第十一章 曲线积分与曲面积分

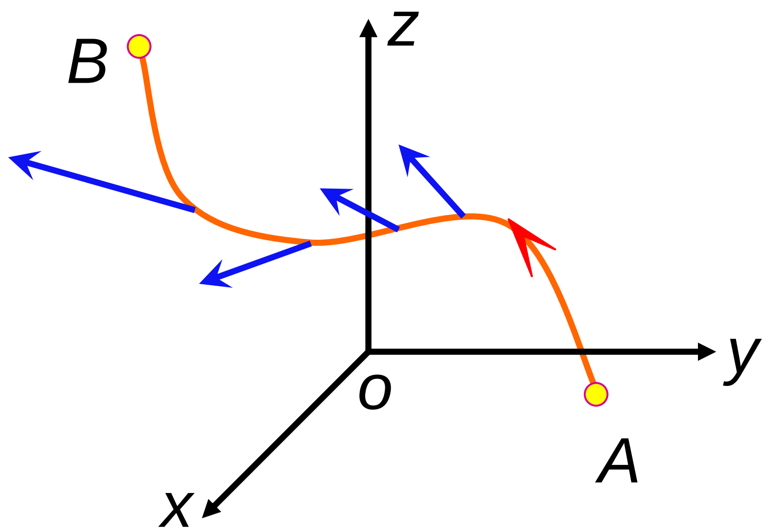
- 数量场在曲线上的积分
- 数量场在曲面上的积分
- **向量场在曲线上的积分**
- 向量场在曲面上的积分
- Gauss定理和Stokes定理
- 保守场
- 微分形式的积分

变力沿曲线做功

设空间中有向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=\big(\,P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z)\,\big)$,

$L=\overset{\frown}{AB}$ 为力场中一光滑或分段光滑曲线. *A* 为起点， *B* 为终点 .

求力 F 沿曲线 *L* 从 A 到 B 所做的功 W.



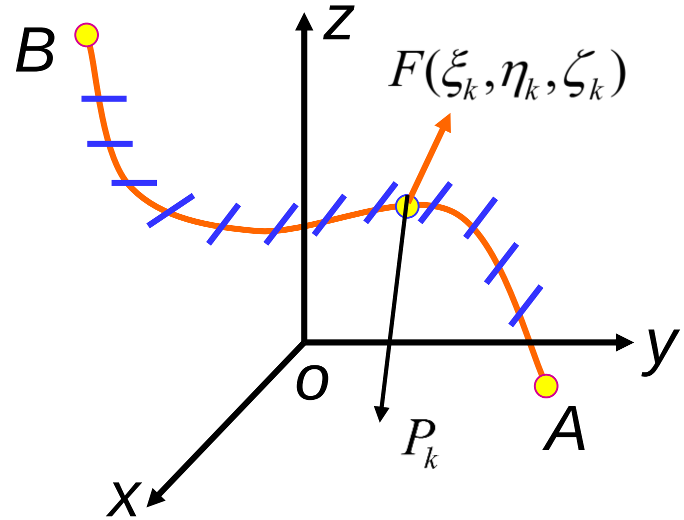
用微元法思想计算功：

“分割; 近似; 求和；取极限”

1) 分割：

任意划分 L 得 n 个小弧段

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_k, \cdots, \Delta s_n.$$



2) 近似

每个小弧段 Δs_k 上任取一点 P_k，

用该点处的力矢作为该弧段的力，力场在质点经过该小段时做功

的近似值为：$W_k \approx \mathbf{F}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$

$$= P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k$$

3) 求和 $W \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k$

$$\boxed{\lambda = \max_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}}$$

4) 取极限 $W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k]$

曲线的定向

设 L 是连接 A, B 的曲线，若指定点 A 是起点，点 B 是终点，这时曲线就有了一个确定的方向，称为**定向曲线**，记为 L_{AB}.

- 当 L 有参数表示 $\mathbf{r}(t)=\big(x(t), y(t), z(t)\big), \alpha \le t \le \beta$, 此时 $\mathbf{r}(\alpha)$ 为起点，$\mathbf{r}(\beta)$ 为终点；即规定**参数增加的方向作为正方向**.

- 若 L 为光滑曲线，$\mathbf{r}'(t)$ 是 L 的一个切向量，并且是指向参数 t 增加的方向. 所以指定单位切向量 $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\left|\mathbf{r}'(t)\right|}$ 为 L 的正方向. $-\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的负方向.

- 对XOY平面上的封闭曲线，习惯上称其**逆时针方向为正方向**. 这时曲线所围成的内部区域在 L 行进方向的左边.

定义：设 $\mathbf{v}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z)\big)$ 是空间区域 Ω 中的向量场，L_{AB} 是 Ω 中**定向曲线**，在 L_{AB} 上从 A 到 B 依次选取任意的分割点 $A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B$, 其中分割点的坐标是 $M_i(x_i,y_i,z_i), i=0,\cdots,n$, 记 $\Delta r_i=\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\Delta x_i i+\Delta y_i j+\Delta z_i k$. 在每一段弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，当分割的最大长度 $|T|\to 0$ 时，如果和式

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\mathbf{r}_i=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$$

的极限存在有限，那么极限值称为向量场 $\mathbf{v}$ 沿**曲线** (或路径) L_{AB} **的积分**，也称为**第二型曲线积分**， 记为 $\int_{L_{AB}}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$.

设空间定向曲线 L_{AB} ： $\mathbf{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big),\alpha\le t\le\beta.$

参数 t 对应的点处的**单位切向量**为 $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$

弧长微元 $\mathrm{d}s=|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=|\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,|;$

$\mathrm{d}\mathbf{r}=\left(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\right)=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s;$

故第二型曲线积分常常写为：

$$\int_{L_{AB}}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{L_{AB}}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

$$=\int_{L_{AB}}\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_{L_{AB}}\big(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big)\mathrm{d}s.$$

第二型曲线积分的性质

1. 线性性：若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$，则有

$$\int_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=c_1\int_L \mathbf{v}_1\cdot d\mathbf{r}+c_2\int_L \mathbf{v}_2\cdot d\mathbf{r}.$$

特别地，$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_L P\,dx+\int_L Q\,dy+\int_L R\,dz.$

2. 对积分曲线的可加性：若 L_{AC} 是由 L_{AB} 和 L_{BC} 连接而成，则：

$$\int_{L_{AC}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}+\int_{L_{BC}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

3. 积分的方向性：$\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{L_{BA}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$

4. 绝对值不等式：$\left|\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\right| \le \int_{L_{AB}} |\mathbf{v}|\cdot \mathrm{d}s.$

注：①. 对于形如 $\int_L P\,\mathrm{d}x$ 的积分，应理解成是一个特殊的向量场 $\mathbf{v}=(P,0,0)$ 的第二型曲线积分，而不是通常的定积分.

②若曲线 L 在垂直于 X 轴的平面上, 则 $\mathrm{d}x=0$, 从而 $\int_L P\,\mathrm{d}x = 0.$ 其它情况类似.

Note: 当 L 为封闭曲线时，$\int_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ 称为向量场 $\mathbf{v}$ 沿环路 L 的**环量**，通常记为 $\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$

第二型曲线积分的计算

定理：设向量场 $\mathbf{v}=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$ 在区域 Ω 内连续，曲线 $L_{AB}\subset\Omega$ 具有参数方程表示

$$L_{AB}:\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\quad \alpha\le t\le\beta.$$

且有连续的导函数，参数 t 是正向参数，则向量场在 L_{AB} 上可积，且

$$\int_{L_{AB}}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_\alpha^\beta \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\left(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right)\mathrm{d}t.$$

计算曲线积分的方法重点：**找曲线的参数化.**

第二型曲线积分的计算，注意参数 α 对应这起点，β 对应着终点.

Examples：

1. 计算曲线积分 $\int_L xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, L 是三角形OAB的正向边界，其中A,B 的坐标分别为 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,2)$.

2. 设在力场 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的作用下, 质点由点 $A(R,0,0)$ 沿圆柱螺旋线 $x = R\cos t,\quad y = R\sin t,\quad z = kt \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 运动到点 $B(R,0,2\pi k)$, 试求力场 $\mathbf{F}$ 对质点所作的功.

3. 太阳对物体的引力可视为两个质量分别为 M 和 m 的质点之间的引力 $\mathbf{F}=-k\dfrac{mM}{r^3}\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{r}$ 是从质点 M 指向质点 m 的位置向量, 试求质点 m 从一点 A 到另一点 B 运行时，引力所作的功.

4. 求向量场 $\mathbf{v}_1=\dfrac{-yi+xj}{x^2+y^2}, \mathbf{v}_2=\dfrac{xi+yj}{x^2+y^2}$ 沿XOY平面上圆 $L: x^2+y^2=R^2$ 逆时针方向的环量.

Green公式

问题：平面向量场 $\mathbf{v}=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$沿曲线积分何时与路径无关?

⟺ 沿封闭曲线的环量为 0.

定理：$D=[a,b]\times[c,d]$为平面上**矩形区域**，$L=\partial D$. D上的光滑向量场 $\mathbf{v}=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$ 沿 L 的环量为：

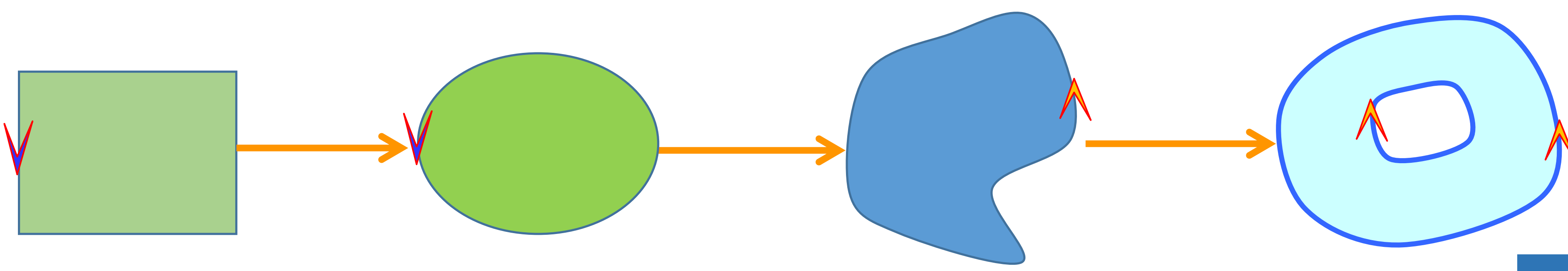
$$\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中L的方向为逆时针方向.

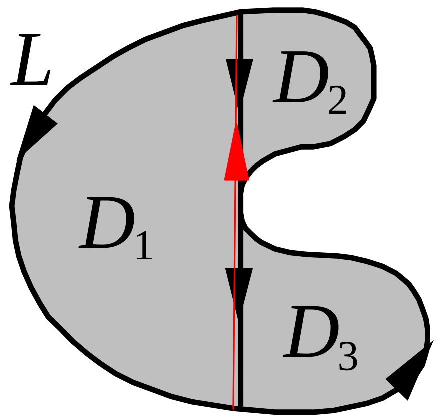
定理：设 D 是有限条逐段光滑的封闭曲线 L 围成的平面闭区域 $(L=\partial D)$. $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有**一阶连续偏导数**，则

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲线的**正向**这样选取：使得沿此方向行进时，**区域始终在它的左侧**. 上述公式称之为 **Green 公式.**



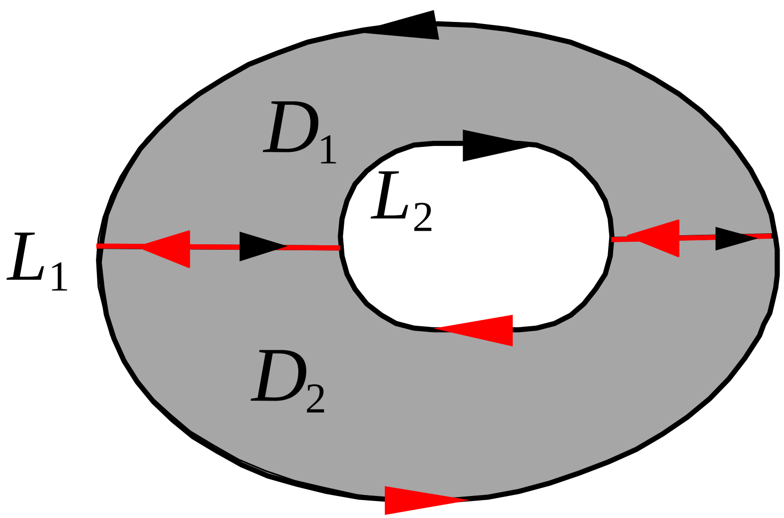
非X或Y型区域



$$\int_L = \int_{\partial D_1} + \int_{\partial D_2} + \int_{\partial D_3}$$

$$= \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} = \iint_D$$

多连通区域



$$\int_{L_1 + L_2} = \int_{\partial D_1} + \int_{\partial D_2}$$

$$= \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_D$$

推论：设 D 是满足 Green 定理中条件的区域，$\sigma(D)$ 为 D 的面积，∂D 为 D 的分段光滑的边界，则

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}-y\mathrm{d}x=\oint_{\partial D}x\mathrm{d}y.$$

特别地，若 ∂D 的参数方程为 $x=x(t),y=y(t),\alpha\le t\le\beta,$ 则

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)\mathrm{d}t\right|.$$

例：设平面上有一个多边形 D, 其顶点的坐标按逆时针排序分别是

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),$$

求 D 的面积.

定理：设 D 是平面上**单连通区域**，$\mathbf{v}$ 是定义在 D 上的**光滑向量场**，则下列三个命题相互等价：

1°. 向量场 $\mathbf{v}$ 在区域内绕任何简单封闭曲线 L 的环量等于零：

$$\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

或者说 $\mathbf{v}$ 在区域内的曲线积分与路径无关，可记

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

2°. 向量场 $\mathbf{v}$ 是一个函数的梯度场，即存在函数 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi(x,y) = \nabla\varphi(x,y).$$

且这样的函数 $\varphi(x,y)$ 在相差一个常数意义下是唯一的.

3°. 向量场 $\mathbf{v}$ 的两个分量 P,Q 满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0.$

定理：设 D 是平面上单连通区域，$\mathbf{v}$ 是 D 上光滑向量场，如果在 D 内的曲线积分与路径无关，那么在 D 内的任何两点 A, B, 有

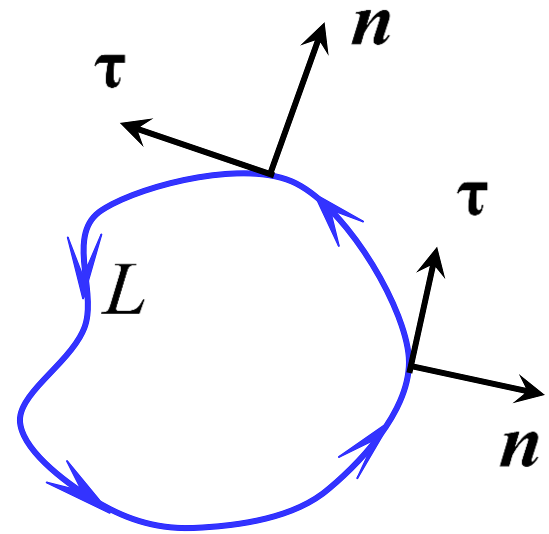
$$\int_A^B \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

其中 $\varphi(x, y)$ 满足 $\mathbf{v} = \nabla\varphi$.

例：研究向量场 $\mathbf{v} = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ 在闭曲线上的环量.

环量： $\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \overset{Green公式}{=\!=\!=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{v}$ 称为 $\mathbf{v}$ 的旋度.



环量刻画了向量场沿曲线 L 流动的速度；

$$\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = \lim_{a\to 0} \frac{\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{\pi a^2}$$

流量： $\oint_L \mathbf{v}\cdot n\,\mathrm{d}s = \oint_L -Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y \overset{Green公式}{=\!=\!=} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \nabla \cdot v$ 称为 $\mathbf{v}$ 的散度.

流量刻画了向量场通过曲线 L 流动的速度 .

Green公式把沿着平面有界闭区域边界的第二型曲线积分，转化成在这个区域上的二重积分.

使用Green公式注意三个条件：封闭性、方向性和偏导数的连续性.

1. 曲线 L 必须是封闭的. 若不封闭，可添加适当的辅助线使之封闭. 添加部分要与 L 同向，且这部分线上积分易积，即**补线法**.

2. 曲线 L 的方向必须是正方向；否则**加负号.**

3. 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上须有一阶连续偏导数. 若在 D 内存在 $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 的无定义点、不连续点、不可偏导点, 则 一般不能直接用 Green 公式，需挖去这些点，即**挖洞法.**

1. 设平面闭区域D由直线$y=x, y=4x$与双曲线$xy=1$，$xy=4$围成，L为D的边界正向曲线，函数$f(t)$有连续导数， 且$f(4)=4$, $f(1)=1$, 求$I=\oint_L \frac{1}{y}f(xy)\mathrm{d}y.$

2. 计算$I=\int_L \left[e^x\sin y-b(x+y)\right]\mathrm{d}x+\left(e^x\cos y-ax\right)\mathrm{d}y$, 其中$a>0, b$为常数，$L$为从点$M(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的上半圆弧.

3. 计算曲线积分$I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中$L$是以点$O_1(1,0)$为中心，$R$为半径的圆周$(R\neq 1)$, 取逆时针方向.

4. 已知平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$, L 为 D 的正向边界. 试证：

$$(1)\ \oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x;$$

$$(2)\ \oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \ge 2\pi^2.$$

5. 设 $\bar{D}$ 是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域，$u(x,y)\in C^{(2)}(\bar{D})$ 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(1) 试证$\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$, 其中 $\mathbf{n}$ 为∂D 的单位外法向量.

(2) 若当$(x,y)\in\partial D$ 时，$u\left(x,\ y\right)=A$ 为常数，证明:

$$u(x,y)\equiv A,\ \ (x,y)\in D.$$