第13章　反常积分与含参积分

含参变量的积分及其性质

设 $f(x,u)$ 在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则对任意给定的 $u\in[\alpha,\beta]$, $f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上的Riemann积分定义了一个函数

$$u\mapsto\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

重点：讨论含参积分所定义函数的连续性、可微性和可积性.

定理： 设 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

注： 由于连续的点态性，区间 $[\alpha,\beta]$ 可改为 (α,β).

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

2. $F(\alpha)=\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,\mathrm{d}x$, 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}F(\alpha)$.

定理： 设 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

例： 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,\ \ 0<a<b.$

定理： 设 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且对 u 有连续偏导，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，且求导和积分可交换次序：

$$\varphi'(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$$

可导有点态性，区间 $[\alpha,\beta]$ 可改为 (α,β).

1. 求积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$

当积分限也含有参数时，$\varphi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$ 仍有定义，只要积分有效.

定理： 设 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，$a(u),b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $a\le a(u)\le b,\quad a\le b(u)\le b$，则

$$\varphi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

1. 设 $\varphi(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}\dfrac{1}{1+(1+u)x^2}\mathrm{d}x$，求 $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)$.

定理： 设 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且对 u 有连续偏导, $a(u)$, $b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且 $a\le a(u)\le b$, $a\le b(u)\le b$, 则

$$\varphi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且

$$\varphi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f\big(b(u),u\big)b'(u)-f\big(a(u),u\big)a'(u)$$

1. 设 $I(u)=\int_u^{u^2}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$, 求 $I'(u)$.

2. 设 $\varphi(u)=\int_{\sin u}^{\cos u} e^{x^2+xu}\mathrm{d}x$, 求 $\varphi'(0)$.