Z变换及其应用

实验涉及的MATLAB子函数

1.ztrans

功能： 返回无限长序列函数x(n)的z变换。

调用格式：

X＝ztrans(x)；求无限长序列函数x(n)的z变换X(z)，返回z变换的表达式。

2.iztrans

功能： 求函数X(z)的z反变换x(n)。

调用格式：

x＝iztrans(X)；求函数X(z)的z反变换x(n)，返回z反变换的表达式。

3.syms

功能： 定义多个符号对象。

调用格式：

symsabw0；把字符a，b，w0定义为基本的符号对象。

4.residuez

功能： 有理多项式的部分分式展开。

调用格式：

＝residuez(b，a)；把b(z)/a(z)展开成(如式(7-3))部分分式。

［b，a］＝residuez(rpc)；根据部分分式的r、p、c数组，返回有理多项式。

其中：b，a为按降幂排列的多项式(如式(7-1))的分子和分母的系数数组；r为余数数组；p为极点数组；c为无穷项多项式系数数组。

实验原理

1.用ztrans子函数求无限长序列的z变换

MATLAB为我们提供了进行无限长序列的z变换的子函数ztrans。使用时须知，该函数只给出z变换的表达式，而没有给出收敛域。另外，由于这一功能还不尽完善，因而有的序列的z变换还不能求出，z逆变换也存在同样的问题。

例11-1 求以下各序列的z变换。

$$x_1(n)=a^n \qquad x_2(n)=n \qquad x_3(n)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$x_4(n)=e^{jw_0n} \qquad x_5(n)=\frac{1}{n(n-1)}$$

解 syms w0 n z a

x1＝a^n； X1＝ztrans(x1)

x2＝n； X2＝ztrans(x2)

x3＝(n*(n－1))/2； X3＝ztrans(x3)

x4＝exp(j*w0*n)； X4＝ztrans(x4)

x5＝1/n*(n－1)； X5＝ztrans(x5)

程序运行结果如下：

X1＝z/a/(z/a－1)

X2＝z/(z^{-1})^2

X3＝－1/2*z/(z^{-1})^2＋1/2*z*(z＋1)/(z^{-1})^3

X4＝z/exp(i*w0)/(z/exp(i*w0)－1)

???Errorusing＝＝>sym/maple ←表示(x5)不能求出z变换

[ZK(]Error，(inconvert/hypergeom)Summandissingularatn＝0intheintervalofsummation

Errorin＝＝>C：＼MATLAB6p1＼toolbox＼symbolic＼@sym＼ztrans.m

Online81＝＝>F＝maple(′map′，′ztrans′，f，n，z)；

2.用iztrans子函数求无限长序列的z反变换

MATLAB还提供了进行无限长序列的z反变换的子函数iztrans。

例11-2 求下列函数的z反变换。

$$X_1(z)=\frac{z}{z-1} \qquad X_2(z)=\frac{az}{(a-z)^2}$$

$$X_3(z)=\frac{z}{(z-1)^3} \qquad X_4(z)=\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}$$

解 symsnza

X1＝z/(z－1)；x1＝iztrans(X1)

X2＝a*z/(a－z)^2；x2＝iztrans(X2)

X3＝z/(z－1)^3；x3＝iztrans(X3)

X4＝(1－z^－n)/(1－z^－1)；x4＝iztrans(X4)

程序运行结果如下：

x1＝1

x2＝n*a^n

x3＝－1/2*n＋1/2*n^2

x4＝iztrans((1－z^(－n))/(1－1/z)，z，n)

3.用部分分式法求z反变换

部分分式法是一种常用的求解z反变换的方法。当z变换表达式是一个多项式时，可以表示为

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{11-1}$$

将该多项式分解为真有理式与直接多项式两部分，即得到：

$$X(z)=\frac{\bar{b}_0+\bar{b}_1 z^{-1}+\bar{b}_2 z^{-2}+\cdots\cdots+\bar{b}_{N-1} z^{-N-1}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots\cdots+a_N z^{-N}}+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} \tag{11-2}$$

当式中M<N时，式(11-2)的第二部分为0。

对于X(z)的真有理式部分存在以下两种情况。

情况1 X(z)仅含有单实极点，则部分分式展开式为

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{r_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_k z^{-k}$$

$$=\frac{r_1}{1-p_1 z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2 z^{-1}}+\cdots+\frac{r_N}{1-p_N z^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_k z^{-k}$$

(11-3)

X(z)的z反变换为

$$x(n)=\sum_{k=1}^{N} r_k (p_k)^n u(n)+\sum_{k=0}^{M-N} C_k \delta(n-k)$$

情况2 X(z)含有一个r重极点。这种情况处理起来比较复杂，本实验不做要求，仅举例11-4供使用者参考。

例11-3 已知$X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$，$|z|>1$，试用部分分式法求z反变换，并列出N＝20点的数值。

解 由表达式和收敛域条件可知，所求序列x(n)为一个右边序列，且为因果序列。将上式按式(7-1)的形式整理得：

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

求z反变换的程序如下：

b＝［1，0，0］；

a＝［1，－1.5，0.5］；

[r p c]＝residuez(b，a)

在MATLAB命令窗将显示：

r＝

2

－1

p＝

1.0000

0.5000

c＝

[ ]

由此可知，这是多项式M<N的情况，多项式分解后表示为

$$X(z)=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

可写出z反变换公式：

$$x(n)=2u(n)-(0.5)^n u(n)$$

如果用图形表现x(n)的结果，可以加以下程序：

N＝20；n＝0：N－1；

x＝r(1)*p(1).^n＋r(2)*p(2).^n；

stem(n，x)；

title(′用部分分式法求反变换x(n)′)；

其中x的数值为

x＝

[1.0000 1.5000 1.7500 1.8750 1.9375 1.9688 1.9844 1.9922 1.9961 1.9980 1.9990 1.9995 1.9998 1.9999 1.9999 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000 2.0000］

程序执行的结果如图11-1所示。

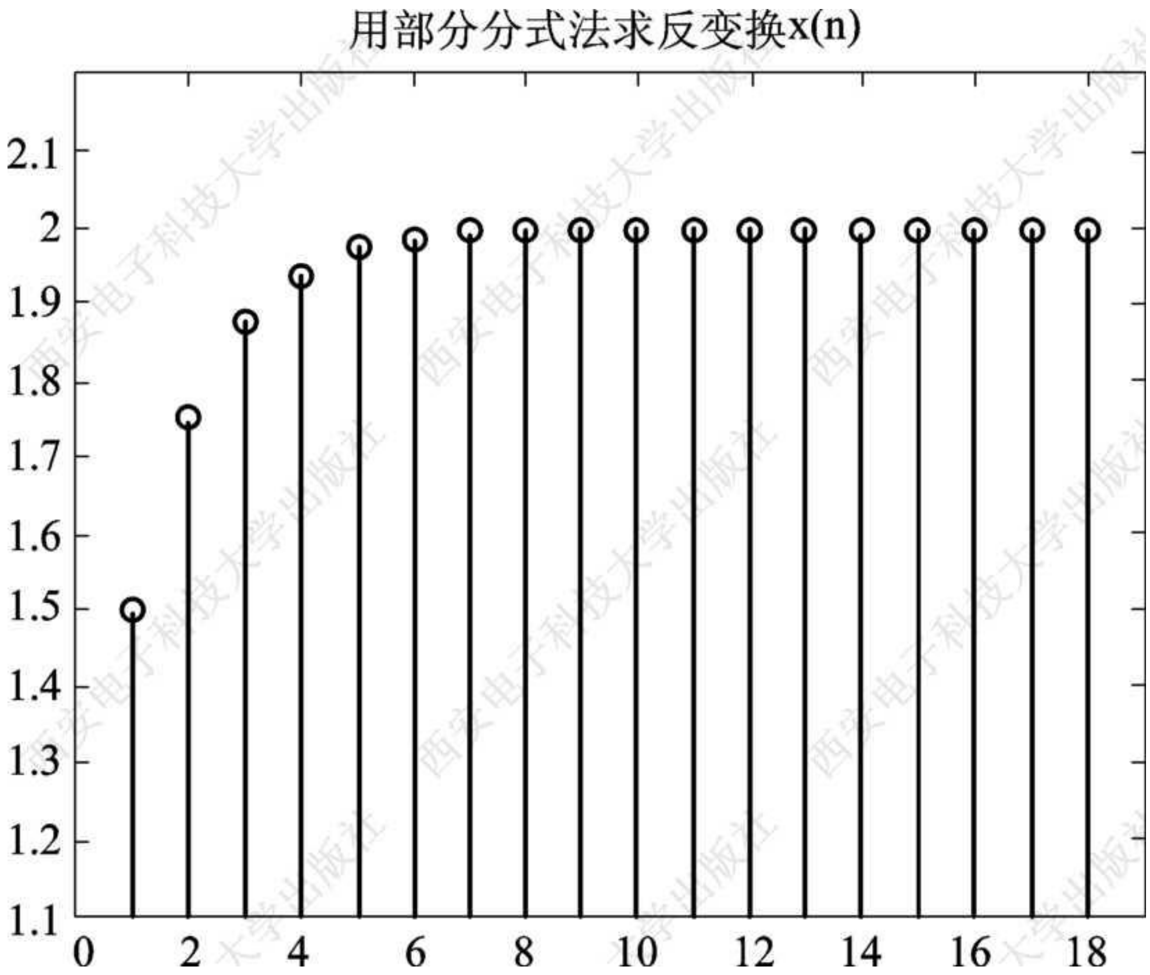

图11-1 用部分分式求解例7-3的z反变换

***例11-4** 用部分分式法求解函数

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-12z^{-1}+36z^{-2}}$$

的z反变换，写出h(n)的表示式，并用图形与impz求得的结果相比较。

解 求z反变换的程序如下：

b＝［0，1，0］；a＝［1，－12，36］；

[r p c]＝residuez(b，a)

在MATLAB命令窗将显示：

r＝

－0.1667－0.0000i

0.1667＋0.0000i

p＝

6.0000＋0.0000i

6.0000－0.0000i

c＝

[]

由此可知，这个多项式含有重极点。多项式分解后表示为

$$H(z)=\frac{-0.1667}{1-6z^{-1}}+\frac{0.1667}{(1-6z^{-1})^2}$$

$$=\frac{-0.1667}{1-6z^{-1}}+\frac{0.1667}{6}z\frac{6z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2}$$

根据时域位移性质，可写出z反变换公式：

$$h(n)=-0.1667(6)^n u(n)+\frac{0.1667}{6}(n+1)6^{n+1}u(n+1)$$

如果要用图形表现h(n)的结果，并与impz子函数求出的结果相比较，可以在前面已有的程序后面加以下程序段：

N＝8；n＝0：N－1；

h＝r(1)*p(1).^n.*［n>＝0］＋r(2).*(n＋1).*p(2).^n.*［n－1>＝0］；

subplot(1，2，1)，stem(n，h)；

title(′用部分分式法求反变换h(n)′)；

h2＝impz(b，a，N)；

subplot(1，2，2)，stem(n，h2)；

title(′用impz求反变换h(n)′)；

执行结果如图11-2所示。

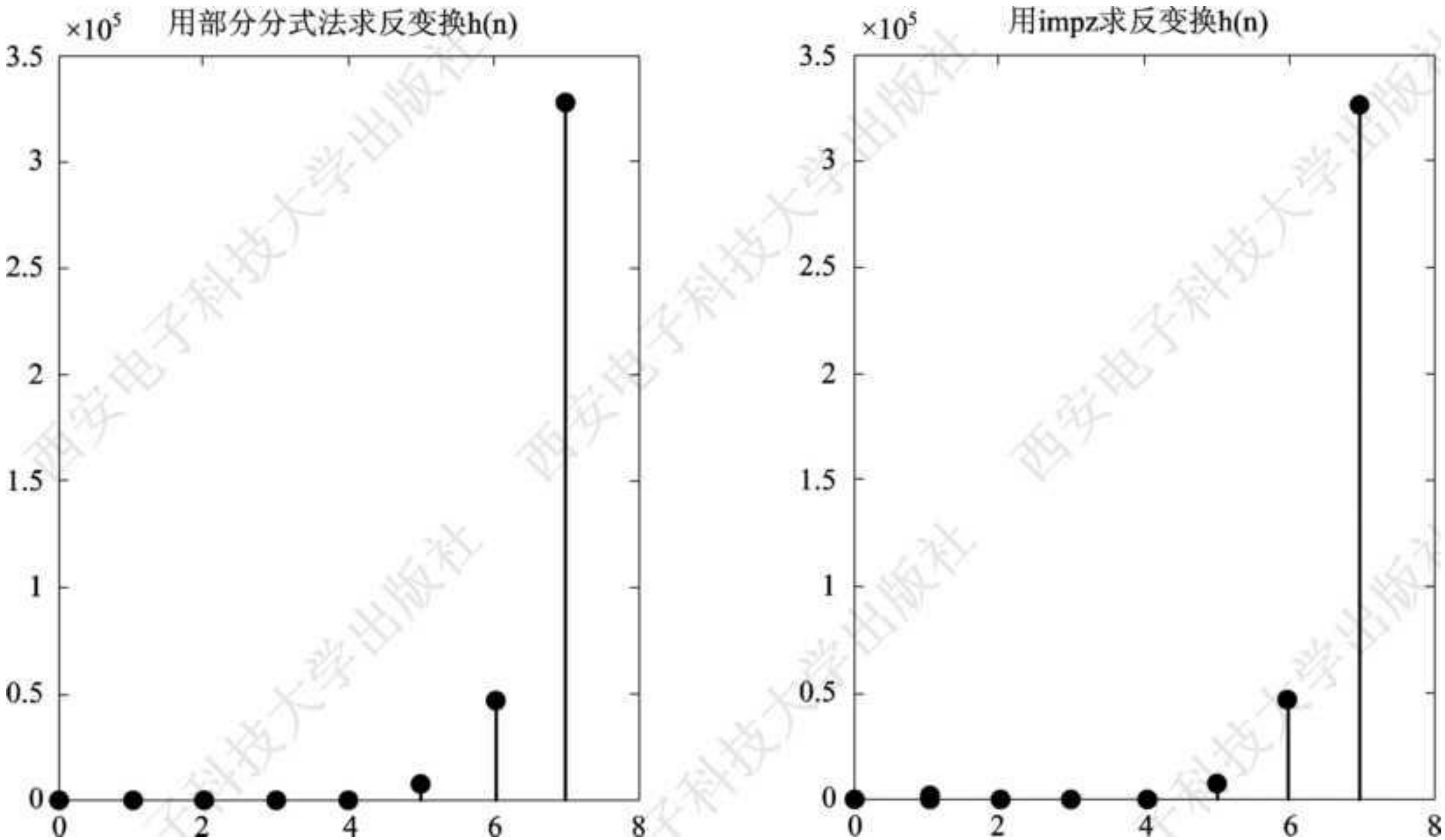

图11-2 用部分分式法和impz子函数求解例7-4的z反变换

注意： impz是一个求解离散系统冲激响应的子函数，在实验中我们已使用过。如果把H(z)看成是一个系统的系统函数，则H(z)的z反变换就等于这个系统的冲激响应。因此，可以用impz的结果来检验用部分分式法求得的z反变换结果是否正确。

例11-5 用部分分式法求解例4-2系统函数的z反变换，并用图形与impz求得的结果相比较。

$$H(z)=\frac{0.1321-0.3963\,z^{-2}+0.3963\,z^{-4}-0.1321\,z^{-6}}{1+0.34319\,z^{-2}+0.60439\,z^{-4}+0.20407\,z^{-6}}$$

解 由上式可知，该函数表示一个6阶系统。其程序如下：

a＝［1，0，0.34319，0，0.60439，0，0.20407］；

b＝［0.1321，0，－0.3963，0，0.3963，0，－0.1321］；

[r p c]＝residuez(b，a)

此时在MATLAB命令窗将显示：

r＝

－0.1320－0.0001i

－0.1320＋0.0001i

－0.1320＋0.0001i

－0.1320－0.0001i

0.6537＋0.0000i

0.6537－0.0000i

p =

$-0.6221 + 0.6240i$

$-0.6221 - 0.6240i$

$0.6221 + 0.6240i$

$0.6221 - 0.6240i$

$0 + 0.5818i$

$0 - 0.5818i$

c =

-0.6473

由于该系统函数分子项与分母项阶数相同，符合$M \geq N$，因此具有冲激项。可以由r、p、c的值写出z反变换的结果。

如果要求解z反变换的数值结果，并用图形表示，同时与impz求解的冲激响应结果进行比较，可以在上述程序加：

```
N=40;n=0:N－1;
h=r(1)*p(1).^n＋r(2)*p(2).^n＋r(3)*p(3).^n＋r(4)*p(4).^n
＋r(5)*p(5).^n＋r(6)*p(6).^n＋c(1).*[n= =0];
subplot(1,2,1),stem(n,real(h),'k');
```

```
title('用部分分式法求反变换h(n)');
h2=impz(b,a,N);
subplot(1,2,2),stem(n,h2,'k');
title('用impz求反变换h(n)');
```

由该图7-3显示的结果可以看出，系统函数的z反变换与impz求解冲激响应的图形相同。可见，用部分分式求系统函数的z反变换，也是一种求解系统的冲激响应的有效方法。

4.从变换域求系统的响应

在实验4中，我们用图4-1表示了离散系统的响应与激励的关系。由图可知，系统的响应既可以用时域分析的方法求解，也可以用变换域分析法求解。当已知系统函数H(z)，又已知系统输入序列的z变换X(z)，则系统响应序列的z变换可以由Y(z)＝H(z)X(z)求出。

例11-6 已知一个离散系统的函数 $H(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$，输入序列 $X(z)=\dfrac{z}{z-1}$，求系统在变换域的响应Y(z)及时间域的响应y(n)。

解 根据实验4、5、6和本实验已掌握的方法，我们可以采用各种方法求解。本例仅采用先从变换域求解Y(z)，再用反变换求y(n)的方法，以巩固本实验所学习的内容。

MATLAB程序如下：

symsz

X＝z./(z^{-1})；

H＝z.^2./(z.^2－1.5*z＋0.5)；

Y＝X.*H

y＝iztrans(Y)

程序运行后，将显示以下结果：

Y＝

z^3/(z^{-1})/(z^2－3/2*z＋1/2)

y＝

2*n＋2^(－n)

如果要观察时域输出序列y(n)，可以在上面的程序后编写以下程序段：

n＝0：20；

y＝2*n＋2.^(－n)；

stem(n，y)；

程序执行的结果如图11-4所示。

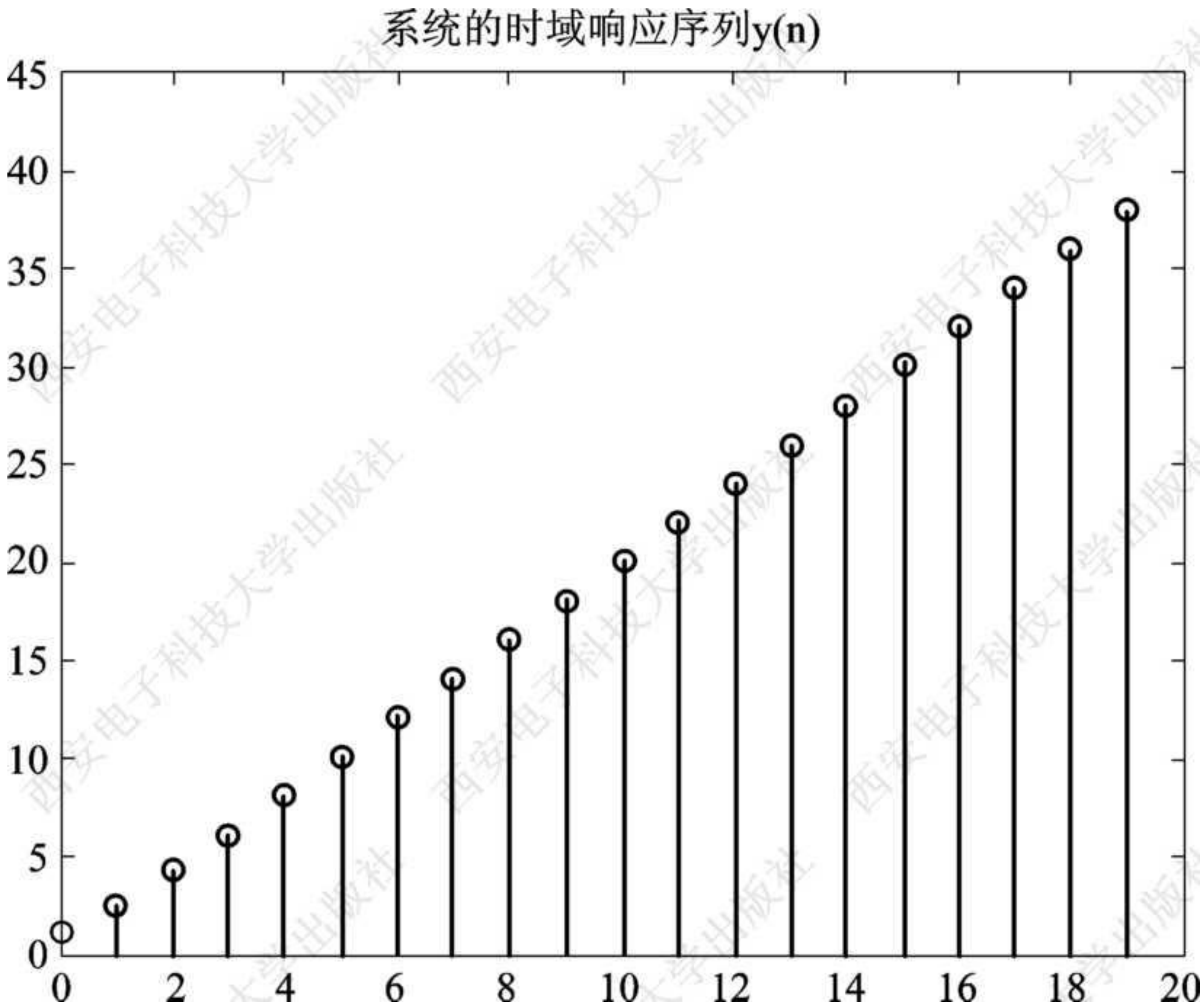

图11-4 例11-6的时域输出序列y(n)