



第13章 反常积分与含参积分

§ 13. 1 反常积分

§ 13. 2 反常多重积分*

§ 13. 3 含参积分

§ 13. 4 含参反常积分

§ 13. 5 Euler 积分

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

含参反常积分的一致收敛性

设 $f(x, u)$ 在 $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续，并对任意给定的 $u \in [\alpha, \beta]$ ，反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 都收敛，称之为**含参变量 u 的反常积分**。此积分定义了区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一个函数：

$$u \in [\alpha, \beta] \mapsto \varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

逐点收敛

问题：讨论含参反常积分所定义函数的连续性、可微性和可积性。

类似函数项级数，为保证 $\varphi(u)$ 有较好性质，一般加上“一致收敛”的假设。

定义：若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon) > a$, s.t. $A > X$ 时, 不等式 $\left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$

对任意 $u \in [\alpha, \beta]$ 成立, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

收敛. 这里的 $[\alpha, \beta]$ 可换为开区间或无穷区间.

定理： $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛 $\Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| = 0$.

定理(Cauchy准则): $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛的充要条件是

$\forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon) > a$, s.t. 对当 $A', A'' > X$ 时, 对任意 $u \in [\alpha, \beta]$ 有:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$$

定理(weierstrass判别法): 设 $f(x,u)$ 在 $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 若存在 $[a, +\infty)$ 上的**可积**函数 $p(x)$, 使得

$$|f(x,u)| \leq p(x), \forall u \in [\alpha, \beta], \forall x \text{ 充分大.}$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. $p(x)$ 称为控制函数.

例. 设 $\alpha > 0$, 证明:

(1). 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x dx$ 关于 u 在 $u \geq 0$ 上一致收敛.

(2). 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)x} \sin x du$ 关于 x 在 $x \geq 0$ 上一致收敛.

例. 积分 $\int_a^{+\infty} ue^{-ux} dx$ 在 $u \geq 0$ 上非一致收敛.

定理(Dirichlet判别法): 设函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 对每个 $u \in [\alpha, \beta]$ 在 $[a, +\infty)$ 中任意有限区间 $[a, b]$ 上可积, 若:

(1) 积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 关于 $b \geq a$ 和 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致有界: $\exists M > 0, \text{s.t.}$

$$\int_a^b f(x,u)dx \leq M, \forall b \geq a, u \in [\alpha, \beta].$$

(2) 对每个固定的 $u \in [\alpha, \beta]$, $g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 关于 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致趋于 0,

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u) \cdot g(x,u)dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

例. 设 $\alpha > 0$, 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 在 $\beta \geq \beta_0 > 0$ 上一致收敛.

定理(Abel判别法): 设函数 $f(x, u)$ 和 $g(x, u)$ 对每个 $u \in [\alpha, \beta]$ 在 $[a, +\infty)$ 中任意有限区间 $[a, b]$ 上可积, 若:

(1) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 关于 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛;

(2) 对每个固定的 $u \in [\alpha, \beta]$, $g(x, u)$ 是 x 的单调函数, 且关于 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致有界,

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) \cdot g(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

例. 设 $0 < p \leq 1$, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 对 $u \geq 0$ 一致收敛.

1. 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x^3)}{1+x^u} dx$ 关于 u 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

2. 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin 2x}{x+u} dx$ 关于 u 在 $[a, b] (b > a > 0)$ 上一致收敛.

含参反常积分的性质

定理：如果函数 $f(x, u)$ 在 $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续，且积分

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

$\lim_{u \rightarrow u_0}$ 与 $\int_a^{+\infty}$
 可交换次序。

在 $[\alpha, \beta]$ 上关于 u 一致收敛，那么 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上**连续**.

定理：如果函数 $f(x, u)$ 在 $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续，且积分

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

\int_α^β 与 $\int_a^{+\infty}$
 可交换次序。

在 $[\alpha, \beta]$ 上关于 u 一致收敛，则

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u) du = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[\int_\alpha^\beta f(x, u) du \right] dx$$

在 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 关于 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛的条件下, \int_{α}^{β} 和 $\int_a^{+\infty}$ 可交换次序; 当 $[\alpha, \beta]$ 为 $[\alpha, +\infty)$ 时, 需要更多条件才能保证两者可交换.

定理: 设 $f(x, u)$ 满足下列条件:

(1) $f(x, u)$ 在 $I = [a, +\infty) \times [\alpha, +\infty)$ 上连续;

(2) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 关于 u 在任意有限区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛,
 $\int_a^{+\infty} f(x, u) du$ 关于 x 在任意有限区间 $[a, b]$ 上也一致收敛;

(3) 两积分 $\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x, u)| du$, $\int_{\alpha}^{+\infty} du \int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx$ 至少有一个存在;

则 $\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du$, $\int_{\alpha}^{+\infty} du \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 都存在且相等, 即有

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du = \int_{\alpha}^{+\infty} du \int_a^{+\infty} f(x, u) dx.$$

定理：设 $f(x, u)$ 满足下列条件：

(1) $f(x, u)$ 和 $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$ 在 $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续；

(2) $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 关于 u 在 $[\alpha, \beta]$ 上收敛；

(3) $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$ 关于 u 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

则 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微，且：

与 $\int_a^{+\infty}$
可交换次序.

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx \quad (\alpha \leq u \leq \beta)$$

1. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, 其中 $0 < a < b$.

2. 计算积分 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$, $\beta \in (-\infty, +\infty)$.

几个重要的积分

1. Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

2. Laplace 积分
$$\begin{cases} I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx & (\alpha > 0, \beta \geq 0) \\ J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx & (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

3. Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$