



第十二章 Fourier分析

§ 12. 1 函数的Fourier级数

§ 12. 2 平方平均收敛

§ 12. 3 收敛性定理的证明*

§ 12. 4 Fourier变换

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

问题：如何研究定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的非周期函数 $f(x)$ ？

可采用有限逼近无限的想法.

- (1) 对任意 $\ell > 0$, 截取函数 $f(x)$ 在有限区间 $(-\ell, \ell)$ 上的取值;
- (2) 以 2ℓ 为周期作延拓, 得到一个周期 2ℓ 的周期函数 $f_{2\ell}(x)$;
- (3) 将 $f_{2\ell}(x)$ 展开为 Fourier 级数, 即得 $f(x)$ 在区间 $(-\ell, \ell)$ 上的 Fourier 级数;
- (4) 取极限 $\ell \rightarrow +\infty$.

这个极限过程将导出 $f(x)$ 的一种积分表示, 即 **Fourier积分表示**.

周期函数 $f_{2\ell}(x)$ 的Fourier级数的复数形式：

$$f_{2\ell}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{i \frac{n\pi}{\ell} x}, \text{ 其中 } F_n = \frac{1}{2\ell} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f_{2\ell}(x) e^{-i \frac{n\pi}{\ell} x} dx \right] (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\xrightarrow{\lambda_n = n\omega = \frac{n\pi}{\ell}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\ell} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f_{2\ell}(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi \right] e^{i\lambda_n x}$$

$$\xrightarrow{\Delta\lambda_n = \frac{\pi}{\ell}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f_{2\ell}(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi \right] e^{i\lambda_n x} \Delta\lambda_n$$

$$\xrightarrow[\ell \rightarrow +\infty]{H(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(\lambda_n) e^{i\lambda_n x} \Delta\lambda_n \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

$f(x)$ 的Fourier积分表示：

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \right) e^{i\lambda x} d\lambda$$

Fourier积分的Dirichlet收敛定理

定理：若定义在整个数轴上的函数 $f(x)$ 在任意有限区间上分段可微，且在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积 (即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛)，则：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

设 $f(x)$ 满足上述定理中的条件，称

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

为 $f(x)$ 的**Fourier变换或象函数**；常记为 $F = \mathbf{F}[f]$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

为 $F(\lambda)$ 的**Fourier逆变换或原象函数**，常记为 $f = \mathbf{F}^{-1}[F]$.

Fourier积分的实表示

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) (\cos \lambda\xi - i \sin \lambda\xi) d\xi \right) (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi \right) \cos \lambda x + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi \right) \sin \lambda x \right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda, \quad \begin{cases} A(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi \\ B(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi \end{cases}$$

注：收敛条件与结果与前面定理相同。

正弦变换与余弦变换

定义：若函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt$$

称之为 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变换；其逆变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda$$

若函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(\lambda) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt$$

称 $G(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt$ 为 $f(x)$ 的 正弦变换；

其逆变换公式为： $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda$

1. 求指数衰减函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ($\beta > 0$) 的Fourier变换.

2. 求分段函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ 的Fourier变换.

3. 求函数 $f(x) = e^{-ax}$ ($a > 0, x \geq 0$) 的Fourier余弦变换和正弦变换.

Fourier变换的性质

Fourier变换: $\mathbf{F}[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx$

1. 线性性: 设 f, g 都存在 Fourier 变换, 则对任意复常数 α, β 有

$$\mathbf{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathbf{F}[f] + \beta \mathbf{F}[g].$$

2. 频移性: $\mathbf{F}[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] = F(\lambda + \lambda_0).$

3. 微分关系: 若 $f(\pm\infty) = 0$, 且 $f'(x)$ 的 Fourier 变换存在, 则:

$$\mathbf{F}[f'(x)] = i\lambda \cdot \mathbf{F}[f(x)].$$

4. 微分特性：若 $f(x)$ 与 $xf(x)$ 的 Fourier 变换存在，则：

$$F'(\lambda) = \mathbf{F}[-ixf(x)].$$

定义：设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上可积且绝对可积，称

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**卷积**.

卷积满足交换律，结合律和分配律，即有

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(f + g) * h = f * h + g * h$$

5. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 则卷积 $f * g$ 也在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 且有

$$\mathbf{F}[f * g] = \mathbf{F}[f] \cdot \mathbf{F}[g].$$

另外: $\mathbf{F}^{-1}[g_1(\lambda)g_2(\lambda)] = \mathbf{F}^{-1}[g_1(\lambda)] * \mathbf{F}^{-1}[g_2(\lambda)]$

6. (Parseval等式) 设 $f(x)$ 可积且平方可积, $F(\lambda) = \mathbf{F}[f(x)]$, 则:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$$

性质小结

$$\text{设 } F(\lambda) = \mathbf{F}[f(x)], \quad G(\lambda) = \mathbf{F}[g(x)]$$

$$\text{线性: } \alpha f(x) + \beta g(t) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda)$$

$$\text{平移: } f(x - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad F(\lambda) e^{i\lambda t_0}$$

$$f(x) e^{-i\lambda_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad F(\lambda + \lambda_0)$$

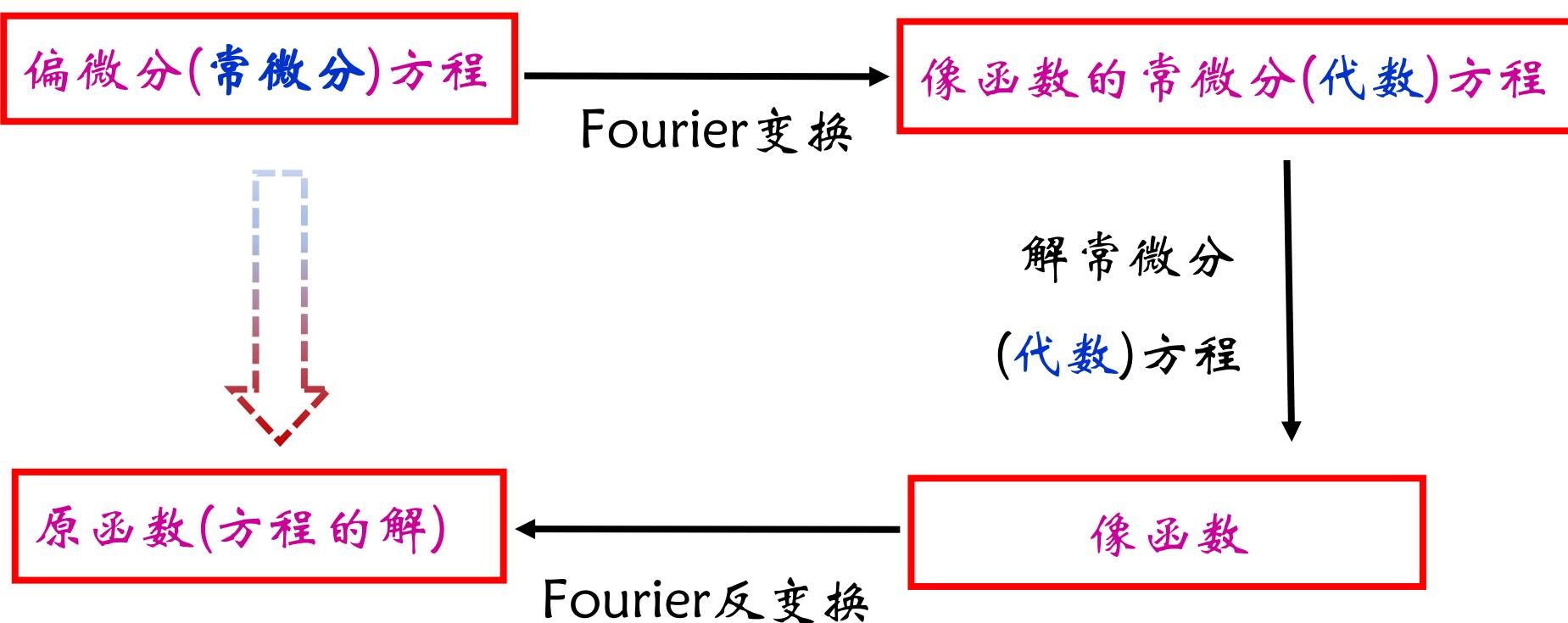
$$\text{微分: } f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad -i\lambda F(\lambda)$$

$$\text{积分: } \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{-i\lambda} F(\lambda)$$

$$\text{相似: } f(ax) \ (a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

$$\text{卷积: } f(x) * g(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(\lambda)g(\lambda)$$

Fourier变换的应用



Fourier变换的应用

例：求无穷长细杆的温度分布 $T = T(x, t)$, 其中 $T(x, t)$ 满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & x \in R, t > 0 \\ T(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$f(x)$ 为初始温度分布, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积.

解：作关于 x 的Fourier变换, 设

$$\begin{cases} T(x, t) \xrightarrow{F} U(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, t) e^{-i\lambda x} dx \\ f(x) \xrightarrow{F} F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & x \in R, t > 0 \\ T(x, 0) = f(x) \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \frac{dU(\lambda, t)}{dt} = -\lambda^2 U(\lambda, t) \\ U(\lambda, t)|_{t=0} = F(\lambda) \end{cases}$$

... ODE

解之得: $U(\lambda, t) = F(\lambda) e^{-\lambda^2 t}$

$$\begin{aligned} \text{故: } T(x, t) &= \mathbf{F}^{-1}[U(\lambda, t)] = \mathbf{F}^{-1}\left[\mathbf{F}[f] \cdot \mathbf{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\right] \\ &= \mathbf{F}^{-1}\left[\mathbf{F}\left[f * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\right] = f * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

于是原定解问题的解为: $T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \tau) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau$

本小节作业：

P294: 2(3), 3, 4