

14 2021-2022 第二学期期末

14.1 填空题

1. 已知向量 α 在 R^3 的自然基下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 α 在 R^3 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 下的坐标为

2. 若 3 阶方阵 A 的特征值分别是 2, 4, 6, 则 $\det(I + A) =$

3. 设 R^3 上的线性变换 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\text{diag}(1, 2, 3)$, 则 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3$ 下的矩阵为

4. 在 R^3 中, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按原顺序 *Schmidt* 正交化得到的标准正交基为

5. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 x, y 的值分别是

6. 若实正交方阵 A 的每个元素都是 $\pm \frac{1}{2^n}$, 其中 n 为正整数, 则 A 的阶数为

14.2 判断题

1. 若 n 阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 满足相似关系 A_1 与 B_1 相似, A_2 与 B_2 相似, 则 $A_1 + A_2$ 与 $B_1 + B_2$ 相似.
2. 若两个同阶实对称矩阵有相同的特征多项式, 则这两个矩阵相似.
3. 在 $R^{m \times n}$ 上定义 $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$, 则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $R^{m \times n}$ 上的一个内积.

4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

14.3 解答题

3. 设 R^3 上实二次型 $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

- (1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出对应的正交变换.
- (2) 判断 $Q(x) = 1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

4. 在数域 R 上次数不超过 3 的多项式全体构成的线性空间 $R_3[x]$ 上定义内积 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.
- (1) 将向量组 $1, x, x^2$ 按顺序 *Schmidt* 正交化得到单位正交向量组
 - (2) 令 $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$. 求多项式 $p(x) \in W$ 使得 $|x^3 - p(x)|$ 达到最小.

5. 设 A 是 n 阶实正定阵, 求证:

$$\det(A) \leq (\frac{\text{tr}(A)}{n})^n$$

6. 证明任意阶复方阵可相似于上三角阵.

Rmk. 这实际上是书上的定理.

