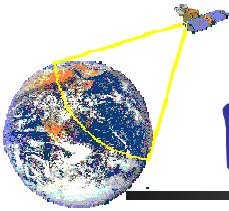


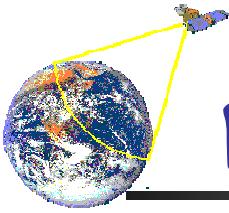
# 数字图像处理

## 图像复原 - 概念和方法



# 图像复原

- 图像复原基本概念
  - 图像退化与复原模型
  - 图像复原基本原理
- 噪声单独干扰下的图像滤波复原
  - 噪声模型及参数估计
  - 空间滤波器设计
  - 自适应空间滤波器
  - 周期性干扰频域滤波器设计
- 系统退化复原
  - 线性系统退化函数的估计
  - 逆滤波复原方法
  - 最小均方误差滤波（维纳滤波）
  - 约束最小二乘方滤波器
  - 匀速运动模糊图像的复原



# 图像复原基本概念

## ■ 图像复原—基本概念

### ➤ 图像复原的目的

✓ 针对质量降低或失真的图像，试图恢复其原始的内容或质量

### ➤ 与图像增强的区别

✓ 图像增强—**Enhancement is subjective**

❖ 从主观视觉角度，改善图像质量；

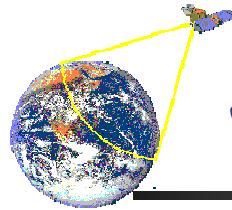
❖ 不着重考虑引起图像质量下降的客观因素

✓ 图像复原—**Restoration is objective**

❖ 从造成图像质量下降的客观原因出发，改善图像质量；

❖ 试图恢复图像原来的面貌

✓ **图像的原始内容或质量 ≠ Good Looking**



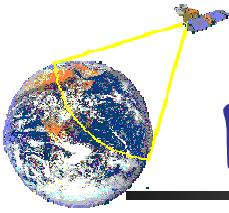
# 图像复原基本概念

## ■ 图像复原—基本概念

### ➤ 图像复原的基本要点

- ✓ 图像复原总是试图寻找引起图像质量下降的客观原因，有针对性地进行“复原”处理
- ✓ 获得使图像质量下降的先验知识，建立退化模型是图像复原处理的前提与关键
- ✓ 图像恢复总是假定已知或可以通过估计得到引起图像降质的模型，而图像增强不需要知道图像降质模型

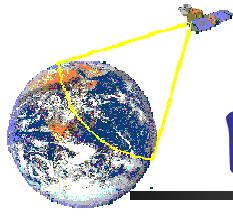
1. 通过先验或估计的方法得到图像退化模型 $H$
2. 由 $H$ ，通过逆过程 $H^{-1}$ 恢复图像



## 图像复原基本概念

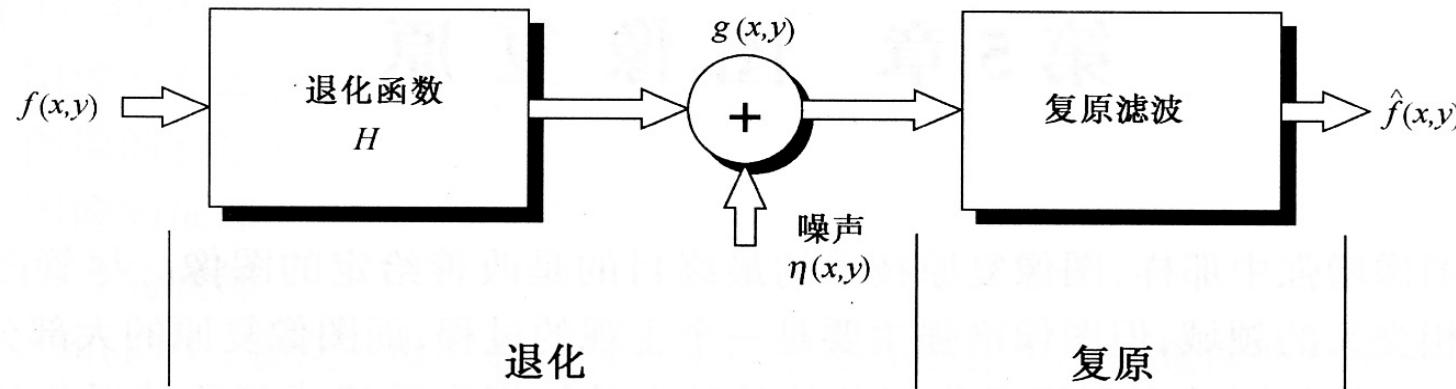
### ■ 引起图像质量下降的客观因素

- 成象系统的象差、畸变、带宽有限等造成图像失真
  - 几何失真：由于成象器件拍摄姿态和扫描非线性引起
  - 灰度失真：光学系统或成象传感器本身特性不均匀，造成同样亮度景物成象灰度不同
  - 运动模糊：成象传感器与被拍摄景物之间的相对运动，引起所成图像的运动模糊
  - 辐射失真：由于场景能量传输通道中的介质特性如大气湍流效应、大气成分变化引起图像失真
  - 噪声干扰：图像在成象、数字化、采集和处理过程中引入的噪声等
- 针对上述客观因素，建立图像退化模型，是进行图像复原处理的第一步



# 图像退化与复原模型

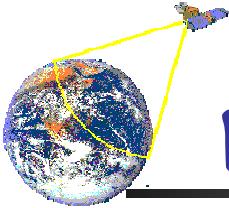
## ■ 图像退化与复原模型



➤ 降质图像可表示为: 
$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

其中  $H[\cdot]$  是综合所有退化因素的函数 1) 简单 -  $f(x,y)*h(x,y)$  - 反卷积  
2) 复杂 - 非线性

有效地获得退化系统  $H$  和噪声  $\eta$  的模型，  
是成功进行图像复原的关键



## 图像退化与复原模型

- 线性移不变图像退化模型

- 考察图像退化模型

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

其中  $H[\cdot]$  是综合所有退化因素的函数

- 假定噪声干扰为零，进一步考察上述模型

✓ 若

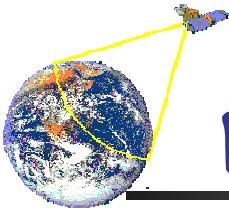
$$H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$$

则该系统为线性系统

✓ 若

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

则该系统为位移不变系统



# 图像退化与复原模型

假定退化模型是一个线性时不变系统，则可以表示为卷积形式

## ■ 线性移不变退化模型

### ➤ 连续函数退化模型

✓ 对线性移不变系统，假定噪声为加性噪声，可有连续函数退化模型

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \\ &= f(x, y) * h(x, y) + \eta(x, y) \end{aligned}$$

✓ 及其频域表示

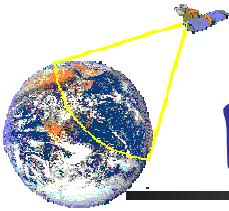
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

## ■ 线性移不变退化图像的复原处理

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \rightarrow \hat{f}(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \rightarrow \hat{F}(u, v)$$

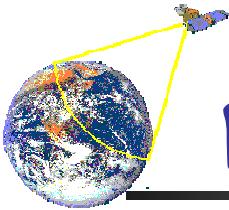
(u, v)



# 图像复原基本原理

## ■ 图像复原基本原理

- 根据退化原因，建立相应的数学模型，从被污染或畸变的图像信号中提取所需要的信息——沿着使图像降质的逆过程恢复图像本来面貌
- 实际的复原过程相当于设计一个滤波器，使其能从降质图像 $g(x, y)$ 中计算得到真实图像的估值 $\hat{f}(x, y)$ ，使其根据预先规定的误差准则，最大程度地接近真实图像 $f(x, y)$ 。
- 广义上讲，图像复原是一个求逆（反演）问题，逆问题经常存在非唯一解，甚至无解。为了得到逆问题的有用解，需要有先验知识以及对解的附加约束条件 — 正则化约束

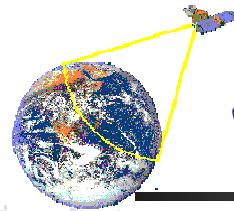


## 图像复原基本原理

### ■ 图像复原基本原理（续）

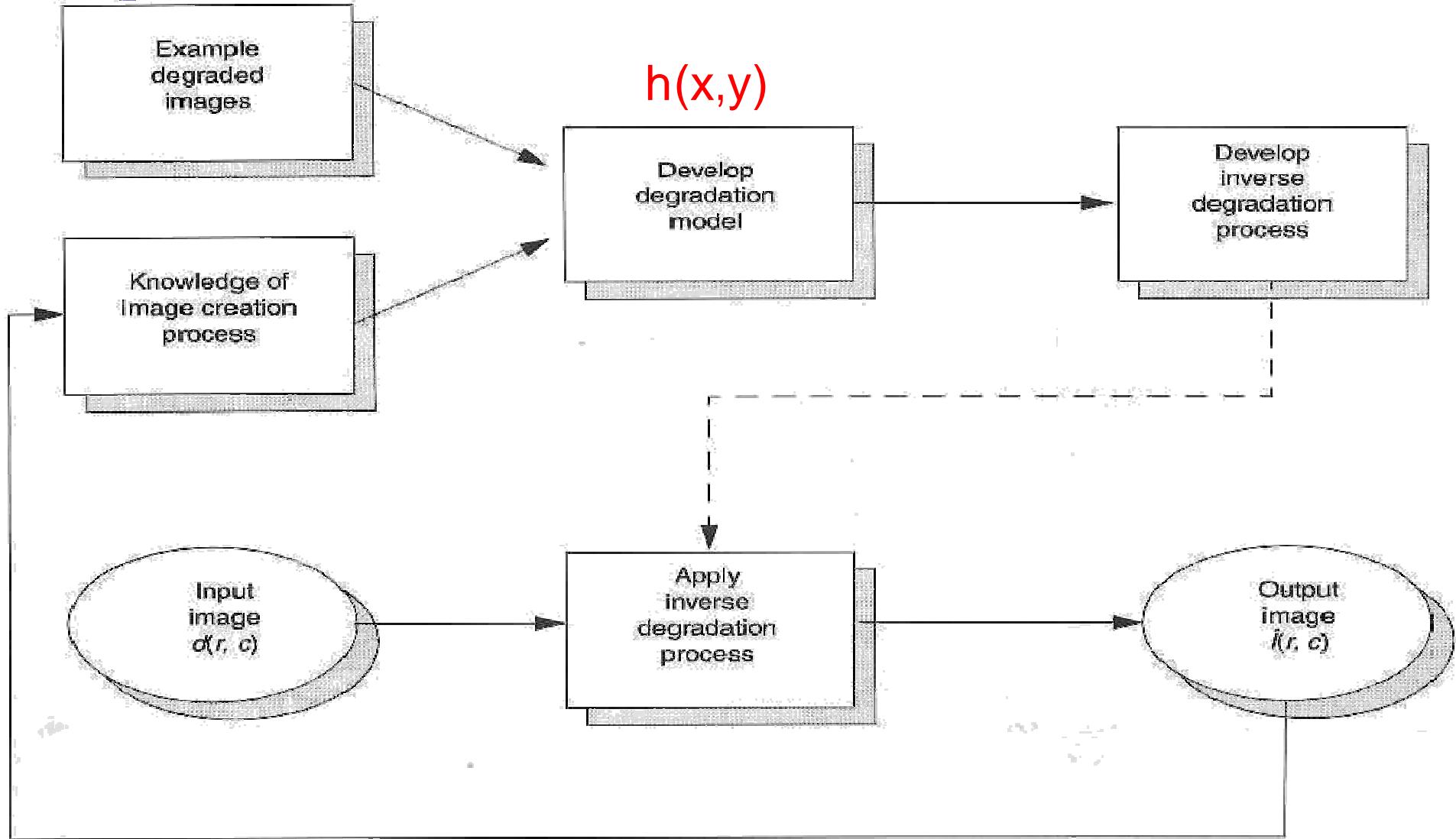
- 引起图像退化的原因常常为非线性的，非线性以及与位置相关的退化处理技术，虽然可得到更加精确的结果，但在处理上将会非常困难并常常可能无解
- 对许多退化过程用线性系统近似不但可以方便求解，而且可得到基本满意的结果   近似为线性、时不变，采用卷积退化模型
- 从线性系统角度，图像的退化可看作为原始图像与退化函数的卷积，因此线性图像复原往往称之为“图像去卷积”，所采用的滤波器称之为“去卷积滤波器”

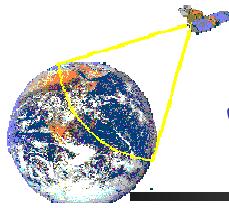
反卷积-deconvolution



# 图像复原基本原理

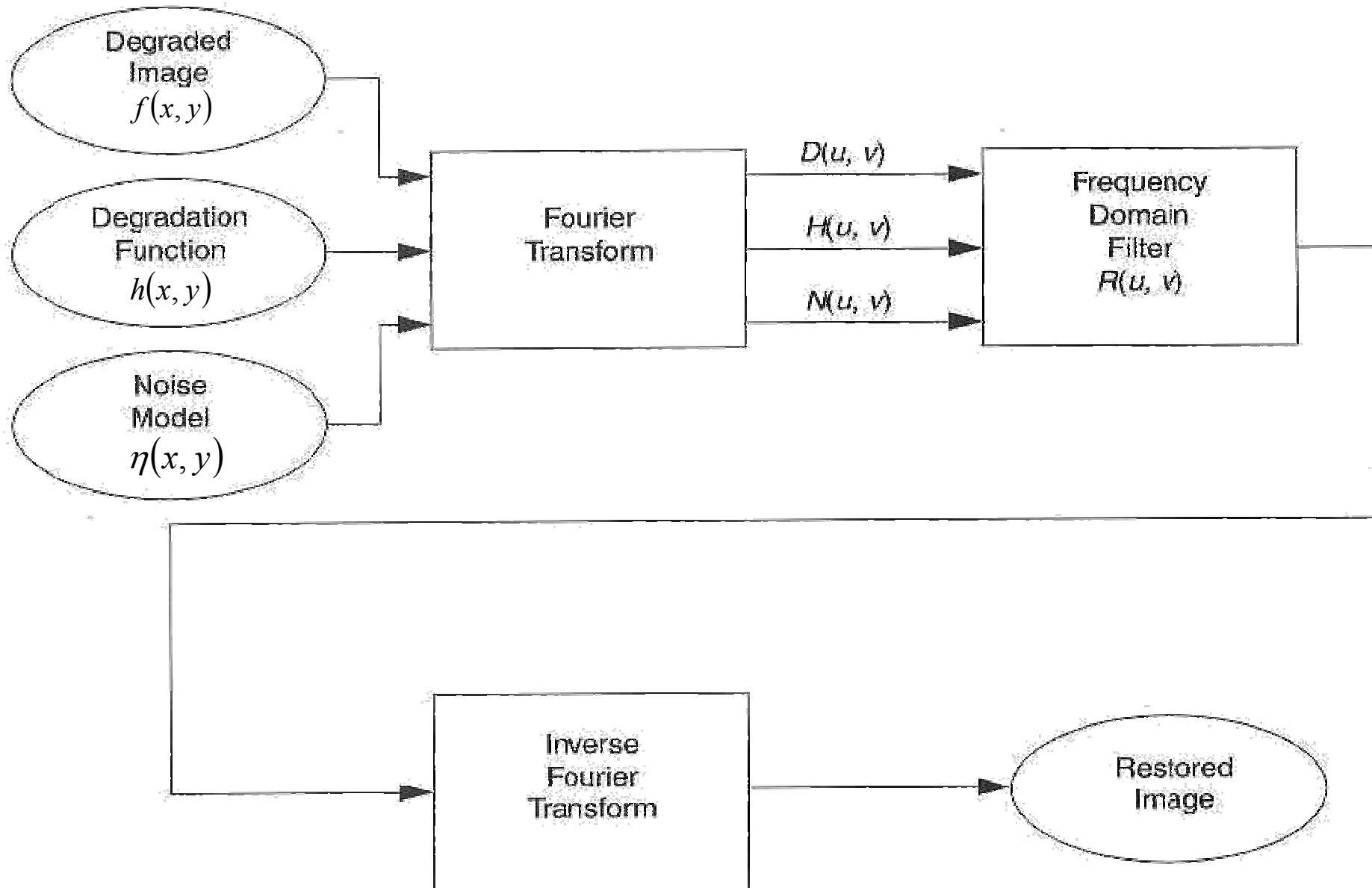
空域方法

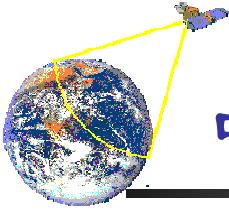




# 图像复原基本原理

频域方法

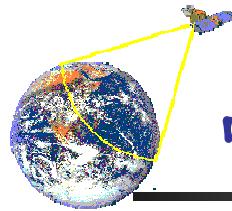




# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声模型

- 数字图像中的噪声主要来源于图像获取与传输过程
- 白噪声（White noise）  
    1. 是一个随机过程；2. 独立和同分布。
  - ✓ 白噪声的傅里叶频谱为常数
  - ✓ 假定白噪声与空间坐标系相互独立
  - ✓ 假定白噪声与图像像素之间相互独立
- 周期性噪声
  - ✓ 噪声分布与空间坐标系相关
  - ✓ 大多数周期性噪声可通过频域滤波基本消除
- 脉冲噪声
  - ✓ 在图像中引起黑、白点状的随机噪声



# 噪声模型及参数估计

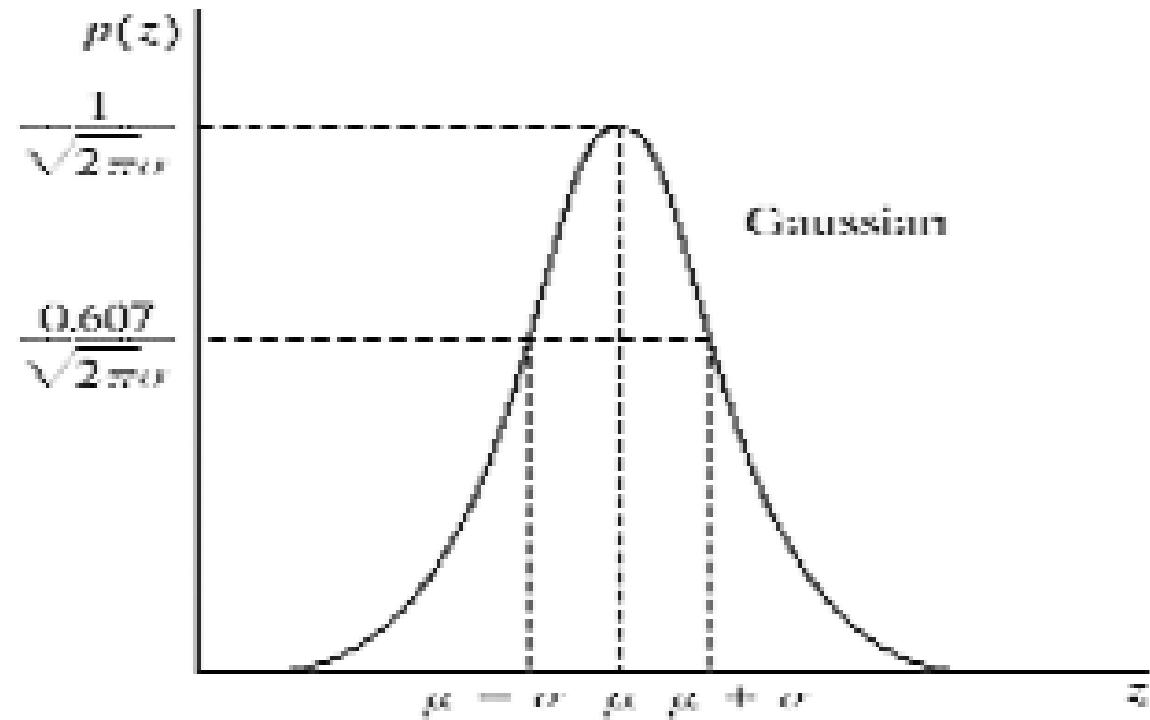
## ■ 噪声模型

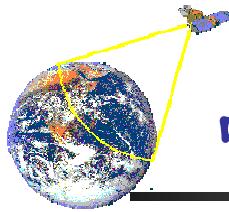
- 主要噪声的概率密度函数
  - ✓ 高斯噪声 (Gaussian noise)

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = \mu$$

$$\sigma^2 = \sigma^2$$





# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声模型

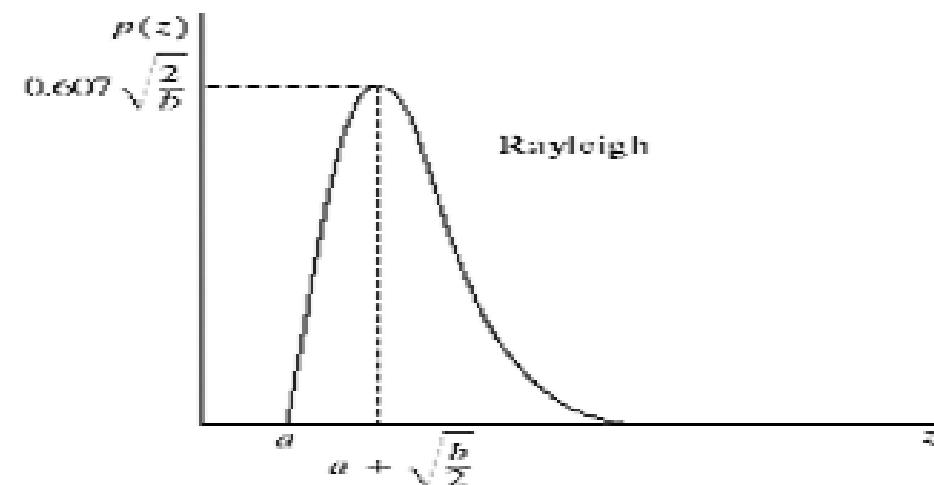
➤ 主要噪声的概率密度函数

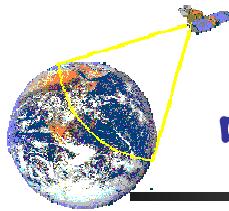
✓ 瑞利噪声 (Rayleigh noise)

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

$$\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}}$$

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$





# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声模型

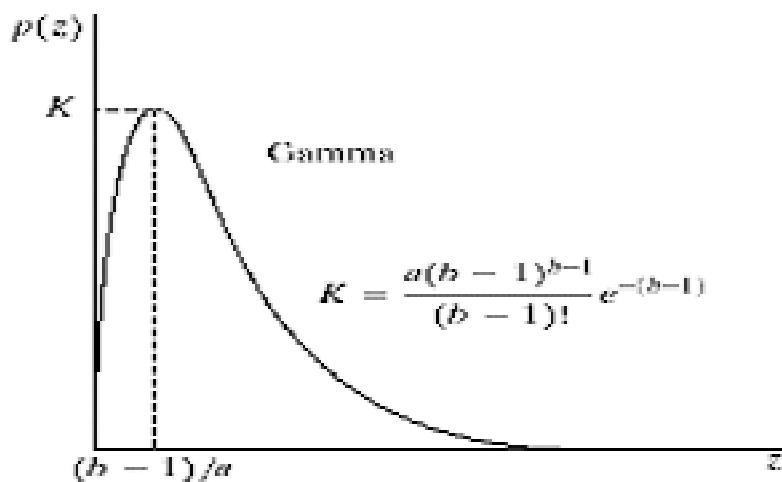
➤ 主要噪声的概率密度函数

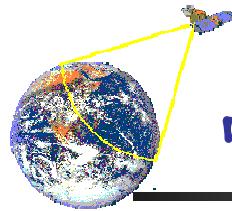
✓ 爱尔兰（伽马）噪声（Erlang(Gamma) noise）

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{b}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$





# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声模型

### ➤ 主要噪声的概率密度函数

✓ 爱尔兰（伽马）噪声 (Erlang(Gamma) noise)

✓ 指数分布噪声 (Exponential noise)

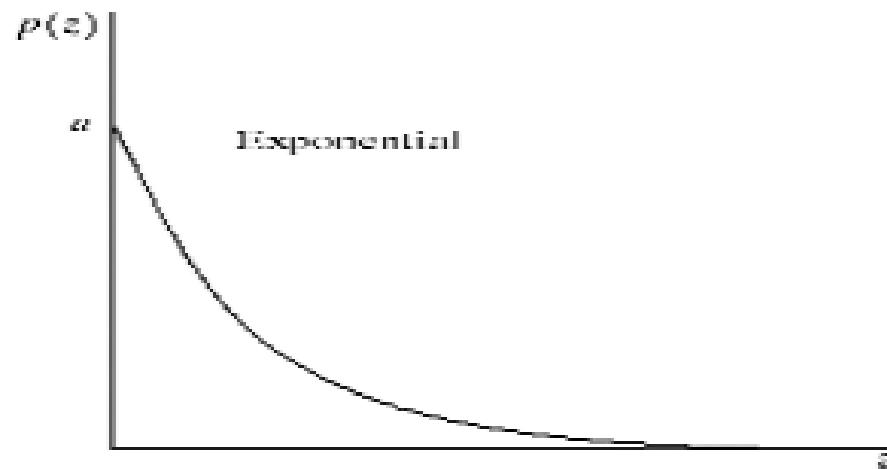


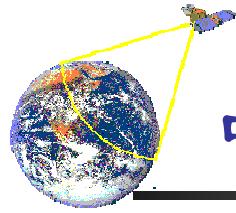
b=1

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$





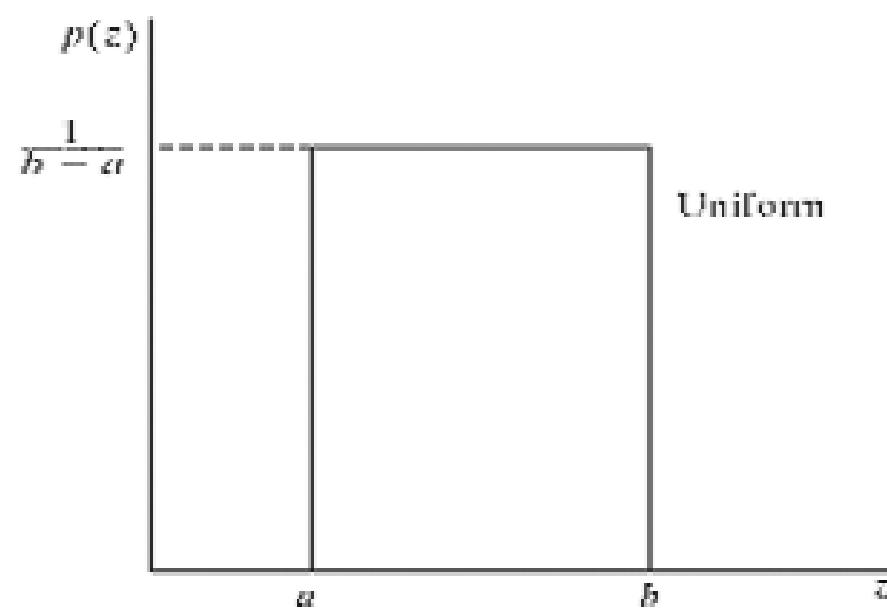
# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声模型

➤ 主要噪声的概率密度函数

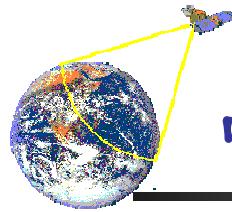
✓ 均匀分布噪声（Uniform noise）

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



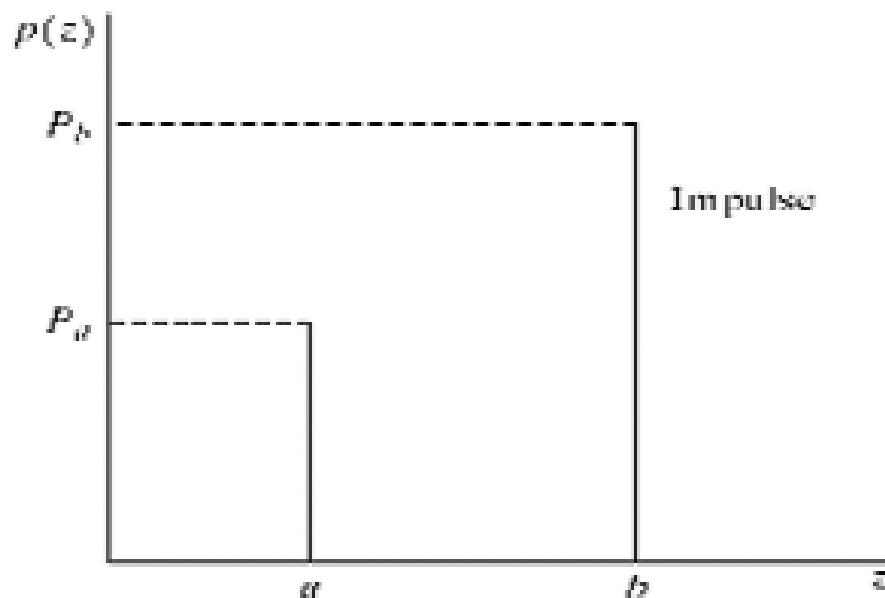
# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声模型

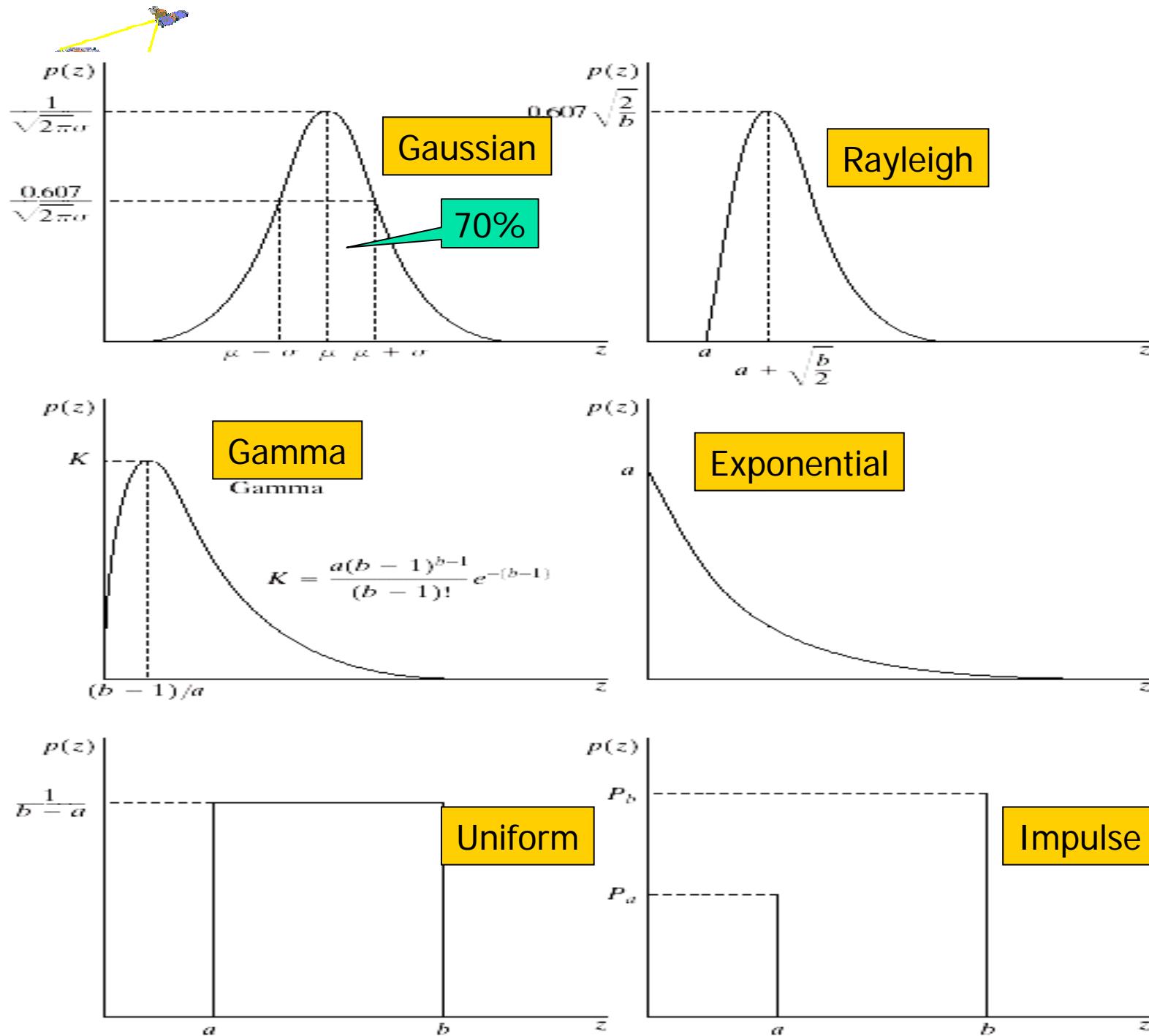
➤ 主要噪声的概率密度函数

✓ 脉冲噪声（椒盐噪声）（Impulse(Salt-and-Pepper) noise）

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



## 噪声对于图像的影响



# 不同噪声比较

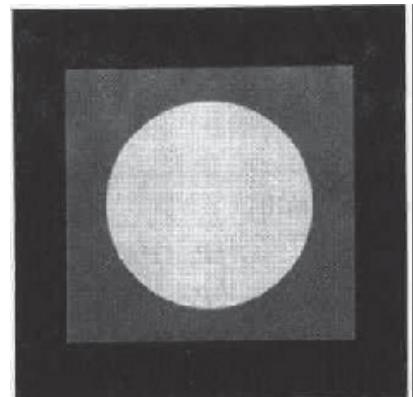


图 5.3 用于说明示于图 5.2 的噪声 PDF 特性的测试图

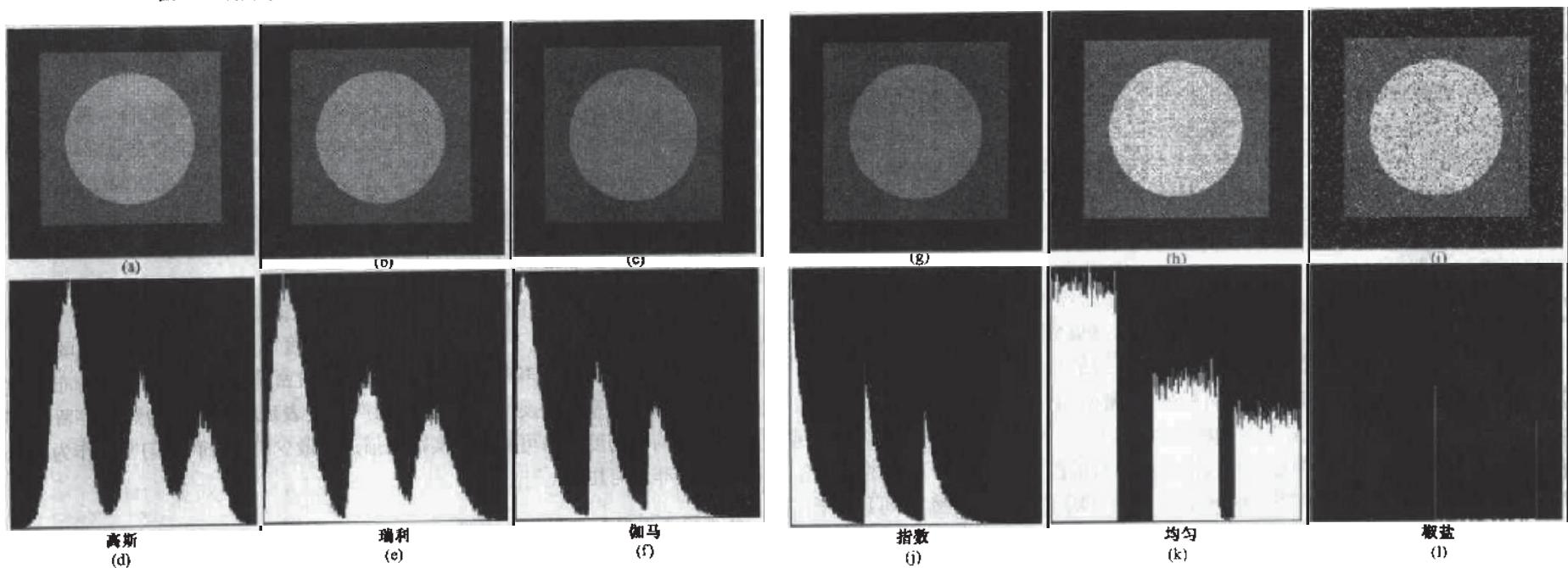
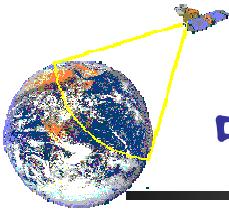


图 5.4 在图 5.3 中附加高斯、瑞利和伽马噪声后的图像和直方图

注意：

测试图像有3种灰度 -  
形成以此为均值的3个分布



# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声参数的估计

- 对于Gaussian, uniform, Rayleigh, Erlang, exponential noises等噪声，关键是得到其均值与方差

$$\mu = \sum_{z_i \in S} z_i p(z_i) \quad \sigma^2 = \sum_{z_i \in S} (z_i - \mu)^2 p(z_i)$$

- 通过传感器特性进行估计

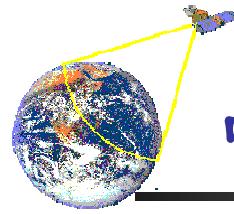
- ✓ 分析传感器成像器件特性（温度、光谱响应、电子电路特性、...）
  - ✓ 使传感器针对均匀灰度图像成像

- 从图像本身进行估计（减去恒定灰度值）

- ✓ 在图像中截取具有恒定灰度值区域进行计算

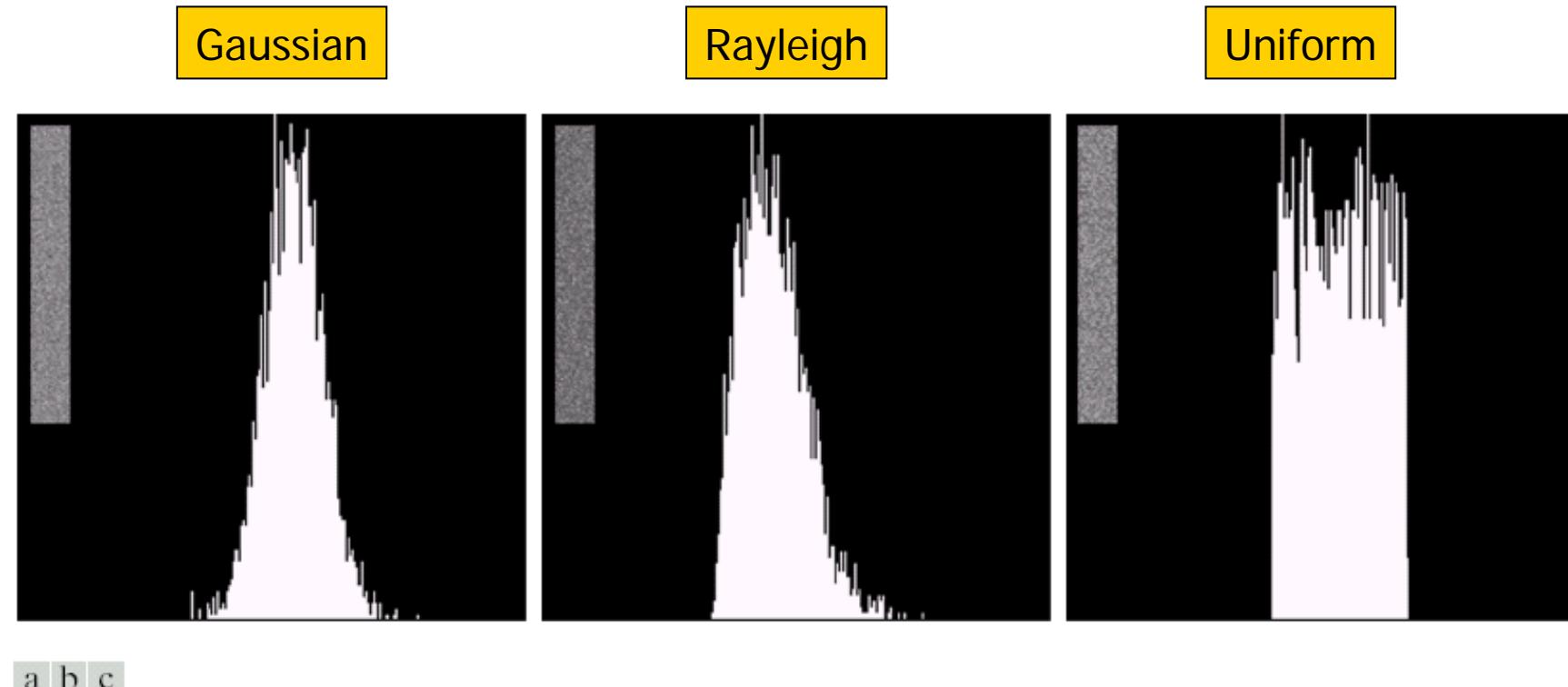
1. 假定图像噪声由采集系统引入
2. 采集均匀分布图像→估计噪声统计量





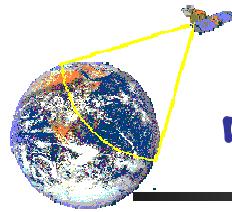
# 噪声模型及参数估计

## ■ 噪声参数的估计



a b c

**FIGURE 5.6** Histograms computed using small strips (shown as inserts) from (a) the Gaussian, (b) the Rayleigh, and (c) the uniform noisy images in Fig. 5.4.



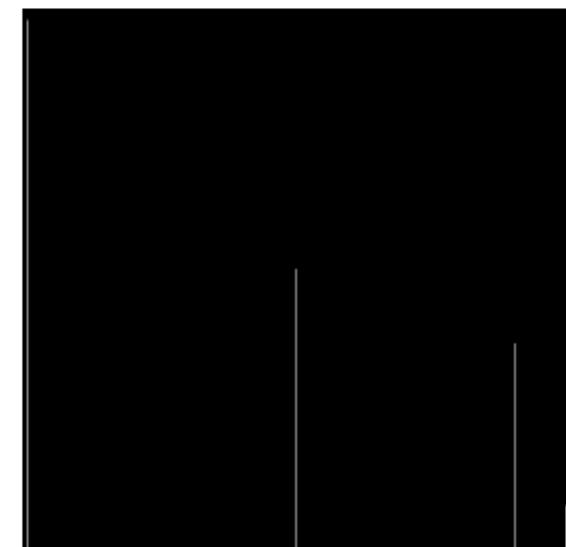
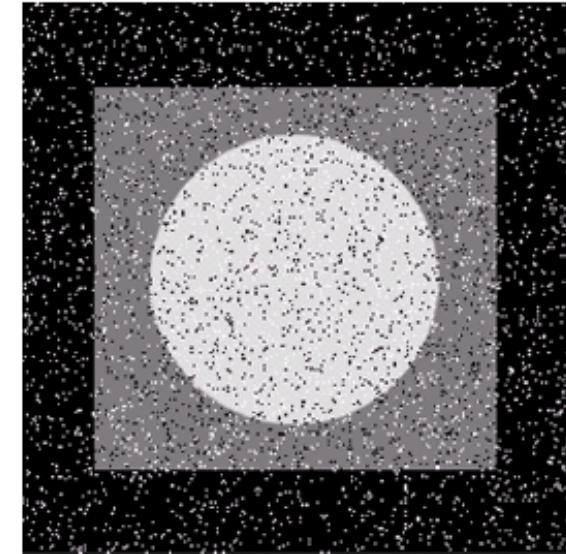
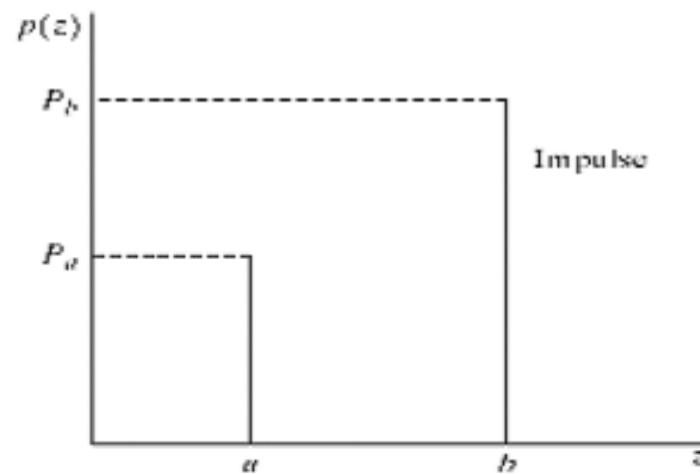
# 噪声模型及参数估计

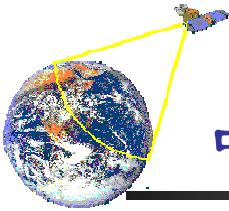
## ■ 噪声参数的估计

➤ 脉冲噪声（椒盐噪声）

通过直方图获得  $P_a, P_b$

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$





## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 噪声单独干扰下的图像滤波复原基本原理

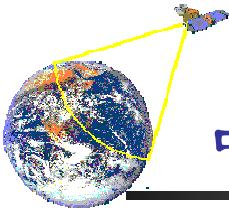
➤ 引起图像降质的唯一原因是噪声干扰时，退化模型变为：

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \rightarrow g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \rightarrow G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

➤ 分析

- ✓ 噪声函数  $\eta(x, y)$  一般很难得到
- ✓ 仅当噪声为周期性噪声时，可通过分析  $G(u, v)$  得到  $N(u, v)$ ，但难于建立分析规律
- ✓ 其他加性噪声存在时，通常选择空间滤波技术，与图像增强中滤波机理完全一样
- ✓ 结合噪声模型可建立一些特殊滤波器，其效果可优于在图像增强中常用方法



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 空间滤波器设计

#### ➤ 算术均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

- 1. S为(x,y)邻域
- 2. m, n为邻域尺寸

#### ➤ 几何均值滤波器

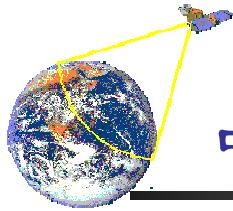
- ✓ 平滑度与算术滤波器相当
- ✓ 图像细节丢失更少

$$\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

#### ➤ 谐波均值滤波器

- ✓ 对“盐”噪声较好
- ✓ 不适用于“胡椒”噪声
- ✓ 善于处理高斯噪声

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s, t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 空间滤波器设计

#### ➢ 逆谐波均值滤波器

式中Q称为滤波器的阶数

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(x, y) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(x, y) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

$Q < 0$  for salt

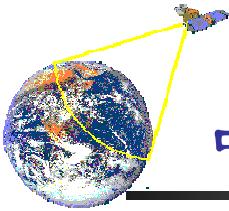
$Q > 0$  for pepper

$Q = 0$

算术均值

$Q = -1$

谐波均值



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 空间滤波器设计

➤ 顺序统计滤波器—基于像素的顺序统计特性

#### ✓ 中值滤波器

- ❖ 适用于多种噪声
- ❖ 尤其对脉冲噪声效果显著

$$\hat{f}(x, y) = \operatorname{media}_{(x, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

#### ✓ 最大值滤波器

- ❖ 对胡椒噪声效果较好

$$\hat{f}(x, y) = \max_{(x, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

#### ✓ 最小值滤波器

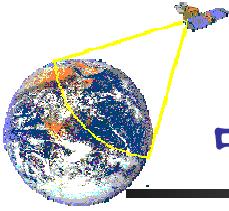
- ❖ 对盐噪声效果较好

$$\hat{f}(x, y) = \min_{(x, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

#### ✓ 中点滤波器

- ❖ 对高斯和均匀分布噪声具有最好效果

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{(x, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(x, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right\}$$

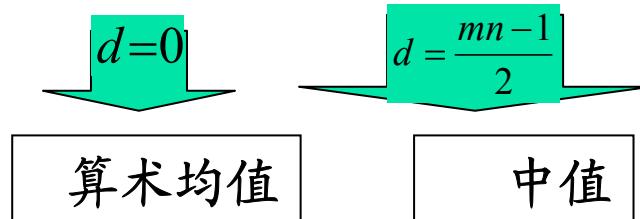


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

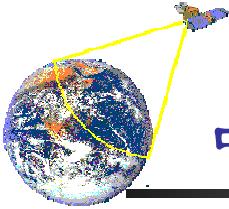
### ■ 空间滤波器设计

- 顺序统计滤波器—基于像素的顺序统计特性决定其相应
  - ✓ 修正阿尔法均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$



在包含多种噪声的情况下效果较好



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

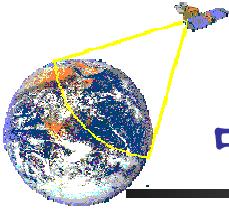
### ■ 空间滤波器设计

#### ➤ 固定滤波器缺陷

- ✓ 固定滤波器未考虑图像的局部特性，难以达到更好效果
- ✓ 为提高滤波性能，固定滤波器日益复杂，但适用面却日益缩小
- ✓ 滤波器窗口越大，图像细节丢失越严重
- ✓ 通常须在保存图像细节与噪声滤除之间寻求某种折衷

#### ➤ 自适应滤波器

- ✓ 结合图像的局部特性自动修改滤波器参数或滤波策略
- ✓ 良好设计的自适应滤波器其性能要优于所有固定滤波器，而滤波器结构可能更为简单



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

- 空间自适应滤波器
  - 局部噪声自适应滤波器

✓ 以局部区域随机变量的统计特性（均值、方差）为基础

设

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

具有整体噪声方差  $\sigma_{\eta}^2$

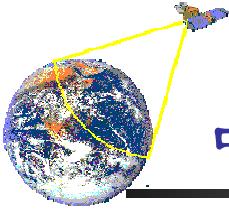
在局部区域  $S_{xy}$  (为  $g(x, y)$  的子集)，像素点具有局部均值  $m_l$  和方差  $\sigma_l^2$ ；

✓ 可有自适应滤波器：

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_l^2} [g(x, y) - m_l]$$

估计得到的噪声方差

局部像素均值和方差

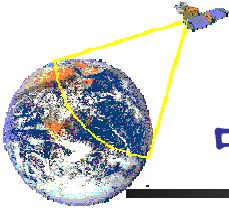


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 空间自适应滤波器

➤ 该自适应滤波器基于如下的设想：

- ✓ 如果噪声方差为零，则表明没有噪声；  $f(x,y)$  等于  $g(x,y)$
- ✓ 如果局部方差高于噪声方差，表明该局部图像信息多于噪声，可能存在较多的边沿，应尽可能保留； 则返回一个  $g(x,y)$  的近似值（这时第二项较小）
- ✓ 如果局部方差与噪声方差相等，表明该区域噪声干扰严重； 返回局部区域像素的算术平均值
- ✓ 实际效果



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

- 空间自适应滤波器

- 自适应中值滤波器

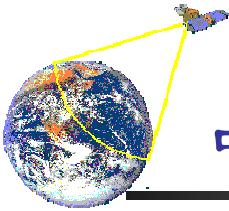
设:  $z_{\min} = S_{xy}$  中灰度级的最小值

$z_{\max} = S_{xy}$  中灰度级的最大值

$z_{\text{med}} = S_{xy}$  中灰度级的中值

$z_{xy} =$  在  $S_{xy}$  中中心化坐标  $(x, y)$  处的像素值

$S_{\max} = S_{xy}$  允许的最大尺寸



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 空间自适应滤波器

#### ➤ 自适应中值滤波器

可有算法

A层：

$$A1 = z_{med} - z_{min} \quad A2 = z_{med} - z_{max}$$

如果：  $A1 > 0$  且  $A2 < 0$ ， 转到 B层

否则： 增大窗口尺寸

如果窗口尺寸  $\leq S_{max}$ ， 重复 A层

否则输出 B层

不成立的条件只有中值  
等于最大或最小值—》  
冲激噪声

B层：

$$B1 = z_{xy} - z_{min} \quad B2 = z_{xy} - z_{max}$$

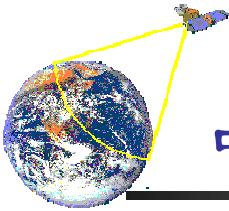
如果：  $B1 > 0$  且  $B2 < 0$ ， 输出  $z_{xy}$

否则： 输出  $z_{med}$

注意：

1. 此时B层的窗口尺寸对应A层中可能的修改

2. 真实像素比中值好

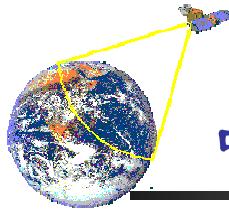


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

### ■ 空间自适应滤波器

#### ➤ 自适应中值滤波器—算法讨论

- ✓ 目标：滤出椒盐噪声（冲激噪声）；平滑其他非冲激噪声；减少物体边界失真
- ✓ 设想： $z_{\max}$ 、 $z_{\min}$ 可粗略认为相当于冲激噪声的噪声成分
- ✓ 算法思路：
  - 1) 首先检测中值 $z_{\text{med}}$ 是否为噪声脉冲
  - 2) 若不是，进一步判断中心像素 $z_{xy}$ 是否为噪声脉冲，若不是，直接输出该点；若是，输出中值
  - 3) 若中值 $z_{\text{med}}$ 为噪声脉冲，则增大窗口尺寸，直至在允许的范围内找到非噪声脉冲中值；否则输出中心像素 $z_{xy}$ 值
- ✓ 算法效果

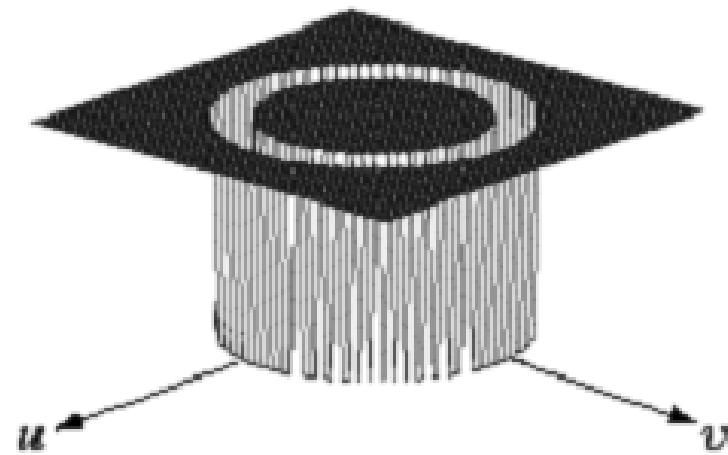


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

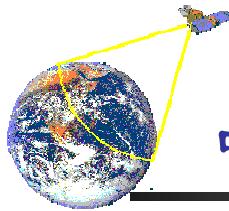
### ■ 周期性噪声频域滤波—带阻滤波器

#### ➤ 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) < D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$



1. 频率为 $D_0$ 的周期性干扰
2.  $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$
3. 沿各方向

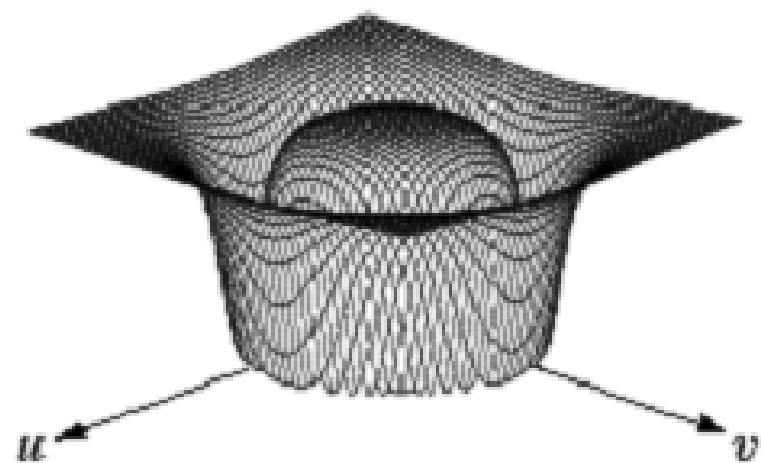


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

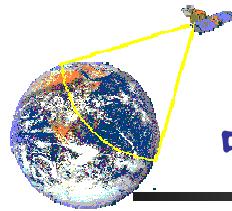
- 周期性噪声频域滤波—带阻滤波器
  - 巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

$$D(u, v) = \left[ \left( u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left( v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$



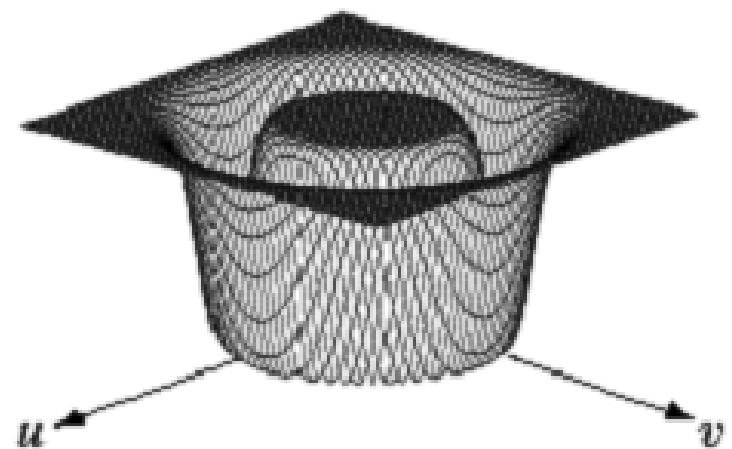
1. 如果已频域中心化，可以不考虑  
 $M/2$ 和 $N/2$
  2.  $W$ 为带阻带宽

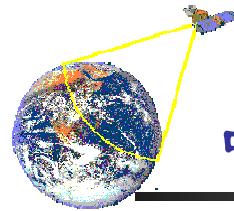


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

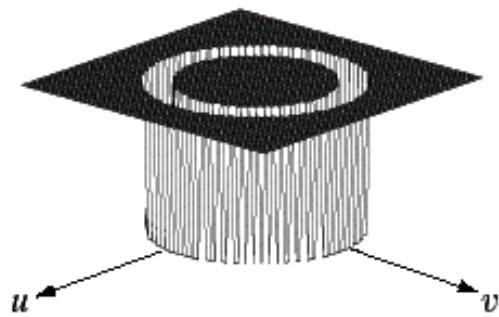
- 周期性噪声频域滤波—带阻滤波器
  - 高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$

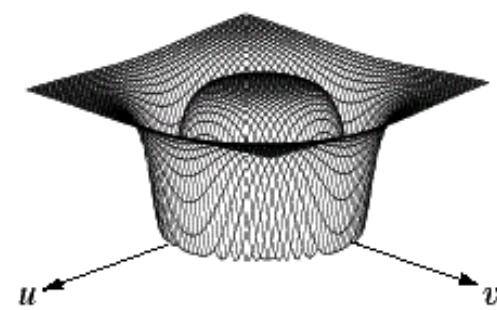




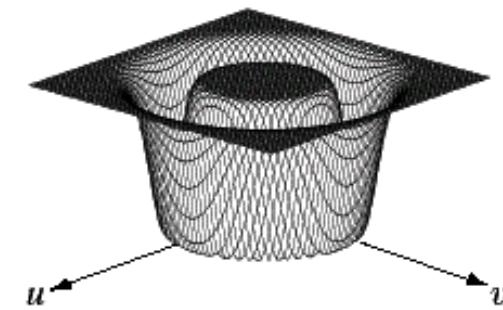
## 噪声单独干扰下的图像滤波复原



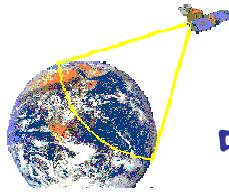
理想带阻滤波器



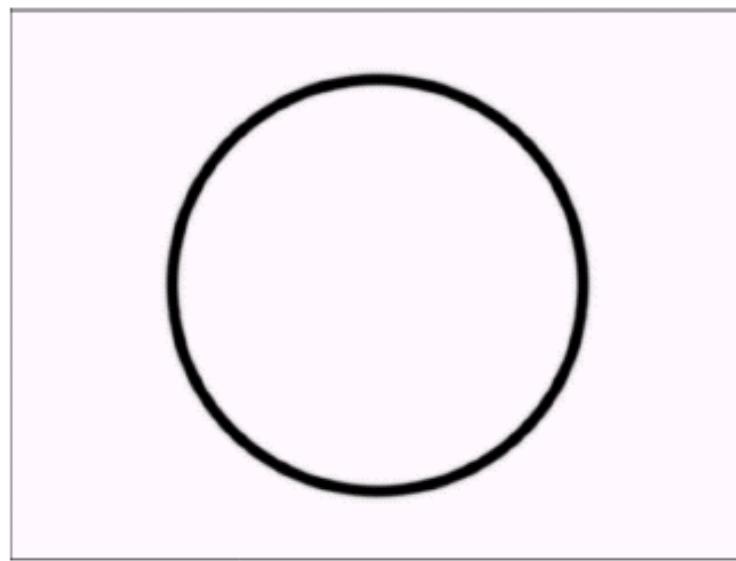
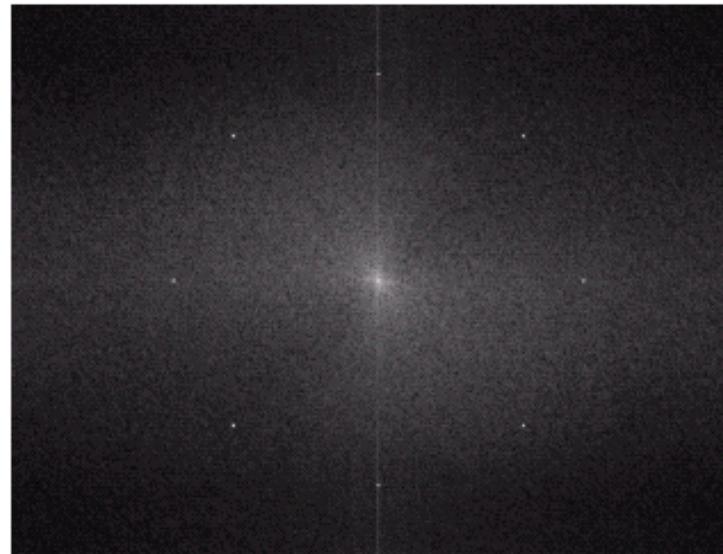
巴特沃斯带阻滤波器



高斯带阻滤波器



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

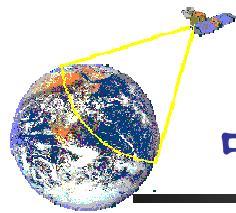


a b  
c d

**FIGURE 5.16**

(a) Image corrupted by sinusoidal noise.  
(b) Spectrum of (a).  
(c) Butterworth bandreject filter (white represents 1). (d) Result of filtering. (Original image courtesy of NASA.)

1. 需要估计正弦噪声的频率
2. 据此设计带阻滤波器



对于频率为  $\sqrt{u^2+v^2}$ ，方向  $\tan^{-1}(v/u)$  的条纹干扰，采用陷波滤波器 (notch filters)

## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

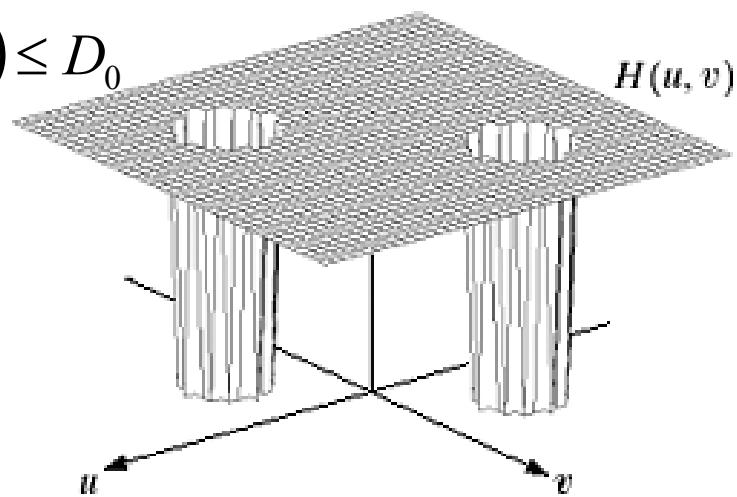
### ■ 周期性噪声频域滤波—陷波滤波器 (Notch Filters)

- 在指定的中心频率点，阻止该中心频率点领域内的频率
- 由于傅里叶变换的对称性，陷波器必须以关于原点对称的形式出现，常常为一对或两对出现
- 理想陷波滤波器—中心在  $(u_0, v_0)$  并在  $(-u_0, -v_0)$  对称的理想陷波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_1(u, v) = \left[ \left( u - \frac{\cancel{M}}{2} - u_0 \right)^2 + \left( v - \frac{\cancel{N}}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[ \left( u - \frac{\cancel{M}}{2} + u_0 \right)^2 + \left( v - \frac{\cancel{N}}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

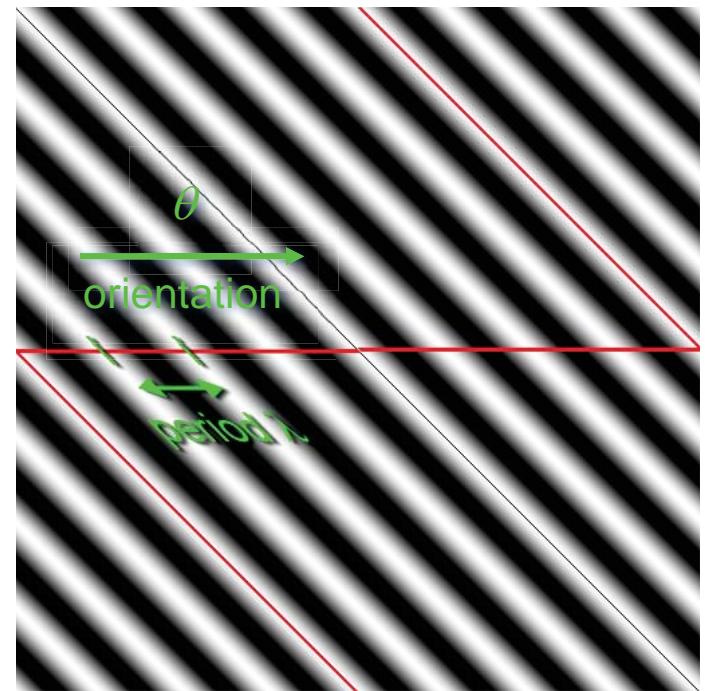
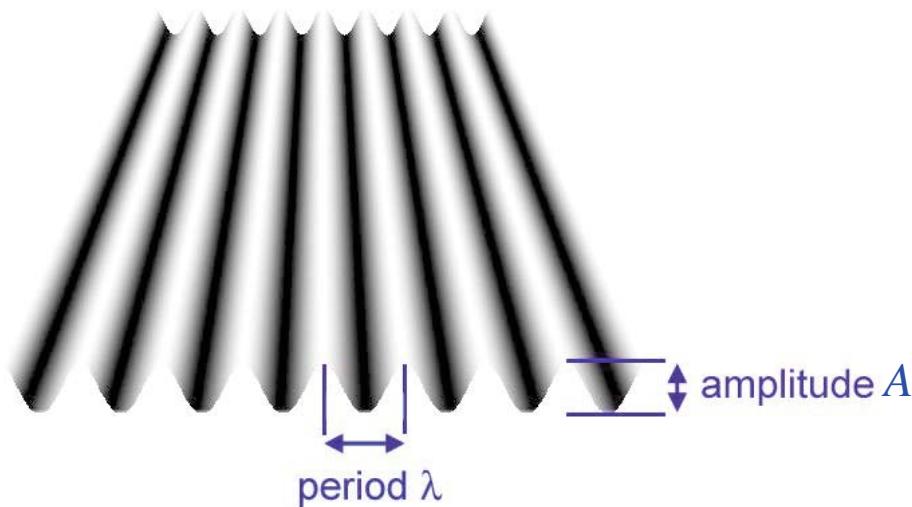


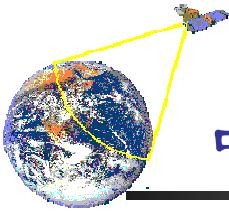
对于  $D_1$ ，相当于原点平移到  $(u-u_0, v-v_0)$ ，以此为新原点，半径小于  $D_0 - 0$

# 2D Sinusoids:

$$I(r, c) = \frac{A}{2} \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r \cdot \sin \theta + c \cdot \cos \theta) + \phi \right] + 1 \right\}$$

... are plane waves with grayscale amplitudes, periods in terms of lengths, ...





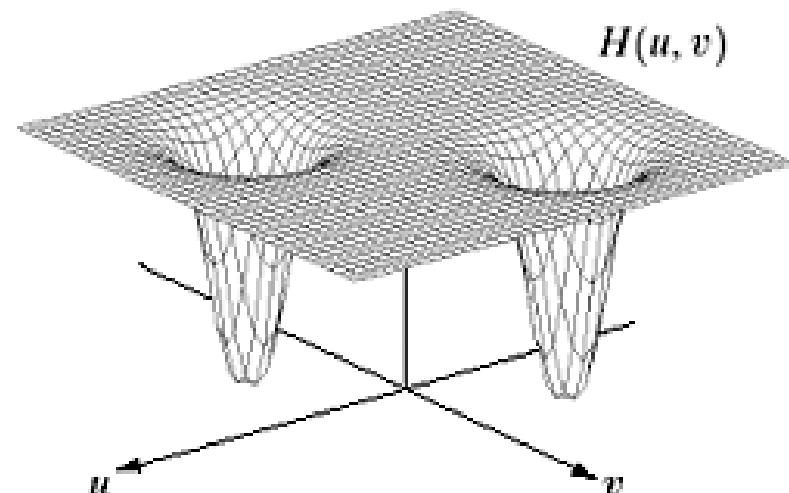
## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

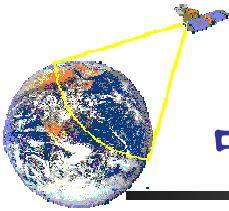
- 周期性噪声频域滤波—陷波滤波器 (Notch Filters)
  - 巴特沃斯陷波滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D_0^2}{D_1(u, v) D_2(u, v)} \right]^n}$$

$$D_1(u, v) = \left[ \left( u - \frac{M}{2} - u_0 \right)^2 + \left( v - \frac{N}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = \left[ \left( u - \frac{M}{2} + u_0 \right)^2 + \left( v - \frac{N}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$





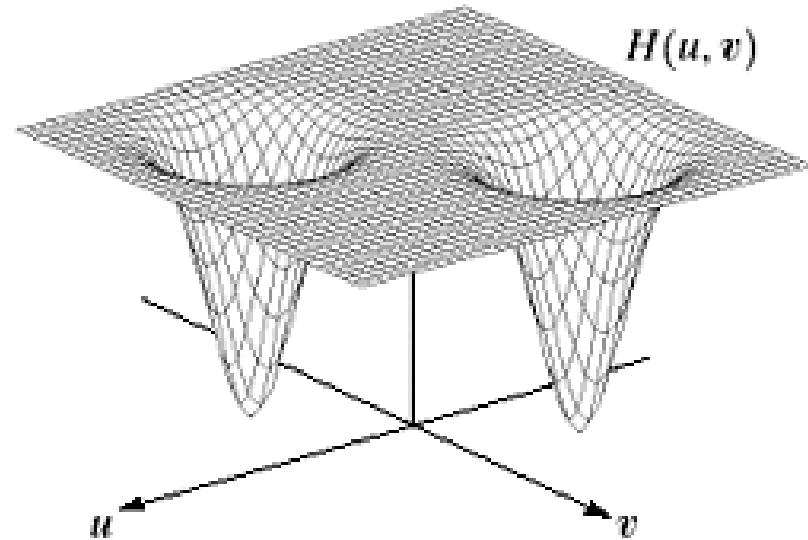
## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

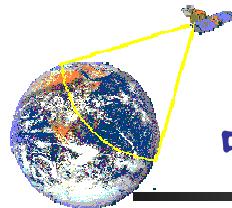
- 周期性噪声频域滤波—陷波滤波器 (Notch Filters)
  - 高斯陷波滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{D_1(u, v) D_2(u, v)}{D_0^2} \right]^2}$$

$$D_1(u, v) = \left[ \left( u - \frac{\cancel{M}}{2} - u_0 \right)^2 + \left( v - \frac{\cancel{N}}{2} - v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$

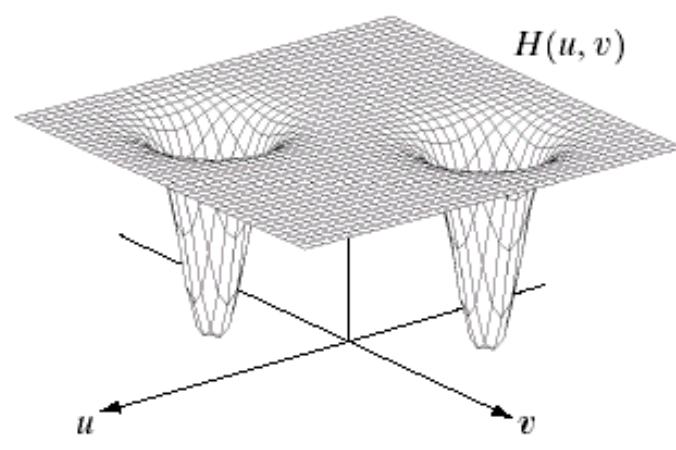
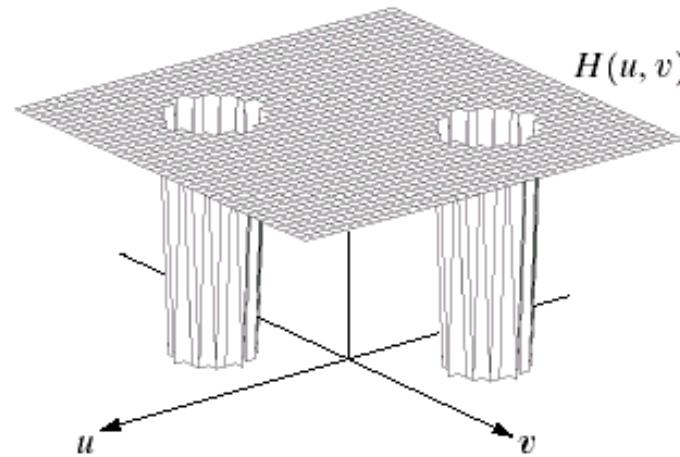
$$D_2(u, v) = \left[ \left( u - \frac{\cancel{M}}{2} + u_0 \right)^2 + \left( v - \frac{\cancel{N}}{2} + v_0 \right)^2 \right]^{1/2}$$



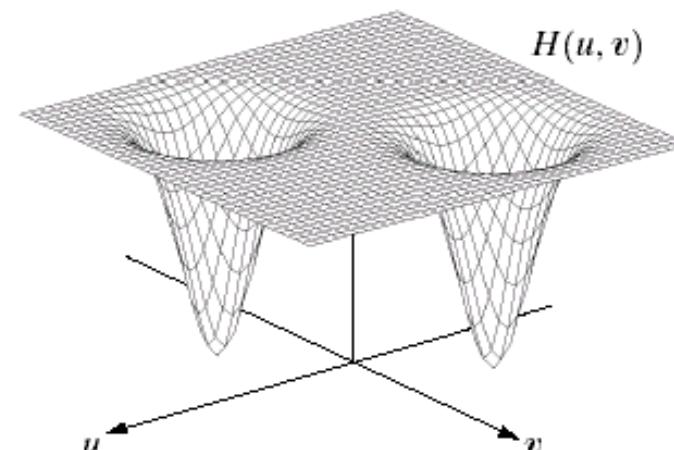


## 噪声单独干扰下的图像滤波复原

理想陷波滤波器

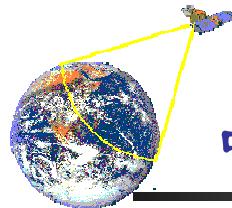


巴特沃斯陷波滤波器

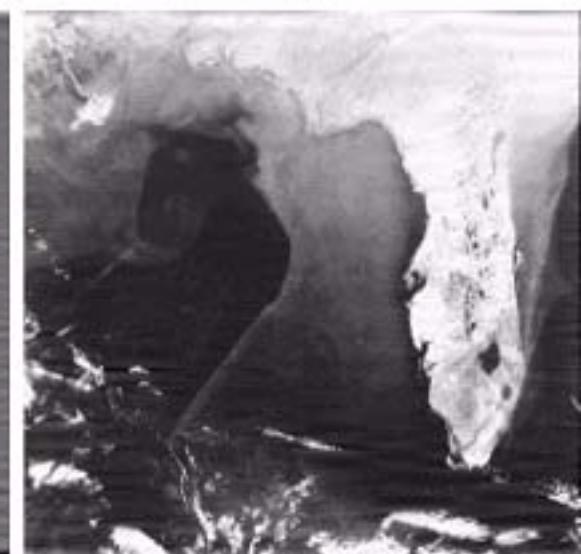
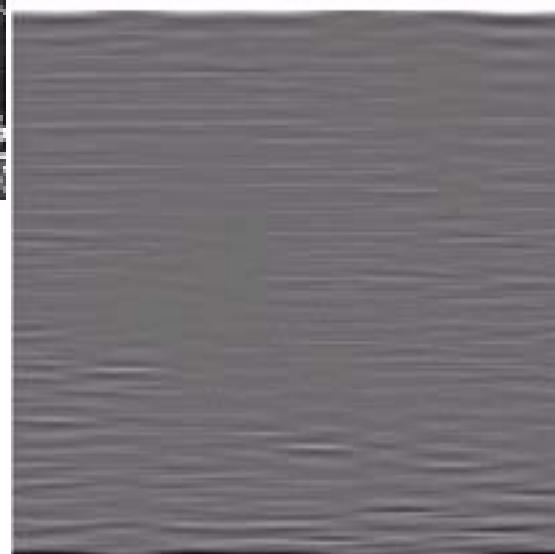
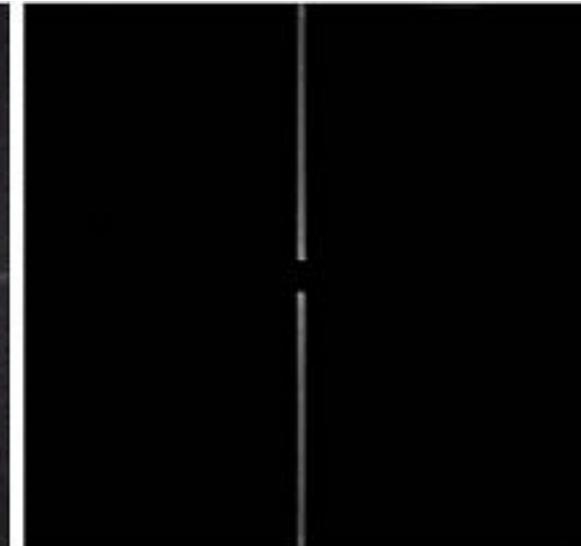
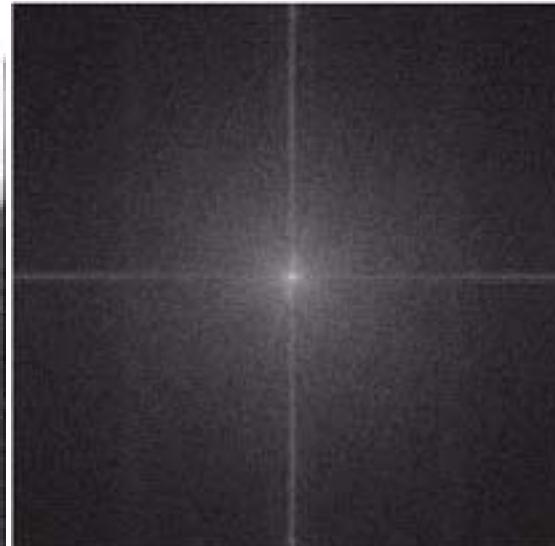


高斯陷波滤波器

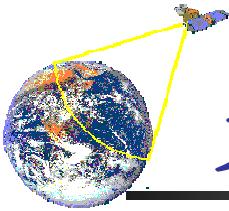
**FIGURE 5.18** Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.



## 噪声单独干扰下的图像滤波复原



具有扫描线条纹干扰  
图像及其陷波滤波结  
果



## 系统退化复原

### ■ 系统退化复原

- 假定退化图像中噪声干扰为零，退化模型变为

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \rightarrow g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \rightarrow G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

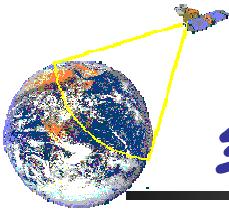
- 退化函数  $H(u, v)$  的估计，是进行系统退化复原的关键一步，对  $H$  的估计过程常称为“系统辨识过程”
- 常用方法为：

✓ 观察法

✓ 实验法

✓ 数学建模法

1. 已知  $g(x, y)$  和  $f(x, y)$ ，估计  $h(x, y)$   
- 退化模型估计
2. 更复杂的情况，仅根据  $g(x, y)$   
估计  $h(x, y)$ ，盲估计



## 线性系统退化函数的估计

### ■ 图像观察估计法

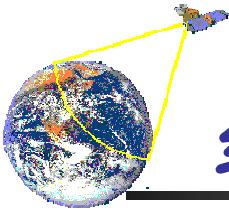
- 通过图像自身结构信息进行估计

选择图像中具有强信号与强特征的局部区域图像  $g_s(x,y)$ ，设法构建一个具有相同大小与特征、但没有退化的近似图像  $\hat{f}_s(x,y)$ ，可有

$$H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\hat{F}_s(u,v)}$$

利用从这一函数出发，进一步假设  $H(u,v)$  的数学表达形式，从而构建  $H(u,v)$  使其与  $H_s(u,v)$  具有基本相同的形状

如对于运动模糊图像的参数估计      估计  $H(u,v)$  的参数

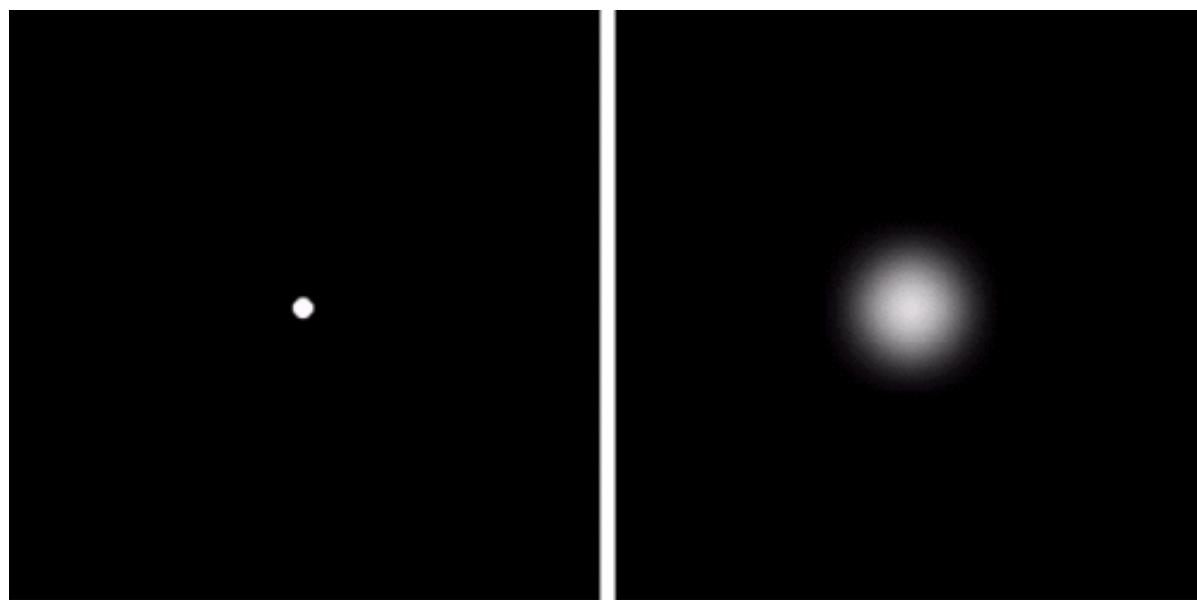


## 线性系统退化函数的估计

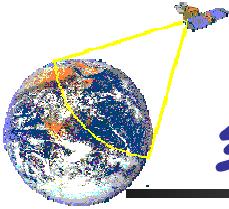
### ■ 试验估计法

- 使用或设计一个与图像退化过程相似的装置（过程），使其成像一个脉冲，可得到退化系统的冲激响应

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A} \quad G(u, v) \text{ 为观察图像的傅里叶变换}$$



1. 脉冲通过退化系统
2. 由脉冲响应得到退化系统
3. 退化系统线性，时不变



# 线性系统退化函数的估计

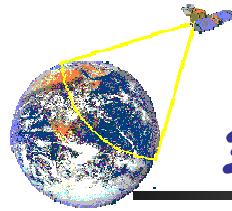
## ■ 模型估计法

- 从引起图像退化的基本原理进行推导，进而对原始图像进行模拟，在模拟过程中调整模型参数以获得尽可能精确的退化模型
  - ✓ 大气湍流模型 ( Hufnagel and Stanley )

$$H(u, v) = \exp[-c(u^2 + v^2)^{5/6}]$$

- ✓ 大气扰动模型 ( 由于通过大气进行长时间曝光 )

$$h(i, j) = K \cdot \exp\left(-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2}\right)$$

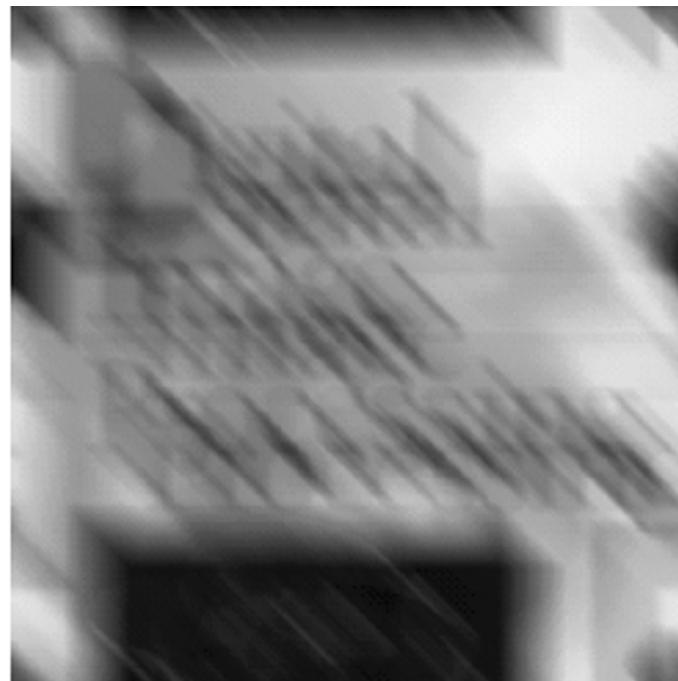
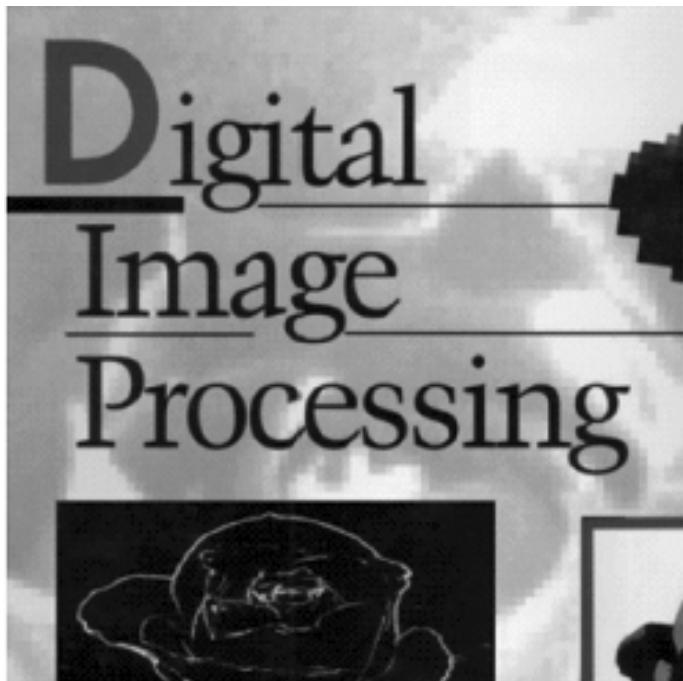


# 线性系统退化函数的估计

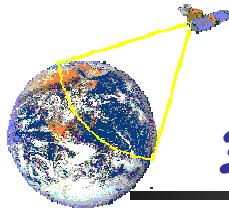
## ■ 模型估计法

- ✓ 运动模糊模型—由于物体向一个方向线性移动

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + ub)} \sin[\pi(ua + ub)] e^{-j(ua + ub)}$$



$$\begin{aligned}a &= b = 0.1 \\T &= 1\end{aligned}$$



# 线性系统退化函数的估计

## ■ 模型估计法

✓ 运动模糊—照相机与景物相对运动

设T为快门时间,  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$ 是位移的x分量和y分量

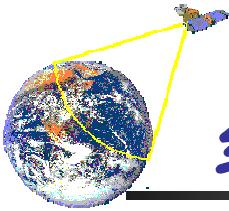
$$H(u, v) = \int_0^T \exp \left\{ -j2\pi (ux_0(t) + vy_0(t)) \right\} dt$$

✓ 光学散焦模型

$$H(u, v) = \frac{J_1(\pi d \rho)}{\pi d \rho}$$

$$\rho = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

$d$ 是散焦点扩展函数的直径,  $J_1(\bullet)$ 是第一类贝塞尔函数。



# 线性系统退化函数的估计

## ■ 模型估计法

### ➤ 点扩展函数法

- ✓ 相当一类退化函数可看作为对图像施加了某种类型的模糊操作，这种模糊操作中的退化函数常称之为点扩展函数（point spread function，PSF） $g(x,y)=f(x,y)*h(x,y)$ ,  $h(x,y)$  - 点扩展函数

- ✓ 获得点扩展函数的方法

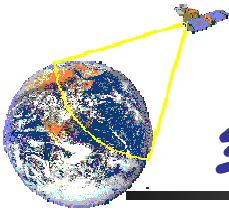
- ◆ 点光源法

保持成像时的条件不变，将一个点光源输入成像系统，输出即为相应的PSF

频率响应法

保持成像时的条件不变，将不同频率的光源输入成像系统，输出系列形成相应的PSF的傅里叶变换函数 $H(u,v)$

不同频率  $(u,v)$  - 对于  $H(u,v)$



# 线性系统退化函数的估计

## ■ 模型估计法

- 通过一个和图像退化过程相似的装置

### ➤ 点扩展函数法

✓ 获得点扩展函数的方法（续）

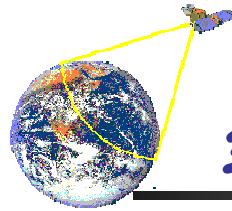
#### ❖ 图像像素测量法

测量模糊图像中单个像素点发生变化的方向与强度，形成PSF模板，该模板作为该图像的退化函数

单个像素点发生变化的方向可能为：

- 线性单一方向（水平、垂直、对角）
  - 所有方向
- 对称

1. 输入一个脉冲图像，例如  $(x,y)$  处为 1，其他为 0
2. 检测输出图像  $(x,y)$  周围的变化，得到模板



# 线性系统退化函数的估计

## ■ 模型估计法

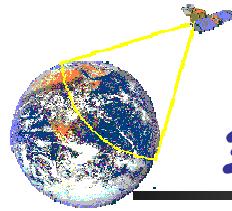
### ➤ 点扩展函数模板

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

水平方向单位模糊

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
0	0	4	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

垂直方向中央加权



# 线性系统退化函数的估计

## ■ 模型估计法

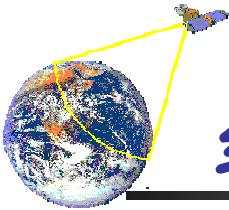
### ➤ 点扩展函数模板

1	0	0	0	0
0	2	0	0	0
0	0	4	0	0
0	0	0	2	0
0	0	0	0	1

对角线高斯分布

0	1	1	1	0
1	2	4	2	1
1	4	8	4	1
1	2	4	2	1
0	1	1	1	0

圆形高斯分布



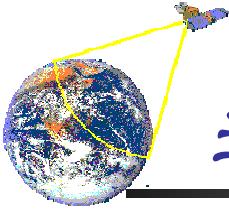
## 线性系统退化函数的估计

### ■ 模型估计法

#### ➤ 点扩展函数法

- ✓ 对于PSF模板，进一步的按照待处理图像的尺寸进行补零处理，使其具有相同的大小
- ✓ 对补零处理后的模板，进行循环移位，使得原始模板的中心位于图像的原点（0,0）
- ✓ 由此形成的退化函数，可采用傅里叶变换进行复原处理

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$



## 逆滤波复原方法

### ■ 逆滤波（反卷积）复原方法

➢ 由退化模型

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

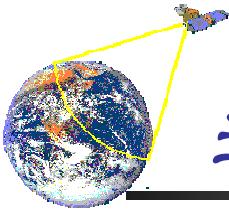
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

➢ 若已知退化函数  $H(u, v)$ , 则复原过程为

$$F(u, v) = G(u, v) / H(u, v) \rightarrow f(x, y)$$

➢ 实验证明, 当退化图像的噪声较小, 即轻度降质时, 采用逆滤波复原的方法可以获得较好的结果

加性噪声  $n(x, y)$  很小时



## 逆滤波复原方法

### ■ 逆滤波复原方法

- 逆滤波复原的病态问题 (ill-posed problem)

由 
$$F(u, v) = G(u, v)/H(u, v)$$

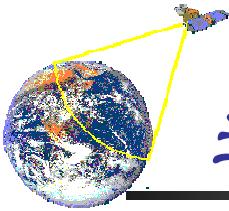
在  $H(u, v)$  等于零或非常小的数值点上,  $F(u, v)$  将变成无穷大或非常大的数

进一步考虑噪声影响 
$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

由于噪声分布在很宽的频率空间, 即使数值很小也会因为  $H(u, v)$  使得上式右侧第二项变得很大, 噪声影响大大增强

- 改进方法——伪逆滤波复原

对  $H(u, v)$  规定一个门限值 
$$H^{-1}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & |H(u, v)| > \delta \\ 0 & |H(u, v)| \leq \delta \end{cases}$$

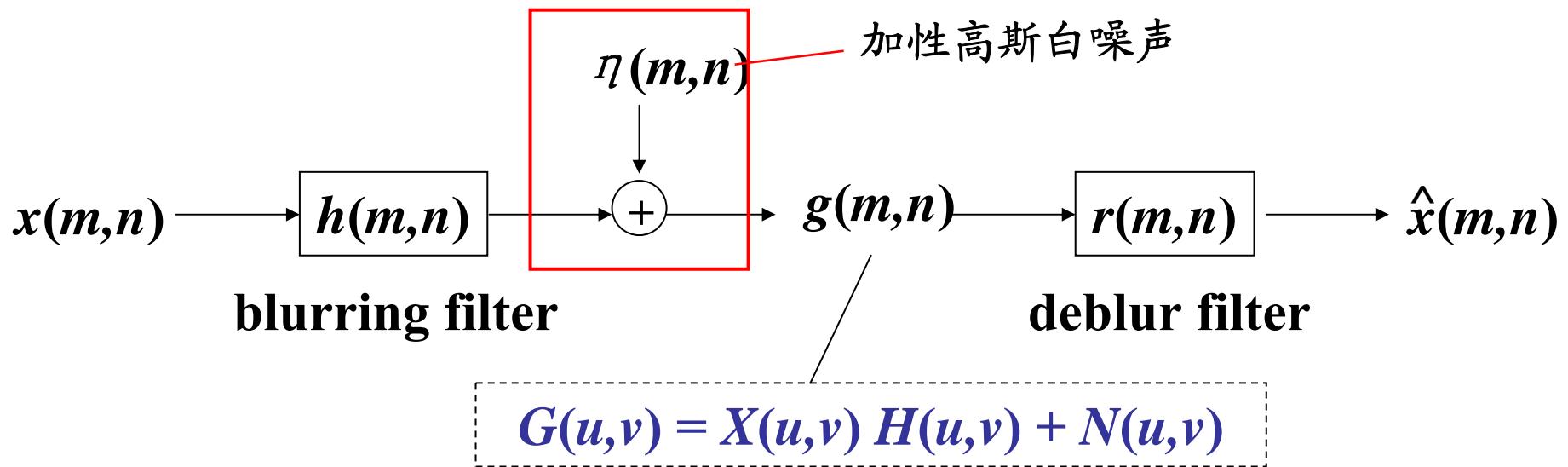


## 逆滤波复原方法

### ■ 逆滤波复原方法——伪逆滤波复原

➤ 进一步考察复原模型

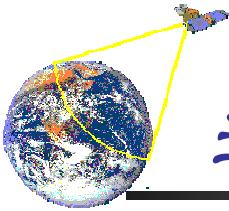
同时考虑退化模型h和  
加性噪声n时的图恢复



$$\hat{X}(u,v) = G(u,v)R(u,v) = \frac{X(u,v)H(u,v) + N(u,v)}{H(u,v)}$$

$$= X(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

可能在很高的频率时趋于零

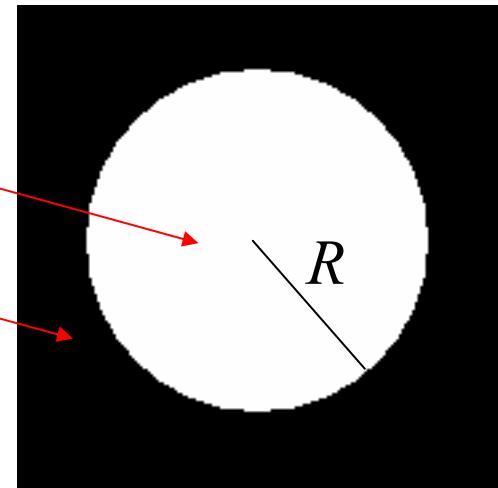


## 逆滤波复原方法

### ■ 逆滤波复原方法——伪逆滤波复原

➤ 施加圆形范围限制

$$H^{-1}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & \sqrt{u^2 + v^2} \leq R \\ 0 & \sqrt{u^2 + v^2} > R \end{cases}$$

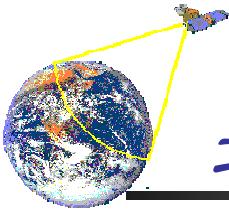


实例—大气湍流复原

对大气湍流，有退化函数

$$H(u, v) = e^{-k[(u-M/2)^2 + (v-N/2)^2]^{5/6}}$$

具备上述特征



## 最小均方误差滤波（维纳滤波）

### ■ 最小均方误差滤波（维纳滤波-1942）

➤ 假定图像 $f(x,y)$ 和噪声 $\eta$ 均为随机信号，且相互之间互不相关

➤ 目标：寻求最佳复原图像，使得均方误差

$$e^2 = E \left\{ \left| f - \hat{f} \right|^2 \right\}$$

为最小

➤ 设

$$H(u, v)$$

退化函数

$$H^*(u, v)$$

退化函数的复共轭

$$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$$

$$S_\eta(u, v) = E \{ |N(u, v)|^2 \}$$

噪声功率谱

$$S_f(u, v) = E \{ |F(u, v)|^2 \}$$

未退化图像功率谱

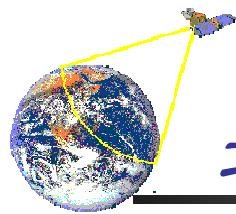
思路：设 $h$ 为恢复滤波器

1) 设计目标函数-准则

2) 目标函数最小—》  
恢复滤波器

3) 假定 $g$ 为退化图像  
恢复图像 $= h^* g$

第二步注 :  $2E|FHG|=2E\{\sqrt{F^*H^*G^*FHG}\}=E\{\sqrt{|HF^*G|^2+|H^*FG^*|^2}\}$   
 $=E\{HF^*G\}+E\{H^*FG^*\}=H^*E\{F^*G\}+H^*E\{FG^*\}$ , H固定



## 最小均方误差滤波 (维纳滤波)

### ■ 最小均方误差滤波 (维纳滤波)

➢ 推导过程为

$$\begin{aligned}
 C &= E\left\{\|f - h_{win}g\|^2\right\} = E\left\{\|F(u,v) - H_{win}(u,v)G(u,v)\|^2\right\} \\
 &= E\left\{\|F(u,v)\|^2\right\} - H_{win}(u,v) \cdot E\left\{F^*(u,v)G(u,v)\right\} \\
 &\quad - H_{win}^*(u,v) \cdot E\left\{F(u,v)G^*(u,v)\right\} + \|H_{win}(u,v)\|^2 \cdot E\left\{\|G(u,v)\|^2\right\} \\
 &= S_f(u,v) + \|H_{win}(u,v)\|^2 \cdot \left( \|H(u,v)\|^2 \cdot S_f(u,v) + S_n(u,v) \right) \\
 &\quad - H_{win}(u,v) \cdot H(u,v) \cdot S_f(u,v) - H_{win}^*(u,v) \cdot H^*(u,v) \cdot S_f(u,v)
 \end{aligned}$$

经维纳滤波的恢复图像

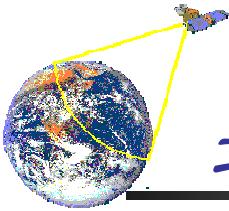
同样推导

$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$  ,  $H(u,v)$ 为退化函数 , 和维纳滤波器 $H_{win}$ 不同

Set  $\partial C / \partial H_{win}(u,v) = 0 \Rightarrow$

$$H_{win}(u,v) = \frac{H^*(u,v)S_f(u,v)}{\|H(u,v)\|^2 S_f(u,v) + S_n(u,v)}$$

维纳滤波器



## 最小均方误差滤波（维纳滤波）

### ■ 最小均方误差滤波（维纳滤波）

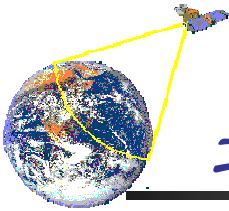
➤ 维纳滤波结果为  $H_{win}(u,v)G(u,v)$

$$\hat{F}(u,v) = \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)} \cdot \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

➤ 维纳滤波器讨论

- ✓ 维纳滤波为均方误差最小意义下的最佳滤波，可使具有噪声干扰图像的客观复原性能达到最佳
- ✓ 维纳滤波器假定图像与噪声均为平稳随机过程，若图像与噪声实际随机特性平稳性差距较大时，维纳滤波器难以得到最佳结果
- ✓ 维纳滤波器建立在最小化统计准则基础上，只是在平均意义上最优

1. 将图像和噪声看成序列，每个位置的像素值和噪声视为随机变量，即随机过程
2. 假定图像和噪声平稳，即统计特性不随位置变化
3. 该假定下，维纳滤波具有最佳性能
4. 维纳滤波适用于在有退化函数  $h(x,y)$  和噪声  $n(x,y)$  情况下恢复  $f(x,y)$



## 最小均方误差滤波（维纳滤波）

### ■ 最小均方误差滤波（维纳滤波）

#### ➤ 维纳滤波讨论（续）

- ✓ 维纳滤波需大量先验知识，实用中常常难以进行
- ✓ 尤其是噪声功率谱、未退化图像的功率谱很难获取

$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

注意：

1. K值应该和频率u,v有关
2. 实际应用时，以一个固定K代替，次优

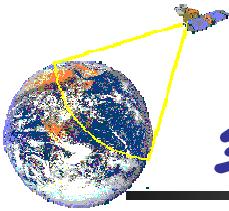
$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad \leftarrow \quad K = \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)} = \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2} = \frac{\text{noise\_power}}{\text{image\_power}}$$

- ✓ 通过在滤波过程中调节K值以得到准最佳结果

- ✓ 进一步假设噪声为零， $K=0$ ，维纳滤波器退化为逆滤波器  $F(u, v)$

$$= G(u, v) / H(u, v)$$

#### ➤ 与逆滤波的比较



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器

#### ➤ 问题的提出

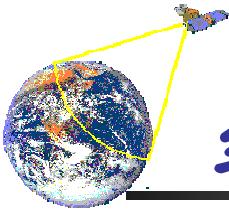
- ✓ 已知系统退化函数H的条件下，系统退化复原的逆滤波函数理论上为 $1/H$ ，但存在病态解和对噪声的高度敏感
- ✓ 维纳滤波实现了噪声干扰条件下均方意义上的最佳滤波，但存在需要大量先验知识尤其是噪声功率谱和未退化图像的功率谱的困难
- ✓ 进一步考察退化模型的矩阵形式

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \rightarrow g = Hf + \eta$$

✓ 应有

$$g - Hf = \eta$$

将g和f记为向量，则H为矩阵



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器

#### ➤ 问题的提出

✓ 为了方便求解  $f$ , 对上式采用泛函中范数表示 (注: 范数是标量)

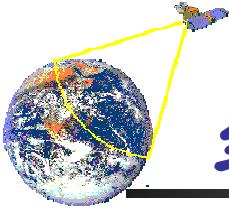
$$g - Hf = \eta \quad \Rightarrow \quad \|g - Hf\|^2 = \|\eta\|^2$$

✓ 可有

$$[g - Hf]^T [g - Hf] = e^2$$

✓ 由于  $H$  的问题, 满足上式的解  $f$  可能很多; 对此可施加一定的约束条件, 以便从众多的  $f$  中选择最佳的  $f$  作为面临问题的最佳解——**约束最小二乘方滤波器**

✓ 如何选择合理的约束条件? 由于满足上式的解很多, 需要对解  $f$  作约束



# 约束最小二乘方滤波器

## ■ 约束最小二乘方滤波器

正则化 - regularization

### ➤ 正则化方法

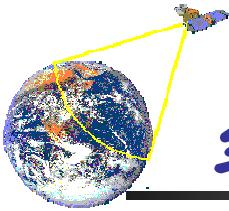
- ✓ 考察无噪声条件下的复原处理模型，并表示为矩阵形式

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad \rightarrow \quad g = Hf$$

- ✓ 在没有退化系统  $H$  先验知识的情况下，通过模型估计方法由  $g$  求  $f$ ，原则上可归结为一种病态的反演，面临反演的不稳定性和多解性
- ✓ 对于这类不确定性问题的解决，正则化理论以某种途径提供了有效的方法，其原理是：定义一个稳定算子  $q$ ，及  $qf$  的模

$$\|qf\| = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} (qf)^2 dx dy \quad \text{假定自然图像 } f \text{ 是平滑的}$$

- ✓ 通过  $q$  的引入， $qf$  描述了  $f$  的平滑程度；上式则描述了  $f$  在全部定义区域内的平滑程度，其值越小， $f$  越平滑



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器

#### ➤ 正则化方法

✓ 在正则化方法下求解 $f$ 一般有三种方法：

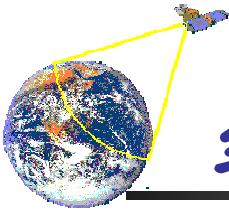
1) 在约束 $\|qf\| < C$ 的条件下求解 $f$ ，使 $\|g - Hf\|$ 达到最小

2) 在约束 $\|g - Hf\| < C$ 的条件下，求 $f$ 使 $\|qf\|$ 最小

3) 求解 $f$ 使下式达到最小

$$E = \|g - Hf\| + \lambda \|qf\|$$

E : 能量函数  
求 $f$ 使 $E$ 最小 - 变分问题

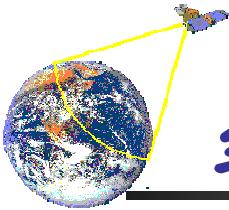


## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器

#### ➤ 正则化方法求解思想

- ✓  $g$  为观察信号，由于观察误差，它与  $Hf$  不可能处处相等，但它毕竟是确定  $f$  的唯一依据
- ✓ 希望所求的  $f$  使  $\|g - Hf\|$  尽可能小
- ✓ 由于  $f$  为理想物理信号，与噪声比较，它应是一个变化相对缓慢的连续函数，因此，我们定义的稳定泛函  $\|Qf\|$  也应较小。



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器

- 对退化模型表示为矩阵形式

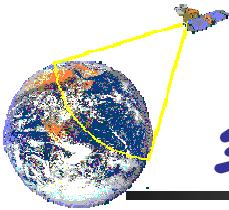
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y) \rightarrow g = Hf + \eta$$

式中  $g$  为  $MN \times 1$  维向量，是  $M \times N$  图像矩阵  $g(x, y)$  一维化的结果；  $f$  与  $\eta$  类似构成；  $H$  为  $MN \times MN$  矩阵

对退化图像  $g$  的复原处理得到图像  $\hat{f}$ ，其结果若满足上式，表明得到完全的复原；进一步将上式写为：

$$g - \hat{H}\hat{f} = \eta$$

- 从某种角度，任何变通的复原处理，其结果均应满足上式，即若处理结果使上式不成立，表明该项处理有奇异点，尤其在有噪声存在时
- 这一条件可作为求取最佳滤波的约束条件



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

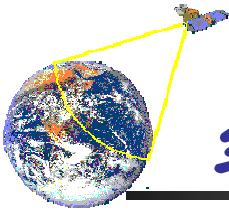
➤ 为方便推导，上述约束条件可归结上式两端的范数相等

$$\left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 = \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|^2 \Rightarrow \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 - \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|^2 = 0$$

➤ 考虑对  $\hat{\mathbf{f}}$  施加某种线性运算  $\mathbf{Q}$ ，按照正则化方法，问题可归结为最小化如下目标函数

$$W(\hat{\mathbf{f}}) = \left\| \mathbf{Q} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 + \lambda \left\| \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 - \left\| \boldsymbol{\eta} \right\|^2$$

式中  $\lambda$  为拉格朗日因数



## 约束最小二乘方滤波器

- 约束最小二乘方滤波器（续）

- 令  $W(\hat{f})$  对  $\hat{f}$  的导数为零

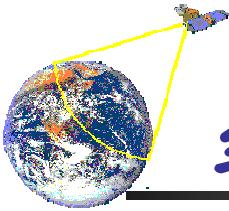
$$\frac{\partial W(\hat{f})}{\hat{f}} = 2Q^T Q \hat{f} - 2\lambda H^T (g - H \hat{f}) = 0$$

- 可得：

$$\hat{f} = (H^T H + \gamma Q^T Q)^{-1} H^T g$$

式中  $\gamma = 1/\lambda$ , 作为使等式  $\|g - H \hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$  成立的常数

上式称为约束最小二乘复原解的通用方程式



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

➤ 在约束最小二乘复原解通用方程式基础上，通过选择不同的 $\mathbf{Q}$ ，可得到不同类型的复原滤波器

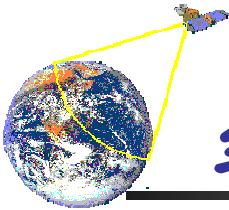
✓ 伪逆滤波器

令 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ， $\mathbf{I}$ 表示 $MN \times MN$ 单位矩阵，可有

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g} \quad \mathbf{H}^{(-1)*} \mathbf{g}$$

上式称之为伪逆滤波器

令 $\gamma=0$ ，则上式成为标准的逆滤波器



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 参数化维纳滤波器

将  $\mathbf{f}$ 、 $\eta$  视为随机矢量，选择  $\mathbf{Q}$  为：  $\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{\mathbf{R}_\eta}}{\sqrt{\mathbf{R}_f}}$

式中  $\mathbf{R}_f = E\{\mathbf{f}\mathbf{f}^T\}$  和  $\mathbf{R}_\eta = E\{\eta\eta^T\}$  分别为信号和噪声的协方差矩阵

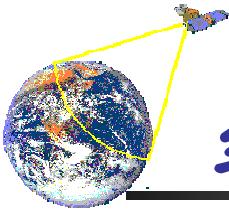
可有

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

R\_f, R\_n : 信号和噪声  
的统计知识

上式称之为参数化维纳滤波器；  $\gamma$  为可调节参数

令  $\gamma=1$ ， 则上式成为经典维纳滤波器 （时域形式）



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

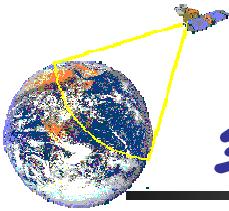
✓ 平滑约束滤波器

- 使得经拉普拉斯算子运算的高通滤波图像范数加权最小

- ❖ 对一幅带噪声模糊图像的逆滤波复原处理往往会放大噪声，产生预料之外的结果；
- ❖ 解决方法之一是选择适当的Q，对复原图像 $\hat{f}$ 施加一定程度的光滑性约束；
- ❖ 由此可从约束最小二乘复原解通用方程式中导出一个光滑的、去模糊的、无噪声的复原滤波器

令Q对应于一个高通滤波运算（二阶拉普拉斯算子）

$$\nabla^2 f(x, y) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f(x, y)$$



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

#### ✓ 平滑约束滤波器

在空域下， $\mathbf{Q}$ 可相当于高通卷积模板，如二阶拉普拉斯算子：

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

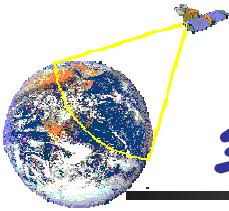
根据约束最小二乘复原解通用方程式，可得到线性位移不变系统下复原图像的频域表达式

$$\hat{F}(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

式中  $P(u, v)$  为  $p(x, y)$  的傅里叶变换，对拉普拉斯算子

$$P(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

➤ 实际滤波结果比较



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

#### ✓ 参量 $\gamma$ 的调整

❖ 交互式调整——直至取得可接受的结果

❖ 最优化迭代计算——通过计算方式得到理论上的最优

定义一个残数向量

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} \quad (1)$$

选定一个调整因数 $a$ , 以使:  $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$  (2)

步骤:

使  $|\mathbf{n}|^2 - a < |\mathbf{r}|^2 < |\mathbf{n}|^2 + a$

1) 初始化 $\gamma$ 值

2) 计算 $\|\mathbf{r}\|^2$

3) 如果 (2) 式满足, 停止; 否则

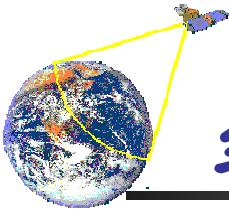
如果  $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\boldsymbol{\eta}\|^2 - a$ , 增加 $\gamma$ ;

如果  $\|\mathbf{r}\|^2 > \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + a$ , 减少 $\gamma$ ; 返回第2)步

注意:

1. 噪声的范数 $\|\mathbf{n}\|^2$ 和残差的范数 $\|\mathbf{r}\|^2$ 是2个不同的量

2.  $\|\mathbf{r}\|^2$ 根据不同的 $\mathbf{f}$ 估计得到, 而 $\|\mathbf{n}\|^2$ 需要估计



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器（续）

✓ 参量 $\gamma$ 的调整

$\|\mathbf{r}\|^2$  和  $\|\boldsymbol{\eta}\|^2$  的计算问题

由前述（1）式，可有

$R(u, v) = G(u, v) - H(u, v) \hat{F}(u, v)$  图，计算均值和方差。可进一步假  
对  $\mathbf{R}(u, v)$  进行傅里叶反变换，

可得  $\mathbf{r}(x, y)$ ，从而有：

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y)$$

对于  $\|\boldsymbol{\eta}\|^2$ ，可有：

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 - m_\eta]$$

其中的噪声均值和方差，可通过取样平均方式获得

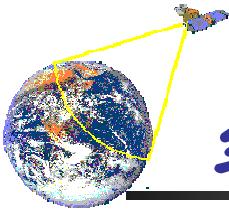
$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2$$

$$m_\eta = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y)$$

根据得到的  $f$ ,  $h$  和  $g$

噪声  $n$  的模型和参数估计：

1. 假定  $n$  为平稳高斯，需要估计均值和方差
2. 采用前述噪声参数估计方法，截取图像中灰度相对恒定区域，计算直方图，计算均值和方差。可进一步假定 0 均值。



## 约束最小二乘方滤波器

### ■ 约束最小二乘方滤波器讨论

- 与维纳滤波器相比，约束最小二乘方滤波器假定噪声为高斯分布，只需要噪声方差和均值的知识
- 噪声方差和均值常常可从退化图像中获得，因而该方法基本上可适用于大多数图像
- 使约束最小二乘方滤波器发挥最佳效果的重要因素，一是选择合适的  $Q$ ；二是调整参数  $\gamma$ ，使其满足约束条件
- 假定噪声与图像灰度值互不相关，可通过取样方式获得图像中的噪声均值与方差，由此即可进行最佳复原；噪声参数获得的正确与否，是取得最佳效果的关键
- 虽然约束最小二乘方滤波器可导出经典维纳滤波器，但维纳滤波器在均方意义上的最佳滤波性能却不能在这里得到证明
- 参量  $\gamma$  的调整已研究了多种方法，如贪婪算法、模拟退火算法、共轭梯度法、牛顿-拉佛森算法等，但仍然是一个有待解决的问题

# 理解最小二乘法 (1)

---

高斯从概率论的角度思考最小二乘法

假定测量值 $x_i$ 和真实值 $x$ 之间存在误差：

$$\varepsilon_i = x - x_i$$

设其概率密度为： $p(\varepsilon)$

进一步，多次测量值的的联合概率密度为：

$$\begin{aligned} L(x) &= p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_2)\cdots p(\varepsilon_5) \\ &= p(x - x_1)\cdots p(x - x_5) \end{aligned}$$

# 理解最小二乘法 (2)

---

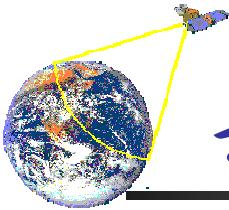
应用最大似然估计，联合概率的最大值应该出现在：

$$\frac{d}{dx} L(x) \Big|_{x=\bar{x}} = 0$$

解以上微分方程，得到：

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$$

即如果误差是正态分布，估计结果最佳

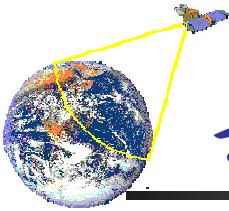


## 匀速运动模糊图像的复原

- 在获取图像过程中，由于景物和摄像机之间的相对运动，往往造成图像的模糊
- 设图像 $f(x,y)$ 有一个平面运动，令 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别为在x和y方向上运动的变化分量， $t$ 表示运动的时间， $T$ 表示照相机的快门时间
- 可有目标物与摄像机之间相对运动造成图像模糊的模型

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

The diagram illustrates the components of motion. Two red arrows originate from green rectangular boxes at the bottom. The left arrow points to the term  $x_0(t)$  in the equation, which is labeled 'x方向运动分量' (x-direction motion component). The right arrow points to the term  $y_0(t)$ , which is also labeled 'y方向运动分量' (y-direction motion component).



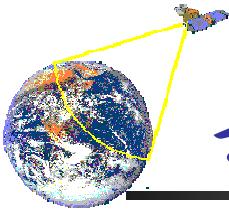
## 匀速运动模糊图像的复原

- 对模型表达式两边进行傅立叶变换

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt = \boxed{H(u, v)F(u, v)} \end{aligned}$$

退化函数

$$H(u, v) = \int_0^T \exp \{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]\} dt$$



## 匀速运动模糊图像的复原

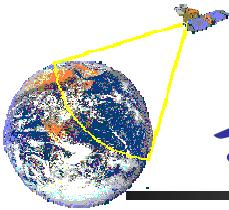
- 水平方向匀速直线运动时

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y] dt$$

若原图像的宽度为 $L$ , 总的运动位移量为 $a$ , 总的运动时间为 $T$ , 则运动的速率为

$$x_0(t) = \frac{at}{T}$$

$$\begin{aligned} \text{可有: } H(u, v) &= \int_0^T \exp\{-j2\pi u x_0(t)\} dt \\ &= \int_0^T \exp\left[-j2\pi u \frac{at}{T}\right] dt \\ &= \frac{T}{\pi u a} \sin(\pi u a) e^{-j\pi u a} \end{aligned}$$



## 匀速运动模糊图像的复原

- 对离散图像，可有如下的模型

$$g(x, y) = \sum_{t=0}^{T-1} f\left[x - \frac{at}{T}, y\right] \bullet B$$

$B$ 表示单位时间内曝光度的影响因子，由于是匀速运动，  $B=1/T$

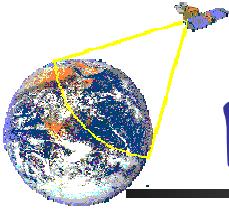
复原表达式为

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx A + \frac{1}{B} \sum_{k=0}^m [g(x - ka, y) - g(x - ka - 1, y)] \\ - \frac{1}{K} \bullet \frac{1}{B} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^m [g(x - ma + ka - ja, y) - g(x - ma + ka - ja - 1, y)] \end{aligned}$$

$K=L/a$ ;  $m$ 为 $x/a$ 的整数部分

实例

L: 图像宽度



## 图像复原

### ■ 思考：

- 考察与分析逆滤波谐波滤波器，解释：
  - ✓ 为什么当Q值为正值时滤波器对去除“胡椒”噪声有效？
  - ✓ 为什么当Q值为负值时滤波器对去除“盐”噪声有效？
  - ✓ 为什么当Q值选择不当时滤波效果较差？