第十一章 曲线积分与曲面积分

- 数量场在曲线上的积分
- 数量场在曲面上的积分
- 向量场在曲线上的积分
- 向量场在曲面上的积分
- Gauss定理和Stokes定理
- **保守场**
- 微分形式的积分*

平面区域 D 上的向量场 $\mathbf{v}$ 在 D 中沿曲线积分何时与路径无关？

$$\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=0 \xrightarrow[\text{单连通}]{\text{Green公式}} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

问题：3维区域中的光滑向量场沿曲线积分，何时与路径无关？

定义： 设 $\mathbf{v}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ 是连通区域V内的光滑向量场. 若 $\mathbf{v}$ 在V内的曲线积分与路径无关，只与起点和终点有关，或者说 $\mathbf{v}$ 沿V内任何封闭曲线的环量为零，则称 $\mathbf{v}$ 是区域V内的**保守场.**

定义：空间区域V称为**曲面单连通**的，若V中的任意简单封闭曲线都能**在V中**连续地缩成一个点.

下述区域哪些是曲面单连通的？

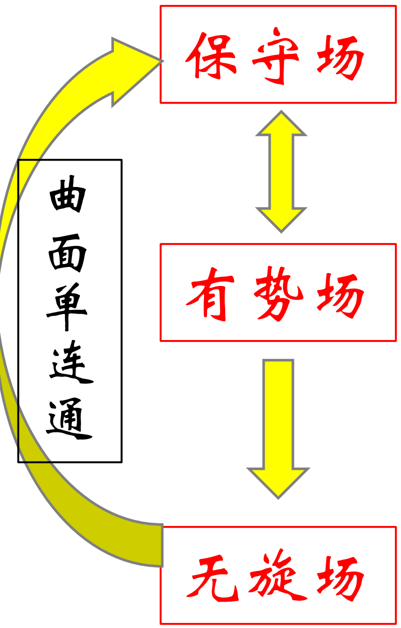
1. 去掉球心的球体？✔ 2. 去掉某条线直径的球体？✘

3. 环面？ ✘

定义：空间区域V称为**空间单连通**的，若V中的任意封闭曲面都可**在V中**连续地缩成一个点.

例如：实心球体是空间单连通的，而去掉球心的球体不是.

定理：设 $V\subset\mathbb{R}^3$ 是**曲面单连通区域**，$\mathbf{v}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ 是 V 上的光滑向量场，则下述命题等价：



1° $\mathbf{v}$ 是保守场.

2° 存在数量场 φ 使得 $\mathbf{v}=\nabla\varphi$. 此时称 φ 是向量场 $\mathbf{v}$ 的势函数，且 $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\nabla\varphi\cdot d\mathbf{r}=d\varphi$ 是一个**全微分**.

3° $\mathbf{v}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

定义：有势函数的向量场称为**有势场**或**梯度场**；旋度恒为 $\mathbf{0}$ 的向量场称为**无旋场**.

注记：

1. 保守场定义 $\triangleq$ 积分与路径无关

$\Longleftrightarrow$ 沿任意封闭曲线环量为零.

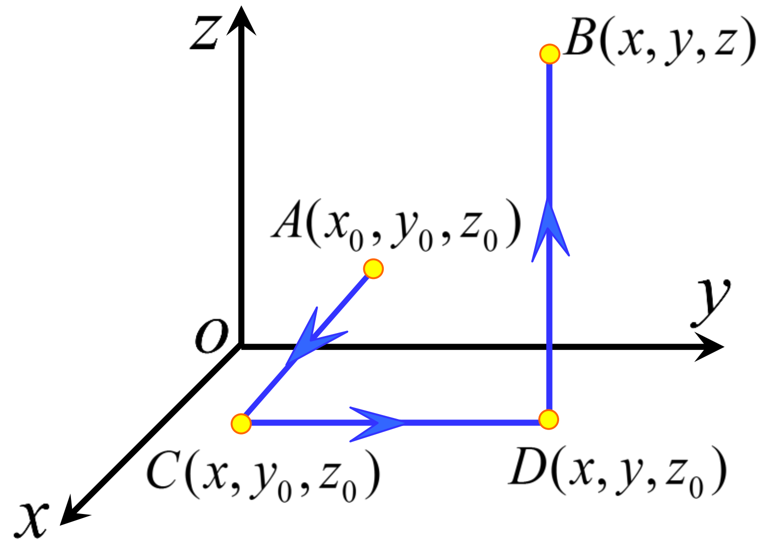
2.如何判别 v 是保守场？

V 为曲面单连通区域时 $\Leftrightarrow \nabla \times v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

或者，考虑PDEs $\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = R \end{cases}$ 是否有解.

3. 若已知**v**是保守场，如何计算其势函数？

I). 选择合适的曲线积分，例如折线.



$$\varphi(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

II). 解PDEs $\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=R\end{cases}$ 得势函数$\varphi(x,y,z)$.

4. **保守场**中，如何计算 $\mathbf{v}$ 沿曲线(起点为 A，终点为 B)的积分？

I) 若曲线封闭，结果为0.

II) 若已有势函数 $\varphi(x,y,z)$，则结果为 $\varphi(B)-\varphi(A)$.

定理： 设 $\mathbf{v}$ 是区域 V 上的保守场，φ 是 $\mathbf{v}$ 的一个势函数，则对于 V 中任意两点 A, B 以及连接两点的任意光滑曲线 L_{AB}，有

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B)-\varphi(A).$$

III) 若势函数未知，构造合适的的曲线(例如折线)积分.

例 子

1. 设一个力场 $\mathbf{F}$ 是保守场，求力场对质点所做的功.

2. 证明向量场 $\mathbf{v}=\left(x^2-yz\right)\mathbf{i}+\left(y^2-zx\right)\mathbf{j}+\left(z^2-xy\right)\mathbf{k}$ 是有势场，并求它的一个势函数.

3. 求电场强度 $\mathbf{e}=\frac{q}{r^3}\mathbf{r}$ 的势函数.

4. 计算积分 $\int_{(1,0)}^{(3,1)}\left(\mathrm{e}^{y}+1\right)\mathrm{d}x+\left(x\mathrm{e}^{y}-2y\right)\mathrm{d}y.$

5. 设函数 $Q(x,y)$ 在 XOY 平面上有一阶连续偏导，曲线积分

$\int_L 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 t, 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(1) 求 $Q(x,y)$; (2) 求微分方程 $2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

6. 设 $f(u)$ 连续，证明

$$f\left(x+y^2-z^3\right)\mathbf{i}+2y\,f\left(x+y^2-z^3\right)\mathbf{j}-3z^2 f\left(x+y^2-z^3\right)\mathbf{k}$$

是保守场，并求其势函数.

无源场与向量势

定义： 若向量场 $\mathbf{v}$ 的散度处处为 $\mathbf{0}$, 则称 $\mathbf{v}$ 为(V 上的) **无源场**.

定义： 若 $\mathbf{v}$ 是空间区域 $V \subset \mathbb{R}^3$ 中的光滑向量场，若存在向量场 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\mathbf{v} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{\alpha}) = \nabla \times \boldsymbol{\alpha}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathbf{v}$ 的**向量势**.

注： 有向量势的场必是无源场.

设 $\mathbf{v}$ 有向量势 $\boldsymbol{\alpha} = (P, Q, R)$, 则

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}.$$

问题：无源场是否一定有向量势？

定理：设 V 是空间单连通区域，$\mathbf{v}$ 是 V 上的光滑向量场，则：

$$\mathbf{v}\text{ 是无源场} \Longleftrightarrow \mathbf{v}\text{ 有向量势.}$$

由于 V 中任一点的局部都是空间单连通的，故：

定理：$\mathbf{v}$ 是无源场 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{v}$ 在 V 中任一点的局部有向量势.

置于原点的点电荷 q 产生的电场强度为 $\mathbf{E}=\dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}$，其中

$$\mathbf{r}=(x,y,z),\ r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$\mathrm{V}=\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$
非空间单连通

则向量场 $\mathbf{E}$ 在它的定义域 V 中是无源场，但它在 V 中没有向量势.

向量场 $\mathbf{v}=(P,Q,R)$ 有向量势 ⟺ 存在 $\boldsymbol{\alpha}=(A,B,C)$，使得

$$(P,Q,R)=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\alpha}=\nabla\times\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z},\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

即PDEs $\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial y}-\dfrac{\partial B}{\partial z}=P\\[2mm] \dfrac{\partial A}{\partial z}-\dfrac{\partial C}{\partial x}=Q\\[2mm] \dfrac{\partial B}{\partial x}-\dfrac{\partial A}{\partial y}=R\end{cases}$ 关于 V 上的函数 A,B,C 有解.

当 $\mathbf{v}$ 是空间单连通区域 V 上的无源场时，可取

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathbf{i}+\left(-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\mathrm{d}z+\int_{x_0}^{x}R(x,y,z_0)\mathrm{d}x\right)\mathbf{j}$$

例： 证明向量场 $\mathbf{F}=(xy+1, z, -yz)$ 是无源场，并求出 $\mathbf{F}$ 的一个向量势.

注： 设 V 为**空间单连通区域**，$\mathbf{v}$ 为 V 上的无源场，则：

1. $\mathbf{v}$ 有向量势.

2. $\mathbf{v}$ 的向量势不唯一. 但**在相差一梯度场的意义下是唯一的**.

若 $\mathbf{v}$ 有两个向量势 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，则：

$$\mathbf{v}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \mathrm{rot}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0} \Rightarrow \exists\varphi, \text{s.t.}\,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\mathrm{grad}(\varphi)$$

全微分方程

定义： 对微分方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$，若存在函数 $\varphi(x,y)$ 使得

$\mathrm{d}\varphi(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$，则称之为**全微分方程**.

是否为全微分方程？

当 $P(x,y), Q(x,y)$ 为**单连通区域** D 上一阶偏导连续，则：

$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ **为全微分方程** $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

全微分方程求解：

全微分方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\,\varphi(x,y)=0$

$\Leftrightarrow \varphi(x,y)=C$，其中 C 为任意常数.

$$\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

1. 求解微分方程

$$(2x\cos y - y^2\sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

2. 设函数 $Q(x,y)$ 一阶偏导连续，曲线积分 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，且对任意常数 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

求函数 $Q(x,y)$.

积分因子

若存在函数$\mu(x,y)$,使得$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$是全微分方程，则称$\mu(x,y)$为方程$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$的一个**积分因子.**

积分因子将非全微分方程转化为几乎同解的全微分方程，再求解.

缺点：只适合特殊情况.

1. 求解微分方程$(x+y^2)\,\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y=0$.

2. 求方程$(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=0$的通解.

一些常见的全微分公式

(1) $\mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v = \mathrm{d}(u \pm v)$； (2) $u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}(\;uv\;)$；

(3) $u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(\frac{1}{2}(u^2 + v^2))$；

(4) $\dfrac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2} = \mathrm{d}(\dfrac{v}{u})$； (5) $\dfrac{u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u}{u^2 + v^2} = \mathrm{d}(\arctan\dfrac{v}{u})$；

(6) $\dfrac{u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \mathrm{d}(\sqrt{u^2 + v^2})$；

积分因子不唯一

(7) $\dfrac{u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v}{u^2 + v^2} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2))$；