```

幕正中央

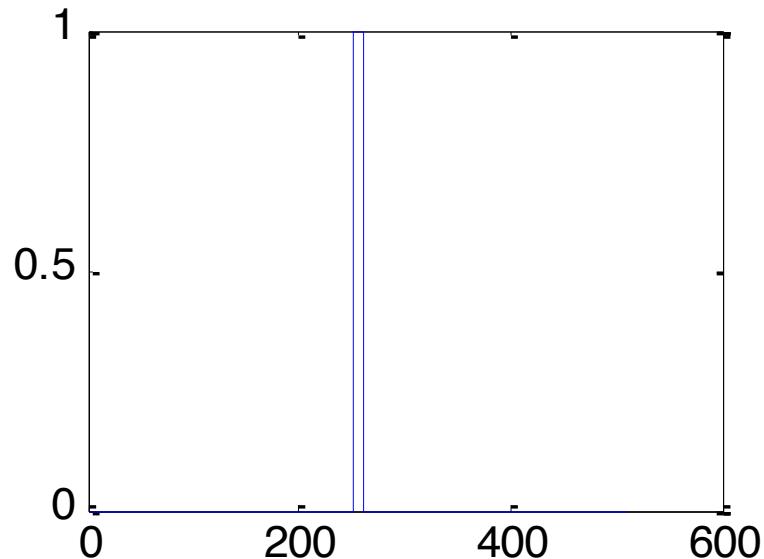
```
subplot(223),plot(f),title('宽度为10 的调制窗口函数')
```



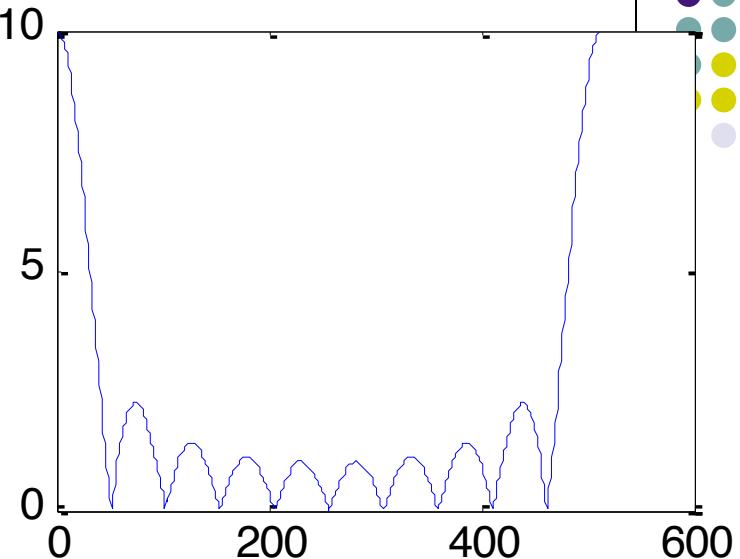
```
F=fft(f,512);      %进行快速傅里叶变换
subplot(224);
plot(abs(F)) %直接显示幅度频谱（频谱坐标原点在正中央）
title('幅度谱（频谱坐标原点在中央）')
figure
f(1:512)=0;
f(251:270)=1;    %产生宽度为20的窗口函数
subplot(221),plot(f),title('宽度为20 的窗口函数')
F=fft(f,512);      %进行快速傅里叶变换，延拓周期周期为512
subplot(222)
plot(abs(F))      %绘幅度频谱（频谱坐标原点在左边界处）
title('幅度谱（频谱坐标原点在左边界处）')
x=251:270;
f(251:270)=(-1).^x;    %把曲线f(x)乘以(-1)^x，可以把频谱坐标原点移至
                        %屏幕正中央
subplot(223),plot(f),title('宽度为20 的调制窗口函数')
F=fft(f,512);      %进行快速傅里叶变换
subplot(224);
plot(abs(F)) %直接显示幅度频谱（频谱坐标原点在正中央）
title('幅度谱（频谱坐标原点在中央）')
```



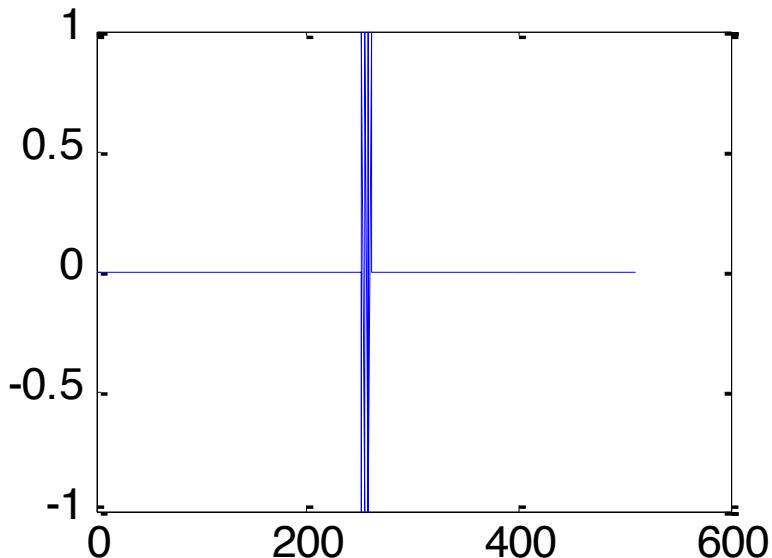
宽度为 10 的 窗口 函数



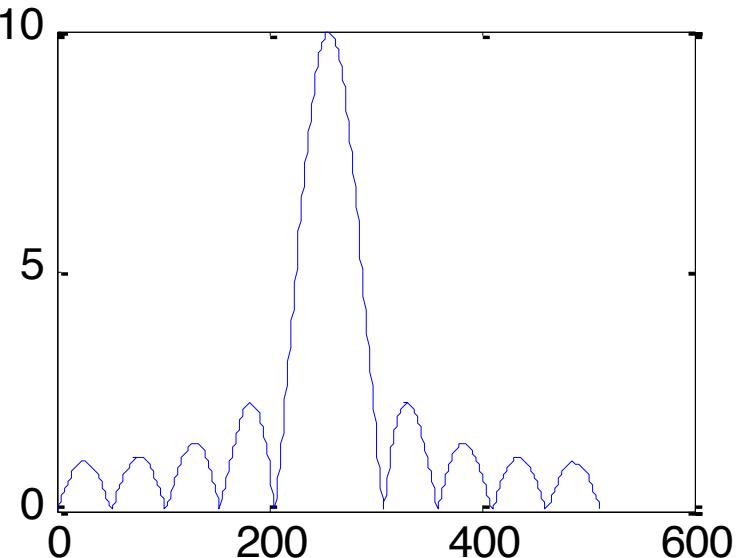
幅度谱 ( 频谱坐标原点在左边界处 )



宽度为 10 的 调制 窗口 函数

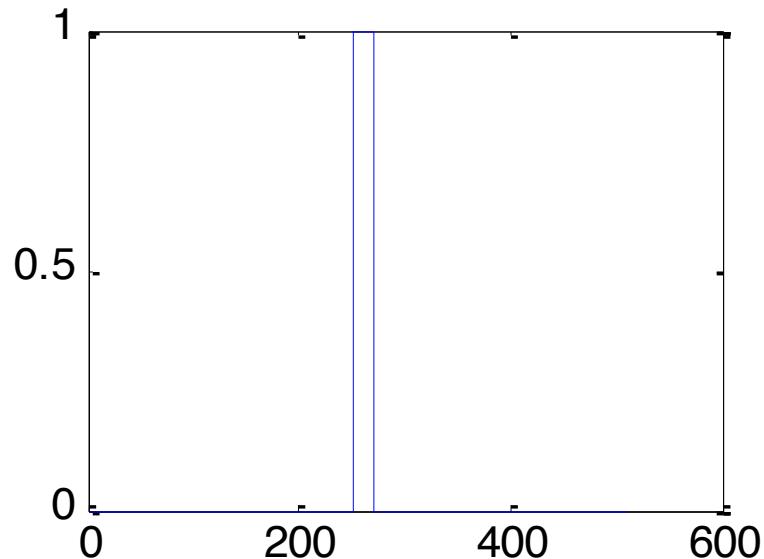


幅度谱 ( 频谱坐标原点在中央 )

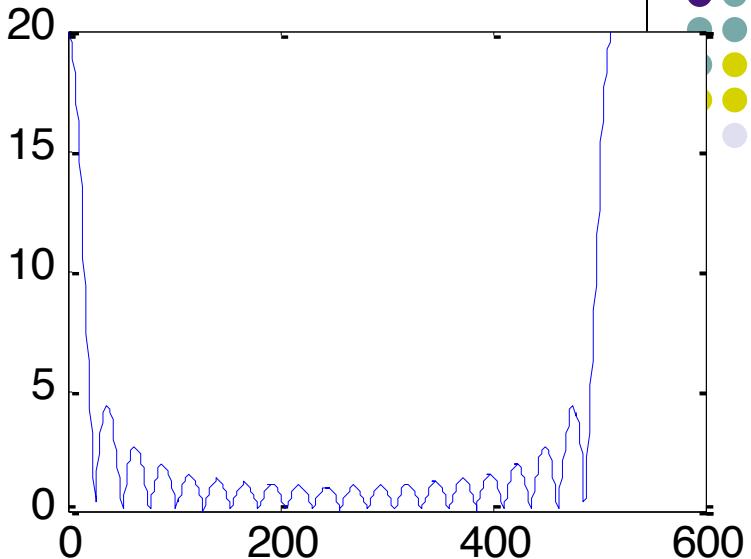




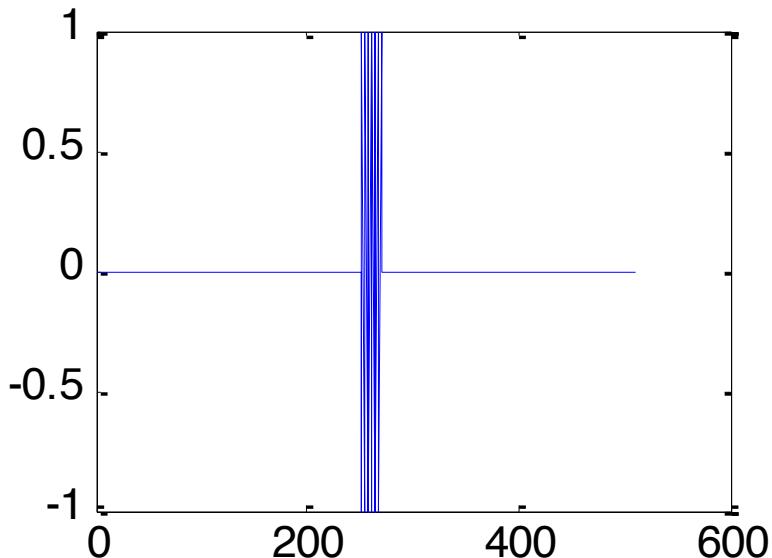
宽度为 20 的 窗口 函数



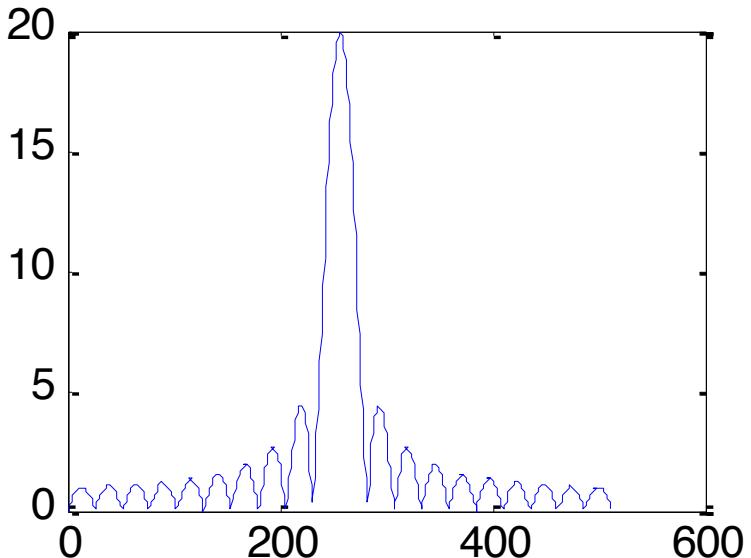
幅度谱 ( 频谱坐标原点在左边界处 )



宽度为 20 的 调制 窗口 函数



幅度谱 ( 频谱坐标原点在中央 )





## (2) 空域移位:

$$DFT[f(x - x^0, y - y^0)]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x - x_0, y - y_0) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x - x_0, y - y_0) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{u(x-x_0+x_0)}{M} + \frac{v(y-y_0+y_0)}{N} \right)} \\ &= e^{-j \left( \frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right) \cdot 2\pi} \cdot \sum_{x=-x_0}^{M-1-x_0} \sum_{y=-y_0}^{N-1-y_0} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= e^{-j \left( \frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right) \cdot 2\pi} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= e^{-j \left( \frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right) \cdot 2\pi} \cdot F(u, v) \end{aligned}$$



## ➤ 周期性和共轭对称性

周期性:

$$\begin{cases} F(u, v) = F(u + mM, v + nN) \\ f(x, y) = f(x + mM, y + nN) \end{cases}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

共轭对称性:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F^*(-u, -v) \\ |F(u, v)| &= |F(-u, -v)| \end{aligned}$$



证明： (1) 周期性：

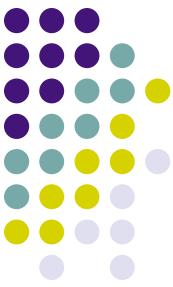
$$\begin{cases} F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ f(x, y) = \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \end{cases}$$

$$e^{-j2\pi m} = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} F(u + mM, v + nN) = F(u, v) \\ f(x + mM, y + nN) = f(x, y) \end{cases}$$

(2) 共轭对称性：

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= \left\{ \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left[ \frac{(-u)x}{M} + \frac{(-v)y}{N} \right]} \right\}^* \\ &= F^*(-u, -v) \end{aligned}$$

$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$ , 即  $F(u, v)$  关于原点对称



## ➤ 旋转不变性

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$
$$\xrightarrow{\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ u = \omega \cos \varphi \\ v = \omega \sin \varphi \end{cases}} f(r, \theta) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi)$$

$\xrightarrow{\hspace{10em}}$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

方向频率

证明：

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} \cdot dx dy$$

若  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$  则  $\begin{cases} u = \omega \cos \varphi \\ v = \omega \sin \varphi, \end{cases}$  则：

$$F(\omega, \varphi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cdot e^{-j2\pi\omega r \cos(\varphi - \theta)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$



$$F(\omega, \varphi + \theta_0) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cdot e^{-j2\pi r \omega \cos[\varphi - (\theta - \theta_0)]} \cdot r dr d\theta$$

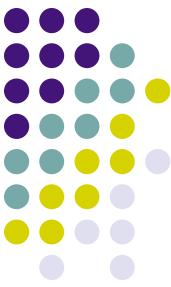
$$= \int_0^{\infty} \int_{-\theta_0}^{2\pi - \theta_0} f(r, \theta + \theta_0) \cdot e^{-j2\pi r \omega \cos(\varphi - \theta)} \cdot r dr d\theta$$

令 ' = - 0

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= f(r, \theta + 2\pi) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \theta_0) \cdot e^{-j2\pi r \omega \cos(\varphi - \theta)} \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

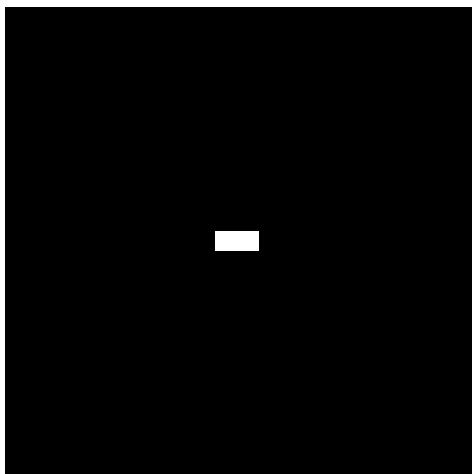
空域旋转theta —> 对应傅氏变换旋转theta

**注：**为看清问题的实质、简化旋转不变性的证明，以上用二维连续傅里叶变换进行证明。实际上，由连续积分公式进行离散化处理，即可得到离散公式，证明可参照连续情况进行。

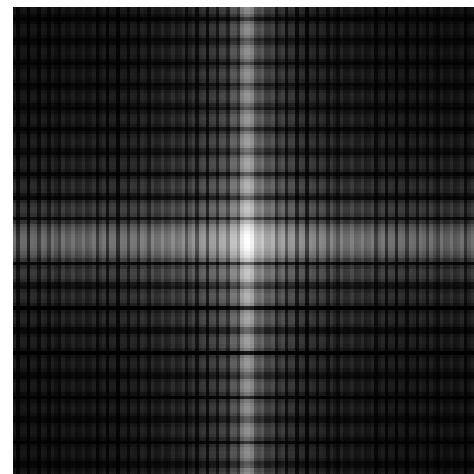


```
f=zeros(512,512);
f(246:266,230:276)=1;
subplot(221);
imshow(f[])
title('原图')
F=fftshift(fft2(f));
subplot(222);
imshow(log(1+abs(F)),[])
title('原图的频谱')
f=imrotate(f,45,'bilinear','crop');
subplot(223)
imshow(f[])
title('旋转45^0图')
Fc=fftshift(fft2(f));
subplot(224);
imshow(log(1+abs(Fc)),[])
title('旋转图的频谱')
```

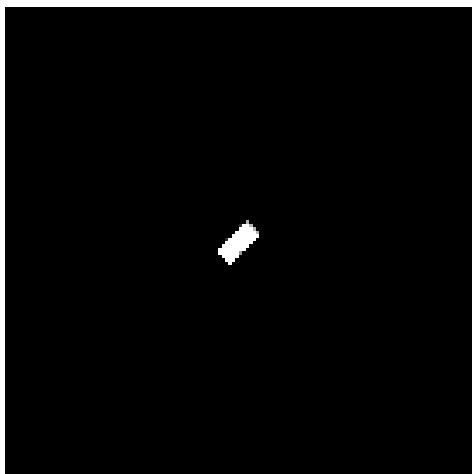
原图



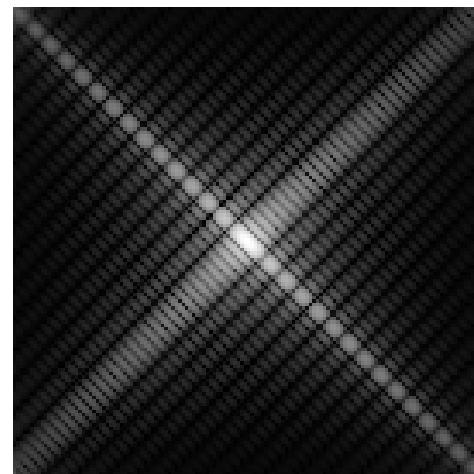
原图的频谱

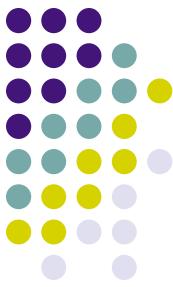


旋转  $45^0$  图



旋转图的频谱





# 一维离散傅立叶变换

## ● 快速傅立叶变换FFT

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi ux}{N}}$$

DFT计算复杂度=N<sup>2</sup>次乘法+N(N-1)次加法

对于N = 2<sup>n</sup>幂时有快速算法

FFT计算复杂度=N lg<sub>2</sub> N

- 时域分组：将旋转因子W（由 $e^{-j2\pi x/N}$ 构成的矩阵）中把x不断分解为奇偶表达式；
- 频域分组：将u不断分解为奇偶表达式。



# 旋转因子 $W_N^{km}$ 的性质

1) 周期性

$$W_N^{(k+N)m} = W_N^{k(m+N)} = W_N^{km}$$

对频率k是周期N  
对空域m也是周期N

2) 对称性

$$W_N^{mk + \frac{N}{2}} = -W_N^{mk} \quad (W_N^{km})^* = W_N^{-mk}$$

3) 可约性

$$W_N^{mk} = W_{nN}^{nmk}$$

$$W_N^{mk} = W_{N/n}^{mk/n}, \quad N/n \text{ 为整数}$$



# 快速离散傅立叶变换

$N = 2^m$  幂,  $f(x)$  分解为  $f(2x)$  和  $f(2x + 1)$ :

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}$$

注意  $x$  的取值范围

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x) W_N^{2ux} + \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1) W_N^{u(2x+1)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x) W_{N/2}^{ux} + \frac{2}{N} \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1) W_{N/2}^{ux} W_N^u \right]$$

$$= \frac{1}{2} [ F_e(u) + W_N^u F_o(u) ] \quad u: 0 \rightarrow N/2 - 1$$

$$F\left(u + \frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ F_e\left(u + \frac{N}{2}\right) + W_N^{u+N/2} F_o\left(u + \frac{N}{2}\right) \right]$$



# 快速离散傅立叶变换

$$F_e\left(u + \frac{N}{2}\right) = F_e(u), F_o\left(u + \frac{N}{2}\right) = F_o(u)$$

$$W_N^{u+N/2} = W_N^u W_N^{N/2} = W_N^u e^{-j\frac{2\pi N}{N} \frac{N}{2}} = W_N^u e^{-j\pi} = -W_N^u$$

$$\therefore F\left(u + \frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2} [F_e(u) - W_N^u F_o(u)]$$

因此 $F_e$ 和 $F_o$ 中的 $x$ 继续分解，直到2点。

u:  $N/2 \rightarrow N-1$

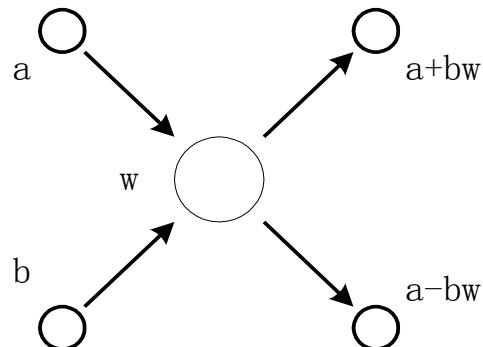
- 流程：
1.  $N/2$ 点傅氏变换  
—》  $N$ 点傅氏变换
  2. 不断2分 $f(x)$ ，直到2点
  3. 一次蝶形计算得到2点中间变换
  4. 2点得4点中间变换，直到 $N$ 点
  5. 注意时域的2分和频域的2分

$$F_0 \sim F_7 \Rightarrow F_0 \sim F_3 \Rightarrow F_0 \sim F_1 \Rightarrow F_0 = f_0$$



# 快速离散傅立叶变换

- 蝶形图



- 显然计算一次蝶形需1次乘法和2次加（减）法。

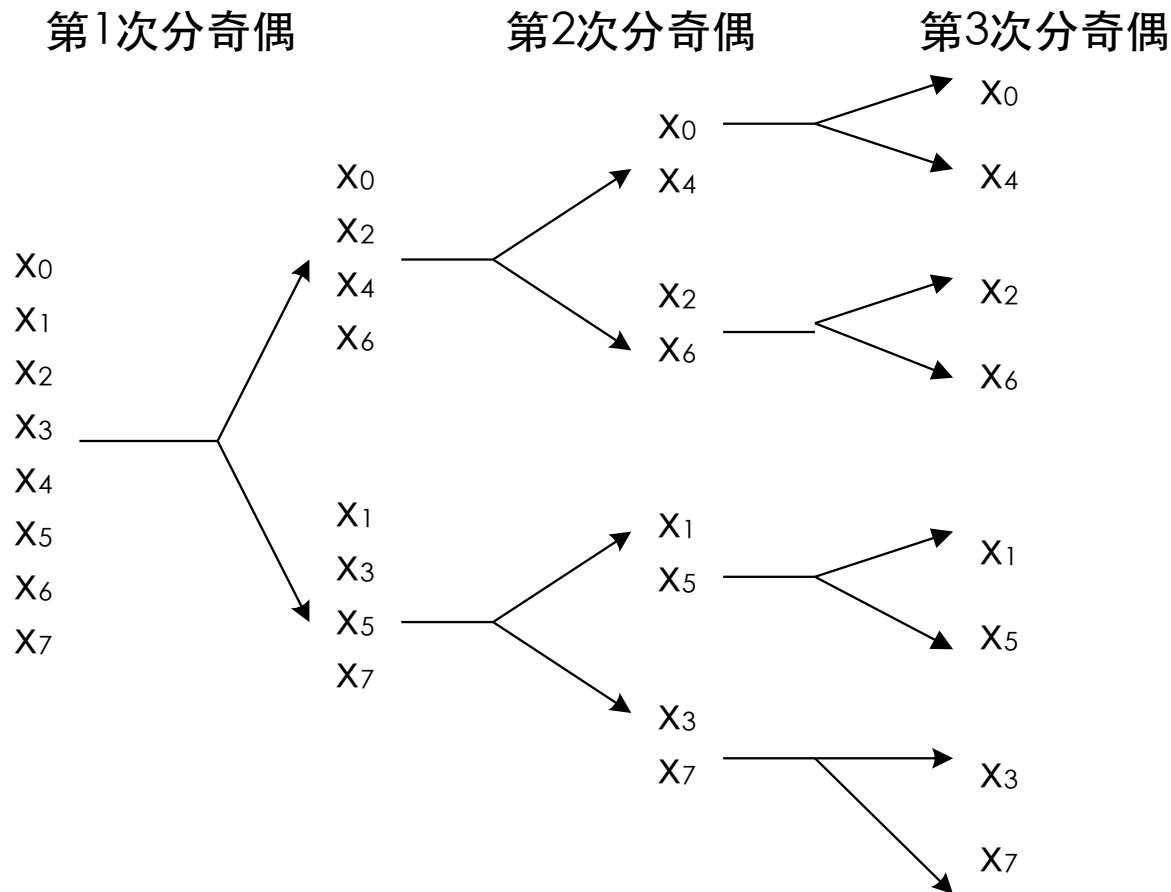
对于 $N = 2^m$ 点的DFT，每轮有 $N/2$ 个蝶形，

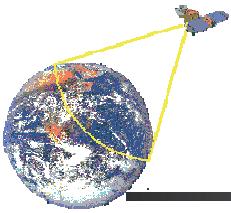
总共有 $\frac{N}{2} \times m = \frac{N}{2} \times \log_2 N$ 个蝶形。

总共有 $\frac{N}{2} \times \log_2 N$ 次乘法和 $N \log_2 N$ 加法。

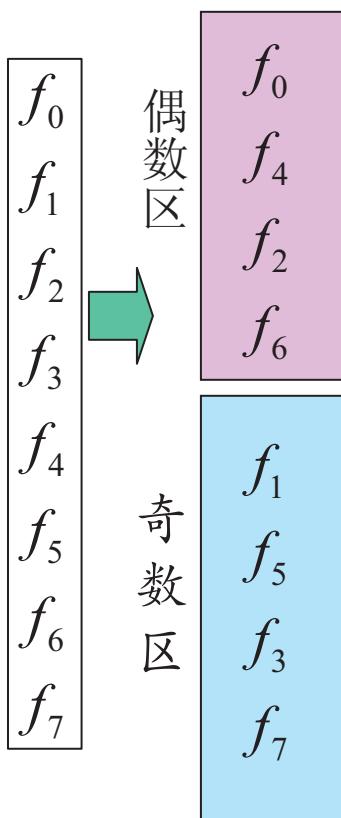


# 快速离散傅立叶变换





直接面向  $f(x)$  蝶形计算得到中间结果 (2点)



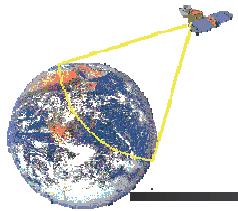
$$\begin{aligned}F^{(0)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot [f_0 + w_2^0 f_4] \\F^{(0)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot [f_0 - w_2^0 f_4] \\F^{(2)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot [f_2 + w_2^0 f_6] \\F^{(2)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot [f_2 - w_2^0 f_6]\end{aligned}$$

第二步中间结果，间隔2

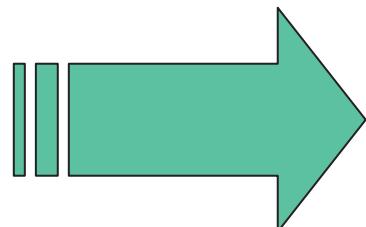
$$\begin{aligned}F^{(0)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(0) + w_4^0 F^{(2)}(0)] \\F^{(0)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(1) + w_4^1 F^{(2)}(1)] \\F^{(0)}(2) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(0) - w_4^0 F^{(2)}(0)] \\F^{(0)}(3) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(1) - w_4^1 F^{(2)}(1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{(1)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot [f_1 + w_2^0 f_5] \\F^{(1)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot [f_1 - w_2^0 f_5] \\F^{(3)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot [f_3 + w_2^0 f_7] \\F^{(3)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot [f_3 - w_2^0 f_7]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{(1)}(0) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(0) + w_4^0 F^{(3)}(0)] \\F^{(1)}(1) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(1) + w_4^1 F^{(3)}(1)] \\F^{(1)}(2) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(0) - w_4^0 F^{(3)}(0)] \\F^{(1)}(3) &= \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(1) - w_4^1 F^{(3)}(1)]\end{aligned}$$



$f_0$   
 $f_1$   
 $f_2$   
 $f_3$   
 $f_4$   
 $f_5$   
 $f_6$   
 $f_7$



第三步最终结果，间隔4

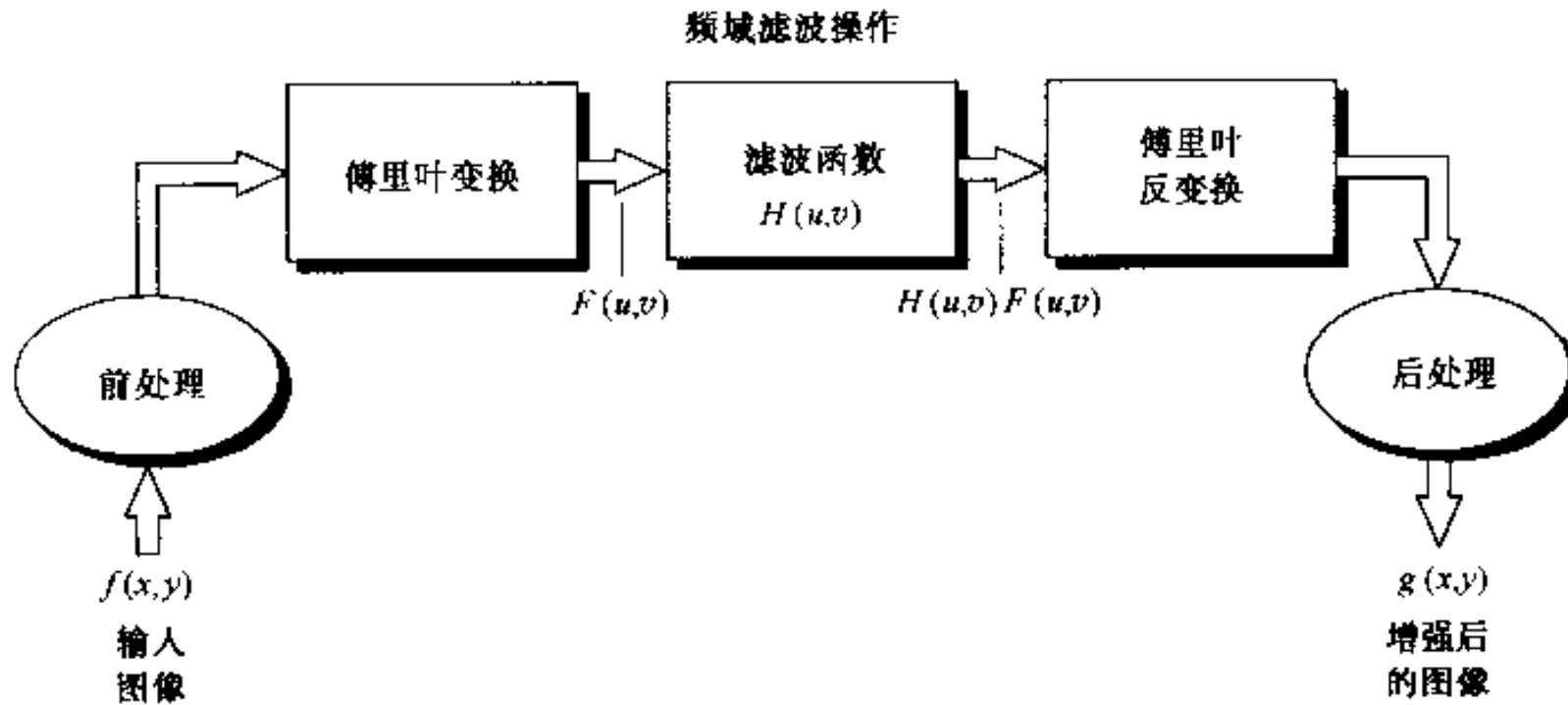
$$\begin{aligned}F(0) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(0) + w_8^0 F^{(1)}(0) \right] \\F(1) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(1) + w_8^1 F^{(1)}(1) \right] \\F(2) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(2) + w_8^2 F^{(1)}(2) \right] \\F(3) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(3) + w_8^3 F^{(1)}(3) \right] \\F(4) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(0) - w_8^0 F^{(1)}(0) \right] \\F(5) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(1) - w_8^1 F^{(1)}(1) \right] \\F(6) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(2) - w_8^2 F^{(1)}(2) \right] \\F(7) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ F^{(0)}(3) - w_8^3 F^{(1)}(3) \right]\end{aligned}$$



# 频域滤波

## ● 基本步骤

$H(u,v)$ 规定了如何对 $F(u,v)$ 在各频率点 $(u,v)$ 进行合适操作





# 频域滤波

## ● 基本步骤

频域进行滤波操作，  
相当于在空间域做了  
何种操作？

1. 用 $(-1)^{u+v}$ 乘以输入图像来进行中心变换,如式(4.2.21)所示。
2. 由(1)计算图像的 DFT,即  $F(u, v)$ 。
3. 用滤波器函数  $H(u, v)$ 乘以  $F(u, v)$ 。
4. 计算(3)中结果的反 DFT。
5. 得到(4)中结果的实部。
6. 用 $(-1)^{u+v}$ 乘以(5)中的结果。

频域滤波（与灰度级函数非常类似）：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$



# 卷积

也称为空间域滤波

- 离散一维卷积

对于两个长度为 $m$ 和 $n$ 的序列 $f(i)$ 和 $g(j)$ ,

$$h(i) = f(i) * g(i) = \sum_j f(j)g(i-j)$$

给出长度为 $N = m + n - 1$ 的输出序列。

$$\mathbf{h} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} g_p(1) & g_p(N) & \cdots & g_p(2) \\ g_p(2) & g_p(1) & \cdots & g_p(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_p(N) & g_p(N-1) & \cdots & g_p(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_p(1) \\ f_p(2) \\ \vdots \\ f_p(N) \end{bmatrix}$$



# 卷积

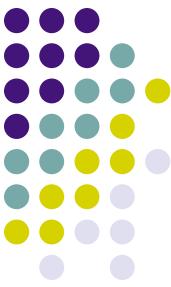
- 二维卷积和离散二维卷积
  - 二维卷积定义

$$h(x, y) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) g(x - u, y - v) du dv$$

- 离散二维卷积定义

$$H = F * G$$

$$H(i, j) = \sum_m \sum_n F(m, n) G(i - m, j - n)$$



## ➤ 离散卷积定理

1) 连续卷积  $f(x)^* g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$

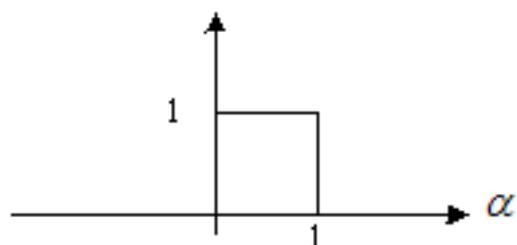
$$f(x, y)^* g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)g(x-u, y-v)dudv$$

**例1** 求以下两个函数的卷积

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

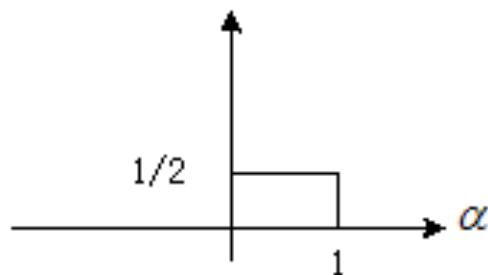


$f(\alpha)$



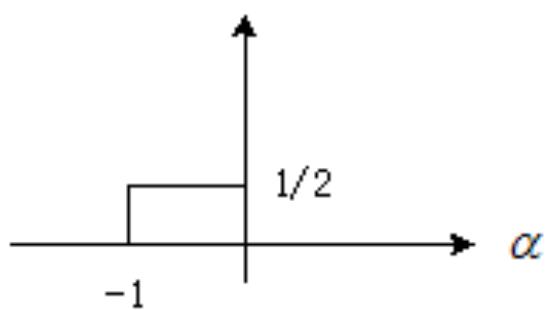
(a)

$g(\alpha)$



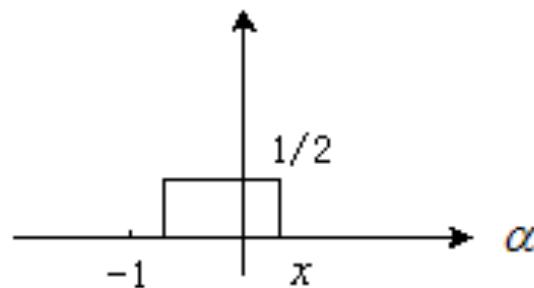
(b)

$g(-\alpha)$

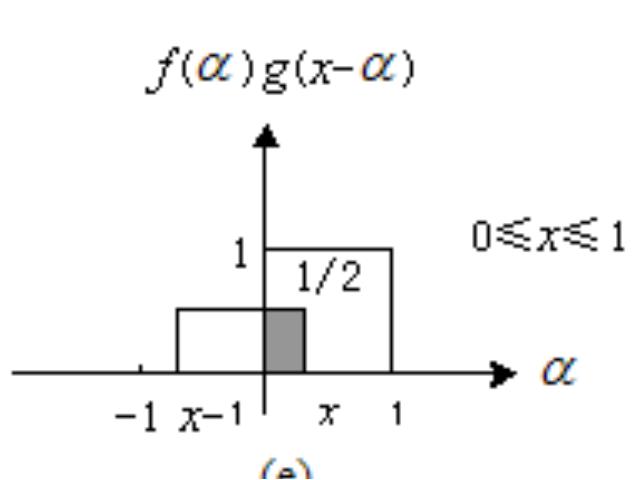


(c)

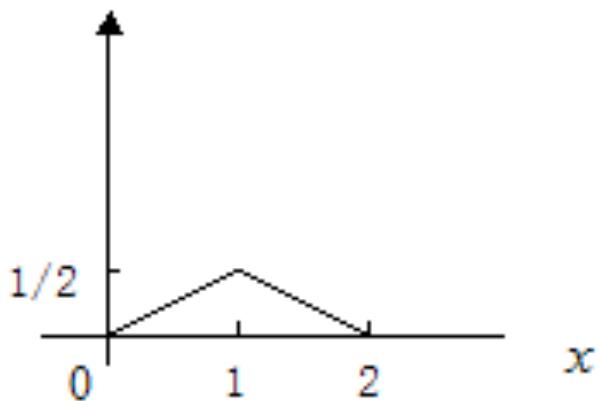
$g(x-\alpha)$



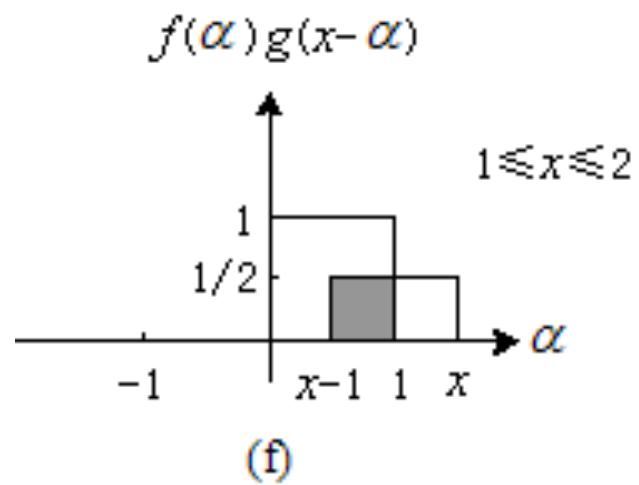
(d)



$f(x)*g(x)$



(g)



$$f(x)*g(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



## 2) 离散卷积定理

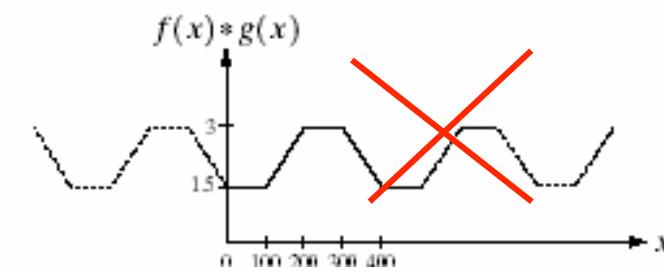
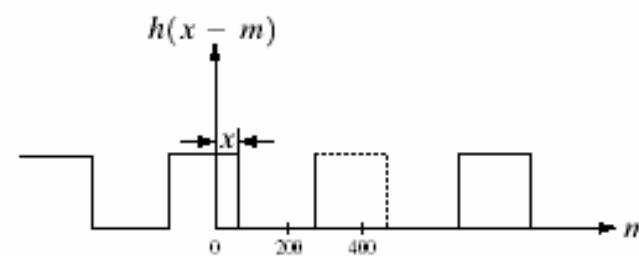
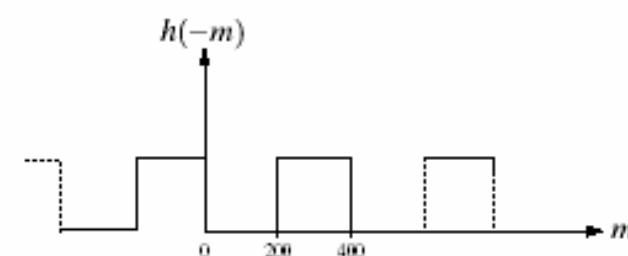
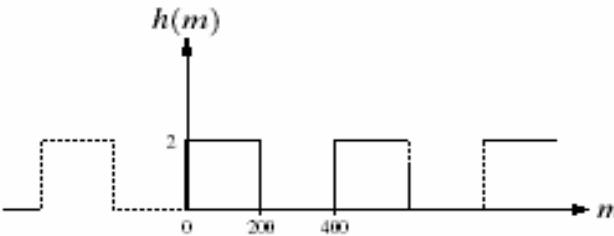
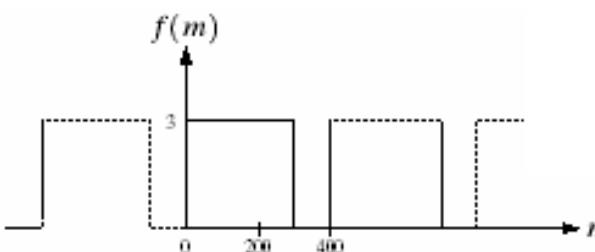
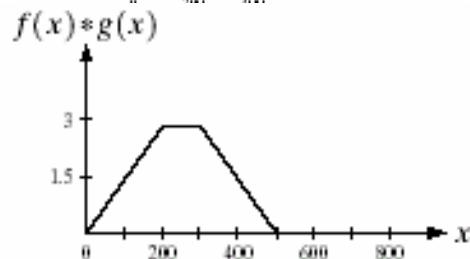
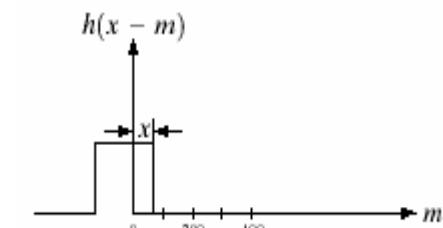
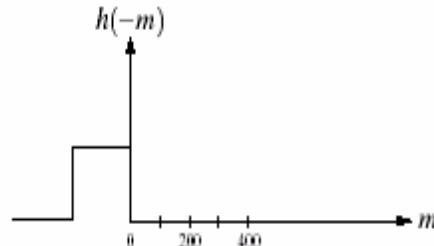
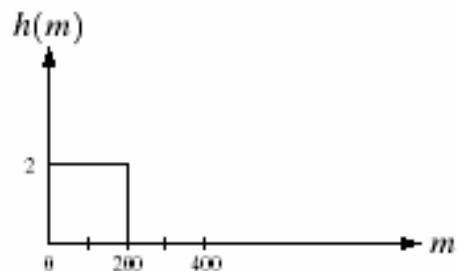
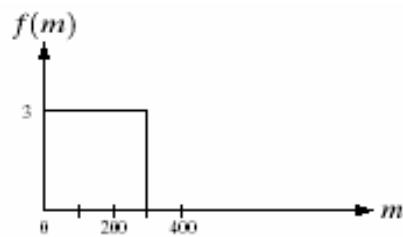
离散卷积定义:

$$f_e(x)^* g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x-m)$$
$$f(x, y)^* g(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)g(x-m, y-n)$$

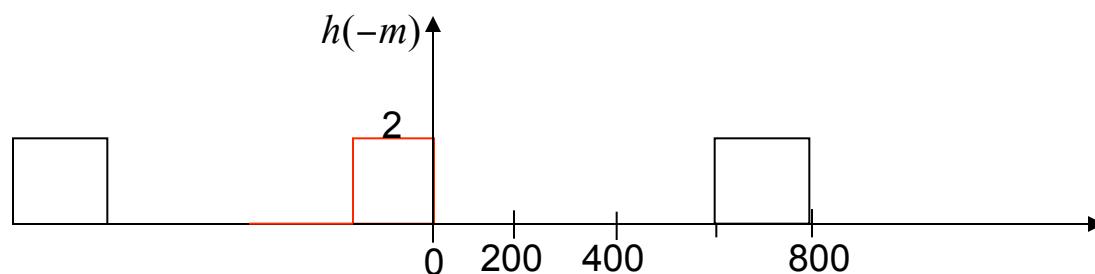
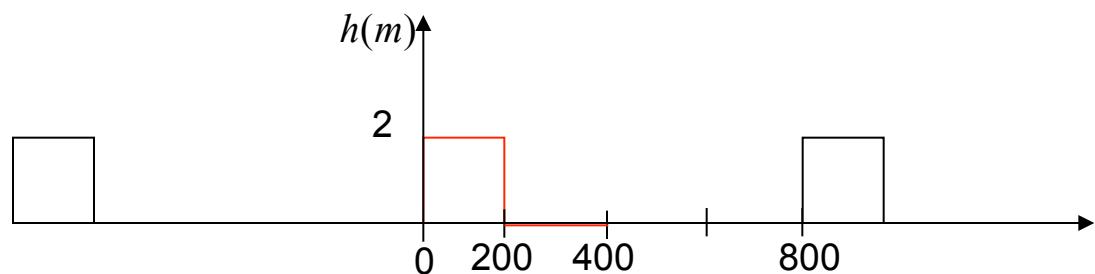
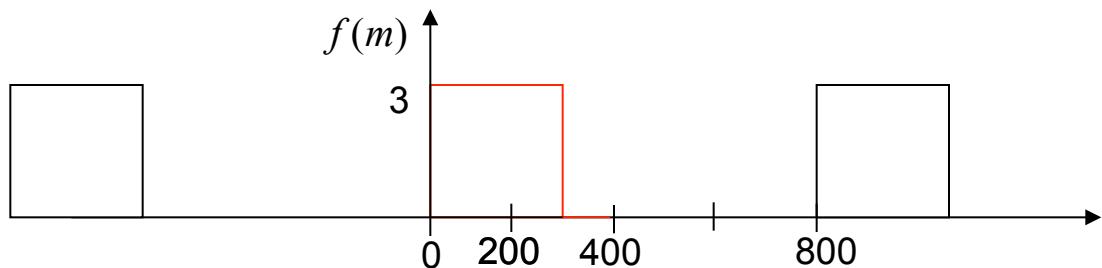


## 如果待卷积函数的大小不一样怎么办？

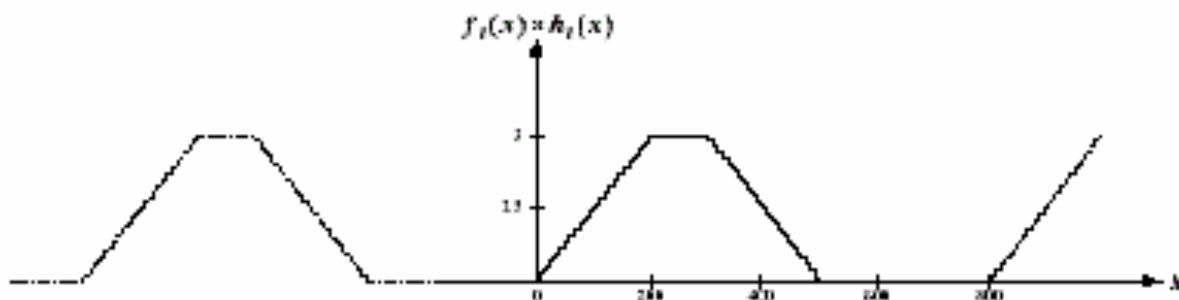
为防止频谱混叠误差，需对离散的二维函数补零，即周期延拓，对两个函数同时添加零，使它们具有相同的周期。

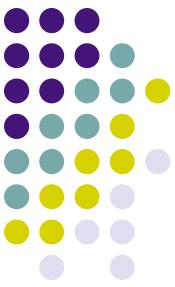


虽然进行了周期延拓，  
但两者周期不等



延拓至相  
同的周期  
再进行计  
算





# 周期延拓

$f(x, y)$ 的大小为  $A \times B$        $g(x, y)$ 的大小为  $C \times D$

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1, 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1, B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C-1, 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1, D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$M \geq A + C - 1, N \geq C + D - 1$$

$$z_e(x, y) = f_e(x, y) * g_e(x, y) \quad e : \text{代表周期延拓}$$



# 空间域滤波和频域滤波的关系

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) \delta(x, y) = s(0, 0)$$

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \delta(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} = \frac{1}{MN}$$

$$\delta(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m, n) h(x-m, y-n) = \frac{h(x, y)}{MN}$$

$$f(x, y) * h(x, y) \Rightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$\delta(x, y) * h(x, y) \Rightarrow H(u, v)$$

$$h(x, y) \Rightarrow H(u, v)$$

频域进行  
滤波操作  
相当于空  
间域做卷  
积操作。

空间域和频  
域的滤波器  
构成傅里叶  
变换对



$$\begin{cases} f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \\ g(x, y) \Leftrightarrow G(u, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y)^* g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow \frac{1}{MN} F(u, v)^* G(u, v) \end{cases}$$

证明： (1) 空域卷积和

$$\begin{aligned} & DFT[f(x, y)^* g(x, y)] \\ &= DFT \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot g(x-m, y-n) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot DFT[g(x-m, y-n)] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \cdot G(u, v) \\ &= F(u, v) \cdot G(u, v) \end{aligned}$$



## (2) 频域卷积和:

$$DFT[f(x, y) \cdot g(x, y)]$$

$$= DFT\left[\frac{1}{MN} \cdot \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} \cdot g(x, y)\right]$$

$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot DFT\left[e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} \cdot g(x, y)\right]$$

$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot G(u - u', v - v')$$

$$= \frac{1}{MN} \cdot F(u, v) * G(u, v)$$

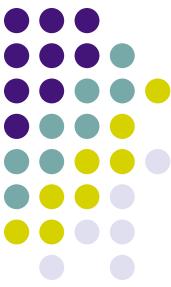


## ➤ 相关定理

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x + \alpha, y + \beta) d\alpha d\beta$$

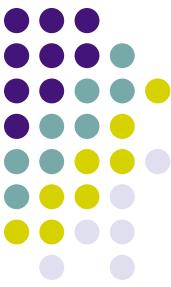
$$f(x, y) \circ g(x, y) \Rightarrow F(u, v) G^*(u, v)$$

$$f(x, y) \circ g^*(x, y) \Rightarrow F(u, v) G(u, v)$$



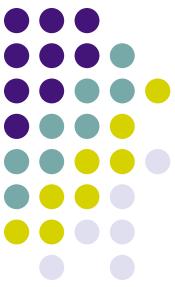
证明：

$$\begin{aligned} & DFT[f(x, y) \circ g(x, y)] \\ &= DFT \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot g(x+m, y+n) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot DFT[g(x+m, y+n)] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{j2\pi \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \cdot G(u, v) \\ &= \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \right]^* \cdot G(u, v) \\ &= F^*(u, v) \cdot G(u, v) \end{aligned}$$



# 总结

- 一维连续傅里叶变换
- 一维离散傅里叶变换（及其计算）
- 二维连续傅里叶变换
- 二维离散傅里叶变换
- 傅里叶变换的幅值谱
- 傅里叶变换的性质
- 快速傅里叶变换计算



# 总结

- 卷积运算（空间域滤波）
- 频域滤波=空间域卷积



# 主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
  - 低通滤波
  - 高通滤波
  - 同态滤波



# 邻域运算

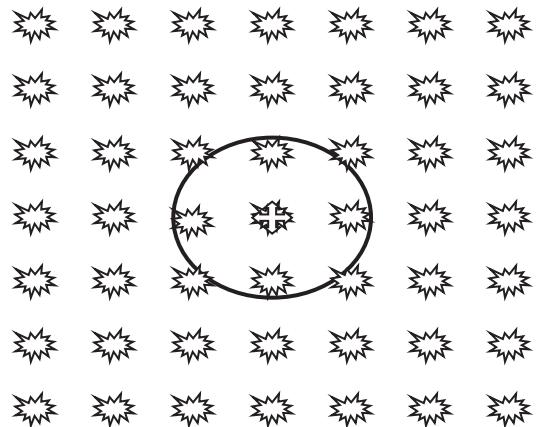
- 定义

输出图像中每个像素是由对应的输入像素及其一个邻域内的像素共同决定时的图像运算。

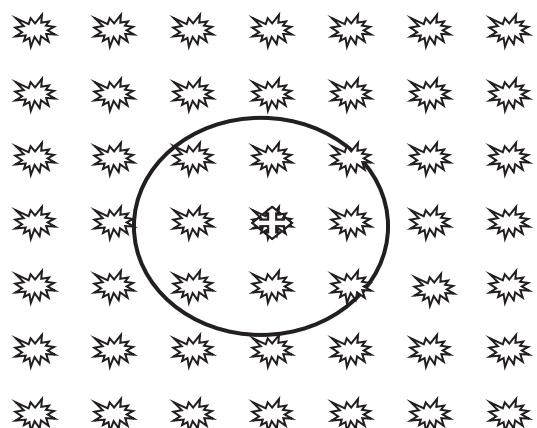
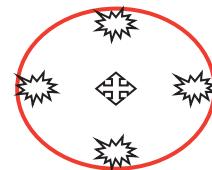
通常邻域是远比图像尺寸小的一规则形状。如下面情况中，一个点的邻域定义为以该点为中心的一个圆内部或边界上点的集合。



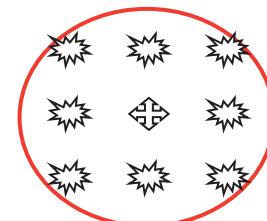
# 邻域运算



点+的邻域



点+的邻域





# 计算

- 举例

$$f'(x, y) = \frac{1}{5} [f(x, y-1) + f(x-1, y) + f(x, y) + f(x+1, y) + f(x, y+1)]$$

- 进一步的表达

$$f'(x, y) = \frac{1}{5} [1 \times f(x, y-1) + 1 \times f(x-1, y) + \dots + 1 \times f(x, y+1)]$$

$$= \frac{1}{5} [T_1 \times f(x, y-1) + T_2 \times f(x-1, y) + \dots + T_5 \times f(x, y+1)]$$

$$= F(T, f)$$



# 相关与卷积

- 信号与系统分析中基本运算相关与卷积，在实际图像处理中都表现为邻域运算。

- 两个连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的相关记作：

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x+a)da$$

- 两个连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积定义为：

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$



# 空间域滤波（也叫模板）

- 相关与卷积是空间域滤波最基本的两种运算
- 相关与卷积运算的模板 (template, filter mask)
  - 给定图像  $f(x,y)$  大小  $N \times N$ , 模板  $T(i,j)$  大小  $m \times m$  ( $m$  为小奇数, 比如 3, 5, 7, 9 等)。
  - 常用的相关运算定义为: 使模板中心  $T((m-1)/2, (m-1)/2)$  与  $f(x,y)$  对应。

$$f'(x,y) = T \text{ of } (x,y)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} T(i,j) f\left(x+i-\frac{m-1}{2}, y+j-\frac{m-1}{2}\right)$$



# 相关运算例子

当  $m = 3$  时

$$\begin{aligned} f'(x, y) = & T(0,0)f(x-1, y-1) + T(0,1)f(x-1, y) + \\ & T(0,2)f(x-1, y+1) + T(1,0)f(x, y-1) + \\ & T(1,1)f(x, y) + T(1,2)f(x, y+1) + \\ & T(2,0)f(x+1, y) + T(2,1)f(x+1, y) + \\ & T(2,2)f(x+1, y+1) \end{aligned}$$

# 演示



100	101	98	97	100	79	86	102	1	2	1
96	106	103	95	89	67	84	100	2	3	2
87	121	87	94	87	72	88	98	1	2	1
86	133	99	103	85	75	92	90			
92	99	111	102	78	74	97	91			
95	102	121	111	112	73	90	88			
100	101	98	97	100	79	86	102	100	101	98
96	106	103	95	89	67	84	100	96	106	103
87	121	87	94	87	72	88	98	87	121	87
86	133	99	103	85	75	92	90	86	133	99
92	99	111	102	78	74	97	91	92	99	111
95	102	121	111	112	73	90	88	95	102	121
100	101	98	97	100	79	86	102	100	101	98
96	106	103	95	89	67	84	100	96	106	103
87	121	87	94	87	72	88	98	87	121	87
86	133	99	103	85	75	92	90	86	133	99
92	99	111	102	78	74	97	91	92	99	111
95	102	121	111	112	73	90	88	95	102	121
100	101	98	97	100	79	86	102	100	101	98
96	106	103	95	89	67	84	100	96	106	103
87	121	87	94	87	72	88	98	87	121	87
86	133	99	103	85	75	92	90	86	133	99
92	99	111	102	78	74	97	91	92	99	111
95	102	121	111	112	73	90	88	95	102	121
100	101	98	97	100	79	86	102			
96	106	103	95	89	67	84	100			
87	121	87	94	87	72	88	98			
86	133	99	103	85	75	92	90			
92	99	111	102	78	74	97	91			
95	102	121	111	112	73	90	88			



# 卷积运算

- 定义：

$$f'(x, y) = T * f(x, y)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} T(i, j) f\left(x - i + \frac{m-1}{2}, y - j + \frac{m-1}{2}\right)$$

当  $m = 3$  时

$$\begin{aligned} f'(x, y) = & T(0, 0)f(x+1, y+1) + T(0, 1)f(x+1, y) + \\ & T(0, 2)f(x+1, y-1) + T(1, 0)f(x, y+1) + \\ & T(1, 1)f(x, y) + T(1, 2)f(x, y-1) + \\ & T(2, 0)f(x-1, y+1) + T(2, 1)f(x-1, y) + \\ & T(2, 2)f(x-1, y-1) \end{aligned}$$



# 相关与卷积的物理含义

- 相关运算：将模板当权重矩阵作加权平均；
- 卷积运算：模板先沿纵轴翻转，再沿横轴翻转后再加权平均。
- 如果模板是对称的，那么相关与卷积运算结果完全相同。
- 邻域运算实际上就是卷积和相关运算，用信号分析的观点就是滤波。



# 空间域滤波的用途

- 平滑：消除或减少噪声的影响，改善图像的质量。
- 假设
  - 在假定加性噪声是随机独立分布的条件下，利用邻域的平均或加权平均可以有效的抑制噪声干扰。
- 从信号分析的观点
  - 图像平滑本质上低通滤波。将信号的低频部分通过，而阻截高频的噪声信号。
- 问题
  - 往往图像边缘也处于高频部分。



# 平滑

- 邻域平均模板（矩形邻域和圆形邻域）

$$T^3 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T_c^3 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^5 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T_c^5 = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 注意：大卷积模板可以加大滤波程度，但也会导致图像细节的损失。



# 平滑



无噪声朱家角风光



有高斯噪声的朱家角风光



# 平滑



通过下邻域平均后的朱家角  
风光



通过下邻域平均后的朱家角  
风光

去掉了一些噪声，同时也  
去掉了许多边缘细节

有没有其它  
办法？





# 平滑

- 高斯滤波 (*Gaussian Filters*)
  - 采用高斯函数作为加权函数。
  - 原因一: 二维高斯函数具有旋转对称性，保证滤波时各方向平滑程度相同；
  - 原因二: 离中心点越远权值越小。确保边缘细节不被模糊。

$$G(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$



# 平滑

- 设计离散高斯滤波器的方法：
  - 设定 $\sigma^2$ 和n，确定高斯模板权值。如 $\sigma^2 = 2$ 和n=5：

[i,j]	-2	-1	0	1	2
-2	0.105	0.287	0.135	0.287	0.105
-1	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287
0	0.135	0.779	1	0.779	0.135
1	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287
2	0.105	0.287	0.135	0.287	0.105

1. 一般设置滤波器的半长度是3倍的标准差
2. 取整和归一化



# 平滑

- 整数化和归一化后得：

[i,j]	-2	-1	0	1	2
-2	1	2	3	2	1
-1	2	4	6	4	2
0	3	6	7	6	3
1	2	4	6	4	2
2	1	2	3	2	1



# 平滑



通过下邻域平均后的朱家角风光



经过高斯滤波后的朱家角风光

高斯滤波保留了更多的边缘细节



# 平滑

- **中值滤波**: 与加权平均方式的平滑滤波不同，中值滤波用一个含有奇数点的滑动窗口，将邻域中的像素按灰度级排序，取其中间值为输出像素。
- 中值滤波的要素
  - 中值滤波的效果取决于两个要素：邻域的空间范围和中值计算中涉及的像素数。（当空间范围较大时，一般只用某个稀疏矩阵做计算）。
- 中值滤波的优点
  - 中值滤波能够在抑制随机噪声的同时不使边缘模糊。但对于线、尖顶等细节多的图像不宜采用中值滤波。



# 中值滤波对于随机噪声效果明显



有椒盐噪声的朱家角风光



用 $3 \times 3$ 的滤波窗口对上图做  
二维中值滤波



# 空间域滤波小结

- 空间域滤波本质上是个邻域运算
- 相关与卷积是最基本的邻域运算（或空间域滤波）
- 空间域滤波都需要一个模板（是一个小矩阵，一般大小为奇数乘于奇数）
- 介绍了相关与卷积运算的模板
- 空间域滤波的用途举例——平滑；涉及了三种滤波器的例子：平均邻域滤波器，高斯滤波器，中值滤波器



# 主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
  - 低通滤波
  - 高通滤波
  - 同态滤波



# 频域滤波

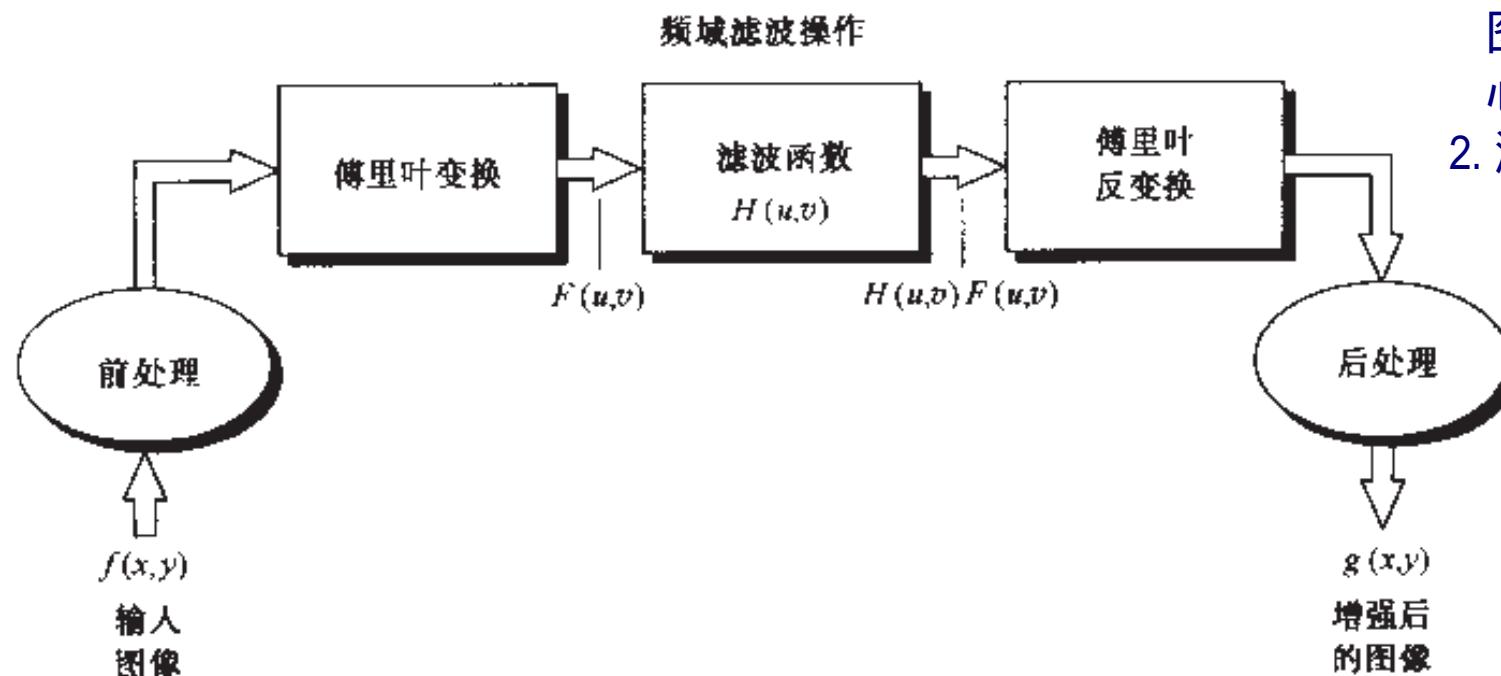
- 频域滤波：信号中特定波段频率滤除的操作
- 低通滤波：使低频通过而使高频衰减的滤波器
- 高通滤波：使高频通过而使低频衰减的滤波器

脚注：滤波分为经典滤波和现代滤波。本课程主要介绍经典滤波器的思想。对于现代滤波（主要是非线性滤波），理论较复杂，本课程不做介绍。



# 回顾频域滤波基本步骤

## ● 流程图



- 注：
1. 所涉及的滤波器一般原点在中心，故图像的DFT需要中心平移
  2. 滤波后的图像经反DFT变换后，要作反中心化处理



# 频域滤波与空间域滤波的关系

空间域滤波与频域滤波之间的对应关系：

空间域的卷积滤波器对应于一个频域滤波器

## 原理：卷积定理

在空间域采用卷积滤波器 $h(x,y)$ 对图像进行处理，理论上对应于在频域上，采用滤波器 $H(u,v)$ 对图像进行处理

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$



# 思考

- 空间域滤波与频域滤波之间的优势分别是什么？

在滤波器模板规模较大时，频域内进行滤波计算更为有效（**为什么？**）；空间域的滤波器更适用于小规模模板



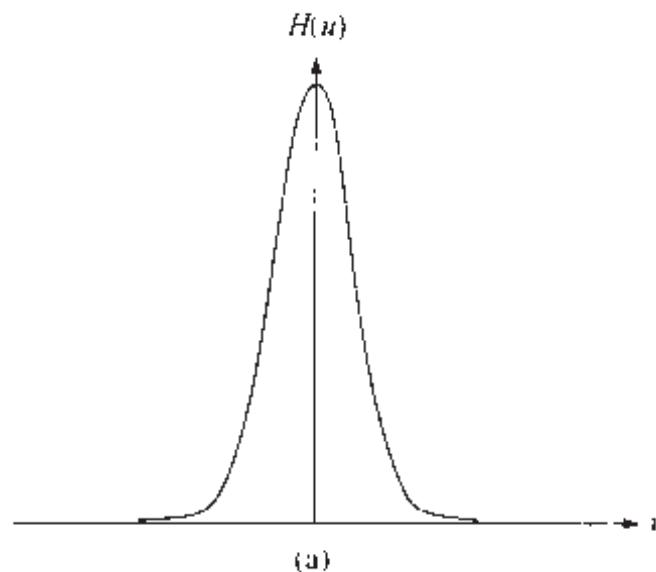
因为频域计算存在高效计算方法。如快速傅里叶变换将计算复杂度从  $O(N^2)$  下降到  $O(N \log N)$



# 频域滤波器与空间域滤波器

- 例如：频域高斯滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\lambda^2}$$



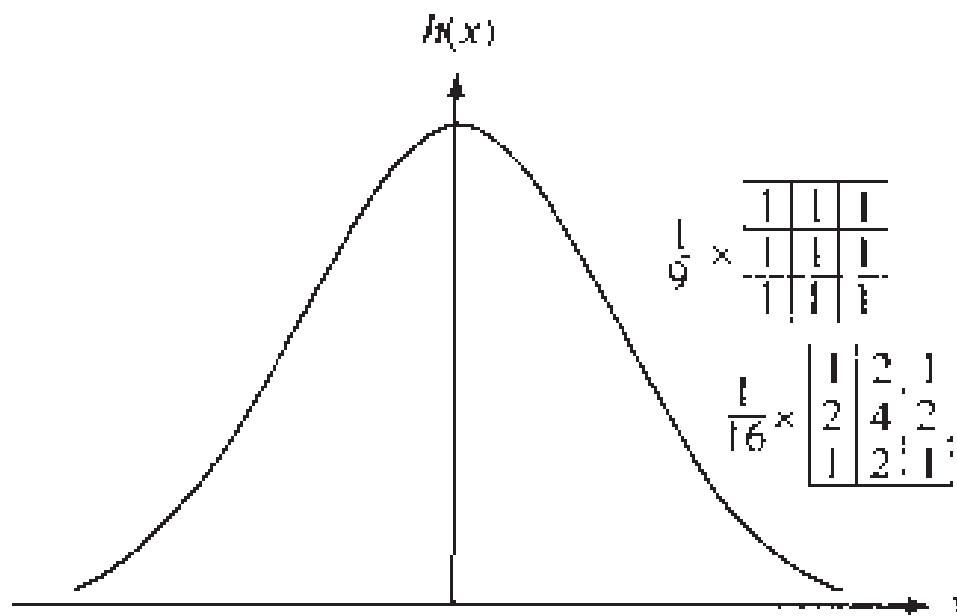


# 频域滤波器与空间域滤波器

- 所对应的空间域高斯滤波器

$$H(x) = \sqrt{2\pi} \lambda A e^{-2\pi^2 \lambda^2 x^2}$$

可以看出：当  $\lambda$  较大时，随  $x$  增加， $H$  快速下降， $H$  窄





# 讨论

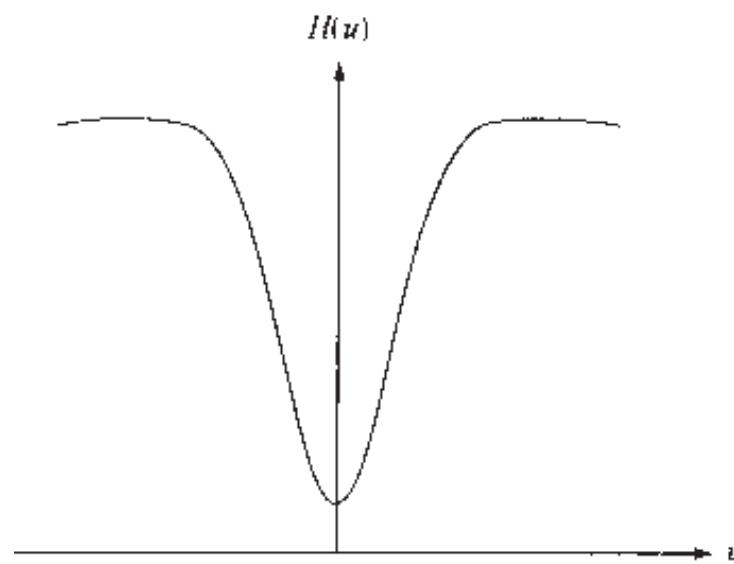
- $H(u)$ 和 $H(x)$ 构成傅里叶变换对，成分都是实高斯函数；  
方差变大，高斯分布曲线变宽
- $H(u)$ 和 $H(x)$ 有互相之间的作用关系；例如，
  - 当 $\lambda$ 很大时， $H(u)$ 变宽， $H(x)$ 变窄；
  - 当 $\lambda$ 趋于无穷时， $H(u)$ 趋于常数函数，而 $H(x)$ 则趋于一个冲激函数。  
相当于使得所有频率分量都通过
  - 空间域冲激函数的卷积运算等于原函数



# 更复杂一点的例子

- 复杂频域滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\lambda_1^2} - Be^{-u^2/2\lambda_2^2} \quad A > B, \quad \lambda_1 > \lambda_2$$

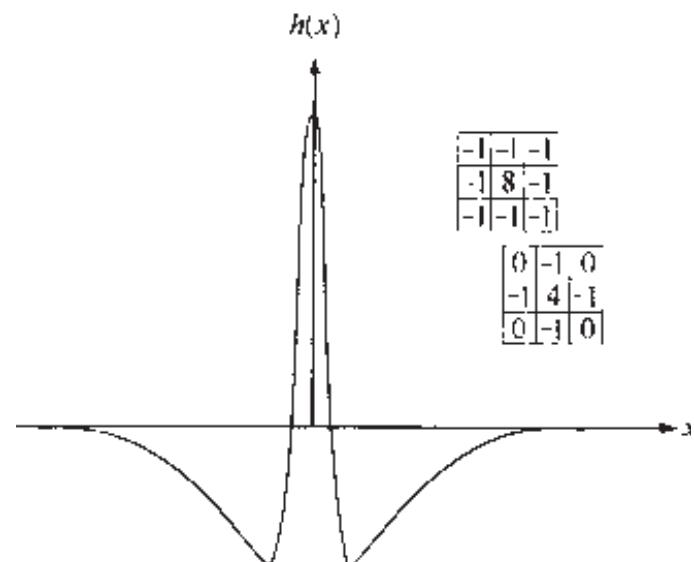




# 所对应的空间域滤波器

- 对应的空间域滤波器

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\lambda_1 A e^{-2\pi^2\lambda_1^2 x^2} - \sqrt{2\pi}\lambda_2 B e^{-2\pi^2\lambda_2^2 x^2}$$



边缘检测滤波器



# 主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
  - 低通滤波
  - 高通滤波
  - 同态滤波



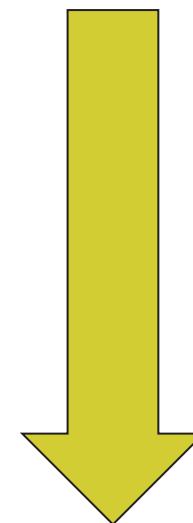
# 低通滤波器

- 图像的边缘和其他尖锐跳跃（如噪声）在图像的灰度级中主要处于傅里叶变换的高频部分。
- 目标：通过频域上一定范围高频分量进行衰减达到平滑化，来增强图像；
- 这种滤波器被称为低通滤波器。



# 三类低通濾波器

- 理想低通濾波器
- 巴特沃斯低通濾波器
- 高斯低通濾波器



越来越平滑



# 理想低通滤波器 (ILPF)

- 思想：截断傅里叶变换中所有高频成分
- 定义：以 $D_0$ 为半径的圆内所有频率分量无损的通过，圆外的所有频率分量完全衰减。

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$



# 理想低通滤波器

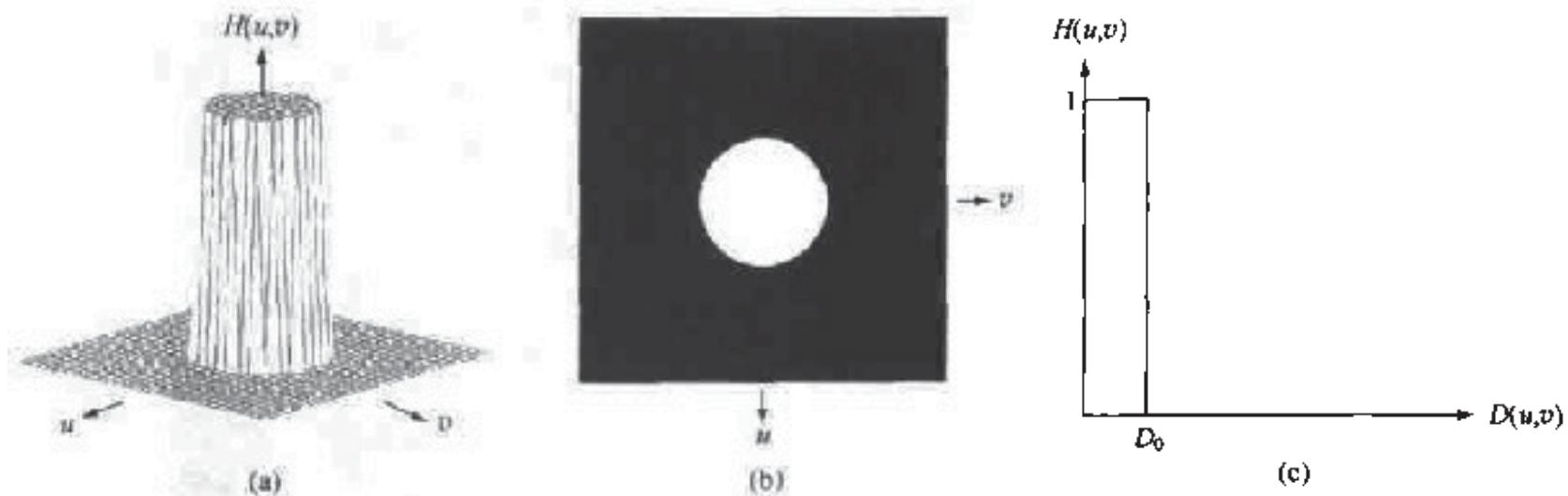


图 4.10 (a) 理想低通滤波器变换函数的透视图,(b)以图像显示的滤波器,(c)滤波器的径向横断面



# 理想低通滤波器

$D_0$ 如何确定？引入信号能量

- 信号能量  $E_T$ ：将  $u, v=0, 1, N-1$  的每一点  $(u, v)$  的能量相加起来得到傅立叶信号能量  $E_T$ 。

$$E_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} E(u, v) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} [R^2(u, v) + I^2(u, v)]$$

注意：傅立叶变换是  
酉变换，不改变信号  
能量



# 理想低通滤波器

- 例如：有高斯噪声Lenna图像的傅立叶谱和不同半径下的谱图像的信号能量。



$$E_T = 1.5387 \times 10^{15} \text{ 图像总能量}$$

$$E_{5\text{r}} = 1.3886 \times 10^{15} \text{ D0=5内能量}$$

$$E_{5\text{r}}/E_T = 0.9025 \text{ D0=5内保留能}$$

$$E_{10\text{r}} = 1.4191 \times 10^{15} \text{ 量的比例}$$

$$E_{10\text{r}}/E_T = 0.9223$$

$$E_{20\text{r}} = 1.4346 \times 10^{15}$$

$$E_{20\text{r}}/E_T = 0.9323$$

$$E_{50\text{r}} = 1.4483 \times 10^{15}$$

$$E_{50\text{r}}/E_T = 0.9412$$



# 理想低通滤波器



有高斯噪声的Lenna图像



$$D_0=5$$

根据测不准原理，这时D0  
对应一个较大的空域模板

# 理想低通濾波器



$D_0=10$



$D_0=20$



# 理想低通滤波器



$$D_0=50$$

对应较小的空域模板

有高斯噪声的原Lenna图像



# 理想低通滤波器

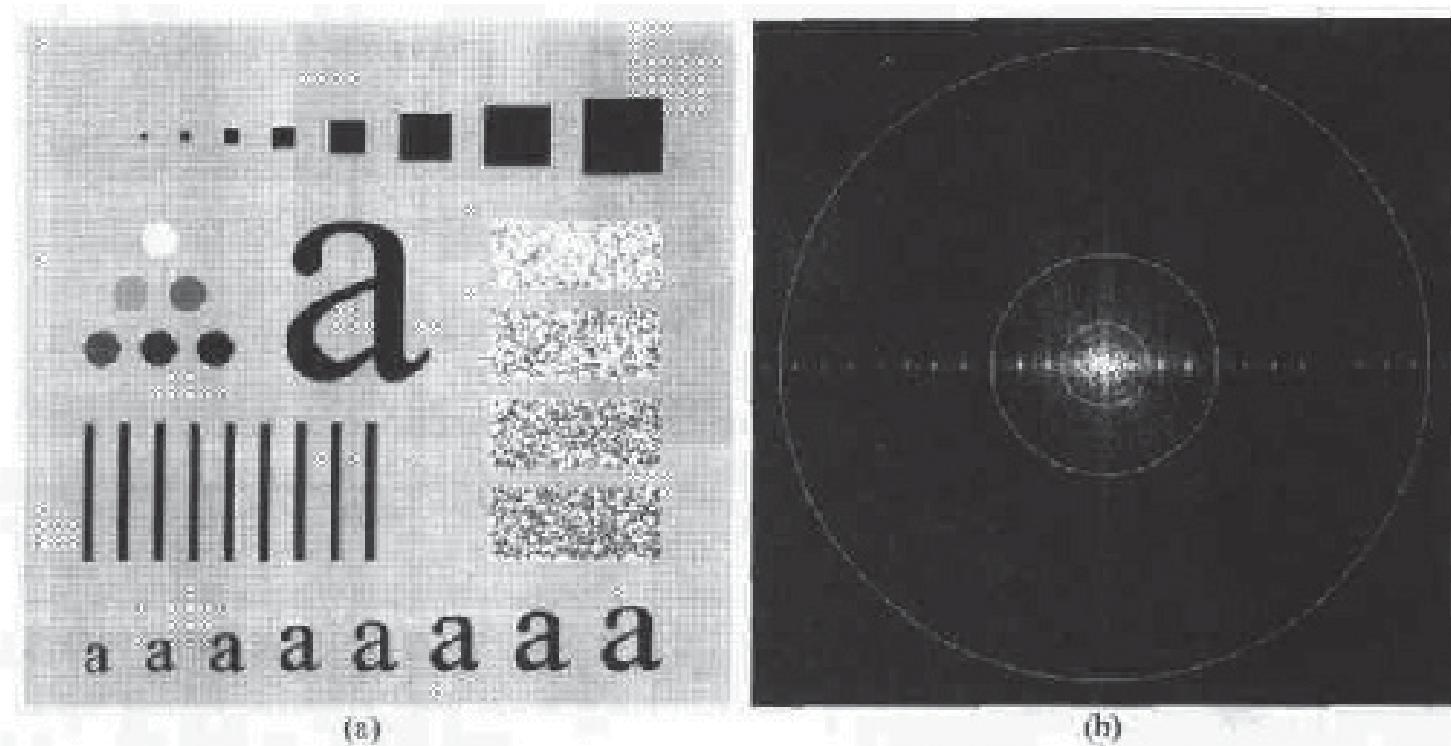
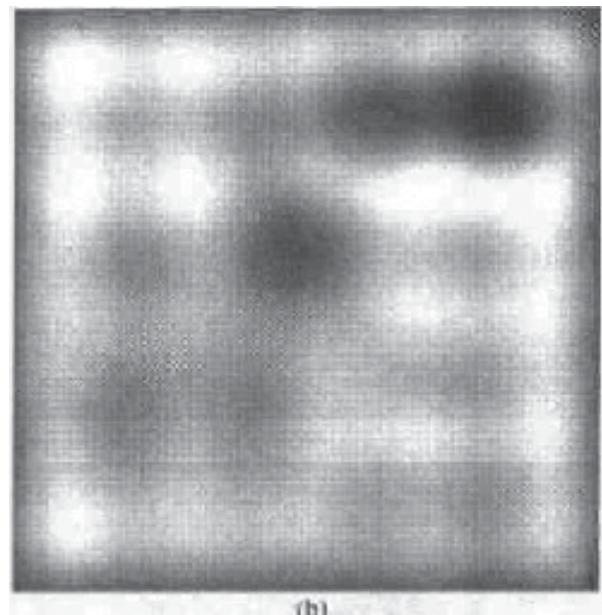
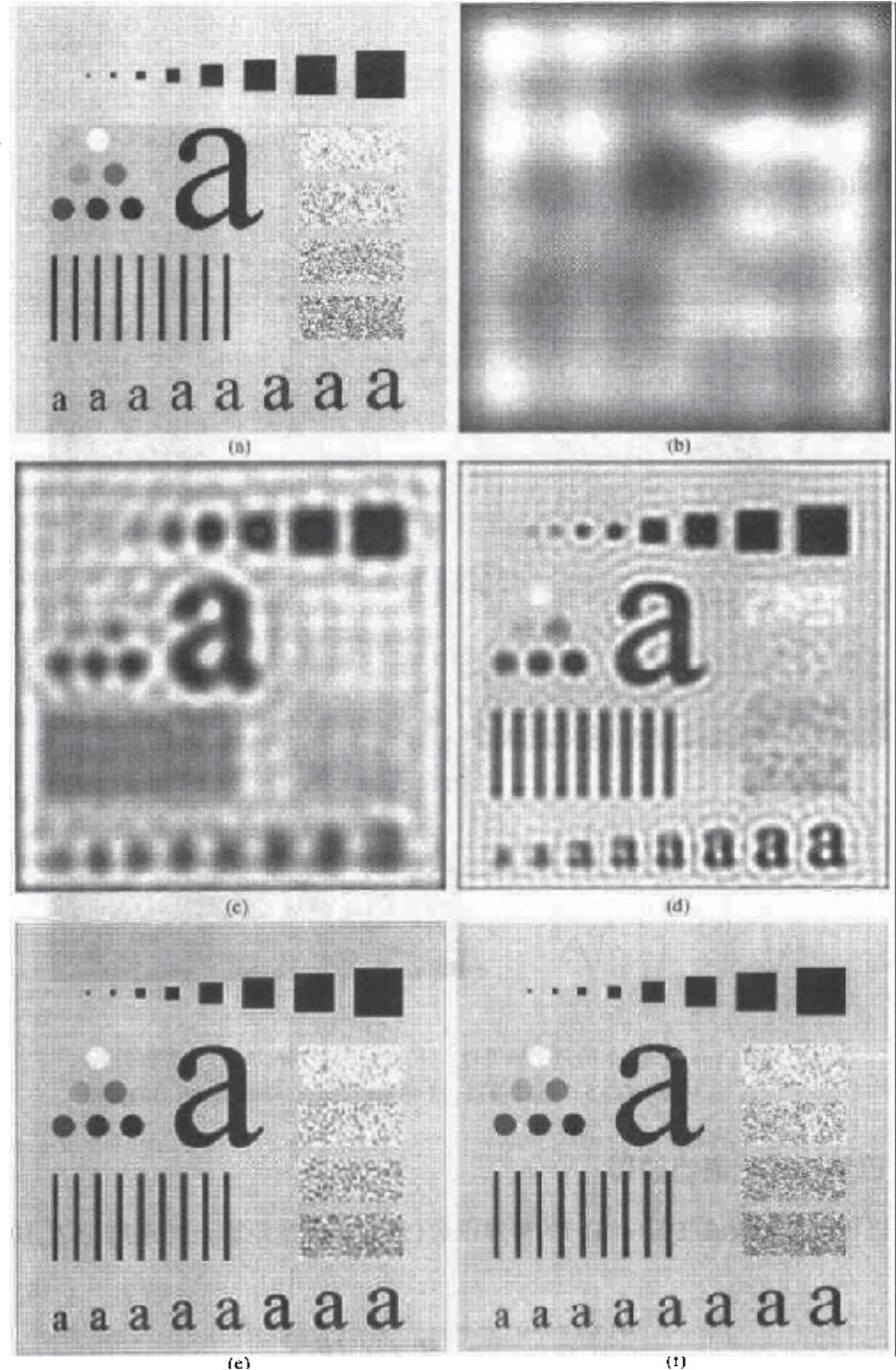


图 4.11 (a)尺寸为  $500 \times 500$  像素的图像,(b)图像的傅里叶谱。叠加的圆环具有 5, 15, 30, 80 和 230 像素的半径,它们分别包含了 92.0%, 94.6%, 96.4%, 98.0% 和 99.5% 的图像功率

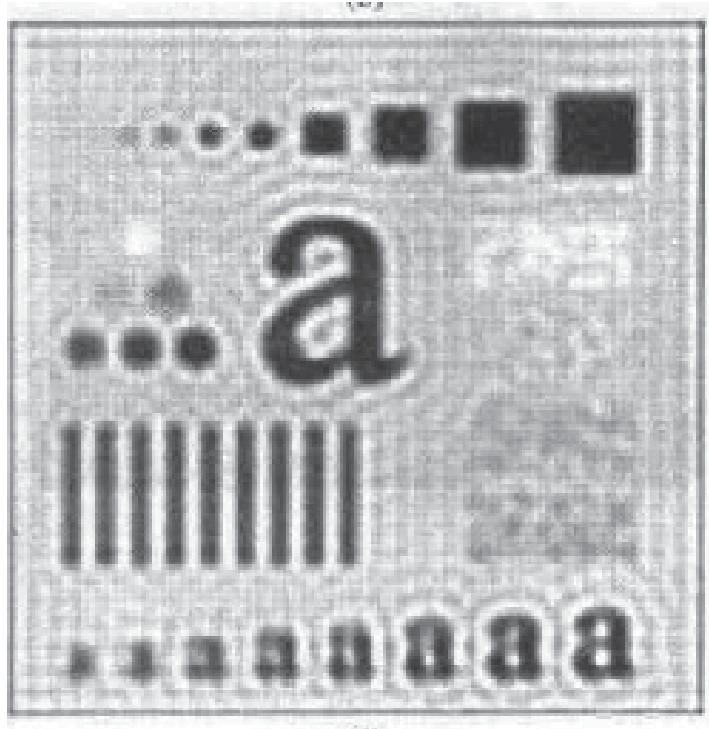
# 理想低通滤波器



半径小时，图像模糊

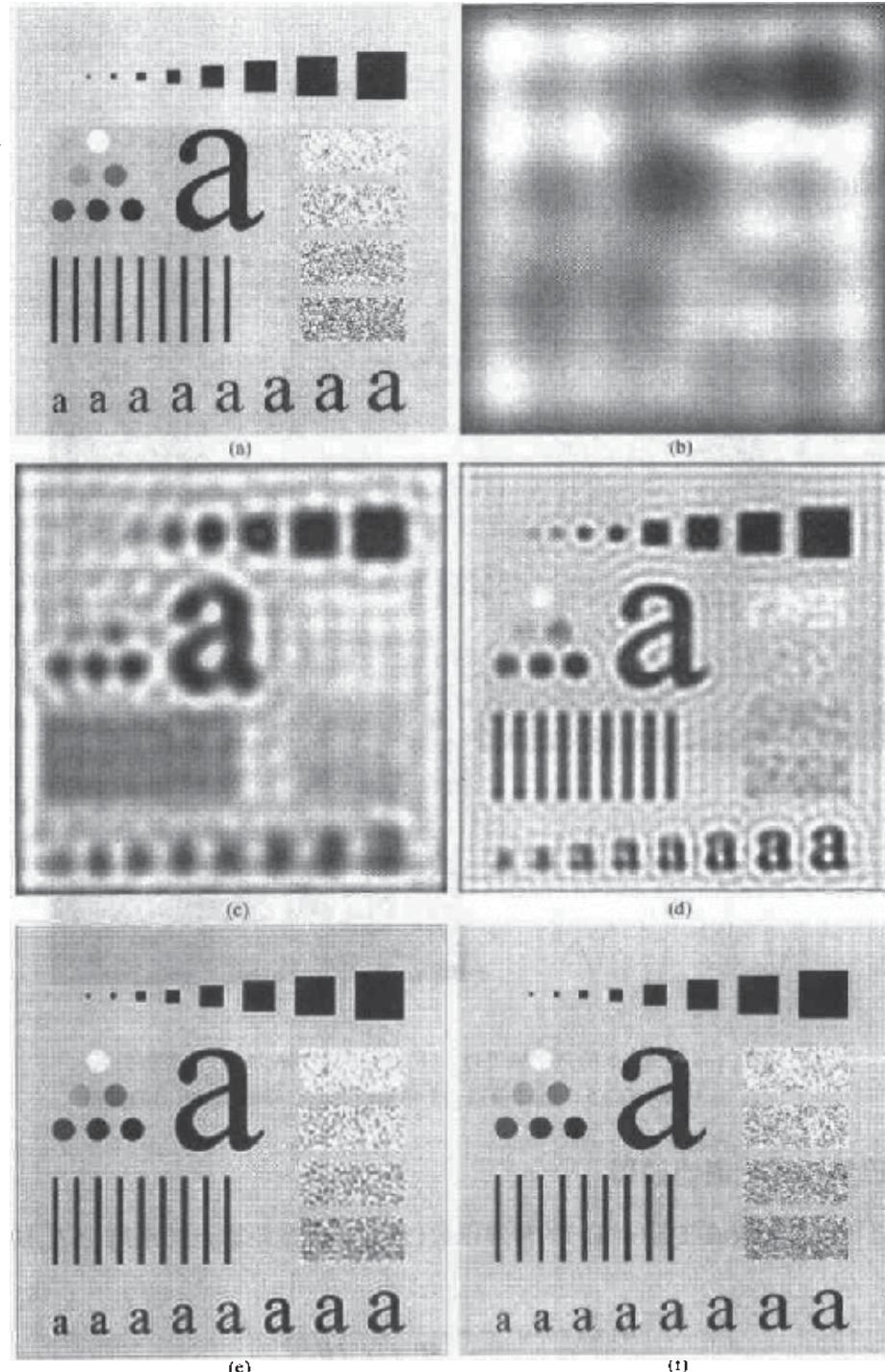


# 理想低通濾波器



有似水纹般的现象

振铃现象





# 理想低通滤波器

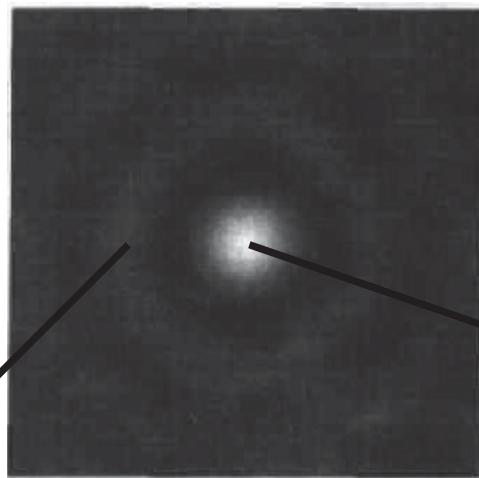
- 理想低通滤波器的问题：
- (1) 模糊
  - 对于带高斯噪声的lenna图像，虽然半径为5时包含了90%的能量。但严重的模糊表明了图片的大部分边缘信息包含在滤波器滤去的10%能量之中。随着滤波器半径增加，模糊的程度相对减少。
- (2) 振铃
  - 1. 理想低通滤波器 $H(u)$ 在频域是矩形，其空域滤波器核 $h(x)$ 是sinc函数
  - 2. sinc会有正负震荡，导致出现振铃现象

如何理解这些现象？

从空域的卷积函数理解



# 理想低通滤波器的空间滤波图像



环形成分：决定了振铃现象；多个环相互干扰，导致振铃现象

原因：在截止频率 $D_0$ 附近对频谱过于“粗暴”的截断

理想低通滤波器的 $D_0$ 越小，等价于空域滤波时模板的size越大

中心成分：决定了模糊；频域的滤波越窄，空域滤波越宽，因此模糊。反之则越清楚。

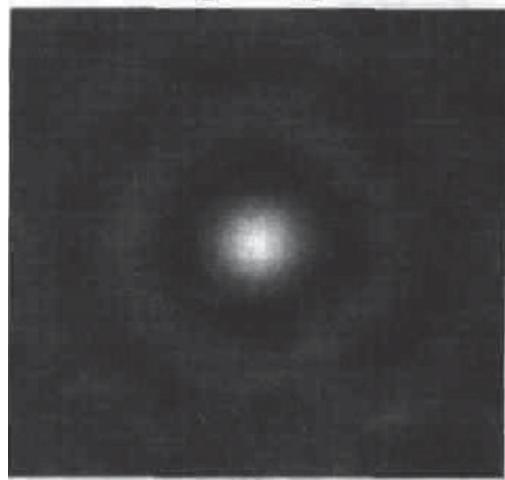
—》解决方法—》截断逐步进行



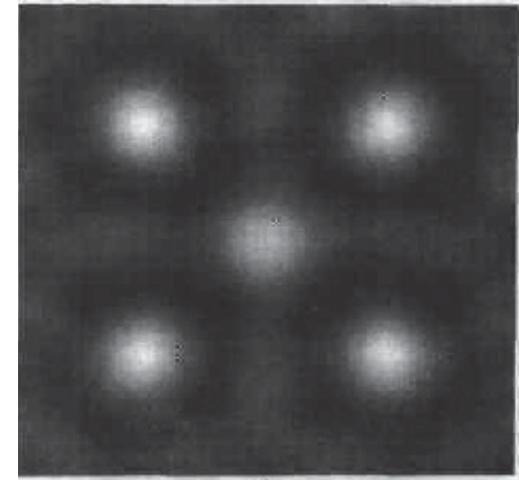
# 更明显的例子



输入5个像素值  
(模拟5个脉冲  
信号)



空域滤波图像



滤波后的图像结果；  
注意模糊了，还有  
明显振铃现象



# 理想低通滤波器点评

- 理想低通滤波器非常不实用
- 但对理想低通滤波器不足的认识，对研究有效滤波器的特性非常有用
- 也就是要尽量减少振铃或者没有振铃，以及减少模糊



# 巴特沃思低通滤波器BLPF

- 思想：平滑理想低通滤波器

$n$ 阶巴特沃思 (Butterworth) 滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D_0} \right)^{2n}}$$

$n = 1, 1$ 阶巴特沃思滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{(u^2 + v^2)}{D_0^2}}$$

- 滤波器对  $(0, 0)$  对称，对各方向的频率成分有相同效果
- 不同于ILPF，随着  $(u, v)$  增加，对频率成分是逐渐衰减，可有效抑制振铃现象
- 当  $n$  增加时，对频率成分趋于锐截断，振铃效果增强



# 巴特沃思低通滤波器

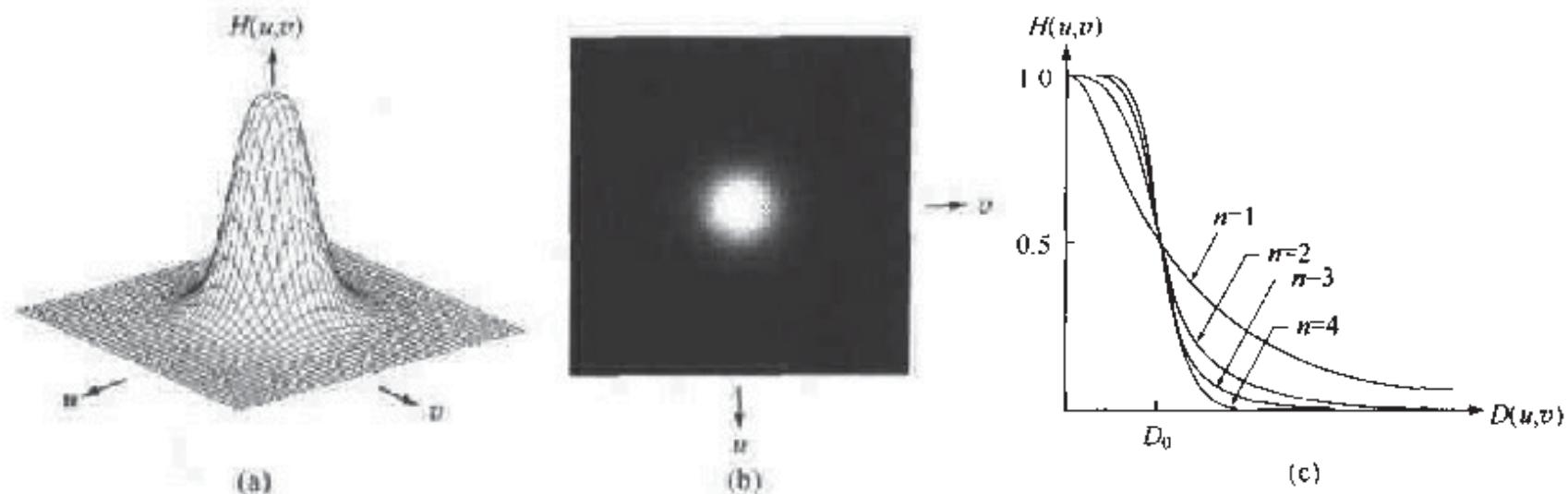
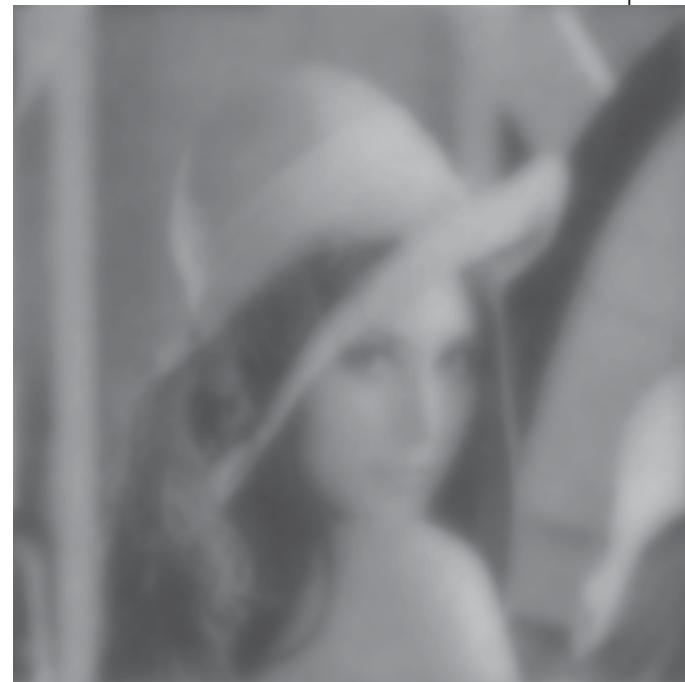


图 4.14 (a)巴特沃思低通滤波器函数的透视图,(b)以图像显示的滤波器,(c)阶数从 1 到 4 的滤波器横截面



# 巴特沃思低通濾波器



$D_0=10$



# 巴特沃思低通滤波器



$D_0=20$



$D_0=50$



# 巴特沃思低通滤波器

不同于ILPF，BLPF在通过的频率与被滤掉的频率之间没有明显的截断；当阶数为1时，没有振铃；

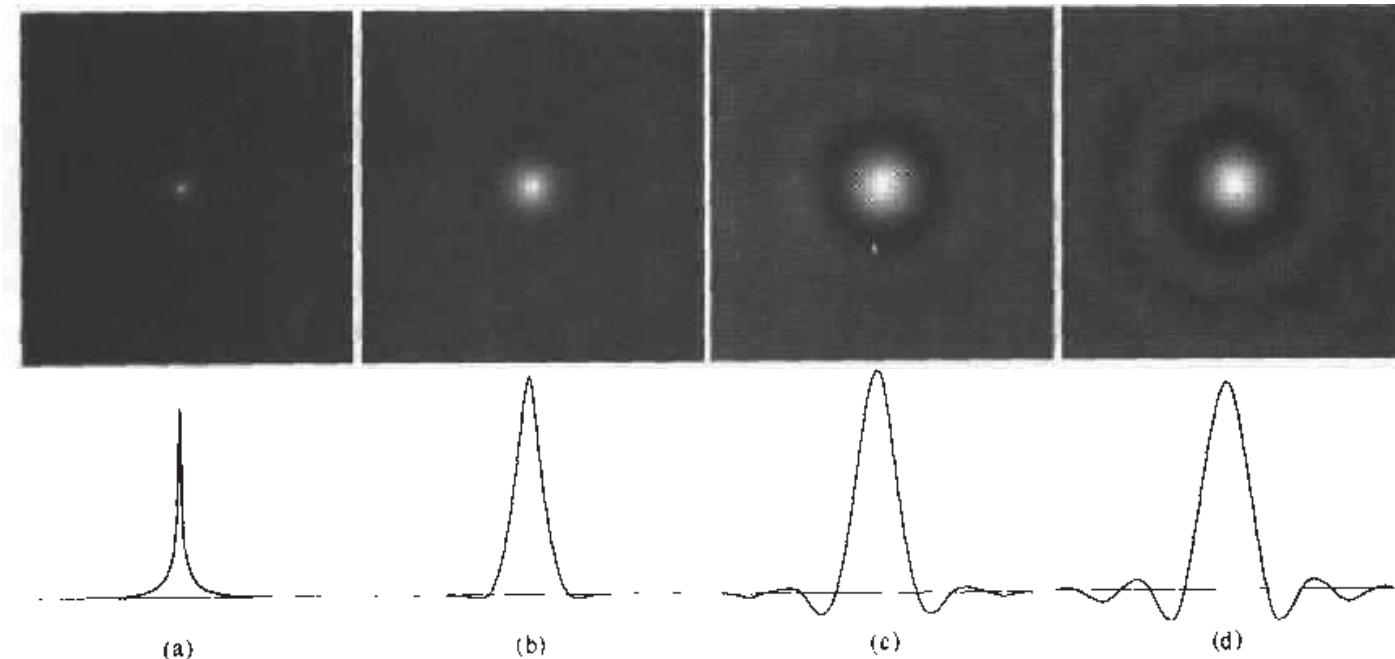


阶数为1时的空域滤波图像



# 巴特沃思低通滤波器

当阶数增高时，振铃成为一个重要因素。当阶数趋于无穷大时， $BLPF=ILPF$ 。

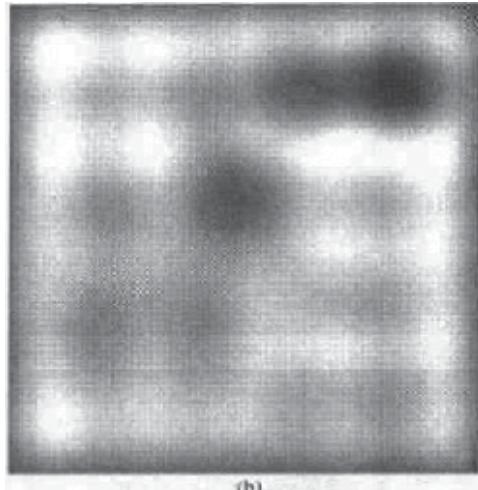


$H(u,v)$ 反变换 →  
 $h(x,y)$ 截面图，有  
正负震荡则有振铃

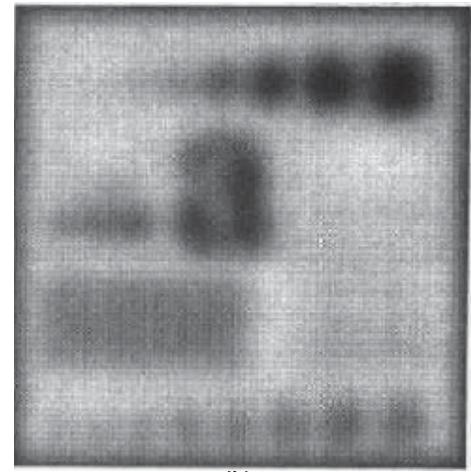
图 4.16 (a) ~ (d) 阶数为 1, 2, 5 和 20 的 BLPF 的空间表示及相应的通过滤波器中心的灰度级剖面图(所有的滤波器都有半径为 5 的截止频率)。注意振铃作为滤波器阶数的函数越发明显

# 效果对比

- 二阶巴特沃思低通滤波器 (BLPF)



ILPF



BLPF

模糊明显减少

模糊减少的原因在于：当和ILPF采用同样D0时，BLPF可以保留更多高频成分

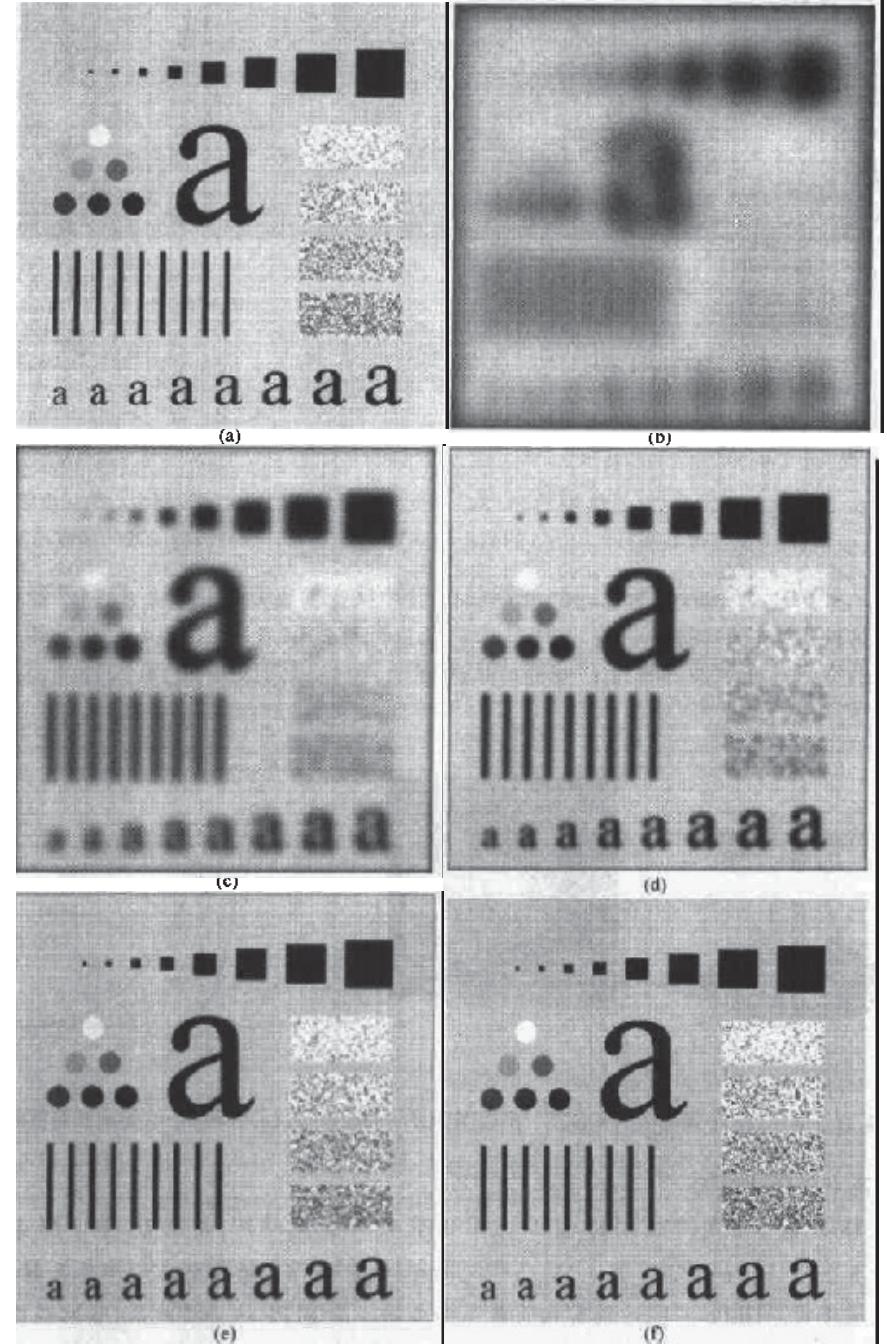
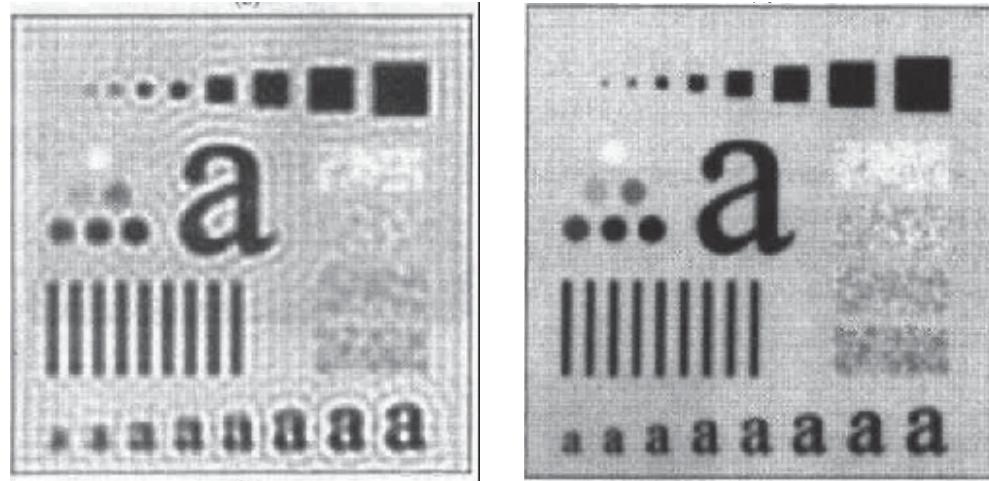


图 4.18 (a)原图像,(b) ~ (f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率如图 4.11(b)所示,一组半径值为 5, 15, 30, 80 和 230。可比较图 4.12 和图 4.15

# 效果对比

- 二阶巴特沃思低通  
滤波器 (BLPF)



ILPF

BLPF

振铃显著减少

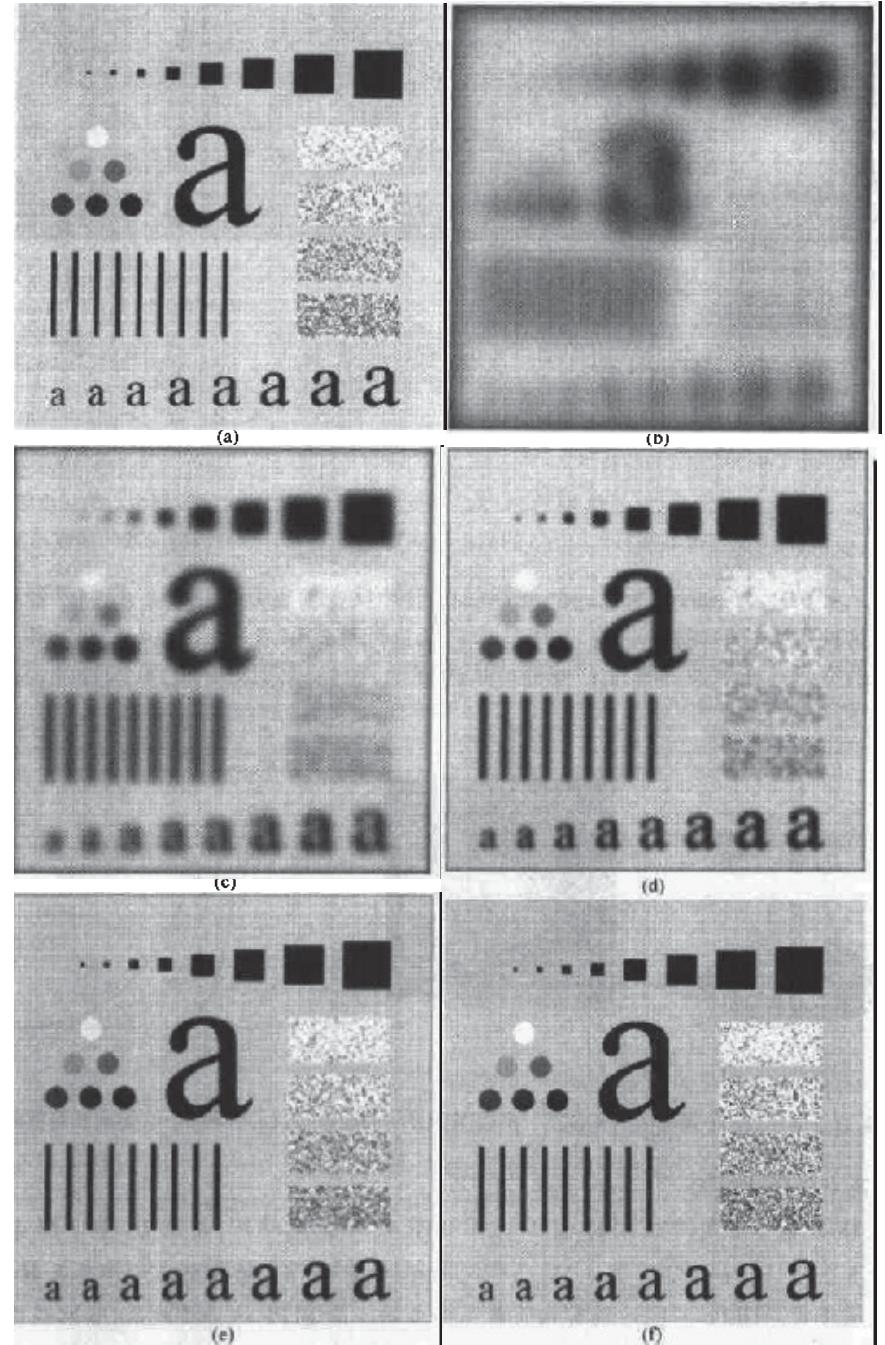


图 4.18 (a)原图像,(b)~(f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率如图 4.11(b)所示,一组半径值为 5, 15, 30, 80 和 230。可比较图 4.12 和图 4.15



# 巴特沃思低通滤波器的点评

- 是有效的低通滤波和可接受的振铃特性之间的折中
- 相较于理想低通滤波器
  - 模糊大大减少
  - 振铃现象显著缓解



# 高斯低通濾波器GLPF

- 思想：彻底没有振铃现象 其空域滤波器为高斯，没有震荡

## 指数低通濾波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}\right]^{2n}}$$

$n = 1$ 的指数低通濾波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{u^2+v^2}{{D_0}^2}\right]}$$



# 高斯低通滤波器GLPF

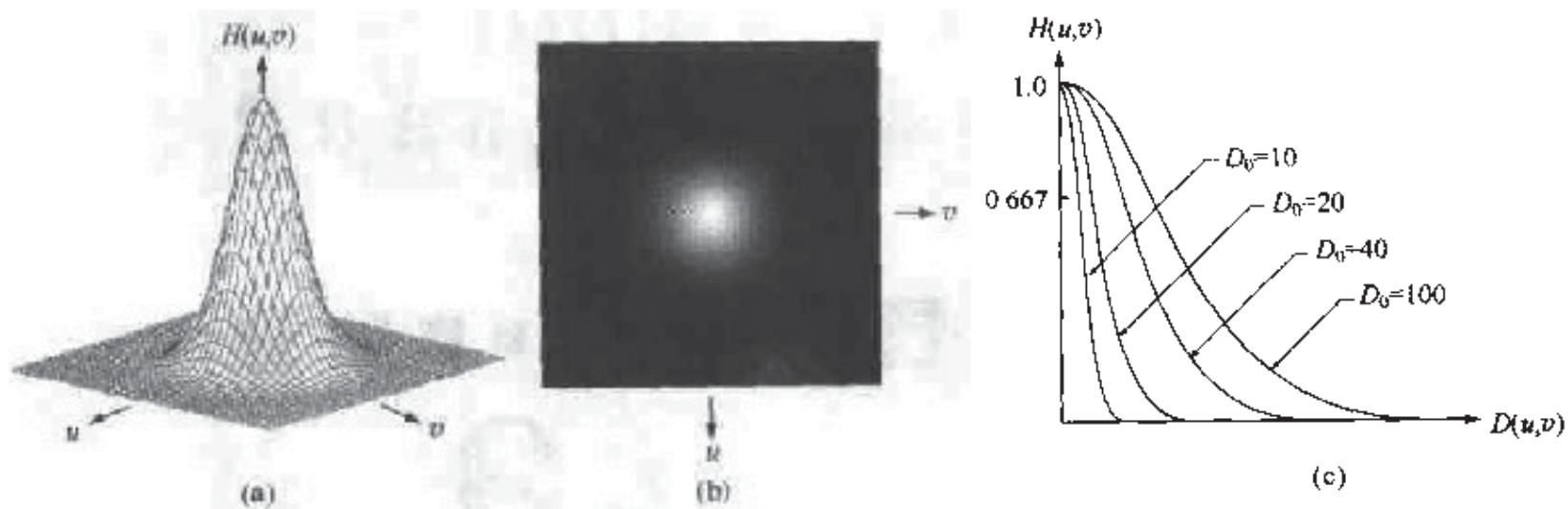


图 4.17 (a)GLPF 传递函数的透视图,(b)以图像显示的滤波器,(c)各种  $D_0$  值的滤波器横截面

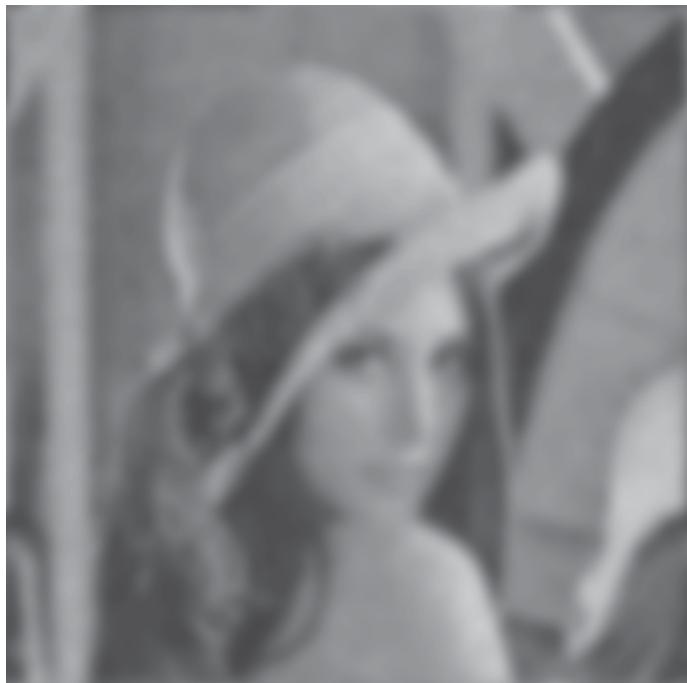


# 高斯低通濾波器GLPF



$D_0=10$

# 高斯低通濾波器



$D_0=20$



$D_0=50$

# 高斯低通濾波器

- 彻底没有振铃现象

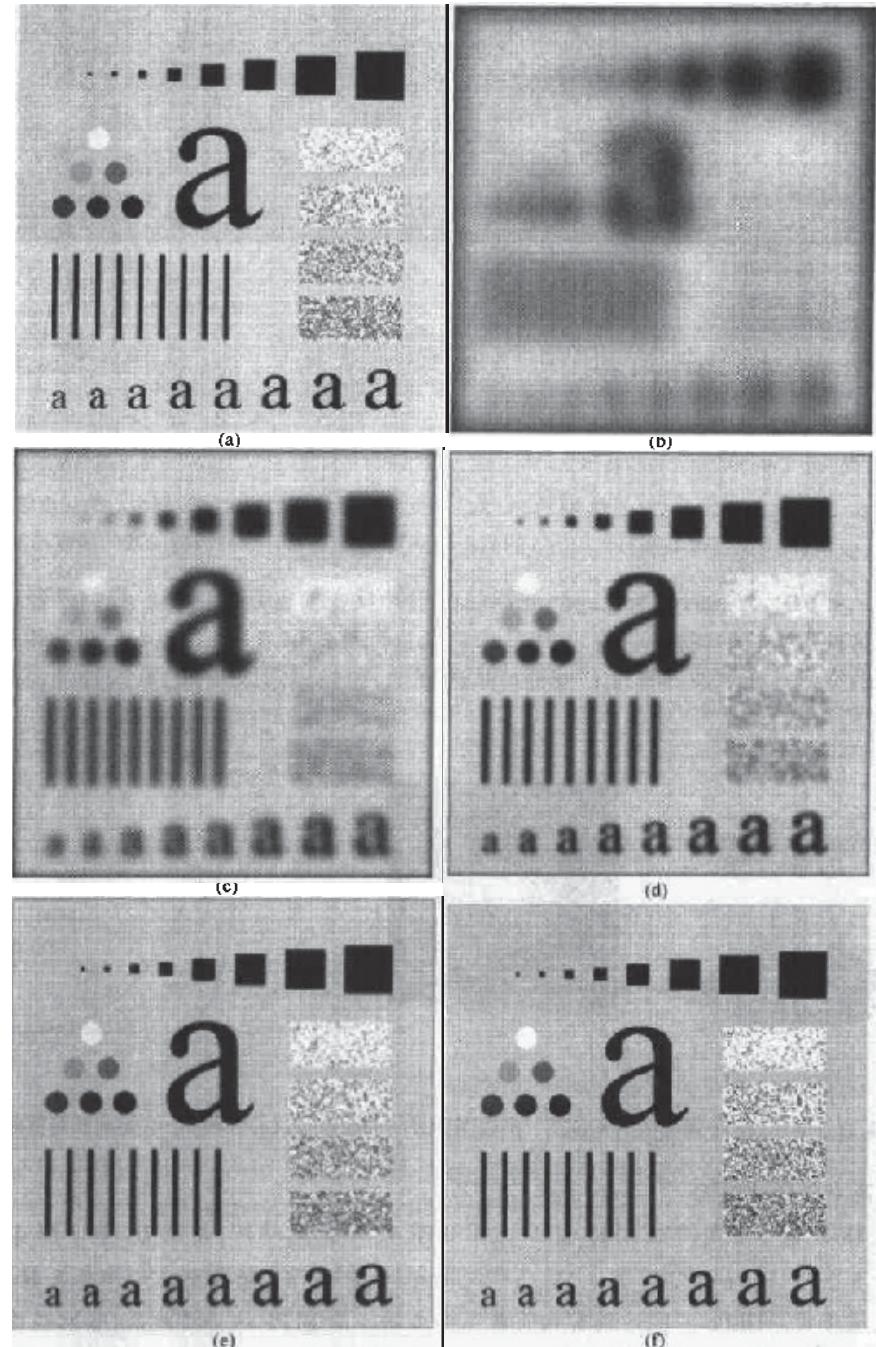


图 4.18 (a)原图像,(b)~(f)用高斯低通滤波器滤波的结果,其截止频率如图 4.11(b)所示,一组半径值为 5, 15, 30, 80 和 230。可比较图 4.12 和图 4.15



# 低通滤波器的应用

## ● 低分辨率字符识别

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



(a)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



(b)



# 低通滤波器的应用

- 印刷和出版业的预处理功能
- “美容”处理——减少人脸皮肤细纹





# 主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
  - 低通滤波
  - 高通滤波
  - 同态滤波



# 高通滤波器

- 原理

- 图像锐化处理的目的是使模糊图像变得清晰。
- 通常图像模糊是由于图像受到平均或积分运算，因此图像锐化采用微分运算。
- 在频域处理上，即采用高通滤波器法。

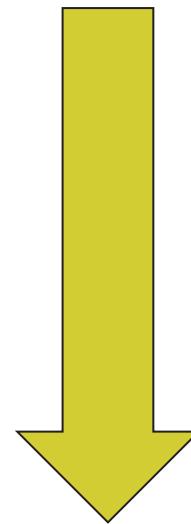
高通滤波在增强细节的前提下，也增加了噪声能量

注意：高通滤波器所处理的图像需要有较高的信噪比，否则图像锐化后，图像信噪比会更低



# 高通濾波器

- 理想高通濾波器
- 巴特沃思高通濾波器
- 高斯高通濾波器
- 高斯差分濾波器



越來越平滑

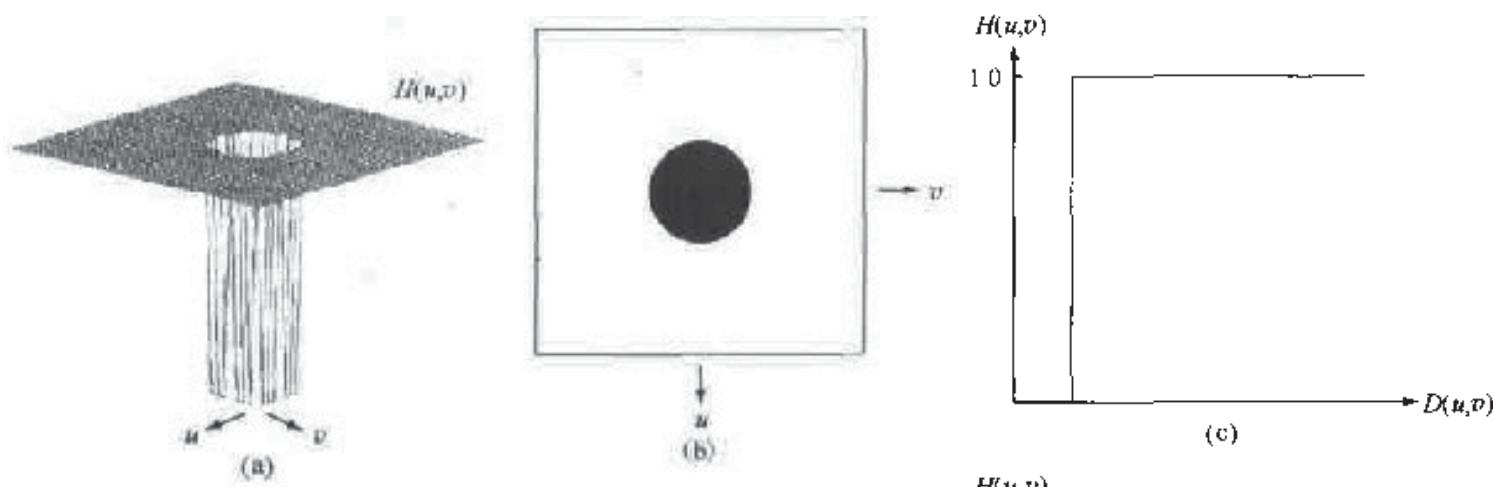


# 理想高通滤波器

- 思想：截断傅里叶变换中所有低频成分

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

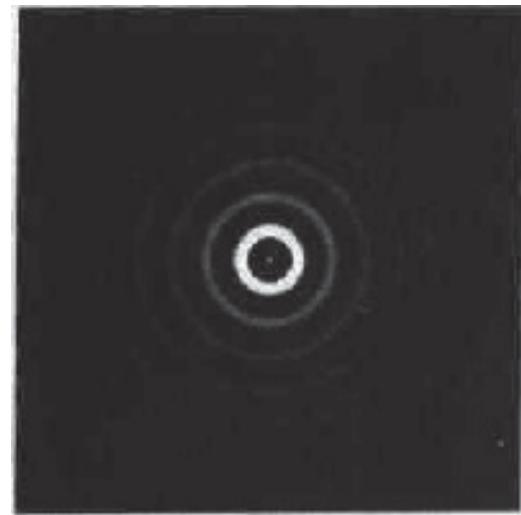
$$\text{其中 } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$





# 理想高通濾波器

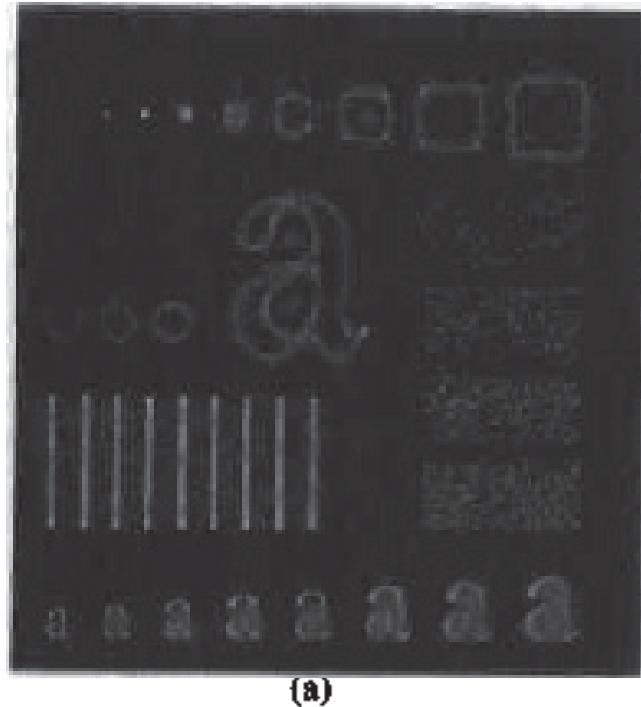
IHPF的空域濾波图像



可见，与ILPF类似的，IHPF的振铃现象严重



# 理想高通濾波器



IHPF在D0=15时的结果。不难发现，  
IHPF的振铃现象严重



# 巴特沃思高通濾波器BHPF

- 思想：平滑理想高通濾波器

$n$ 阶巴特沃思 (Butterworth) 高通濾波器

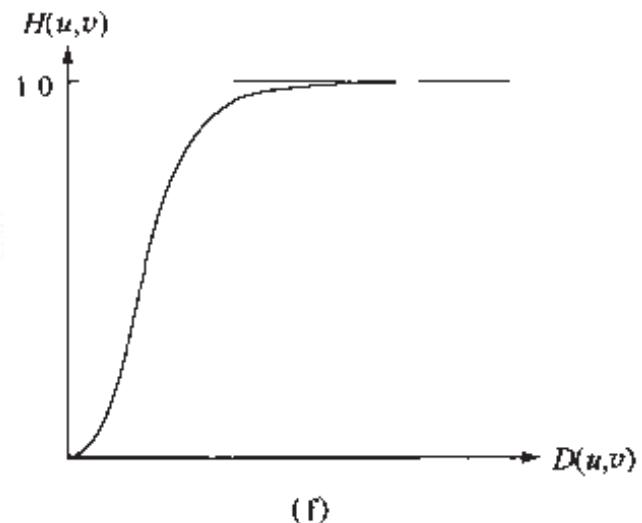
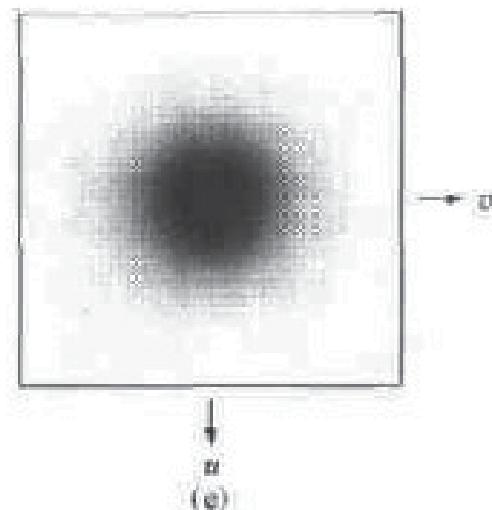
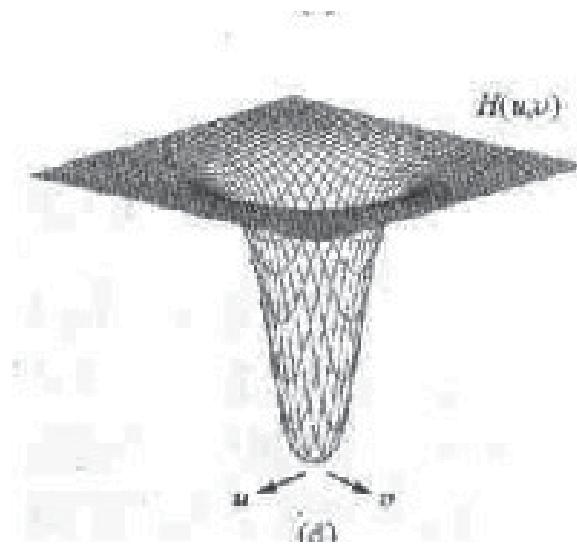
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left( \frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^{2n}}$$

$n = 1$ ,1阶巴特沃思高通濾波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{D_0^2}{(u^2 + v^2)}}$$



# 巴特沃思高通濾波器





# 巴特沃思高通滤波器

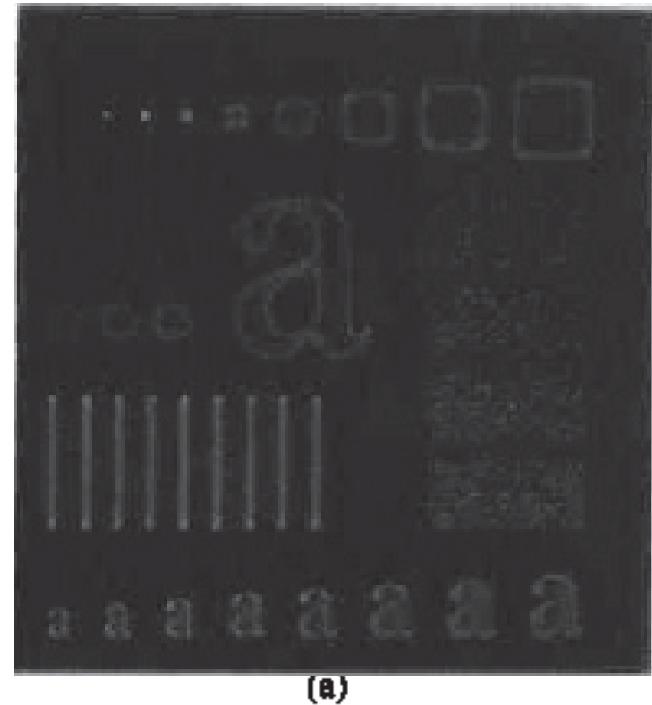
BHPF的空域滤波图像



可见，与BLPF类似的，BHPF显著减少了IHPF的振铃现象



# 巴特沃思高通滤波器



(a)

BHPF在D0=15时的结果。BHPF显著减少了IHPF的振铃现象



# 高斯高通濾波器GHPF

- 思想：彻底消除振铃现象

指数高通濾波器

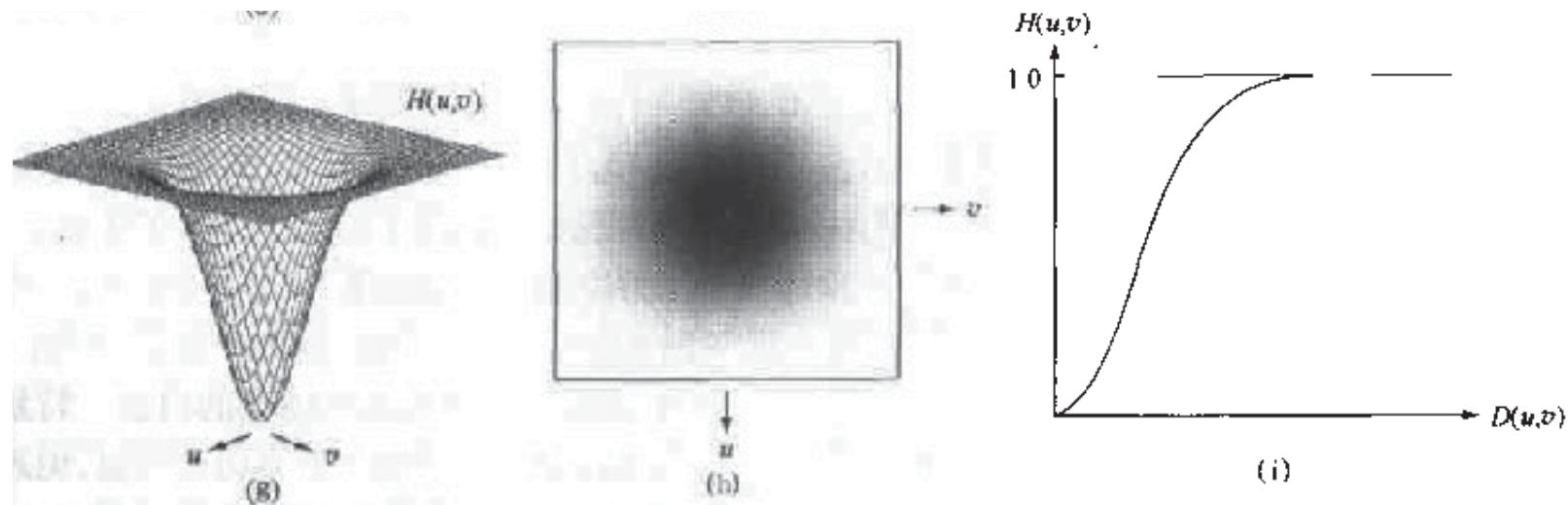
$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right]^{2n}}$$

$n = 1$ 的指数高通濾波器

$$H(u, v) = e^{-\left[\frac{D_0^2}{u^2 + v^2}\right]}$$



# 高斯高通濾波器



与GLPF性质类似的，GHPF比BHPF要稍微模糊，但彻底没有振铃现象。



# 高斯高通濾波器



原图



IHPF



BHPF



GHPF

# 高斯差分滤波器 (DoG,Difference of Gaussian)



- 思想：高斯滤波器的推广版。引入更多参数，用于解决更具体的实际问题

高斯差分滤波器的传递函数定义为：

两个不同宽度高斯函数之差。

$$G(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad A \geq B, \sigma_1 \geq \sigma_2$$

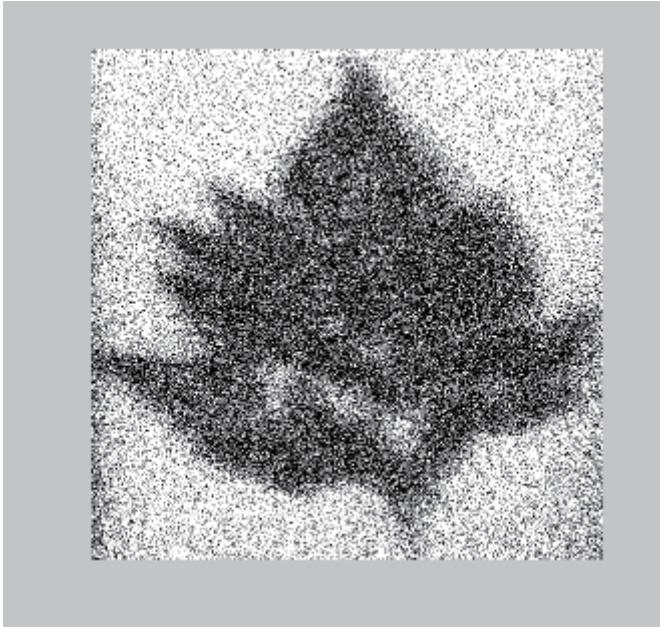
$$g(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-t^2/2\sigma_1^2} - \frac{B}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-t^2/2\sigma_2^2}$$

- 高斯滤波器是DoG的一个特例

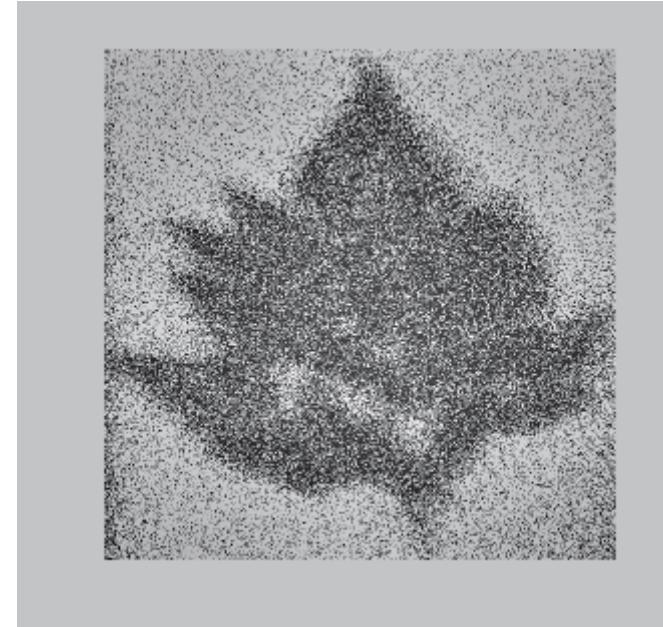
- 这里用到2个方差不同的高斯低通滤波器
- 将一幅图像经过2个不同高斯滤波器的滤波图像相减
- 在计算机视觉CV中用于角点检测



# 高通滤波器在有噪声图像的表现



有噪声的图像



采用**BHPF**高通滤波后，  
信噪比变小。



# 频域滤波小结

- 频域滤波基础
  - 熟悉频域滤波的基本步骤
  - 了解频域滤波与空间域滤波的关系
- 低通滤波
  - 基本思想
  - 理解理想低通滤波及其存在的模糊和振铃现象
  - 两种常用解决方案：巴特沃斯低通滤波以及高斯低通滤波
  - 巴特沃斯是理想与高斯滤波的折中
  - 高斯彻底解决振铃现象，但会比巴特沃斯模糊



# 频域滤波小结

- 高通滤波
  - 基本思想
  - 理解理想高通滤波及其存在的模糊和振铃现象
  - 两种常用解决方案：巴特沃斯高通滤波以及高斯高通滤波
  - 巴特沃斯是理想与高斯滤波的折中
  - 高斯彻底解决振铃现象，但会比巴特沃斯模糊
  - 高斯高通的扩展版：高斯差分高通滤波



# 主要内容

- 空间域滤波基础
- 频域滤波
  - 低通滤波
  - 高通滤波
  - 同态滤波



# 同态滤波

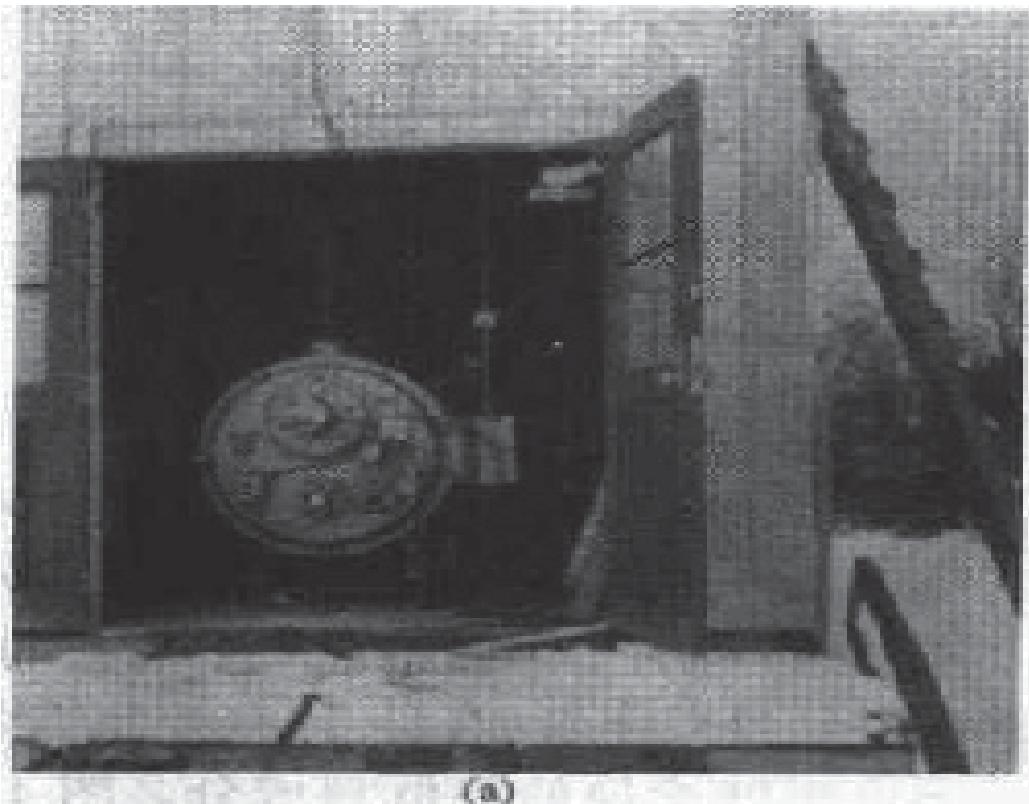
- 正常图象是在均匀光强度情况下获得的图象，实际上光照射是不均匀，或光强范围动态太大。
- 可用同态滤波用于解决光照不均匀的影响。
- 原理：光照下景物图象的模型
  - $f(x,y) = f_i(x,y) \cdot f_r(x,y)$
  - $f_i(x,y)$ :随空间位置不同的光强分量
  - $f_r(x,y)$ :景物反射到眼睛的图象
  - $f(x,y)$ :最终获得的图象

难点：关照影响不再是加法模型，而是乘法模型。如何设计合适的滤波器？



# 同态滤波

考虑右边图像，门  
内的细节被墙外的  
光所遮蔽



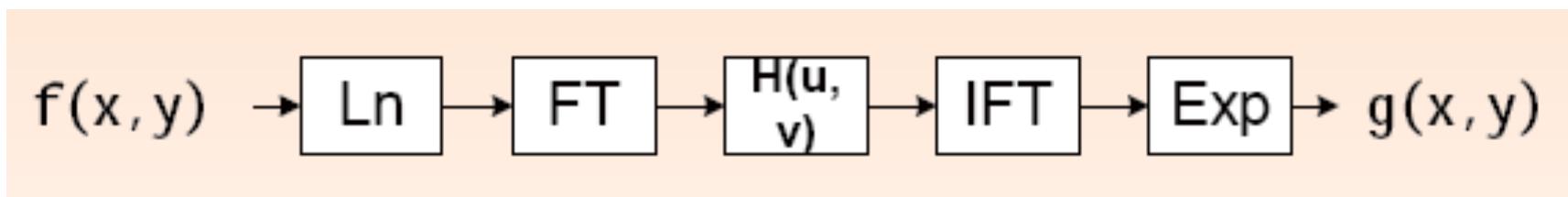


# 同态滤波

- 基本想法：通过对数变换将光照的影响转换为传统噪声模型进行处理

$$\ln f(x, y) = \ln f_i(x, y) + \ln f_r(x, y)$$

$$FFT[\ln f(x, y)] = FFT[\ln f_i(x, y)] + FFT[\ln f_r(x, y)]$$



设计对数域上的滤波函数 $H(u, v)$ ，去除光照的影响 $f_i(x, y)$

# 同态滤波的基本假定

Reflectance Model:

Surface Reflectance	$i(x,y)$
Illumination	$n(x,y)$
Brightness	$f(x,y) = i(x,y) \cdot n(x,y)$

Assumptions:

Illumination changes "slowly" across scene  
→ Illumination  $\approx$  low frequencies.

Surface reflections change "sharply" across scene  
→ reflectance  $\approx$  high frequencies.





# 同态滤波

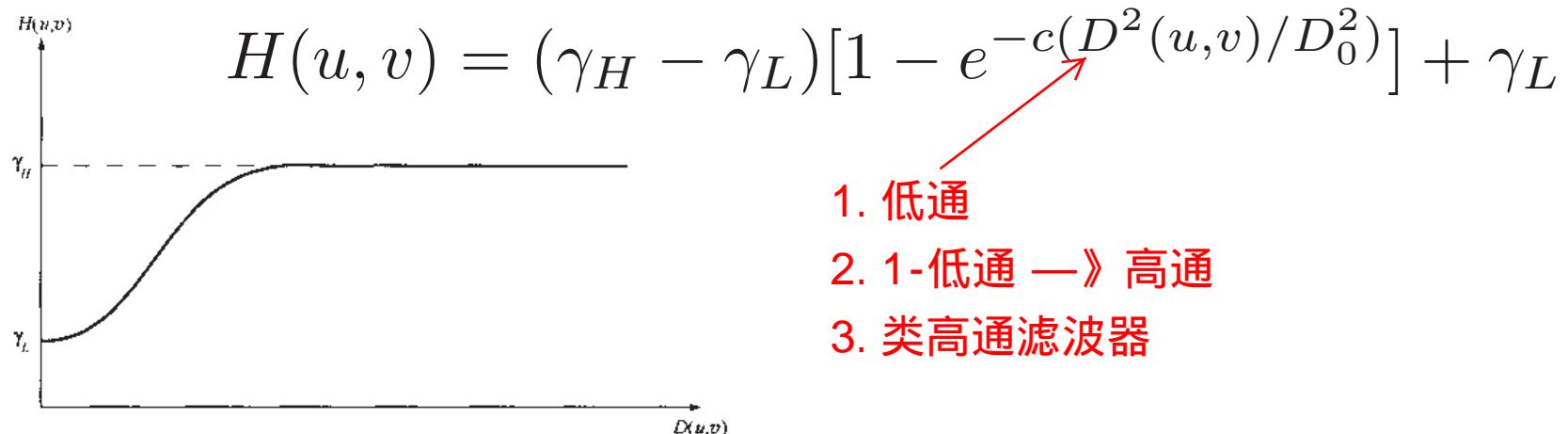
1. 同态滤波用于解决乘性干扰 $f_i(x,y)$
2. 滤波器 $H(u,v)$ 的设计取决于信号 $f_i(x,y)$ 的分布

- 分析

- $f_i(x,y)$ : 缓慢变化，频率集中在低频部分
- $f_r(x,y)$ : 包含景物各种信息，高频分量丰富

- 处理

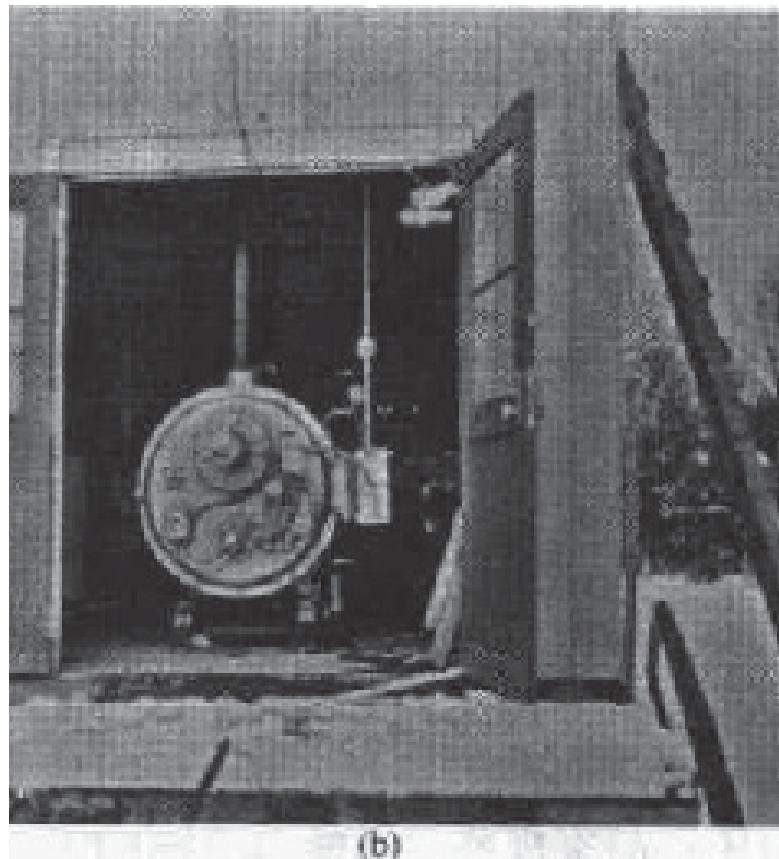
- 选择一滤波函数 $H(u,v)$ : 增强高频的贡献；减少低频的贡献；





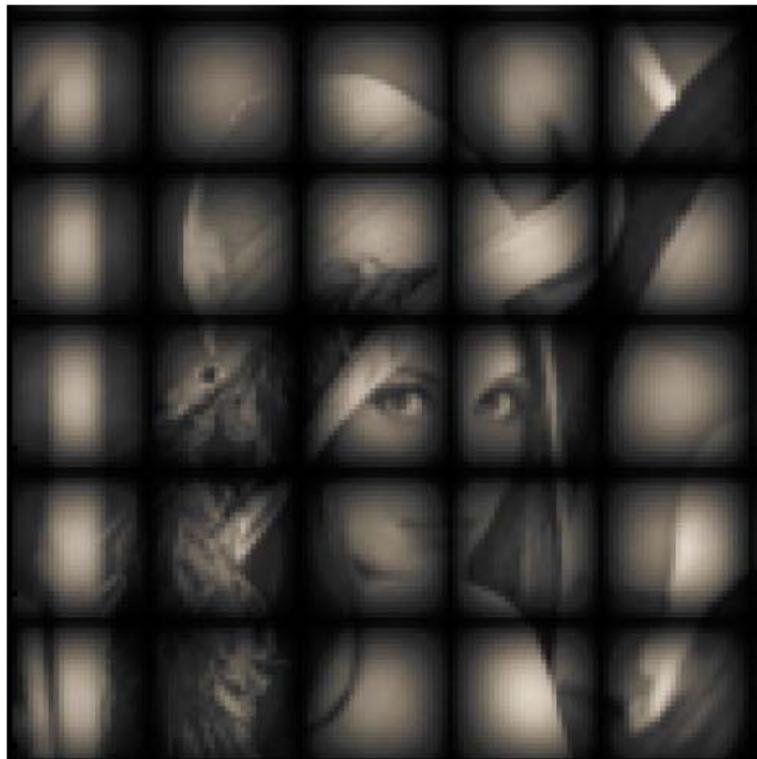
# 同态滤波

经过同态滤波处理后的图像，注意门内的细节



# 一个同态滤波更神奇的例子

---



Original



Filtered



# 要点总结

- 濾波：过滤频段（从频域看）；相关或卷积等领  
域运算（从空间域看）
- 空间域滤波：熟悉相关和卷积运算、模板；
- 频域滤波：
  - 熟悉傅里叶变换的原理；
  - 熟悉基本的滤波：低通、高通滤波
  - 熟悉低通滤波常用的三种模型及其原理，步骤和应用；
  - 熟悉高通滤波常用的三种模型及其原理，步骤和应用；
  - 熟悉同态滤波