

---

# 灰度变换与空间滤波

---

## 本章提要

- 空域图像增强 – 灰度变换
- 空域图像增强 – 直方图处理
- 卷积和空域滤波



# 空间域图像增强

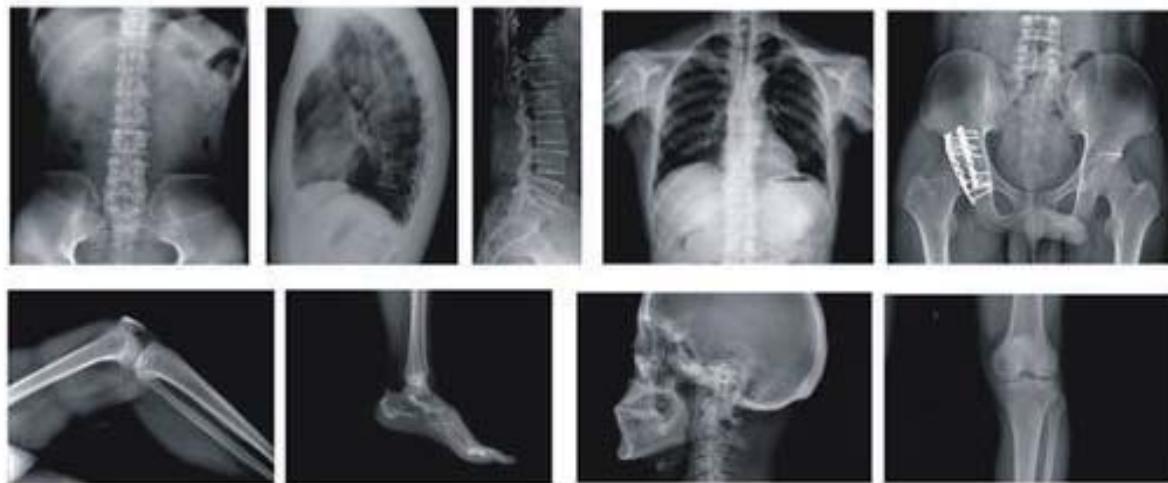
- 空间域图像增强背景知识
- 基本灰度变换
- 直方图处理



# 背景知识

- 增强的首要目标是处理图像，使其比原始图像更适合于**特定应用**

面向问题



X成像技术不  
适用于处理  
月球发回的  
照片



# 背景知识

- 两大类方法：
  - 空间域方法：图像平面本身，对图像的像素直接处理；
  - 频域方法：修改图像的频谱例如傅里叶变换为基础；

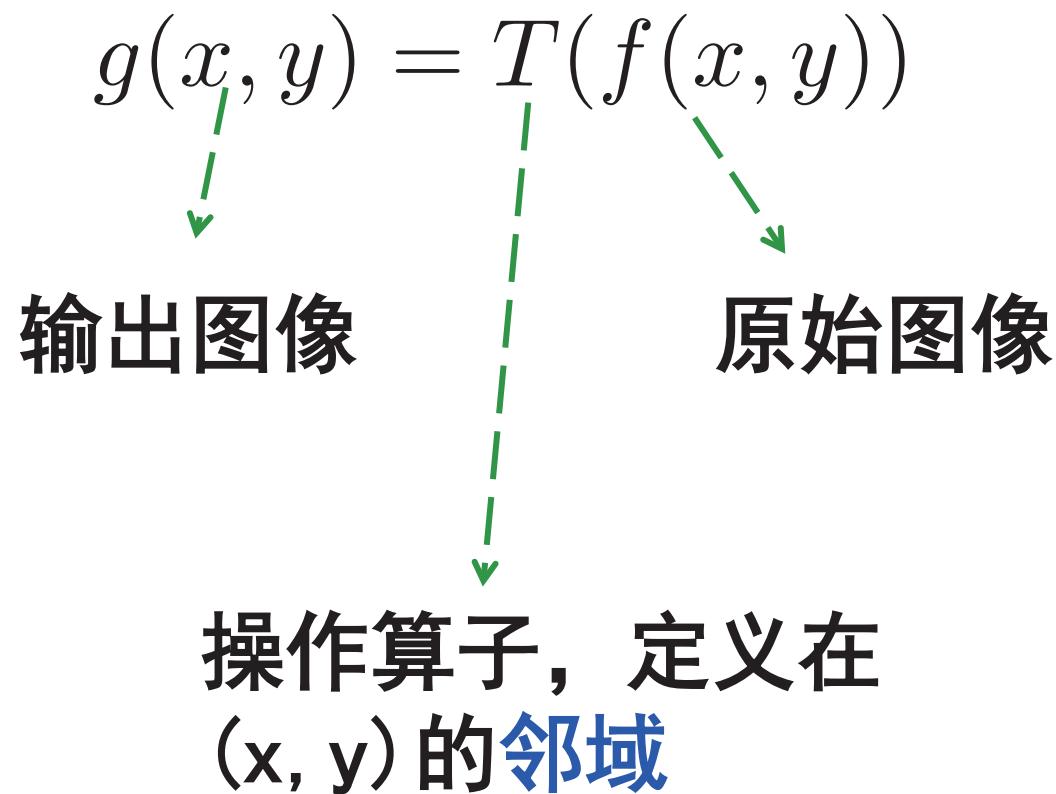
离散

连续



# 背景知识

- 空间域方法是直接对像素操作的过程



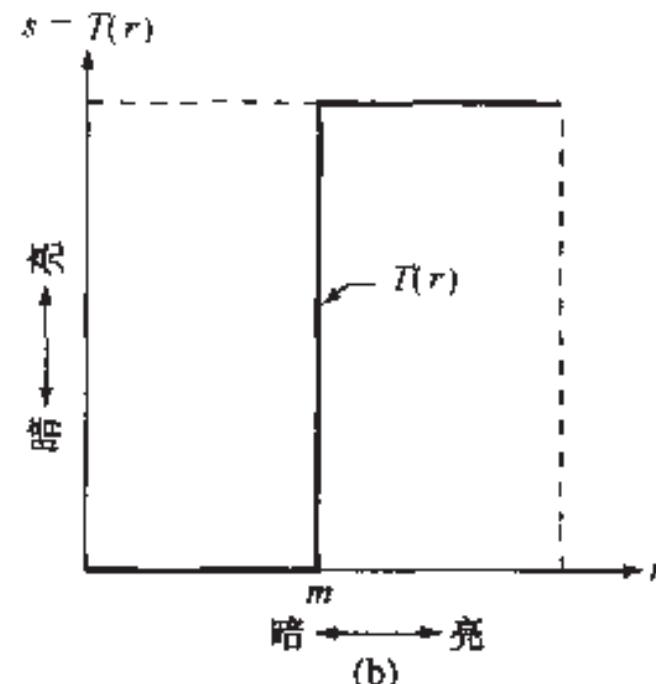
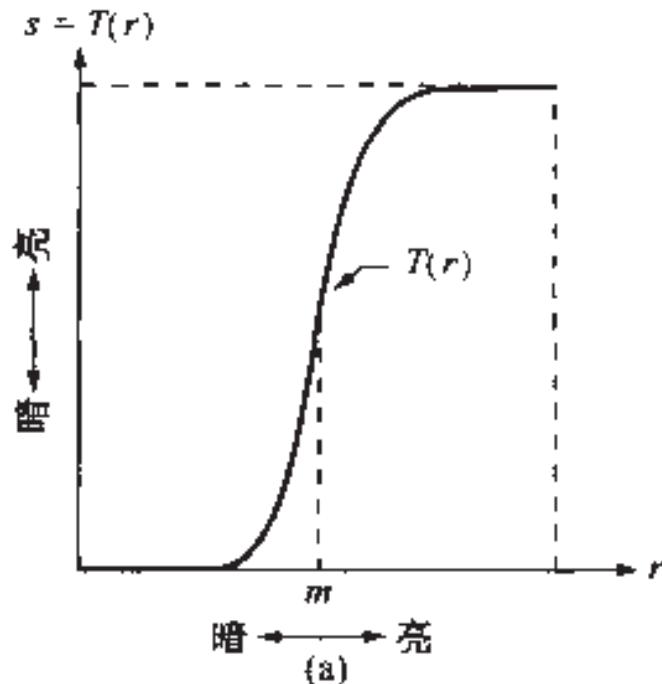


# 背景知识

邻域就是  $f(x, y)$

- 当邻域为本身时， $T$  操作变成灰度级变换函数（也叫做强度映射）

$$s = T(r)$$





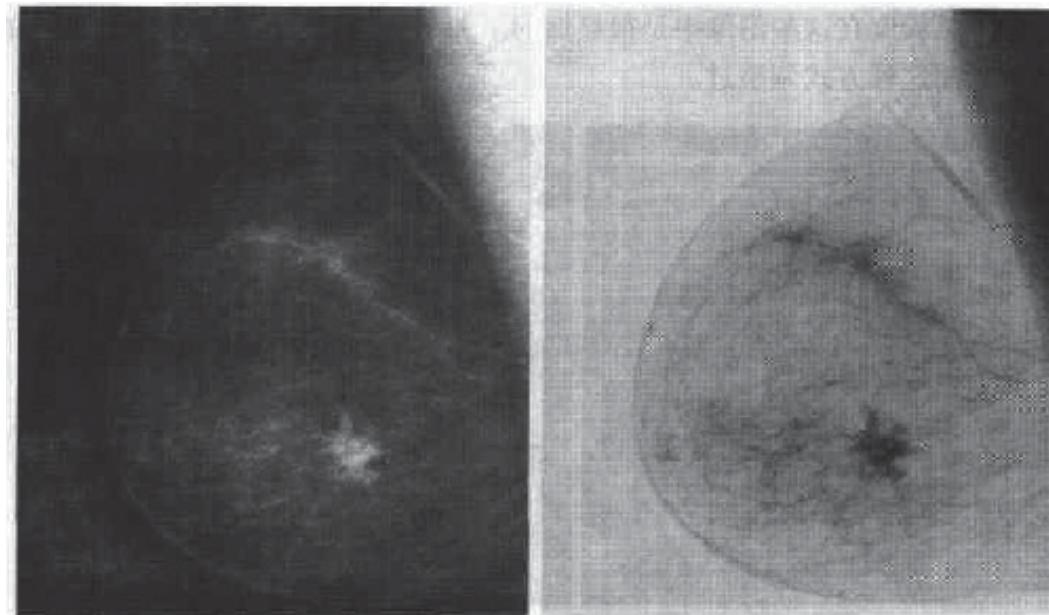
# 空间域图像增强

- 像素间的基本关系
- 空间域图像增强背景知识
- 基本灰度变换
- 直方图处理



# 图像反转

- 公式： $S = L - 1 - r$        $L = 2^b$



反转前

反转后

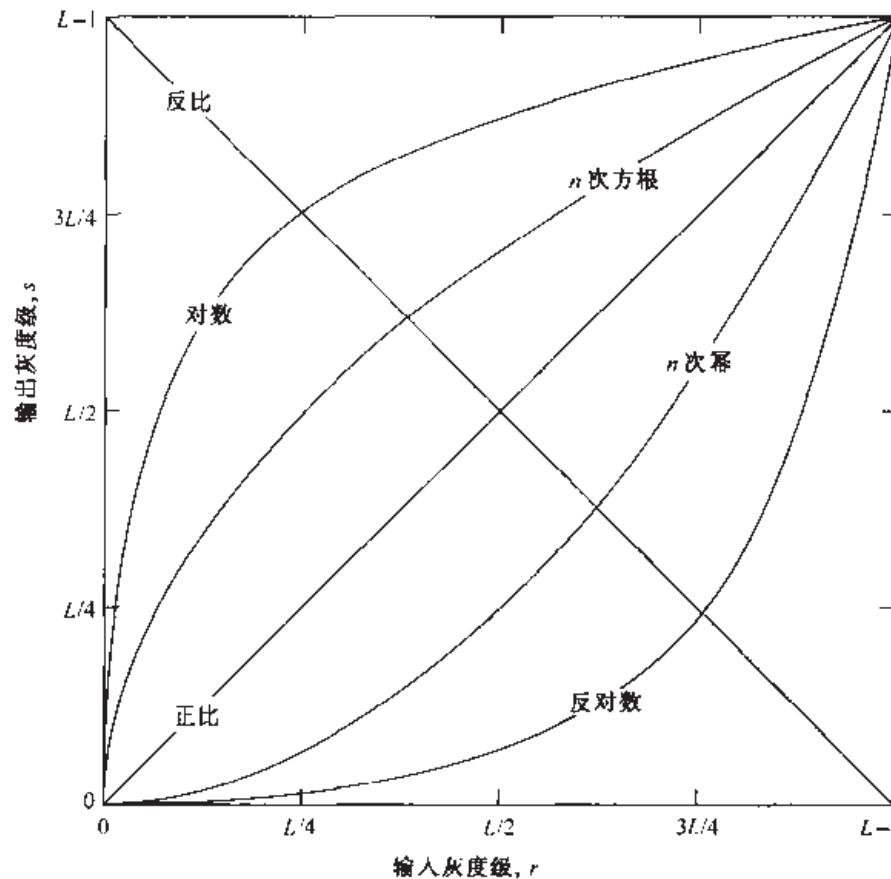
反转后可以看到有一小块病变。

尽管两幅图像本质上内容一样，但是分析图像的难易变了



# 对数变换

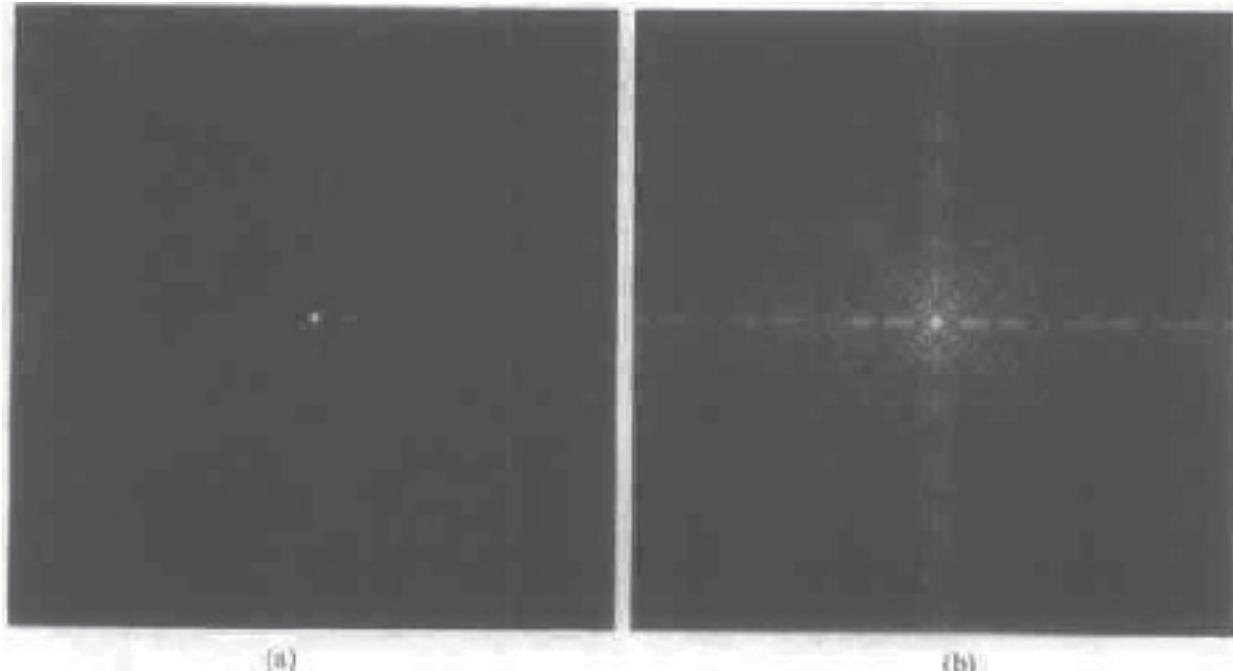
- 公式  $s = c \log(1 + r)$





# 对数变换

- 公式  $s = c \log(1 + r)$



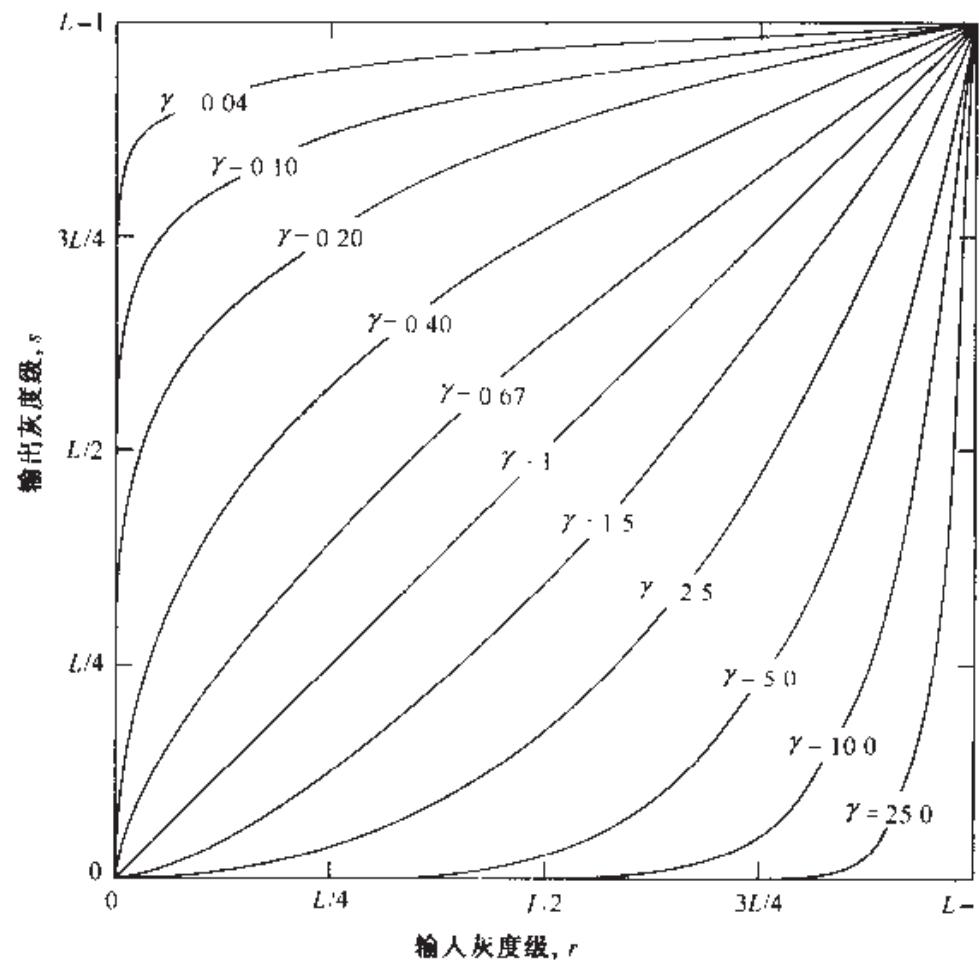
变换后，看  
到了图像更  
多的细节



# 幂次变换

- 公式

$$s = cr^\gamma$$



由于伽马参数对最后效果至关重要，因为幂次变换也称为伽马变换

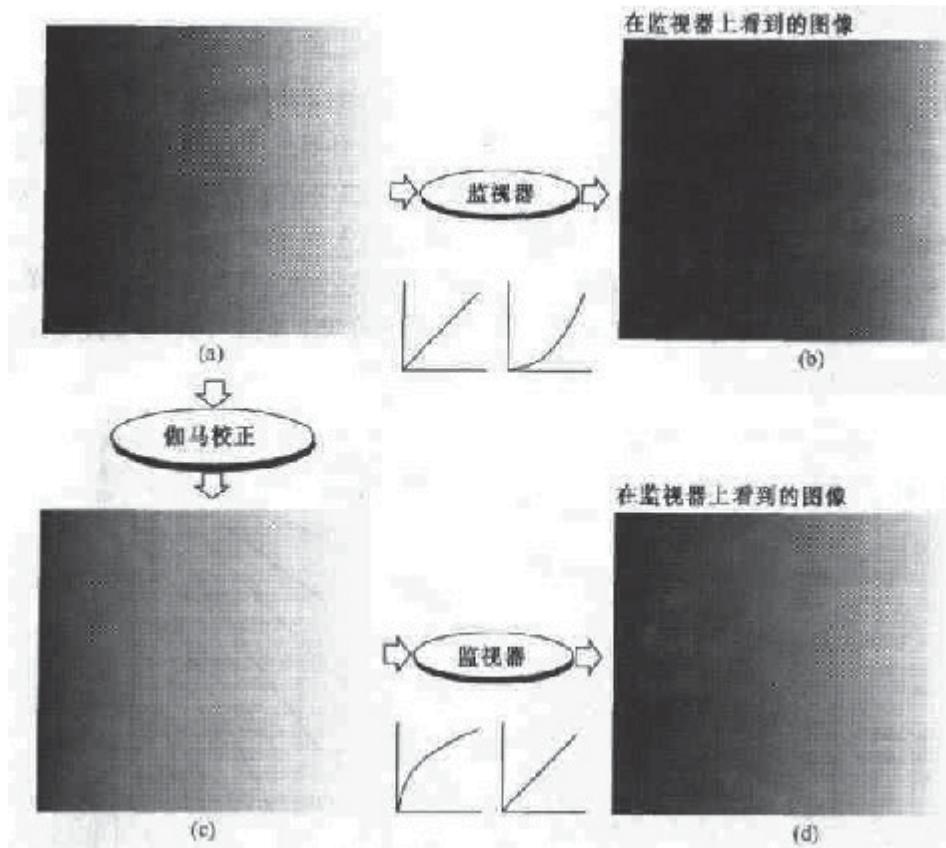


# 幂次变换

- 公式

$$s = cr^\gamma$$

$$\gamma = 2.5$$



经伽马变换  
后，图像变  
得更接近真  
实值



伽马参数分别取  
0.6, 0.4, 0.3

伽马变换可用  
于增强对比度

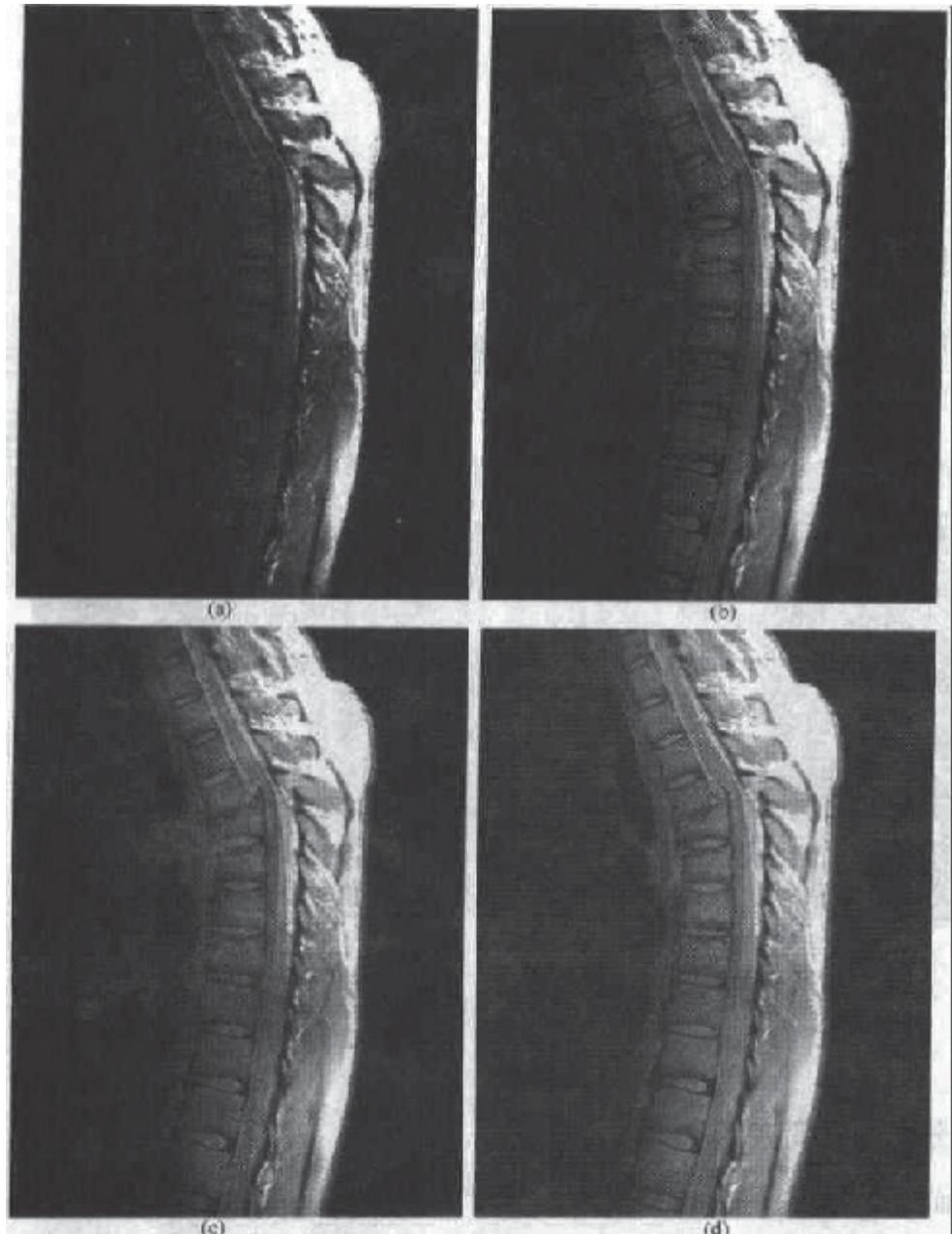


图 3.8 (a)人的脊椎骨折的核磁共振图像,(b)~(d)应用式(3.2.3)并且  $c = 1, \gamma$  分别等于0.6, 0.4, 0.3时变换的结果(这个例子的原图像由Vanderbilt大学医学中心放射学和辐射学系的David R. Pickens博士提供)



# 思考

- 如果你不想拉伸整个图像的对比度，你只想拉伸某些灰度级上的对比度，怎么办？





# 分段线性函数

- 最简单的分段线性函数就是对比拉伸变换

考虑采用分段变换函数

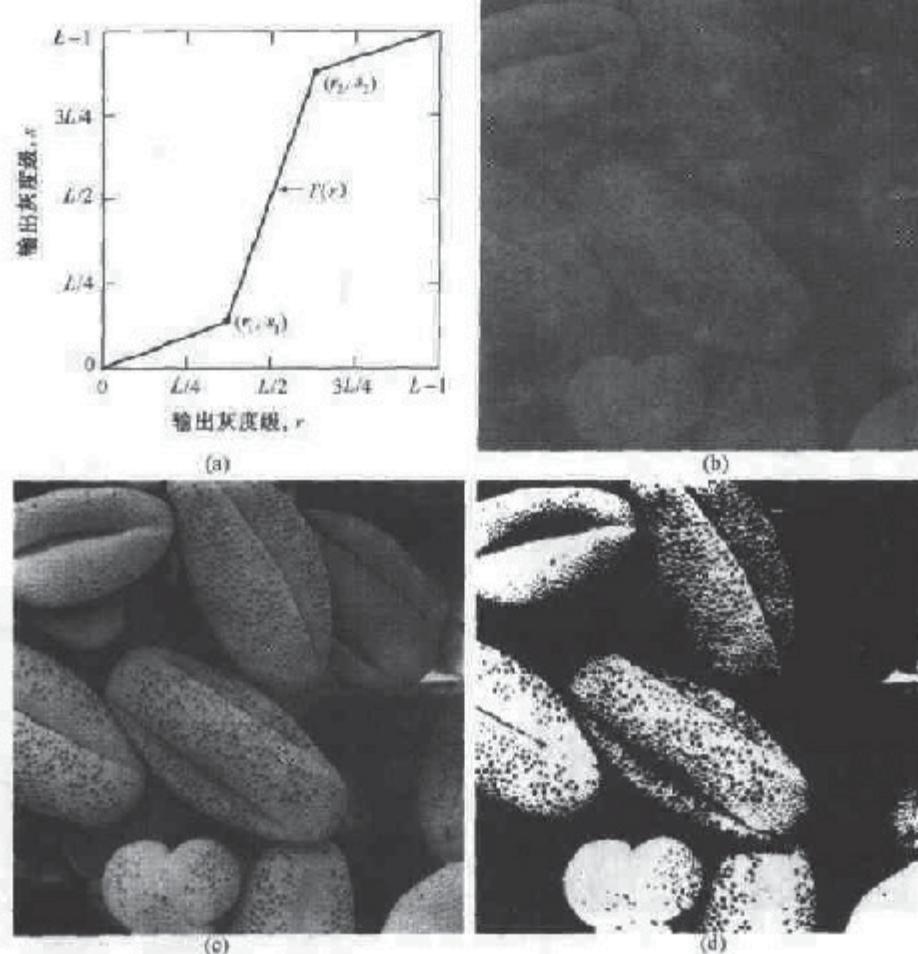


图 3.10 对比度拉伸。(a)变换函数的形式,(b)低对比度图像,(c)对比度拉伸的结果,(d)门限化的结果(原图像由澳大利亚国立大学生物科学研究院Roger Heady博士提供)



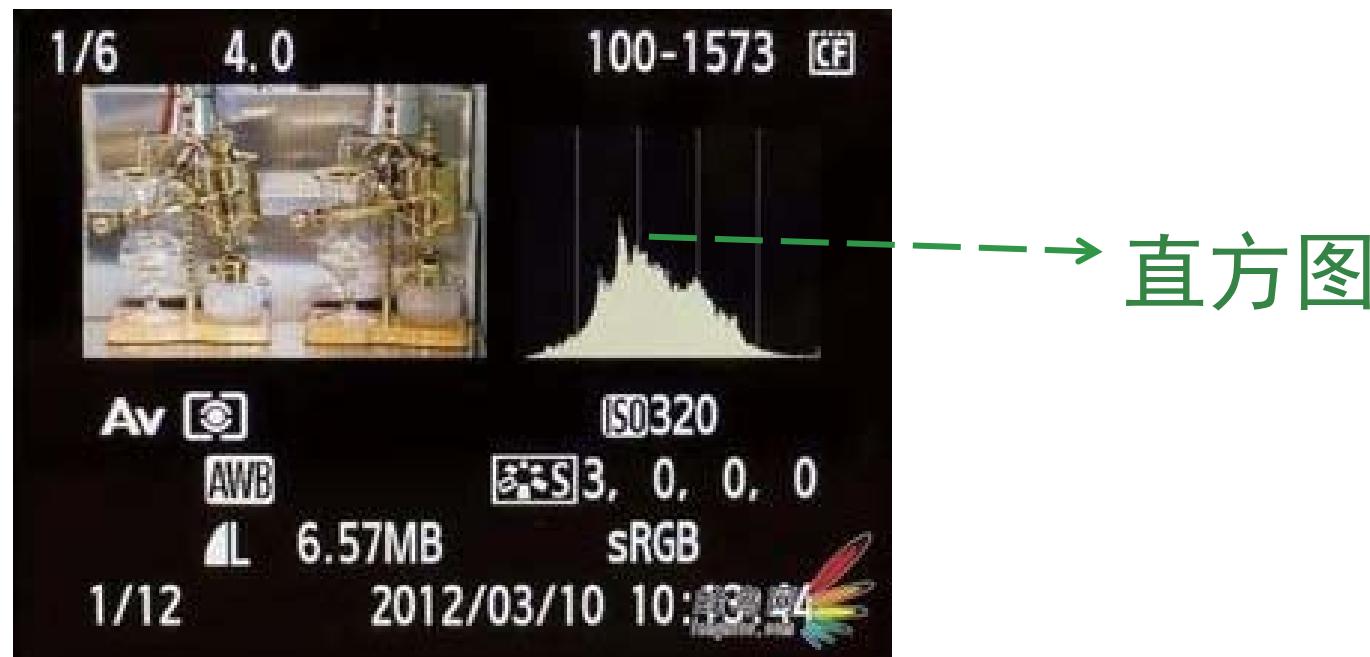
# 空间域图像增强

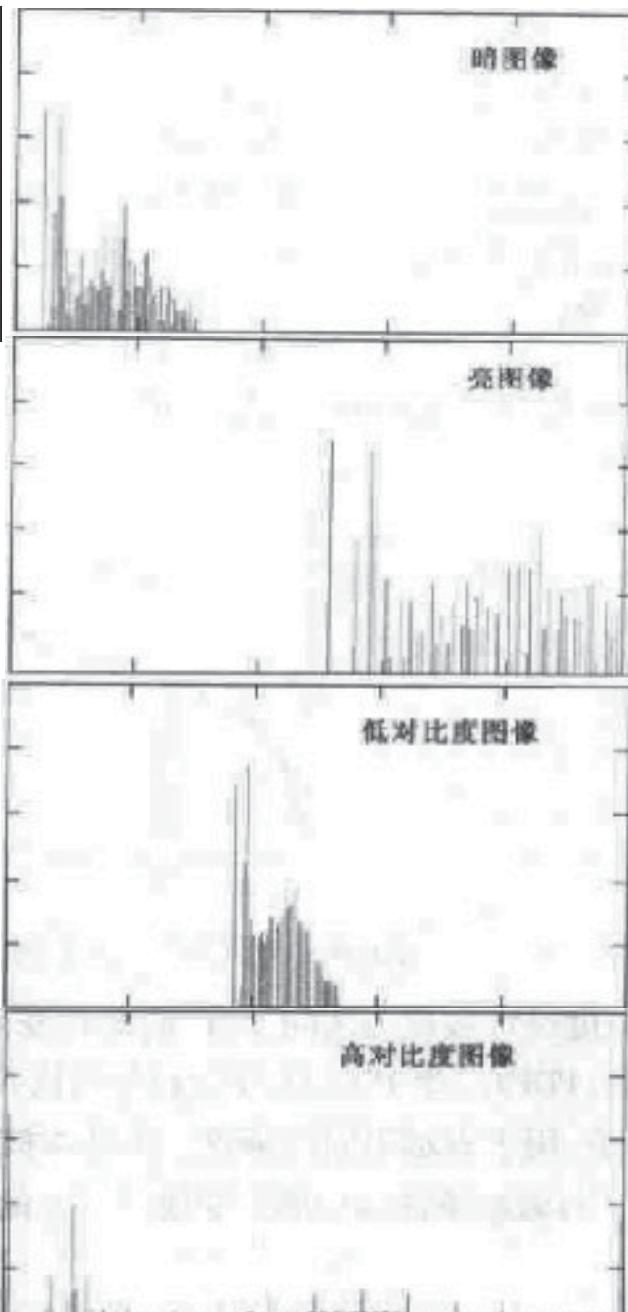
- 像素间的基本关系
- 空间域图像增强背景知识
- 基本灰度变换
- 直方图处理



# 灰度直方图

- 图像中每种灰度级的像素个数
- 灰度直方图的横坐标是灰度级，纵坐标表示该灰度级出现的频率。





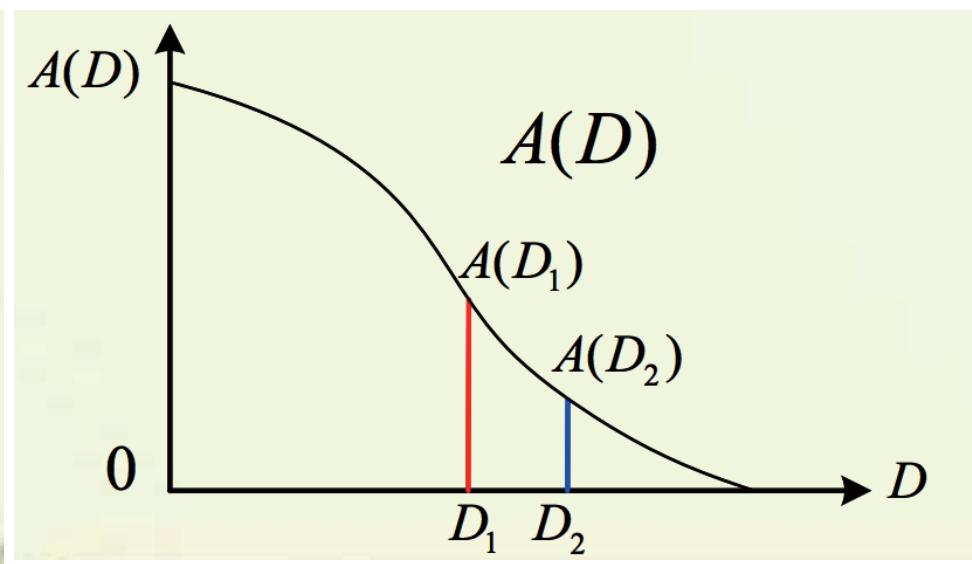
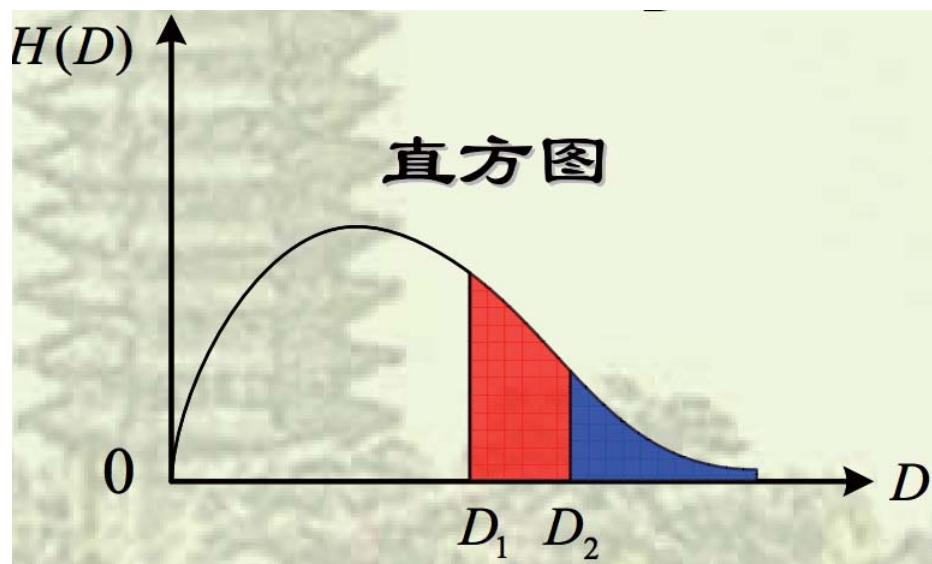
不同的直方图下，图像效果的直观感受



# 阈值面积函数A(D)

- 连续图像中具有灰度级D的所有轮廓线所包围的面积

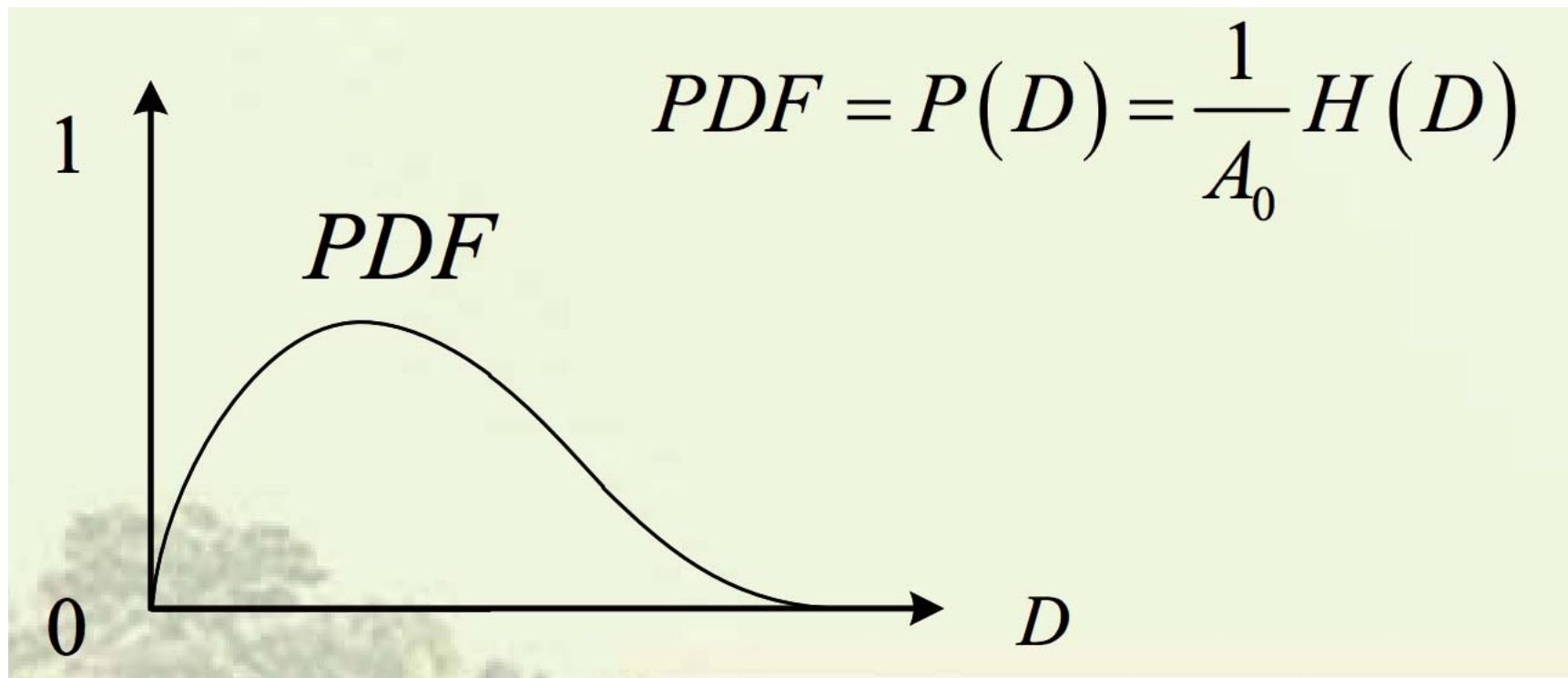
$$A(D) = \int_D^{\infty} H(p)dp$$





# 概率密度函数 (PDF)

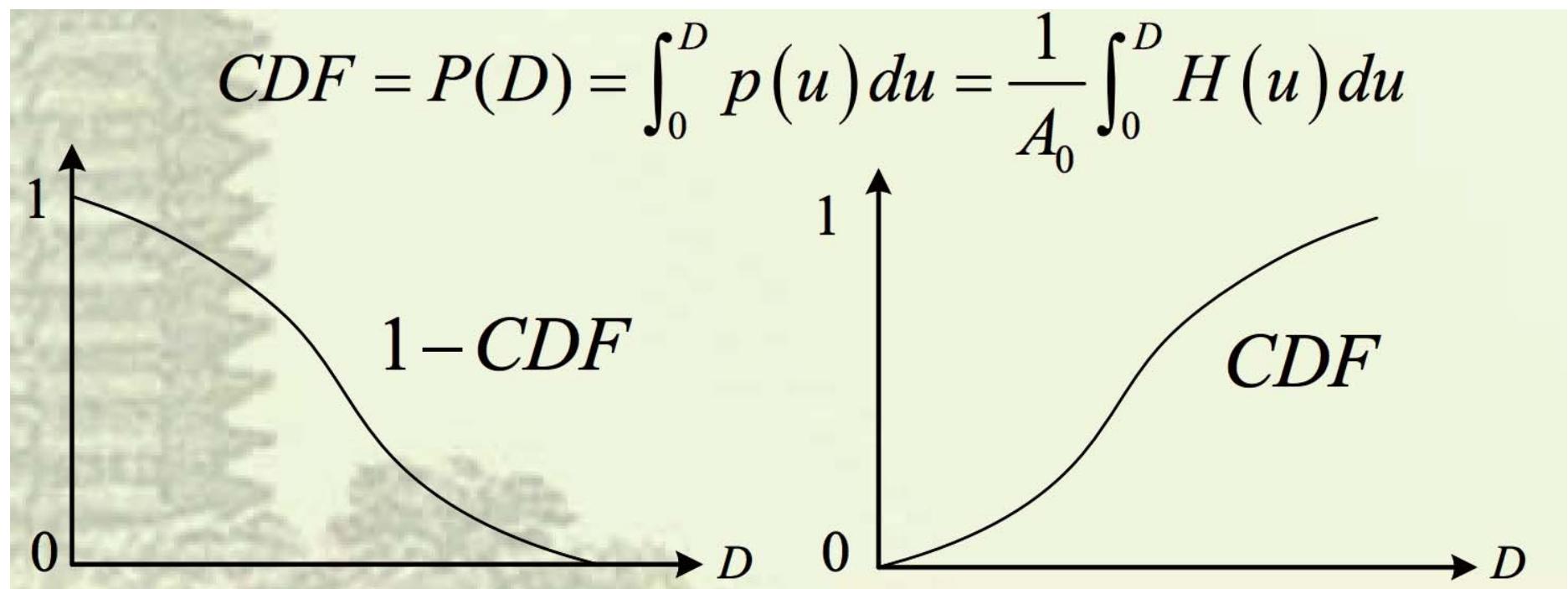
- 归一化到单位面积的直方图





# 累计分布函数 (CDF)

- 概率密度函数面积归一化的阈值面积函数





# 定义

- 严格数学定义

$$H(D) = \lim_{\Delta D \rightarrow 0} \frac{A(D) - A(D + \Delta D)}{D - (D + \Delta D)} = \lim_{\Delta D \rightarrow 0} \frac{A(D) - A(D + \Delta D)}{-\Delta D} = \boxed{-\frac{d}{dD} A(D)}$$

- 数字图像时，简化为

$$H(D) = A(D) - A(D + 1)$$



# 实现

- 图像具有 $L$ （比如 $L=256$ ）级灰度，大小为 $M \times N$ 的灰度图像 $f(x,y)$ 的灰度直方图 $hist[0 \dots L-1]$ 的算法
  1. 初始化 $hist[k]=0; k=0, \dots, L-1$
  2. 统计 $hist[f(x,y)]++; x=0, \dots, M-1, y =0, \dots, N-1$
  3. 归一化 $hist[f(x,y)]/(M \times N)$



# 应用一

- 图像快速检测?

可以利用灰度直方图来判断  
一幅图像是否合理的利用了  
全部被允许的灰度级范围，  
从而及早发现数字化中出现  
的问题

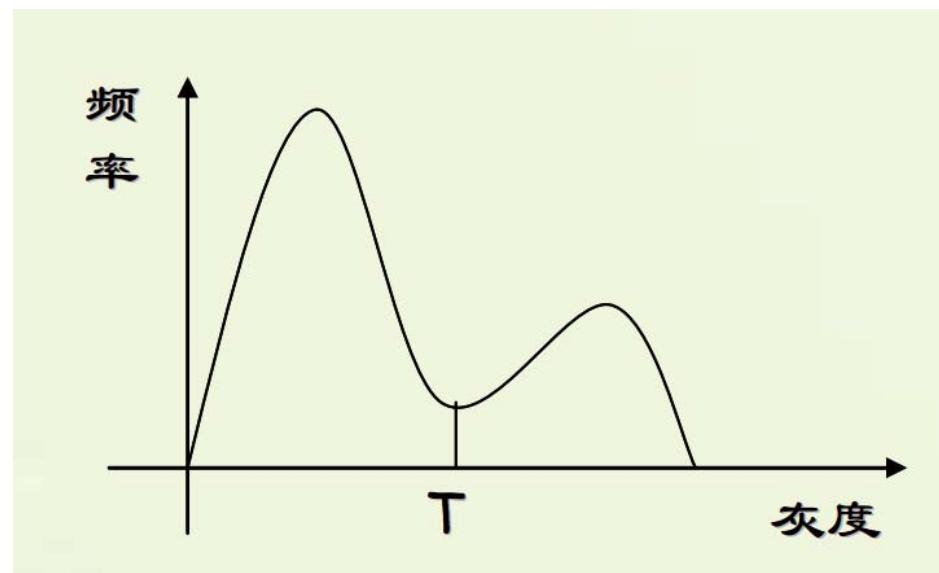




## 应用二

- 分割前景背景

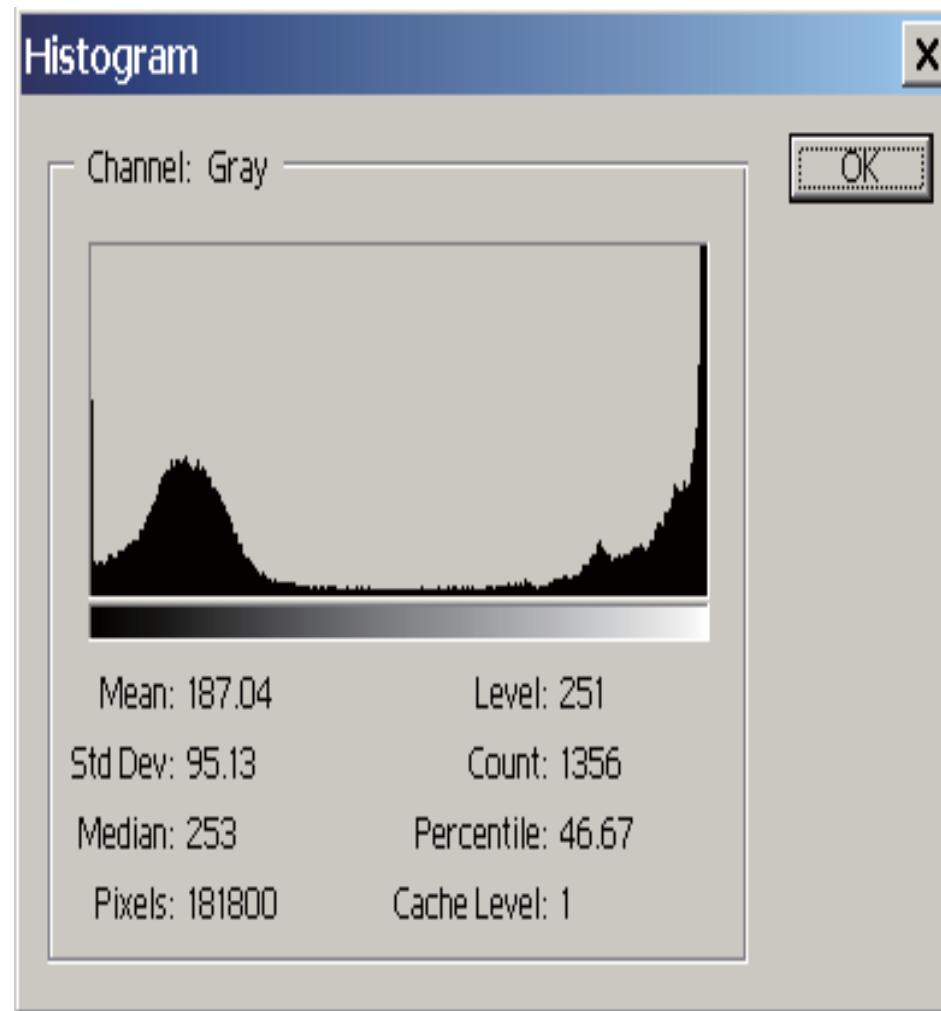
双峰直方图



以直方图两峰之间的谷地 $T$ 为阈值来确定边界，可把图像分为前景背景两部分



# 例子





# 细节

- 灰度级从115变化到144时，像素为1850，仅占图像总面积的1%。
- 因此把阈值取在115与144之间，比如130
- 如果阈值对应于直方图的谷，阈值从 $T$ 增加到 $T + \Delta T$ ，图像变化很小



# 应用三

- 面积计算

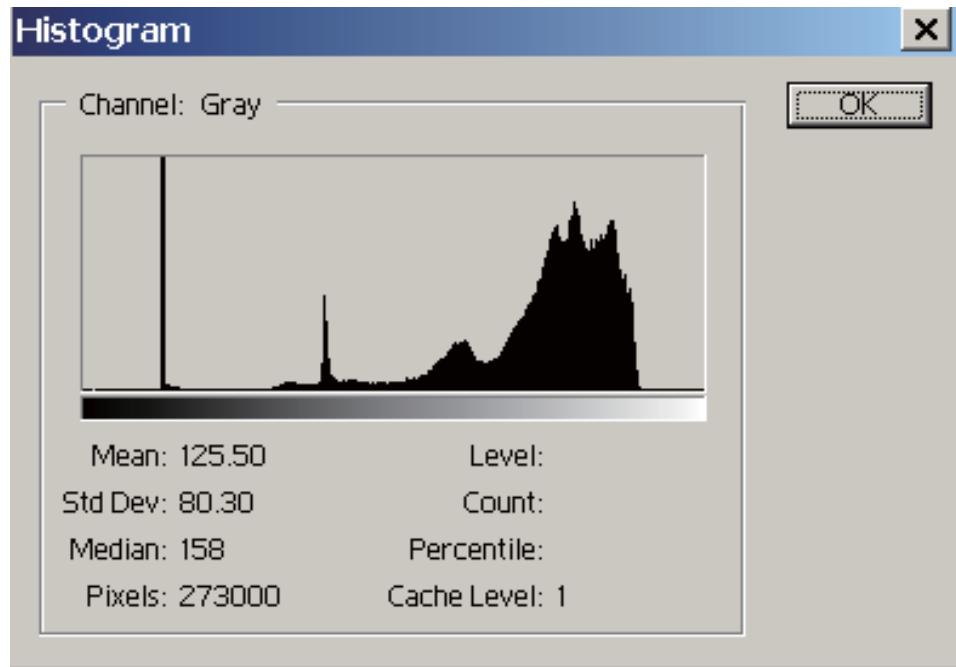


请计算鸭子占整个图像的面积比例？



# 观察

- 图像背景灰度大体均匀一致，且背景与物体对比度很强



公式：

$$\int_{D_1}^{\infty} H(D)dD = \text{物体的面积}$$



# 结果

- 从灰度54到255级

$$\int_{54}^{255} H(D)dD = 163001$$

- 总像素数500像素\*546像素=273000
- 约占图像总面积的60%



# 其它应用

- 光密度：反映图像面积和密度组合的统计量
- 计算公式

$$IOD = \int_0^a \int_0^b D(x, y) dx dy$$

x是图象横坐标，  $\text{MAX}(x) = a$ ;

y是图象纵坐标，  $\text{MAX}(y) = b$ ;



# 推导

- 两种计算方式

$$IOD = \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NS} D(i, j)$$

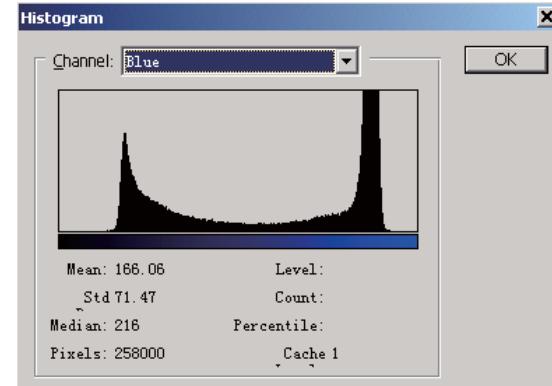
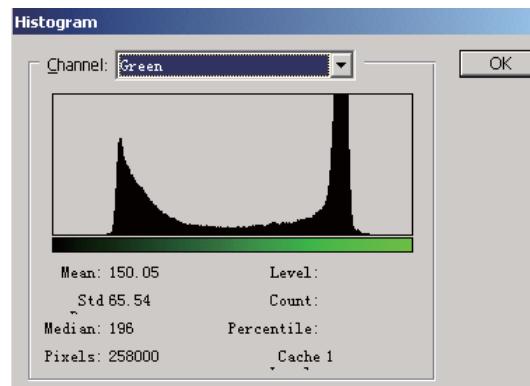
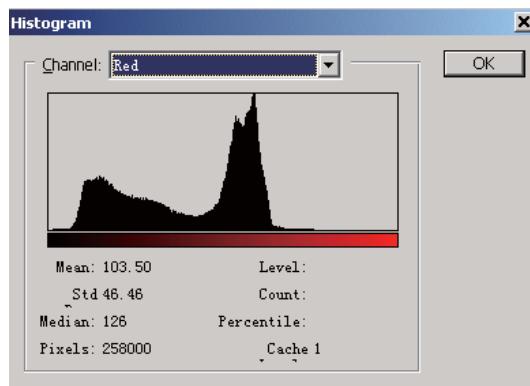
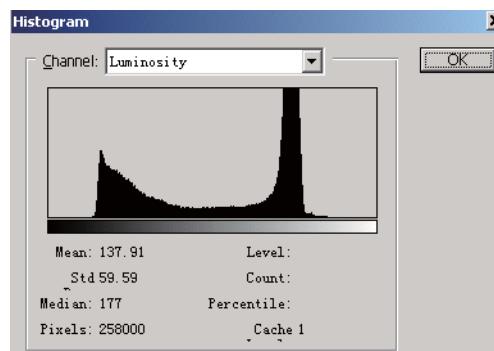
$$IOD = \sum_{k=0}^{255} k H(k)$$

IOD可以通过灰度直方图算出来，节省了计算开销



# 其它直方图

## 彩色图像





# 其它直方图

- 二维直方图
  - 红蓝直方图
  - 其他二维直方图
    - 灰度-区域均值
    - 灰度-区域形状
    - 灰度-梯度

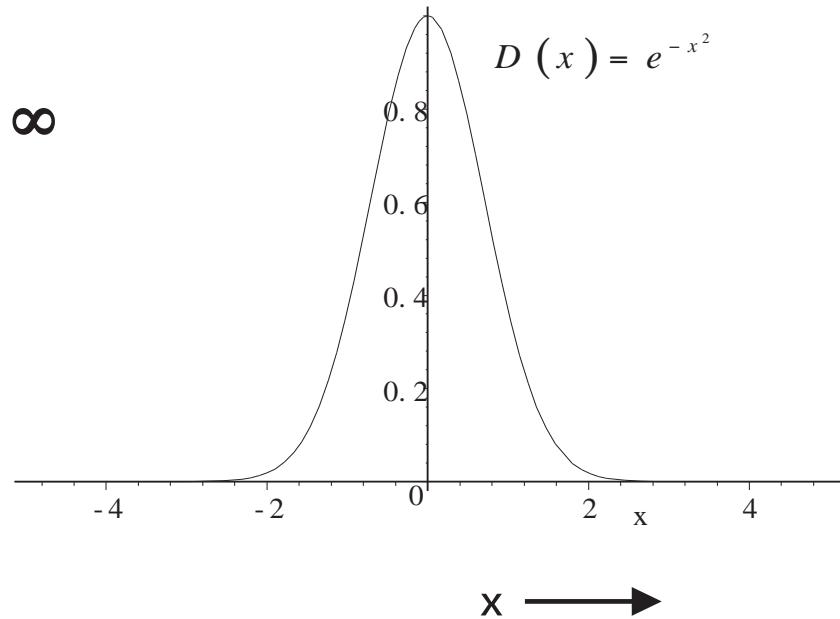
准确的说法：共生矩阵，  
例如： $H_r=m$ ,  $H_b=n$   
像素对的个数



# 连续图像的直方图计算

- 给定一个高斯分布信号，如何计算它的直方图？

$$D(x) = e^{-x^2} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$





# 步骤

- 计算出面积函数

$$x(D) = 2\sqrt{-\ln(D)}$$

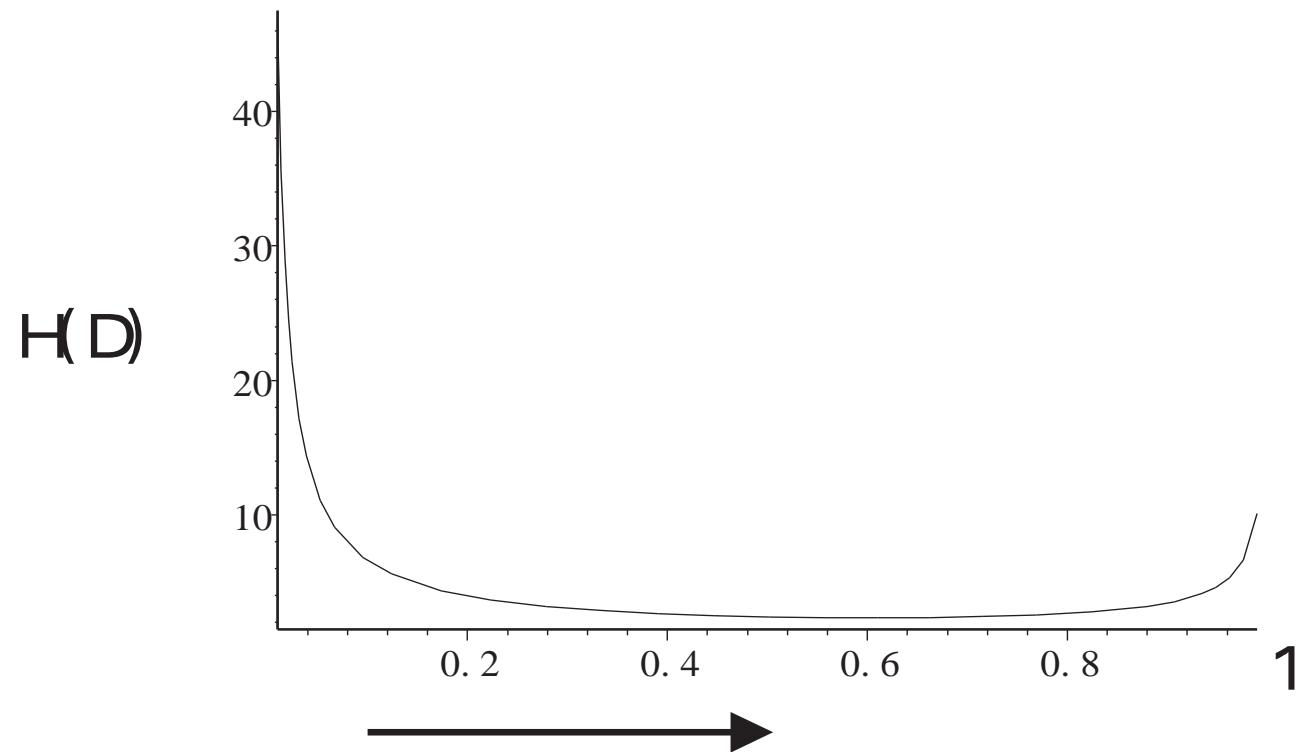
- 求导得到直方图

$$H(D) = -\frac{d}{dD} x(D) = \frac{1}{D\sqrt{-\ln(D)}}$$



# 输出

- 求得的直方图





# 空间域图像增强

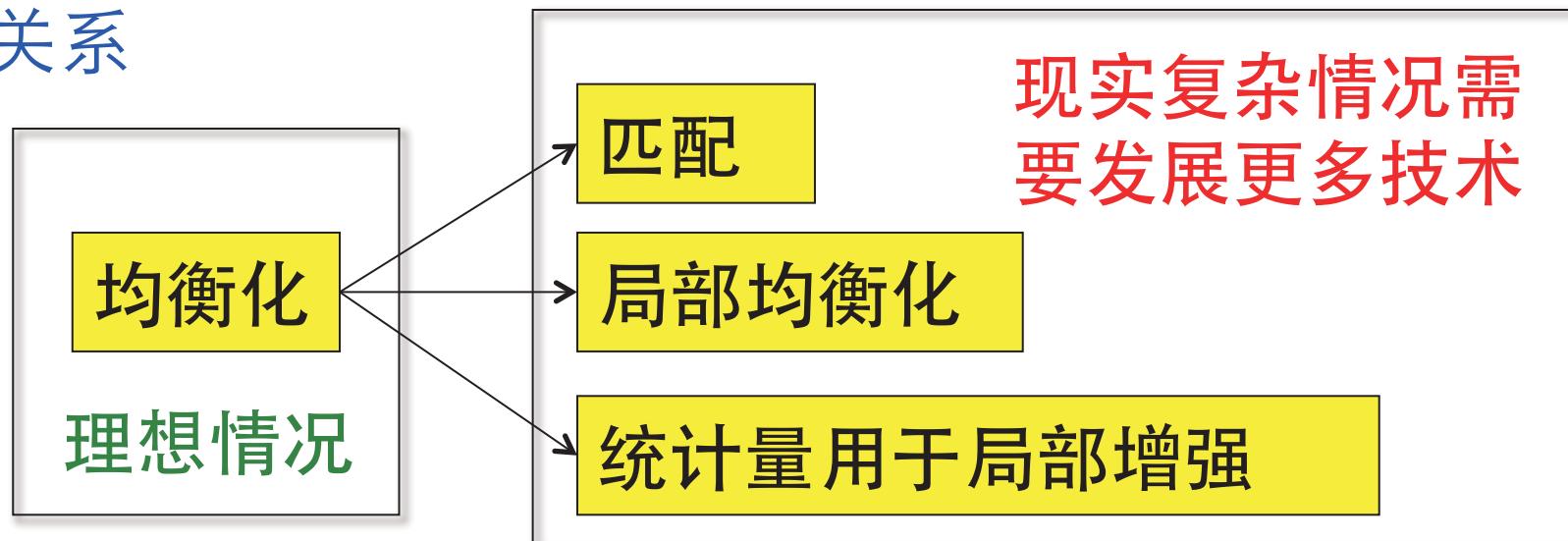
- 直方图处理（进阶，稍难）
- 用算术/逻辑操作增强（较简单）



# 直方图处理

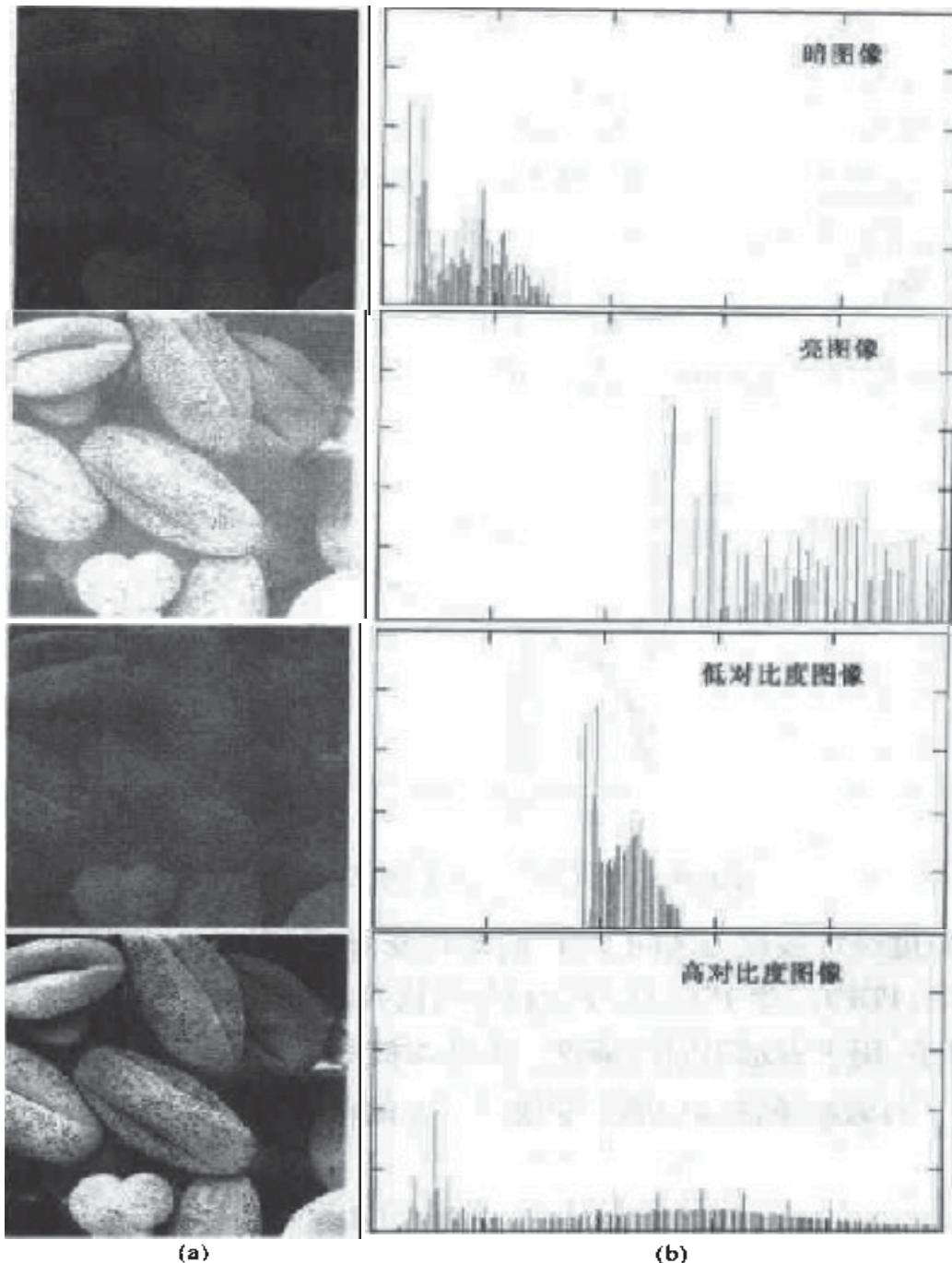
- 直方图均衡化
- 直方图匹配
- 局部直方图均衡化
- 直方图统计量用于局部图像增强

逻辑关系





# 回顾



不同的直方图  
，图像效果的  
直观感受不同

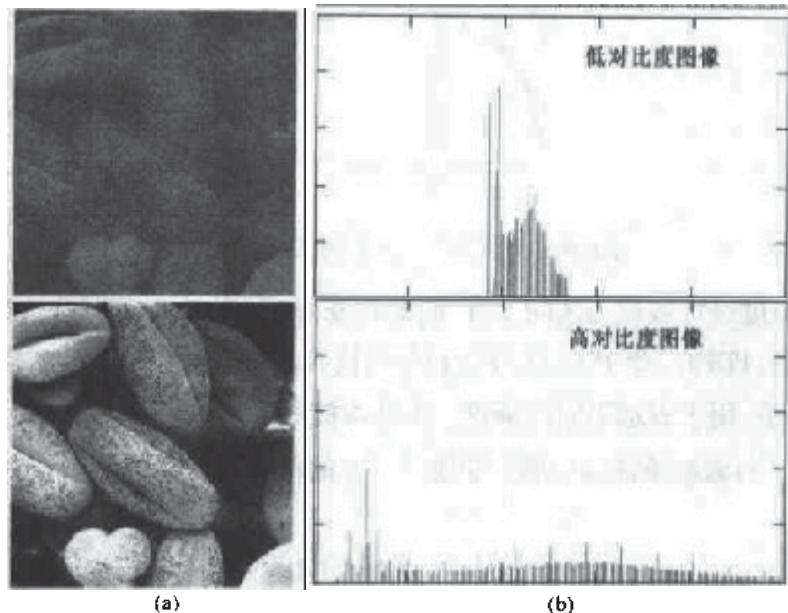
什么样的的直方  
图有利于图像增  
强呢？





# 直方图均衡化

直方图呈均匀分布时，对比度会有明显增强。  
通过灰度变换函数，将原图像直方图的分布均  
衡化，这一过程称为直方图均衡化。

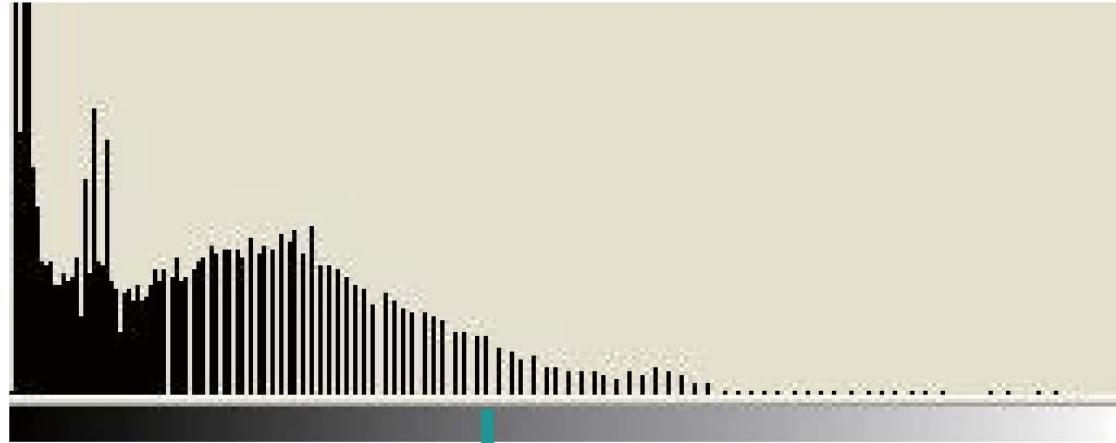


如何找到相应的  
灰度变换函数呢？

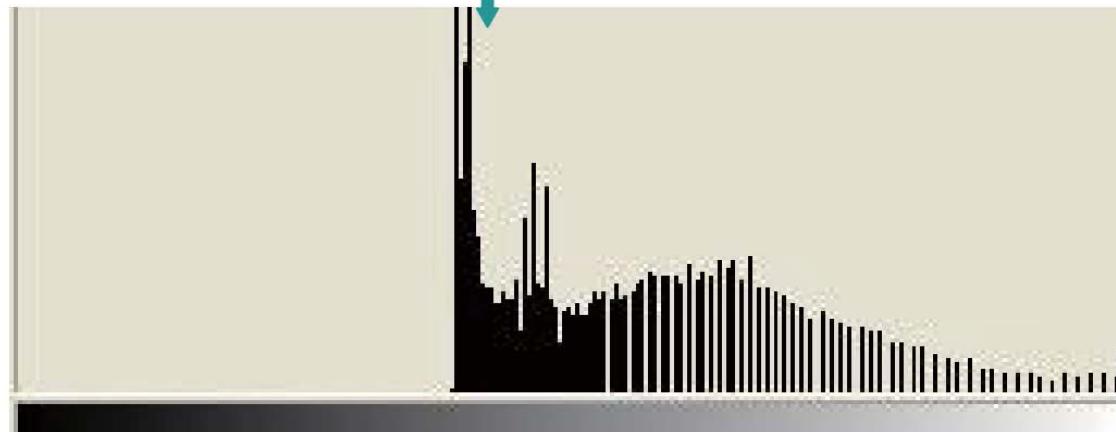




# 简单的例子



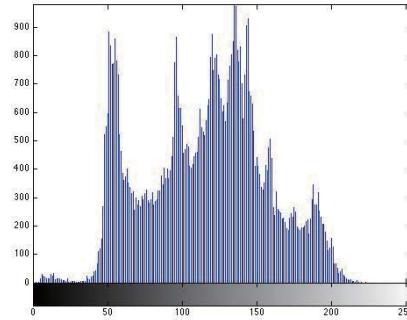
$$D_B = D_A + 1000$$



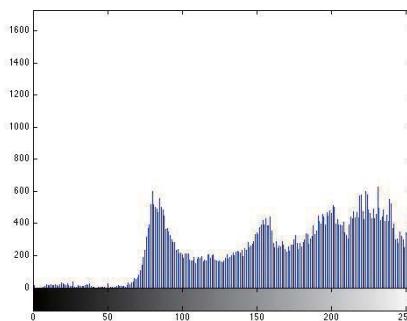


# 稍复杂一点的例子

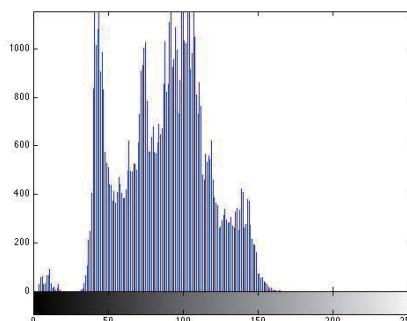
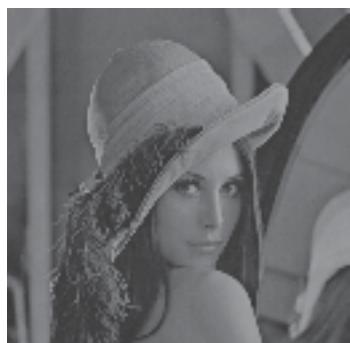
原图



$$D_B = 1.5 \times D_A$$



$$D_B = 0.8 \times D_A$$



线性运算：

$$\begin{aligned} D_B &= T(D_A) \\ &= a \times D_A + b \end{aligned}$$



# 灰度变换函数与直方图

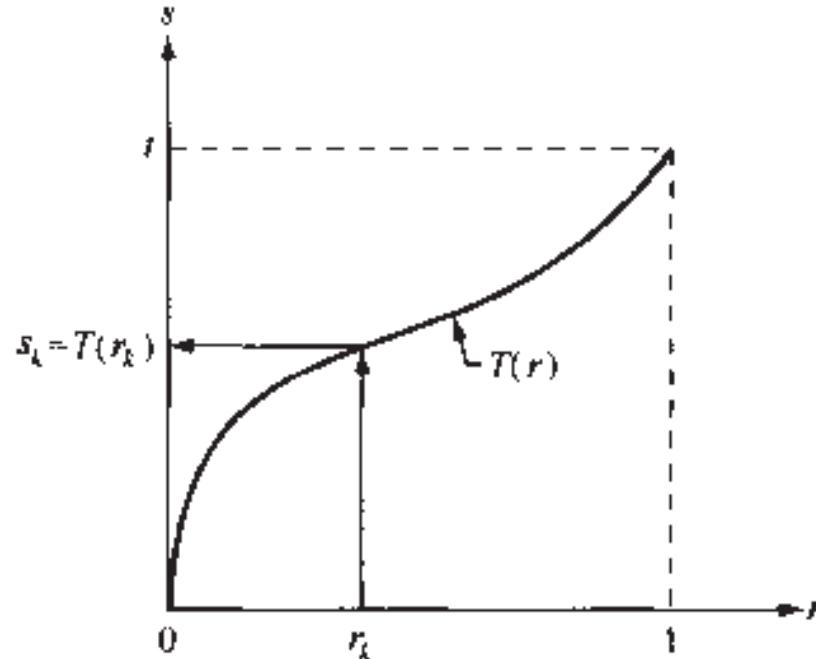
假设有一幅输入图像A，经过灰度变换函数(GST)，产生了输出图像B

讨论一种简单情况：单调灰度变换函数





# 单调函数



- 考虑连续函数并让变量 $r$ 代表待增强图像的灰度级。假设 $r$ 被归一化到区间 $[0,1]$ 。
- 灰度变换函数

$$s = T(r), 0 \leq r \leq 1$$

重要性质：存在反函数

$$r = T^{-1}(s), 0 \leq s \leq 1$$

(a)  $T(r)$ 在区间  $0 \leq r \leq 1$  中为单值且单调递增

(b) 当  $0 \leq r \leq 1$  时,  $0 \leq T(r) \leq 1$

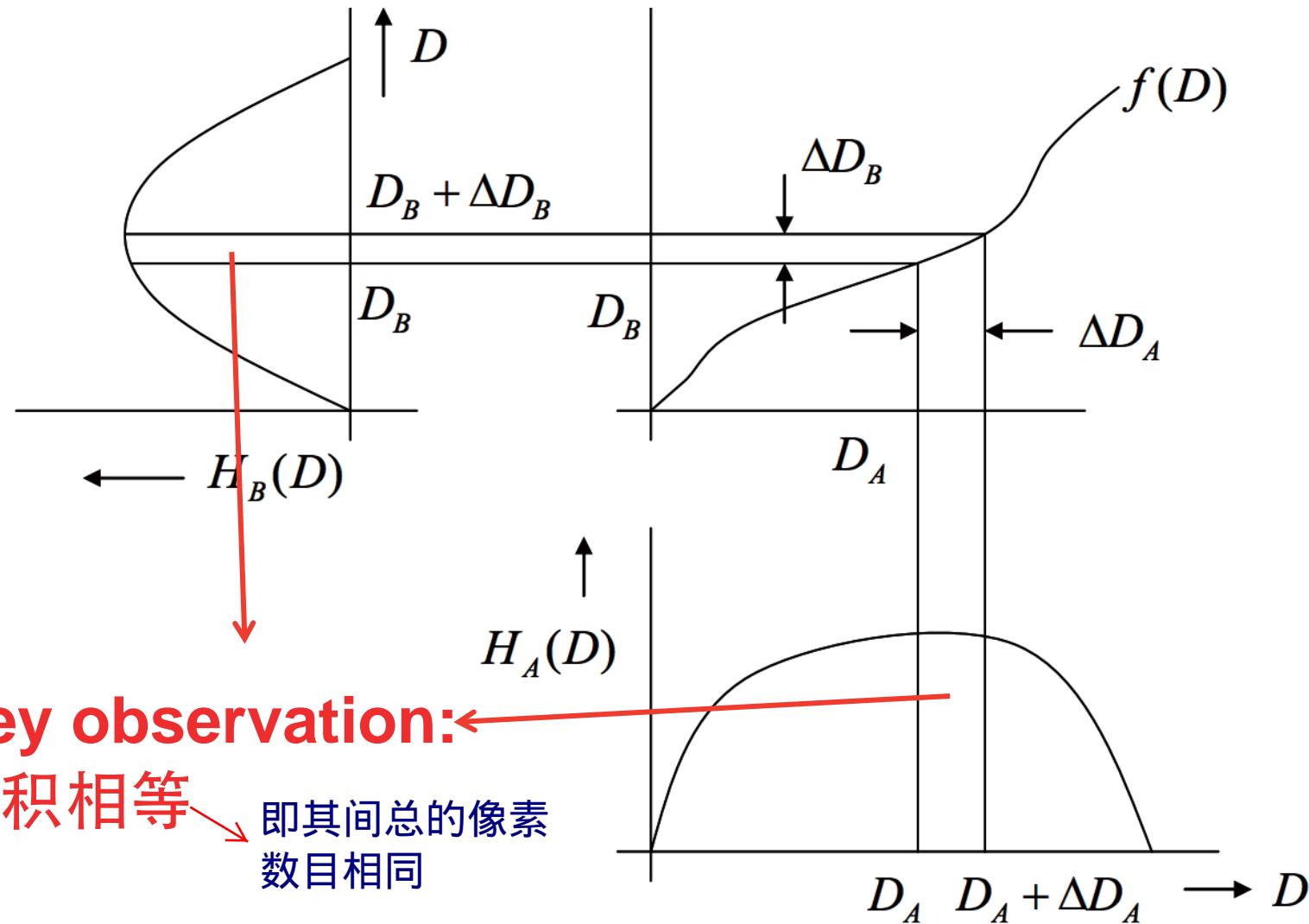
说明：

- 1)  $r$ 和 $s$ 被归一化
- 2)  $r$ 越大—》  $s$ 越大



# 直观示意图

怎么求 $H_B(D)$ 的直方图?



# 推导

注： $D_B = f(D_A)$ ,  $H_A(D_A) = H_B(D_B)$ ,  
故有以上的key observation



## ● 第一步

$$\int_{D_B}^{D_B + \Delta D_B} H_B(D) dD = \int_{D_A}^{D_A + \Delta D_A} H_A(D) dD$$

$$H_B(D_B) \Delta D_B = H_A(D_A) \Delta D_A$$

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{\frac{\Delta D_B}{\Delta D_A}}$$

由于面积相等

把积分近似掉

改写



# 推导

- 第二步：得到通项公式

注意： $D_B = f(D_A)$

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{dD_B \diagup dD_A} = \frac{H_A[f^{-1}(D_B)]}{f'[f^{-1}(D_B)]}$$

where  $f' = \frac{df}{dD}$

**Key:**  $\frac{H_A(D_A)}{dD_B \diagup dD_A} = \frac{H_A(D_A)}{\left( \frac{d}{dD_A} \right) f(D_A)}$  以及利用反函数



# 小测试

线性运算

假定线性灰度变换模型

$$D_B = T(D_A) = a \times D_A + b$$

计算  $H_A(D)$  经线性运算后的直方图  $H_B(D)$ :

$$D_A = f^{-1}(D_B) = \frac{(D_B - b)}{a}$$
$$H_B(D) = \frac{1}{a} H_A\left(\frac{D - b}{a}\right) = H_A(f^{-1}(D)) / f'$$

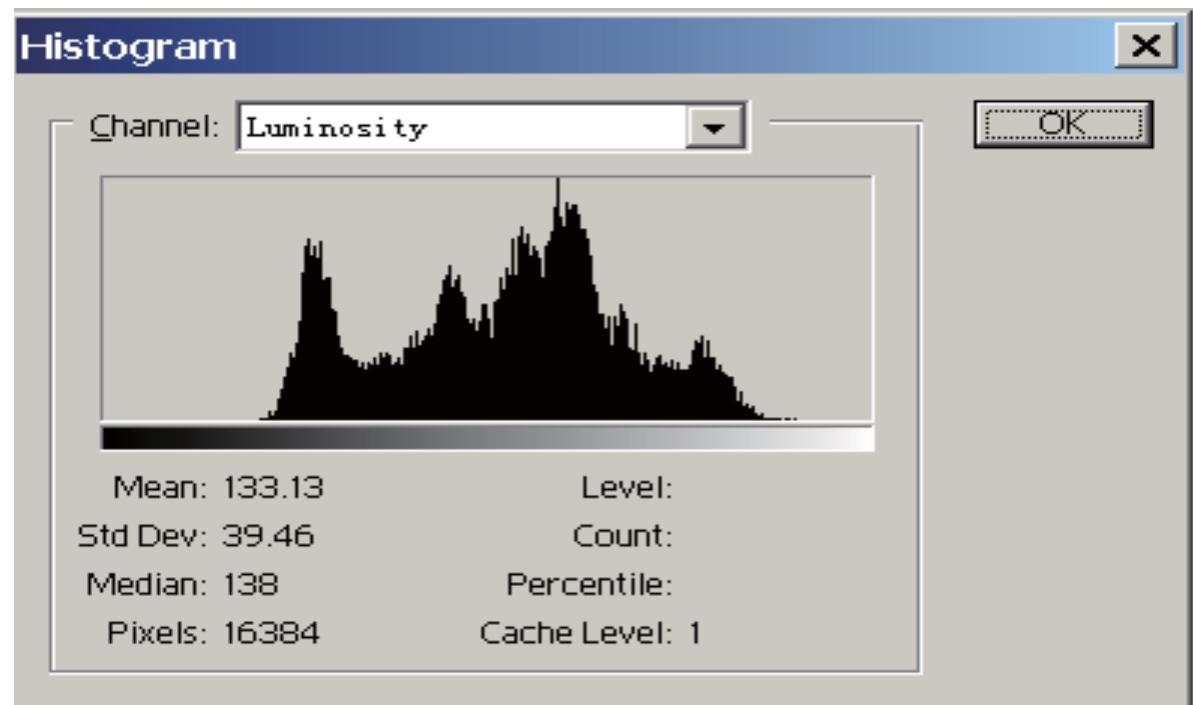
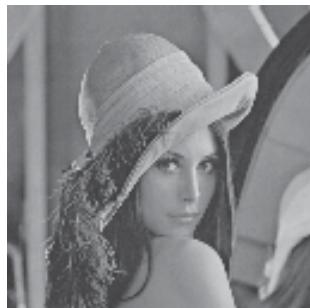
$(D-b)/a$   
 $a$

问题1：给定  $H_A(D)$  和灰度变换  $f(D)$ ，求  $H_B(D)$



# 举例

$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$



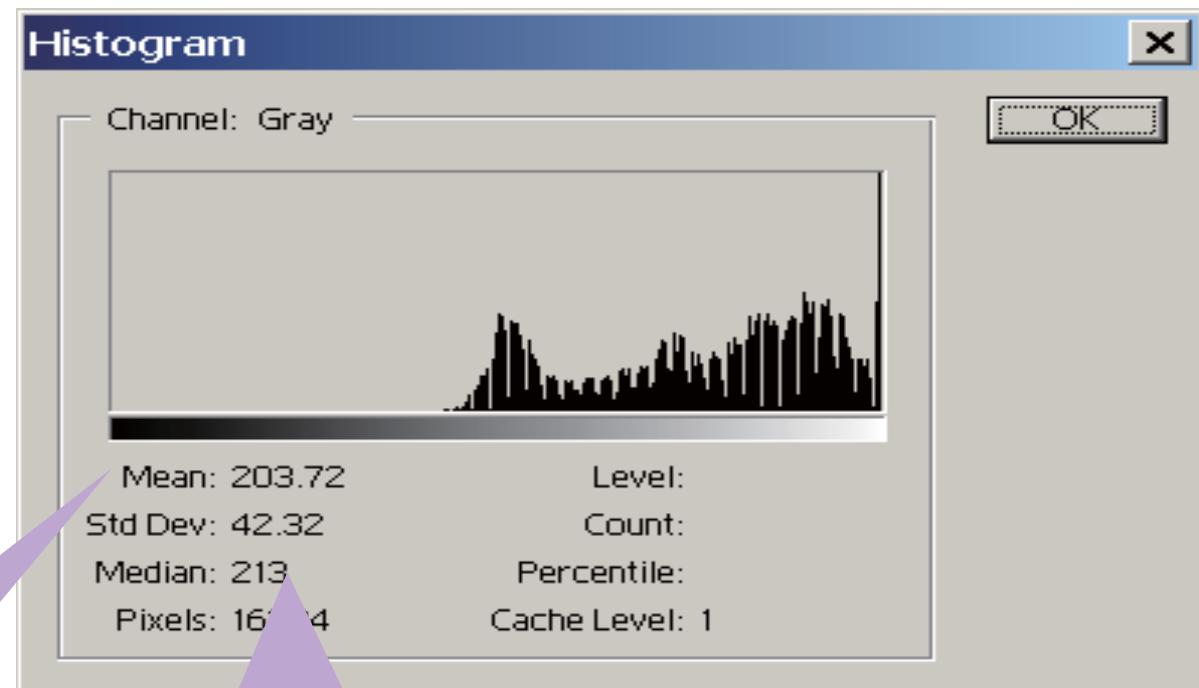


# 举例



$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$

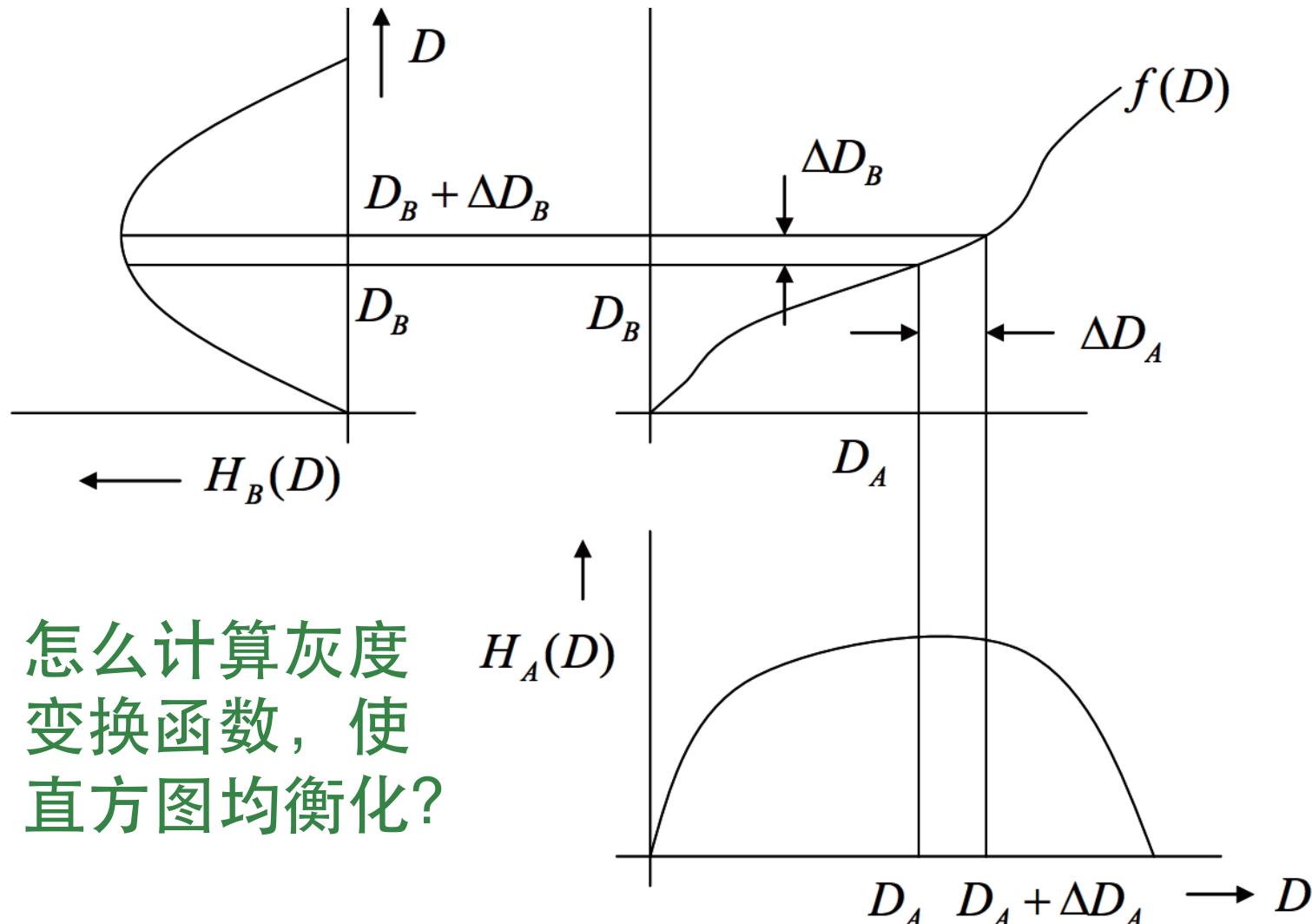
均值：  
 $203.72 = 1.2 \times 138 + 50$



中值： $213 \approx 1.2 \times 138 + 50$



# 直方图均衡化



怎么计算灰度  
变换函数，使  
直方图均衡化？

问题2：给定 $H_A(D)$ 和 $H_B(D)$ ，求 $f(D)$



# 主要思路

- 关键步骤

请写出直方图均衡化的灰度变换函数?

$$\int_0^{D_B} H_B(D) dD = \int_0^{D_A} H_A(D) dD$$

因为 $D_B$ 是均匀分布

$$\int_0^{D_B} H_B(D) dD = \frac{D_B}{L} \times A_0 = \frac{f(D_A)}{L} \times A_0$$

相等，得 $f(D_A)$

$A_0$ 是总像素个数     $L$ 是灰度级个数



# 结论

连续形式

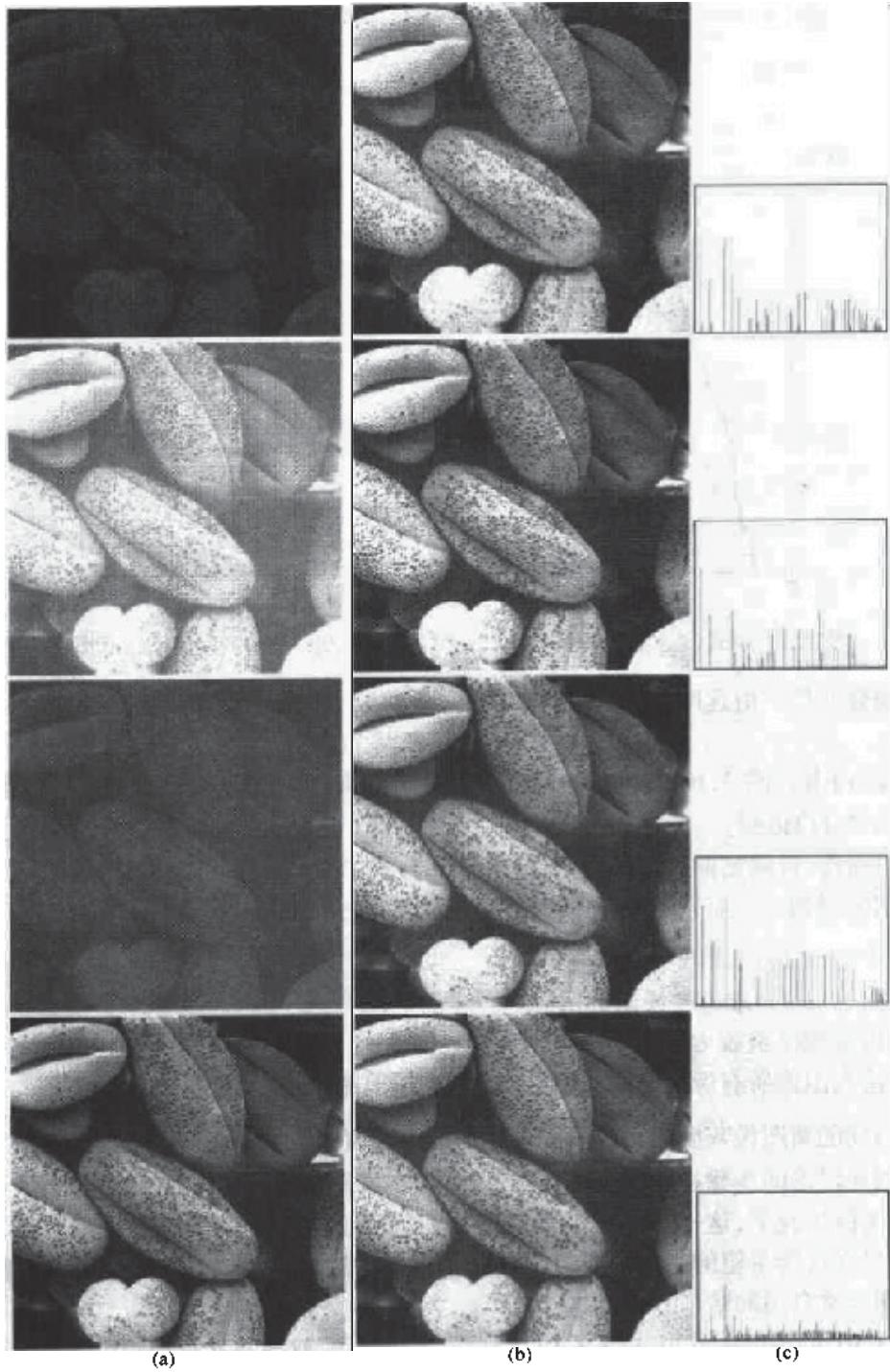
$$f(D_A) = \frac{L}{A_0} \int_0^{D_A} H_A(D) dD$$

离散形式

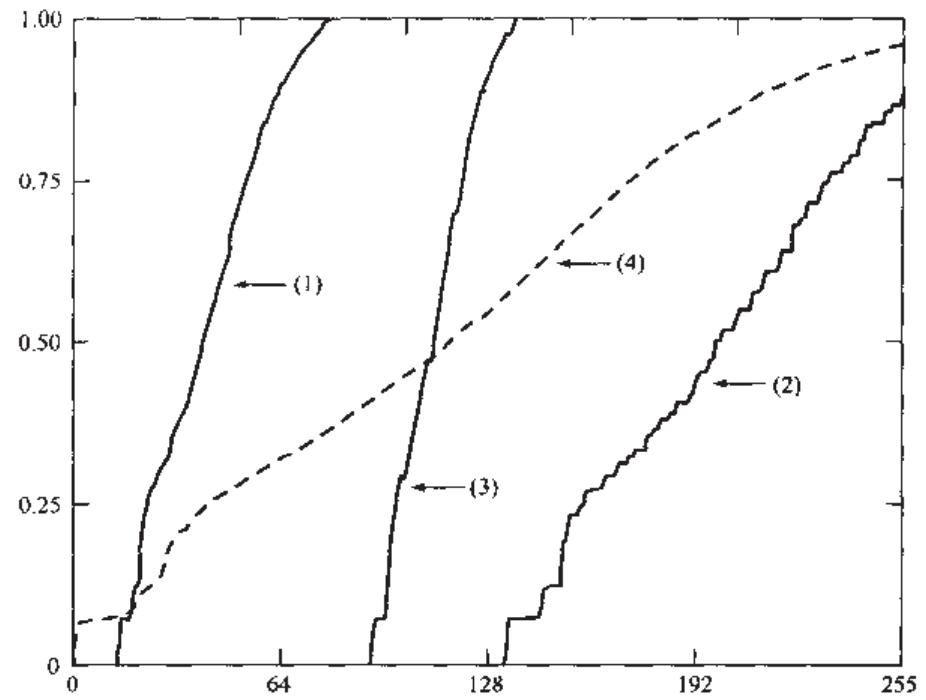
$$f(D_A) = \frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$$

- 1 )  $H_A(D)$ 连续情况下，  
可以得到均匀分布的  
 $H_B(D)$
- 2 ) 在离散情况下，只有离  
散的 $H_A(D)$ 统计，因  
此不完全均匀

注意： $H_A(u)$ 取频  
率还是像素个数？



## 灰度变换函数





# 更明显的例子

均衡化前



均衡化后



图像明显得  
到了增强



# 讨论

- 直方图均衡化一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化”
- 离散形式下，直方图均衡化的概率密度函数是否完全均匀？ ✖
- 直方图均衡化会有失效的时候吗？ ✓





# 作业1

- 实现直方图均衡化  $f(D_A) = \frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$
- 要求
  - 三个部分（图像、代码、文档）
  - 语言：**Matlab**



# 直方图匹配（规范化）

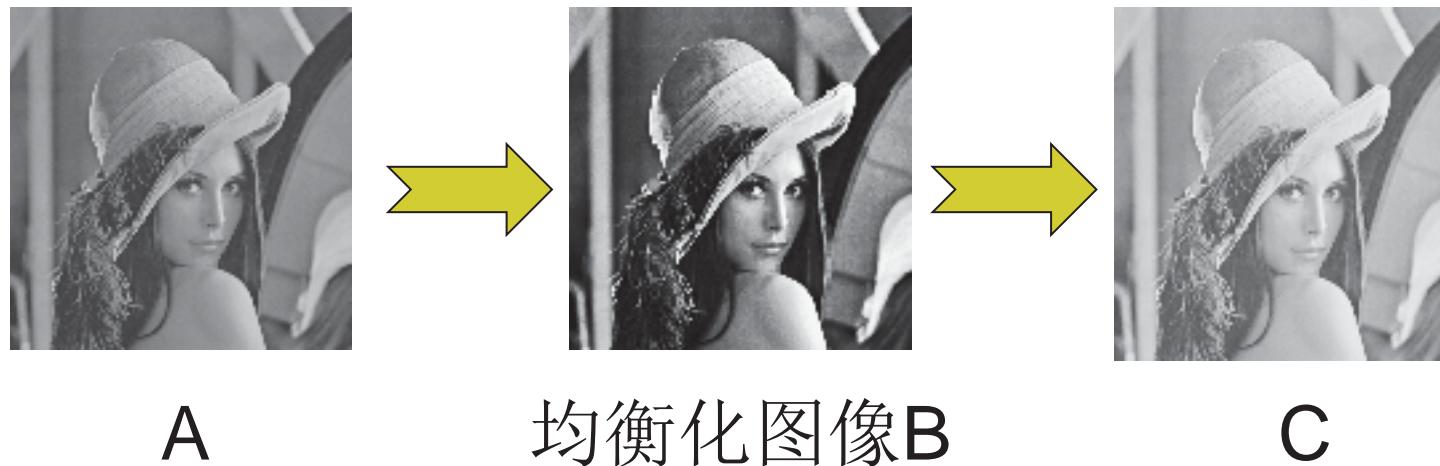
- 有一些应用用均匀直方图的基本增强并不是好方法，尤其是有时可以指定希望处理的图像所具有的直方图形状。
- 这种用于产生处理后有特殊直方图的图像的方法，叫做**直方图匹配**或**直方图规范化**处理。



输出直方图分布不要求均匀，要求为某个特定分布



- Key idea: 以均衡化直方图图像为桥



先把A转化成均衡化图像B

再把B转化成图像C (why)

根据单调灰度变换函  
数存在反函数



# 主要的公式

- 步骤：

$$f(D_A) = \frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$$

把A转化成均衡化图像B

$$g(D_C) = \frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_C} H_C(u)$$

把C转化成均衡化图像B

$$D_C = g^{-1}\left(\frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)\right)$$

解决从D\_A—> D\_C

利用反函数

D\_A —> D\_B (Table)

D\_C = g^-1(D\_B) —> 查表得对应D\_A'

D\_C = g^-1(D\_A')

注：

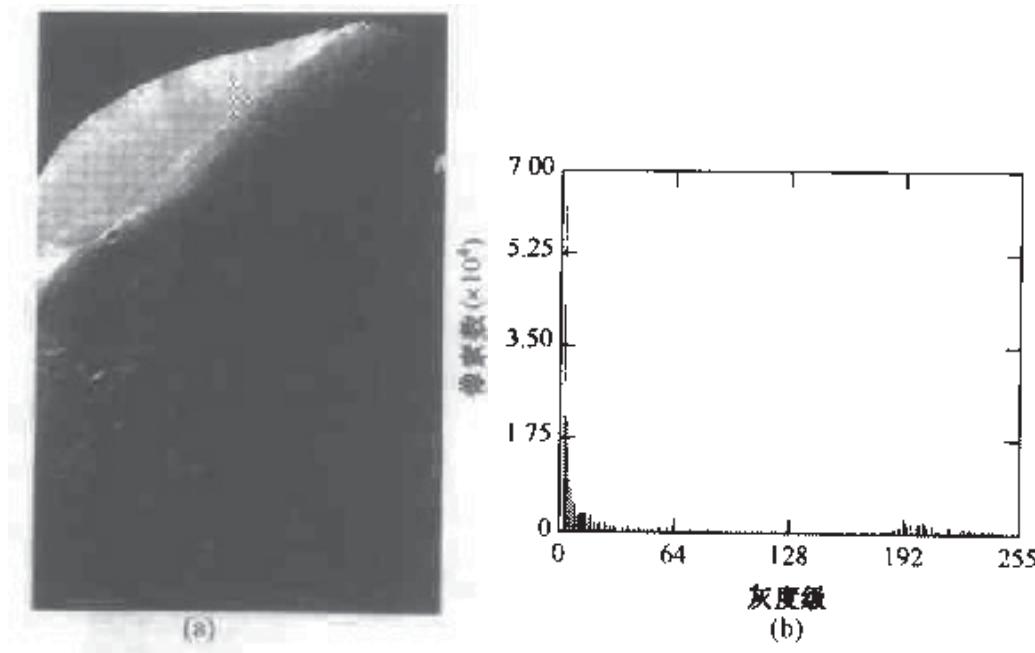
1) 利用均衡直方图作为中间桥梁， $D_B = f(D_A)$   
2)  $H_C$ 是已知的待匹配直方图

3) 利用以上公式 (2) - g得到D\_C和D\_B之间的映射表



# 直方图均衡化与直方图匹配

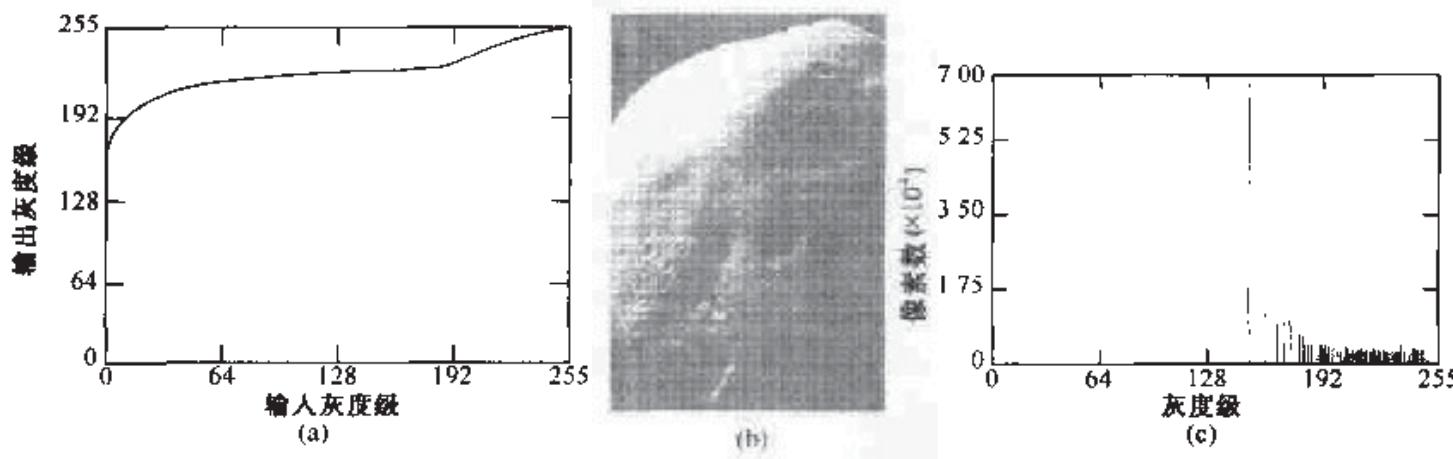
- 火星的卫星图像





# 直方图均衡化与直方图匹配

- 均衡化效果



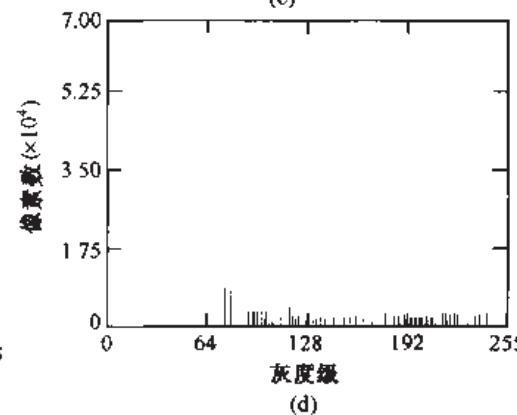
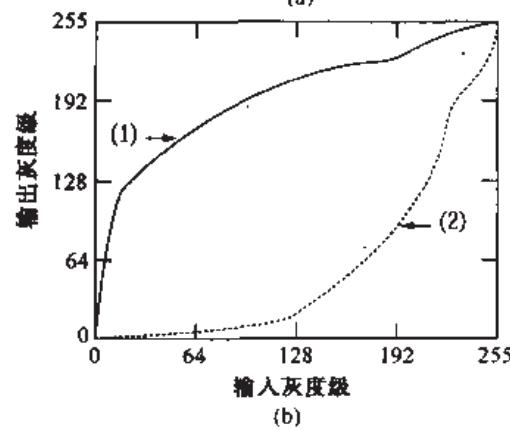
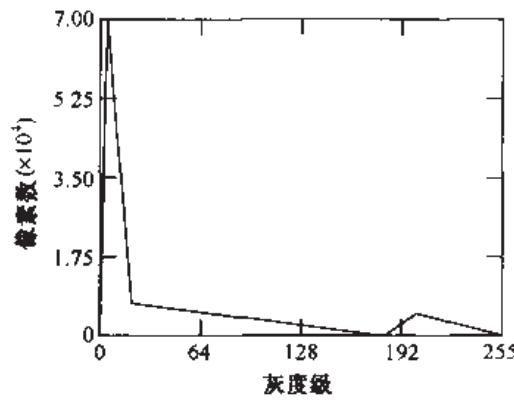
只是“漂白”了，并  
没有增加太多信息



# 直方图均衡化与直方图匹配

- 直方图匹配效果

更靠近原图像，但增加了更多细节



如何确定需要  
规定的直方图？

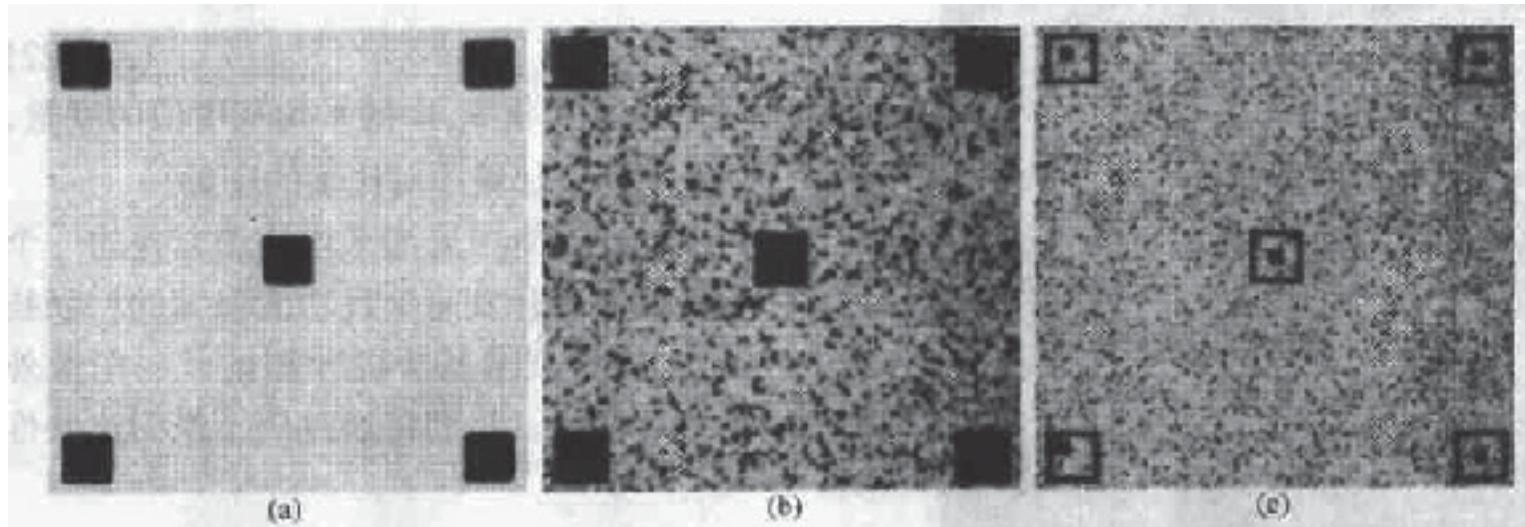


与具体问题  
相关。一旦规  
定好，就有技  
术可以处理



# 局部增强

- 如果我不希望对整体图像增强，只希望对局部进行增强怎么办？这类技术就叫做**局部增强**。



原始图像

全局直方图增强

局部直方图增强，  
取 $7 \times 7$ 的领域

NOTE：局部直方图均衡化只是局部增强的一种技术；



# 在图像增强中使用直方图统计学

- 回顾均值、方差

灰度平均值

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

归一化

n阶矩

$$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i)$$

反应了灰度值的散度

2阶矩最常用，  
也称为方差

$$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

思考

$\mu_0(r), \mu_1(r)$   
等于什么？



# 在图像增强中使用直方图统计学

- 均值和方差常用于局部增强
- 局部均值和局部方差

$$m_{s_{xy}} = \sum_{(s,t) \in S_{xy}} r_{s,t} p(r_{s,t})$$

$$\delta_{s_{xy}}^2 = \sum_{(s,t) \in S_{xy}} [r_{s,t} - m_{s_{xy}}]^2 p(r_{s,t})$$

$S_{xy}$  表示像素(x,y)的近邻集合



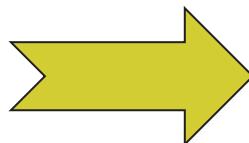
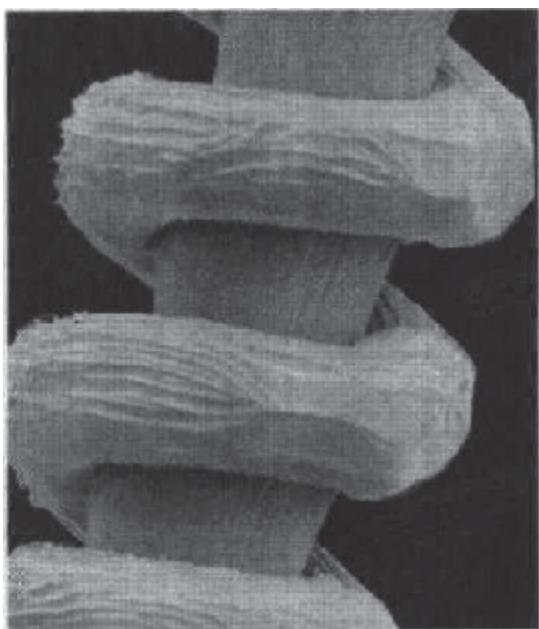
# 在图像增强中使用直方图统计学

- 考虑如下灰度变换函数

$$g(x, y) = \begin{cases} E \cdot f(x, y) & \text{如果 } m_{x,y} \leq k_0 M_G \text{ 且 } k_1 D_G \leq \sigma_{x,y} \leq k_2 D_G \\ f(x, y) & \text{其他} \end{cases}$$

此处,如前所述的, $E$ , $k_0$ , $k_1$  和  $k_2$  是特定的参数; $M_G$  是输入图像的全局平均值; $D_G$  是全局标准差。

注:原图像对于  
灰度变化较平坦  
区域的表达较差,  
增强图像有所改进



找到了  
划痕  
轨迹!



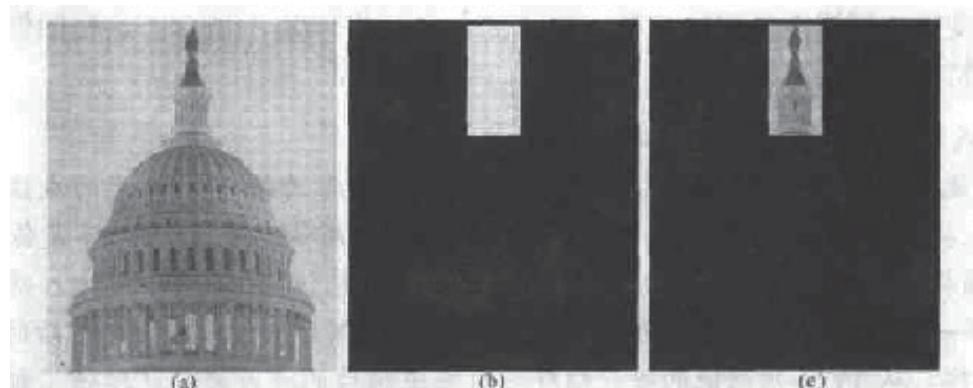
# 空间域图像增强

- 直方图处理（进阶）
- 用算术/逻辑操作增强

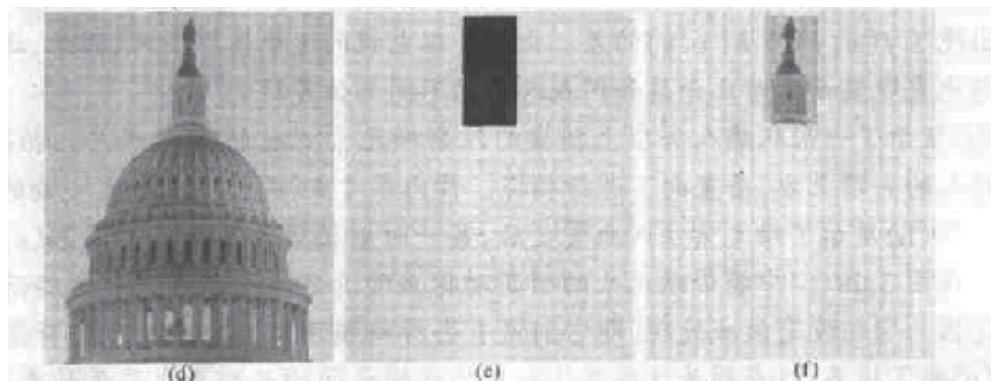


# 算术/逻辑操作增强

- 算术/逻辑操作主要以像素对像素为基础在两幅或多幅图像间进行。



“与”操作



“或”操作



# 算术/逻辑操作增强

- 四大类

- 加法
- 减法
- 乘法
- 除法

$$C(x, y) = A(x, y) + B(x, y)$$

$$C(x, y) = A(x, y) - B(x, y)$$

$$C(x, y) = A(x, y) \times B(x, y)$$

$$C(x, y) = A(x, y) \div B(x, y)$$



# 图像加法处理

## ● 小例子



+



=



# 图像加法处理

- 多次曝光：将不同时间曝光照片进行叠加，得到一张具有特殊效果的照片





# 图像加法处理

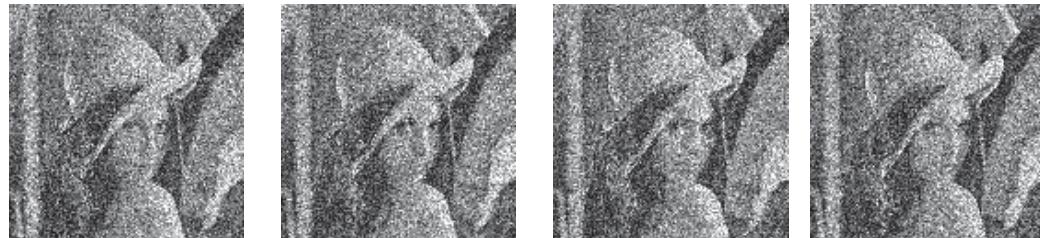
- 加法运算常用于减少图像中的随机噪声

怎么理解？

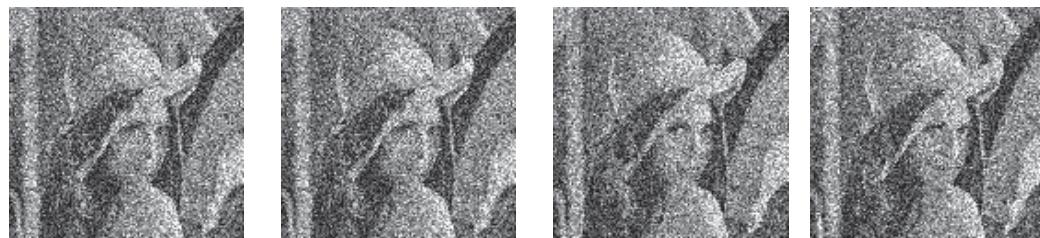




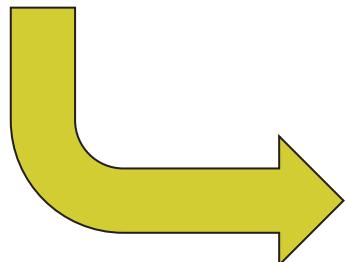
# 图像加法处理



8张随机噪声图像



怎么证明?



加法处理后



噪声明显  
减少，图像  
得到增强



# 推导

- 定理：对M幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的平方信噪比提高M倍。

- 证明： $D_i(x, y) = S(x, y) + N_i(x, y)$  where  $E\{N_i(x, y)\} = 0$

信噪比  $P(x, y) = \frac{S^2(x, y)}{E\{N^2(x, y)\}}$   $\frac{\text{信号}}{\text{噪声}}$

$$\bar{D}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [S(x, y) + N_i(x, y)]$$

$$\bar{P}(x, y) = \frac{S^2(x, y)}{E\left\{ \frac{1}{M^2} \left[ \sum_{i=1}^M N_i(x, y) \right]^2 \right\}}$$



# 推导续

- 由于

$$E\left\{\left[N_1(x,y) + N_2(x,y)\right]^2\right\} = E\left\{N_1^2(x,y) + N_2^2(x,y)\right\} + 2E\left\{N_1(x,y)\right\}\varepsilon\left\{N_2(x,y)\right\}$$

- 注意到N1和N2独立，因此

$$E\left\{\left[N_1(x,y) + N_2(x,y)\right]^2\right\} = E\left\{N_1^2(x,y)\right\} + E\left\{N_2^2(x,y)\right\}$$

- 代入，有

$$\bar{P}(x,y) = \frac{M^2 S^2(x,y)}{\sum_{i=1}^M N_i^2(x,y)} = \frac{M^2 S^2(x,y)}{MN^2(x,y)} = MP(x,y)$$



# 图像减法处理

- 操作定义

$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$$

减法怎么让图像增强呢？



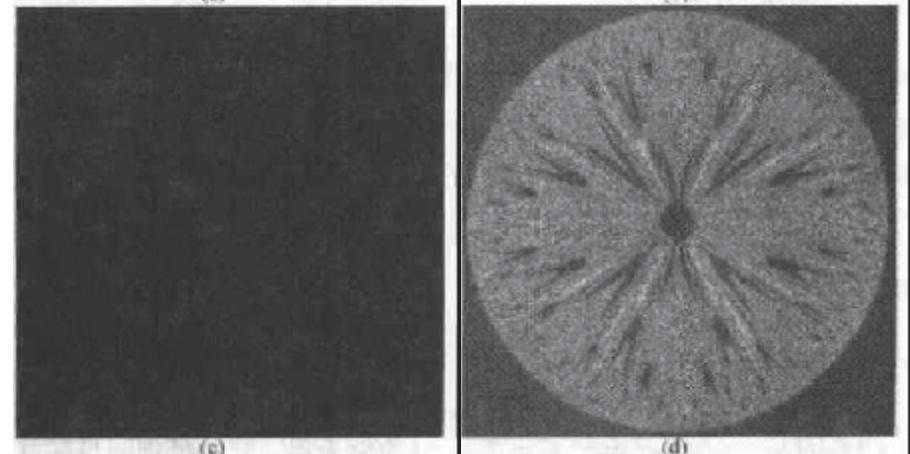
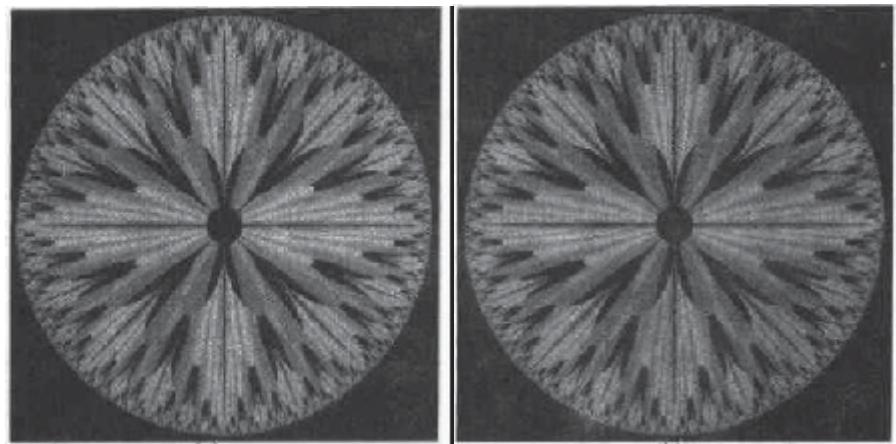


# 图像减法处理

- 操作定义

$$g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$$

做差再做下直方图均衡化

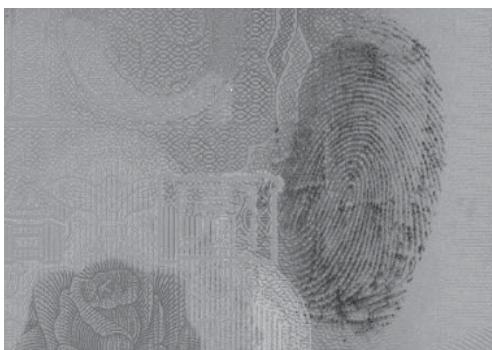


图像差别的细节被观察到



# 应用二

- 指纹抽取



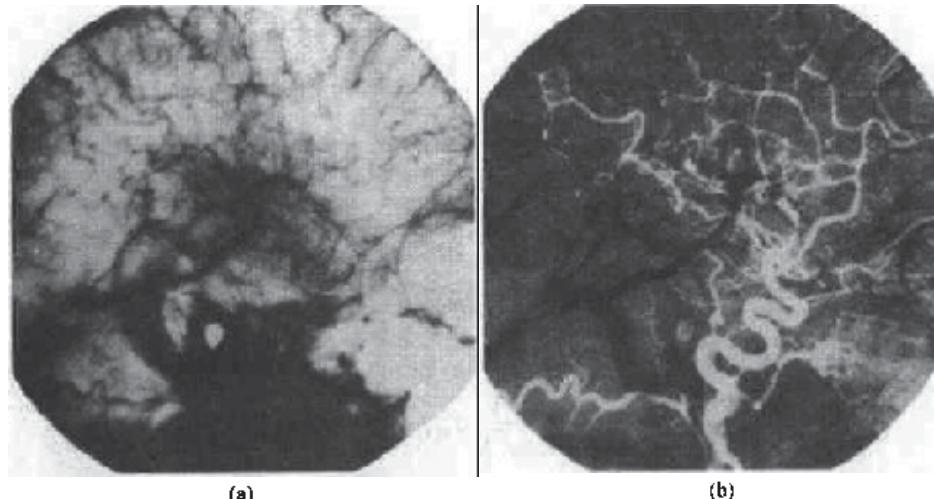
- 车牌号码检测





# 应用三：掩膜式X光成像法

- 考量不同介质注入病人血管后的反应



未注入介质的图像作为掩膜图像（参考图像）使用

注入碘介质后，减去掩膜图像后的血管X光成像



减法操作后取值范围存在负数，  
比如-255到255，而数字图像只  
能存正数，怎么办？





- 主要两种办法，都可以称为规范化方法
  - 直接规范化到[0,255]

$$y = (x + 255)/2$$

- 更精细地规划化到[0,255]

min—» 0  
max—» 255

$$y = (x - \text{min}) / (\text{max} - \text{min}) * 255$$

min和max分别为做差图像的最小，最大像素  
当min=-255, max=255时，两个方法效果一样；



# 图像乘法与除法处理

- 乘法：通常用来进行掩模运算
- 除法：通常可以用来归一化

虽然乘法和除法在某些特别应用上会很有用，但总体用的比较少。



# 加法运算和直方图

- 在某些特殊情况下，加法运算后的图像直方图可以通过被加图像的直方图推导得到。
- 基本假设：输出图像的二维直方图是输入图像直方图的积。

$$H_{AB}(D_A, D_B) = H_A(D_A)H_B(D_B)$$

这个情况下，也认为两幅图像不相关



# 计算公式

- 主要步骤

$$H_{ab}(D - D_b, D_b) dD_b$$

$$H(D) = \int_{D_A + D_B = D} H_{AB}(D_A, D_B) dD_B$$

$$H(D) = \int_{D_A + D_B = D} H_A(D_A) H_B(D_B) dD_B$$

- 因为  $D_A = D_C - D_B$
- 所以

这个计算公式就是  
著名的**卷积运算**

$$H(D) = \int_{-\infty}^{\infty} H_A(D_C - D_B) H_B(D_B) dD_B$$