第九章　多元函数微分学

- **多变量函数的连续性**
- 多变量函数的微分
- 隐函数定理和逆映射定理
- 空间曲线与曲面
- Taylor公式与极值
- 向量场的微商
- 微分形式

坐标平面上具有某种性质的点的集合，称为**平面点集**，记作

$$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{具有某种性质}\}$$

距离： 平面上两点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 间的距离是满足下列性质的一个函数 ρ：

- 1. **正定性：** $\rho(M_1,M_2)\ge 0$ 且等号成立当且仅当 $M_1=M_2$;
- 2. **对称性：** $\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$;
- 3. **三角不等式：** $\rho(M_1,M_3)\le\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)$.

例： $\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$\rho'\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\max\{|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|\}$$

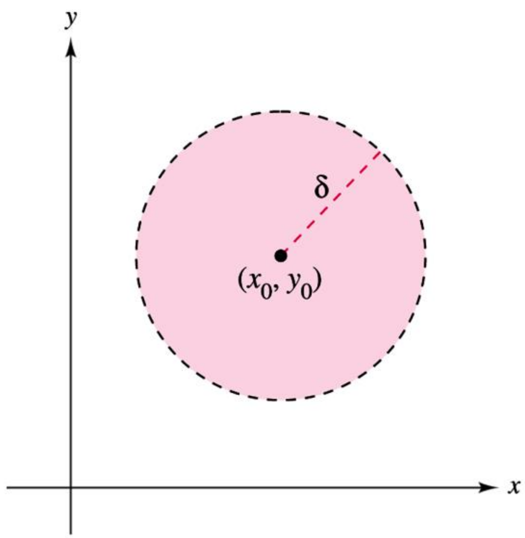
邻域：设 M_0 为平面中一个点，$\delta > 0.$

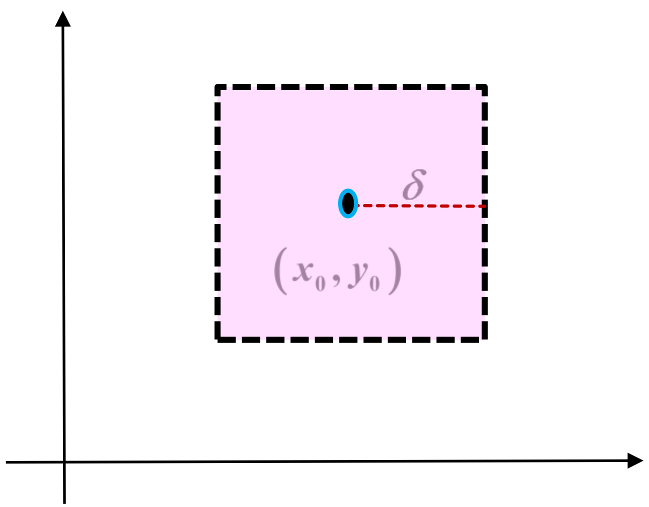
M_0 的 δ-**邻域**：

$$B(M_0,\delta)=\{M:\rho(M,M_0)<\delta\};$$

M_0 的 δ-**去心邻域**：

$$B\_(M_0,\delta)=\{M:0<\rho(M,M_0)<\delta\}.$$

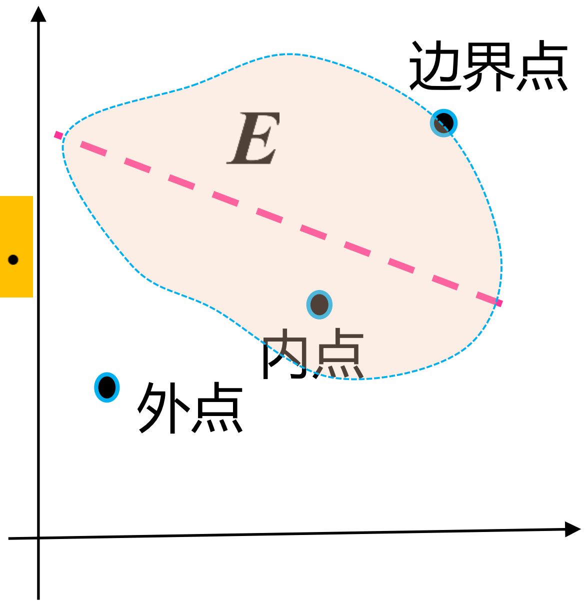




- **有界集**：设E为平面点集，如果 $\exists R>0,\ s.t.\ E\subset B(O,R)$ (O表示坐标原点)，则称E为有界集.

对有界集E可定义其**直径**：

$$diam\ E \triangleq \sup\{\rho(M_1,M_2):\ M_1,M_2\in E\}.$$



- **内点、外点**和**边界点**：设 $\varnothing\neq E\subset\mathbb{R}^2$，$M\in\mathbb{R}^2$.

1)如果 $\exists r>0,\ s.t.\ B(M,r)\subset E$，则称点 M 为 E 的**内点**.

E 的全部内点记为 E°；显然，$E^{\circ}\subset E$.

2)如果 $\exists r>0,\ s.t.\ B(M,r)\subset E^{C}$ (E 的补集)，则称点 M 为 E 的**外点**.

3)如果 $\forall r>0,\ B(M,r)$ 既含E中点，也含 E^{c} 中点，则称点 M 为 E 的**边界点**.
边界点的全体称为 E 的边界，记为 ∂E.

- **聚点**与**孤立点**：设 $\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}^2$，$M \in \mathbb{R}^2$.

  1) 如果 $\forall \varepsilon > 0, B\_(M,\varepsilon) \cap E \neq \varnothing$，即 M 的任意邻域中都有不同于 M 的 E 中的点，则称 M 为 E 的**聚点**.

  2) 如果 $\exists r > 0, s.t.\ B(M,r) \cap E = \{M\}$，则称点 M 为 E 的**孤立点**.

- **开集**与**闭集**

  如果 $E^{\circ} = E$，即点集 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**.

  若 E^c 为开集，则称 E 为**闭集**.

  $\bar{E} \triangleq E \cup \{E\text{的所有聚点}\}$，称为 E 的**闭包**.

注记：边界点或是孤立点，或是聚点；聚点包括内点和非孤立的边界点.

开集闭集的一些基本性质

- 两个开集的并集和交集仍是开集; 两个闭集的并集和交集仍是闭集.
- 非开非闭的点集有很多，既开又闭的集合只有空集$\varnothing$和全集 $\mathbb{R}^2$.
- $E \subset \mathbb{R}^2$为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \varnothing$.
- $E \subset \mathbb{R}^2$为闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$
- $E \subset \mathbb{R}^2$为闭集$\Leftrightarrow \bar{E} = E$, 即 E 包含其全部聚点.

- **连通集**：设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 若任意 $E = A \bigcup B, A \bigcap B = \varnothing$, 其中至少有一个子集含有另一个子集的聚点, 称 E 为连通的.

- **道路连通集：** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 如果对于E中任意两点都可以由E中的一条曲线连接起来，则称 E 为道路连通或弧连通的. 按定义，独点集也是连通集. 道路连通集一定是连通的.

- **区域**：连通的开集称为开区域；开区域的闭包称为闭区域；统称为区域.

若平面区域 D 内任一条简单闭曲线的内部还在 D 内，则称 D 是**单连通域**，即区域没有空洞. 否则, 称D 为**多连通域**.

- **简单曲线**：设 $x(t), y(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，称点集

$$L = \{(x(t), y(t)) : \alpha \le t \le \beta\}$$

为一条连接 $(x(\alpha), y(\alpha))$ 和 $(x(\beta), y(\beta))$ 的平面曲线. 如果曲线无自交点,则称 L 为一 条简单曲线或 **Jordan** 曲线. 如果 $(x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), y(\beta))$, 则称 L 为一条闭曲线.

- **平面点列的极限**：设$\{M_n(x_n,y_n)\}_{n\ge 1}$ 为平面点列，$M_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. 若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},s.t.\ n>N$ 时，有$\rho(M_n,M_0)<\varepsilon$，则称$\{M_n\}$为收敛点列，且其极限为 M_0，记为$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0$.

$$\lim_{n\to\infty}M_n=M_0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\ \ and\ \ \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

- Cauchy**点列**：设$\{M_n(x_n,y_n)\}_{n\ge 1}$ 为平面点列. 若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ $s.t.\ \forall m,n>N$有$\rho(M_m,M_n)<\varepsilon$，则称$\{M_n\}$为Cauchy点列.

$\{M_n\}$为Cauchy点列 $\Leftrightarrow\{x_n\},\{y_n\}$ 为Cauchy数列.

定理： $\{M_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{M_n\}$为Cauchy点列.

2、多变量函数

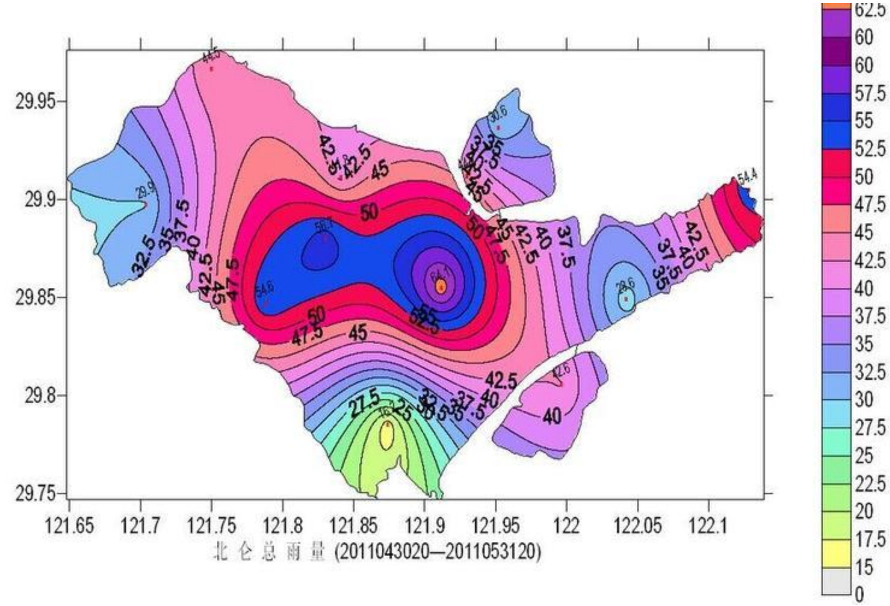
以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例.

- 概念: 自变量、因变量、定义域、值域；函数的图像.

- 曲面上的曲线、等值线

- 函数的复合

- 向量值函数



● 二重极限

设 $D\subset\mathbb{R}^2, f: D\to\mathbb{R}$为二元函数, M_0为 D 的聚点, $a\in\mathbb{R}$. 若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, $s.t.\ M\in D\cap B_{-}(M_0,\delta)$ 时 $|f(M)-a|<\varepsilon$, 则称 M 趋于M_0 时, $f(M)$ 的极限存在且为 a, 记为 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a$.

或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a$.

1. f 在M_0极限与 f 在 M_0有无定义及取什么值无关;
2. 动点 M 趋于定点 M_0 的路径是**任意**的;
3. 也可定义自变量趋于无穷时的极限. 如 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=a$.
4. 多元函数的极限仍具有极限值的唯一性、局部保号性、局部有界性、夹逼性以及极限的四则运算等.

例： 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

证： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \underline{\ \varepsilon\ }$， 当 $0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ 时，

$$\left|f(x,y)-A\right| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\right| = \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \ ,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

例： 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解： 令 $u=x^2+y^2$， 当 $x\to 0, y\to 0$ 时， $u\to 0$,

则二元函数的二重积分就转化为一元函数的极限问题.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

类似可得： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty.$$

更多的例子：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(e^{x^2+y^2}-1)};\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}.$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^3y}{x^2+y^2}};\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}.$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.\qquad \lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x-y)^2+x^2y^2};\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例： 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证： 取 $y = kx$(k 为常数)，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

当 $k=0$ 时，极限值为 0；当 $k=1$ 时极限值为 $\dfrac{1}{2}$，故极限不存在.

注记：二重极限定义的关键点是**路径任意**. 下述情况之一发生时，

二重极限**不存在**.

①路径不同，极限不同 ②极限依赖于参数

③某方式下极限不存在

判断下列各题极限是否存在，若有极限，求出其极限

$$(1)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\qquad (2)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{xy}\qquad (3)\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$$

注记：多元函数极限的定义、性质及运算法则与一元函数的类似.

在判断极限存在的情况，常采用类似一元函数求极限的方法，比如:

初等变形、初等函数的连续性、等价代换、变量代换、不等式放缩、夹逼原理及Taylor展开等.

累次极限:

① 先 x 后 y： $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$

② 先 y 后 x： $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$

注记： 累次极限实质上是先后两次取一元函数的极限. 这样，两个累次极限可能不等，或者可能有一个不存在.

累次极限与二重极限的关系

考虑下列例子在$(0,0)$处的极限.

(i) 重极限存在不意味着累次极限存在：$f(x,y)=x^2\sin\frac{1}{y}+y^2\sin\frac{1}{x}$

(ii) 累次都极限存在，变换顺序也可不相等：$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

(iii)一个累次极限存在，另一个也可能不存在：$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$.

(iv) 累次极限存在且相等，重极限也可能不存在：$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$,

- 重极限的存在性与累次极限的存在性没有必然的联系; 当重极限与某累次极限都存在时，极限值一定相等.

定义： 设 $D \subset \mathbb{R}^2$，$f: D \to \mathbb{R}$，$M_0 \in D$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$ $M \in D \cap B(M_0, \delta)$ 时 $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$, 则称 f 在 M_0 处**连续**.

M_0 为聚点时，f 在 M_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) = f\left(\lim\limits_{M \to M_0} M\right)$

M_0 为孤立点时，f 在 M_0 处连续.

定义： 若 f 在 D 上每一点都连续，则称 f 在 D 上连续.

定义： 设 $D \subset \mathbb{R}^2$，$f: D \to \mathbb{R}$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$ 当 $\rho(M_1, M_2) < \delta\left(M_1, M_2 \in D\right)$ 时有 $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$，则称 f 在 D 上**一致连续**.

例： 考虑函数在(0,0)处的连续性.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

解： 易知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在，故$f$在(0,0)处不连续.

即使沿着每一条直线$y=kx$方向，$f(x,kx)$在(0,0)处连续，$f(x,y)$仍可能在此处间断.

$f(x,y)$ 连续 $\Rightarrow f(x,y_0)$在x_0连续，$f(x_0,y)$在y_0处连续. 反之未必.

例： 讨论函数 $f(x,y)$ 在定义域上的连续性.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-y}-1}{x-y}, & x>y\\ 1, & x=y\\ \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}, & x<y\end{cases}$$

解： 在直线 $x=y$ 之外的点处显然连续. 对直线 $x=y$ 上的点 (a,a)，

在半平面 $x>y$ 上，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)=1=f(0,0).$

而在半平面 $x<y$ 上，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)=\cos a.$

故 $f(x,y)$ 在 $(2k\pi,2k\pi)$ 处连续，其它 (a,a) 处不连续.

注记： 分段函数的连续性需要分段讨论，尤其在分段点或线上.

连续函数的几条基本性质：

- 初等函数在其定义域之内都是连续函数.
- 多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零时）还是连续函数.
- 多元连续函数的复合函数在其定义域内还是连续函数.
- 多元连续函数仍具有局部有界性、保号性
- 有界闭集上的连续函数一致连续.

与一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质：

最值定理： **有界闭集**上的连续函数可取到最大、最小值.

介值定理： f 连续且其定义域 D 道路连通，则对任意 $M_1, M_2 \in D$, f 能取到 $f(M_1)$ 和 $f(M_2)$ 之间的所有值.