Mathematics Analysis B2

数学科学学院 张明波
mbzhang@ustc.edu.cn

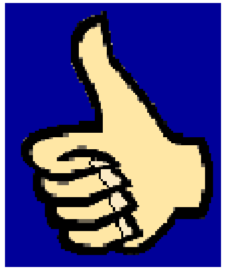
2024年2月

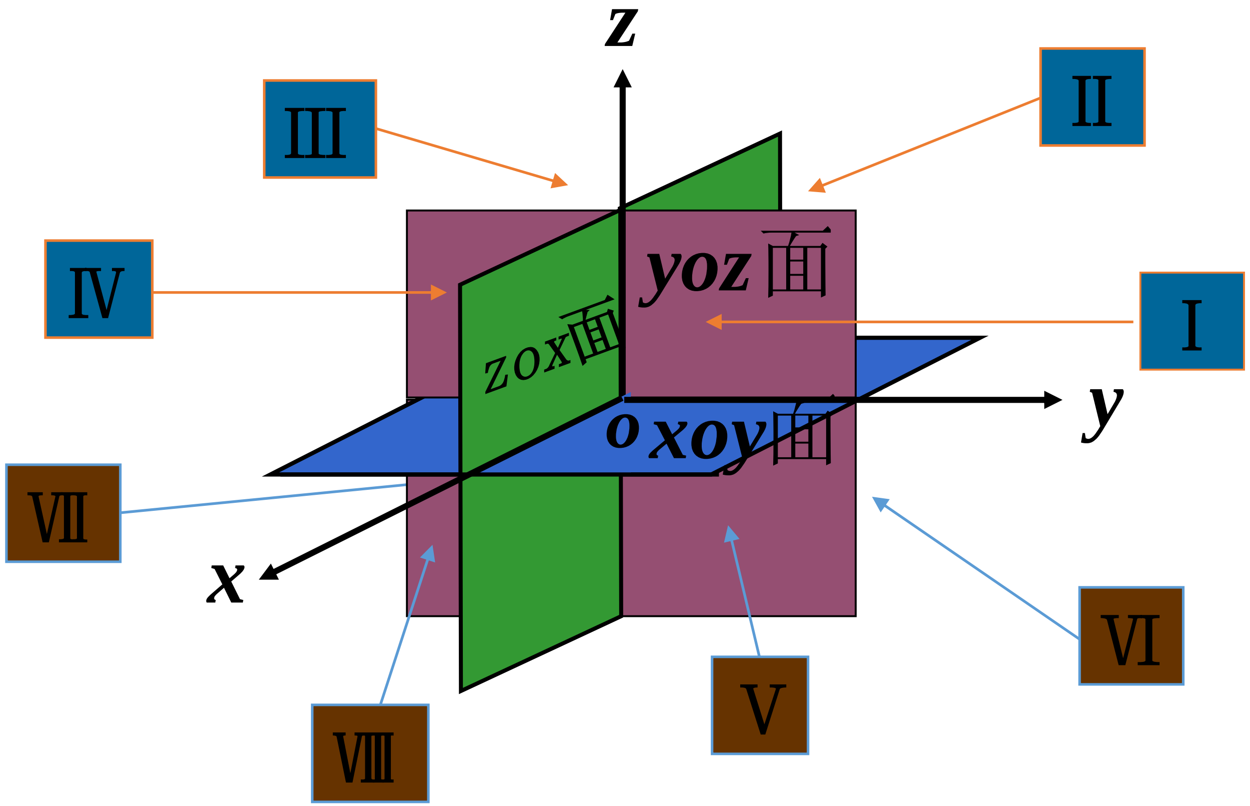
第八章 空间解析几何

空间直角坐标系

过空间一定点O，由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限（八个）





在直角坐标系下

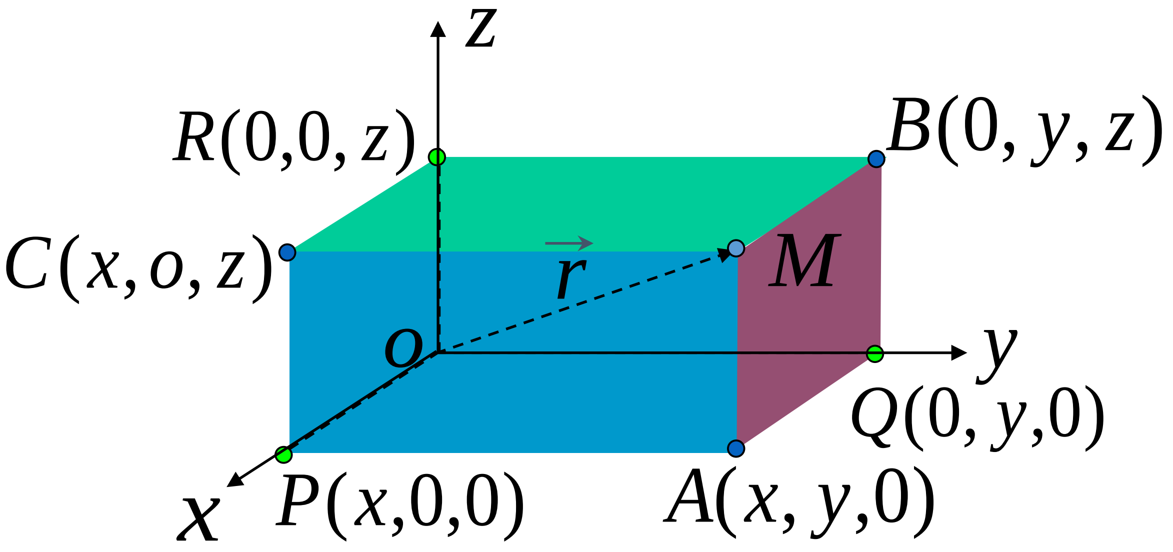
点 $M \overset{1\text{--}1}{\longleftrightarrow}$ 有序数组 $(x, y, z) \overset{1\text{--}1}{\longleftrightarrow}$ 向径 $\vec{r}$

(称为点 M 的坐标)

特殊点的坐标 ：

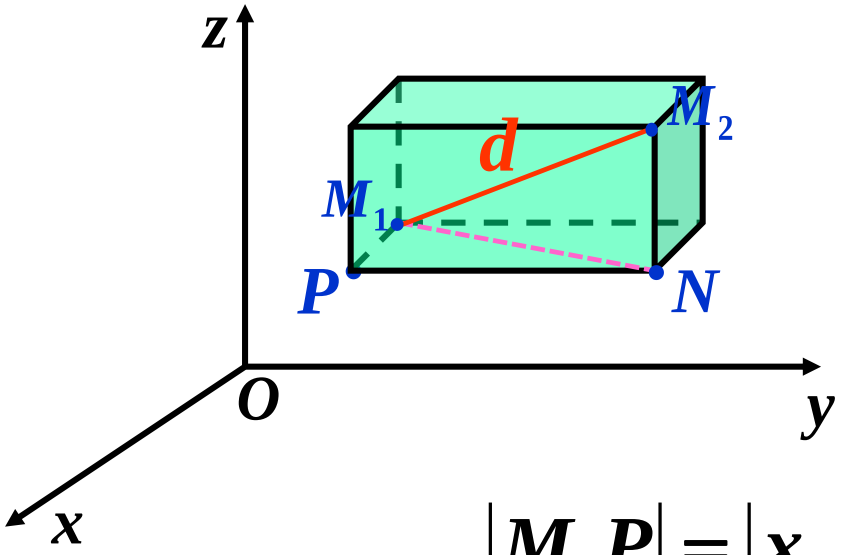
原点 $O(0,0,0)$;　坐标轴上的点 P, Q, R ;

坐标面上的点 A, B, C



空间两点间点的距离

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点. $d=|M_1M_2|=?$



在直角三角形 ΔM_1NM_2和 ΔM_1PN 中,

由勾股定理, $d^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$

$$|M_1P|=|x_2-x_1|,\ |PN|=|y_2-y_1|,\ |NM_2|=|z_2-z_1|$$

$$d=\sqrt{|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2}$$

即: $|M_1M_2|\triangleq\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ → 空间两点间距离公式

例：在 y 轴上求与两点 $A(1,0,2)$ 及 $B(3,1,1)$ 等距离的点 .

解：设该点为 $(0,y,0)$. 由 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(1-0)^2+(0-y)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(1-0)^2}$$

解得 $y=3$. 故所求点为 $M(0,3,0)$.

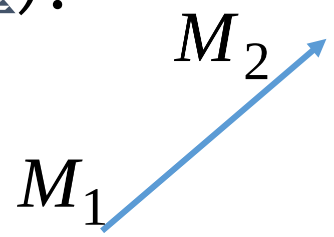
思考:

（1）如何求在空间与 A,B 等距离之点的轨迹方程 ？

（2）如何求在 XOY 面上与 A,B 等距离之点的轨迹方程?

向量的概念

向量: 既有大小，又有方向的量称为向量.（又称矢量）.



向量表示: 有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$.

向量的模: 向量的大小，记作 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$.

向径（矢径）: 起点为原点的向量.

自由向量: 与起点无关的向量.

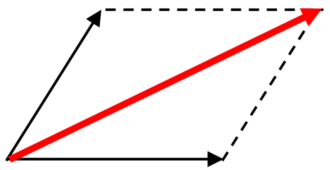
单位向量: 模为 1 的向量. $\boldsymbol{a}$ 的单位化: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

零向量: 模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$，或 0.

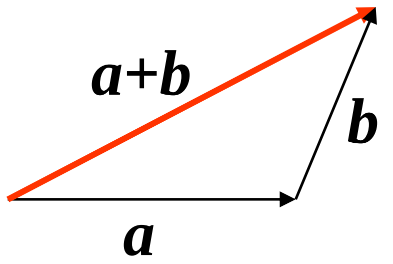
向量的加法与数乘

1. 加法

平行四边形法则：



三角形法则：



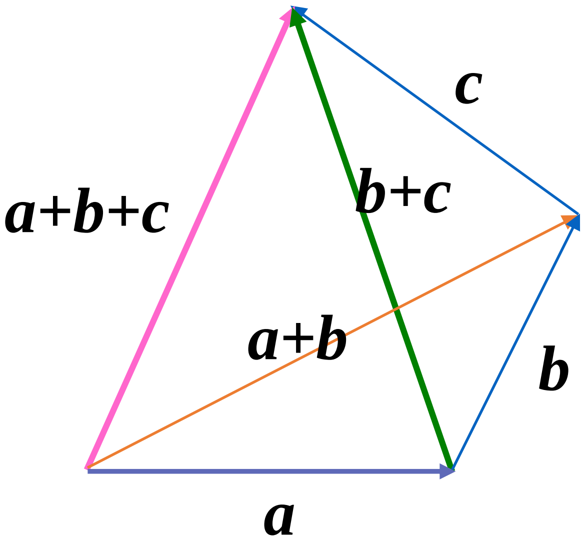
向量的加法满足：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

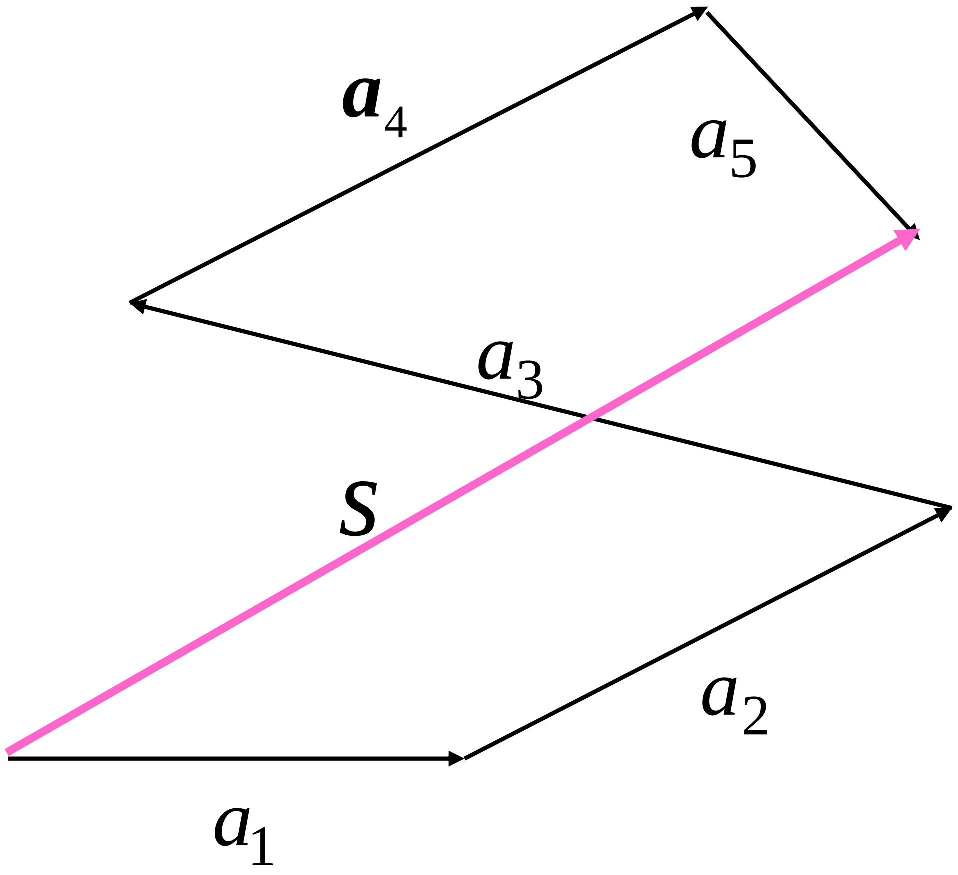
结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

有零向量：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

有负向量：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$



三角形法则可推广到多个向量相加：$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5$



2. 向量的数乘

$\lambda \in \mathbb{R}, a$ 是向量. 定义 $\lambda \boldsymbol{a}$ 是一个向量，满足

① $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$　　② $\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向 $\begin{cases} \text{当 } \lambda > 0 \text{ 时，与 } a \text{ 同向；} \\ \text{当 } \lambda < 0 \text{ 时，与 } a \text{ 反向；} \end{cases}$

数乘满足：

（1）$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = \mu(\lambda \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

（2）$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$

（3）$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$

（4）$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

向量的共线与共面

定义： 一组向量，如果通过平移能使它们同处一条直线上，那么称它们是**共线**的；

如果通过平移能使它们同处一个平面上，那么称它们是**共面**的.

向量 a,b 平行记为 $a \parallel b$.

注：

- 零向量与任意一个向量共线；
- 共线的向量的方向要么相同，要么相反；
- 共线的向量也是共面的：任何两个向量一定是共面.

"共线"和"共面"有下列代数描述：

定理：

1. 两个向量a,b共线，当且仅当存在**不全为零**的实数λ,μ使得

$$\lambda a+\mu b=0.$$

2. 三个向量a,b,c共面，当且仅当存在**不全为零**的实数λ,μ,γ使得

$$\lambda a+\mu b+\gamma c=0.$$

"共线"或"共面"是一种具体的"线性相关"．

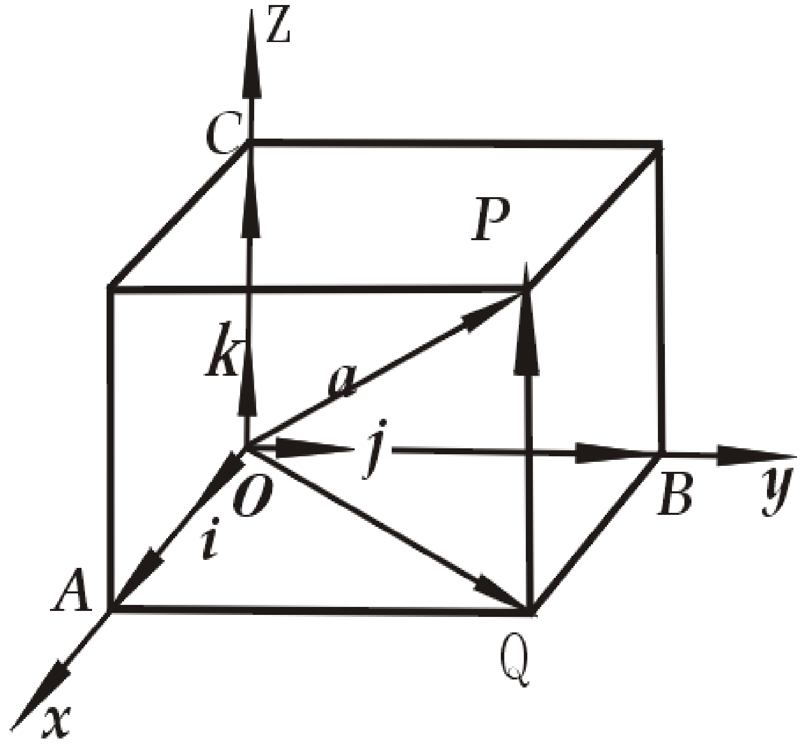
向量的坐标表示

在空间直角坐标系中，起点在原点 O，终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的向径，记为 r 或 $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$.

记单位向量：i, j, k

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}$$

$$= xi + yj + zk \longleftrightarrow (x, y, z).$$



称 (x, y, z) 为点 P 或向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标.

我们通常可将点、向径、坐标表示不加区分. $P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} \longleftrightarrow (x, y, z)$

在单位直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ ，则：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).$$

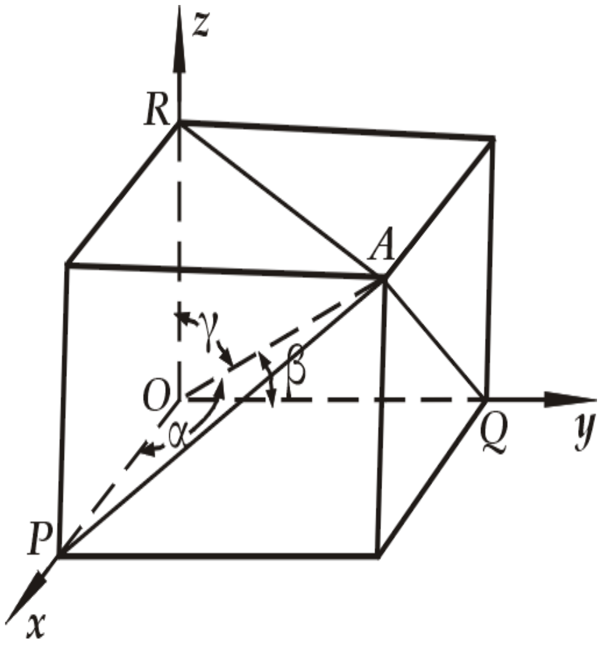
设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=\overrightarrow{OA}$, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

$$\cos\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{a}_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}_x}{\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2+\boldsymbol{a}_y^2+\boldsymbol{a}_z^2}}$$

$$\cos\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{a}_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}_y}{\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2+\boldsymbol{a}_y^2+\boldsymbol{a}_z^2}}$$

$$\cos\boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{a}_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2+\boldsymbol{a}_y^2+\boldsymbol{a}_z^2}}$$

α,β,γ 分别为 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴正向的夹角.



$$\cos^2\boldsymbol{\alpha}+\cos^2\boldsymbol{\beta}+\cos^2\boldsymbol{\gamma}=1$$

$$\frac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\quad\cos\beta,\quad\cos\gamma)$$

例： 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$，求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解： $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$ $\therefore \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

例： 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，又 $|\boldsymbol{a}|=6$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解： 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 得 $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\dfrac{2}{3}$.

故 $a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=6\cdot\dfrac{1}{3}=2$；$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=6\cdot\dfrac{2}{3}=4$；

$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=6\cdot\left(\pm\dfrac{2}{3}\right)=\pm4$. 即 $\boldsymbol{a}=(2,4,4)$ 或 $\boldsymbol{a}=(2,4,-4)$.

向量的点乘（数量积）

定义： 两向量a,b的模及其夹角余弦的乘积，称为向量的数量积, 记为 $a \cdot b$, 即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$$

定理： 数量积满足如下运算规律：

(1) 交换律： $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2) 分配律： $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

(3) 齐次性：$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b), \lambda \in \mathbb{R}.$

(4) 非负性： $a \cdot a \geq 0,$ 且只有当 $a = 0$ 时等号成立.

(5) Cauchy不等式： $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|.$

数量积的坐标表示

在单位直角坐标系下，设两向量

$$\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

则：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad \left(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\right)$$

注： 1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$

2. 若 $\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, 则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$

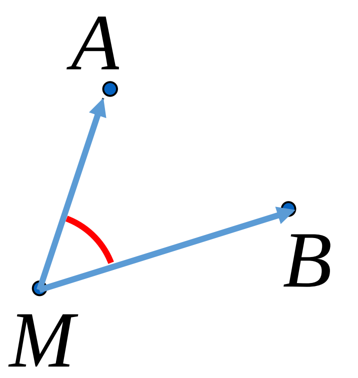
3. 两向量的夹角满足 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例： 已知 $|\boldsymbol{a}|=2, |\boldsymbol{b}|=1, \angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$，求 $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \;=2\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=1$

故 $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=6|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=6\cdot2^2+1-2\cdot1^2=23$



例： 已知三点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解： $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$

则 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. 故 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

向量的叉乘（向量积）

定义： 两向量 a,b 的向量积定义为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{a,b})\,\boldsymbol{n}^{\circ}$，记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}$ 是同时垂直于a 和b 的单位向量, 其方向按从a 到b 的右手法则确定.

定理： 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有：

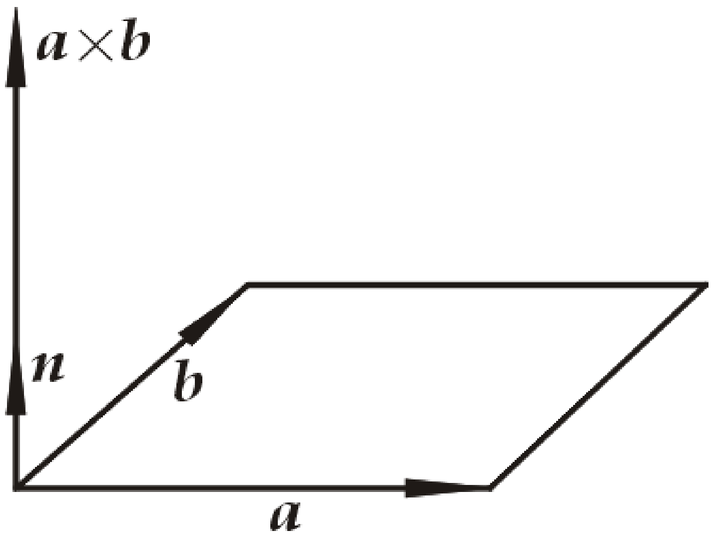
(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线(平行) $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0.$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$

(3) $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b).$

(4) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$

(5) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$



向量积的坐标表示

在单位直角坐标系下，设两向量

$$\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)=a_x i+a_y j+a_z k,\quad \boldsymbol{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)=b_x i+b_y j+b_z k$$

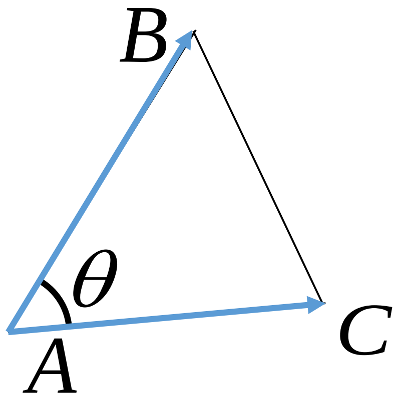
则：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\right)\triangleq\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

注：**向量积通常被应用于求面积或与垂直相关的问题.**

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形的面积；$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 张成平面的一个法向量.

例： 已知三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$, 求 ΔABC 的面积 .



解： 如图所示, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right\|$

$$=\frac{1}{2}\left|(4,-6,2)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

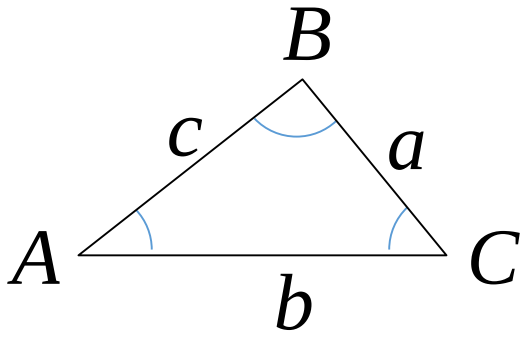
问题： 平面上两向量张成的平行四边形面积为?

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$, 则

$$\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|(a_1,a_2,0)\times(b_1,b_2,0)|=\left\|\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{pmatrix}\right\|=\left|(0,0,a_1b_2-a_2b_1)\right|=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right\|.$$

练习： 用向量方法证明正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



例： 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(-2,3,-1)$, $\beta=(1,-2,1)$, 求与 α,β 垂直且满足 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=8$ 的向量 $\boldsymbol{c}$,

其中 $d=(2,1,-7)$.

解： $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=(1,1,1)$, 故可设 $c=\lambda n$. 代入 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=8$ 得 $-4\lambda=8$

$\Rightarrow\lambda=-2$. 故 $c=\left(-2,-2,-2\right)$.

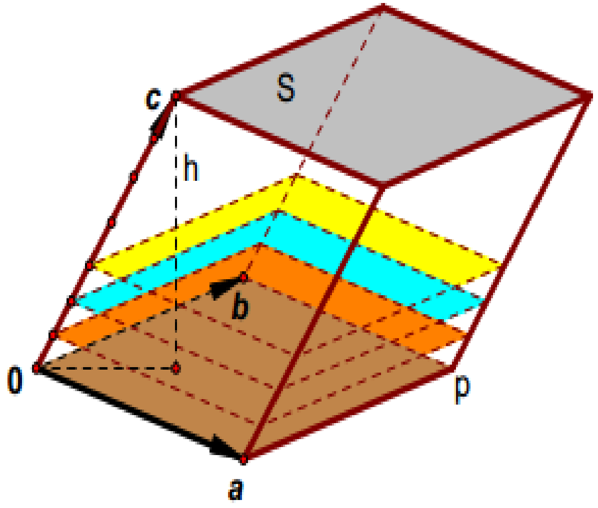
向量的混合积

定义： 向量 a,b,c 的**混合积**定义为$a\times b\cdot c$，简记为$[abc]$.

几何意义：混合积$a\times b\cdot c$表示a,b,c张成的平行六面体的有向体积.

定理： 在单位直角坐标系下，设向量

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\ \boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z).$$



则 $[abc]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

混合积的性质：

(1). $[abc]=[bca]=[cab]=-[bac]=-[cba]=-[acb]$;

(2). 向量 a,b,c 共面 $\Leftrightarrow [abc]=0.$

例： 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3,4)$, 求该四面体体积.

解： 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$,

$$\text{故 } V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}]\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\right|$$

向量的运算小结

设在单位直角坐标系下，$a=(a_x,a_y,a_z),b=(b_x,b_y,b_z),c=(c_x,c_y,c_z)$

1. 向量运算

加减: $a\pm b=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda a=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

数量积: $a\cdot b=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

向量积: $a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

混合积: $[a\ b\ c]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

向量特殊位置关系：

(1). $a /\!/ b \Longleftrightarrow a\times b=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$

(2). $a\perp b \Longleftrightarrow a\cdot b=0 \Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

(3). a,b,c共面 $\Longleftrightarrow (a\times b)\cdot c=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$

一些几何量的计算：距离、夹角、面积、体积、垂线等.