期末复习

考试时间：2024.07.05，8:30—10:30

考试地点： 5301， 5302

内容： 11，12，13章

数量场在曲线上的积分 (第一型曲线积分) $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

1. 物理背景：**曲线的质量**

2. 基本性质：有界性；线性性；保序性；绝对可积性; 分段可加性；积分中值定理

3. **主要计算方法：找曲线的参数化.**

$$r(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

几点注意

1. $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}r| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = |r'(t)|\,dt$

2. 常值函数1积分，结果为曲线的长度.

3. 有时考虑对称、奇偶性或轮换性，可以化简积分计算.

4. 积分表达式中的变元满足曲线方程.

5. 与第二型曲线积分的关系.

数量场在曲面上的积分 (第一型曲面积分) $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

1. 物理背景： 曲面的质量

2. 基本性质： 有界性；线性性；保序性；绝对可积性;
分片可加性；积分中值定理

3. 主要计算方法： **找曲面的参数化.**

$$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\quad\big((u,v)\in D\big)$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\left|r_u'\times r_v'\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别地，对显式曲面 $z=z(x,y)\ \big((x,y)\in D\big)$,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

几点注意

1. 常值函数1积分，结果为曲面的面积.

2. 有时考虑对称、奇偶性或轮换性，可以化简积分计算.

3. $\mathrm{dS}=\left|r_u' \times r_v'\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$. 球坐标变换$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$下，$\mathrm{dS}=\mathrm{R}^2\sin\theta$.

4. 积分表达式中的变元满足曲面方程.

5. 与第二型曲面积分的关系，可能用到Gauss公式.

1. 计算 $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中C是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及x轴在第一象限中所围成图形的边界.

2. 计算积分 $\iint_\Sigma |y|\sqrt{z}\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2\ (z\le 1)$.

3. 设点 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若曲面 S 在 P 点处的切平面 π 与XOY平面垂直，

(1). 求点 P 的轨迹曲线 Γ;

(2). 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} \dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是椭球面 S 位于曲线 Γ 上方的部分.

第二型曲线积分(向量场沿曲线的积分)

$$\int_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

1. 物理背景： 变力沿曲线做功.

2. 基本性质： 线性性；分段可加性；**方向性.**

3. 计算： 找曲线的参数化： $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$

参数 α 对应起点， β 对应终点. 则:

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

几点注意

1. $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s;\quad \mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$

2. 与第一型曲线的积分的转换. $\int_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_L \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$

3. 沿封闭曲线积分时，考虑

Green公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **(2维)**

旋度的定义

Stokes公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ **(3维)**

Green公式: $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1. 条件：L封闭且正向逆时针，向量场在L围成的区域内光滑.

2. 多连通区域下仍成立----边界与定向.

3. 补线法、挖洞法：不满足条件时候，构造条件.

4. 单位切向量与外法向量的转换：$\mathbf{n}=(n_1,n_2)$，则$\boldsymbol{\tau}=(-n_2,n_1)$.

$$\int_L \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\int_L (P,Q)\cdot(n_1,n_2)\,\mathrm{d}s=\int_L(-Q,P)\cdot(-n_2,n_1)\,\mathrm{d}s=\int_L(-Q,P)\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=grad(u)\cdot\mathbf{n}=(\cdots)\cdot\boldsymbol{\tau},\ldots\ldots$$

Stokes公式：$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdot \mathbf{dS}$

L的定向需与$\sum$定向协调：右手法则.

向量场在包含$\sum$的区域内光滑.

使用Stokes公式计算第二型曲线积分，通常要求

L封闭、以L为边界的曲面易找且简单、旋度场简单

第二型曲面积分(向量场沿曲面的积分)

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$

1. 物理背景： 流量或通量.

2. 基本性质： 线性性；分片可加性；**方向性.**

3. 计算： 找曲面的参数化：

$$r(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \quad \left((u,v)\in D\right)$$

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \pm\iint_{D}\left(P\Big|_{(u,v)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\Big|_{(u,v)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\Big|_{(u,v)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv$$

当给定法向与 $r_u' \times r_v'$ 一致时，取正号.

3. 计算： 找曲面的参数化 $r(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\left((u,v)\in D\right)$

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D\left(P\Big|_{(u,v)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\Big|_{(u,v)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\Big|_{(u,v)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\pm\iint_D\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

当给定法向与 $r_u'\times r_v'$ 一致时，取正号.

$$\mathbf{n}=\pm\frac{r_u'\times r_v'}{\left|r_u'\times r_v'\right|}$$

特别地，对显式曲面 $z=z(x,y)\ \left((x,y)\in D\right)$, $\mathbf{n}=\pm\dfrac{\left(-z_x',-z_y',1\right)}{\left|\left(-z_x',-z_y',1\right)\right|}$

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D\left(-P\left(x,y,z(x,y)\right)z_x'-Q\left(x,y,z(x,y)\right)z_y'+R\left(x,y,z(x,y)\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

几点注意

1. $\mathrm{d}\mathbf{S}=\left(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=n\mathrm{d}S$

2. 与第一型曲面积分的转换：$\iint_{\Sigma}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_{\Sigma}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$

3. 若曲面法向容易确定，优先考虑转为第一型曲面积分.

球面$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|=R$ 的外侧法向：$\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R}$.

4. 沿封闭曲面积分时，考虑

散度的定义

Gauss公式：$\oiint_{\Sigma}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}(\mathbf{v})\mathrm{d}V$

Gauss公式：$\oiint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{v}) dV$

1. 条件：$\sum$封闭且法向指向外侧，向量场在$\sum$围成的区域内光滑.

2. 多连通区域下仍成立----边界与定向.

3. 补面法、挖洞法：不满足条件时候，构造条件.

保守场、有势场、无旋场

设 $\mathbf{v}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ 是空间区域 Ω 中的光滑向量场，则下面几个命题相互等价:

- $\mathbf{v}$ 是 Ω 内的保守场 (任意封闭曲线的环量为0);
- $\mathbf{v}$ 在 Ω 内的曲线积分与路径无关;
- $\mathbf{v}$ 为 Ω 内的有势场 $\left(\exists\ u(x,y,z), \text{s.t. } \mathbf{v}=\text{grad}\,(\text{u})\right)$;
- 在 Ω 内, $P\text{d}x+Q\text{d}y+R\text{d}z$ 是全微分.

定理: $\mathbf{v}$ 为保守场 $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ 是无旋场

$\mathbf{v}$ 是无旋场 $\xrightarrow{\Omega\text{ 曲面连通}}$ $\mathbf{v}$ 为保守场

求势函数的方法：折线法、凑微分法(或解PDE)

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

设折线段 $(x_0,y_0,z_0)\to(x,y_0,z_0)\to(x,y,z_0)\to(x,y,z)$ 在V中，则

$$u=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y} Q(x,v,z_0)\,\mathrm{d}v+\int_{z_0}^{z} R(x,y,w)\,\mathrm{d}w.$$

$$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\ \Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y,z)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z)\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z)\end{cases}$$

$\Rightarrow\ u=\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+\psi(y,z)$

代入后两个方程求 $\psi(y,z)$.

1. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}\left(A,C,AC-B^2>0\right)$, 其中L为二维区域包含原点的封闭逆时针曲线.

2. 设 $f(x,y)\in C^{(2)}(D)$, $D: x^2+y^2\le 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$.

求证: $\iint_D \left(xf_x'+yf_y'\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$.

3. 求向量场 $A=\mathbf{i}+z\mathbf{j}+\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{k}$ 穿过由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$ 及 $z=2$ 所围成圆台的外侧面(不包括上、下底)的流量.

4. 计算 $\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中S为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$, 正向指向外侧.

5. 证明：若L为平面上封闭曲线，m为任意方向向量，则

$\oint_L \cos(m,n)\mathrm{d}s = 0$，其中 n 为曲线L的外法线方向.

6. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续导数，在任意不绕过原点且不过原点的简单光滑闭曲线L上，$\oint_L \dfrac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = 0.$

(1). 求函数$\varphi(x)$.

(2). 设C是绕原点的光滑简单正向闭曲线，求

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

7. 求曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$, 其中 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$.

练习：Σ 同上，计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$

9. 确定向量场是否为保守场，若是，求其势函数.

$$F=\left(yz(2x+y+z),xz(x+2y+z),xy(x+y+2z)\right).$$

10. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-y+1}{x+y^2+3}$ 的通解.

Fourier分析

- **周期函数的Fourier级数**
- **Fourier变换**

Fourier级数

1. **Fourier级数的计算**
2. **Dirichlet收敛定理**
3. Fourier级数部分和的几何意义(平方平均收敛)
4. **Parseval等式**
5. Fourier级数的性质(逐项可积)
6. 广义Fourier级数

Fourier变换

1. 函数的Fourier积分表示(实、复形式)
2. Dirichlet收敛定理
3. Fourier变换、正弦(余弦)变换及其反变换
4. Fourier变换的性质
5. Fourier变换的应用

1. Fourier级数的定义与计算

定义： 周期2ℓ的函数在$[-\ell,\ell]$上可积且绝对可积，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

其中

$$\boxed{\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\mathrm{d}x, \quad n=0,1,2,\cdots \\ b_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots \end{aligned}}$$

周期延拓函数的Fourier级数

1. 正弦级数: $f(x)\Big|_{(0,\ell)} \xrightarrow{\text{奇延拓}} \bar{f}(x)\Big|_{[-\ell,\ell]} \xrightarrow{\text{周期}2\ell\text{延拓}} \bar{\bar{f}}(x)\Big|_{R}$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x, \quad (n=1,2,\cdots).$$

2. 余弦级数: $f(x)\Big|_{[0,\ell)} \xrightarrow{\text{偶延拓}} \tilde{f}(x)\Big|_{[-\ell,\ell]} \xrightarrow{\text{周期}2\ell\text{延拓}} \tilde{\tilde{f}}(x)\Big|_{R}$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x, \quad (n=0,1,\cdots).$$

3. $f(x)\big|_{(a,b)}$ 以周期 $b-a$ **直接延拓：** $\left(\ell=\dfrac{b-a}{2}\right)$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x, & (n=0,1,\cdots)\\ b_n=\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x, & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

定理 (Dirichlet 收敛定理)： 周期函数$f(x)$ 在一个周期上**分段可微**，则它的Fourier级数处处逐点收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

另外，若再对 $f(x)$ 加上处处连续的条件，则其Fourier级在实轴上一致收敛于$f(x)$.

注：在$[-\ell,\ell]$上，$f(x)$ 分段可微 $\Rightarrow \begin{cases} f(x)\text{可积且绝对可积} \\ \Uparrow \\ f(x)\in L^2[-\ell,\ell] \end{cases}$

平方平均收敛

函数空间 $L^2[a,b]$ 上可定义距离 $\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b (f-g)^2\,\mathrm{d}x}$

定义： $\{f_n\}$ 平方平均收敛于 $f \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0.$

设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_n\cos kx+b_n\sin kx\right)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier级数部分和函数. 则：

(1). $\|f-S_n(x)\|=\min\limits_{g\in T_n}\|f-g\|$,其中 $T_n=\langle\cos kx,\sin kx:\ 0\le k\le n\rangle$.

(2). $\Delta_n=\|f-S_n(x)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)$.

平方平均收敛

设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_n\cos kx+b_n\sin kx\right)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier级数部分和函数. 则:

(1). $\|f-S_n\|=\min\limits_{g\in T}\|f-g\|$, 其中 $T=\langle\cos kx,\sin kx:\ 0\le k\le n\rangle$.

(2). $\Delta_n=\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)$.

(3). $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$. (Bessel不等式)

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0 \iff \boxed{\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.}$

Parseval等式

广义Fourier级数

$f(x)\in L^2[a,b]$, $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ 是 $L^2[a,b]$ 中一组标准正交系，则

$$\boxed{f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n,\qquad \text{其中 } a_n=\langle f(x),\varphi_n\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_n\mathrm{d}x.}$$

设 $f(x)\in L^2[a,b]$, $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$，则：

(1). $\|f-S_n(x)\|=\min_{g\in T_n}\|f-g\|$,其中 $T_n=\langle\varphi_k:0\leq k\leq n\rangle$.

(2). $\Delta_n=\|f-S_n(x)\|^2=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}a_k^2$.

⇒ **Bessel不等式：** $\sum_{k=1}^{n}a_k^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\end{cases}$ 且周期为2.

(1). 将 $f(x)$ 展开为Fourier级数，并说明收敛性;

(2). 写出相应的Parseval等式;

(3). 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

2. 将 $(0,\pi]$ 上的函数 $f(x)=1-x^2$ 展开成以 2π 为周期的余弦级数，讨论其收敛性，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

3. 设 $f(x)$ 以2π为周期且满足 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶Lipschitz 条件：

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^{\alpha}$$

记 $a_0,a_n,b_n(n\ge 1)$ 是 $f(x)$ 的Fourier系数，求证：

$$|a_n|\le\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha},\quad |b_n|\le\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

3. 已知 $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，求 $f(x)\sin x$ 的Fourier级数；特别的，据此求 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta^n \dfrac{\sin nx}{\sin x}(|\beta|<1)$ 的Fourier展开式.

主要内容：

1. 反常积分：收敛性判别法

2. 含参常义积分：定义，性质(连续、积分、求导)

3. 含参反常积分：一致收敛性判断、积分函数的性质.
积分函数的计算.

4. Euler积分：Γ 函数和B函数的定义、性质、应用.

一. 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

1. $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\triangleq$ $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

2. 积分收敛性的判别法.

I. Cauchy收敛准则

II. Henie定理

III. Weierstrass判别法(条件收敛、绝对收敛)

IV. 部分积分有界(函数非负)

V. 比较判别法(函数非负；两种形式）

VI. Dirichlet、Abel判别法：$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

瑕积分收敛判别法类似

二. 含参积分 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x$

1. 含参积分的性质：

(1) 连续： 若 $f(x,u)$ 连续.

(2) 积分： $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$ (若 f 连续)

(3) 可导： $\varphi'(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ （f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ 连续 ）

$$\left(\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right)'=f\big(b(u),u\big)b'(u)-f\big(a(u),u\big)a'(u)+\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$$

2. 利用含参积分的求积分或求导性质求某些定积分.

三. 含参反常积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$

1. 一致收敛的定义

2. 一致收敛性的判别法.

I. Cauchy收敛准则

II. Henie定理(转为函数项级数的一致收敛性)

III. $\lim\limits_{A\to+\infty}\beta(A)=0$, 其中$\beta(A)=\sup\limits_{u\in I}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|$

IV. **Weierstrass判别法**

V. Dirichlet、Abel判别法：$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x$

反常参积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$

3. $\varphi(u)$ 的性质：

(1) 连续：若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

(2) 积分：$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$ (条件同(1)).

(3) 可导：$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$

I. f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 连续； II. $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 逐点收敛；

III. $\int_a^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

(1) 讨论连续性、可导性时，通常可将条件降弱为“内闭一致收敛”.

(2) 可利用含参积分的性质(求导与积分)求某些反常积分.

(3) 几个重要积分：**Dirichlet**积分，概率积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\cdots,\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^4}\mathrm{d}x=\cdots$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

四、Euler 积 分

Γ 函数和B函数的定义、性质：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty} u^{2s-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{z^{q-1}}{(z+1)^{p+q}}\mathrm{d}z$$

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \qquad \Gamma(n+1)=n!$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi} \qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Euler积分的应用:将某些广义积分转换为Euler积分的形式.

1. 设 $f(u,v)$ 在整个平面上有连续偏导.

$$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)\mathrm{d}x,\ \text{求 } F'(\alpha).$$

2. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$，其中 $\alpha>0$.

3. 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^5} \mathrm{d}x.$

4. 含参变量函数 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+\alpha} e^{-\alpha x} \mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in [b, B], 0 < b < B$ 上是否一致收敛? 并说明理由.

一致收敛

5. 讨论 $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\alpha\in[\alpha_0+\infty),\alpha_0>0$; (2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

(1)一致收敛(2)非一致收敛

6. 求曲线 $x^n+y^n=a^n$ 当 $x>0,y>0,n>0$ 时围成平面图形的面积.

解： 所围成图形面积为

$$S=\int_0^a y(x)\mathrm{d}x=\int_0^a (a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=a^2\int_0^a\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)_0^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$=\frac{a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)=\frac{a^2}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$