第10章 多变量函数的重积分

段雅丽

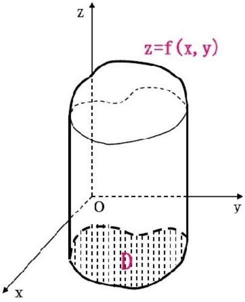
中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

目录

目录

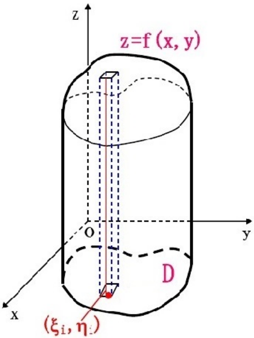
以XOY平面上有界区域D为底，曲面$z=f(x,y)$为顶，侧面是以D的边界为准线，母线平行于z轴的柱体(设在D中$f(x,y)\ge 0$且连续). 这种柱体称为**曲顶柱体**.



问题： 如何求曲顶柱体的体积?

分割—近似—求和—取极限

比如作垂直于x轴和y轴的直线，把D分为一些小区域块D_i，如果每个D_i有面积$\sigma(D_i)$，则取$(\xi_i,\eta_i)\in D_i$，则小柱体体积近似值为$f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)$，则得到此曲顶柱体的体积近似值$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)$.



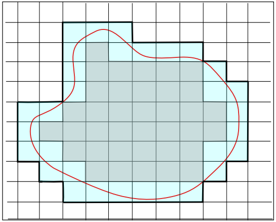
问题：什么叫有面积呢？如何定义面积？

- **平面区域的面积：**

  设D是有界集，作矩形$I = [a,b] \times [c,d] \supset D$，对矩形作分割$T$，得到一些小矩形.

  (1) 完全包含在D内的小矩形面积的和为$\sigma_T^-(D)$；

  (2) 包含在D内和与D有公共点的小矩形面积的总和为$\sigma_T^+(D)$.



$$0 \le \sigma_T^-(D) \le \sigma(D) \le \sigma_T^+(D) \le \sigma(I).$$

当$|T| \to 0$时，若$\sigma_T^-(D)$ 和$\sigma_T^+(D)$ 的极限相等，那该极限为点集D的面积.

§10.1.1 二重积分的概念

- **平面区域的面积:**
  D是平面有界点集, 取$I=[a,b]\times[c,d]\supset D$, 若对任意分割$T$
  $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$
  下列极限相等

$$\lim_{|T|\to 0}\sigma_T^+(D)=\lim_{|T|\to 0}\sigma_T^-(D),$$

那么称点集D是**Jordan 可测的**, 否则称为不可测的. 极限值称为D的**测度**或“面积”. 特别, 当极限值为0时, 称D为**零测集**.

∂D为D的边界, 挑出那些含有边界点的小矩形, 则

$$0\le\sigma_T^+(D)-\sigma_T^-(D)\le\sigma_T^+(\partial D).$$

D是Jordan可测的$\Longleftrightarrow$边界∂D的测度为零.

§10.1.1 二重积分的概念

- **平面区域的面积:**

  (1) 闭区间上连续函数给出的平面曲线段的面积为零.

  (2) 若有界点集的边界是由逐段光滑的曲线围成的, 那么该点集是可测的.

  (3) 利用定积分定义的曲边梯形的面积与Jordan测度是一致的.

不可测的有界点集. 如$[0,1]\times[0,1]$内所有有理点（即点的两个坐标都是有理数）所构成的集合D是Jordan意义下不可测的. 因为$\partial D=[0,1]\times[0,1]$, 边界的面积为1.

注记: 后面D都是由有限多条分段光滑曲线围成的有界闭区域.

§10.1.1 二重积分的概念

将D分割为有限个内部互不相交的有面积的小区域$\{D_i\}_{i=1}^n$，其中D_i的面积为$\sigma(D_i)$，记分割宽度$|T| = \max\limits_{1\le i\le n}\{\text{diam } D_i\}$，对任意$(\xi_i, \eta_i) \in D_i$，$(1 \le i \le n)$，称$S(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\sigma(D_i)$为$f(x, y)$在$D$上的一个$Riemann$和. 若

$$\lim_{|T|\to 0} S(T) = \lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\sigma(D_i)$$

存在，则称$f(x, y)$在D上(黎曼)可积，并称其极限值为$f(x, y)$在D上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \quad \text{或} \quad \int_D f.$$

§10.1.1 二重积分的概念

- **定义:**
  $f(x,y)$在D上可积且积分等于$A\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使对任意分割和对应的任意取点$(\xi_i,\eta_i)\in D_i$, $(1\leq i\leq n)$, 只要分割宽度满足$|T|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)-A\right|<\varepsilon.$$

- **二重积分的几何意义:** 当连续函数$z=f(x,y)\geqslant 0$时, 二重积分$\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示曲顶柱体的体积. 特别,
  $f(x,y)\equiv 1$时, $\displaystyle\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\sigma(D)$, 其中$\sigma(D)$表示$D$的面积.
- **二重积分的物理意义:** $f(x,y)$为薄板D的密度函数, 那么二重积分就是这个薄板的质量.

§10.1.2 函数可积的必要和充分条件

- **可积的必要条件:**

定理: 若$f(x,y)$ 在D上可积, 则$f(x,y)$ 为D上的有界函数.

注记: 可积必有界, 有界未必可积.

如定义在二维区间$D=[0,1]\times[0,1]$上的$Dirichlet$函数

$$D(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{为有理点},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由定义易证$D(x,y)$在D上不可积, 因为黎曼和的极限不存在.

注记: 函数$f(x,y)$的黎曼可积性, 要求**积分区域有界**, **函数有界**.

§10.1.2 函数可积的必要和充分条件

- **可积的充要条件:**

定理: D上有界函数$f(x,y)$ 可积$\Longleftrightarrow \lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\sigma(D_i)=0.$

- **可积的充分条件:**

定理: (1) 若$f(x,y)$在D上连续, 那么在D上可积.

(2) 若$f(x,y)$的不连续点分布在D中可测的且测度为零的点集上, 则$f(x,y)$ 在D 上可积.

§10.1.2 函数可积的必要和充分条件

- **可积的充分条件:**

推论: 若D上有界函数$f(x,y)\neq g(x,y)$的点分布在D中可测的且测度为零的点集上, 则$f(x,y)$ 和$g(x,y)$ 在D 上有相同的可积性, 且可积时有$\displaystyle\int_D f=\int_D g$.

注记: 1. 连续必可积, 可积未必连续.

2. 在测度为零的点集上任意改变函数的值, 不会改变函数的可积性和积分值.

§10.1.3 二重积分的性质

设$f(x,y),g(x,y)$在D上可积.

(1) **(线性性)** 对任意常数c_1, c_2, c_1f+c_2g在D上可积, 且

$$\int_D(c_1f+c_2g)=c_1\int_D f+c_2\int_D g.$$

(2) **(乘积可积性)** $f(x,y)g(x,y)$ 在D上可积.

(3) **(保序性)** 若在D上$f(x,y)\geqslant 0$, 则$\displaystyle\int_D f\geqslant 0$.

若在D上$f(x,y)\geqslant g(x,y)$, 则$\displaystyle\int_D f\geqslant\int_D g$.

特别地, 若在D上$m\leq f(x,y)\leq M$, 则有**估值不等式**

$$m\sigma(D)\leq\int_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leq M\sigma(D).$$

§10.1.3 二重积分的性质

(4) **(绝对可积性)** $|f(x,y)|$在D上可积，且$\left|\int_D f\right| \leqslant \int_D |f|$.

(5) **(对区域的可加性)** 设D_1, D_2是两个可测点集，$D_1^0 \cap D_2^0 = \emptyset$，若函数$f(x,y)$ 在D_1, D_2 上均可积，则$f(x,y)$ 在$D_1 \cup D_2$上可积，且

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

(6) **(积分中值定理)** 若D是连通闭区域，$f(x,y)$在D上连续，则存在$P \in D$，使得

$$\int_D f = f(P)\sigma(D).$$

§10.1.3 二重积分的性质

推广的积分中值定理: 设D是连通闭区域, 函数f, g 在D 上连续, 且g 在D 上不变号. 则存在$P \in D$ 使得

$$\int_D fg\mathrm{d}\sigma = f(P)\int_D g\mathrm{d}\sigma.$$

特别地, $g = 1$时, 即为积分中值定理.

证明： 连续函数g和fg在D上都可积. 因D 是有界闭域, 则f在D上取到最小值m和最大值M. 设在D上$g \geq 0$, 则对$\forall\ (x, y) \in D$有

$$mg(x, y) \leq f(x, y)g(x, y) \leq Mg(x, y).$$

$$\text{在}D\text{上积分, 得}\quad m\int_D g\mathrm{d}\sigma \leq \int_D fg\mathrm{d}\sigma \leq M\int_D g\mathrm{d}\sigma.$$

如果$\int_D g\,\mathrm{d}\sigma = 0$, 那么$g$ 在D 上恒为零, 所证等式自然成立.
如果$\int_D g\,\mathrm{d}\sigma > 0$, 那么

$$m \leq \left(\int_D g\mathrm{d}\sigma\right)^{-1}\int_D fg\mathrm{d}\sigma \leq M.$$

因D 是连通的, f 在D 上连续, 故由介值定理知, $\exists P \in D$, 使得

$$f(P) = \left(\int_D g\mathrm{d}\sigma\right)^{-1}\int_D fg\mathrm{d}\sigma \quad \text{即} \quad \int_D fg\mathrm{d}\sigma = f(P)\int_D g\mathrm{d}\sigma.$$

Example

求 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $f(x,y)$ 是连续函数.

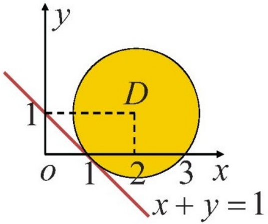
解: $f(x,y)$是连续函数, 故由重积分的中值定理,
$\exists(\xi,\eta)\in\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\rho^2\}$, 使得

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} f(\xi,\eta) = f(0,0).\end{aligned}$$

Example

比较$\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$ 的大小,其中区域D是由$(x-2)^2+(y-1)^2=2$所围成的.

解： 积分区域的边界曲线为圆心在$(2,1)$，半径为$\sqrt{2}$的圆，它与直线L：$x+y=1$相切于点(1,0)，所以积分区域D位于直线L的上方，即在$x+y\geq 1$内，由积分的保序性有



$$\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma.$$

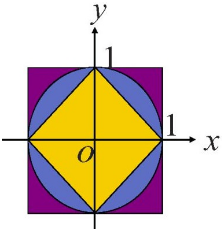
Example

比较下列积分的大小.

$$I_1=\iint\limits_{D_1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_2=\iint\limits_{D_2}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_3=\iint\limits_{D_3}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D_1:\ x^2+y^2\le 1,\ D_2:\ |x|+|y|\le 1,\ D_3:\ |x|\le 1, |y|\le 1.$

解： 由积分的保号性可知$I_1, I_2, I_3>0$. 三个积分区域: $D_3\supset D_1\supset D_2$. 如果记$D_4=D_1-D_2$, $D_5=D_3-D_1$, 则有



$$I_1=I_2+\iint_{D_4}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=I_1+\iint_{D_5}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以有$I_1>I_2$, $I_3>I_1$, 从而有$I_3>I_1>I_2$.

注记： 不计算积分，借助二重积分性质来比较积分大小：

(1) **积分区域相同，被积函数不同.**

通过分析被积函数的特征与彼此间的关系，比较同一积分区域上被积函数的大小，借助积分的**保序性**来比较积分的大小.

(2) **被积函数相同，积分区域不同.**

通过分析积分区域的特征及相互关系，借助积分对积分**区域的可加性**和**保序性**来比较积分的大小.

§10.1.4 二重积分的计算

- **二维闭区间上的二重积分:**

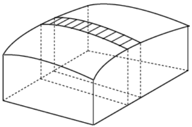
Fubini **定理:**设函数$f(x,y)$在闭区间$I=[a,b]\times[c,d]$上可积.
(1) 如果对每个$y\in[c,d]$, $f(x,y)$作为x的函数在$[a,b]$上可积,
记$\varphi(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$, 则$\varphi(y)$ 在$[c,d]$ 上可积, 并且有

$$\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y=\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 如果对每个$x\in[a,b]$, $f(x,y)$作为y的函数在$[c,d]$上可积,
记$\psi(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 则$\psi(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, 并且有

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x=\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明:设$\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A$. 对$\forall\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 对于分割



$$T_x: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b;$$
$$T_y: \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,$$

当分割$T = T_x \times T_y$的宽度$|T_x|, |T_y| < |T| < \delta$时, 对任意$M_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, 都有

$$\left| \sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - A \right| < \varepsilon, \quad \text{即有}$$

$$A - \varepsilon < \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} \Delta y_j \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i < A + \varepsilon. \qquad (*)$$

对于给定的$\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i$ 是$f(x, \eta_j)$在$[a, b]$上的黎曼和, 故有

$$\lim_{|T_x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i = \varphi(\eta_j).$$

由$(*)$式可知, 只要$|T_y| < \delta$, 就有

$$A - \varepsilon \le \sum_{j=1}^{m} \varphi(\eta_j)\Delta y_j \le A + \varepsilon.$$

由此可知$\varphi(y)$在$[c, d]$上可积, 并且有

$$\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y = A = \iint_I f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

即得(1)的结论. 类似可证得(2).

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \quad \text{先}x\text{后}y\text{的累次积分}$$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad \text{先}y\text{后}x\text{的累次积分}$$

Example

设$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 2y, & x\text{是无理数},\end{cases}$ 证明:

(1) $f(x,y)$在$D=[0,1]\times[0,1]$上不可积;

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在; $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在.

证明： (1) $f(x,y)$在D上的$y\neq\frac{1}{2}$每点处都不连续,则$f(x,y)$在D上不可积.

(2) 由于 $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}y, & x\text{是有理数}\\ \displaystyle\int_0^1 2y\mathrm{d}y, & x\text{是无理数},\end{cases}$ 所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=1.$$

而对$\forall y\in[0,1]$, $y\neq\frac{1}{2}$, $f(x,y)$作为x的函数在$[0,1]$上处处不连续,

于是 $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 对每个$y\neq\frac{1}{2}$ 都不存在, 从

而 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在.

注记： (1) 二重积分存在, 但两个累次积分不存在;

(2) 两个累次积分存在, 但二重积分不存在;

(3) 由定理知, 二重积分和一个累次积分存在时, 重积分的计算可化为累次积分的计算.

Example

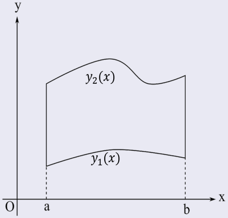
(1) $$\iint\limits_I ye^{x+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I=[0,1]\times[0,1].$$

(2) $$\iint\limits_I x\cos xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I=[0,\pi]\times[0,1].$$

§10.1.4 二重积分的计算

- **有界区域(X型区域)上的二重积分:**

定理: 设$D=\{(x,y)|y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$, 其中$y_1(x)$, $y_2(x)$为连续函数. 函数$f(x,y)$在D上可积, 且对于任意的$x\in[a,b]$, $f(x,y)$在$[y_1(x),\ y_2(x)]$关于变量y可积, 记$\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$, 则$\varphi(x)$在$[a,b]$上可积, 并有

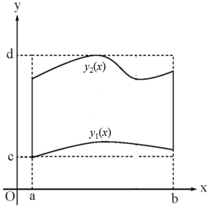


X型区域

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\Big[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明： 作闭区间$I=[a,b]\times[c,d]\supset D$, 令

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\in I\setminus D \end{cases}$$



$f^*(x,y)$在D上等于$f(x,y)$, 因此可积; 在$I\setminus D$上恒为0, 因此可积. 且有

$$\begin{aligned}\iint_I f^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D f^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{I\setminus D} f^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

对$[a,b]$中任何固定值x, 有

$$\int_c^d f^*(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)\mathrm{d}y+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)\mathrm{d}y$$
$$+\int_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)\mathrm{d}y=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

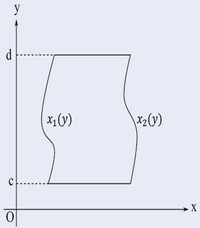
在I上对$f^*(x,y)$用富比尼定理得

$$\int_a^b\Big[\int_c^d f^*(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x=\int_a^b\Big[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x$$
$$=\iint_I f^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§10.1.4 二重积分的计算

- **有界区域(Y型区域)上的二重积分:**

定理: 设$D=\{(x,y)|x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}$, 其中$x_1(y)$, $x_2(y)$为连续函数. 函数$f(x,y)$在D上可积, 且对于任意的$y\in[c,d]$, $f(x,y)$在$[x_1(y), x_2(y)]$关于变量x可积, 记$\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$, 则$\psi(y)$在$[c,d]$上可积, 并有



Y型区域

$$\int_c^d \psi(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\Big[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§10.1.4 二重积分的计算

- **有界区域上的二重积分:**

定理: 如果$f(x,y)$连续, 且积分区域D既可以表示成X型区域, 又可以表示成Y型区域, 那么两种累次积分可交换, 且

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注记: 对于更一般的积分区域D, 利用积分区域的可加性, 把D分成有限个互不相交的X型区域和Y 型区域之并, 在每个小区域上用相应的累次积分, 再将积分值相加.

Example

计算累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt[3]{x}}^1 e^{y^2}\mathrm{d}y.$

解此类型题具体步骤为:

(1) 由累次积分的上、下限给出积分域所满足的不等式组;

(2) 画出积分域的草图;

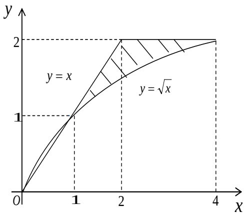
(3) 给出换序后新的累次积分的上下限.

后积先定限, 限内画条线, 上(右)交上限写, 下(左)交是下限

Example

计算累次积分.

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y.$$



解: 由已知, 积分区域为

$$D=\{(x,y)|\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{(x,y)|\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2,2\leqslant x\leqslant 4\}$$
$$=\{(x,y)|y\leqslant x\leqslant y^2,\quad 1\leqslant y\leqslant 2\},$$

故

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\int_1^2\left(\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_y^{y^2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}y\sin\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2+\frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}.$$

Example

设$f(x)$连续, $g(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 求$g'(2)$.

解： 交换积分顺序

$$g(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x\int_1^x \mathrm{d}y=\int_1^t (x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

则$g'(t)=(t-1)f(t)$, 所以$g'(2)=f(2)$.

Example

设$f(x)\in C[a,b]$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$, 求$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y$.

解： 交换积分顺序

$$I=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^y f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}2I&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\left[\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b f(y)\mathrm{d}y\right]f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A^2.\end{aligned}$$

所以 $I=\dfrac{A^2}{2}$.

Example

$$I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D:\ x=2, y=x, xy=1\text{围成区域}.$$

解: D为X区域, 在x轴的投影为$[1,2]$, 在此区间任取一点x, 作平行于y轴的直线与D相交的曲线为$y=\dfrac{1}{x}$与$y=x$.

$$I=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x})\mathrm{d}x=\int_1^2(-x+x^3)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$$

Example

$I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D:$由$y=x$和$x=y^2$围成的.

解: 从区域形状看, 既是X型区域又是Y型区域. 但函数$\frac{\sin y}{y}$的原函数无法用初等函数表示, 因此选用先x后y 的累次积分.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-y)\sin y\mathrm{d}y \\ &= (y-1)\cos y\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y\mathrm{d}y = 1-\sin 1. \end{aligned}$$

注记:

计算二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$时, 积分顺序的选择, 既取决于积分区域$D$的特点, 又取决于被积函数的特点.

- 若积分区域简单, 积分顺序的选择应保证先积的积分易求.
- 若被积函数简单, 积分顺序的选择应使得区域划分块最少.
- 一般的原则是在能计算出来的前提下, 使划分的区域块最少.

Example

计算$I=\iint_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$由直线$y=x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$所围成.

解: 被积函数带绝对值, 去掉绝对值就要对积分区域分块, 由函数特点, 直线$x+y=\frac{\pi}{2}$将区域分为两块, D_1和D_2.
$D_1=\{y\le x\le \frac{\pi}{2}-y, 0\le y\le \frac{\pi}{4}\}$ 为Y型区域;
$D_2=\{\frac{\pi}{2}-x\le y\le x, \frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2}\}$ 为X 型区域.

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\cos(x+y)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\Big|_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y}\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\Big|_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1.
\end{aligned}
$$

Example

计算$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\geq 2x\}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y, & 1\leq x\leq 2, 0\leq y\leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解: 由于$f(x,y)$的特殊性, 本题实质上是计算函数x^2y在区域D_1内的积分, D_1是由曲线$x^2+y^2=2x$, $x=2$, $y=x$所围区域(X 型区域).

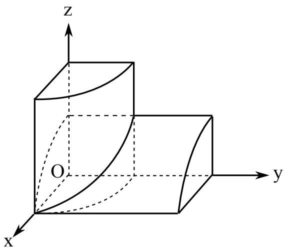
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} x^2y\mathrm{d}y=\int_1^2 \frac{1}{2}x^2(x^2-(2x-x^2))\mathrm{d}x=\frac{49}{20}.$$

Example

求由$x^2+y^2\le a^2$ 和$x^2+z^2\le a^2$ 相交部分的立体的体积V.

解: 这个立体在第一卦限那部分是一个曲顶柱体, 其顶为$z=\sqrt{a^2-x^2}$, 底是平面区域$x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0$. 由对称性可知

$$
\begin{aligned}
V &= 8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0, y\ge 0}} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y \\
&= 8\int_0^a (a^2-x^2)dx = \frac{16}{3}a^3.
\end{aligned}
$$



利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算二重积分

(1) 若D关于x轴对称, 则

$$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D\setminus D_1} f(x,-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ 因而}$$

$$\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y), \\ 2\displaystyle\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中$D_1 = D\cap\{(x,y)|y\geqslant 0\}$.

(2) 若D关于y轴对称,

则$$\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D\setminus D_2} f(-x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ 因而}$$

$$\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(-x,y) = -f(x,y), \\ 2\displaystyle\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中$D_2 = D\cap\{(x,y)|x\geqslant 0\}$;

(3) 若D关于原点对称,

则$\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D\setminus D_3} f(-x,-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 因而

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(-x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中D_3为D的右半平面或上半平面部分.

(4) 若D关于直线$y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如果$f(x,y)$关于x与y轮换对称, 即$f(x,y) = f(y,x)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_5} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中D_4和D_5分别为D在$y = x$的左上方与右下方部分.

Example

计算下列二重积分.

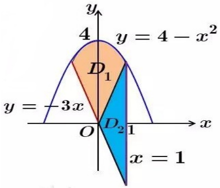
(1) $I=\iint\limits_D y\operatorname{sgn}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)||x|\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(2) $I=\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 1\}$, $f(x)$ 为正值连续函数, a,b 是常数.

(3) $I=\iint\limits_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$y=4-x^2$, $y=-3x$围成的$x\leq 1$的部分.

解: 令$f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$,

区域D如图所示, 直线$y=3x$将区域D分为两块, $D=D_1\cup D_2$.



D_1关于y轴对称, $f(-x,y)=-f(x,y)$.

D_2关于x轴对称, $f(x,-y)=-f(x,y)$.

所以

$$I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

注记: 利用对称性及潜在的对称性来计算重积分, 是重积分计算中的一个重要技巧.

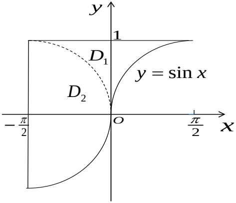
Example

计算$\iint_D x(1+ye^{x^4y^6})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由曲线$y=\sin x$，$x=-\frac{\pi}{2}$，及$y=1$围成的.

分析: 被积函数$xye^{x^4y^6}$不易积，积分区域也无对称性. 但被积函数$xye^{x^4y^6}$既是x的奇函数，又是y的奇函数. 因而需要添加曲线，使得区域分块，出现关于y轴对称，和关于x轴对称的部分.

解：用曲线$y=-\sin x$将区域D 分为D_1与D_2，如图所示，其中D_1关于y轴对称，D_2关于x轴对称.

$$\iint\limits_{D} xye^{x^4y^6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} xye^{x^4y^6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} xye^{x^4y^6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$



$$\iint\limits_{D} x(1+ye^{x^4y^6})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\sin x\mathrm{d}x=-2.$$

Example

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，平面积分区域$D=[a,b]^2$，试证明

(1) $\iint_D e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2$; (2) $\iint_D \frac{1+y^4f^2(x)}{1+x^4f^2(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2$.

证明: (1) 积分区域D 关于$y=x$对称，且$e^{f(x)}$与$e^{-f(y)}$为$[a,b]$上正值连续函数，则有

$$\begin{aligned}&\iint_D e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D e^{f(y)-f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{e^{f(x)}}{e^{f(y)}}+\frac{e^{f(y)}}{e^{f(x)}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2.\end{aligned}$$

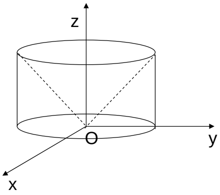
(2) 证法同上.

例： 计算积分$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{x^2+y^2\leq 1\}$.

解： 由于积分区域和被积函数关于x,y都是对称的, 因此采用任何一种积分次序, 计算方法将是同样的.

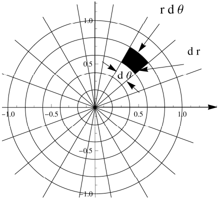
$$
\begin{aligned}
I &= 4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 (y\sqrt{x^2+y^2}+x^2\ln(y+\sqrt{x^2+y^2}))|_0^{1-x^2}\mathrm{d}x=\cdots,
\end{aligned}
$$

几何上, 积分表示的是圆柱体$x^2+y^2\leq 1$挖去锥体$z=\sqrt{x^2+y^2}$后所余立体的体积, 因此用几何的方法是很容易算出来.



$$V=\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi.$$

考虑利用极坐标的坐标曲线来分割积分区域



$$T_r:\ 0=r_0<r_1<\cdots<r_n=1$$
$$T_\theta:\ 0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_m=2\pi$$

这样每一个小块的面积为

$$\sigma(D_{ij})=\frac{1}{2}(r_i^2-r_{i-1}^2)\Delta\theta_j=\frac{r_i+r_{i-1}}{2}\Delta r_i\Delta\theta_j\approx r_i\Delta r_i\Delta\theta_j.$$

$$S(T)=\sum_{i,j=0}^{m,n}f(r_i\cos\theta_j,\ r_i\sin\theta_j)r_i\Delta r_i\Delta\theta_j,$$

令$|T_r|,|T_\theta|\to 0$ 时, 极限为下面二重积分($D'=[0,1]\times[0,2\pi]$)

$$\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot r\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi.$$

坐标变换

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

$$O'r\theta\text{平面上区域}D' \longmapsto Oxy\text{平面上区域}D$$

得到从**直角坐标**变换成**极坐标**的二重积分计算公式

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

面积元素变换关系

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

定积分换元法的唯一目的是把被积函数简化或易求出原函数.

二重积分换元法的目的是**简化被积函数**, **简化积分区域**.

目录

§10.2.1 一般坐标变换

设D 是Oxy 平面上的可测的有界区域, $f(x,y)$ 是定义在D 上的一个可积函数. D' 是$O'uv$ 平面上可测的有界区域.

$\Phi:\ D'\to D$为C^1的一一映射(坐标变换),

$$\Phi:\ x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ (u,v)\in D'$$

且满足$|J\Phi|\neq 0$, 即

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

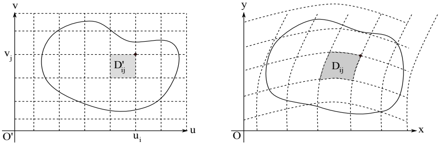
问题: 如何对一般坐标变换计算面积微元?

先将区域D' 进行矩形分割:

$$T': \ u_0 < u_1 < \cdots < u_n; \quad v_0 < v_1 < \cdots < v_m.$$

此时D' 被分成许多小区域, 其中典型的是矩形小区域:

$$D'_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j].$$

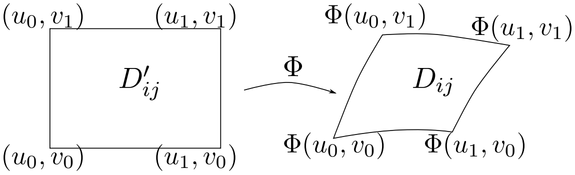


对于与$\partial(D')$ 相交非空的那些小区域当分割T' 加细时, 这些小区域的面积总和趋于零. 因此非矩形小区域可忽略不计.
在变换Φ 之下, 对应于

$$u = u_i \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad v = v_j \ (j = 1, 2 \cdots, m)$$

的坐标曲线形成Oxy 平面上的区域D 的一个分割T.

设D_{ij} 是D'_{ij} 在映射下的像. $\sigma(D_{ij})$ 是D_{ij} 的面积. 当分割的宽度充分小时, D_{ij} 近似于一个小平行四边形.



$$\sigma(D_{ij}) \approx \Big|\big(\Phi(u_1,v_0)-\Phi(u_0,v_0)\big)\times\big(\Phi(u_0,v_1)-\Phi(u_0,v_0)\big)\Big|.$$

映射Φ 是可微的, 所以有 $(h=u_1-u_0, k=v_1-v_0)$

$$\Phi(u_1,v_0)-\Phi(u_0,v_0)=\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u_0,v_0)h+o(h)$$
$$\Phi(u_0,v_1)-\Phi(u_0,v_0)=\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u_0,v_0)k+o(k)$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(D_{ij}) &\approx \left|\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u_0,v_0)\right| hk + o(hk) \\
&= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i,v_j)\right| \Delta u_i \Delta v_j + o(\Delta u_i \Delta v_j)
\end{aligned}
$$

在D'_{ij} 中取点(u_i,v_j), 此点被映成D_{ij} 中的点$P_{ij}=(\xi_{ij},\eta_{ij})$, 即

$$\xi_{ij}=x(u_i,v_j),\quad \eta_{ij}=y(u_i,v_j).$$

函数$f(x,y)$ 关于分割T 的$Riemann$ 和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(P_{ij})\sigma(D_{ij}) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\circ\Phi(u_i,v_j)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i,v_j)\right|\Delta u_i\Delta v_j.$$

当$|T'|\to 0$ 时, 有$|T|\to 0$, 由上式可得如下定理.

Theorem

设D 是Oxy平面上可测的有界闭区域, D'是$O'uv$平面上可测的有界闭区域, 变换$\Phi:\ D' \longmapsto D$

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \quad (u,v) \in D'$$

为C^1的一一映射并满足$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0$. 若$f(x,y)$ 在D 上可积, 则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

这就是二重积分的换元公式. 变换前后面积微元之间的关系

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

§10.2.2 极坐标变换

极坐标变换

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

面积元素之间关系: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

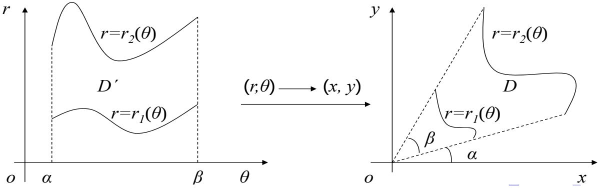
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

§10.2.2 极坐标变换

(1) 设区域D是由极坐标曲线$\theta=\alpha$, $\theta=\beta$, $r=r_1(\theta)$ 和$r=r_2(\theta)$ $(r_2(\theta)\geq r_1(\theta))$ 围成的, 则D' 就是$O'r\theta$ 平面上的区域$D'=\{(r,\theta)|\alpha\leq\theta\leq\beta,\ r_1(\theta)\leq r\leq r_2(\theta)\}$ 于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$



§10.2.2 极坐标变换

(2) 设区域D是由极坐标曲线$r=a$, $r=b$, $\theta=\theta_1(r)$ 和$\theta=\theta_2(r)$ $(\theta_2(r)\geq\theta_1(r))$ 围成的，则D' 就是$O'r\theta$ 平面上的区域$D'=\{(r,\theta)|a\leq r\leq b,\ \theta_1(r)\leq\theta\leq\theta_2(r)\}$ 于是

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta.$$

注记： 积分区域或被积函数有以下特点，一般考虑用极坐标变换.

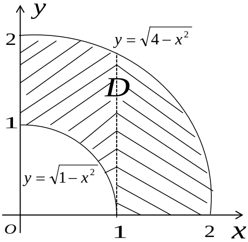
(1) 积分区域为圆域、环形域、扇形、扇形环域或者它们的部分

(2) 被积函数形如$x^ny^mf(x^2+y^2)$等形式时

Example

计算累次积分.

$$\left(\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}}\right)(5-x^2-y^2)^\alpha \mathrm{d}y \quad (\alpha \neq -1).$$



解: 积分区域如图所示, 实质是函数$(5-x^2-y^2)^\alpha$在D上的二重积分, 由被积函数和区域特点, 选用极坐标变换. 区域D在极坐标变换下对应区域

$$D'=\{(r,\theta)|1\leqslant r\leqslant 2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\},$$

故

$$\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\right)(5-x^2-y^2)^\alpha \mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D (5-x^2-y^2)^\alpha \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2(5-r^2)^\alpha r\mathrm{d}r$$

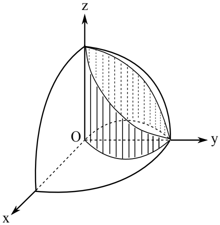
$$=-\frac{1}{2(\alpha+1)}(5-r^2)^{\alpha+1}\Big|_1^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4(\alpha+1)}(4^{\alpha+1}-1).$$

Example

求球体$x^2+y^2+z^2\le a^2$ 被圆柱面$x^2+y^2=ay$ 所截下的Viviani体的体积V.

解： 由对称性可知

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$



$D:\ x^2+y^2\le ay, x\ge 0.$ 极坐标形式为

$$D':\quad 0\le r\le a\sin\theta,\qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right)a^3.$$

Example

计算积分 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D:\ x^2+y^2\le R^2$.

解: 作极坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$,
$(r,\theta)\in D':\ 0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi$. 得

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi(1-e^{-R^2}).$$

利用这个结果可以求出一个重要的广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$

$$\left(\int_{-R}^R e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\int_{-R}^R e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-R}^R e^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{-R\le x\le R\\ -R\le y\le R}} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由$e^{-x^2-y^2}>0$ 及积分区域的包含关系可知

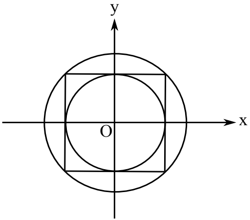
$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 2R^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由此例可得到不等式

$$\pi(1-e^{-R^2}) \le \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \le \pi\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

令$R\to+\infty$, 即得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi},$$



或

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这个积分叫**概率积分**.

Example

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \text{其中} D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

解： 记$D_1=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$，由轮换对称性，得

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=2\iint_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

作极坐标变换，区域D_1的边界线$x=1$的极坐标方程为

$$r=\frac{1}{\cos\theta}\qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}-2\arcsin\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}.$$

Example

$$\iint_D |3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad 其中 D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$$

解：在极坐标变换下，$D'=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，从而

$$\iint_D |3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}|3\cos\theta+4\sin\theta|\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$$

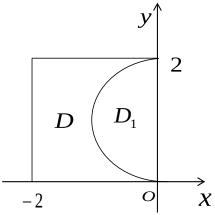
$$=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\left|\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right|\mathrm{d}\theta \xlongequal{\sin\alpha=\frac{3}{5}} \frac{5}{3}\int_0^{2\pi}|\sin(\theta+\alpha)|\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{5}{3}\int_\alpha^{2\pi+\alpha}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{10}{3}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{20}{3}.$$

注记: 试试正交变换 $x=\frac{3}{5}u-\frac{4}{5}v,\ y=\frac{4}{5}u+\frac{3}{5}v.$

Example

$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由曲线$x=-2$, $y=0$, $y=2$ 及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$围成的



1. 可直接化为先x后y的累次积分.
2. 积分区域D和D_1上的积分值相减.
3. 区域D 关于y=1对称, 用平移变换.

Example

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ 其中 } D: \ x^2+4y^2 \leqslant 2x.$$

解: 采用坐标变换$x = r\cos\theta,\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta$, 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{1}{2}\sin\theta \\ -r\sin\theta & \frac{1}{2}r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}r,$$

方程$x^2+4y^2=2x$化为$r=2\cos\theta$, 变换后的区域
$D' = \{0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} \sqrt{4-r^2}\frac{1}{2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}r\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8-8\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}.$$

注记: 当积分区域为椭圆域、椭圆环形域或者它们的一部分; 或被积函数形如$x^n y^m f(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$时, 一般考虑用坐标变换

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr.$$

Example

$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D : $x^4+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

解法1: 令$x^2=u,\ y^2=v,\ D'=\{u^2+v\leq 1, u\geq 0, v\geq 0\}$,

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\iint_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u^2}\mathrm{d}v=\frac{1}{6}.$$

解法2: 令$x^2=u,\ y=v,\ D'=\{u^2+v^2\leq 1, u\geq 0, v\geq 0\}$, 再用极坐标变换

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D'}v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}r\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\mathrm{d}=\frac{1}{6}.$$

解法3: 由方程$x^4+y^2=1$及积分区域的特点, 作变量代换 $x^2=r\cos\theta$, 或$x=\sqrt{r\cos\theta}$, $y=r\sin\theta$, 变换后的区域 $D'=\{0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{\cos\theta} & \sin\theta\\ \frac{-\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}\sqrt{r} & r\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{\cos\theta}},$$

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D'}\sqrt{r\cos\theta}\cdot r\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{r}}{2\sqrt{\cos\theta}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

广义极坐标变换

注记： 当$\alpha > 0$, $\beta > 0$时，曲线$|x|^\alpha + |y|^\beta = 1$所围区域是关于$x$轴及$y$轴对称的区域. 第一象限部分可作以下变量代换:

$$x = (r\cos\theta)^{\frac{2}{\alpha}},\ y = (r\sin\theta)^{\frac{2}{\beta}},$$

而第一象限部分D_1变为

$$D_1' :\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

如星形线$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$所围区域可利用这一变量代换法.

Example

$$\iint_D \frac{|xy|(x^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\text{ 其中}D:\ x^4+y^4\leqslant a^2$$

解： 因积分区域关于$y=x$对称，故

$$\iint_D \frac{|xy|(x^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{|xy|(x^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}+\frac{|xy|(y^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

D_1为区域D的第一象限部分. 令$x^2=u,\ y^2=v$, 区域D_1化为
$D_1'=\{u^2+v^2\leq a^2, u\geq 0, v\geq 0\}$,

$$\iint_D \frac{|xy|(x^{\frac{2}{7}}+1)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D_1'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}a^2.$$

Example

$\iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D:\ y^2=px, y^2=qx, x^2=ay, x^2=by$围成, $q>p>0$, $b>a>0$

解: 作变量代换$y^2=ux, x^2=vy$, 即$x=(uv^2)^{\frac{1}{3}}$, $y=(u^2v)^{\frac{1}{3}}$,

$D':\ p\leqslant u\leqslant q, a\leqslant v\leqslant b$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3},$$

$$\iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{1}{3uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_p^q\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_a^b\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{1}{3}\ln\frac{b}{a}\ln\frac{q}{p}.$$

Example

$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$： $x+y=1$与两坐标轴围成.

解: 令$x-y=u$, $x+y=v$, 则$x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(v-u)$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

变换后的区域为 $D':-v\leqslant u\leqslant v,\ 0\leqslant v\leqslant 1.$

故

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D'}e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}(e-\frac{1}{e}).$$

Example

已知函数$f(x,y)\in C^2$, 且$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$,
$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = A$, $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$,
计算二重积分$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

解: 因为$f(x,1)=0$, 则$f'_x(x,1)=0$. 利用两次分部积分得

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \left[xf(x,y)\big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = A.
\end{aligned}$$

Example

设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数. 若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$ 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明: $I\le\dfrac{A}{4}$.

Example

函数$f(x,y)$在$D=[0,1]\times[0,1]$上可微，且$f(0,0)=0$，

求 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}}$.

解: 将分子交换积分顺序

$$\int_0^{x^2} \mathrm{d}t \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u = -\int_0^x \mathrm{d}u \int_0^{u^2} f(t,u)\mathrm{d}t$$

分母$1-e^{-x^4} \sim x^4$, $(x \to 0)$, 由洛必达法则, 积分中值定理及泰勒展开

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \mathrm{d}t \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1-e^{-x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\int_0^x \mathrm{d}u \int_0^{u^2} f(t,u)\mathrm{d}t}{x^4} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t,x)\mathrm{d}t}{4x^3} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 f(\xi,x)}{4x^3} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{f_x'(0,0)\xi + f_y'(0,0)x + o(\sqrt{\xi^2+x^2})}{4x} = -\frac{1}{4} f_y'(0,0).
\end{aligned}$$

由于$0 \le \xi \le x^2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\xi}{x} = 0$.

目录

引例: 非均匀物体的质量

设$\mathbb{R}^3$空间中的一个有界几何体V的密度函数为$\rho(x,y,z)$, 计算该物体的总质量.

作法: 将几何体V**分割**成若干个互不重叠的小几何体V_1, $V_2,\cdots,V_n$, 它们的体积分别为$\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$, 在$V_i$内任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, 于是$\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$就是$V_i$的**近似**质量, 那么

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

就是物体的近似质量. V分的越密, 越接近于真正的质量. 当分割的最大直径趋于零时, 上面和式的**极限**, 就是物体的总质量.

§10.3.1 三重积分的定义

设$f(x,y,z)$是定义在空间有界集V上的函数，将V**分割**成一些互不重叠的**有体积的**小几何体$V_1, V_2, \cdots, V_n$，它们的体积分别为$\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$，在$V_i$内任取一点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，作Riemann和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$$

当分割的最大直径趋于0时，此和式极限存在，则称$f(x,y,z)$在V上可积，极限称为$f(x,y,z)$在V上的三重积分，记为

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \quad 或 \quad \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 或 \quad \int_V f\mathrm{d}V.$$

注记:

1. 如果有界集V上的常值函数$f(x,y,z)\equiv 1$在V上可积, 则称V是有体积的, 积分$\displaystyle\int_V \mathrm{d}V$就称为$V$的体积.
2. 若V是由有限张光滑曲面围成的有界区域, 则V是有体积的. 今后, 不做特殊说明, 我们总是假设三重积分的积分域是由有限张光滑曲面围成的有界区域.

三重积分具有和二重积分一样的性质. 重点是三重积分的计算.

定理: 设V是$\mathbf{R}^3$中由有限张光滑曲面围成的有界区域, $f(x,y,z)$是V上的函数.

(1) 若$f(x,y,z)$在V 上可积, 则$f(x,y,z)$在V 上有界. (反之不真)

(2) $f(x,y,z)$ 在V上可积$\Longleftrightarrow \lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta(V_i)=0.$

(3) 若$f(x,y,z)$在V 上连续, 则$f(x,y,z)$在V 上可积.

(4) 若函数$f(x,y,z)$ 在V上有界, 且$f(x,y,z)$ 的不连续点分布在有限张光滑曲面上, 则$f(x,y,z)$ 在V 上可积.

三重积分的性质:

线性性; 乘积可积性; 保序性; 绝对可积性;

积分区域可加性; 积分中值定理

§10.3.2 三重积分的累次积分

- **三维闭区间上的三重积分:**

  设$V=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的三维闭区间, $f(x,y,z)\in C(V)$. 分别作$I_i=[a_i,b_i]$ $(i=1,2,3)$ 上的分割:

$$\begin{aligned}
T_x:&\ a_1=x_0<x_1<\cdots<x_n=b_1;\\
T_y:&\ a_2=y_0<y_1<\cdots<y_m=b_2;\\
T_z:&\ a_3=z_0<z_1<\cdots<z_l=b_3.
\end{aligned}$$

  任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\eta_j\in[y_{j-1},y_j],\zeta_k\in[z_{k-1},z_k]$,Riemann和

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k,$$

  一方面, 上述Riemann和可以表示成

§10.3.2 三重积分的累次积分

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{l}f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta z_k\right]\Delta x_i\Delta y_j,$$

当分割T_z的最大直径趋于零时，上式括号内的和式趋于积分

$$\int_{a_3}^{b_3}f(\xi_i,\eta_j,z)\mathrm{d}z=\varphi(\xi_i,\eta_j).$$

则对应I_1和I_2分割的求和近似一个二重积分的Riemann和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{a_3}^{b_3}f(\xi_i,\eta_j,z)\mathrm{d}z\right]\Delta x_i\Delta y_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

则当分割T_x, T_y的最大直径趋于零时,得到先z后xy的累次积分，继续对二重积分实施累次积分，得三个累次积分.

§10.3.2 三重积分的累次积分

另一方面，*Riemann*和表示成

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta y_j\Delta z_k\right]\Delta x_i,$$

括号内的和式是二元函数的Riemann和，则当分割T_y，T_z的最大直径趋于零时，和式极限为二重积分

$$\iint_{I_2\times I_3}f(\xi_i,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\varphi(\xi_i).$$

这样整个和式为关于x的函数的Riemann和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i$，当分割$T_x$的最大直径趋于零时，得到先$yz$后$x$的累次积分，继续对二重积分实施累次积分，得三个累次积分.

§10.3.2 三重积分的累次积分

- **三维闭区间上的三重积分:**

定理: 设$f(x,y,z)$在三维区间$V=I_1\times I_2\times I_3$上连续, 则有

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{I_1\times I_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{I_3}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{I_1}\mathrm{d}x\int_{I_2}\mathrm{d}y\int_{I_3}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{I_1}\mathrm{d}x\iint_{I_2\times I_3}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Example

求 $\iiint_V x^2ye^{xyz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V=[0,1]^3$.

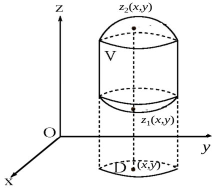
$$\begin{aligned}\iiint_V x^2ye^{xyz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{[0,1]^2} x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^1 e^{xyz}\mathrm{d}z\\ &= \iint_{[0,1]^2} x(e^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 e^{xy}\mathrm{d}y-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 (e^x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

§10.3.2 三重积分的累次积分

- **有界区域上的三重积分:**
  设V为$\mathbb{R}^3$中有界闭域, $f(x,y,z)$是V上的连续函数.

  (1) 先一后二的累次积分法 (投影法)
  设V是由曲面$z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$, $(z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$, $(x,y)\in D)$, 和以边界∂D为准线并平行于z轴的柱面围成的, V在Oxy平面上的投影为平面区域D, 则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$



§10.3.2 三重积分的累次积分

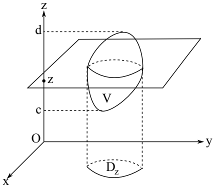
- **有界区域上的三重积分:**

设V为$\mathbb{R}^3$中有界闭域, $f(x,y,z)$是V上的连续函数.

(2) 先二后一的累次积分法 (截面法)

设V在z轴上的投影为区间I, 过I上一点$(0,0,z)$与z 轴垂直的平面和V相交的平面图形在Oxy平面上的投影为区域D_z, 则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_I \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



注记: 对一般区域V, 可以作一些辅助曲面把V分成有限个可用(1)(2)作累次积分的闭子区域, 利用积分区域的可加性分别积分再求和.

Example

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{\cos z}{(2z-1)^2} \mathrm{d}z.$$

解法1: 先交换y与z 的次序, 确定积分区域D_{yz}

$$D_{yz} = \{(y,z)|0 \leqslant z \leqslant \frac{1-x}{2},\ 2z \leqslant y \leqslant 1-x\},$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{\cos z}{(2z-1)^2} \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{\cos z}{(2z-1)^2} \mathrm{d}z \int_{2z}^{1-x} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{\cos z(1-x-2z)}{(2z-1)^2} \mathrm{d}z$$

$$D_{zx} = \{(z,x)|0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1-2z\},$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos z}{(2z-1)^2} \mathrm{d}z \int_0^{1-2z} (1-x-2z) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos z \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}.$$

解法2: 被积函数仅依赖于z, 所以可先在平行于Oxy平面的截面上积分, 即采取先xy后z的累次积分法.

$$D_z=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1-y,\ 2z\leqslant y\leqslant 1\}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y}{2}}\frac{\cos z}{(2z-1)^2}\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\frac{\cos z}{(2z-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos z}{(2z-1)^2}\mathrm{d}z\int_{2z}^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos z}{(2z-1)^2}\cdot\frac{1}{2}(1-2z)^2\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Example

$\iiint\limits_V \frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}V$, 其中$V$是由$y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$所围成的区域.

解法1: 被积函数可以先积y或z, 确定截面D_x, 所以可以选用先yz后x的截面法. $D_x=\{(y,z)|0\le y\le\sqrt{x}, 0\le z\le\frac{\pi}{2}-x\}$

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \iint_{D_x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

解法2: $D_{xy}=\{\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\}$

$$\iiint_V\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}V=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

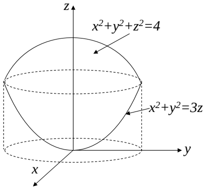
解法3: $D_{zx}=\{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}-z\ ,\ 0\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

$$\iiint_V\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}V=\iint_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}-z}\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Example

$$I=\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ \sqrt{4-x^2-y^2}=z, x^2+y^2=3z\text{围成的}.$$

解法1: 由曲面方程的特点，用先z后xy的累次积分，交面$z^2+3z-4=0 \Rightarrow z=1$，在$XOY$平面的投影区域$D:\ x^2+y^2\leqslant 3$.



$$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(4-x^2-y^2-\frac{(x^2+y^2)^2}{9})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}(4-r^2-\frac{r^4}{9})r\mathrm{d}r=\frac{13}{4}\pi.$$

解法2: 被积函数只依赖于z, V 在xOy平面的投影为圆域, 交面$z=1$, 上半部分V_1: $\sqrt{4-x^2-y^2}\geqslant z\geqslant 1$, 下半部分$\frac{x^2+y^2}{3}\leqslant z\leqslant 1$, 所以

$$I=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

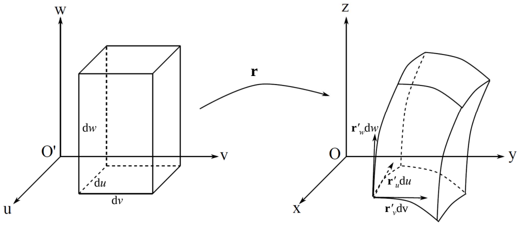
$$=\int_0^1 3\pi z^2\mathrm{d}z+\int_1^2\pi z(4-z^2)\mathrm{d}z=\frac{13}{4}\pi.$$

§10.3.3 三重积分的换元

- **一般变量代换:**
  设变换

$$\mathbf{r}:\ x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$$

将$O'uvw$空间中的有界闭区域V'一一地映为$Oxyz$空间中的有界闭区域V，且$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$.



§10.3.3 三重积分的换元

- **一般变量代换:**

  分割后的曲六面体的体积近似等于三条棱向量的混合积，于是得到体积微元等式

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |(\mathbf{r}'_u\mathrm{d}u \times \mathbf{r}'_v\mathrm{d}v) \cdot \mathbf{r}'_w\mathrm{d}w| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

  若$f(x,y,z)$在V上可积，则有三重积分的换元公式

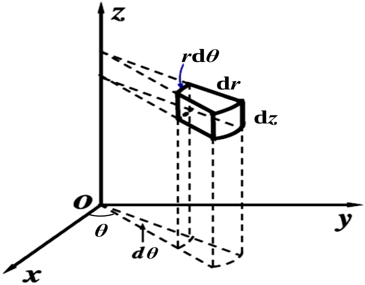
$$\begin{aligned}&\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

§10.3.3 三重积分的换元

- **柱坐标变换:**

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$



柱坐标系的体积微元

§10.3.3. 三重积分的换元

- **柱坐标变换:**

  三重积分柱坐标变换公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

  注记: 积分区域或被积函数有以下特点, 可考虑柱坐标变换.

  (1) 积分区域为旋转体, 如柱体、锥体、旋转抛物体等

  (2) 被积函数形如$x^n y^m z^k f(x^2+y^2)$等形式时

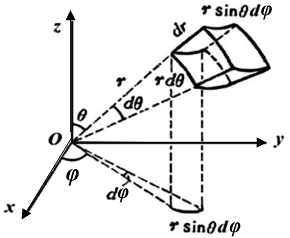
注记: 以x轴或y轴为中心轴的柱坐标变换类似.

§10.3.3 三重积分的换元

- **球坐标变换:**

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta > 0,$$



球坐标系的体积微元

§10.3.3 三重积分的换元

- **球坐标变换:**

三重积分球坐标变换公式

$$\begin{aligned}&\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&\iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

注记: 积分区域或被积函数有以下特点, 可考虑球坐标变换.

(1) 积分区域为球体、锥体或者它们的一部分时

(2) 被积函数形如$x^ny^mz^kf(x^2+y^2+z^2)$等形式时

§10.3.3 三重积分的换元

- **椭球坐标变换:**

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = br\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = cr\cos\theta.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\varphi)} = abcr^2\sin\theta > 0,$$

三重积分椭球坐标变换公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{V'} f(ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)abcr^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

注记: 当积分区域为椭球体、锥体或者它们的一部分,或被积函数形如$x^n y^m z^k f(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})$时,一般考虑用椭球坐标变换.

Example

计算$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}z.$

解: 积分区域为球形区域的一部分. 用球坐标变换, 边界曲面$z = 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}$和$z = 1$的方程为$r = 2\cos\theta$, $r = \frac{1}{\cos\theta}$, 交线满足$\theta = \frac{\pi}{4}$. 积分区域为

$$V': \frac{1}{\cos\theta} \le r \le 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi \le \pi$$

$$I = \iiint_{V'} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} r \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta (4\cos^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}(7 - 4\sqrt{2}).$$

Example

$$\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le 1.$$

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算三重积分

(1) 若V关于Oxy平面对称，则

$$\iiint_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V\setminus V_1} f(x,y,-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

当$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$时，

$$\iiint_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

当$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$时，

$$\iiint_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$V_1=V\cap\{(x,y,z)|z\geqslant 0\}$.

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算三重积分

(2) 若V关于Oyz平面对称, 则

$$\iiint_{V_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V\setminus V_2} f(-x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

当$f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$时,

$$\iiint_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

当$f(-x,y,z)=f(x,y,z)$时,

$$\iiint_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{V_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中$V_2 = V\cap\{(x,y,z)|x\geqslant 0\}$.

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算三重积分

(3) 若V关于Ozx平面对称,

则$\iiint_{V_3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V\setminus V_3} f(x,-y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

当$f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$时,

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

当$f(x,-y,z) = f(x,y,z)$时,

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{V_3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中$V_3 = V \cap \{(x,y,z)|y \geqslant 0\}$.

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算三重积分

(4) 若V关于原点$O(0,0,0)$中心对称, 则

$$\iiint_{V'} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V\setminus V'} f(-x,-y,-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

当$f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$时,

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

当$f(-x,-y,-z) = f(x,y,z)$时,

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{V'} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中V'为V_1, V_2或V_3.

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算三重积分

(5) **轮换对称性:** 当描述积分区域的方程或不等式轮换x, y, z变量时，方程与不等式的描述形式不发生变化，
如$x^2+y^2+z^2 \leq R^2$的球域，则在这样区域上的三重积分满足轮换对称性，即

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_V f(y,z,x)\mathrm{d}V=\iiint\limits_V f(z,x,y)\mathrm{d}V$$

同样，如果积分区域关于平面$x=y$对称，则对于x, y变量具有轮换对称性，即

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V f(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

积分区域关于平面$y=z$，或$z=x$对称有类似的轮换对称性.

Example

$$\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V: x^2+y^2+z^2\le 1.$$

解: 积分区域关于三个坐标平面都对称, 被积函数关于z是奇函数, 所以

$$\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Example

$\iiint_V (2x^2+3y^2+5z^2-2y+10z^3+x^4)\mathrm{d}V$, 其中区域
$V:\ x^2+y^2+z^2\leq 1, x\geq 0.$

解： 积分区域关于坐标面Oxy, Ozx对称, 则有

$$\iiint_V (10z^3-2y)\mathrm{d}V=0.$$

考虑在V'： $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 上, 区域关于x,y,z轮换对称

$$\iiint_{V'} x^2\mathrm{d}V=\iiint_{V'} y^2\mathrm{d}V=\iiint_{V'} z^2\mathrm{d}V,$$

$$\iiint_V x^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_{V'} x^2\mathrm{d}V$$

$$\iiint_V (2x^2+3y^2+5z^2)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_{V'}(2x^2+3y^2+5z^2)\mathrm{d}V$$
$$= \frac{5}{3}\iiint_{V'}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$
$$= \frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\sin\theta\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi.$$

$$\iiint_V x^4\mathrm{d}V = \int_0^1 x^4 \iint\limits_{y^2+z^2\le 1-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_0^1 x^4(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{35}.$$

$$\iiint_V (2x^2+3y^2+5z^2-2y+10z^3+x^4)\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi+\frac{2\pi}{35} = \frac{146}{105}\pi.$$

Example

$\iiint_V \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}V$, 其中$V$是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$与锥面 $z=2\sqrt{x^2+y^2}-1$ 所围成的区域(包含z 轴的部分).

(1) 被积函数要先对z 积, 积分区域V是上顶为球面,下底为锥面围成的柱体, 在Oxy平面投影为圆域, 可用先z后xy的**投影法**.

(2) 积分区域V与z轴垂直的截面为圆域,可用先xy后z的**截面法**.

(3) 观察被积函数及积分区域的特点, 积分可以用**柱坐标变换**.

Example

$\iiint_V (x^3+y^3+z+x^2)\mathrm{d}V$, 其中$V$是由半球面$x^2+y^2+z^2=2z\ (z\geqslant 1)$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域.

由区域的对称性和被积函数的奇偶性得

$$\iiint_V x^3\mathrm{d}V=0,\qquad \iiint_V y^3\mathrm{d}V=0.$$

由积分区域关于变量x和y的轮换对称性,则

$$\iiint_V x^2\mathrm{d}V=\iiint_V y^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V$$

(1) 由曲面方程特点, 选用**球坐标变换**.

(2) 积分区域是上顶为球面,下底为锥面围成的柱体, 可用先z后xy的**投影法**.

(3) 积分区域与z轴垂直的截面为圆盘, 可用先xy后z的**截面法**.

Example

$\iiint_V (x^3+y^5+z)\mathrm{d}V$, 其中$V$是由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$与平面$z=0$所围成的上半部分$(a,b,c>0)$.

由区域的对称性和被积函数的奇偶性得

$$\iiint_V x^3\mathrm{d}V=0,\qquad \iiint_V y^5\mathrm{d}V=0.$$

(1) 由曲面方程特点, 选用**椭球坐标变换**.
$x=ar\sin\theta\cos\varphi,\ y=br\sin\theta\sin\varphi,\ z=cr\cos\theta.$

(2) 积分区域是上顶为椭球面,下底为平面围成的柱体, 可用先z后xy的**投影法**.

(3) 积分区域与z轴垂直的截面为椭圆面, 可用先xy后z的**截面法**.

Example

$\iiint_\Omega y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由$x^2+y^2+(z-2)^2 \geq 4$, $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 9$, $z \geq 0$围成.

Example

$\iiint_\Omega (x+y-z)(y-x+z)(x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$由$0 \leq x+y-z \leq 1$, $0 \leq y-x+z \leq 1$，$0 \leq x-y+z \leq 1$ 围成.

Example

$\iiint_\Omega \frac{x^2y^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$由$z=\frac{x^2+y^2}{a}$, $z=\frac{x^2+y^2}{b}$， $xy=c$, $xy=d$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ 围成, 其中$0<a<b$, $0<c<d$, $0<\alpha<\beta$.

解： 区域在第一,三卦限, 由对称性, 只需计算第一卦限部分的2倍. 在第一卦限内作变换: $u=\frac{x^2+y^2}{z}$, $v=xy$, $w=\frac{y}{x}$, 则

$$x=\sqrt{\frac{v}{w}},\ y=\sqrt{wv},\ z=\frac{1}{u}(\frac{v}{w}+wv), u\in[a,b], v\in[c,d], w\in[\alpha,\beta]$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\frac{1}{2u^2}\frac{v(1+w^2)}{w^2}$$

$$\iiint_\Omega \frac{x^2y^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_a^b \mathrm{d}u\int_c^d \mathrm{d}v\int_\alpha^\beta \frac{vuw}{1+w^2}\frac{1}{2u^2}\frac{v(1+w^2)}{w^2}\mathrm{d}w$$

$$=\int_a^b \frac{1}{u}\mathrm{d}u\int_c^d v^2\mathrm{d}v\int_\alpha^\beta \frac{1}{w}\mathrm{d}w=\frac{1}{3}(d^3-c^3)\ln\frac{\beta}{\alpha}\ln\frac{b}{a}$$

Example

求曲面$(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$ 所围成的立体体积.

解：所围体V在1,3,6,8卦限. 由轮换对称性所求的体积是它在第一卦限内之立体V_1 的四倍, 用球坐标变换, 曲面的方程化成$r=\sqrt[3]{3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}$. 坐标在$V_1$ 中的变化范围是

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le\sqrt[3]{3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}.$$

于是求得立体的体积为

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[3]{3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}}r^2\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}.$$

Example

求由$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$ 所围立体的体积ΔV.

解: 由对称性只需求第一卦限部分V_1体积的8倍. 在第一卦限作变换$x=au$, $y=bv$, $z=c\sqrt{w}$, 它将空间$O'uvw$的

$$V_1':\ u^2+v^2+w^2\le 1,\ u,v,w\ge 0$$

变到空间$Oxyz$中所给的立体V_1. 其雅可比行列式$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{abc}{2\sqrt{w}}$.

$$\therefore\quad \Delta V=8\iiint\limits_{V_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4abc\iiint\limits_{V_1'}\frac{1}{\sqrt{w}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

再由球坐标变换, 得

$$\Delta V=4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{r\cos\theta}}r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{8}{5}\pi abc.$$

Example

求连续函数$f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$在区域$V$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$$

上的平均值.

解: 由中值定理(或积分平均值定理),

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}v=f(\xi,\eta,\zeta)\Delta V\Longrightarrow f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}v}{\Delta V}.$$

区域V又可写为

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{c}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4},$$

可作如下变量代换

$$x=\frac{a}{2}+ar\sin\theta\cos\varphi,\ y=\frac{b}{2}+br\sin\theta\sin\varphi,\ z=\frac{c}{2}+cr\cos\theta,$$

使区域V化为区域V'：$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=abcr^2\sin\theta>0,$$

$$\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V$$
$$=\iiint\limits_{V'}\left(\frac{3}{4}+r^2+r\sin\theta\cos\varphi+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta\right)abcr^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}+r^2\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi abc.$$

$$\Delta V = \iiint_V 1\mathrm{d}V = \iiint_{V'} abcr^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

$$= abc \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi abc.$$

则$f(x,y,z)$在V上的平均值$\overline{f}$为

$$\overline{f} = \frac{\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V}{\iiint_V 1\mathrm{d}V} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi abc}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi abc} = \frac{6}{5}.$$

Example

设$f(x)$连续且恒大于0,

$$F(t)=\frac{\displaystyle\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\displaystyle\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},$$

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$,
$D(t)=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant t^2\}$, 证明$F(t)$在$(0,+\infty)$内严格递增.

证明: 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t}f(r^2)r^2\sin\theta\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t}f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^{t}f(r^2)r\mathrm{d}r},$$

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left(\int_0^{t}f(r^2)r\mathrm{d}r\right)^2},$$

又$f(x)$连续且恒大于0, 且当$0<r<t$时, $r(t-r)>0$, 所以在$(0,+\infty)$内$F'(t)>0$, 故$F(t)$ 在$(0,+\infty)$内严格递增.

Example

设函数$f(x) \in C[0,1]$, 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3.$$

一般地, $f(x) \in C[a,b]$, 证明

$$\int_a^b f(x_1)\mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} f(x_2)\mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n!}\left[\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right]^n.$$

证明: 令$F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$, 则$F'(u)=f(u)$, $F(0)=0$.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z\\
=&\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)[F(1)-F(y)]\mathrm{d}y\\
=&-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 [F(1)-F(y)]'[F(1)-F(y)]\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]^2\mathrm{d}x\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^1 [F(1)-F(x)]'[F(1)-F(x)]^2\mathrm{d}x\\
=&-\frac{1}{6}[F(1)-F(x)]^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}F^3(1)=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3.
\end{aligned}
$$

Example

设$f(x)$连续, a, b, c为不全为零的常数, $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 证明

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\mathrm{d}u.$$

思考题:计算 $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

证明: 作正交变换

$$\begin{cases} u = \frac{a}{k}x + \frac{b}{k}y + \frac{c}{k}z, \\ v = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y, \\ w = \frac{ac}{k\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{bc}{k\sqrt{a^2+b^2}}y - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{k}z \end{cases}$$

显然$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$, $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1$, 所以有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax + by + cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1} f(ku)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= \int_{-1}^{1} f(ku)\mathrm{d}u \iint_{v^2+w^2\le 1-u^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi \int_{-1}^{1} (1 - u^2)f(ku)\mathrm{d}u.$$

注： 正交变换是保长、保距、保角，保持图形形状和大小不变的几何变换。旋转、平移、轴对称及它们的复合都是正交变换。

Example

设$f(x)$连续，a,b为不全为零的常数，$k=\sqrt{a^2+b^2}$. 证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(kt+c)\mathrm{d}t.$$

思考题:计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|3x+4y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

目录

§10.4.1 n重积分的累次积分

- **n维方体上的累次积分:**

设$f(x_1,\cdots,x_n)$ 为n 维闭区间或n 维方体$I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\subset\mathbb{R}^n$, $I_i=[a_i,b_i]$ 上连续函数, 它的积分可以化为累次积分

$$\int\cdots\int_I f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

等式右边的积分的顺序可以是任意的.

§10.4.1 n重积分的累次积分

- n维有界闭域上的累次积分:

设$V \subset \mathbb{R}^n$ 是有体积的有界闭集, $f(\mathbf{x})$ 是V 上连续函数. 对于V 中的点$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

(1) 先一后$n-1$的累次积分法

如果当$(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 时, 有

$$\varphi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) \le x_n \le \varphi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}),$$

其中φ_1, φ_2 是D 上的连续函数, 则有

$$\int_V f \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int \cdots \int_D \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \int_{\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mathrm{d}x_n.$$

§10.4.1 n重积分的累次积分

- n维有界闭域上的累次积分:

设$V\subset\mathbb{R}^n$ 是有体积的有界闭集, $f(\mathbf{x})$ 是V 上连续函数. 对于V 中的点$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$

(2) 先$n-1$后一的累次积分法

如果当$x_n\in[a,b]$ 时, 有$(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D_{x_n}\subset\mathbb{R}^{n-1}$, 则有

$$\int_V f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{D_{x_n}}f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

注记: 当然还有更多的累次积分计算方法. 总之, n重积分化为逐次计算若干重数较低但和为n的积分.

10.4.2 n重积分的换元

设V和V'是$\mathbb{R}^n$中有体积的有界区域，映射$\Phi: V' \to V$

$$\Phi: \ x_i = x_i(u_1, u_2, \cdots, u_n), \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$\Phi \in C^1(V')$，且$\dfrac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_n)} \neq 0$，那么对于定义在$V$上的连续函数$f(\mathbf{x})$，有$n$**重积分的换元公式**

$$\int \cdots \int_V f(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int \cdots \int_{V'} f \circ \Phi(u_1, \cdots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_n)} \right| \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n.$$

n 维单形

n 维单形是空间$\mathbb{R}^n$ 中这样的点集

$$S_n(a)=\{(x_1,\cdots,x_n):\ x_1,\cdots,x_n\geq 0;\ x_1+\cdots+x_n\leq a\}$$

- 当$n=1$ 时, $S_1(a)$ 就是闭区间$[0,a]$;
- 当$n=2$ 时, $S_2(a)$ 就是Oxy 平面上以$(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$ 为顶点的三角形.
- 当$n=3$ 时, $S_3(a)$ 就是位于第一象限并以$(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$ 为顶点的四面体.

Example

计算n 维单形$S_n(a)$的体积$\sigma(S_n(a))$, 即计算

$$\sigma(S_n(a)) = \int_{S_n(a)} \mathrm{d}\sigma$$

解: 作径向伸缩变换

$$x_i = at_i,\ i = 1, \cdots, n, \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, \cdots, t_n)} = a^n,$$

即把边长为a 的单形缩成边长为1 的单形, $(t_1, \cdots, t_n) \in S_n(1)$, 且

$$\sigma(S_n(a)) = \int_{S_n(a)} \mathrm{d}\sigma = a^n \int_{S_n(1)} \mathrm{d}\sigma = a^n \sigma(S_n(1)).$$

对于固定的$t\in[0,1]$, $S_n(1)$ 与$t_n=t$ 的截口是集合

$$\left\{(t_1,\cdots,t_{n-1})\,\middle|\,t_1\geq 0,\cdots,t_{n-1}\geq 0,\ t_1+\cdots+t_{n-1}\leq 1-t\right\}.$$

这是一个边长为$1-t$ 的$n-1$ 维单形$S_{n-1}(1-t)$. 作累次积分得

$$\begin{aligned}\sigma(S_n(1))&=\int_0^1\mathrm{d}t\int\cdots\int_{S_{n-1}(1-t)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\\&=\int_0^1\sigma(S_{n-1}(1-t))\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)^{n-1}\sigma(S_{n-1}(1))\mathrm{d}t\\&=\sigma(S_{n-1}(1))\int_0^1(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\sigma(S_{n-1}(1))\end{aligned}$$

这样就得到一个递推公式. 因为$\sigma(S_1(1))=1$, 所以

$$\sigma(S_n(1))=\frac{1}{n!},\quad\sigma(S_n(a))=\frac{a^n}{n!}.$$

n 维球体

设$B_n(a) = \{(x_1, \cdots, x_n): x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le a^2\}$, 称其为以原点为球心、以$a$ 为半径的n 维球体.

- 当$n = 1$ 时, $B_1(a)$ 就是闭区间$[-a, a]$;
- 当$n = 2$ 时, $B_2(a)$ 就是以原点$(0, 0)$ 为圆心, 半径为a 的平面上的圆盘.
- 当$n = 3$ 时, $B_3(a)$ 就是以$(0, 0, 0)$为球心, 半径为a 的三维空间的球体.

半径为1 的球体称为单位球体.

Example

计算n 维球体$B_n(a)$的体积$\sigma(B_n(a)) = \int_{B_n(a)} \mathrm{d}\sigma.$

解:作径向伸缩变换得

$$\sigma(B_n(a)) = \int_{B_n(a)} \mathrm{d}\sigma = a^n \int_{B_n(1)} \mathrm{d}\sigma = a^n \sigma(B_n(1)).$$

对于固定的 $t_{n-1} = u,\ t_n = v,\ u^2 + v^2 \leq 1$, 它与球体$B_n(1)$ 的截口是由满足$t_1^2 + \cdots + t_{n-2}^2 \leq 1 - u^2 - v^2$ 的点构成, 所以截口是一个$n-2$ 维球体$B_{n-2}(\sqrt{1-u^2-v^2})$. 利用累次积分, 有

$$\begin{aligned}
\sigma(B_n(1)) &= \iint_{u^2+v^2\leq 1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \int \cdots \int_{B_{n-2}(\sqrt{1-u^2-v^2})} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-2} \\
&= \iint_{u^2+v^2\leq 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2} \sigma(B_{n-2}(1)) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \sigma(B_{n-2}(1)) \iint_{u^2+v^2\leq 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

上式右端中的二重积分, 利用极坐标$u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$, 得

$$\iint\limits_{u^2+v^2\le 1}(1-u^2-v^2)^{(n-2)/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)^{(n-2)/2}r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{n}.$$

由此可得关于单位球体体积计算的递推公式

$$\sigma(B_n(1))=\frac{2\pi}{n}\sigma(B_{n-2}(1))$$

因为$\sigma(B_1(1))=2$, $\sigma(B_2(1))=\pi$, 所以有

$$\sigma(B_{2n}(1))=\frac{\pi^n}{n!},\qquad \sigma(B_{2n-1}(1))=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!!},$$

$$\sigma(B_{2n}(a))=\frac{\pi^n}{n!}a^{2n},\qquad \sigma(B_{2n-1}(a))=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!!}a^{2n-1}.$$