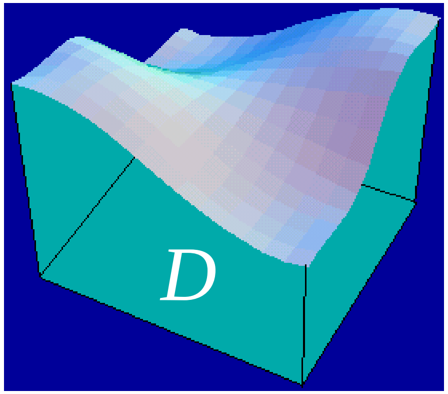
第十章　多元函数的重积分

- **二重积分**
- 二重积分的换元
- 三重积分
- n 重积分

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

二重积分的概念

1. 曲顶柱体的体积

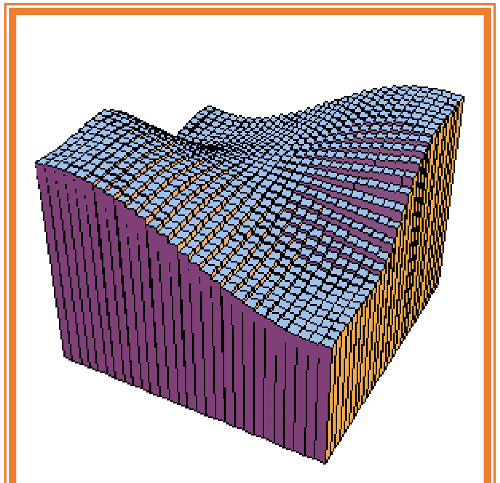


曲顶柱体:

底： XOY 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x,y)$

侧面：以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面



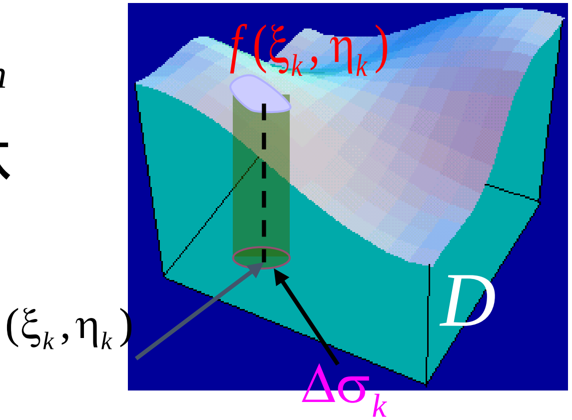
用微元法思想计算(定义)体积:

“分割; 近似; 求和；取极限”

1) 分割：

用任意曲线网分D为n个区域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$

以它们为底把曲顶柱体分为n个小曲顶柱体



2) 近似

在每个 D_k 中任取一点 (ξ_k, η_k)，则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

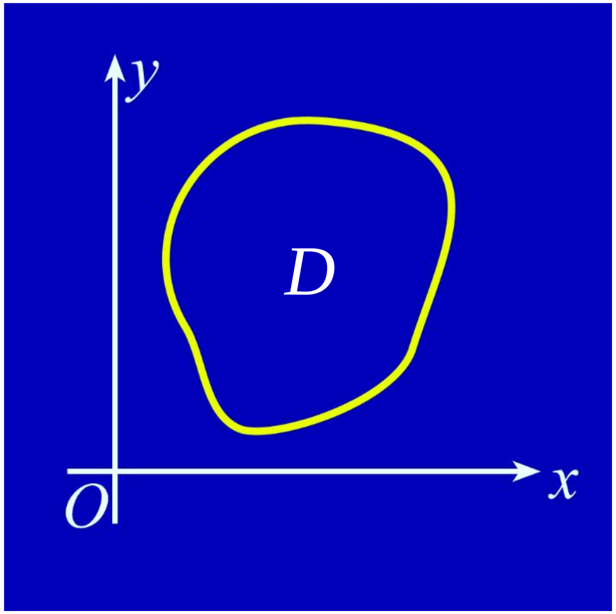
3) 求和 $V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$

4) 取极限

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad , \lambda = \max_{1 \le k \le n}\{\operatorname{diam}(D_k)\}$$ (**diam**eter: 直径)

2. 非均匀平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在 XOY 平面上占有区域 D，其面密度为$\rho(x,y)$,
求该薄片的质量M .

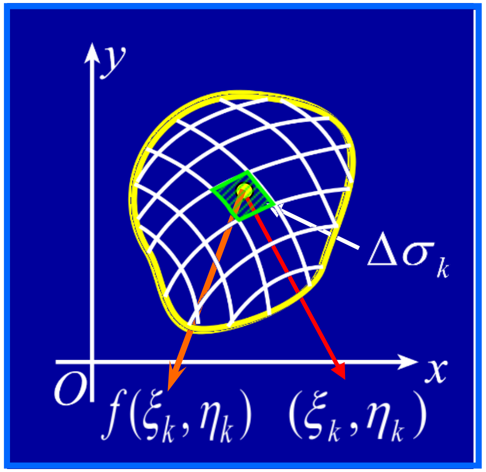


用微积分思想计算(定义)曲面块的质量:

“分割;　近似;　求和；取极限”

1) 分割：

用任意曲线网分D为 n 个小区域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$



2) 近似

在每个 D_k 中任取一点 (ξ_k, η_k)，则第 k 小块的质量

$$\Delta M_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 求和

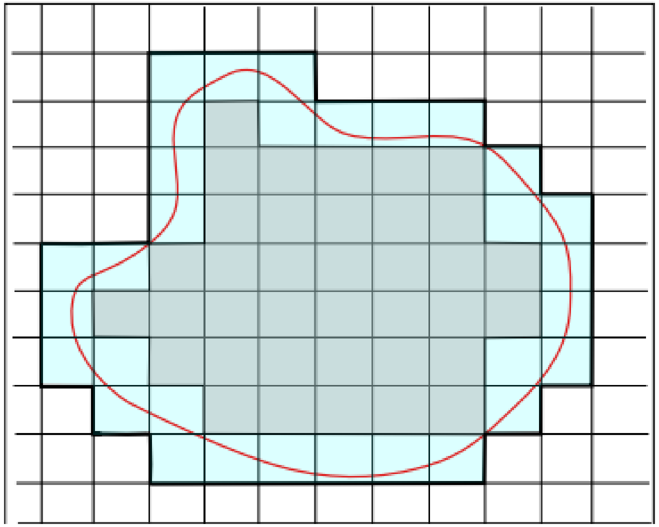
$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

4) 取极限

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \ , \lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\mathrm{diam}(D_k)\}$$

平面区域的面积

设 D 是有界集，作矩形 $I=[a,b]\times[c,d]\supset D$, 对矩形作分割T，得到一些小矩形.



(1)完全包含在 D 内的小矩形面积的和为 $\sigma_T^-(D)$;

(2)包含在 D 内和与 D 有公共点的小矩形面积的总和为 $\sigma_T^+(D)$. 则：

$$0\le\sigma_T^-(D)\le\sigma(D)\le\sigma_T^+(D)\le\sigma(I).$$

D是平面有界点集, 取$I=[a,b]\times[c,d]\supset D$, 若对任意分割

$$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$$

极限$\lim\limits_{|T|\to 0}\sigma_T^+(D)=\lim\limits_{|T|\to 0}\sigma_T^-(D)$, 那么称点集$D$是**Jordan可测**的, 否则称为不可测的；极限值称为D的测度或“面积”. 特别的，当极限值为 0 时，称D为**零测集**.

记∂D为D的边界，挑出那些含有边界点的小矩形，则

$$0\le\sigma_T^+(D)-\sigma_T^-(D)\le\sigma_T^+(\partial D).$$

定理：D是Jordan 可测的$\Leftrightarrow$边界∂D的测度为零.

平面区域的面积：

(1) 闭区间上连续函数给出的平面曲线段的面积为零.

(2) 若有界点集的边界是由逐段光滑的曲线围成的，那么该点集是可测的

(3) 利用定积分定义的曲边梯形的面积与Jordan测度是一致的.

不可测的有界点集

$D=\{(x,y):0\le x,y\le 1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}$在Jordan意义下不可测的：

因为$\partial D=[0,1]\times[0,1]$, 边界的面积为1.

注：文后谈及到的区域D都是由有限多条分段光滑曲线围成的有界闭区域.

将D分割为有限个**内部互不相交**的有面积的小区域$\left\{D_i\right\}_{i=1}^{n}$，其中$D_i$的面积为$\sigma\left(D_i\right)$，记分割宽度$|T|=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\operatorname{diam} D_i\right\}$，对任意$\left(\xi_i,\eta_i\right)\in D_i\ (1\le i\le n)$，称$S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\sigma\left(D_i\right)$为$f(x,y)$在$D$上的一个**Riemann 和**. 若

$$\lim_{|T|\to 0} S(T)=\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\sigma\left(D_i\right)$$

存在，则称$f(x,y)$在D上**(Riemann)可积**, 并称其极限值为$f(x,y)$在D上的**二重积分**，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \text{ 或 } \int_D f.$$

定义：$f(x,y)$ 在 D 上可积且积分等于 A $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{s.t.}$ 对任意 D 的分割和 D_i 的任意取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i(1\le i\le n)$，只要分割宽度满足 $|T|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)-A\right|<\varepsilon$$

积分表达式　　积分变量

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

积分域　　被积函数　　面积微元

曲顶柱体体积: $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;　平面薄片质量: $\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

函数可积性

定理：$f(x,y)$ 在 D 上可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

注：可积必有界，有界未必可积(Drichlet函数).

$$D(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\ \text{为有理点.}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Riemann可积首先要求函数有界，区域有界.

定理：D 上有界函数 $f(x,y)$ 可积 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\sigma(D_i)=0$

可积的充分条件:

定理: (1) 若$f(x,y)$在D上连续，那么在D上可积.

(2) 若$f(x,y)$的不连续点分布在D中测度为零的点集上, 则

$f(x,y)$在D上可积.

推论：若D上有界函数$f(x,y)\neq g(x,y)$的点分布在D中测度为零的点集上, 则$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上有相 同的可积性，且可积时有

$$\int_D f=\int_D g.$$

注记：1. 连续必可积，可积未必连续.

2. 在测度为零的点集上任意改变函数的值，不会改变函数的可积性和积分值.

二重积分的性质

设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 D 上可积.

(1) 线性性： 对任意常数 c_1, c_2, $c_1 f + c_2 g$ 在 D 上可积，且

$$\int_D (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_D f + c_2 \int_D g.$$

(2) 乘积可积性： $f(x,y)g(x,y)$ 在 D 上可积.

(3) 保序性： 若在 D 上 $f(x,y) \geq 0$, 则 $\int_D f \geq 0$.

若在 D 上 $f(x,y) \geq g(x,y)$, 则 $\int_D f \geq \int_D g$.

特别地，若在 D 上 $m \leq f(x,y) \leq M$，则有估值不等式

$$m\sigma(D) \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq M\sigma(D).$$

(4) 绝对可积性： $|f(x, y)|$ 在 D 上可积，且 $\left|\int_D f\right| \le \int_D |f|$.

(5) 积分区域的可加性： 设 D_1, D_2 是两个可测点集， $D_1^0 \cap D_2^0 = \varnothing$, 若函数 $f(x,y)$ 在 D_1, D_2 上均可积, 则 $f(x,y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上可 积, 且

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

(6) 积分中值定理： 若 D 是连通闭区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\exists P \in D, \text{s.t.} \int_D f = f(P)\sigma(D).$$

推广的积分中值定理： 若 D 是连通闭区域，f, g 在 D 上连续且 g 在 D 上不变号，则 $\exists P \in D, \text{s.t.} \int_D fg = f(P)\int_D g.$

矩形区域上二重积分的计算

定理(Fubini)：设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积.

(1) 如果对每个 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上可积，

记 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$, 则 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，并且有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

(2) 如果对每个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[c,d]$ 上可积，

记 $\psi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

(3) 如果(1),(2)中条件都成立(例如 $f(x,y)$ 在 D 上连续)，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

先 x 后 y 的累次积分 $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$

先 y 后 x 的累次积分 $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$

二重积分： $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

同累次极限与二元极限的关系类似，三者不一定会相等

Example：设 $f(x,y)=\begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数} \\ 2y, & x\text{ 为无理数} \end{cases}$，则

(1) $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上不可积；

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在；$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在.

Examples：

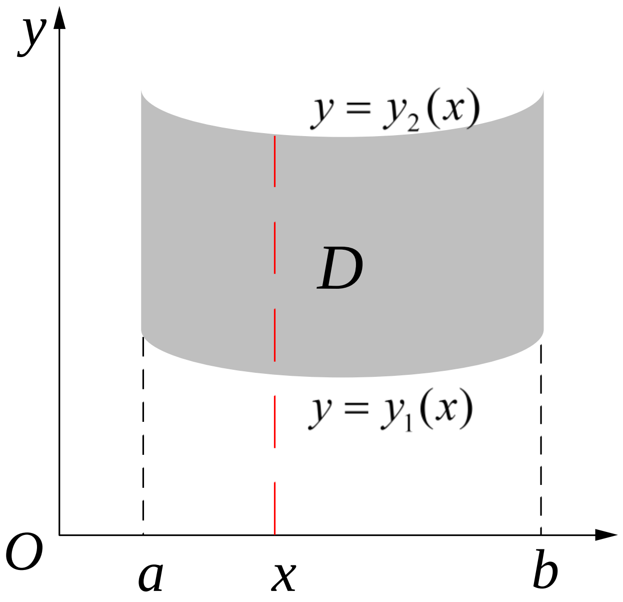
$$1.\ \iint_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D=[0,1]\times[0,1]$$

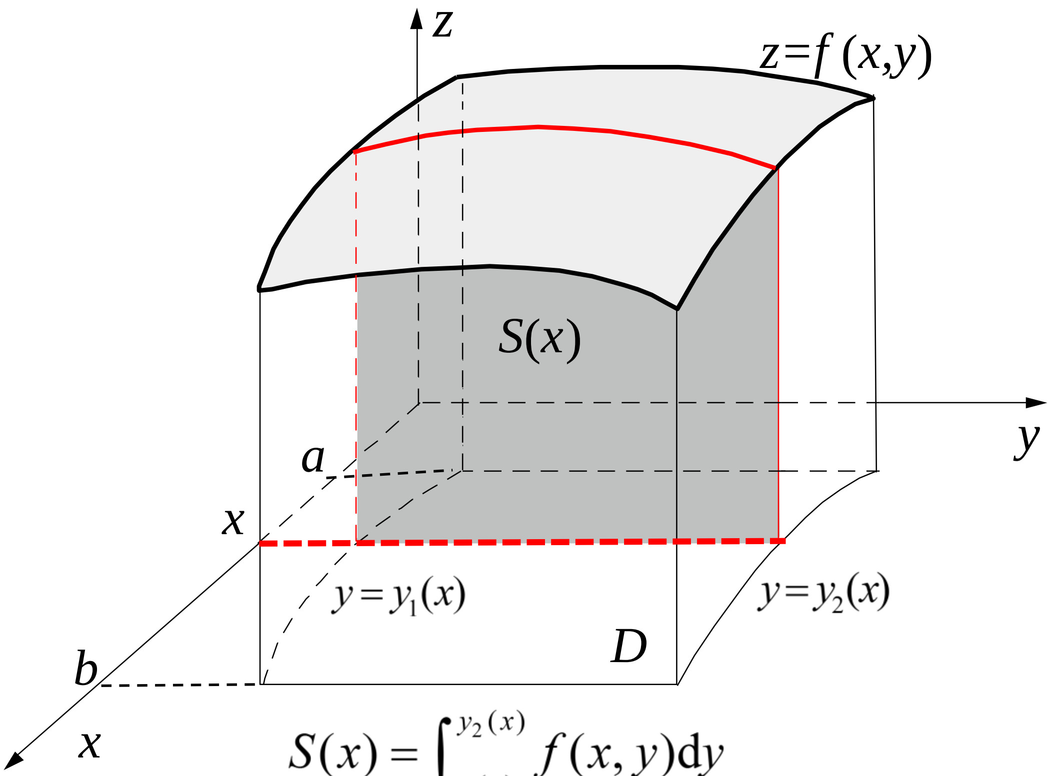
$$2.\ \iint_D x\cos xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D=[0,\pi]\times[0,1].$$

X型区域上的二重积分

定理： 设 $D=\left\{(x,y)\middle| y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\right\}$, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 为连续函数. 函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且对于任意的 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 在 $\left[y_1(x), y_2(x)\right]$ 上关于变量 y 可积, 记 $\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并有

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$





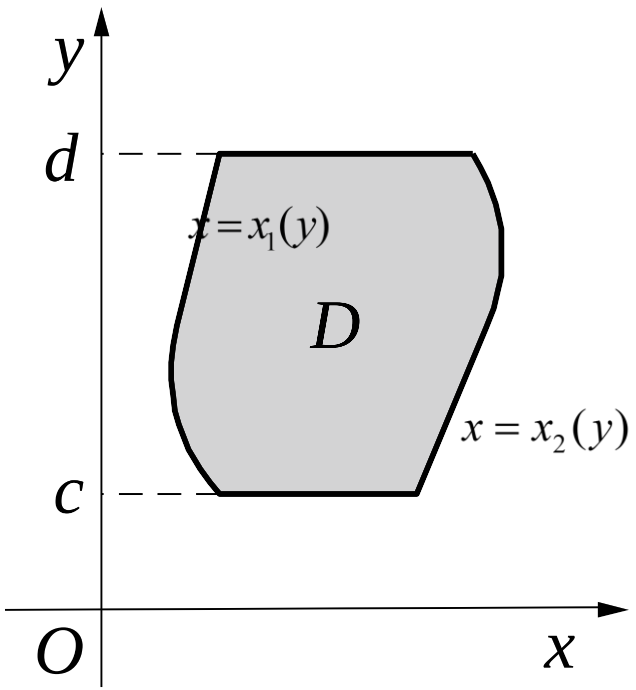
$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

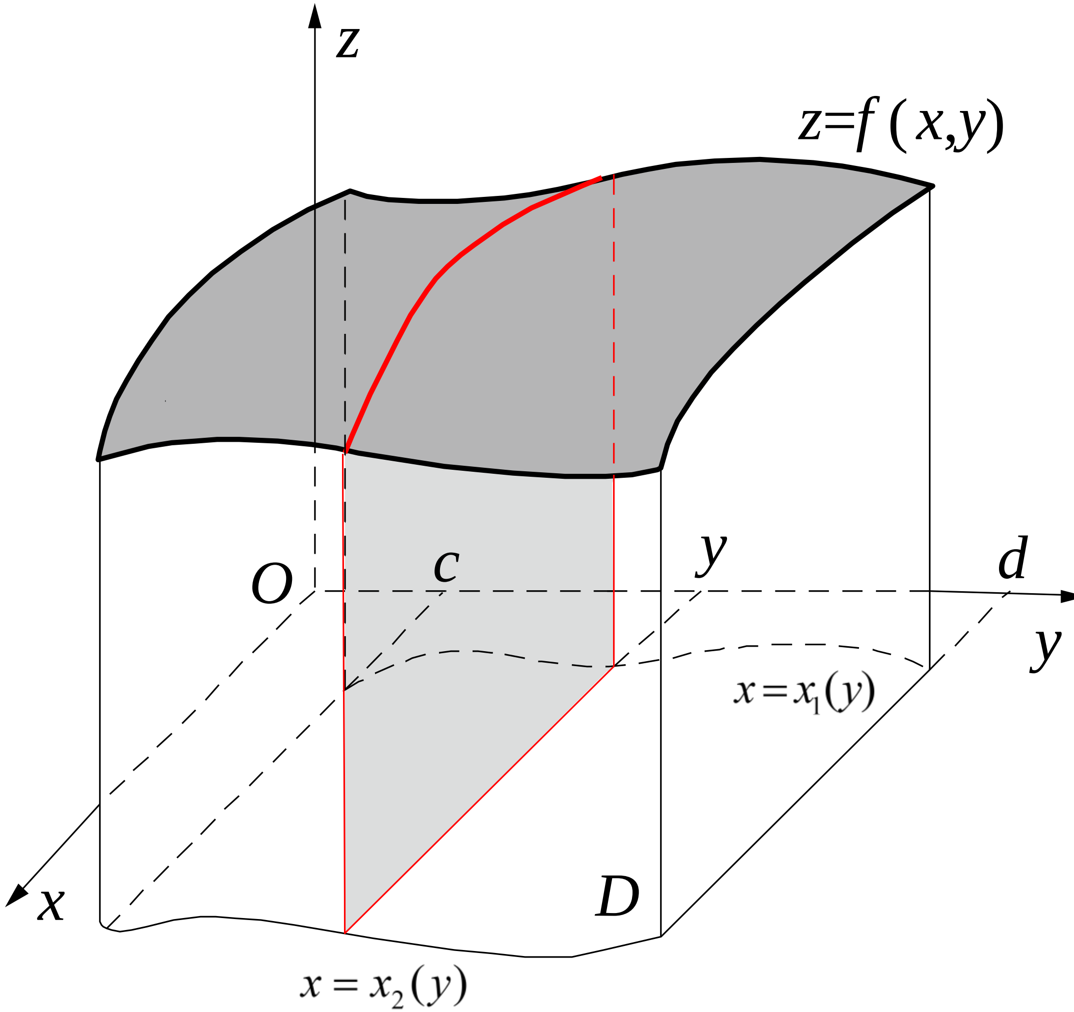
$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Y型区域上的二重积分

定理： 设 $D=\{(x,y)\big|x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$，其中 $x_1(y),x_2(y)$ 为连续函数. 函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且对于任意的 $x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 在 $[x_1(y),x_2(y)]$ 上关于变量 x 可积，记 $\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$，则 $\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，并有

$$\int_c^d \psi(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$





$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

定理： $f(x,y)$ 连续，且积分区域 D 既可表示成 X 型区域，又可表示成 Y 型区域，那么两种累次积分可交换，且

$$\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注记：对于更一般的积分区域 D，利用积分区域的可加性，把 D 分成有限个互不相交的 X 型区域和 Y 型区域之并，在每个小区域上用相应的累次积分，再将积分值相加.

Examples：

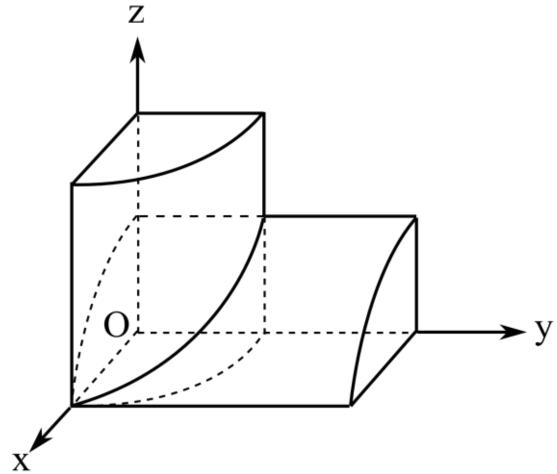
1. $\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=0, x=a, y=\dfrac{b}{a}x$ 围成.

2. $\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=a, y=3a, y=x$ 和 $y=x+a\ (a>0)$ 围成的平行四边形.

3. 求 $\int_1^2 y\mathrm{d}y\int_y^2\dfrac{\sin x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

4. 求 $\iint_{|x|+|y|\le 1}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. 求由 $x^2+y^2\le a^2$ 和 $x^2+z^2\le a^2$ 相交部分立体的体积 V.



6. 计算累次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y.$

7. 设 $f(x)$ 连续，$g(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x,$ 求 $g'(2).$

8. 求 $I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D: x=2, y=x, xy=1$ 围成区域.

9. 设 $f(x)\in C[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$, 求 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y$.

10. 求 $\iint_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由直线 $y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 围成.

重要技巧------奇偶、对称、区域划分

计算下列二重积分：

1. $I=\iint_D x\operatorname{sgn}\left(y-x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

2. $I=\iint_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$, $f(x)$ 为正值连续函数 , a,b 是常数.

3. $I=\iint_D x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $y=4-x^2$, $y=-3x$ 围成的 $x\le 1$ 的部分.

4. $\iint_D x\left(1+ye^{x^4y^6}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=\sin x, x=-\dfrac{\pi}{2}, y=1$ 围成.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ,$D=[a,b]\times[a,b]$, 试证明：

$$(1).\ \iint_D e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2;$$

$$(2).\ \iint_D \frac{1+y^4f^2(x)}{1+x^4f^2(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2.$$

本小节作业：

P156: 1(1,3,5)，2(1,3,5,8)，3，5，6，7