中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第13章 反常积分与含参积分

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題 一九八八年五月

无穷区间上的反常积分

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上任意有限区间上可积，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若右式极限存在，则称**反常积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} F(b) \text{ 存在}$$

$$\Big\downarrow \ \text{Heine定理}$$

$\Longleftrightarrow$ 对任意(单调增)趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}$，$\{F(A_n)\}$收敛于同一值.

$\Longleftrightarrow$ 对任意(单调增)趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

性质1: 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$都收敛，则对任意常数$c_1, c_2$，$\int_a^{+\infty}\big(c_1 f(x)+c_2 g(x)\big)\mathrm{d}x$也收敛，且:

$$\int_a^{+\infty}\big(c_1 f(x)+c_2 g(x)\big)\mathrm{d}x = c_1\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + c_2\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质2：若$f(x)$在任意有限区间$[a, A]$上可积，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\ (\forall b>a)$ 同敛散，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注: $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$的收敛性只与$f(x)$在$x$充分大时的表现有关.

定理：(无穷积分收敛的Cauchy准则) 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_0 \geq a$, s.t 只要 $A', A'' > A_0$, 就有

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$

问题：若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 吗? ✘

由Cauchy收敛准则，有:

定理： 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；反之未必成立.

收敛
- 条件收敛: $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散.
- 绝对收敛: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛.

非负函数无穷积分的收敛判别法

定理： 设在$[a,+\infty)$上 $f(x)\geq 0$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件是：

$$\exists M>0,\ \text{s.t.}\ \int_a^u f(x)\mathrm{d}x\leq M\ \left(\forall u\in[a,+\infty)\right).$$

定理 (比较判别法)： 设对充分大的x有$f(x)\geq g(x)\geq 0$，则：

1. 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；
2. 若$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

1. 对任意实数α，$\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

2. 若$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 和$\int_a^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理(**比较判别法的极限形式**)：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，则：

(i) 若 $0<k<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

(ii) 若 $k=0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(iii) 若 $k=+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注： 反常积分 $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$ 收敛 $\Leftrightarrow p>1$.

例： 反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$ 收敛.

无穷区间上积分收敛性的一般判别法

为研究形如$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$的反常积分的敛散性，引进类似Abel求和公式的下述定理.

定理(第二积分平均值定理)： 设函数 f 在$[a,b]$上可积,

(i) 若函数 g 在$[a,b]$上非负递减, 则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx;$$

(ii) 若函数 g 在$[a,b]$上非负递增, 则$\exists\eta\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x;$$

(iii) 设 g 在$[a,b]$上单调, 则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx;$$

定理(Dirichlet 判别法): 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足:

1. $F(b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 作为 b 的函数在 $[a,+\infty)$ 上有界;

2. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定理(Abel 判别法): 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足:

1. $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

1. 设$g(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上有定义，且当$x \to +\infty$ 时单调趋于0，则积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\sin x\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} g(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$ 都收敛.

2. 设$a>0,\ 0<p\le 1$，求证：$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

无界函数积分的收敛判别法

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上任意有限区间上可积，a 是瑕点.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\eta\to 0+}\int_{a+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若右式极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

瑕积分可以转化为无穷区间上的积分.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{y=\frac{1}{x-a}} \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

瑕积分的敛散性完全类比于无穷区间上反常积分的敛散性结果.

定理(Cauchy收敛准则): 设 a 是 $f(x)$ 的瑕点. 瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, s.t 只要 $0 < \eta', \eta'' < \delta$, 就有

$$\left|\int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

定理：若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

注：对瑕积分也有绝对收敛和条件收敛的概念.

定理 (比较判别法)：设对充分接近 a 的 x 有 $f(x) \ge g(x) \ge 0$, 则:

1. 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;
2. 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理(**比较判别法的极限形式**)：设 $f(x), g(x)$ 在 $(a,b]$ 上非负，若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，则:

(i) 若 $0<k<+\infty$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散;

(ii) 若 $k=0$, 则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(iii) 若 $k=+\infty$, 则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

注： 积分 $\int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow p<1$.

例： 研究下列积分的敛散性.

1. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$

2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad (0<k<1)$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta}\mathrm{d}x\ (\beta \ge 0)$

定理(Dirichlet 判别法): 若 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 有唯一瑕点 a, 且满足:

1. $F(\eta)=\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 作为 η 的函数在 $(a,b]$ 上有界;

2. $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,

则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理(Abel): 若 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 有唯一瑕点 a, 且满足:

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2. $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界,

则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.