离散傅里叶变换的性质

实验原理

1.线性性质

如果两个有限长序列分别为x1(n)和x2(n)，长度分别为N1和N2，且

$y(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$ (a、b均为常数)

则该y(n)的N点DFT为

$Y(k)=DFT[y(n)]=aX_1(k)+bX_2(k)\quad 0\le k\le N-1$

其中：$N=\max[N_1, N_2]$，$X_1(k)$和$X_2(k)$分别为$x_1(n)$和$x_2(n)$的N点DFT。

例9-1 已知$x_1(n)$＝［0，1，2，4］，$x_2(n)$＝［1，0，1，0，1］，求：

(1)$y(n)=2x_1(n)+3x_2(n)$，再由$y(n)$的N点DFT获得$Y(k)$；

(2)由$x_1(n)$、$x_2(n)$求$X_1(k)$、$X_2(k)$，再求$Y(k)=2X_1(k)+3X_2(k)$。

用图形分别表示以上结果，将两种方法求得的$Y(k)$进行比较，由此验证有限长序列傅里叶变换(DFT)的线性性质。

解 MATLAB程序如下：

xn1＝［0，1，2，4］；　　　　　%建立xn1序列

xn2＝［1，0，1，0，1］；　　　%建立xn2序列

N1＝length(xn1)；N2＝length(xn2)；

N＝max(N1，N2)；　　%确定N

if N1>N2

xn2＝［xn2，zeros(1，N1－N2)］；%对长度短的序列补0

else if N2>N1 xn1＝［xn1，zeros(1，N2－N1)］；

end

yn＝2*xn1＋3*xn2；%计算yn

n＝0：N－1；k＝0：N－1；

Yk1＝yn*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%求yn的N点DFT

Xk1＝xn1*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%求xn1的N点DFT

Xk2＝xn2*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%求xn2的N点DFT

Yk2＝2*Xk1＋3*Xk2；%由Xk1、Xk2求Yk

以上程序作图部分省略。

用两种方法求得的Y(k)结果一致，如下所示：

Yk＝

23.0000　　－7.5902＋1.5388i　　3.5902－0.3633i

3.5902＋0.3633i　　－7.5902－1.5388i

运行结果如图13-1所示。

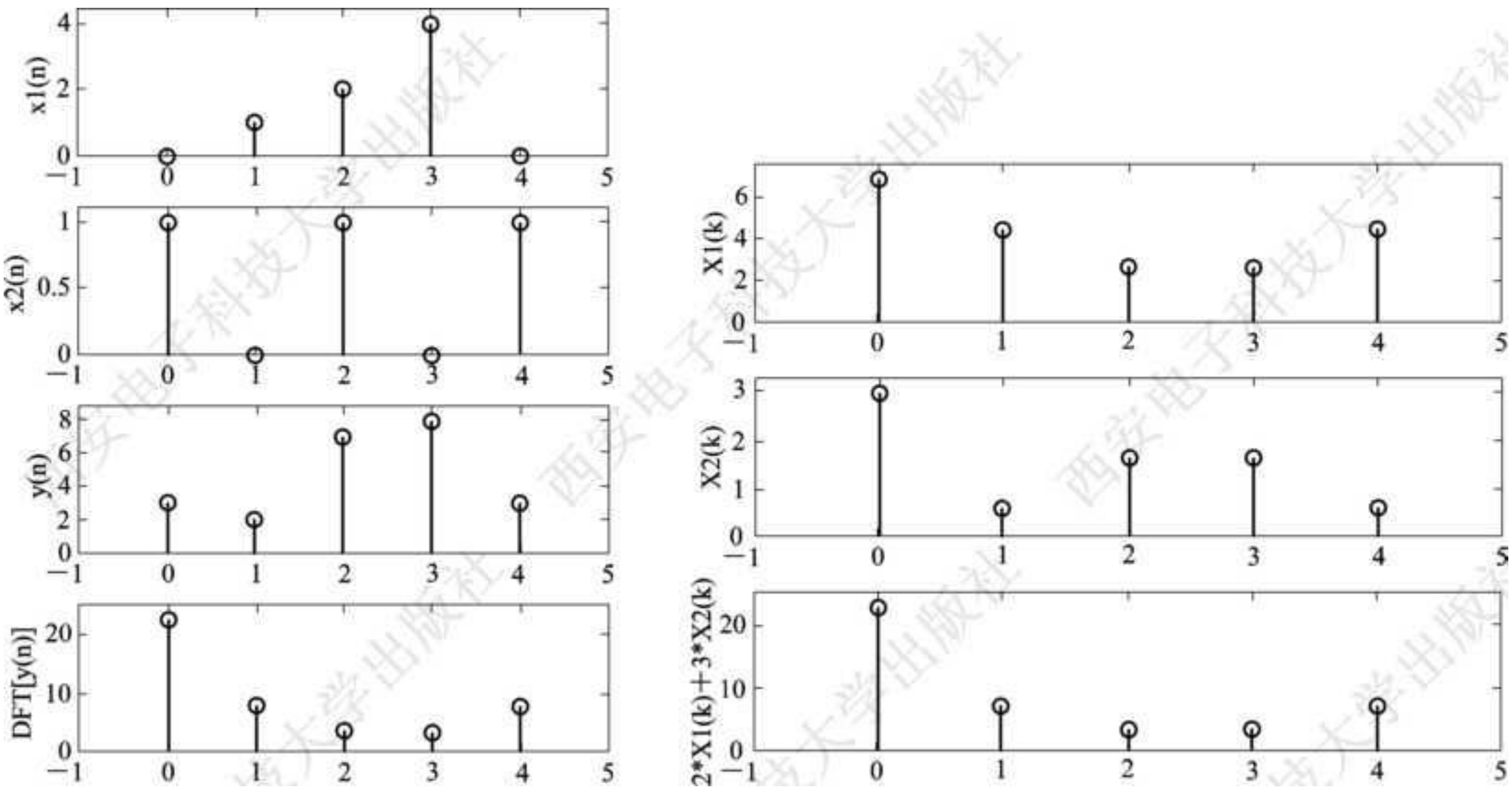

图13-1 例13-1有限长序列的傅里叶变换的线性性质

2.循环移位性质

如果有限长序列为x(n)，长度为N，将x(n)左移m位，则:$y(n)=x((n+m))_N)R_N(n)$

x(n)左移m位的过程可由以下步骤获得：

(1)将x(n)以N为周期进行周期延拓，得到 $\tilde{x}(n)=x((n))_N)$；

(2)将 $\tilde{x}(n)$ 左移m位，得到 $\tilde{x}(n+m)$；

(3)取 $\tilde{x}(n+m)$ 的主值序列，得到x(n)循环移位序列y(n)。

有限长序列的移位也称为循环移位，原因是将x(n)左移m位时，移出的m位又依次从右端进入主值区。下面举例说明。

例9-2 已知有限长序列x(n)＝［1，2，3，4，5，6］，求x(n)左移2位成为新的向量y(n)，并画出循环移位的中间过程。

解 MATLAB程序如下：

xn＝［1，2，3，4，5，6］；　　%建立xn序列

Nx＝length(xn)；nx＝0：Nx－1；

nx1＝－Nx：2*Nx－1；%设立周期延拓的范围

x1＝xn(mod(nx1，Nx)＋1)；%建立周期延拓序列

ny1＝nx1－2；y1＝x1；%将x1左移2位，得到y1

RN＝(nx1>＝0)&(nx1<Nx)；%在x1的位置向量nx1上设置主值窗

RN1＝(ny1>＝0)&(ny1<Nx)；%在y1的位置向量ny1上设置主值窗

subplot(4，1，1)，stem(nx1，RN.*x1)；%画出x1的主值部分

subplot(4，1，2)，stem(nx1，x1)；%画出x1

subplot(4，1，3)，stem(ny1，y1)；%画出y1

subplot(4，1，4)，stem(ny1，RN1.*y1)； %画出y1的主值部分

运行结果如图9-2所示。

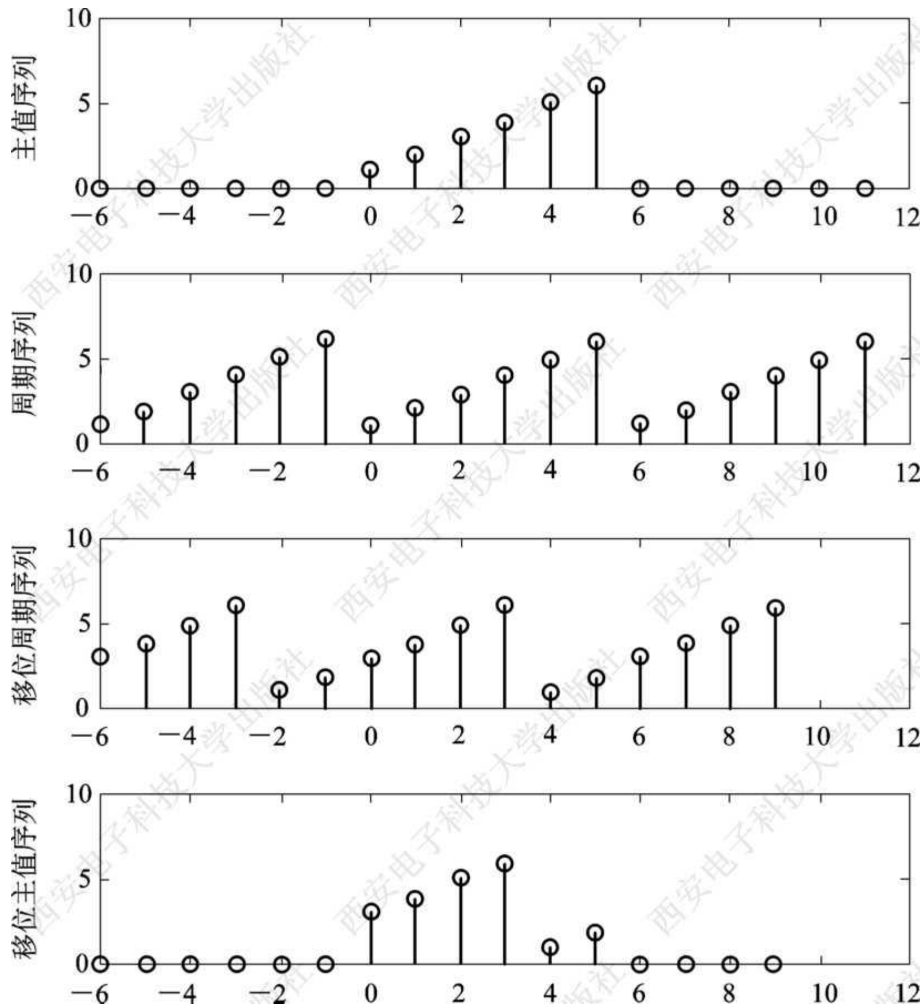

图9-2 例9-2有限长序列的循环移位

3.循环折叠性质

如果要把有限长N点序列x(n)直接进行折叠，则x的下标(－n)将不在0≤n≤N－1区域内。但根据有限长序列傅里叶变换隐含的周期性，可以对变量(－n)进行N求余运算。即在MATLAB中，序列x(n)的折叠可以由y＝x(mod(－nx，N)＋1)得到。

有限长N点序列x(n)的循环折叠序列y(n)定义为

$$y(n)=x((-n))_N=\begin{cases} x(0) & n=0 \\ x(N-n) & 1\le n\le N-1 \end{cases}$$

可以想像成，序列x(n)以反时针方向等间隔放置在一个圆周上，则x(－n)是将x(n)沿着圆周顺时针方向等间隔放置。

循环折叠性质同样适用于频域。经循环折叠后，序列的DFT由下式给出：

$$
\begin{aligned}
Y(k) &= \mathrm{DFT}[x((-n))_N)] \\
&= X^*((-k))_N) = \begin{cases} X(0) & k=0 \\ X(N-k) & 1 \le k \le N-1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

就是说，在时域循环折叠后的函数，其对应的DFT在频域也作循环折叠，并取X(k)的共轭。

例9-3 求x(n)＝［1，2，3，4，5，6，7］，循环长度分别取N＝7，N＝10。

(1)画出x(n)的图形；

(2)画出x(－n)的图形。

解 MATLAB程序如下：

x1＝［1，2，3，4，5，6，7］；　　　　%建立x(n)，N＝7序列

N1＝length(x1)；n1＝0：N1－1；

y1＝x1(mod(－n1，N1)＋1)；%建立x(－n)，N＝7序列

N2＝10；

x2＝［x1，zeros(1，N2－N1)］；%建立x(n)，N＝10序列

n2＝0：N2－1；

y2＝x2(mod(－n2，N2)＋1)；%建立x(－n)，N＝10序列

subplot(2，2，1)，stem(n1，x1，′k′)；%画x(n)，N＝7

title(′x(n)，N＝7′)；

subplot(2，2，3)，stem(n1，y1，′k′)；%画x(－n),N＝7

title(′x(－n)，N＝7′)；

subplot(2，2，2)，stem(n2，x2，′k′)；%画x(n)，N＝10

title(′x(n)，N＝10′)；

subplot(2，2，4)，stem(n2，y2，′k′)；%画x(－n),N＝

10

title(′x(－n)，N＝10′)；

运行结果如图9-3所示。

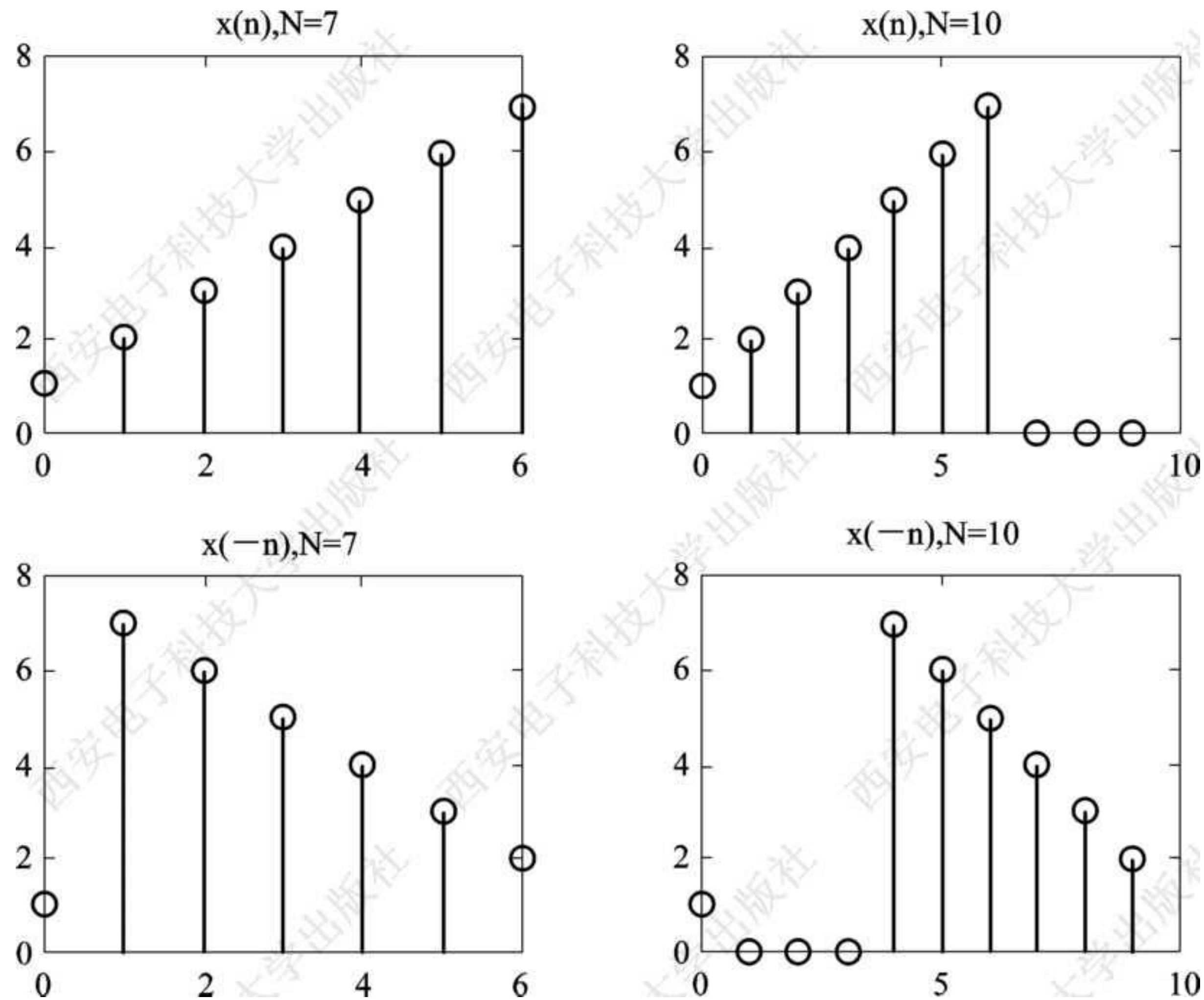

图9-3 例9-3离散序列的循环折叠

例9-4 如例13-3求x(n)＝［1，2，3，4，5，6，7］，循环长度取N＝7。求证：在时域循环折叠后的函数x(－n)，其对应的DFT在频域也作循环折叠，并取X(k)的共轭。

解 MATLAB程序如下：

x1＝［1，2，3，4，5，6，7］；%建立x(n), N＝7序列

N＝length(x1)；

n＝0：N－1；k＝0：N－1；

y1＝x1(mod(－n，N)＋1)；%建立x(－n)，N＝7序列

Xk＝x1*exp(－j*2*pi/N).^(n′*k)%求x(n)的DFT

Yk＝y1*exp(－j*2*pi/N).^(n′*k)%求x(－n)的DFT

运行结果：

Xk＝

28.0000 －3.5000＋7.2678i －3.5000＋2.7912i －3.5000＋0.7989i

－3.5000－0.7989i－3.5000－2.7912i －3.5000 －7.2678i

Yk＝

28.0000 －3.5000－7.2678i －3.5000－2.7912i －3.5000－0.7989i

－3.5000＋0.7989i－3.5000＋2.7912i －3.5000＋7.2678i

4.时域和频域循环卷积特性

离散傅里叶变换的循环卷积特性也称为圆周卷积，分为时域卷积和频域卷积两类。

1)时域循环卷积

假定x(n)、h(n)都是N点序列，则时域循环卷积的结果y(n)也是N点序列：

$$y(n) = x(n) \, Ⓝ \, h(n)$$

若x(n)、h(n)和y(n)的DFT分别为X(k)、H(k)和Y(k)，则

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

2)频域循环卷积

利用时域和频域的对称性，可以得到频域卷积特性。

若

$$y(n)=x(n)h(n)$$

则

$$Y(k)=X(k) \textcircled{N} H(k)$$

下面重点讨论时域循环卷积。时域循环卷积的方法有多种：

方法1： 直接使用时域循环卷积。

由于有限长序列可以看成是周期序列的主值，因此，时域圆周卷积的结果可以由对应的周期序列卷积和取主值部分获得，请参考例11-4。

方法2： 用频域DFT相乘再求逆变换。

即先分别求$x_1(n)$、$x_2(n)$的DFT$X_1(k)$、$X_2(k)$，再求$Y(k)$的IDFT获得$y(n)$。基本思路如图9-4所示。

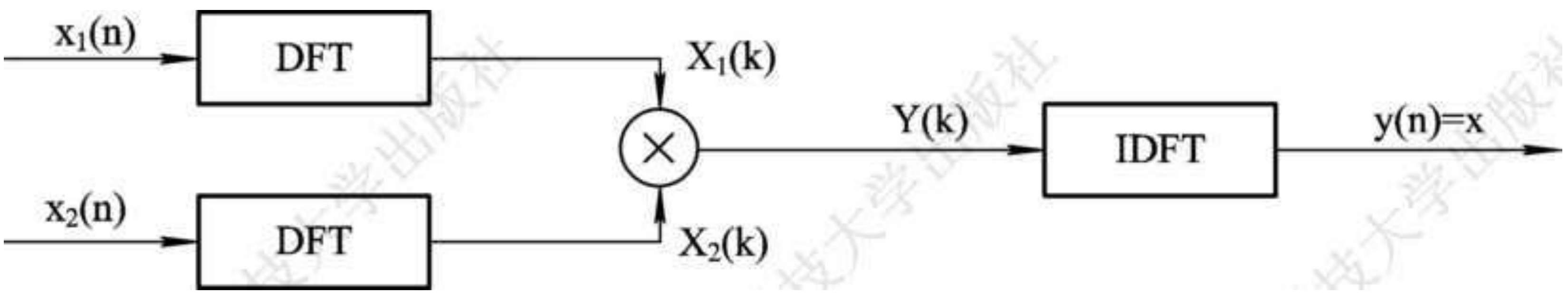

图9-4 用DFT实现循环卷积的框图

方法3： 用FFT和IFFT进行循环卷积。

基本思路同方法2，但直接使用了MATLAB提供的fft和ifft子函数来实现。见后面的快速傅里叶变换实验。

例13-5 将例11-4已知的两个时域周期序列分别取主值，得到x_1＝［1，1，1，0，0，0］，　x_2＝［0，1，2，3，0，0］，求时域循环卷积y(n)并用图形表示。

解 本例采用方法2。程序如下(作图程序部分省略)：

```
xn1＝［0，1，2，3，0，0］；        %建立x1(n)序列
xn2＝［1，1，1，0，0，0］；        %建立x2(n)序列
N＝length(xn1)；
n＝0：N－1；k＝0：N－1；
Xk1＝xn1*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%由x1(n)的DFT求X1(k)
```

Xk2＝xn2*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%由x2(n)的DFT求X2(k)

Yk＝Xk1.*Xk2；%Y(k)＝X1(k)X2(k)

yn＝Yk*(exp(j*2*pi/N)).^(n′*k)/N；%由Y(k)的IDFT求y(n)

yn＝abs(yn) %取模值，消除DFT带来的微小复数影响

得到：

yn＝

0.0000 1.0000 3.0000 6.0000 5.0000 3.0000

运行结果如图13-5所示。由y(n)图形可见，与例9-4主值区域的卷积结果相同。

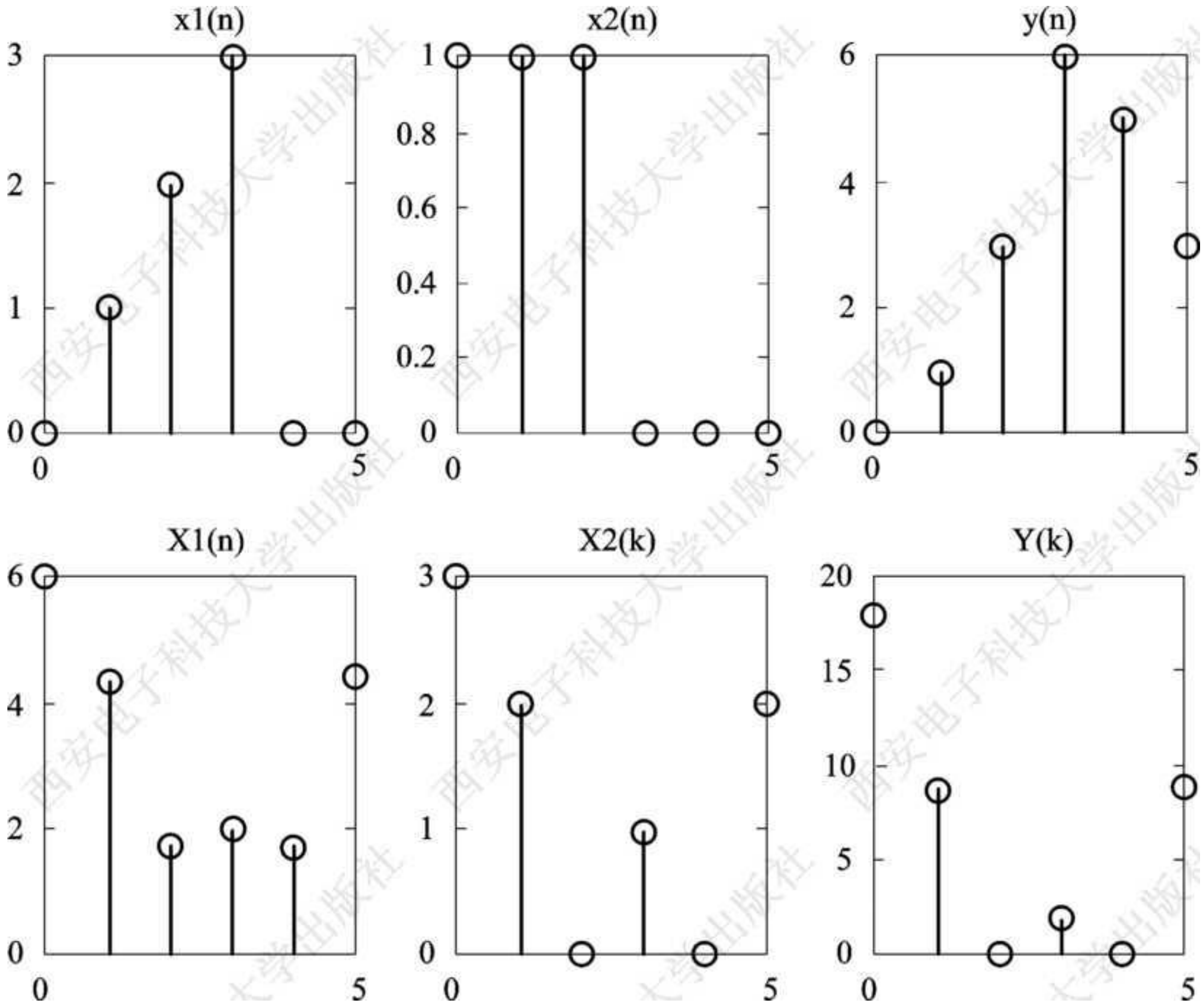

图9-5 例9-5离散序列时域循环卷积的结果

5.循环对称性

由于序列x(n)及其离散傅里叶变换X(k)的定义在主值为0～N－1的区间，因此DFT的循环对称性对时间序列是指关于n＝0和n＝N/2的对称性，对频谱序列是关于数字频率为0和π的对称性。

本实验重点分析实序列的循环对称性。

实序列x(n)可以分解为循环偶序列$x_e(n)$和循环奇序列$x_o(n)$：

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n) \qquad 0\le n\le N-1$$

其中：

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

设DFT［x(n)］＝X(k)＝Re［X(k)］＋j*Im［X(k)］，

则有:

$$DFT[x_e(n)]=R_e[X(k)]$$
$$DFT[x_o(n)]=j*I_m[X(k)]$$

即实序列中的偶序列$x_e(n)$对应于$x(n)$的离散傅里叶变换$X(k)$的实部，而实序列中的奇序列$x_o(n)$对应于$x(n)$的离散傅里叶变换$X(k)$的虚部。

例9-6 已知一个定义在主值区间的实序列x＝［ones(1，4)，zeros(1，4)］，试将其分解成为偶对称序列和奇对称序列，并求它们的DFT，验证离散傅里叶变换的循环对称性。

解 程序如下(作图程序省略)：

```
x＝［ones(1，5)，zeros(1，5)］    %建立x(n)序列
N＝length(x)；
n＝0：N－1；k＝0：N－1；
xr＝x(mod(－n，N)＋1)；%求x(－n)
xe＝0.5*(x＋xr)%求x(n)的偶序列
```

xo＝0.5*(x－xr)%求x(n)的奇序列

X＝x*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%由x(n)的DFT求X(k)

Xe＝xe*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%由xe(n)的DFT求Xe(k)

Xo＝xo*(exp(－j*2*pi/N)).^(n′*k)；%由xo(n)的DFT求Xo(k)

error1＝(max(abs(real(X)－Xe)))%计算X(k)的实部与Xe(k)的差值

error2＝(max(abs(j*imag(X)－Xo)))%计算X(k)的虚部与Xo(k)的差值

运行结果显示：

x＝

1 1 1 1 0 0 0 0

xe＝

1.0000 0.5000 0.5000 0.5000

0 0.5000 0.5000 0.5000

xo＝

0 0.5000 0.5000 0.5000

0－0.5000 －0.5000 －0.5000

error1＝7.2173e－015

error2＝7.4517e－015

程序执行结果如图9-6所示。

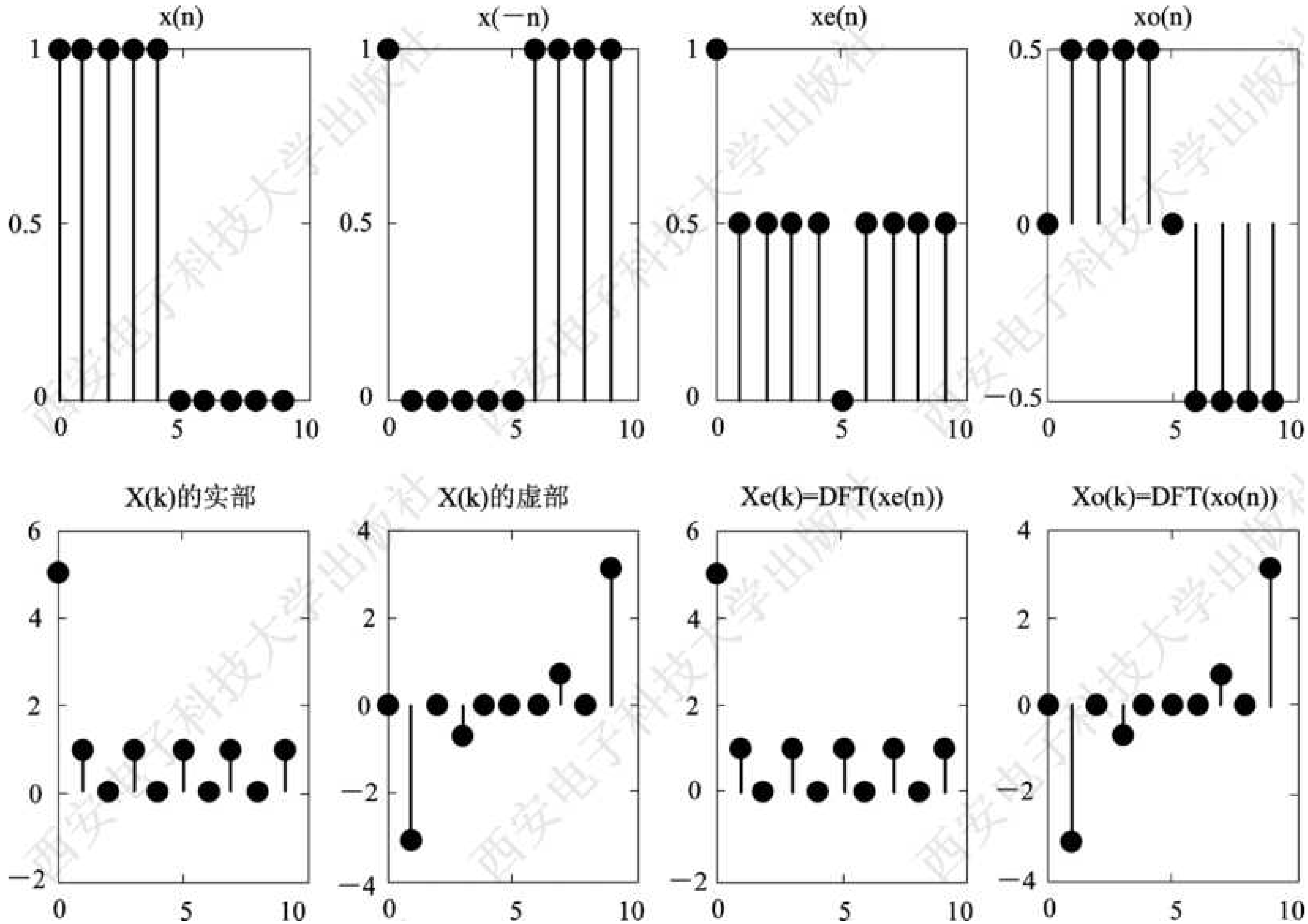

图9-6 例9-6验证离散实序列的循环对称性

由以上输出数据和图形可知：

(1)$x_e(n)$具有循环对称性。对称中心在n＝0和n＝5处。

(2)$x_o(n)$具有循环反对称性。对称中心亦在n＝0和n＝5处。

(3)从图上看，$X_e(k)$与X(k)的实部相等，$X_o(k)$与X(k)的虚部相等；从输出数据也可见，error1和error2的差约为0。即可证明，时域的偶、奇分量的确对应于频域的离散傅里叶变换的实部和虚部。