

2022数分B1 考试简答

一、简单计算题.

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, 其中 $p > 0$.

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} \, dx$.

_____ $\frac{1}{\quad}$

3. 由曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与 x 轴及直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 围成的图形, 在绕 x 轴旋转一周后所得旋转体体积是多少? .

4. 求 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解

二、计算不定积分.

1. 求 $\int \frac{3 \cos x + 4 \sin x}{2 \cos x + \sin x}$

2. 求 $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$, 其中常数 $a > 0$. (本题解法不唯一)

三、证明 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \, dx > 0$.

四、设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f(t) \, dt$, 求 $f(x)$.

五、设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx$.

六、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上Riemann 可积, 证明 $e^{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上也是Riemann可积的.

七、设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续函数, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

解