第9章 多变量函数的微分学

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院
科研管理楼1229

ylduan01@ustc.edu.cn

目录

目录

§9.1.1 平面点集的一些基本概念

- **距离:** 平面上两点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 间的**距离**定义为

$$\rho(M_1,M_2)=|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

它满足距离的三个要素:

(正定性) $\rho(M_1,M_2)\geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $M_1=M_2$;

(对称性) $\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$;

(三角不等式) $\rho(M_1,M_3)\leqslant\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)$.

- **邻域:** 设 M_0 为平面中一个点, $\varepsilon>0$, **M_0 的ε-邻域**定义为

$$B(M_0,\varepsilon)=\{M|\rho(M,M_0)<\varepsilon\}$$

或 $S(M_0,\varepsilon)=\{M||x-x_0|<\varepsilon,|y-y_0|<\varepsilon\}$.

M_0 的ε-去心邻域 为: $B_-(M_0,\varepsilon)=\{M|0<\rho(M,M_0)<\varepsilon\}$.

§9.1.1 平面点集的一些基本概念

- **有界集:** 设E为平面点集, 如果 $\exists R>0$, 使得 $E\subset B(O,R)$ (O表示坐标原点), 称E为**有界集**.

$$E\text{的直径}\quad diamE=sup\{\rho(M',M'')|M',M''\in E\}$$

- **内点、外点和边界点:** 设$E\subset\mathbf{R}^2, E\neq\emptyset, M\in\mathbf{R}^2$.
  - (1) 如果 $\exists\varepsilon>0$, 使得 $B(M,\varepsilon)\subset E$, 称点$M$为 E 的**内点**. E的全部内点记为E°, 称为E的**核**. 显然, $E^\circ\subseteq E$.
  - (2) 如果 $\exists\varepsilon>0$, 使得 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$($E^c$ 表示E的**余集**), 称点M为 E 的**外点**.
  - (3) 如果对 $\forall\varepsilon>0$, $B(M,\varepsilon)$ 中既有 E 中点, 也有 E^c 中的点, 称点M为 E 的**边界点**. E 的所有边界点的集合称为 E 的**边界**, 记为 ∂E. E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E. 显然$\partial E=\partial E^c$.

§9.1.1 平面点集的一些基本概念

- **平面点列的极限:** 设 $\{M_n(x_n,y_n)\}$ 为平面点列, 如果存在点 $M_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(M_n,M_0)=0$, 即对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有$\rho(M_n,M_0)<\varepsilon$成立, 称 $\{M_n\}$为**收敛点列**, 并称 M_0 为点列 $\{M_n\}$ 的**极限**, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.
- **柯西点列:** 设 $\{M_n\}$ 为平面点列, 如果对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n,m>N$ 时, $\rho(M_n,M_m)<\varepsilon$,称$\{M_n\}$为**柯西点列**

  $\Longleftrightarrow\{x_n\},\{y_n\}$为Cauchy点列.

  柯西收敛准则: 点列 $\{M_n\}$ 收敛$\Longleftrightarrow\{M_n\}$为柯西点列.

  定理: 平面上有界点列必有收敛子列.

例如$P_n=(e^{-\frac{n}{4}}\cos n,\ e^{-\frac{n}{4}}\sin n)\to(0,0)$ 趋于的方式是螺旋式

§9.1.1 平面点集的一些基本概念

- **聚点与孤立点:** 设$E \subset \mathbf{R}^2, E \neq \emptyset, M \in \mathbf{R}^2$.

  (1) 如果对 $\forall \varepsilon > 0$, $B_{-}(M, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$, 即 M 的任意邻域中都含有不同于 M 的 E 中的点, 称点M为 E 的**聚点**.

  (2) 如果$\exists \varepsilon > 0$, 使得$B(M, \varepsilon) \cap E = \{M\}$, 称点$M$为$E$的**孤立点**.

  注记: 边界点或是孤立点, 或是聚点; 聚点包括内点和非孤立的边界点.

- **开集与闭集:** 设$E \subset \mathbf{R}^2$, 若 E 中每个点都是内点, 即$E = E^0$, 则称E为**开集**; 如果E^c 为开集, 则称E为**闭集**.
  $\overline{E} = E \cup \{E$ 的所有聚点$\}$为E的**闭包**.

§9.1.1 平面点集的一些基本概念

- **简单曲线:** 设$x(t),y(t)$ 为区间$[\alpha,\beta]$上的连续函数，称点集$L=\{(x(t),y(t)|\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 为一条连接$(x(\alpha),y(\alpha))$和$(x(\beta),y(\beta))$的平面连续曲线. 如果曲线无自交点,则称 L 为一条**简单曲线或若当$(Jordan)$ 曲线**.
  如果 $(x(\alpha),y(\alpha))=(x(\beta),y(\beta))$, 则称 L 为一条**闭曲线**.
- **连通集:** 设E为平面点集，如果将E分解成任意两个不相交的非空子集的并集，其中至少有一个子集含有另一个子集的聚点，称E为**连通**的. 即若对任意$E=A\cup B$, $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, $A\cap B=\emptyset$, 有$\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ 或$A\cap\overline{B}\neq\emptyset$成立.
- **道路连通集:** 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 如果对于E中任意两点都可以用E中的一条曲线连接起来，称E为**道路连通集**或**弧连通**.
  按定义，**独点集也是连通集**.

§9.1.1 平面点集的一些基本概念

道路连通集一定是连通的. 反之不成立.

例如: 集合

$$E=\{(x,y)|y=\sin\frac{1}{x},0<x\le\frac{2}{\pi}\}\cup\{(0,y)|0\le y\le 1\}$$

是连通集但不是道路连通的.

注: 教材后面所说的连通性, 特指是**道路连通**的.

- 若平面区域D内任一条简单闭曲线的内部还在D内, 则称D是**单连通域**, 即区域没有空洞. 否则, 称D 为**多连通域**.
- **区域:** 非空连通开集称为**开区域**; 开区域的闭包称为**闭区域**. 开区域、闭区域以及开区域连同它的部分边界均称为**区域**.

Example

下述点集中哪些是开集、闭集、有界集、无界集、区域?

(1) $E_1 = \{(x, y) | x + y > 0\}$;

(2) $E_2 = \{(x, y) | x + y \leq 0\}$;

(3) $E_3 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$;

(4) $E_4 = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(5) $E_5 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(6) $E_6 = \{(x, y) || x| > 1\}$.

平面点集的主要定理

1. **(开集与闭集的性质)**

   (1) 有限个开集的并集和交集仍是开集；有限个闭集的并集和交集仍是闭集.

   (2) 任意多个开集的**并集**仍是开集；任意多个闭集的**交集**仍是闭集.

2. **(开集和闭集的边界刻画)**

   (1) $E \subset \mathbf{R}^2$为开集$\Longleftrightarrow \partial E \cap E = \emptyset$;

   (2) $E \subset \mathbf{R}^2$为闭集$\Longleftrightarrow \partial E \subset E$.

3. **(闭集的聚点刻画)**

   $E \subset \mathbf{R}^2$为闭集$\Longleftrightarrow E$包含其全部聚点, 即 $E = \overline{E}$.

§9.1.2 多元函数与向量值函数

1. 映射与逆映射

设有两个集合X, Y, 及一个规则f. 若对X 中任意一个元素x, 都可以按照规则f, 找到Y 中唯一确定的元素y 与x 对应, 则称f是X 到Y 的一个**映射**, 记$f: X \to Y$.

若对X 中任意两个不同的元素 x_1, x_2, 都有$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f为**单射**; 若对任意 $y \in Y$, 都存在 $x \in X$ 满足 $f(x) = y$, 则称 f 为**满射**. 若$f: X \to Y$ 既是单射又是满射, 则称 f 为**一一映射**. 当 f 为一一映射时, 对每个 $y \in Y$, 有唯一的 $x \in X$ 满足 $f(x) = y$, 这就给出了从 Y 到 X 的一个对应关系, 称为 f 的**逆映射**, 记为 $f^{-1}: Y \to X$.

§9.1.2 多元函数与向量值函数

2. 多元函数

设非空点集$D \subset \mathbb{R}^n$, 映射$f : D \mapsto \mathbb{R}$称为定义在D上的n元函数. 记作

$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$$

$$\text{或} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad z = f(\mathbf{x})$$

其中$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为自变量, z为因变量, D为定义域.

二元函数$z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ 在几何上表示三维空间中的一张曲面.

§9.1.2 多元函数与向量值函数

2. 多元函数

平面点集相关概念以及二元函数的相关性质,可以推广到 $n(n \geq 3)$维空间和 n 元函数. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义距离 ρ 如下：对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中引入距离后, 就可以类似地定义$\mathbb{R}^n$中的 ε-邻域、开集、闭集、区域等概念.

§9.1.2 多元函数与向量值函数

3. 向量值函数

向量值函数是一个从n 维空间$\mathbb{R}^n$ 到m 维空间$\mathbb{R}^m$ 的映射

$$\mathbf{f}:\ D\to\mathbb{R}^m,\quad D\subset\mathbb{R}^n$$

即 $$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\longmapsto\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_m\mathbf{e}_m$$

或者记为 $\mathbf{f}:\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(y_1,y_2,\cdots,y_m)$

$$y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n)$$

都是n 元函数，y_i 称为向量值函数的第i 个分量函数.

当$m=n$ 时，若映射可逆，向量值函数也可称为变换. 如极坐标变换，柱坐标及球坐标变换.

§9.1.3 多元函数的极限

- **二重极限:**

  设点集$D \subset \mathbf{R}^2$, $f: D \to \mathbf{R}$为二元函数, M_0为D的聚点, 若存在常数 a, 对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当$M \in D$且$0 < \rho(M, M_0) < \delta$ 时, 都有$|f(M) - a| < \varepsilon$, 则称 M 趋于 M_0 时, $f(M)$的极限存在且为 a, 又称为**二重极限**. 记为 $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = a.$$

§9.1.3 多元函数的极限

注记:

(1) f在M_0极限与f在M_0有无定义及取什么值无关;

(2) 动点M趋于定点M_0的路径是任意的;

(3) 也可定义自变量趋于无穷时的极限. 如 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=a$.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=a \iff \forall\varepsilon>0, \exists M>0, \text{当}\, x>M, |y|>M\text{时},$$

$$\text{都有}\ |f(x,y)-a|<\varepsilon.$$

(4) 多元函数的极限仍具有极限值的唯一性、局部保号性、局部有界性、夹逼性以及极限的四则运算等.

Example

讨论二重极限的存在性.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, 其中 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x+y}+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

注记: 重极限定义的关键点是路径任意. 逆向思考定义的含义, 得到判定重极限不存在的方法:

(1) **路径不同, 极限不同;**

(2) **极限依赖于参数;**

(3) **某方式下极限不存在.**

Example

判断下列各题极限是否存在，若有极限，求出其极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{xy}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

注记： 因为多元函数极限的定义、性质及运算法则都与一元函数的类似. 所以有类似一元函数求极限的方法，比如**初等变形**、**初等函数的连续性**、**等价代换**、**变量代换**、**不等式放缩**、**夹逼原理**及**Taylor 展开**等。

§9.1.3 多元函数的极限

- **累次极限:**

设 $f(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 的附近$B_-(M_0,r)$有定义. 如果对任意固定的 y $(y\neq y_0)$, $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, 它是定义在$y_0$ 去心邻域的函数. 如果 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$存在, 则令

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y),$$

称为函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处的一个**先x后y的累次极限**. 类似地可以定义另一个**先y后x累次极限**

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

注记: 累次极限实质上是先后两次取一元函数的极限. 这样两个累次极限可能不等, 或者可能有一个不存在.

§9.1.3 多元函数的极限

- **重极限与累次极限:**

  考查以下函数重极限与累次极限:

  (1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在$(0,0)$点处;

  (2) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{xy}$ 在$(0,0)$点处;

  (3) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ 在$(x,y)\to(\infty,\infty)$

注记:

(1) 重极限的存在性与累次极限的存在性没有必然的联系. 当重极限与累次极限都存在时, 极限值一定相等.

(2) 重极限与累次极限对应后面的重积分与累次积分, 所以它们也不同.

§9.1.4 多元函数的连续性

(1) 设点集$D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ 为二元函数, $M_0 \in D$, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $M \in D$ 且 $\rho(M, M_0) < \delta$ 时, 都有$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$, 则称 f 在 M_0 处**连续**.

(2) 若 M_0 为 D 的聚点, 则 f 在 M_0 处连续

$$\Longleftrightarrow \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) = f(\lim_{M \to M_0} M).$$

若M_0 为 D中 孤立点, 由定义, f 在 M_0 处连续.

(3) 如果 f 在 D 中每一点都连续, 则称 f 在 D 上连续.

(4) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ 为二元函数, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $M, M' \in D$ 且 $\rho(M, M') < \delta$ 时, $|f(M) - f(M')| < \varepsilon$, 则称 f 在 D 中**一致连续**.

§9.1.4 多元函数的连续性

(1) 多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零时) 还是连续函数.

(2) 多元连续的复合函数在其定义域内也是连续函数.

(3) 多元连续函数仍具有局部有界性、保号性.

Example

讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点$(0,0)$处沿着过此点的每一条射线上的连续性，以及函数在点$(0,0)$ 处的连续性.

注记： 此题说明**沿射线上的连续性**与**二元函数的连续性**不同.
沿射线上的连续相当于一元函数的连续. 函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，则相应的一元函数$f(x,y_0)$ 与$f(x_0,y)$分别在x_0处和y_0处连续，但反过来不成立. 如本例题.

Example

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-y}-1}{x-y}, & x>y,\\ 1, & x=y,\\ \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}, & x<y,\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 的连续性.

注记： 分段函数的连续性分段讨论，尤其在分段点或线上.

§9.1.4 多元函数的连续性

(4) **(介值定理)** 设$f(M)$在(道路)连通集D中连续, $M_1, M_2 \in D$, 则f 在D 中取到$f(M_1)$ 和$f(M_2)$ 之间的所有值.

(5) **(最值定理)** 设D是$\mathbb{R}^2$中的**有界闭集**, f在D上连续, 则f 在D上可以取到最大值和最小值.

(6) **(一致连续性)** 设D是$\mathbb{R}^2$中的**有界闭集**, f在D上连续, 则f必在D 上一致连续.

多元连续函数介值定理的证明

当$f(M_1)=f(M_2)$时, 显然.

设$f(M_1)<f(M_2)$, 任给$f(M_1)<c<f(M_2)$, 作D中曲线

$$L=\{M(t)=(x(t),y(t))|\ \alpha\le t\le\beta\},$$

使得$M(\alpha)=M_1$, $M(\beta)=M_2$. 由复合函数的连续性可知 $f(M(t))=f(x(t),y(t))$在$[\alpha,\beta]$上连续. 因

$$f(M(\alpha))=f(M_1)<c<f(M_2)=f(M(\beta)),$$

故由一元连续函数的介值定理可知必有$t_0\in(\alpha,\beta)$, 使得

$$f(M(t_0))=c.$$

多元连续函数最值定理的证明

(**有界性**)反证法: 若f在D上无界, 则对$\forall n\in\mathbb{N}$, 存在D中的点列$\{M_n\}$, 使 $|f(M_n)|>n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(M_n)=\infty$. 由于$\{M_n\}$是有界点列, 故有收敛子列$\{M_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} M_{n_k}=M_0$, 因$D$是闭集, M_0为其聚点, 则$M_0\in D$. 由f的连续性, $\lim\limits_{k\to+\infty} f(M_{n_k})=f(M_0)$. 这与 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(M_n)=\infty$相矛盾, 故$f$在$D$有界.
(**取得最值**) 设$L=\sup\limits_{M\in D}\{f(M)\}$, 对$\forall n\in\mathbb{N}$, 可取$M_n\in D$, 使得 $L-\frac{1}{n}<f(M_n)\le L$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(M_n)=L$. 由于$\{M_n\}$是有界点列, 故有收敛子列$\{M_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{n_k}=M_0\in D$, 由$f$的连续性, $L=\lim\limits_{n\to+\infty} f(M_n)=\lim\limits_{k\to+\infty} f(M_{n_k})=f(M_0)$, 显然$L$ 就是f在D上的最大值. 类似可证f在D上取得最小值.

多元连续函数一致连续性的证明

(反证)若f不一致连续，则存在$\varepsilon_0>0$，对$\forall n\in\mathbb{N}$,有$M_n, M_n'\in D$，使得$\rho(M_n, M_n')<\frac{1}{n}$，但$|f(M_n)-f(M_n')|\geq\varepsilon_0$.
因$\{M_n\}$是有界点列，故有收敛子列$\{M_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to+\infty}M_{n_k}=M_0$.
由于$\rho(M_{n_k}, M_{n_k}')<\frac{1}{n_k}$，故必有

$$\rho(M_{n_k}', M_0)\leq\rho(M_{n_k}, M_{n_k}')+\rho(M_{n_k}, M_0)<\frac{1}{n_k}+\rho(M_{n_k}, M_0)\to 0.$$

所以$\lim\limits_{k\to+\infty}M_{n_k}'=M_0$. 于是由$f$的连续性，

$$\lim_{k\to+\infty}(f(M_{n_k})-f(M_{n_k}'))=f(M_0)-f(M_0)=0$$

这与$|f(M_n)-f(M_n')|\geq\varepsilon_0$ 矛盾. 则 f 在 D 上一致连续.

目录

§9.2 多变量函数的微分

§9.2.1 多元函数的偏导数

$z=f(x,y)$定义在区域$D\subset\mathbb{R}^2$, $M_0(x_0,y_0)\in D$. 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称它为$z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处关于x 的**偏导数**, 记作$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 等.

类似地, $z=f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处关于y 的**偏导数**为

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=$$

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

§9.2.1 多元函数的偏导数

(1) **偏导数的计算**:

求多元函数对某个自变量的偏导数，只要把其它自变量都当成常数，把该函数当成此自变量的一元函数求导即可.

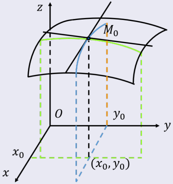
(2) 由此可得到如下结论:

若 $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$，则 $f(x,y) = \varphi(y)$；若 $\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$，则 $f(x,y) = \psi(x)$.

§9.2.1 多元函数的偏导数

(3) **偏导数的几何意义**:

$f'_x(x_0, y_0)$表示曲线$z = f(x, y_0)$在点M_0处的切线对x轴的斜率;类似$f'_y(x_0, y_0)$表示$z = f(x_0, y)$在点M_0处的切线对y轴的斜率.



(4) $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, 称为$f$关于$x$的**偏导函数**(简称**偏导数**. 类似地定义f关于y的偏导数$f'_y(x, y)$. 偏导数f'_x, f'_y有时也记成f'_1, f'_2.

Example

1. 设函数$f(x,y)=x^2+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{y}{x}}$，求$f'_x(2,1)$，$f'_y(2,1)$.

2. 设函数$f(x,y)$满足$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}, \\ f(1,y)=\sin y, \end{cases}$ 求$f(x,y)$.

§9.2.2 多元函数的可微性

设$z = f(x, y)$ 为区域$D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数，$M_0(x_0, y_0) \in D$，记$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. 如果存在常数$A, B$，使得当$\rho \to 0$ 时，

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

则称f 在M_0 处**可微**，且称$A\Delta x + B\Delta y$为f 在(x_0, y_0) 处的**微分**，记为$\mathrm{d}f|_{M_0}$.

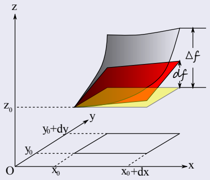
$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$B = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

§9.2.2 多元函数的可微性

(1) 全微分的几何意义:

几何上表示曲面$z = f(x,y)$在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处切平面上点的z坐标的增量.



(2) 若函数在(x_0, y_0)点可微, 那么

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - \mathrm{d}z}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

(3) 微分体现局部线性化思想. 局部以直代曲或以平面代曲面.

§9.2.2 多元函数的可微性

设 $z = f(x,y)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, 如果 $f(x,y)$ 在 D 中的每一点处都可微, 则称 $f(x,y)$ 在 D 中可微.

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**微分**(或**全微分**).

§9.2.2 多元函数的可微性

二元函数的可微与偏导数概念可以平行推广到n元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，特别地，$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

其中$1\times n$矩阵$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$称为$n$元函数$f$的**Jacobi(雅可比)矩阵**

可微的条件

- 可微的必要条件

设$z=f(x,y)$ 为区域$D\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元函数，$(x_0,y_0)\in D$.

(1) 若$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处可微，则$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处连续；

函数可微 $\Longrightarrow$ 函数连续　或　函数不连续 $\Longrightarrow$ 函数不可微

(2) 若$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处可微，则$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，且

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

函数可微 $\Longrightarrow$ 函数的各偏导数存在　或

偏导数不存在 $\Longrightarrow$ 函数不可微

问题：偏导数存在是不是函数也连续，可微呢？

Example

讨论下面函数在$(0,0)$点处连续性及偏导数的存在性.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; (2) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & xy=0 \\ 1, & xy\neq 0 \end{cases}$

函数的连续与偏导数存在之间的关系：

1. 函数连续未必偏导数存在
2. 函数偏导数存在未必连续
3. 从几何上看，偏导数的存在只是函数沿x轴(或y轴)方向上的性态，而连续是函数在一点邻域内的一种性态. 所以函数$f(x,y)$ 在点$M_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数$f'_x(x_0,y_0)$只能得到函数$f(x,y_0)$在点$x=x_0$处连续；同理，偏导数$f'_y(x_0,y_0)$存在只能得到函数$f(x_0,y)$ 在点$y=y_0$处连续.

函数的连续与偏导数存在之间的关系：

定理： 若函数$f(x,y)$ 的两个偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}$和$\dfrac{\partial f}{\partial y}$都在$(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在且有界，则$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处连续.

特别地，若偏导数f'_x，f'_y在区域D内存在且有界，则函数 $f(x,y)$ 在D内一致连续.

函数的各偏导数存在且有界 $\Longrightarrow$ 函数连续

f'_x, f'_y在区域D内存在且有界$\Longrightarrow$函数$f(x,y)$在D内一致连续.

证明： $\forall\ (x_0,y_0),\ (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$
$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

由一元函数的微分中值定理,

$$\Delta f = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta_1,\ \theta_2<1)$$

由f'_x, f'_y在D内有界, 即存在$M>0$, 使$|f'_x|\leqslant M$, $|f'_y|\leqslant M$, 则

$$|\Delta f|\leqslant 2M\rho\to 0 \qquad (\Delta x\to 0, \Delta y\to 0)$$

由一致连续的定义, 知函数$f(x,y)$在D内一致连续.

Example

设函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 讨论$f(x,y)$在点$(0,0)$连续性、各一阶偏导数存在性及可微性.

结论： 多元函数偏导数存在但未必可微.

可微的条件

- **可微的充分条件**

  定理： 若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在且在该点连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

  函数的各偏导数存在且连续 $\Longrightarrow$ 函数可微

证明： 取增量$\Delta x, \Delta y$，记$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

$$
\begin{aligned}
& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\
& = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\
& = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta'\Delta y)\Delta y \\
& = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,
\end{aligned}
$$

其中$0 < \theta, \theta' < 1$，$\varepsilon_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$，$\varepsilon_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta'\Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. 因$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在(x_0, y_0) 处连续，故$\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = 0$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0$. 又$|\dfrac{\Delta x}{\rho}| \le 1$，$|\dfrac{\Delta y}{\rho}| \le 1$，则

$$
\lim_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\rho} = 0,
$$

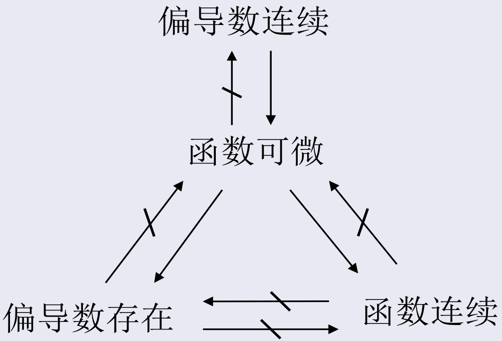
即$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = o(\rho)$. 所以$f(x,y)$ 在(x_0, y_0) 处可微.

Example

函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

讨论$f(x,y)$在点$(0,0)$连续性、各一阶偏导数存在性、可微性及各一阶偏导数在点$(0,0)$连续性.

函数可微、可导及连续的关系



Example

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

其中n为正整数，讨论n为何值时，函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$ 处

(1) 连续；(2) 一阶偏导数存在；(3) 可微；(4) 一阶偏导数连续.

解：(1) 即证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$. 因为 $\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是有界量，要使 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)^n=0$, $n>0$ 即可，即 $n\geq 1$ 的正整数时，函数连续.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{|x|}$, $\sin\frac{1}{|x|}$ 是有界量，由无穷小量乘有界量，则 $n-1>0$, 即 $n\geq 2$ 的正整数时，一阶偏导数存在，且 $f_x'(0,0)=0$, 同理 $f_y'(0,0)=0$.

(3) $n\geq 2$ 时，即证

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$ 即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x+y)^n}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}r^{n-1}(\cos\theta+\sin\theta)^n\sin\frac{1}{r}=0$$

$(\cos\theta+\sin\theta)^n\sin\frac{1}{r}$ 是有界量，则 $n-1>0$, 即 $n\geq 2$ 的正整数时，函数可微.

(4) $n\geq 2$时,

$$f_x'(x,y)=\begin{cases} n(x+y)^{n-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x(x+y)^n}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ 0, \end{cases}$$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases} n(x+y)^{n-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y(x+y)^n}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ 0, \end{cases}$$

即证$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f_x'(x,y)=0=f_x'(0,0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f_y'(x,y)=0=f_y'(0,0)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} n(x+y)^{n-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, $\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为有界量,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x(x+y)^n}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\lim_{r\to0} r^{n-2}\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)^n=0$$

$n>2$时极限为0, 即$n\geq 3$的正整数时, 函数的一阶偏导数连续.

§9.2.3 高阶偏导数

二元函数有四种可能的二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=f''_{11},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{xy}=f''_{12},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{yx}=f''_{21},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=f''_{22}.$$

Example

求函数$z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$的两个一阶偏导数和四个二阶偏导数。

解： 直接计算可得，两个一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x.$$

四个二阶偏导数分别为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy.$$

此题$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即二阶偏导数与求导的次序无关.

问题：这个结论是不是具有一般性呢？

§9.2.3 高阶偏导数

定理: $f(x,y)$定义在区域D, 如果$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在区域D 中连续, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

即混合偏导数连续, 则其偏导数与求导的次序无关. 一般地, 若多元函数$f\in C^n(D)$, 则f的n阶偏导与求导次序无关 $(n\in\mathbb{N})$.

证明方法: 用二阶混合差分的相等导出二阶偏微商相等.

证明： 任取$M_0(x_0,y_0)\in D$及$B(M_0,r)\subset D$. 取增量h,k使$(x_0+h,y_0+k)\in B(M_0,r)$. 令

$$\varphi(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0),\qquad \psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y),$$

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\psi(y_0+k)-\psi(y_0)\\&=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0).\end{aligned}$$

由一元函数的微分中值公式可知有

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)&=h\varphi'(x_0+\theta_1 h)\\&=h(f'_x(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta_1 h,y_0))\\&=hkf''_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\eta_1 k),\end{aligned}$$

其中$0<\theta_1,\eta_1<1$. 类似地有$0<\theta_2,\eta_2<1$,使

$$\psi(y_0+k)-\psi(y_0)=hkf''_{yx}(x_0+\theta_2 h,y_0+\eta_2 k),$$

故有 $$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\eta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,y_0+\eta_2 k).$$

命$h\to 0$, $k\to 0$, 由$f''_{xy}(x,y)$和$f''_{yx}(x,y)$在M_0的连续性得证.

Example

设函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明

(1) 函数的二阶偏导数存在，且$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$;

(2) 所有二阶偏导数在$(0,0)$点不连续.

证明： (1) 由偏导数定义，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

当$x^2+y^2\neq 0$时，有

$$f'_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\quad f'_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

则$f'_x(0,y)=-y$，$f'_y(x,0)=x$，$f'_x(x,0)=f'_y(0,y)=0$. 从而有

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_x(x,0)-f'_x(0,0)}{x}=0,$$

$$f''_{yy}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(0,y)-f'_y(0,0)}{y}=0,$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_x(0,0)}{x}=1.$$

$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

函数$f(x,y)$的二阶偏导数为

$$f''_{xx}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{12xy^5-4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y^3-12x^5y}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ -1, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(2) 因为

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f''_{xx}(x,y)=\frac{12k^5-4k^3}{(1+k^2)^3},\quad \lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f''_{yy}(x,y)=\frac{4k^3-12k}{(1+k^2)^3},$$

故函数$f''_{xx}(x,y)$与$f''_{yy}(x,y)$在$(0,0)$点的极限不存在，则在$(0,0)$点不连续.

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} f''_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} f''_{yx}(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} f''_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}} f''_{yx}(x,y)=1$$

则函数$f''_{xy}(x,y)$与$f''_{yx}(x,y)$在$(0,0)$点的极限不存在，故它们在$(0,0)$点也不连续.

注记： $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)\Longrightarrow f''_{xy}(x,y)$与$f''_{yx}(x,y)$ 在$(0,0)$点至少有一个不连续.

§9.2.4 方向导数与梯度

- **方向导数**

  定义： 设区域$D \in \mathbf{R}^2$, $z = f(x, y)$是定义在D上的函数，$\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$是单位向量，$P(x_0, y_0) \in D$，过$P$且以$\boldsymbol{e}$为方向的直线$L$ 的参数方程:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta \quad t \in \mathbf{R}.$$

其中，α, β 分别为$\boldsymbol{e}$与x轴，y轴正向夹角．若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t},$$

存在且有限，称它为$f(x, y)$在点P沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的**方向导数**，记为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_P$. 它表示$f(x, y)$ 在点P处**沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的变化率**.

注记:

(1) 函数$f(x,y)$沿直线L 可化为t 的一元函数

$$\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta),$$

$\varphi(0)=f(x_0,y_0)$, 上面方向导数的极限式, 正是函数$\varphi(t)$在0处的导数$\varphi'(0)$, 即

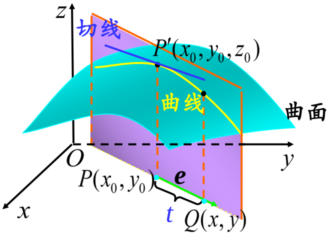
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\Big|_P=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}=\varphi'(0).$$

(2) 特别地, 当$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$时, 按照定义, 就是$f$的两个偏导数的定义. 所以说偏导数是沿$x$轴和$y$轴的方向导数.

§9.2.4 方向导数与梯度

- **方向导数几何意义**

几何上，$z=f(x,y)$表示空间曲面S，$P(x_0,y_0)$ 是曲面S上点$P'(x_0,y_0,z_0)$ 在xOy 平面上的投影点，过点P 和P' 作平行于方向向量$\boldsymbol{e}$ 的平面交曲面S 于曲线C，曲线C可用函数$\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ 表示，曲线C上P'处切线斜率就是$\varphi'(0)$，即方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_P$.



§9.2.4 方向导数与梯度

定义： 设区域$D \in \mathbf{R}^n$, $f : D \to \mathbf{R}$, 单位向量$\boldsymbol{e} \in \mathbf{R}^n$是一个方向, $\mathbf{x}_0 \in D$, 极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

存在且有限, 称它为f 在点$\mathbf{x}_0$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的**方向导数**, 记为$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(\mathbf{x}_0)$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t(-\mathbf{e})) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = -\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + (-t)\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{-t}$$

所以在同一点$\mathbf{x}_0$ 处函数f 在沿方向 $\boldsymbol{e}$ 与沿$-\boldsymbol{e}$ 的方向导数互为相反数.

Example

考察函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 在$(0,0)$ 点哪个方向的方向导数存在?

Example

在$\mathbf{R}^n$空间中考察函数$f(\mathbf{x})=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 在$\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$ 点任意方向的方向导数.

§9.2.4 方向导数与梯度

- **方向导数存在与可微的关系**

定理: 若$u = f(x, y, z)$在点$P = (x_0, y_0, z_0)$处可微, 则$f(x, y, z)$在点P处沿任何方向$\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$的方向导数都存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\Big|_P = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\Big)\Big|_P$$

$$= Jf\Big|_{M_0} \cdot \boldsymbol{e} = |Jf|\cos\theta.$$

问题: 函数沿任意方向的方向导数存在, 是不是一定可微呢?

§9.2.4 方向导数与梯度

- 可微、方向导数存在与连续的关系

(1) $f(x,y,z)$可微，则$f(x,y,z)$沿任何方向的方向导数都存在. 但方向导数存在，函数未必可微.

(2) 函数沿任意方向的方向导数存在，但函数未必连续. 例如:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

反过来，函数连续，方向导数未必存在. 如

$$f(x,y)=\begin{cases}y\sin\frac{1}{x}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y=(0,0).\end{cases}$$

§9.2.4 方向导数与梯度

- **梯度**

数量场f在点P处的**梯度**是一个**向量**，记为$\mathbf{grad}\ f$，它的**大小**是数量场f在点P处所有方向导数的最大值，它的**方向**是取到这个最大值所沿的那个方向. 梯度的定义是与坐标系无关的，但在取定坐标系后，可以导出梯度的计算公式.

在直角坐标系下，称向量$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$为可微的数量场$u = f(x, y, z)$的**梯度**，记为$\mathbf{grad}\ f$，或$\mathbf{grad}\ u$.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = \mathbf{grad} f \cdot \boldsymbol{e} = |\text{grad}\ f| \cos\theta \ ,$$

即方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}$为梯度$\mathbf{grad}\ f$在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的投影.

§9.2.4 方向导数与梯度

- **梯度的几何性质**

曲面$z=f(x,y)$上的曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C, \end{cases}$ 在xOy面上的投影曲线$f(x,y)=C$称为函数$z=f(x,y)$ 的**等值线**.

等值线$f(x,y)=C$上任一点$M(x,y)$处的法方向为(f'_x,f'_y),即为函数$z=f(x,y)$ 在该点的梯度.

满足$u(x,y,z)=c$的点(x,y,z) 构成的曲面称为数量场u的**等值面**. 曲面$u(x,y,z)=c$在(x,y,z)的法向量为$(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z})$, 即为函数$u$在$(x,y,z)$的梯度.

§9.2.4 方向导数与梯度

- **梯度的运算法则**

(1) $\mathbf{grad}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\ \mathbf{grad}u_1+c_2\ \mathbf{grad}u_2$, 其中$c_1$, c_2是任意常数.

(2) $\mathbf{grad}(u_1u_2)=u_1\ \mathbf{grad}u_2+u_2\ \mathbf{grad}u_1$.

(3) $\mathbf{grad}f(u)=f'(u)\mathbf{grad}u$.

Example

求函数$u = x + y + z$在沿单位球面$x^2 + y^2 + z^2 = 1$上点的外法向的方向导数, 并求在球面上何点处该方向导数取:

(1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于0.

解： 单位球面$x^2+y^2+z^2=1$上任意一点(x,y,z)的单位外法向为$\boldsymbol{e}=(x,y,z)$，函数$u=x+y+z$沿 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}=\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{e}=(1,1,1)\cdot(x,y,z)=x+y+z,$$

或 $$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}=\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{e}=|\mathbf{grad}\ u|\cos\theta=\sqrt{3}\cos\theta,$$

其中θ为$\mathbf{grad}u=(1,1,1)$与 $\boldsymbol{e}$ 之间的夹角.

(1) 当$\theta=0$， $\boldsymbol{e}$ 与梯度同向，即$x=y=z>0$时，该方向导数取得最大值$\sqrt{3}$，此时$x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，该点为$(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$；

(2) 当$\theta=\pi$， $\boldsymbol{e}$ 与梯度反向，即$x=y=z<0$时，方向导数取得最小值$-\sqrt{3}$，此时$x=y=z=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，该点为$(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

(3) 当单位球面上的点满足$x+y+z=0$ 时，方向导数等于0.

§9.2.5 复合函数的微分

定理： 设$z=f(u,v)$在对应点(u,v)处可微,$u=\varphi(x,y)$,

$v=\psi(x,y)$在点(x,y)存在偏导数，则复合函数

$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点(x,y)存在偏导数，且有如下**链式法则**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}=f_1'\frac{\partial \varphi}{\partial x}+f_2'\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}=f_1'\frac{\partial \varphi}{\partial y}+f_2'\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

复合函数链式法则：分路和，沿路乘

关键是变量之间的关系链

证明： 给自变量x一个增量Δx, 则中间变量u, v也有增量

$$\Delta u = \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y), \qquad \Delta v = \psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y),$$

由$f(u, v)$的可微性知, 有 (其中$\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$)

$$\Delta z = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v) = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + o(\rho), \quad (\rho \to 0)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{(\frac{\Delta u}{\Delta x})^2 + (\frac{\Delta v}{\Delta x})^2},$$

因为$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$存在, 则$u, v$对$x$是连续的, 故当$\Delta x \to 0$时, $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$, 从而$\rho \to 0$, 则$\frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$, $\sqrt{(\frac{\Delta u}{\Delta x})^2 + (\frac{\Delta v}{\Delta x})^2}$有界, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

§9.2.5 复合函数的微分

定理: 设$z=f(u,v)$在对应点(u,v)处可微,$u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$在点(x,y)可微, 则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点(x,y)处可微.

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v,\ \ \mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\ \ \mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y,\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

一阶微分形式不变性

设$z=f(x,y)$可微, x,y为自变量, 则 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

设$z=f(x(u,v),y(u,v))$可微, x,y为中间变量, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v, \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

可微函数$z=f(x,y)$, 不管x,y是自变量还是可微的中间变量, 总有上面的全微分,这就是一阶微分形式不变性

全微分四则运算法则

设$u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 为可微的多元函数, 则

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$;

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

Example

1. 设函数$z=(x^2-y^2)e^{\frac{x}{y}}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设函数$z=f(x^2-y,g(xy))$，其中f具有二阶连续偏导数，g二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. 解： 由复合函数的求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + yf_2'g',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xf_1' + yf_2'g') \\ &= 2x(-f_{11}'' + xg'f_{12}'') + g'f_2' + xyg''f_2' + yg'(-f_{21}'' + xg'f_{22}'') \\ &= (g' + xyg'')f_2' - 2xf_{11}'' + (2x^2 - y)g'f_{12}'' + xy(g')^2 f_{22}''.\end{aligned}$$

注记：

(1) f是关于x,y 的二元复合函数，g是关于x,y的一元复合函数.

(2) f_1'实质是$f_1'(x^2 - y, g(xy))$，还是关于x,y的二元复合函数，$g' = g'(xy)$还是关于x,y的一元复合函数.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Example

设函数$u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，其中$f$具有二阶连续偏导数，求$\mathrm{du}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$.

解： 由一阶微分形式不变性，及全微分的四则运算法则，得

$$\begin{aligned}\mathrm{du}&=f_1'\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right)=f_1'\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+f_2'\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\\&=\frac{1}{y}f_1'\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{z}f_2'-\frac{x}{y^2}f_1'\right)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}f_2'\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

所以有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1'$ $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}f_2'-\frac{x}{y^2}f_1'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2'$,

因为f具有二阶连续偏导数，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{f_1'}{y^2}+\frac{1}{y}\left(f_{11}''(-\frac{x}{y^2})+f_{12}''\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{f_{12}''}{yz}-\frac{x}{y^3}f_{11}''-\frac{f_1'}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{z^2}f_2'-\frac{y}{z^2}\left(f_{21}''(-\frac{x}{y^2}+f_{22}''\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{x}{yz^2}f_{12}''-\frac{y}{z^3}f_{22}''-\frac{f_2'}{z^2}.$$

Example

设函数$z(x,y)=x^y+\int_0^x xe^{-(t+y)^2}\mathrm{d}t,\ (x>0)$,

求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

注意幂指函数和变限积分函数求导.

用**求导法**和**微分法**计算一阶偏导数.

Example

设函数$z = f(\frac{x}{g(y)}, y) = xg(y)$, f, g都是可微函数, 且$g(y) \neq 0$,
求$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$及$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

解法1: 令 $\frac{x}{g(y)} = u, y = v$, 则 $f(u,v) = ug^2(v)$,
或 $f(x,y) = xg^2(y)$. 则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g^2(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xg(y)g'(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2g(y)g'(y).$$

注记: 这里z是关于x, y二元复合函数, 所以要求的$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 不是题中的x, y, 实质是函数关系f 对其第一个变量和第二个变量求导, 即u 和v.

解法2: 对等式两边分别关于x, y求偏导, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(\frac{x}{g(y)},y)\cdot\frac{1}{g(y)}=g(y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'(\frac{x}{g(y)},y)\cdot\frac{-xg'(y)}{g^2(y)}+f_2'(\frac{x}{g(y)},y)=xg'(y),$$

则 $$f_1'(\frac{x}{g(y)},y)=g^2(y)\Longrightarrow f_1'(u,v)=g^2(v),$$

$$f_2'(\frac{x}{g(y)},y)=xg'(y)+\frac{xg'(y)f_1'}{g^2(y)}=2xg'(y)\Longrightarrow f_2'(u,v)=2ug(v)g'(v),$$

即 $$\frac{\partial f}{\partial x}=g^2(y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xg(y)g'(y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y).$$

注记: 这里对等式两边关于x, y求偏导后, 得到的是关于 $f_1'(\frac{x}{g(y)},y)=f_1'(u,v)$ 和 $f_2'(\frac{x}{g(y)},y)=f_2'(u,v)$ 的等式, 必须换为u,v函数的等式. 当然这里$\frac{\partial f}{\partial x}\neq\frac{\partial z}{\partial x}$.

Example

设函数$u=u(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足方程
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$及条件$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求$u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$.

注记：

(1) 这里$u(x,2x)$实质是函数$u=u(x,y)$与$y=2x$ 的复合函数 $u=u(x,2x)$.

(2) 从几何上来看，此例题是在讨论二元函数$u(x,y)$及其一阶、二阶偏导数在直线$y=2x$上的函数值.

Example

设函数$f(x,y)$具有连续偏导数，且$f(x,x^2)\equiv 1$.

(1) 若$f'_x(x,x^2)=x$，求$f'_y(x,x^2)$;

(2) 若$f'_y(x,y)=x^2+2y$，求$f(x,y)$.

解： (1) 对$f(x,x^2)\equiv 1$两边求导得 $f'_x(x,x^2)+2xf'_y(x,x^2)=0$ ，由条件$f'_x(x,x^2)=x$，得 $x+2xf'_y(x,x^2)=0$，所以当$x\neq 0$时，$f'_y(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$.

由于$f(x,y)$的偏导数连续，则当$x=0$时，也有$f'_y(x,x^2)=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 对$f'_y(x,y)=x^2+2y$两边关于y求不定积分得

$$f(x,y)=x^2y+y^2+g(x),$$

$g(x)$为待定函数. 由已知$f(x,x^2)\equiv 1$，则$g(x)=1-2x^4$，所以$f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4$.

Example

数理方程中的几类重要方程:

(1) 函数$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$满足**热传导方程:** $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(2) 函数$u = \frac{1}{r}$ $(r \neq 0)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$满足**拉普拉斯方程:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

(3) 函数$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ 满足**波动方程:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Example

设函数$f(u) \quad (u>0)$具有二阶连续导数，函数$z=f(e^{x^2-y^2})$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=16(x^2+y^2)z$，求$f(u)$所满足的常微分方程.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xuf'(u)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2yuf'(u)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2uf'(u)+2xf'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+2xuf''(u)\frac{\partial u}{\partial x}\\&=(2u+4x^2u)f'(u)+4x^2u^2f''(u),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2uf'(u)-2yf'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-2yuf''(u)\frac{\partial u}{\partial y}\\&=(4y^2u-2u)f'(u)+4y^2u^2f''(u),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)u^2f''(u)+4(x^2+y^2)uf'(u)=16(x^2+y^2)f(u),$$

故得常微分方程 $\qquad u^2f''(u)+uf'(u)-4f(u)=0.$

Example

设变换$u=x-2y$，$v=x+ay$可把方程(其中二阶偏导均连续)
$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求$a$.

解： 由变换可得到$x=\frac{2v+au}{a+2}$，$y=\frac{v-u}{a+2}$，$(a\neq -2)$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2}{a+2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=&\frac{2}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{a}{a+2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{1}{a+2}\right)+\\&\frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{a}{a+2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{1}{a+2}\right)=0,\end{aligned}$$

得到 $2a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，所以$a=3$.

当然此题也可以正着推导.

Example

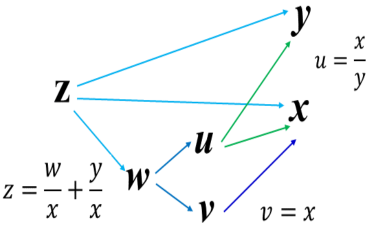
变量代换

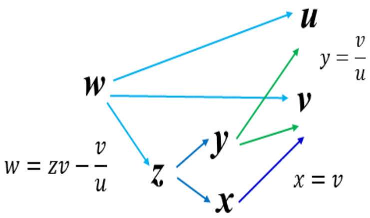
$$u = \frac{x}{y},\ v = x,\ w = xz - y$$

把函数$z = z(x, y)$(具有二阶连续偏导数)的方程

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y}$$

化为函数$w = w(u, v)$ 的方程，求$w = w(u, v)$所满足的方程.


y
u = x/y
z
x
u
z = w/x + y/x
w
v
v = x


u
y = v/u
w
v
y
w = zv − v/u
z
x
x = v

§9.2.6 向量值函数的偏导数与微分

一元向量值函数: $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

导数与微分:

$$\mathbf{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)),\quad \mathrm{d}\mathbf{r}(t)=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=\mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$$

特别地, $y=f(x)$可写为$\mathbf{r}(x)=(x,f(x),0)$

二元向量值函数: $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

偏导数与微分:

$$\mathbf{r}'_u=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right),\quad \mathbf{r}'_v=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{r}(u,v)&=(\mathrm{d}x(u,v),\ \mathrm{d}y(u,v),\ \mathrm{d}z(u,v))\\&=\mathbf{r}'_u\mathrm{d}u+\mathbf{r}'_v\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

特别地, $z=f(x,y)$可写为$\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$

§9.2.6 向量值函数的偏导数与微分

向量值函数的导数运算与向量的代数运算满足如下关系：其中$\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)$是向量值函数，$f(t)$是数量函数.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\mathbf{r}_1)=f\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_1.$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\times\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}.$

§9.2.6 向量值函数的偏导数与微分

设D 为$\mathbb{R}^n$的区域, $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 为n 元m 维向量值函数.

记$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则$\mathbf{f}$ 可以表示为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))^T.$$

如果每个分量函数f_j $(1 \le j \le m)$都是可微的, 则称映射$\mathbf{f}$**可微**, 并且定义$\mathbf{f}$的**微分**$\mathrm{d}\mathbf{f}$为对每个分量函数的微分, 即

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}.$$

§9.2.6 向量值函数的偏导数与微分

$$Jf = J_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

称之为向量值函数$\mathbf{f}$的**雅可比矩阵**.

当$n = m$时, 雅可比矩阵的行列式简记为

$$\det J_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}.$$

并称之为函数的**Jacobi 行列式**. 这种$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 向量值函数又称为**坐标变换**.

§9.2.6 向量值函数的偏导数与微分

例如: 对于$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 可微的向量值函数(极坐标变换)

$$\mathbf{f} = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \text{或} \quad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r.$$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 可微的向量值函数(球坐标变换)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

§9.2.6 向量值函数的偏导数与微分

设D，D'分别为$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^m$中的区域，$\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$，$\mathbf{g}: D' \to \mathbb{R}^\ell$为映射(或向量值函数)，若$\mathbf{f}(D) \subset D'$，则存在复合映射$\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^\ell$，

$$(x_1, \cdots, x_n) \xrightarrow{\mathbf{f}} (y_1, \cdots, y_m) \xrightarrow{\mathbf{g}} (z_1, \cdots, z_\ell).$$

类似于复合函数链式求导定理的证明可得：

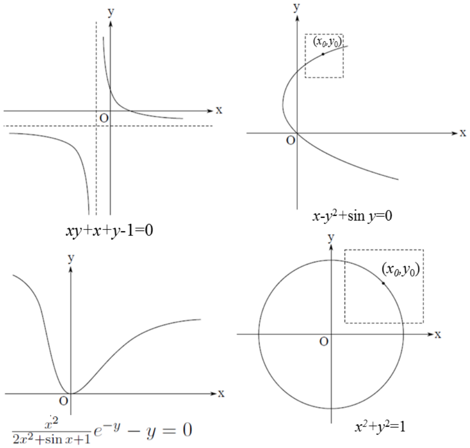
$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z_i}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_\ell}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_\ell}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_\ell}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$J(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

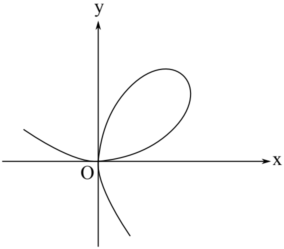
目录

前面讨论的一元或多元函数，都是用自变量的一个表达式直接给出的，称为**显函数**．在很多情况下，变量间的函数关系由方程或方程组确定，称为**隐函数**．



考察方程

$$F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$$



确定的曲线称为**笛卡尔叶形线**. 在$(0,0)$的无论多么小的邻域中, 都存在x对应三个y值; 同样的也存在y 对应三个x值. 因此在$(0,0)$附近, y不能写成x的函数, x也不能写成y的函数, 即原方程在$(0,0)$处不能确定隐函数.

问题: 在什么条件下, 一个方程可以确定一个隐函数? 当这个隐函数不能显式表示时, 它是否连续与可微呢? 怎么研究它的性质呢?

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

隐函数存在定理: 设区域$D\subset\mathbb{R}^2$, $M_0(x_0,y_0)\in D$. 如果$F(x,y)$在D 中有定义并满足:

1° $F(x,y)\in C^1(D)$, 即在区域上有连续的偏导函数;

2° $F(x_0,y_0)=0$, 即点M_0 在方程确定的曲线上;

3° $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

则存在M_0 的邻域$I\times J\subset D$, 使得:

(1) 对任意$x\in I$, 方程$F(x,y)=0$**存在唯一**解$y=y(x)$ 满足$y_0=y(x_0)$.

(2) 由(1) 所确定的隐函数$y=y(x)$ 有**连续的微商**, 且

$$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

证明：(隐函数的存在唯一性) 设$F'_y(x_0,y_0)>0$. 由$F'_y(x,y)$ 的连续性可知, 存在一个以(x_0,y_0) 为中心的矩形闭邻域$I'\times J$, 使得

$$F'_y(x,y)>0,\quad (x,y)\in I'\times J$$

则对$\forall x\in I'$, $F(x,y)$ 在$J=[c,d]$ 上关于y 严格单调增. 那么

$$F(x_0,c)<F(x_0,y_0)=0<F(x_0,d),$$

因为$F(x,y)$ 对x 连续, 故存在以x_0 为中心的闭区间$I\subset I'$, 使得

$$F(x,c)<0<F(x,d),\quad x\in I$$

又$F(x,y)$ 对y 的连续性、严格单调性和介值定理, 对每一个$x\in I$, 存在唯一的$y=y(x)$, 使$c<y(x)<d$, 且$F(x,y(x))=0$.
函数$y=y(x)$ $(x\in I)$就是方程确定的隐函数.
特别, 对$x_0\in I$, 也有唯一的$y(x_0)\in J$, 使得$F(x_0,y(x_0))=0$, 由条件2°, y_0也满足$F(x_0,y_0)=0$, 因此由唯一性知$y_0=y(x_0)$.

(隐函数有连续的导函数) 对$\forall x \in I$, 取h 充分小, 使得$x+h \in I$.
记$y=y(x)$, $k=y(x+h)-y(x)$. 则$F(x,y(x))=0$,
$F(x+h,y(x+h))=0$, 即$F(x+h,y(x)+k)=0$.

$$0=F(x+h,y+k)-F(x,y)=kF'_y(x+h,y+\theta_2 k)+hF'_x(x+\theta_1 h,y)$$

其中$0<\theta_1,\theta_2<1$. 由于偏导数F'_x, F'_y的连续性及$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,
则存在(x_0,y_0)的一个邻域内, $\dfrac{|F'_x|}{|F'_y|}\leq M$ 有界, 所以有

$$|k|=\frac{|F'_x|}{|F'_y|}|h|\leq M|h|,$$

当$h\to 0$时, 有$k=y(x+h)-y(x)\to 0$, 即$y(x)$ 连续.

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{F'_x(x+\theta_1 h,y)}{F'_y(x+h,y+\theta_2 k)}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

即$y(x)$可导, 且$y'(x)=-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big/\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$连续.

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

注记:

1. 如果条件3° 改为$F_x'(x_0, y_0) \neq 0$, 则存在类似上述结果的隐函数$x = x(y)$.

2. 定理中$F_y'(x_0, y_0) \neq 0$只是充分条件.

   比如$F(x, y) = y^3 - x^3 = 0$在点$(0, 0)$处, $F(0, 0) = 0$, $F_x'(0, 0) = F_y'(0, 0) = 0$, 而方程在$(0, 0)$ 附近确实存在隐函数$y = x$.

Example

设$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数，$F'_y\neq 0$，$F(x,y)$的二阶偏导数都连续，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解： 由隐函数存在定理知$y'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$，由复合函数求导法则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=-\frac{[F''_{xx}+F''_{xy}y'(x)]F'_y-[F''_{yx}+F''_{yy}y'(x)]F'_x}{F'^2_y}\\
&=\frac{-F''_{xx}F'^2_y+2F''_{xy}F'_yF'_x-F''_{yy}F'^2_x}{F'^3_y}.
\end{aligned}
$$

Example

求由方程$x^y=y^x$所确定的隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

Example

求由方程$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$所确定的隐函数的导数
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解法1:(公式法) 令$F(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$F'_x=-\frac{x+y}{x^2+y^2},\quad F'_y=\frac{x-y}{x^2+y^2}\Longrightarrow y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

将y'满足的方程$(x-y)y'=x+y$, 再对x求导得

$$(1-y')y'+(x-y)y''=1+y',$$

整理, 并代入y'的表达式, 得 $y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1+y'^2}{x-y}=\dfrac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$.

解法2:(微分法) 方程两边求微分得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

整理, 得$(x-y)\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}x$, 所以 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$.

再求导, 并代入y'的表达式, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}.$$

解法3:(求导法) 由题知y是x的函数，于是方程两边对x求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

整理得

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}.$$

对于由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$, 求导数常用方法:

(1) 利用隐函数的求导公式, 即**公式法**.

(2) 利用复合函数求导法则直接对方程$F(x,y)=0$两边对x求导, 也就是**求导法**.

(3) 利用一阶微分形式不变性直接对方程$F(x,y)=0$两边求微分, 由全微分公式, 得到偏导数, 即**微分法**.

此方法的优点是: 在微分运算时, 不必先区分变量是因变量还是自变量, 而把所有的变量看成同等地位.

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

- **考虑三维空间的一个方程**

设$F(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内有连续的偏导数，且$F(M_0)=0, F_z'(M_0)\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点$M_0$ 某邻域内确定唯一连续的隐函数$z=z(x,y)$，它满足

$$F(x,y,z(x,y))=0,\quad z_0=z(x_0,y_0),$$

且有连续偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}.$

注记： $F_y'(M_0)\neq 0$或$F_x'(M_0)\neq 0$都可以类似确定隐函数$y(x,z)$或$x=x(y,z)$. 实质$\mathbf{grad}\ F(M_0)\neq \mathbf{0}$，在$M_0$ 的邻域就一定存在隐函数.

Example

设$z=z(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的隐函数，$F'_z\neq 0$，$F(x,y,z)$二阶偏导数都连续，请表示出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Example

设函数$z=z(x,y)$是由方程$e^{-xy}-2z+e^z=0$所确定的二元函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1: **(公式法)** 令$F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$, 则

$$F_x'=-ye^{-xy},\ F_y'=-xe^{-xy},\ F_z'=e^z-2,$$

由公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\left(-ye^{-xy}(e^z-2)-e^{-xy}e^z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(e^z-2)^2}=\frac{-y^2e^{-xy}}{(e^z-2)^3}[(e^z-2)^2+e^{z-xy}].$$

解法2: **(微分法)**对方程两边求微分得

$$-e^{-xy}(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x) - 2\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}z = 0,$$

整理得函数$z(x,y)$的全微分

$$\mathrm{d}z = \frac{e^{-xy}(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)}{e^z - 2}.$$

$$\text{故}\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y\left(-ye^{-xy}(e^z - 2) - e^{-xy}e^z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(e^z - 2)^2} = \frac{-y^2e^{-xy}}{(e^z - 2)^3}[(e^z - 2)^2 + e^{z-xy}].$$

解法3: (求导法) 对方程两边关于x求偏导, 得

$$-ye^{-xy}-2\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

整理得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^z-2}$, 由对称性得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^z-2}$.

由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\left(-ye^{-xy}(e^z-2)-e^{-xy}e^z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(e^z-2)^2}=\frac{-y^2e^{-xy}}{(e^z-2)^3}[(e^z-2)^2+e^{z-xy}].$$

注记: 对于由方程$F(x,y,z)=0$确定的隐函数$z=z(x,y)$, 求偏导数常用方法:

(1) 利用隐函数的求导公式, 即**公式法**.

(2) 利用复合函数求导法则直接对方程$F(x,y,z(x,y))=0$两边分别对x, y求偏导数, 也就是**求导法**.

(3) 利用一阶微分形式不变性直接对方程$F(x,y,z)=0$两边求微分, 由全微分公式得到相应的偏导数, 即**微分法**.

此方法的优点是: 在微分运算时, 不必先区分变量是因变量还是自变量, 而把所有的变量看成同等地位; 另外, 可以同时得到所有的一阶偏导数.

Example

设函数$z=z(x,y)$是由方程$\int_y^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^{\frac{1}{z}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=0$ 所确定的二元函数, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, 及$\mathrm{d}z$.

(公式法) 令$F(x,y,z)=\int_y^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^{\frac{1}{z}}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$, 则

$$F'_x=\frac{e^x}{x},\ F'_y=-\frac{e^y}{y},\ F'_z=\frac{1}{z^2}\sqrt{1+\frac{1}{z^2}},$$

由公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{z^2e^x}{x\sqrt{1+z^{-2}}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{z^2e^y}{y\sqrt{1+z^{-2}}}.$$

全微分为$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{z^2e^x}{x\sqrt{1+z^{-2}}}\mathrm{d}x+\frac{z^2e^y}{y\sqrt{1+z^{-2}}}\mathrm{d}y.$

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

- 考虑三维空间由两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

其中F, G在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内有连续偏导数，且

$$F(M_0)=G(M_0)=0,\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}=\left.\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}\right|_{M_0}\neq 0,$$

则该方程组在点M_0某邻域内确定唯一的隐函数组

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases},$$

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

- 考虑三维空间由两个方程构成的方程组
  它们满足

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0 \\ G(x,y(x),z(x))=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0=y(x_0) \\ z_0=z(x_0) \end{cases},$$

且它们有连续导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}.$$

注记： $\mathbf{grad}\ F(M_0)\times\mathbf{grad}\ G(M_0)\neq\mathbf{0}$, 在$M_0$ 的邻域就一定存在隐函数组.

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

- 考虑四维空间由两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases}$$

F, G在点$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某邻域内有连续偏导数，且

$$F(M_0)=G(M_0)=0,\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{M_0}=\left|\begin{matrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{matrix}\right|_{M_0}\neq 0,$$

则该方程组在点M_0某邻域内确定唯一的隐函数组

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases},$$

§9.3.1 隐函数的存在性和微商

- 考虑四维空间由两个方程构成的方程组

它们满足

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 = u(x_0,y_0) \\ v_0 = v(x_0,y_0) \end{cases},$$

且它们有连续的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

Example

设$u = f(x, y, z)$, $g(x^2, e^y, z) = 0$, $\cos x = \int_0^{x-y} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$, 其中$f, g$ 都具有一阶连续偏导数, 且$\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$, 求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Example

设$y=y(x)$，$z=z(x)$是由方程组$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ z=xf(x+y) \end{cases}$所确定的函数，其中$f$具有一阶连续导数，$F$具有一阶连续偏导数，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解法1: (求导法) 在方程组中直接对x求导得

$$\begin{cases} F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f' \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F'_x \\ -xf'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf' \end{cases},$$

解关于$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的线性方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-F'_x-(f+xf')F'_z}{F'_y+xf'F'_z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}.$$

解法2: (微分法) 方程组的两个方程两边微分得

$$\begin{cases} F'_x\mathrm{d}x + F'_y\mathrm{d}y + F'_z\mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}z = f\mathrm{d}x + xf'(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) \end{cases} \text{即} \begin{cases} F'_y\mathrm{d}y + F'_z\mathrm{d}z = -F'_x\mathrm{d}x \\ -xf'\mathrm{d}y + \mathrm{d}z = (f + xf')\mathrm{d}x \end{cases},$$

解关于微分$\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$的线性方程组得

$$\mathrm{d}y = \frac{F'_x + (f + xf')F'_z}{F'_y + xf'F'_z}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}z = \frac{(f + xf')F'_y - xf'F'_x}{F'_y + xf'F'_z}\mathrm{d}x.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-F'_x - (f + xf')F'_z}{F'_y + xf'F'_z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(f + xf')F'_y - xf'F'_x}{F'_y + xf'F'_z}.$$

一般，对由方程组所确定的隐函数组求导数(或偏导数)常用方法:

(1) 利用复合函数求导法则，对每个方程的两边关于相应的自变量求导数(或偏导数)，得到一个关于隐函数相应导数(或偏导数)的线性代数方程组，解此方程组，得所求隐函数的导数(或偏导数)，即**求导法**.

(2) 利用一阶微分形式不变性直接对所给方程组的各个方程两边求微分，得到关于各变量微分的一个方程组，再解此方程组，得所求隐函数的相应全微分公式，从而得到所求隐函数的导数(或偏导数)，即**微分法**.

Example

求由方程组$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$，所确定的反函数$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 的偏导数u'_x，u'_y，v'_x，v'_y及$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

解： 对方程组两边微分得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = f'_u \mathrm{d}u + f'_v \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y = g'_u \mathrm{d}u + g'_v \mathrm{d}v, \end{cases}$$

将du, dv看作未知数, 解此方程组得

$$\mathrm{d}u = g'_v \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \mathrm{d}x - f'_v \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v = -g'_u \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \mathrm{d}x + f'_u \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \mathrm{d}y.$$

$$故\quad u'_x = g'_v \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad u'_y = -f'_v \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

$$v'_x = -g'_u \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad v'_y = f'_u \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

$$其中\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}.$$

所以有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} 互逆$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

§9.3.2 逆映射定理

定理： 设映射$u=u(x,y),v=v(x,y)$ 有连续的偏导数. 若在一点(x_0,y_0)处, 有$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)\neq 0$, 则在$(u_0,v_0)=(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))$ 的邻域内, 存在逆映射

$$(u,v)\longmapsto(x,y):\ x=x(u,v),y=y(u,v),$$

而且逆映射可导, 其偏导数的Jacobi行列式满足

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$$

一般地, 若定义在区域上两个C^1 满秩的映射互为逆映射, 则它们的$Jacobi$ 矩阵互逆.

可逆映射的$Jacobi$ 行列式有相当于一元函数反函数的导数的特征.

Example

求极坐标变换$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 的反变换的偏导数.

解： 由逆映射定理

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

目录

§9.4.1 参数曲线

若空间曲线L的**参数方程**为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

等价于**向径式方程**

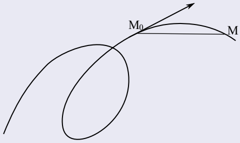
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

主要研究空间曲线的切线、法平面，关键是切向量

§9.4.1 参数曲线

- **切向量与切线方程:**

设$M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0)) = \mathbf{r}(t_0)$, $M(x(t),y(t),z(t)) = \mathbf{r}(t)$为曲线上两点，弦向量$\dfrac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$就与$\overrightarrow{M_0M}$共线，并指向参数的增加方向. 若极限



$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$$
$$=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\ \lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\ \lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)$$
$$=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)).$$

存在，称其为M_0处的**切向量**，

记$\mathbf{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$，且指向参数增加的方向.

§9.4.1 参数曲线

若$x'(t),y'(t),z'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续, 则称L 为**光滑曲线**. 如果L 可以分成有限段, 且每一段都是光滑的, 则L 称为**逐段光滑**的. 当曲线上一点处的切向量不为零,即$\mathbf{r}'(t_0)\neq\mathbf{0}$, 称该点为曲线的**正则点**, 否则称为**奇点**. 如果曲线的所有点都是正则点, 即对$\forall t$, $|\mathbf{r}'(t)|\neq 0$, 称曲线为**正则曲线**.

设L为正则曲线, 由此可得曲线L在M_0 处的**切线方程**为

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

曲线L在M_0处的**法平面方程**为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0.$$

Example

设$\mathbf{r}(t)=\left(\dfrac{t}{t+1},\dfrac{1+t}{t},t^2\right)$ $(t>0)$，判断它是否为简单曲线，是否为光滑曲线，并求$t=1$时切线方程与法平面方程.

解： 若$\dfrac{t_1}{t_1+1}=\dfrac{t_2}{t_2+1},\dfrac{1+t_1}{t_1}=\dfrac{1+t_2}{t_2}$，且$t_1^2=t_2^2$，$t_1,t_2>0$，则$t_1=t_2$，所以为简单曲线.

$\mathbf{r}'(t)=\left(\dfrac{1}{(1+t)^2},-\dfrac{1}{t^2},2t\right)$，且$t>0$时，每个分量连续，所以为光滑曲线.

$$\mathbf{r}(1)=(\frac{1}{2},2,1),\qquad \mathbf{r}'(1)=(\frac{1}{4},-1,2)$$

所以$t=1$时切线方程与法平面方程分别为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8},\qquad 2x-8y+16z=1.$$

Example

设曲线L在曲面$z = x^2 + y^2$上, L在Oxy平面上投影曲线的极坐标方程为$r = e^\theta$, L上点M_0的柱坐标为$(r, \theta, z) = (1, 0, 1)$, 求$L$上点$M_0$处的切线的直角坐标方程.

解： 曲线L的参数方程为$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta, \\ z = x^2 + y^2 = r^2 = e^{2\theta}, \end{cases}$

M_0的直角坐标

$$(x_0, y_0, z_0) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)\Big|_{(r,\theta,z)=(1,0,1)} = (1, 0, 1),$$

曲线L在点M_0的切向量

$$\begin{aligned}(x'(0),\ y'(0),\ z'(0)) &= (e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta),\ e^{\theta}(\cos\theta + \sin\theta),\ 2e^{2\theta})\Big|_{\theta=0} \\ &= (1, 1, 2).\end{aligned}$$

故曲线L在点M_0的切线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.

§9.4.1 参数曲线

- **弧长:**

在光滑曲线L : $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)\ t\in[\alpha,\beta]$ 上作内接折线, 分割:

$$T:\ \alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

$$\begin{aligned}
l(T)&=\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})|\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)+z'^2(\zeta_i)}\,\Delta t_i.
\end{aligned}$$

其中$t_{i-1}<\xi_i,\eta_i,\zeta_i<t_i$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$.

§9.4.1 参数曲线

- **弧长:**

因为$x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ 是连续的, 所以

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\eta)+z'^2(\zeta)}$$

是定义在三维闭区间$[\alpha,\beta]^3$ 上的连续函数, 因此一致连续, 故对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta_1>0$. 当$\|T\|:=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i<\delta_1$ 时, 对任何$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in[t_{i-1},t_i]^3(i=1,2,\cdots,n)$ 都有

$$\left|\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)+z'^2(\zeta_i)}-\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)+z'^2(t_i)}\right|<\varepsilon.$$

因为$|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$, 故当$\|T\|<\delta_1$ 时

$$\left|l(T)-\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{r}'(t_i)|\Delta t_i\right|<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\varepsilon(\beta-\alpha).$$

§9.4.1 参数曲线

- **弧长:**

用 "$\varepsilon-\delta$" 语言来描述，就是存在$\delta_2>0$，当$\|T\|<\delta_2$ 时

$$\left|\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{r}'(t_i)|\Delta t_i-\int_{\alpha}^{\beta}|\mathbf{r}'(t)|dt\right|<\varepsilon.$$

因此，取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. 于是当$\|T\|<\delta$ 时就有

$$\left|l(T)-\int_{\alpha}^{\beta}|\mathbf{r}'(t)|dt\right|<\varepsilon(\beta-\alpha+1).$$

即L 的弧长可定义为

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}|\mathbf{r}'(t)|dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

§9.4.1 参数曲线

- **弧长:**
  L 的弧长可定义为

$$\ell = \int_\alpha^\beta |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

平面曲线可以看成$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(t), y(t), 0)$, 由此得到弧长公式

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

平面曲线的显表示可以看成$\mathbf{r}(x) = (x, f(x), 0)$, $x \in [a, b]$ 弧长公式为

$$\ell = \int_a^b |\mathbf{r}'(x)| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

§9.4.1 参数曲线

- **弧长参数:**

  设L是正则曲线($|\mathbf{r}'(t)|>0$), 从起点A 到动点$M(t)$ 的弧$\overset{\frown}{AM}$ 的长为

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)}\,d\tau=\int_{\alpha}^{t}|\mathbf{r}'(\tau)|\,d\tau.$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=|\mathbf{r}'(t)|>0$$

  函数是严格单调增的, 所以函数$s=s(t)$ 有反函数$t=t(s)$,

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}(t(s))=(x(s),y(s),z(s))$$

  我们把曲线固有的几何量弧长s作为参数的参数方程称为空间曲线的**自然方程**.

§9.4.1 参数曲线

- **弧长参数:**

$$\mathbf{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

$\mathbf{r}(s)$对弧长s的微商是**单位切向量**, 并指向弧长增加的方向.

$$|\mathbf{r}'(s)|^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2=1.$$

$$\text{或}\qquad \mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2.$$

把$\mathrm{d}s$ 看成是弧长的微元长度, 则$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 分别是$\mathrm{d}s$ 在三个坐标轴上的**有向投影**. 单位切向量$\mathbf{r}'(s)$的三个方向余弦为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\cos\beta,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\cos\gamma.$$

§9.4.1 参数曲线

- **主法向量和副法向量:**

以下假定正则曲线L： $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in C^2[\alpha, \beta]$.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

切向量$\dot{\mathbf{r}}$是单位向量: $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 1$, 故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0$$

只要$\ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{r}}$和切向量$\dot{\mathbf{r}}$是正交的, 因此是L的一个法向量, 称为L的**主法向量**, 记$\boldsymbol{\kappa} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$, 它与$\dot{\mathbf{r}}$也是正交的, 称其为$L$的**副法向量**, 且$|\boldsymbol{\kappa}| = |\ddot{\mathbf{r}}|$.

§9.4.1 参数曲线

- **曲率:**

设曲线L上一段长度为Δs的弧为$\overset{\frown}{M_1M_2}$, 弧上切向量总转角为$\Delta\alpha$, 则$\bar{\kappa}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$就是这个弧段上单位弧长转动角的平均值, $\bar{\kappa}$的大小就描述了这一段弧的弯曲程度, 称为这段弧的平均曲率. 记L上两点M_1和M_2处的单位切向量为$\dot{\mathbf{r}}_1$和$\dot{\mathbf{r}}_2$, 则$|\Delta\alpha|\approx|\Delta\dot{\mathbf{r}}|$, 所以

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\dot{\mathbf{r}}}{\Delta s}\right|=|\ddot{\mathbf{r}}|=|\boldsymbol{\kappa}|.$$

就定义为曲线的**曲率**.

§9.4.1 参数曲线

- **曲率:**

主法向量的参数表达式:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\left\{\frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\right]\mathbf{r}'(t)\right\}.$$

副法向量的参数表达式:

$$\boldsymbol{\kappa} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

在一般参数表示下, 曲线的曲率表达式为

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

特别对直线: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in R$. 显然$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$, 故$\kappa = 0$.
反之, 如果曲线的曲率恒为0, 那么它一定是直线.

Example

求螺旋线 $(a, b > 0)$的曲率

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad -\infty < t < +\infty$$

解: 求导得

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

$$\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = a\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

§9.4.1 参数曲线

- **曲率:**

(1) 设L是平面上的参数曲线: $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}&=\frac{[x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}]\times[x''(t)\boldsymbol{i}+y''(t)\boldsymbol{j}]}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}\\&=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

即副法向量始终与z轴平行. 称

$$\kappa=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}$$

为平面曲线L的曲率. 平面曲线的曲率不取绝对值, κ的正负分别表示曲线的弯曲方向.

§9.4.1 参数曲线

- **曲率:**

(2) 曲线L由显函数$y=f(x)$给出

$$\boldsymbol{\kappa}=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}\boldsymbol{k},\quad \kappa=\frac{|f''(x)|}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}$$

$f''(x)>0$时，曲线呈**凸形**；$f''(x)<0$时，曲线呈**凹形**.

(3) 曲线L由方程$F(x,y)=0$给出

$$\kappa=\frac{|f''(x)|}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}=\frac{|-F_y'^2F_{xx}''+2F_x'F_y'F_{xy}''-F_x'^2F_{yy}''|}{[F_x'^2+F_y'^2]^{3/2}}$$

Example

求旋轮线的曲率

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), \quad (a > 0,\ 0 < t < 2\pi)$$

解:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{|a^2(1-\cos t)\cos t - a^2\sin^2 t|}{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{3/2}} = \frac{|-1|}{4a\sin\frac{t}{2}}.\end{aligned}$$

负号说明摆线在一个周期内为凹曲线. 就弯曲程度而言

$$\kappa = \frac{1}{4a\sin|\frac{t}{2}|}$$

§9.4.2 参数曲面

设D为$\mathbb{R}^2$的区域, 定义在D上的一个二元向量值函数

$$\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)),\quad (u,v)\in D$$

确定了空间中的一个曲面, 上述方程称为**曲面的向径式方程**.
等价于下列方程组

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v). \end{cases} \qquad (u,v)\in D,$$

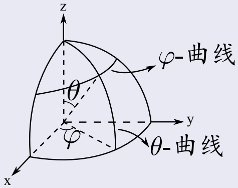
称为**曲面的参数方程**.
固定一个v值, u在其允许值内变化, 向径$\mathbf{r}(u,v)$的终点就在曲面上画出一条曲线,称为$u-$曲线.同样可以定义$v-$曲线. 整张曲面就是由这些u曲线和v 曲线交织而成的.

§9.4.2 参数曲面

例如球面

$$
\begin{aligned}
x(\theta,\varphi) &= R\sin\theta\cos\varphi,\\
y(\theta,\varphi) &= R\sin\theta\sin\varphi,\\
z(\theta,\varphi) &= R\cos\theta
\end{aligned}
$$

其中$0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$. 当θ 固定时所得到的φ 曲线就是纬线, 而φ 固定时所得的θ 曲线就是经线.



问题: 如何求得曲面在给定点处的切平面呢?

§9.4.2 参数曲面

设曲面S： $\mathbf{r}(u,v)$ 为D上的C^1函数. 记

$$\mathbf{r}'_u=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right),\quad \mathbf{r}'_v=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

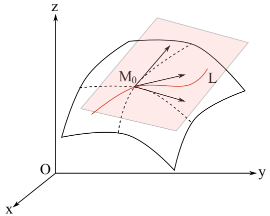
当$\mathbf{r}'_u$和$\mathbf{r}'_v$在D中除在有限点或曲线段外满足$\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\neq\mathbf{0}$时, 称曲面$S$为光滑曲面或分片光滑曲面.

设$M_0=\mathbf{r}(u_0,v_0)$为光滑曲面S上的一点, $\mathbf{r}'_u(u_0,v_0)$, $\mathbf{r}'_v(u_0,v_0)$分别是过M_0 的u-曲线和v-曲线的切线方向. 这两个向量不共线, 张成了曲面的切平面.

任取一条完全躺在曲面S上且过M_0点的光滑曲线L, 设其方程是

$$x(t) = x(u(t), v(t)),\ y(t) = y(u(t), v(t)),\ z(t) = z(u(t), v(t)),$$

其中$u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$.
(这条曲线可以看成是uv 平面区域D 中曲线: $u = u(t), v = v(t)$ 经变换: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 映成的空间曲线).
曲线L在M_0处的切向量



$$\tau = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \cdot u'(t_0) + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) \cdot v'(t_0).$$

曲面S上过M_0点的任何一条曲线的切向量为$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$与$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 的线性组合, 因此由$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ 与$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 张成的平面, 称为曲面S在M_0处的**切平面**.

§9.4.2 参数曲面

S的法向量是

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0).$$

也可以表示为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right).$$

(X, Y, Z) 为切平面上动点的坐标，曲面在M 处的切平面方程是

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(X - x(u,v)) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(Y - y(u,v)) + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(Z - x(u,v)) = 0$$

§9.4.2 参数曲面

二元函数$z=f(x,y)\,((x,y)\in D)$所表示的**显式曲面**的参数表示:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y)),\quad (x,y)\in D.$$

$$\boldsymbol{r}_x'=(1,0,f_x'),\qquad \boldsymbol{r}_y'=(0,1,f_y'),$$

法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_x'\times\boldsymbol{r}_y'=(-f_x',-f_y',1),$

曲面S在其上一点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处**切平面方程**为

$$z-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}.$$

Example

设直线$L:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面π上，而平面π与曲面$z=x^2+y^2$ 相切于点$(1,-2,5)$，求a，b之值.

解： 点$(1,-2,5)$处曲面$z=x^2+y^2$的法向量为$\boldsymbol{n}=(-2,4,1)$, 则曲面在该点的切平面即平面π 的方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0, \quad \text{即} \quad 2x-4y-z-5=0.$$

因为直线L 在平面π上, 则把 $x=-y-b$, $z=(-y-b)+ay-3$, 代入平面π的方程得

$$-2(y+b)-4y+3-ay+(y+b)-5=0 \quad \text{或} \quad (a+5)y+(b+2)=0,$$

从而有$a+5=0$, $b+2=0$, 即 $a=-5$, $b=-2$.

§9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

- **平面隐式曲线**

  设函数$F(x,y)\in C^1(D)$, 点$M_0(x_0,y_0)\in D$ 满足$F(M_0)=0$, 假设$\mathbf{grad}\ F=(F'_x,F'_y)\neq\mathbf{0}$, 根据隐函数存在定理, 在$M_0$附近确定了一个连续可微的隐函数, 即在$M_0$附近给出了一条曲线, 由方程$F(x,y)=0$ 确定的曲线称为**平面隐式曲线**. 因此过点M_0 的切线方程为

$$(x-x_0)F'_x+(y-y_0)F'_y=0$$

  切线与$\mathbf{grad}\ F$垂直, 即$\mathbf{grad}\ F$为隐式曲线的**法向量**.

§9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

- **空间隐式曲面**

  设函数$F(x,y,z)\in C^1(V)$，点$M_0(x_0,y_0,z_0)\in V$满足$F(M_0)=0$，并且

$$\mathbf{grad}\ F|_{M_0}=(F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0))\neq\mathbf{0}.$$

  根据隐函数存在定理，在M_0附近确定了一个连续可微的二元隐函数，即在M_0附近给出了一张曲面，由方程$F(x,y,z)=0$所确定的曲面称为**隐式曲面**.

  向量$\mathbf{grad}\ F|_{M_0}$就是曲面在M_0的**法向量**.

§9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

- **空间隐式曲面**

设Γ是曲面上过$M_0(x_0, y_0, z_0)$的一条光滑曲线,其参数方程为

$$r = r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)), \quad t \in [\alpha, \beta\beta],$$

其中$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$.由于$\Gamma$在曲面上,故有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad t \in [\alpha, \beta].$$

等式两端对t求导,并取$t = t_0$,就得到

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(t_0)z'(t_0) = 0.$$

向量$\mathbf{grad}\ F|_{M_0}$与曲面上任一条过M_0的曲线的切向量$\boldsymbol{r}'(t_0)$垂直,所以向量$\mathbf{grad}\ F|_{M_0}$为曲面在M_0的**法向量**.

§9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

- **空间隐式曲面**

  切平面方程为

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

曲面S在该点的**法线方程为**

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

显式曲面$z=f(x,y)$可以看成是由方程

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

确定的隐式曲面. 法向量为$(-f'_x,\ -f'_y,\ 1)$. **切平面方程为**

$$z-z_0-f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)=0.$$

Example

在曲面$z = xy$上求一点，使得此点处的法线垂直于平面$x + 3y + z = 0$，并写出此法线方程.

解： 设该点为$M_0(x_0, y_0)$，则$z_0 = x_0y_0$，该点的法方向为$(-y_0, -x_0, 1)$，平面$x + 3y + z = 0$ 的法方向为$(1, 3, 1)$. 由已知过M_0的法线垂直于平面$x + 3y + z = 0$，则

$$\frac{-y_0}{1} = \frac{-x_0}{3} = 1, \quad 即 \quad y_0 = -1, x_0 = -3,$$

从而$z_0 = 3$，故过M_0点的法线方程为 $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{1}$.

Example

设函数$f(u,v)\in C^1$, 证明曲面$f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面都通过同一个定点, 其中a,b,c为常数.

证明: 令$F(x,y,z)=f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$, 任取曲面上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面在$M_0$点的法向为

$$\mathbf{n}=\left(\frac{f_1'}{z_0-c},\ \frac{f_2'}{z_0-c},\ -f_1'\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}-f_2'\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}\right)$$
$$//(f_1'(z_0-c),f_2'(z_0-c),-f_1'(x_0-a)-f_2'(y_0-b))$$

过M_0点的切平面为

$$f_1'(z_0-c)(x-x_0)+f_2'(z_0-c)(y-y_0)-(f_1'(x_0-a)+f_2'(y_0-b))(z-z_0)=0$$

代入定点(a,b,c)方程恒成立, 所以所有切平面都通过此定点.

§9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

- **空间隐式曲线**

  若空间曲线L的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad (x,y,z)\in V\subset\mathbb{R}^3.$$

曲线L在其上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切向量与两个曲面$F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$在M_0处的法向量$\mathbf{grad}\ F|_{M_0}$, $\mathbf{grad}\ G|_{M_0}$都垂直，则M_0 处的**切向量**为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{grad}\ F|_{M_0}\times\mathbf{grad}\ G|_{M_0} \\
=&(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))\times(G'_x(M_0),G'_y(M_0),G'_z(M_0)) \\
=&\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}\right)
\end{aligned}$$

§9.4.3 隐式曲线和隐式曲面

- 空间隐式曲线

M_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}.$$

M_0 处的法平面方程为

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

Example

求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$ 在点$(-2,1,6)$处的切线和法平面方程.

解: 在点$(-2,1,6)$处曲面$2x^2+3y^2+z^2=47$的法向量为$\boldsymbol{n_1}=(-4,3,6)$, 曲面$x^2+2y^2=z$的法向量为$\boldsymbol{n_2}=(-4,4,-1)$. 则曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=(-27,-28,-4),$$

故切线方程为

$$\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}.$$

法平面方程为

$$27(x+2)+28(y-1)+4(z-6)=0, \quad 即 \quad 27x+28y+4z+2=0.$$

空间曲线

- **参数曲线:**

$$L: \ x = (x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

切向量: $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

- **隐式曲线:**

(1) 平面隐式曲线: $F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

法向量: $\textbf{grad}\ F = (F'_x, F'_y)$

(2) 空间隐式曲线: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$

切向量:

$$\begin{aligned} & \textbf{grad}\ F|_{M_0} \times \textbf{grad}\ G|_{M_0} \\ = & (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)) \times (G'_x(M_0), G'_y(M_0), G'_z(M_0)) \\ = & \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\Big|_{M_0}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\Big|_{M_0}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\Big|_{M_0} \right) \end{aligned}$$

空间曲面

- **参数曲面:**

  $$S:\ x=(x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)),\quad (u,v)\in D$$

  法向量: $\mathbf{n}=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

- **空间隐式曲面:**

  $F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in V\subset\mathbb{R}^3$

  法向量: $\mathbf{grad}\ F=(F'_x,F'_y,F'_z)$

  显式曲面$z=f(x,y)$可以看成是由方程

  $$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

  确定的隐式曲面. **法向量为**$(-f'_x,\ -f'_y,\ 1)$.

目录

§9.5.1 多元函数的微分中值定理

- **二元函数的微分中值定理:**

  设$f(x,y)$在区域D中可微，连接D内两点(x_0,y_0)和(x_0+h,y_0+k) 的线段仍在D内，则必有$0<\theta<1$，使得

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h + f'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k.$$

- **多元函数微分中值定理:**

  设$f: D\to\mathbb{R}$ 在区域$D\subset\mathbb{R}^n$ 中可微，连接D 中两点$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的直线段仍在D内，则必有直线段上一点$\mathbf{c}$，使得

$$f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})=Jf(\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

§9.5.1 多元函数的微分中值定理

证明： 以(x_0, y_0) 和(x_0+h, y_0+k)为端点的线段上的点$(x_0+th,\ y_0+tk)$ $t\in[0,1]$. 令

$$\psi(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk).$$

ψ 是定义在$[0,1]$上的一元可微函数，由一元函数的中值定理知，存在$0<\theta<1$，使得

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) &= \psi(1)-\psi(0)=\psi'(\theta)\\ &= f'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h+f'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k. \end{aligned}$$

从而得证.

注记1: 微分中值定理中区域D不一定是凸的, 只要考虑的(区域内)两个点的直线段在区域内, 就可以对这两个点用中值定理. (如果凸区域则要求区域中任意两点的直线段仍在区域中.) 但若两点的直线段不全在区域内, 则微分中值定理一般不成立.

例如: 设$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则$f(x,y)$ 在D上可微. 取两点: $\mathbf{a} = (-1,0)$, $\mathbf{b} = (1,0)$, 则$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 2$.

$$Jf(x,y)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的连线上$y=0$, 因而$Jf(x,y)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = -\frac{2}{x^2}$. 这说明

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \neq Jf(x,y)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

注记2: 对于向量值函数, 相应的微分中值定理是不存在的. 即在中值定理中$f: D \to \mathbb{R}$ 不能直接推广为$f: D \to \mathbb{R}^m$.

例如: 设$f(t) = \binom{t^2}{t^3}$, $t \in \mathbb{R}$. 则$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 且在$\mathbb{R}$ 上可微.

$$Jf(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad f(1) - f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

显然不存在$\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\theta \\ 3\theta^2 \end{pmatrix}.$$

§9.5.1 多元函数的微分中值定理

推论:

1. 设$f(x,y)$在区域D中可微, 且$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,
   则$f(x,y)=C$(常数).
2. 设区域$D\subset\mathbb{R}^n$, $f:\ D\to\mathbb{R}$ 在D 中可微. 若在D 中有$Jf=\mathbf{0}$, 则f 为常数.
3. 设区域$D\in\mathbb{R}^n$, 向量值函数$\mathbf{f}:D\to\mathbb{R}^m$可微,

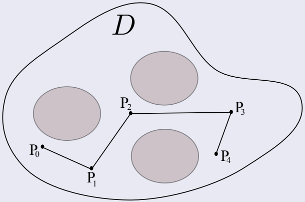
$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\cdots,f_m(\mathbf{x}))^T,$$

如果$J\mathbf{f}=\mathbf{0}$, 即各个偏导数$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=0$, $(i=1,2,\cdots,m;$
$j=1,2,\cdots,n)$, 则$f_i(\mathbf{x})$ 都是常数, 故$\mathbf{f}$是$\mathbb{R}^m$中的常值向量.

§9.5.1 多元函数的微分中值定理

证明： 取$(x_0, y_0) \in D$. 因为区域是连通的，所以对任意$(x, y) \in D$, 存在包含在D 中的折线L 连接(x_0, y_0) 和(x, y). 设这条折线的顶点依次为$P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1, \cdots, P_n = (x, y)$. 由于$f$ 的两个偏导数在D 上为零，根据中值定理，有

$$f(P_j) = f(P_{j-1}),\ j = 1, 2, \cdots, n.$$



由此即得$f(P_n) = f(P_0)$, 即，

$$f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

这说明f 在D 上是常数.

§9.5.2 多元函数的Taylor公式

- **带拉格朗日($Lagrange$)型余项的泰勒公式:**

设区域$D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^{n+1}(D)$, 连接D中两点(x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0 + k)$ 直线段也在D内, 则存在$0 < \theta < 1$, 使得

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) + R_n,$$

$$\text{其中 } R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

称为**拉格朗日余项**.

在$(0,0)$处展开的泰勒公式也叫$Maclaurin$**公式**.

§9.5.2 多元函数的Taylor公式

证明： 记连接$M_0(x_0, y_0)$，$M(x_0+h, y_0+k)$线段上的点 $M(t)=(x_0+th, y_0+tk)$, $\varphi(t)=f(M(t))$, 则$\varphi(t)\in C^{n+1}([0,1])$. 由一元函数的泰勒公式知，存在$0<\theta<1$,使得

$$\varphi(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}. \qquad (\triangle)$$

利用复合函数的求导法则，

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(M(t))\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(M(t))\cdot k\Longrightarrow\varphi'(0)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{M_0},$$

引进算子$\mathcal{D}=h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$, 利用归纳法，不难证明

$$\varphi^{(m)}(t)=\mathcal{D}^m(f(M(t))\Longrightarrow\varphi^{(m)}(0)=\mathcal{D}^m f\Big|_{M_0}.$$

§9.5.2 多元函数的Taylor公式

$$\begin{aligned}\varphi''(0) &= \mathcal{D}^2 f\Big|_{M_0} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{M_0} \\ &= \left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{M_0},\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

$$\begin{aligned}\varphi^{(m)}(0) &= \mathcal{D}^m f\Big|_{M_0} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\Big|_{M_0} \\ &= \sum_{l=0}^{m} C_m^l h^l k^{m-l} \frac{\partial^m f}{\partial x^l \partial y^{m-l}}\Bigg|_{M_0}.\end{aligned}$$

将它们带入到(△) 式，并令$t = 1$，就得到了二元函数的泰勒公式.

§9.5.2 多元函数的Taylor公式

- **带佩亚诺($Peano$)型余项的泰勒公式:**

  设区域$D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^n(D)$, $(x_0, y_0), (x_0+h, y_0+k) \in D$, 则

$$f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) + R_n,$$

  其中$R_n = o(\rho^n) \quad (\rho = \sqrt{h^2+k^2} \to 0)$.

  在$(0,0)$处展开的泰勒公式也叫$Maclaurin$公式.

*Hessian*矩阵

设n元函数$f(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}$处对于自变量的各分量的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}(i,j=1,2,\cdots,n)$连续，则称矩阵

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

为$f(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}$处的*Hessian矩阵*，也可记作$\nabla^2 f(\mathbf{x})$. 矩阵$\mathbf{H}$为对称矩阵.

§9.5.2 多元函数的Taylor公式

定理： 设$f(\mathbf{x})$是n元函数，$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，如果$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$的某邻域内具有二阶连续偏导数，则对于点$\mathbf{x}_0$的某邻域内的点$\mathbf{x}$，记$\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$，存在常数$\theta(0 < \theta < 1)$，使得

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^T + \frac{1}{2}\mathbf{h}\nabla^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}^T,$$

称此式为$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处的带Lagrange余项的一阶泰勒公式.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^T + \frac{1}{2}\mathbf{h}\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^T + o(|\mathbf{h}|^2),$$

称此式为$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处的带Peano余项的二阶泰勒公式.

Example

求函数 $\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 的$Maclaurin$展开式.

解：把函数作初等变形，并利用单变量函数的$Taylor$公式展开，

$$\frac{1}{1-x-y+xy}=\frac{1}{(1-x)(1-y)}$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x)).(1+y+y^2+\cdots+y^n+R_n(y))$$
$$=1+(x+y)+(x^2+xy+y^2)+\cdots$$
$$+(x^n+x^{n-1}y+\cdots+x^ky^{n-k}+\cdots+y^n)+R_n(x,y).$$

或

$$\frac{1}{1-x-y+xy}=\frac{1}{x-y}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-y}\right)$$
$$=1+(x+y)+(x^2+xy+y^2)+\cdots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+R_n(x,y).$$

Example

证明当$|x|,|y|$充分小时，有下面近似等式成立

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

证明：设$f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$，则$f(x,y)$在原点附近无穷次可微，且

$$f(0,0) = 1, \qquad f'_x(0,0) = 0, \qquad f'_y(0,0) = 0,$$
$$f''_{xx}(0,0) = -1, \qquad f''_{xy}(0,0) = 0, \qquad f''_{yy}(0,0) = 1.$$

因而有二阶$Taylor$展式

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2) \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0),$$

即当$|x|,|y|$充分小时，有

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Example

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

求$f(x,y)$在$(0,0)$点的四阶$Taylor$展式，并求出$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)$.

解： 因为

$$e^{x(x^2+y^2)}=1+x(x^2+y^2)+\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)^2+o(\rho^4)\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0),$$

则有$f(x,y)$在$(0,0)$点的四阶$Taylor$展式

$$\frac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}=-x-\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)+o(\rho^2).$$

由此得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)=-\frac{1}{2}\cdot 4!=-12,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)=-\frac{1}{2}\times 2!\times 2!=-2.$$

注记： $f(x,y)$在(x_0,y_0)处的$Taylor$展式中，$(x-x_0)^m(y-y_0)^n$的系数为a，那么偏导数

$$\frac{\partial^{m+n}f(x_0,y_0)}{\partial x^m\partial y^n}=m!\cdot n!\cdot a\quad(m,n=0,1,2,\cdots).$$

§9.5.3 多元函数的极值

- **极值的定义:**

  设$f(x,y)$为区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的二元函数, $M_0(x_0,y_0)\in D$. 如果存在M_0的某邻域$B(M_0,r)$, 使得对任意$(x,y)\in B(M_0,r)$, 都有

$$f(x,y)\leq(\geq)f(x_0,y_0),$$

  则称(x_0,y_0)为函数f的一个极大(小)值点, $f(x_0,y_0)$称为f的一个极大(小)值. 极小值点和极大值点统称为**极值点**, 极大值和极小值统称为**极值**.

设n元函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$的某邻域内有定义, 若对该邻域内的点$\mathbf{x}$, 都有$f(\mathbf{x})\leq f(\mathbf{x}_0)$, 则称函数$f(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}_0$处取得**极大值**$f(\mathbf{x}_0)$, 称点$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的**极大值点**.类似定义极小值与极小值点.

§9.5.3 多元函数的极值

- **极值的必要条件:**
  若$f(x,y)$在D中有偏导数，$M_0(x_0,y_0)$是$f(x,y)$的极值点，则

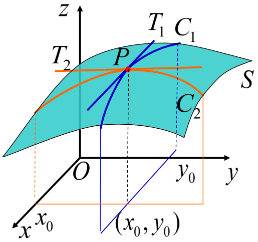
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

  使函数一阶偏导数都为零的点，称为函数的**驻点**.

若$z=f(x,y)$在极值点$M(x_0,y_0)$处可微，此时切平面

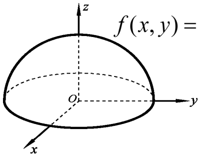
$$z-z_0=f'_x|_M(x-x_0)+f'_y|_M(y-y_0)$$

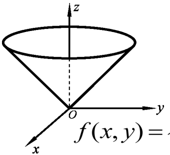
为$z=z_0$平行于坐标面xOy.



§9.5.3 多元函数的极值

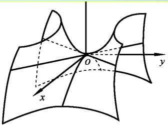
注记： 具有偏导数的极值点必是驻点，但驻点未必是极值点. 例如，函数 $f(x,y)=xy$, $(0,0)$ 是驻点，但显然不是极值点.





思考： (1) 函数在极值点处的偏导数存在吗？

(2) 若 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，则 (x_0,y_0) 是极值点？



$f(x,y)=x^2-y^2$ 在点 $(0,0)$ 处不取极值

§9.5.3 多元函数的极值

- **极值的必要条件:**

设n元函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处对各个自变量的一阶偏导数都存在，且在$\mathbf{x}_0$处取极值，则有$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$. 称$\mathbf{x}_0$为函数$f(\mathbf{x})$的**驻点**.

设函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处可微，$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的驻点，若在$\mathbf{x}_0$的任何邻域内既存在函数值大于$f(\mathbf{x}_0)$的点，也存在函数值小于$f(\mathbf{x}_0)$的点，则称$\mathbf{x}_0$为函数$f(\mathbf{x})$的**鞍点**.

驻点只是可能的极值点，那么满足什么条件的驻点为极值点呢？回顾一元函数情况.

§9.5.3 多元函数的极值

- **极值的充分条件:(极值判别法)**

定理: 设n元函数$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处具有二阶连续偏导数,且$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$, 记$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$为$f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处的$Hessian$ 矩阵.

(1°) 若$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$正定, 则$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的极小值点;

(2°) 若$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$负定, 则$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的极大值点;

(3°) 若$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$不定, 则$\mathbf{x}_0$为$f(\mathbf{x})$的鞍点.

证明可考虑带拉格朗日余项的一阶泰勒公式及极限的局部保号性

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+\nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\nabla^2 f(\mathbf{x}_0+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T.$$

§9.5.3 多元函数的极值

定理： 对称矩阵A为正定的$\iff$ A的各阶主子式为正，即

$$a_{11}>0,\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\cdots,\quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵A为负定的$\iff$ A的奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

§9.5.3 多元函数的极值

设$f(x,y)$为区域D上的C^2函数, (x_0,y_0)为$f(x,y)$的驻点. 考察其$Hessian$矩阵

$$\mathbf{H}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \triangleq \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$A>0, AC-B^2>0 \Longrightarrow \mathbf{H}(x_0,y_0)$正定

$\Longrightarrow f(x,y)$在(x_0,y_0)处取极小值

$A<0, AC-B^2>0 \Longrightarrow \mathbf{H}(x_0,y_0)$负定

$\Longrightarrow f(x,y)$在(x_0,y_0)处取极大值

§9.5.3 多元函数的极值

- **极值的充分条件:(极值判别法)**

定理: 设$f(x,y)$为区域D上的C^2函数，(x_0,y_0)为$f(x,y)$的驻点. 记$\Delta = AC - B^2$,其中

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

那么

(1°) $\Delta > 0$ 且$A > 0$时，(x_0,y_0)为f的极小值点;

(2°) $\Delta > 0$ 且$A < 0$时，(x_0,y_0)为f的极大值点;

(3°) $\Delta < 0$时，(x_0,y_0)不是f的极值点.

注记: $\Delta = 0$时，无法判断(x_0,y_0)是不是f的极值点.

证明: 记$h = x - x_0$, $k = y - y_0$, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, $\cos\alpha = \frac{h}{\rho}$, $\sin\alpha = \frac{k}{\rho}$, 由泰勒公式知

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2)$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + \frac{2}{\rho^2}\cdot o(\rho^2)\right).\ (\rho \to 0)$$

记 $\varphi(\alpha) = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \quad (0 \le \alpha \le 2\pi).$

(1°) $\Delta > 0, A > 0$时,

$$\varphi(\alpha) = A(\cos\alpha + \frac{B}{A}\sin\alpha)^2 + \frac{\Delta}{A}\sin^2\alpha. \qquad (1)$$

由于在$[0, 2\pi]$上$\cos\alpha + \frac{B}{A}\sin\alpha$与$\sin\alpha$不同时为零, 故$\varphi(\alpha) > 0$. 由闭区间连续函数的性质, 存在$m > 0$, 使得$\varphi(\alpha) \ge m$. 由于$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{2}{\rho^2}\cdot o(\rho^2) = 0$, 所以当$\rho$充分小时, $\left|\frac{2}{\rho^2}\cdot o(\rho^2)\right| < \frac{m}{2}$, 从而

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)\geq \frac{m\rho^2}{4}>0.$$

所以(x_0,y_0)为极小值点.

(2°) $\Delta>0$, $A<0$ 时, 证明与(1°)类似. 此时(x_0,y_0)为极大值点.

(3°) $\Delta<0$时, 若$A\neq 0$, 由 (1)式知, $\varphi(0)=A$. 若取α_0 使得$\cos\alpha_0+\dfrac{B}{A}\sin\alpha_0=0$, 则$\sin\alpha_0\neq 0$, 从而$\varphi(\alpha_0)$ 与A异号. 所以$\varphi(\alpha)$ 在$[0,2\pi]$内可变号. 由此$f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 在(x_0,y_0) 的任意小邻域中可变号, 所以(x_0,y_0)不是极值点.

若$C\neq 0$, 利用对称性, 同样可证(x_0,y_0)不是极值点.

若$A=C=0$, 则$B\neq 0$ 且$\varphi(\alpha)=2B\sin\alpha\cos\alpha=B\sin 2\alpha$.

由$\varphi(\dfrac{\pi}{4})=B$, $\varphi(\dfrac{3\pi}{4})=-B$ 知(x_0,y_0) 不是极值点.

Example

求函数$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$的极值点与极值.

解： 由驻点方程组
$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, & (1) \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0, & (2) \end{cases}$$
解得$x = y$, 并代入(1)得驻点$M_0(0,0)$, $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$.
又有$z''_{xx} = 12x^2 - 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{yy} = 12y^2 - 2$, 在M_1和M_2皆有
$$A = z''_{xx} = 10, \quad B = z''_{xy} = -2, \quad C = z''_{yy} = 10, \quad AC - B^2 = 96 > 0.$$
故M_1, M_2是极小值点, 极小值$z(M_1) = z(M_2) = -2$.
对于驻点$M_0(0,0)$, 由于$A = B = C = -2$, $AC - B^2 = 0$, 判别法失效. 但$z(M_0) = 0$, 而当$x = y$, 且$0 < |x| < 1$时,
有$z = 2x^4 - 4x^2 < 0$; 当$x = -y$, 且$0 < |x| < 1$时,
有$z = 2x^4 > 0$; 即在点M_0的任意邻域内, 函数$z(x,y)$有正, 有负,
由极值的定义知点M_0不是极值点.

Example

求函数$z=(1+e^y)\cos x-ye^y$的极值点与极值.

解： 由驻点方程$\begin{cases} z'_x=-(1+e^y)\sin x=0, \\ z'_y=e^y(\cos x-1-y)=0, \end{cases}$ 解得驻点

$$(x,y)=(2n\pi,0) \quad 或 \quad (x,y)=((2n+1)\pi,-2), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

$$A=z''_{xx}=-(1+e^y)\cos x,\ B=z''_{xy}=-e^y\sin x,$$
$$C=z''_{yy}=e^y(\cos x-2-y),$$

当$(x,y)=(2n\pi,0)$时，$AC-B^2=2>0$，$A=-2<0$，

因而$(2n\pi,0)$是极大值点，极大值为$z(2n\pi,0)=2$.

当$(x,y)=((2n+1)\pi,-2)$时，$AC-B^2=-\frac{e^2+1}{e^4}<0$，

因而$((2n+1)\pi,0)$不是极值点.

Example

求由方程$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值.

Example

求函数$z=x^2y(4-x-y)$, 在有界闭区域
$D=\{(x,y)|\,x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 6\}$上的极值、最大值和最小值.

解： 先求D内驻点, 驻点方程组

$$\begin{cases} z'_x = xy(8-3x-2y)=0, \\ z'_y = x^2(4-x-2y)=0, \end{cases}$$

结合$x>0$, $y>0$, $x+y<6$, 解得D内唯一的驻点$M_0(2,1)$. 又

$$A=z''_{xx}|_{M_0}=-6, \quad B=z''_{xy}|_{M_0}=-4, \quad C=z''_{yy}|_{M_0}=-8,$$

$\Delta=AC-B^2>0$, $A<0$, 故z 在M_0取得极大值,
极大值为$z(2,1)=4$.

在D的边界$x=0$, 或$y=0$上, $z=0$.

在边界线$x+y=6$上, 把$y=6-x$代入z, 得

$$z=2x^3-12x^2, \quad (0\leqslant x\leqslant 6)$$

$$\text{驻点方程} \quad z'=6x^2-24x=0, \quad (0<x<6)$$

得驻点 $x=4$. 又$z''|_{x=4}=(12x-24)|_{x=4}=24>0$, 故点(4,2)为函数$z(x,y)$在边界线$x+y=6$上的极小值点, 又

$$z(6,0)=z(0,6)=0, \quad z(4,2)=-64.$$

有界闭区域上的连续函数一定有最大值和最小值, 所以z在闭区域D上的最大值为$z(2,1)=4$, 最小值为$z(4,2)=-64$.

注记：多元函数求最值的步骤:

(1) 求出区域内部的极值（驻点与不可导点）；

(2) 求出函数在边界上的最值;

(3) 对内部的极值和边界上的最值进行比较，最大者为最大值，最小者为最小值.

Example

要设计一个容量为V的长方体开口水箱，试问水箱的长、宽、高各等于多少时，所用材料最少？

解: 设水箱的长、宽、高各为x, y, z, 则表面积为$S(x,y,z)=2(xz+yz)+xy$. 依题意, $x,y,z>0$, 而且还满足$xyz=V$. 由条件解出$z=\dfrac{V}{xy}$, 代入表面积函数中，得到

$$F(x,y)=S(x,y,\frac{V}{xy})=2V(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})+xy,$$

由 $F'_x=-\dfrac{2V}{x^2}+y=0$, $\quad F'_y=-\dfrac{2V}{y^2}+x=0$, 解得驻点

$x=y=\sqrt[3]{2V}$, 从而$z=V/xy=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, 再由$\Delta>0, A>0$, 判定此驻点取得最小面积$S=3\sqrt[3]{4V^2}$.

§9.5.4 条件极值

- **极值与条件极值的区别:**

函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得**极值**, 是指对于M_0 的某一邻域中所有的点(x,y) 均有$f(x,y)\leqslant(\geqslant)f(x_0,y_0)$.

函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处取得满足限制方程$\varphi(x,y)=0$ 的**条件极值**, 是指对于M_0的某邻域内曲线$L=\{(x,y)|\varphi(x,y)=0\}$ 上的所有点(x,y)均有$f(x,y)\leqslant(\geqslant)f(x_0,y_0)$.

§9.5.4 条件极值

设曲线$\varphi(x,y)=0$是光滑的，(x_0,y_0)是一个条件极值点，

若$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$，由隐函数存在定理知在$x_0$附近确定$y=y(x)$，

且x_0 为一元函数 $g(x)=f(x,y(x))$ 的极值点. 因此

$$g'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)y'(x_0)=0.$$

又由$\varphi(x,y(x))=0$知 $y'(x_0)=-\dfrac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$，所以

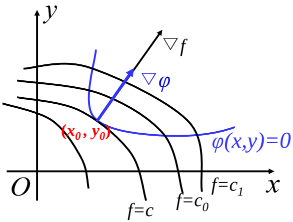
$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}.$$

令 $\lambda=-\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$，则有

$$(f'_x+\lambda\varphi'_x)|_{(x_0,y_0)}=0,\quad (f'_y+\lambda\varphi'_y)|_{(x_0,y_0)}=0.$$

$$\text{即}\quad \nabla f(x_0,y_0)+\lambda\nabla\varphi(x_0,y_0)=\mathbf{0}.$$

$\nabla f,\nabla\varphi$分别是$f(x,y)$与φ等值线的法向量，因此法向量平行意味着$f(x,y)$ 的等值线簇$f(x,y)=c$中某一条与等值线$\varphi(x,y)=0$不但相交，而且在交点处相切. 而在交点处对应的值$c=f(x_0,y_0)$就是可能的极大值或极小值，因此方程



$$f'_x+\lambda\varphi'_x=0,\quad f'_y+\lambda\varphi'_y=0,\quad \varphi(x,y)=0.$$

联立，就可以用来决定交点(x_0,y_0) 和λ.

§9.5.4 条件极值

- **拉格朗日乘数法**

引进辅助函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 则条件极值点应满足下列驻点方程

$$\begin{cases} F'_x(x,y)=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ F'_y(x,y)=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

从上述方程组中解出驻点，再根据题意，判别哪些驻点是极值点. 这种方法称为**拉格朗日乘数法**. λ称为**拉格朗日乘子**. 一般在解驻点方程时，不必求出λ 的值，所以在求解过程中往往先设法消除λ.

Example

求$u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$在条件$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{a^2}$ $(a>0)$下的极值, 并判断是什么极值.

解: 为了简化计算, 令$\frac{1}{x}=r$, $\frac{1}{y}=s$, $\frac{1}{z}=t$, 原问题化为求$u=r+s+t$在$r^2+s^2+t^2=\frac{1}{a^2}$下的极值. 作辅助函数

$$F(r,s,t,\lambda)=r+s+t+\lambda(r^2+s^2+t^2-\frac{1}{a^2}),$$

则有驻点方程组$\begin{cases} F_r'=1+2\lambda r=0,\\ F_s'=1+2\lambda s=0,\\ F_t'=1+2\lambda t=0,\\ F_\lambda'=r^2+s^2+t^2-\frac{1}{a^2}=0,\end{cases}$

从前三个方程得$r=s=t$, 代入最后一个方程解得驻点

$$M_1(\frac{1}{\sqrt{3}a},\frac{1}{\sqrt{3}a},\frac{1}{\sqrt{3}a}),\quad M_2(-\frac{1}{\sqrt{3}a},-\frac{1}{\sqrt{3}a},-\frac{1}{\sqrt{3}a}).$$

判断驻点是否为极值点, 可借助极值的判别法. 设函数$u=r+s+t$中的t是由方程$r^2+s^2+t^2=\dfrac{1}{a^2}$确定的关于$r$, s的函数, 即$t=t(r,s)$, 则$\frac{\partial t}{\partial r}=-\frac{r}{t}$, $\quad \frac{\partial t}{\partial s}=-\frac{s}{t}$,

$$A=u''_{rr}=-\frac{1}{t^3}(r^2+t^2),\quad B=u''_{rs}=-\frac{rs}{t^3},\quad C=u''_{ss}=-\frac{1}{t^3}(s^2+t^2).$$

对于驻点$M_1(\frac{1}{\sqrt{3}a},\frac{1}{\sqrt{3}a},\frac{1}{\sqrt{3}a})$ 有$AC-B^2>0$, $\quad A<0$, 故M_1 为极大值点, 极大值$u(M_1)=\frac{\sqrt{3}}{a}$.
对于驻点$M_2(-\frac{1}{\sqrt{3}a},-\frac{1}{\sqrt{3}a},-\frac{1}{\sqrt{3}a})$ 有$AC-B^2>0$, $\quad A>0$, 故M_2 为极小值点, 极小值$u(M_2)=-\frac{\sqrt{3}}{a}$.

§9.5.4 条件极值

注记: 对于条件极值问题的求解, 基本想法是把它化为无约束条件的极值问题, 主要方法有:

(1) 用$Lagrange$乘数法. 实质是引入$Lagrange$乘数后构造辅助函数, 把原目标函数在条件等式约束下的极值问题, 化为相应的辅助函数的无条件极值问题.

(2) 把条件等式直接代入目标函数化为无条件的极值问题来求解.

Example

求函数$z=(2x+3y-6)^2$在椭圆域$x^2+4y^2\leqslant 4$中的最大值和最小值.

分析:

1. 要先在椭圆$x^2+4y^2<4$内求极值, 也就要先求椭圆内的目标函数的驻点;
2. 再求边界上的最值, 也就是在条件$x^2+4y^2=4$ 下的条件极值;
3. 最后对内部的极值和边界上的最值进行比较, 最大者为最大值, 最小者为最小值.

Example

求$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$的最大值, 其中

$$x^2+y^2+z^2=6r^2\ (r>0),\ \ x>0,\ \ y>0,\ \ z>0.$$

并证明对$\forall\ a,b,c>0$有

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

拉格朗日乘数法可以推广到多个自变量和多个约束条件的情形. 考虑目标函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在$m(< n)$个约束条件

$$\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \cdots, \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

下的极值问题. 作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\varphi_m,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是$m$个待定的常数. 并由此得到驻点方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Example

抛物面$x^2+y^2=z$被平面$x+y+z=1$截成一个椭圆，求这个椭圆到坐标原点的最长与最短距离.

解： 此题实质上求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在限制条件$x^2+y^2=z$与$x+y+z=1$下的极值问题. 作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1),$$

则有驻点方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, & (1) \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, & (2) \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, & (3) \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, & (4) \\ F'_\mu=x+y+z-1=0, & (5) \end{cases}$$

由(1), (2),)得 $x=y$ 或$\lambda=-1$, $\mu=0$, 由(3), (4), 舍去$\lambda=-1$, $\mu=0$. 从而由$x=y$, (4),(5)化为$z=2x^2$, $z=1-2x$, 所以得$x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $z=2\mp\sqrt{3}$, 故

$$f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3})=9-5\sqrt{3},$$

$$f(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})=9+5\sqrt{3},$$

因为闭区域上的连续函数一定有最大值和最小值, 而且最大值点和最小值点都是驻点. 所以椭圆到坐标原点的最长距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最短距离为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

Example

设有曲面S : $\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$, 平面$\Pi$: $2x+2y+z+5=0$.

(1) 在曲面S上求平行于平面Π的切平面方程;

(2) 求曲面S与平面Π之间的最长与最短距离.

Example

在椭球面$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$位于第一卦限部分上求一点，使过该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，并求这个最小体积.

解： 设点$M(x_0,y_0,z_0),(x_0,y_0,z_0>0)$，则在$M$处的法向
$\mathbf{n}=(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2})$，$M$处的切平面方程

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0\text{或}\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0,$$

切平面在三个坐标轴上的截距为$\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$，则四面体的体积为$\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$. 求最小体积，可以用**平均值不等式**

$$\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}\geq\frac{abc}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2})^3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

也可以用**拉格朗日乘数法**. 作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

$$\begin{cases} F'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F'_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ F'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

解得$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$或$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

即$M(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$四面体体积最小, 这个最小体积为$\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

Example

设函数$u = f(x, y, z)$在条件$\varphi(x, y, z) = 0$ 和$\psi(x, y, z) = 0$ 之下在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 取得极值m. 证明: 曲面$f(x, y, z) = m$, $\varphi(x, y, z) = 0$ 和$\psi(x, y, z) = 0$在点M_0的法线共面, 其中f, φ, ψ有一阶不同时为零的连续偏导数.

Example

设$f(x,y)=(y-2x^2)(y-x^2)$，证明沿着经过点$(0,0)$的每一条直线，点$(0,0)$均是$f(x,y)$在该直线上的极小值点，但点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极小值点.

证明： 过点$(0,0)$的每一条直线设为$y=kx$，在$(0,0)$附近

$$f(x,kx)=x^2(k^2-3kx+2x^2)>0,$$

$f(0,0)=0$，所以点$(0,0)$是$f(x,y)$在该直线上的极小值点.

而由已知，在$y=2x^2$和$y=x^2$两条抛物线上，$f(x,y)=0$. 而这两条抛物线把整个平面区域分成四个区域，在每个区域内$f(x,y)$取确定的符号. 点$(0,0)$在整个平面区域的任一小邻域内都包含着上述四个区域，即$f(x,y)$在这小邻域内有正值，也有负值，故点$(0,0)$ 不是$f(x,y)$的极小值点.

§9.5.4 二元函数的极值

设$f(x,y)$在$M_0(x_0,y_0)$的某邻域内有二阶连续偏导数，记$A=f''_{xx}(M_0)$，$B=f''_{xy}(M_0)$，$C=f''_{yy}(M_0)$，则下列关于$f(x_0,y_0)$为极值的四个命题，错误的是(   )

(A) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f(x_0,y_0)$不是极值.

(B) 若$f(x_0,y_0)$是极小值，则$f'_x(x_0,y_0)=0$，且$A\geq 0$.

(C) 若$f(x_0,y_0)$是极值，则$AC-B^2\geq 0$.

(D) 若$AC-B^2>0$，则$f(x_0,y_0)$是极值.

答案：(D)

Example

设函数$f(x,y)$在区域D内有直到二阶的所有连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0,$$

证明: $f(x,y)$不可能在D内取得极大值.

证明： (反证法) 假设$f(x,y)$在D内某点(x_0,y_0) 取得极大值. 则一元函数 $f(x,y_0)$在点$x=x_0$取得极大值，同时一元函数$f(x_0,y)$在点$y=y_0$ 也取得极大值. 因为函数$f(x,y)$ 在区域D内有直到二阶的所有连续偏导数，则由一元函数极值点的性质得

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\leqslant 0,\quad f''_{yy}(x_0,y_0)\leqslant 0,$$

与已知 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ 矛盾. 故$f(x,y)$不可能在D内取得极大值.

目录

引进算子

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

称为**Hamilton 算子**, 或**Nabla 算子**. ∇兼有**微分**和**向量**两种运算的功能, 即可以作用在数量场上, 又可以作用在向量场上, 与向量场点乘和叉乘.

$$\triangle=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

称为**Laplace 算子**. $\triangle$作用在数量场u上, 就是

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

方程$\triangle u=0$叫**Laplace方程**.

直角坐标系下, $\mathbf{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(i,j,k))$.

(1) ∇作用在数量场u上, 得u的**梯度**

$$\nabla u=(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k})u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=\mathbf{grad}\,u$$

(2) ∇点乘向量场$\mathbf{v}$, 得$\mathbf{v}$的**散度**:

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\mathrm{div}\ \mathbf{v}$$

一个向量场的散度是一个数量场.

(3) ∇叉乘向量场$\mathbf{v}$, 得$\mathbf{v}$的**旋度**:

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$$

一个向量场的旋度是一个向量场.

利用算符∇的微分和向量运算的双重功能，可得如下运算性质:

(1) $\nabla(u_1+u_2)=\nabla u_1+\nabla u_2$;

(2) $\nabla\cdot(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2})=\nabla\cdot\mathbf{v_1}+\nabla\cdot\mathbf{v_2}$;

(3) $\nabla\times(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2})=\nabla\times\mathbf{v_1}+\nabla\times\mathbf{v_2}$;

(4) $\nabla(u_1u_2)=u_1\nabla u_2+u_2\nabla u_1$;

(5) $\nabla\cdot(u\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\nabla u+u(\nabla\cdot\mathbf{v})$;

(6) $\nabla\times(u\mathbf{v})=\nabla u\times\mathbf{v}+u(\nabla\times\mathbf{v})$;

(7) $\nabla\cdot(\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2})=\mathbf{v_2}\cdot\nabla\times\mathbf{v_1}-\mathbf{v_1}\cdot\nabla\times\mathbf{v_2}$.

容易验证

$$\mathbf{rot\ grad}\ \varphi=\nabla\times\nabla\varphi=\mathbf{0}.\quad \mathrm{div}\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=0.$$