第十二章　Fourier分析

基本概念

$L^2[a,b]=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \text{ 存在且有限}\right\}$是$[a,b]$上**可积且平方可积的函数的全体.**

在 $L^2[a,b]$上引入内积:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

它诱导了$L^2[a,b]$上的度量(或距离):

$$\begin{aligned}\|f(x)-g(x)\|&=\sqrt{\langle f(x)-g(x),f(x)-g(x)\rangle}\\&=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x.}\end{aligned}$$

称为函数空间$L^2[a,b]$上的 L^2 **度量.**

注： $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \cdots$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 上的**标准正交系**.

定义： 对 $L^2[a,b]$ 中给定的函数，若存在 $L^2[a,b]$ 中函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\| = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 \mathrm{d}x = 0$

那么称 $\{f_n(x)\}$ 平方平均收敛于 $f_n(x)$.

对任何一组实数 $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, \cdots$, 称

$$g_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

为 n **次三角多项式.**

问题：设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 如何用三角多项式"更好地" 近似 $f(x)$?

即使得 $\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-g_n(x)\right)^2\mathrm{d}x$ 最小. $\left(g_n(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)$

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x+\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\pi\left(\frac{\alpha_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\right),$$

$\{a_k,b_k\}$ 为 $f(x)$ 的Fourier系数.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2\cos^2 kx+\beta_k^2\sin^2 kx\right)\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)$$

$$\Delta_n=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\left(\frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)\right)+\pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)+\pi\left(\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}\left((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right)\right).$$

故：当$\alpha_0=a_0,\alpha_k=a_k,\beta_k=b_k(1\le k\le n)$，即对固定的$n$，当$n$次三角多项式的系数选为$f(x)$的Fourier系数时，近似效果最好.

定理(**Fourier系数的最优性**)：设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 则在所有的 n 次三角多项式中，唯以 $f(x)$ 的Fourier系数构成的三角多项式

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

与 $f(x)$ 的距离最小，即与 $f(x)$ 的平方平均偏差 Δ_n 最小，且最小值为

$$\Delta_n=\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right).$$

因为 $\Delta_n\geq 0$, 故有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

推论(Bessel不等式)：设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 则它的Fourier系数构成的级数 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ 收敛，且满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

推论：设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 则其Fourier系数 a_n,b_n 满足：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ 收敛. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 绝对收敛.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$

Riemann引理.

Parseval 等式

定理: 设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 则 $f(x)$ 的Fourier级数部分和$S_n(x)$构成的三角多项式列平方平均收敛于$f(x)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x=0.$$

等价于Bessel不等式中的等号成立, 即

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

称为 Parseval 等式.

注: Parseval等式说明，向量组

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots$$

是函数空间$L^2[-\pi,\pi]$上的一组**标准正交基**. 而$L^2[-\pi,\pi]$中任意向量的模长的平方等于其在该基下各坐标的平方和. 这是有限维空间中的勾股定理的推广.

推论: 对于$[-\pi,\pi]$上的**连续函数** $f(x)$, 如果它与三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots$$

中的每个都正交，则 $f(x)\equiv 0$; 若两个连续函数 f 和 g 的Fourier系数都相等，则 $f(x)\equiv g(x)$.

推论(推广形式的Parseval等式)：设 $f(x), g(x) \in L^2[-\pi,\pi], \{a_n\},\{b_n\}$ 和 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的Fourier系数，则：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\alpha_n + b_n\beta_n\right)$$

即两平方可积函数的内积，等于它们在标准正交基下对应坐标乘积之和.

证明：分别考虑关于函数 $f \pm g$ 的Parseval等式，相减即得.

定理(Fourier级数的逐项可积性)：设$f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，其Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

则对区间 $[-\pi,\pi]$ 中的任意 a,b 有如下逐项积分公式

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)\mathrm{d}t$$

特别地，对于$x\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right)$$

Parseval等式可以求出一些数项级数的和.

例： 偶函数 $f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\pi]$, 其Fourier级数为:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

由Parseval等式可得:

$$\frac{\pi^2}{2}+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

由此可得: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$, 进而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

广义Fourier级数

定义： 设$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$是$L^2[a,b]$中一组标准正交系，即

$$\langle\varphi_m(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

那么对任意$f(x)\in L^2[a,b]$, 称

$$a_n=\langle f(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 的**广 义Fourier 系数.**

称$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$为$f(x)$的**广义Fourier 级数**，记为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$$

设 $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$ 是任意的 n 次 $\varphi-$ 多项式，则：

$$\Delta_n = \|f-T_n\|^2 = \int_a^b [f(x)-T_n(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\int_a^b \alpha_k\alpha_l\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$$

$$= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

$$\geq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|f-S_n\|^2.$$

定理： 设 $f(x)\in L^2[a,b],\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中一组标准正交系，则对任意的 n 次 $\varphi-$多项式 $T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$ 有：

(1) $\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2$　　(2) $\|f-S_n\|\le\|f-T_n\|$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\le\|f\|^2$，从而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ 收敛.

第三条称为广义Fourier级数的Bessel不等式.

定义： 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中一组标准正交系，如果Parseval等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=\|f\|^2$$

成立，则称 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中**完备的**标准正交系.

定理： 设$\{\varphi_n\}$是$L^2[a,b]$中完备的标准正交系，则f的广义Fourier级数部分和$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$平方平均收敛于$f$：$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|^2=0.$

注： $L^2[-\pi,\pi]$中的标准正交系$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots$是完备的.

定理： 设$\{\varphi_n\}_{n\geq1}$是$L^2[a,b]$中完备的标准正交系，则

1° 若$f\in C[a,b]$，那么$f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$的广义Fourier系数全为0.

2° 从$\{\varphi_n\}$中删除任一个，剩余的函数构成的函数系不再完备.

3° 若添加$\varphi_0\left(\|\varphi_0\|=1\right)$到$\{\varphi_n\}$中，则新函数系不再是标准正交系.

本小节作业：

P279: 1，2，3，6

P285：5(1)，7，8，9(1)