

中国科学技术大学  
2023 ~ 2024 学年第 2 学期期中考试试卷  
■ A 卷      □ B 卷

课程名称 数学分析B2      课程编号 MATH1007

考试时间 2024年4月27日      考试形式 闭卷

姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 学院 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、计算下列各题 (每小题 5 分, 共 35 分)

(1) 求函数  $u = xyz$  在点  $(1, 2, 1)$  沿方向  $\vec{e} = (2, -1, 1)$  的方向导数.

$$\text{解 } \mathbf{grad}u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (yz, zx, xy), \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \mathbf{grad}u \Big|_{(1,2,1)} \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

建议: 算出梯度给2分;给出方向导数与梯度的关系公式再给2分;最终算对结果再得1分。

(2) 求过直线  $l : \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0, \\ 3x - 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$  且与平面  $\pi : 3x + 2y + 3z - 9 = 0$  垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为  $\lambda(2x + y - z - 2) + \mu(3x - 2y - 2z + 1) = 0$ , 其中  $\lambda, \mu$  是不全为零的实数. 即  $(2\lambda + 3\mu)x + (\lambda - 2\mu)y + (-\lambda - 2\mu)z + (-2\lambda + \mu) = 0$ . 由题意知  $(2\lambda + 3\mu, \lambda - 2\mu, -\lambda - 2\mu) \cdot (3, 2, 3) = 0$ , 从而  $3(2\lambda + 3\mu) + 2(\lambda - 2\mu) + 3(-\lambda - 2\mu) = 0$ . 推得  $\mu = 5\lambda$ , 进而知本题所求的平面方程是  $17x - 9y - 11z + 3 = 0$ .

估计这道题,多半的同学不会这么做去做, 他们会先去求出直线  $l$  的点向式方程是  $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-7}$ , 2分

然后求出待求平面的法向量是  $n_1 = s \times (3, 2, 3) = (17, -9, -11)$  2分

给出最终答案 1分

(3) 设函数  $f(x, y)$  具有连续的一阶偏导数,  $f(1, 1) = 1$ ,  $f'_x(1, 1) = a$  且  $f'_y(1, 1) = b$ , 求函数  $u(x) = f(x, f(x, x))$  在  $x = 1$  处的微分.

答  $du|_{(x=1)} = (a + ab + b^2) dx$ . 建议:

令  $t = f(x, x)$ , 则  $dt \Big|_{x=1} = f'_1 dx + f'_2 dx = (a + b) dx$  2分

$du \Big|_{x=1} = f'_1 \Big|_{x=1} dx + f'_2 \Big|_{x=1} dt = adx + b dt = (a + ab + b^2) dx$  3分

$$(4) \text{ 求 } I = \int_0^1 dy \int_0^\pi x \cos xy \, dx.$$

解 令  $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ ,

$$I = \iint_D x \cos xy \, dxdy = \int_0^\pi dx \int_0^1 x \cos xy \, dy = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2.$$

建议：交换积分次序给3分，算对结果再得2分。

$$(5) \text{ 已知 } z = z(x, y) \text{ 是由方程 } f(yz, y - x) = 0 \text{ 所确定的隐函数, 其中 } f \text{ 具有连续的一阶偏导数, 且 } f'_1(yz, y - x) \neq 0, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 令  $F(x, y, z) = f(yz, y - x)$ , 则  $F'_x = f'_1 \cdot 0 + f'_2 \cdot (-1) = -f'_2$ ;  $F'_y = zf'_1 + f'_2$ ;  $F'_z = yf'_1$ . 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{f'_2}{yf'_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{zf'_1 + f'_2}{yf'_1}.$$

建议：这道题的步骤总共5个算式，每式1分。

$$(6) \text{ 计算 } I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} \, dxdy, \text{ 其中区域 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

解 区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 记  $D_1 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$ , 由奇偶对称性, 可得

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dxdy + 0 = 2 \iint_{D_1} \frac{r}{1+r^2} \, drd\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \, dr =$$

$\frac{\ln 2}{2}\pi$ . 建议：利用了奇偶性化简得1分；后面利用极坐标换元得2分，最终算对结果再得2分。

$$(7) I = [1, 2] \times [3, 4] \text{ 上有连续的二阶偏导数, 求积分 } I = \iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \, dxdy.$$

答  $I = f(2, 4) + f(1, 3) - f(1, 4) - f(2, 3)$ .

建议：

$$I \stackrel{2\text{分}}{=} \int_1^2 dx \int_3^4 \frac{\partial}{\partial y} (f'_x) dy \stackrel{2\text{分}}{=} \int_1^2 (f'_x(x, 4) - f'_x(x, 3)) dx \stackrel{1\text{分}}{=} (f(x, 4) - f(x, 3)) \Big|_1^2.$$

二、(10分)求函数 $z = (x^2 + y)e^{2x+y}$ 的极值.

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + y + x)e^{2x+y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y + 1)e^{2x+y} = 0$  得驻点 $(1, -2)$ , 4分  
进一步有

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} \right|_{(1,-2)} = 6, \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,-2)} = 2, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} \right|_{(1,-2)} = 1,$$

4分

则 $AC - B^2 > 0$ , 且 $A > 0$ , 故极小值为 $z(1, -2) = -1$ .

2分

三、(12分)计算 $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中 $V$ 由 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成.

$$\text{解 } I = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z r^2 r dr = \frac{\pi}{10}.$$

建议: 给出切薄片的式子得4分, 在薄片上用极坐标换元再得4分, 最终算对结果再得4分.

$$\text{四、(10分)设 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

求 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 沿方向 $\vec{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 的方向导数, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$ , 并证明 $f$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.

解

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \right|_{(0,0)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cos \theta, 0 + t \sin \theta) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(t \cos \theta)^2 (t \sin \theta)^2}{((t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{t |t^3|}. \end{aligned} \quad 4\text{分}$$

所以 $f$ 只能在 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 方向上存在方向导数, 且值全为0. 2分

显然 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ , 且若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 由公式 $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \right|_{(0,0)} = f'_x(0, 0) \cos \theta + f'_y(0, 0) \sin \theta = 0$ , 矛盾! 4分

五、(12分)计算旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 2x$ 所围成的空间区域 $\Omega$ 的体积.

解  $\Omega$ 在 $xoy$ 平面上的投影区域 $D$ 是 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 围成的圆盘, 其极坐标表示为:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \text{ 其中 } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta. \quad 2\text{分}$$

所以

$$\begin{aligned}
 V &\stackrel{3\text{分}}{=} \iint_D (2x - (x^2 + y^2)) dx dy \stackrel{2\text{分}}{=} \iint_{\substack{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \theta}} (2r \cos \theta - r^2) r dr d\theta \\
 &\stackrel{2\text{分}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} (2r \cos \theta - r^2) r dr \stackrel{2\text{分}}{=} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \stackrel{1\text{分}}{=} \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

六、(12 分) 设  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , 求证

$$\frac{(4\sqrt{2}-4)\pi}{3} \leq \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + 2y - 2z + 3} dx dy dz \leq \frac{(4\sqrt{2}+4)\pi}{3}.$$

证 设  $f(x, y, z) = x^2 + 2y - 2z + 3$ , 由于  $f'_y = 2 \neq 0$ ,  $f'_z = -2 \neq 0$ . 所以函数  $f$  在区域  $\Omega$  的内部无驻点, 必在边界上取得最值. 2分

令  $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y - 2z + 3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ . 1分

$$\begin{aligned}
 &\text{由 } \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 2 + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = -2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad 2\text{分} \\
 &\text{得出驻点为 } P_1 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

而  $f(P_1) = 3 - 2\sqrt{2}$ ,  $f(P_2) = 3 + 2\sqrt{2}$ , 所以  $f(x, y, z)$  在闭区域  $\Omega$  上的最小值为  $3 - 2\sqrt{2}$ , 最大值为  $3 + 2\sqrt{2}$ . 显然,  $f$  与  $\sqrt{f}$  有相同的最值点, 所以  $\sqrt{f}$  的最小值是  $\sqrt{2} - 1$ , 最大值为  $\sqrt{2} + 1$ . 2分

所以有

$$\frac{(4\sqrt{2}-4)\pi}{3} = \iiint_{\Omega} (\sqrt{2}-1) dv \leq \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + 2y - 2z + 5} dv \leq \iiint_{\Omega} (\sqrt{2}+1) dv = \frac{(4\sqrt{2}+4)\pi}{3}.$$

3分

七、(9 分) 设  $f(x, y)$  在  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上有连续的二阶偏导数, 并满足  $f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$  以及  $(f''_{xx})^2 + 2(f''_{xy})^2 + (f''_{yy})^2 \leq 1$ .

$$\text{求证: } \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

证 在点 $(0, 0)$ 展开 $f(x, y)$ 得  $f(x, y) = \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{(\theta x, \theta y)}$ , 其中 $\theta \in (0, 1)$ . 3分

记 $(u, v, w) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \sqrt{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{(\theta x, \theta y)}$ , 则

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(ux^2 + 2vxy + wy^2).$$

由于 $\|(u, v, w)\| = \sqrt{(f''_{xx})^2 + 2(f''_{xy})^2 + (f''_{yy})^2} \leq 1$ 及 $\|(x^2, \sqrt{2}xy, y^2)\| = x^2 + y^2$ , 于是利用Cauchy-Schwarz不等式有

$$|(u, v, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2)| \leq x^2 + y^2,$$

即 $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . 3分

从而

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| &\leq \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 1}} r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad \text{3分}$$