13 2023-2024 第二学期期末

13.1 填空题

1. 次数不超过 3 的多项式空间 $R_3[x]$ 中,$1+x+x^2+x^3$ 在基 $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ 下的坐标为

2. 方阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-2)(\lambda^2+9)$. 则 $I-A$ 的行列式为

解答:

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^{2024} =$

4. 已知实二次型 $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-tx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为

5. 设三维实线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在给定基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的方阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\}$ 下的方阵为

6. 设平面 R^2 上的线性变换 $\mathscr{B}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ 将单位圆 C 变为椭圆 E, 则 E 的长半轴的长度为

13.2 判断题

1. 设 A 是 n 阶上三角实方阵, 若 A 是正交方阵, 则 A 必为对角阵.

2. 若复矩阵 A 满足 $AA^T = 0$, 则 $A = 0$.

3. 设 A 与 B 均为 n 阶实对称方阵, 且 A 正定. 则存在正实数 c 使得 $cA + B$ 为正定阵.

4. 设 X 与 Y 均为 R^n 的线性子空间, 若 $X\bigcup Y$ 仍是线性子空间, 则一定有 $X\subseteq Y$ 或 $Y\subseteq X$.

13.3 解答题

三、设实二次型 $Q=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+ax_2x_3$ 经过某个正交变换 $X=PY$ 后得到 $by_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

(1) 求 a,b 的值.

(2) 求正交方阵 P.

(3) 判断二次曲面 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型.

四、设 $R_3[x]$ 是次数不超过 3 的多项式组成的线性空间, 对于任意的 $f(x), g(x)$, 定义

$$< f(x), g(x) >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(1) 证明: $< \cdot, \cdot >$ 是 $R_3[x]$ 上的内积.
(2) 将 $R_3[x]$ 中的基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 进行 $Schmidt$ 标准正交化.
(3) 设 W 为 $R_3[x]$ 由 x, x^2 生成的线性子空间. 令 $h(x) = 1+x^3$, 求 $k(x) \in W$,

使得 $h(x) - k(x)$ 的长度 $|h(x) - k(x)|$ 最小, 其中 $|\cdot|$ 代表在 (1) 中定义的内积下的长度.

五、考虑全体 2×2 实方阵组成的实线性空间 $R^{2\times 2}$. 令 $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. 考虑线性变换 $\mathscr{A} : R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$, 使得 $\mathscr{A}(X) = MX - XM$ 对任意的 $X \in R^{2\times 2}$ 成立.

(1) 计算 $\mathscr{A}$ 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的方阵. 其中 E_{ij} 是 (i, j) 处为 1, 其他均为 0 的基本方阵.

(2) 计算 $\mathscr{A}$ 的所有特征值以及相应的特征向量.

六、设 A, B 均为 n 阶实对称方阵, 满足 $AB = BA$.

(1) 证明: 存在非零列向量 $v \in R^n$, 使得 v 同时为 A 和 B 的特征向量.

(2) 证明: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 均为对角阵.

/ / /