# 第13章　反常积分与含参积分

§13.1　反常积分

§13.2　反常多重积分*

§13.3　含参积分

§13.4　含参反常积分

**§13.5　Euler积分**

创寰宇学府
育天下英才
严济慈题
一九八八年五月

# $\Gamma$ 函数

**定义:** $$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t \ (s>0)$$

**定理:** $\Gamma(s)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, 且在 $(0,+\infty)$ 中连续.

**定理:** $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上任意阶可导，且导数为

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,\mathrm{d}t$$

**定理:** $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\ \ s>0.$

于是由 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=1$ 知,

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1)=n!$$

又有:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t \xlongequal{t=x^2} 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

进而

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

**定理(余元公式):** 若$0<s<1$，则$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin s\pi}$

**注:** ① $\Gamma(s)$ 由其在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上的值决定.

② 取$s=\dfrac{1}{2}$, 可得$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

**定理:** $\Gamma$ 函数具有另一种积分表示:

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u,\quad s>0$$

**例:** 1. $\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-at}\mathrm{d}t\quad(a>0)$ 2. $\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x\quad(n\in\mathbb{N})$

# B 函数

**定义：** $$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$

**定理：** $\mathrm{B}(p,q)$在 $I=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$上有定义，满足对称性 $\left(\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)\right)$ 且连续.

**定理：** $\mathrm{B}(p,q)$ 有积分表示： $$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\mathrm{d}z$$

或 $$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

**定理：** $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall p>0, q>0.$ 由此，B函数在其定义域内有任意阶偏导.

由 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, 可得B函数的递推公式:

$$\mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}\mathrm{B}(p,q)$$

特别的，当 $p=m-1, q=n-1$ 是正整数时： $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

**定理(加倍或Legendre公式)：** $p>0$ 时有:

$$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

1. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x$，其中 $n, m$ 都是非负整数.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha} x \mathrm{d}x \quad (|\alpha| < 1)$

3. $\int_a^b (x-a)^2 \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p \mathrm{d}x \quad (0 < p < 1)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} \mathrm{d}x$