第十章　多元函数的重积分

- 二重积分
- 二重积分的换元
- **三重积分**
- n 重积分

定义：设 $f(x,y,z)$ 是定义在空间有界集 V 上的函数，将 V 分割成一些互不重叠的有体积的小几何体 $V_1,V_2,\cdots,V_n$,它们的体积分别为 $\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$, 在 V_i 内任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 作Riemann和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

当分割的最大直径趋于 0 时，此和式极限存在，则称 $f(x,y,z)$ 在 V 上**可积**，极限称为 $f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分，记为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V,\ \text{或}\ \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \text{或}\ \int_V f\,\mathrm{d}V.$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

注记：

(1) 三重积分的定义中用到了“体积”，可通过Jordan测度定义;
若常值函数 1 在 V 上可积，则积分 $\int_V \mathrm{d}V$ 的值就是 V 的体积.

(2) 以后我们总假设积分域 V 是由有限张光滑曲面围成的有界区域，此时 V 总是有体积的.

(3) 三重积分具有和二重积分一样的性质. 重点是三重积分的计算.

定理：设 V 是 $\mathbf{R}^3$ 中由有限张光滑曲面围成的有界区域，$f(x,y,z)$ 是 V 上的函数.

(1) 若 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积，则 $f(x,y,z)$ 在 V 上有界；反之不真.

(2) $f(x,y,z)$ 在 V 上可积 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\left(V_i\right)=0.$

(3) 若 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续，则 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积.

(4) 若 $f(x,y,z)$ 在 V 上有界，且其不连续点分布在有限张光滑曲面上，则 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积.

三重积分的性质:

线性性；乘积可积性；保序性; 绝对可积性; 积分区域可加性; 积分中值定理.

三重积分的累次积分

定理： 设 $f(x,y,z)$ 在**长方体区域**

$$V = I_1 \times I_2 \times I_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

上连续，则有

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{I_1 \times I_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{I_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{I_1} \mathrm{d}x \iint_{I_2 \times I_3} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{I_1} \mathrm{d}x \int_{I_2} \mathrm{d}y \int_{I_3} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例： 求 $\iiint_V x^2 y e^{xyz} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

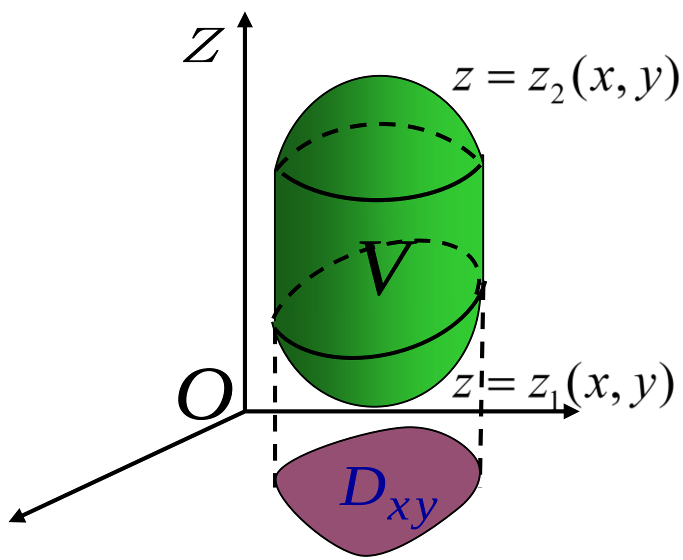
一、先一后二的累次积分法 (切细条法)

设有界闭区域 V 在XOY平面上的投影为平面区域 D_{xy}，且 V 由曲面

$$z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)\left(z_1(x,y) \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\right),$$

和以边界 ∂D 为准线并平行于 z 轴的柱面围成，$f(x,y,z)$ 在 V 上

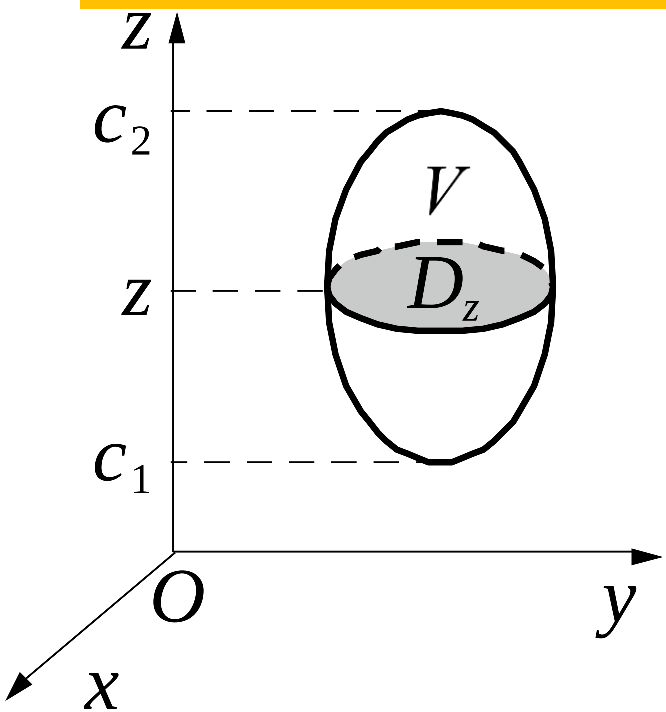
连续．则：$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$



二、先二后一的累次积分法 (切薄片法)

设有界闭区域 V 在 z 轴上的投影为区间 I，过 I 上一点 $(0,0,z)$ 垂直于 z 轴的平面与 V 的交在 XOY 平面上的投影为 D_z，则：

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_I \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



对一般区域V，可将区域分成有限个可进行累次积分区域之并，再利用积分区域可加性进行计算.

1. 计算 $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是由坐标平面 $x=0, y=0, z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 围成的四面体.

2. 计算 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由锥面 $R^2z^2=h^2(x^2+y^2)$ 及平面 $z=h$ 围成的锥体.

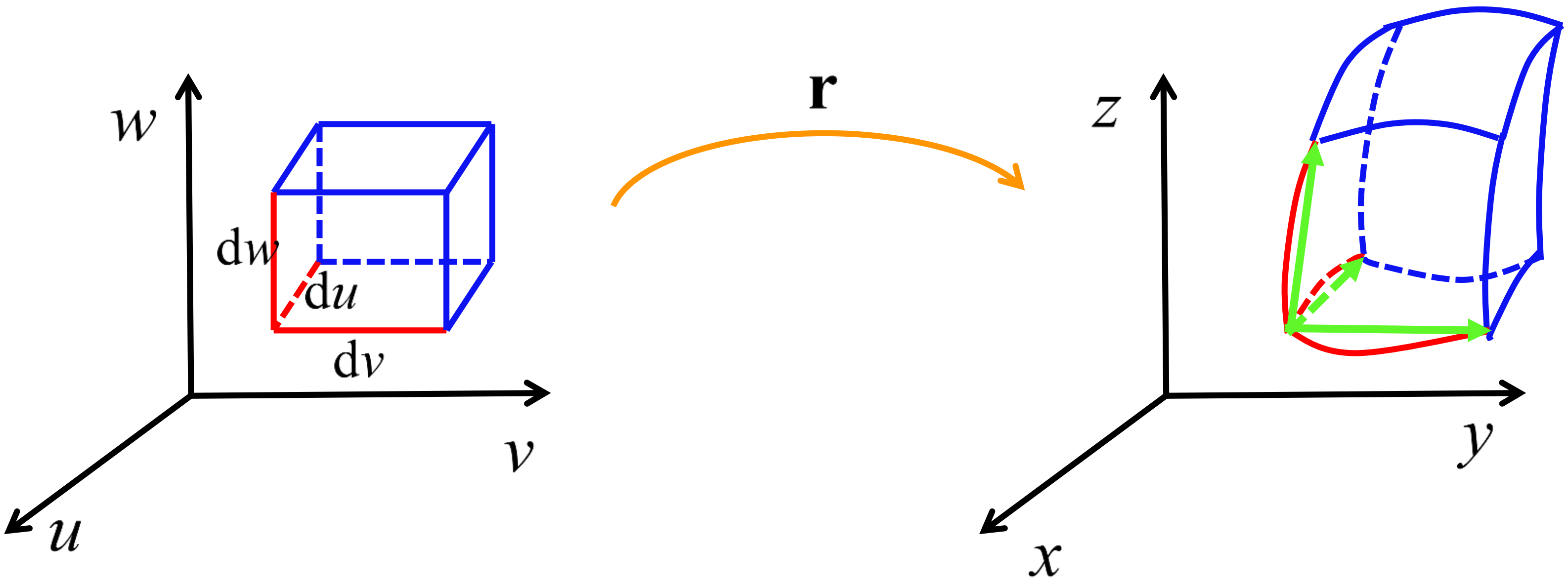
3. 计算 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

4. 求 $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 由 $x^2+y^2=2x, z=0, z=a(a>0)$ 围成.

5. 求 $\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$, 其中 $V: 0\le z\le h, x^2+y^2\le 4z$.

三重积分的换元法

设变换 $\mathbf{r}: x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$ 将 $O'uvw$ 空间中有界闭区域 V' 映为 $Oxyz$ 中有界闭区域 V.



体积微元：曲边六面体的体积近似为

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\left(\mathbf{r}_u'\mathrm{d}u \times \mathbf{r}_v'\mathrm{d}v\right)\cdot \mathbf{r}_w'\mathrm{d}w\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

定理：设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 V 上连续，变换

$$\mathbf{r}(u,v)=\left(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\right)$$

在 uvw 空间中的有界闭区域 V' 上有定义，满足：

(1) $\mathbf{r}:V'\to V$ 为一一映射；

(2) $x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)$ 在 V' 上一阶偏导连续；

(3) $\left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_p \neq 0,\ \forall p=(u,v,w)\in V'.$

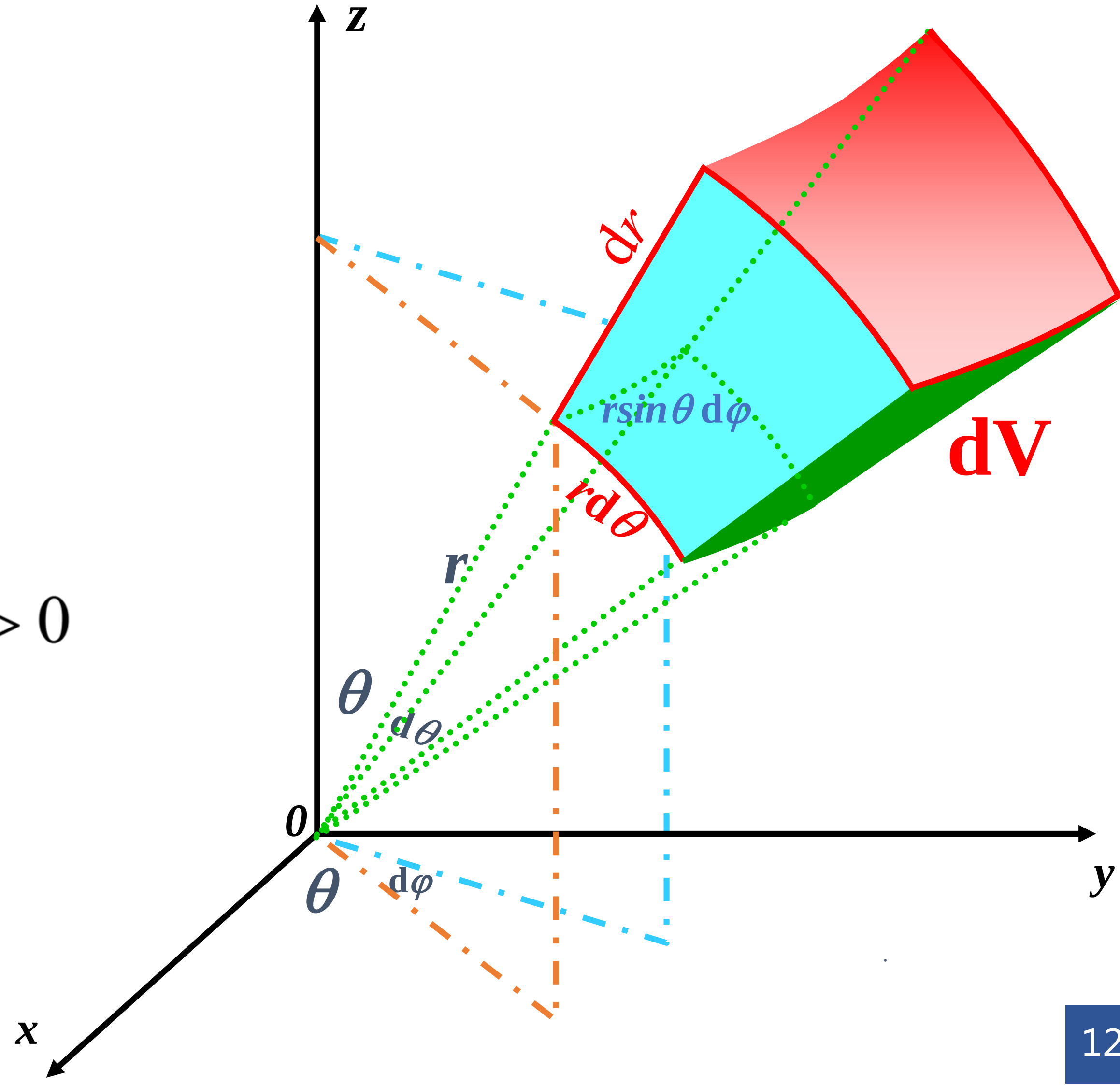
则：$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$=\iiint_{V'} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

球坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta > 0$$



三重积分**球坐标变换**

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \xrightarrow{\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}}$$

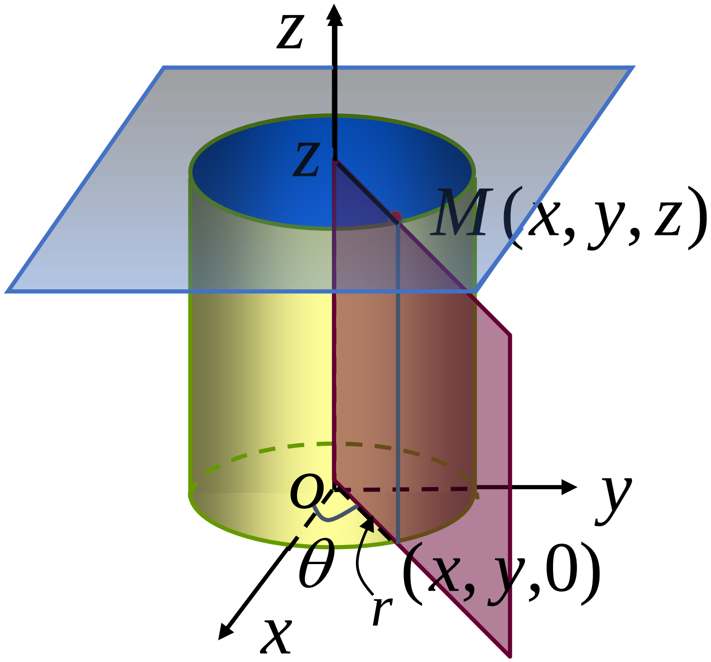
$$=\iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

注：积分区域或被积函数有以下特点，可考虑用球坐标 变换.

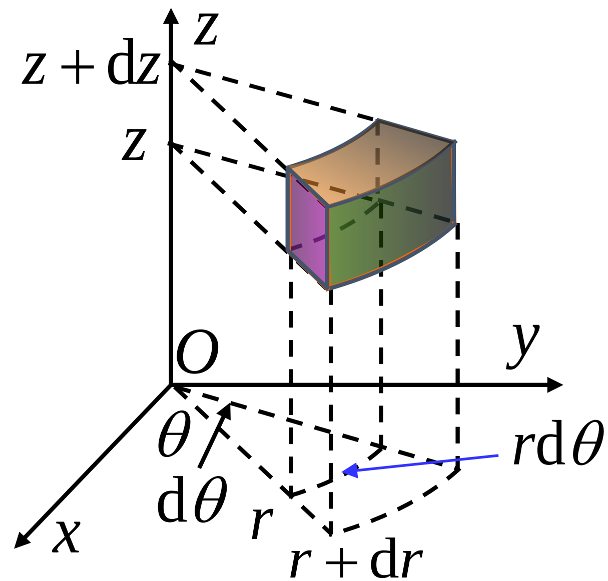
(1) 积分区域为球体、锥体或者它们的一部分

(2) 被积函数形 $x^n y^m z^k f\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 等形式

柱坐标变换



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$



体积微元： $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$

三重积分**柱坐标变换**

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \xrightarrow{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}}$$

$$=\iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

注：积分区域或被积函数有以下特点，可考虑用柱坐标变换.

(1) 积分区域为旋转体，例如柱体、锥体、旋转抛物体等

(2) 被积函数形 $x^n y^m z^k f\left(x^2+y^2\right)$ 等形式

以X轴或Y轴为中心轴的柱坐标变换结果类似.

1. 计算 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成的立体.

2. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围成立体的体积.

3. 计算曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 所围成立体的体积.

重要技巧------奇偶、对称、区域划分

在某些情形下，考虑积分函数关于某些变元的奇偶性和积分区域的对称性、轮换性，可有利于积分计算的化简.

1. $\iiint_V \dfrac{z\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le 1$

2. $\iiint_V \left(2x^2+3y^2+5z^2-2y+10z^3+x^4\right)\mathrm{d}V,\ V: x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0.$

综合练习：

1. $\iiint_V \left(x^3+y^3+z+x^2\right)\mathrm{d}V$, 其中 V 是由半球 $x^2+y^2+z^2=2z(z\geq 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域.

2. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$ 所围成立体的体积.

3. 求曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$ 所围成立体的体积.

物理学中的几个例子

1. 质心

空间中位于(x_k, y_k, z_k), 质量分别为m_k $(k=1,2,\cdots,n)$的n个质点，该质点系的质心坐标定义为：

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}$$

设物体占有空间域 Ω，有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$, 其质心为？

将 Ω 分成 n 小块，在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k)，将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点，此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如：

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$，即得

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}}$$

同理可得：$\bar{y}=\dfrac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}$

当 $\rho(x,y,z)\equiv$ 常数时，则得**形心坐标**：

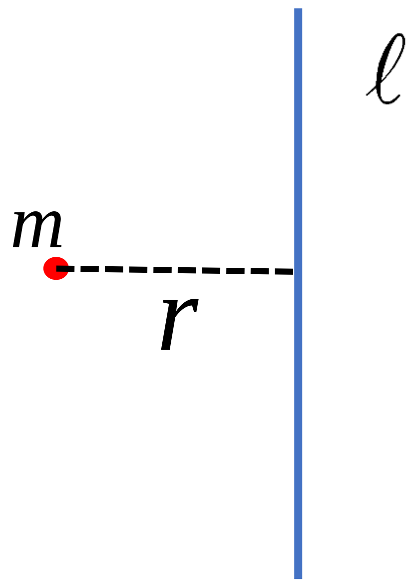
$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}V}{V},\quad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}V}{V},\quad \bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V}{V}$$

其中 $V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V$ 为 Ω 的体积.

例：设球体 $x^2+y^2+z^2\leq 2az$ 中任意一点的密度与该点到坐标原点的距离成正比，求此球体的质心.

2. 转动惯量

质量为m的质点与轴 ℓ 的距离为 r，则该质点绕轴 ℓ 旋转的转动惯量为 $I=mr^2$; 质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和.

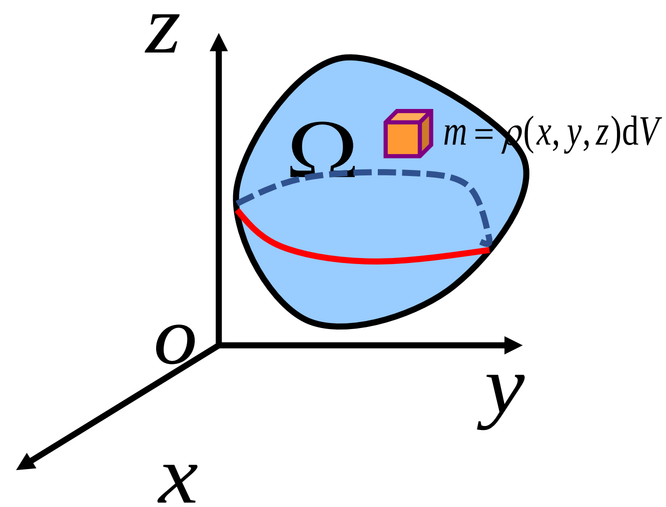


$$I=mr^2$$

设物体占有空间域 Ω，有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$，它绕轴 ℓ 的转动惯量为？

该物体位于(x,y,z)处的微元**对 z 轴的转动惯量**为

$$\mathrm{d}I_z=(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$



因此物体**对 z 轴的转动惯量**为：

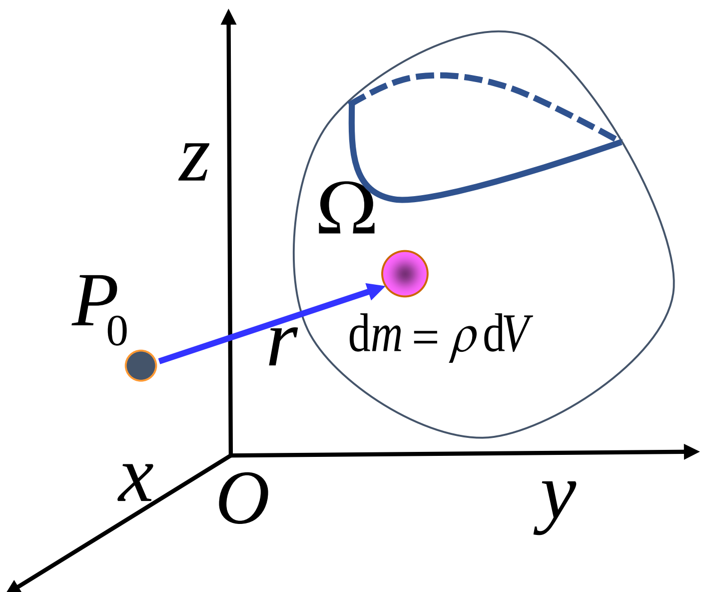
$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

例：求底半径为R, 高为l的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

3. 引力

质量分别为 m, M，相距 r 的两质点，其引力大小为 $F=\dfrac{GMm}{r^2}$，方向沿两质点的连线.

设物体占有空间域 Ω，有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$，求它对 (x_0,y_0,z_0) 处质量为 m 的质点的引力.



$$\mathrm{d}\vec{F}=\frac{Gm\rho\,\mathrm{d}V}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right),$$

$$\Rightarrow \vec{F}=Gm\iiint\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

1. 求半径为 R 的均匀(ρ 为常数)球体对球体外质量为 m 的质点的引力.

2. 求高为 H, 底半径为 R, 密度为 μ 的均匀圆柱体对圆柱底面中心的一单位质点的引力.

本小节作业：

P180: 1(2,4)，3(1,2,5,8)，4(1,4)，5(2,7,8)

P182: 6，8，9，10，15，18(2)，19