

## 2023 ~ 2024 学年数分B1期末考试参考答案

一、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

(1) 求不定积分  $\int |x| \, dx$ .

(2) 求不定积分  $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} \, dx$ .

(3) 求定积分  $\int_{-1}^1 \frac{x^2+x^3}{1+\sqrt{1-x^2}} \, dx$ .

(4) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4n} \sec^2 \left( \frac{k \cdot \pi}{4n} \right)$ .

(5)  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} \, dx$ .

(6) 求  $(1+x^2) \ln(1+x^2)$  的 Maclaurin 级数, 并求其收敛半径.

二、(10 分) 求常微分方程  $y'' - 3y' + 2y = e^x$  的通解.

三、(12分) 已知曲线  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).

(1) 求曲线的长度;

(2) 求由给定曲线和直线  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  围成的平面图形绕X轴旋转一周所得立体的体积.

四、(本题 10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$  的收敛域与和函数.

=====

五、(8分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶导函数连续,  $f(0) = f(1) = 0$ . 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)| \, dx \geq 4 \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

/

六、(14分) 设  $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} (n \geq 1)$ .

(1) 证明数列  $\{u_n\}$  收敛, 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ;

(2) 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  条件收敛;

—

七、(10 分)证明: (1) 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$  在  $(0, 1]$  上一致收敛.

$$(2) \int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$