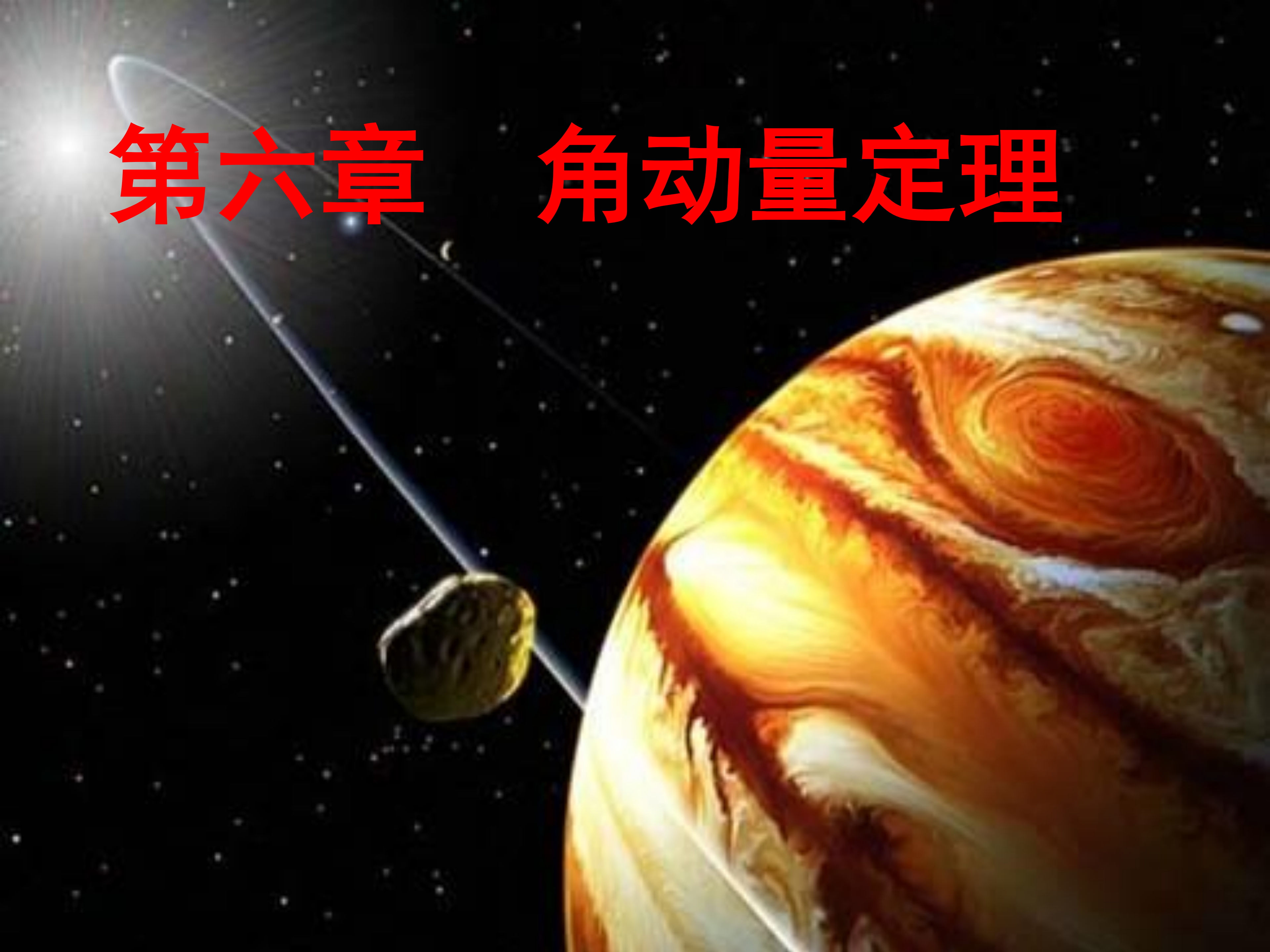
第六章　角动量定理

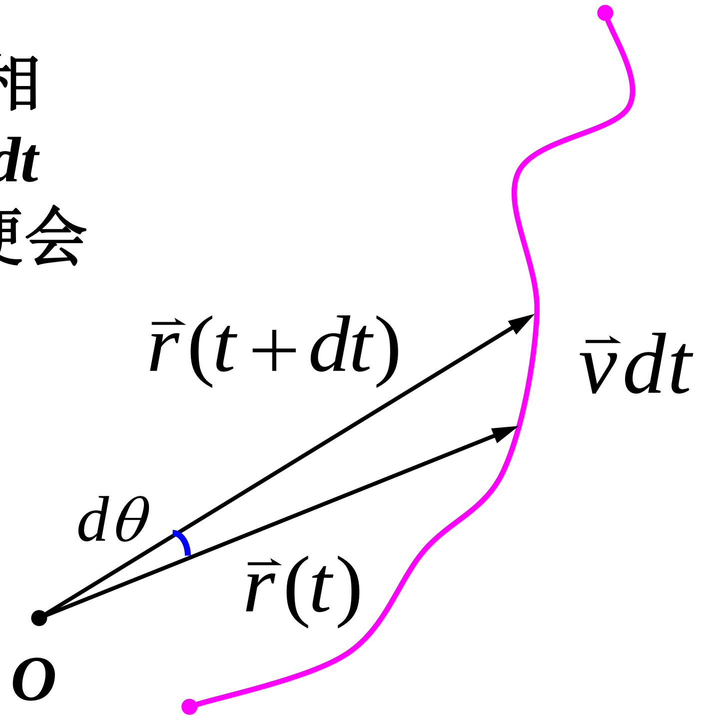


§6.1 单质点的角动量定理

1、略面速率和略面速度

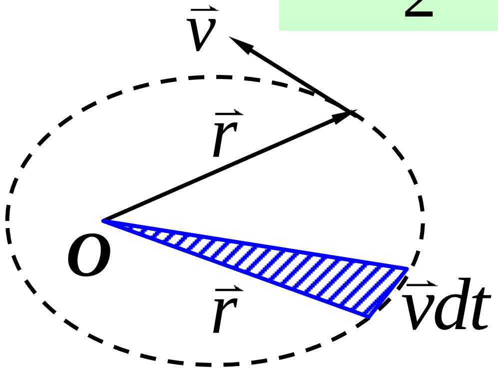
惯性系*S*中的一个运动质点在运动过程中相对某参考点*O*的径矢 $\vec{r}$ 会相应的旋转，在*dt*时间质点位移为 $\vec{v}dt$ ，转过角度*dθ*，$\vec{r}$ 便会扫过面积 *dS*

$$dS=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}dt\right|$$



略面速率: $$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$$

定义略面速度: $$\vec{\kappa}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$$



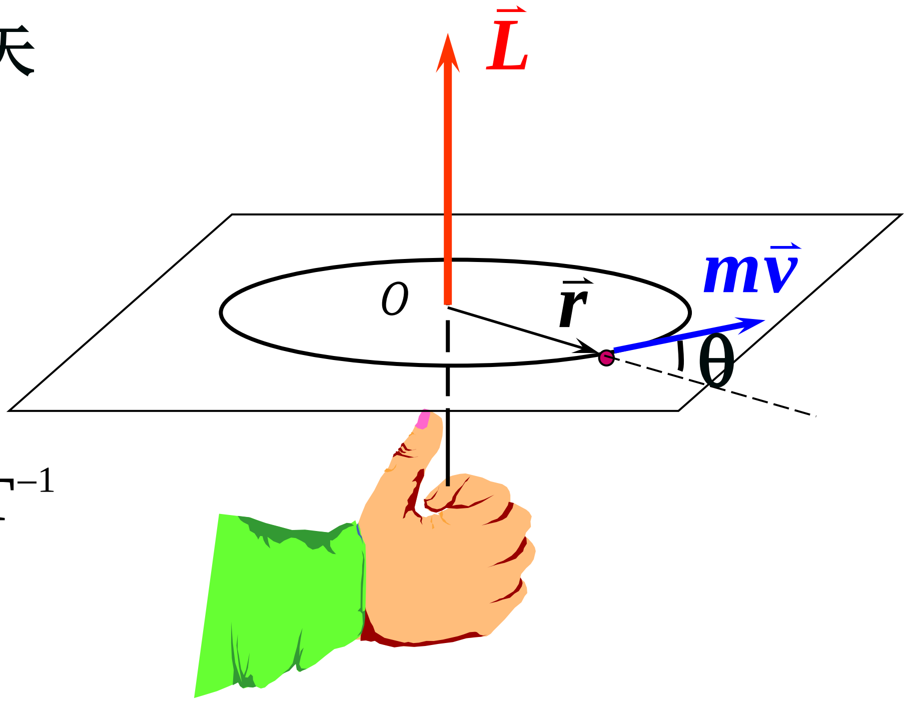
行星绕太阳公转时，掠面速度守恒。

2、角动量（动量矩）

角动量是描述质点对固定点的转动特征的物理量。

定义:从给定参考点指向质点的位矢 $\vec{r}$ 与质点动量 $m\vec{v}$ 的矢量积

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$



单位: $kg\cdot m^2/s$ 量纲: $\mathrm{ML^2T^{-1}}$

大小: $L=mrv\sin\theta$

方向: 由 $\vec{r}$ 和 $m\vec{v}$ 按照右手螺旋法则确定

与略面速度的关系: $\vec{L}=2m\vec{\kappa}$

●说明：

①角动量与位矢有关，位矢与参考点有关，有相对性。谈到角动量时必须指明是对哪一参照点而言，参考点不同，角动量亦不同。

一般把参考点取在坐标原点。这样才有

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

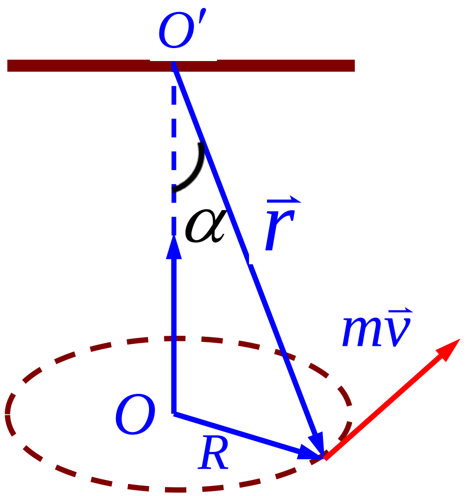
②角动量是矢量，可用分量形式表示。

在直角坐标系中

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\left(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z\right)\times\left(p_x\vec{e}_x+p_y\vec{e}_y+p_z\vec{e}_z\right)$$
$$=(yp_z-zp_y)\vec{e}_x+(zp_x-xp_z)\vec{e}_y+(xp_y-yp_x)\vec{e}_z$$

$\Rightarrow$ $L_x=yp_z-zp_y,\quad L_y=zp_x-xp_z,\quad L_z=xp_y-yp_x$

例题1： 如图质点m以常速率v做圆锥运动，求对O'点和对O点的角动量，设摆长为b。



解： 如图对O点

$$L = mRv = mvb\sin\alpha$$

方向： 向上，是常矢量。

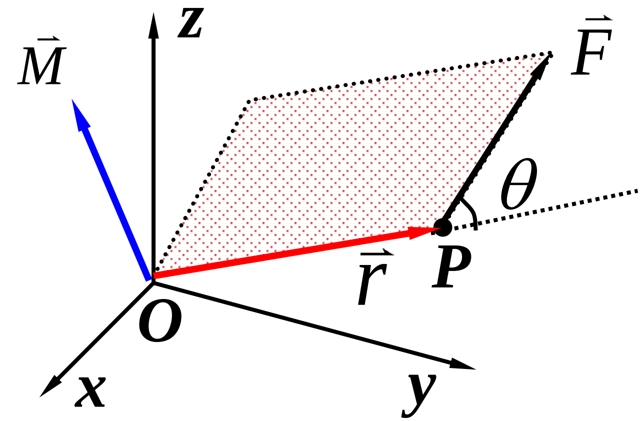
对O'点

$$L' = mvb \quad （\vec{r}与\vec{v}夹角为\frac{\pi}{2}）$$

方向： 垂直摆线向外，方向始终在变，其端亦在水平面内画一圆，不是常矢量。

2、力矩

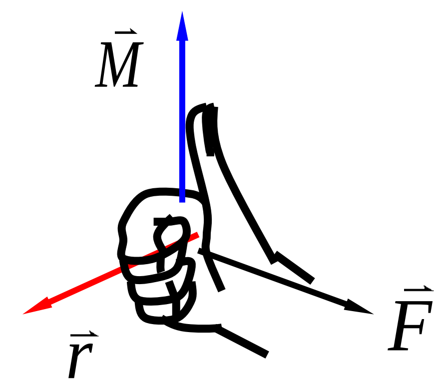
作用力 $\vec{F}$，其作用点的位矢为 $\vec{r}$，它对参考点O点的力矩被定义为



$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

单位：N·m　　量纲：ML^2T^{-2}

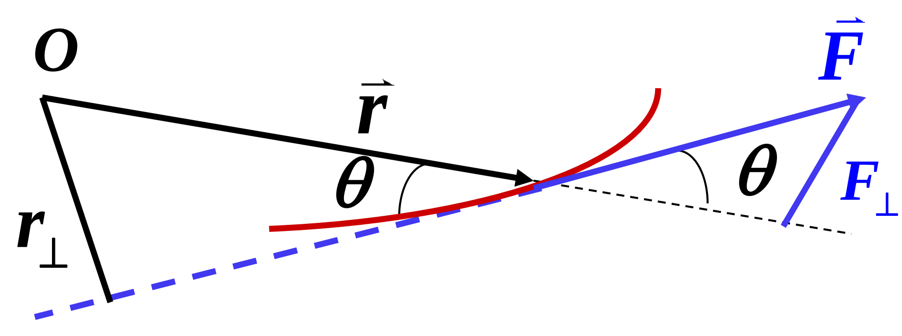
大小：$M = rF\sin\theta$



方向：由右手法则确定

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\underline{\boldsymbol{F}\sin\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{F}_{\perp}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}\underline{\boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{r}_{\perp}\boldsymbol{F}$$



力对某一固定点的力矩的大小等于此力和力臂的乘积。

几点说明：

①力矩与参考点有关，说一个力的力矩时，必须指明是对哪个参考点而言的。当参考点是坐标原点时，$\vec{r}$ 就是力的作用点的位矢。

②力矩是矢量，在直角坐标系中，其分量形式为

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\left(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z\right)\times\left(F_x\vec{e}_x+F_y\vec{e}_y+F_z\vec{e}_z\right)$$
$$=\left(yF_z-zF_y\right)\vec{e}_x+\left(zF_x-xF_z\right)\vec{e}_y+\left(xF_y-yF_x\right)\vec{e}_z$$

定义：

$$\begin{cases} M_x=yF_z-zF_y\mapsto \text{力}F\text{对}x\text{轴的力矩} \\ M_y=zF_x-xF_z\mapsto \text{力}F\text{对}y\text{轴的力矩} \\ M_z=xF_y-yF_x\mapsto \text{力}F\text{对}z\text{轴的力矩} \end{cases}$$

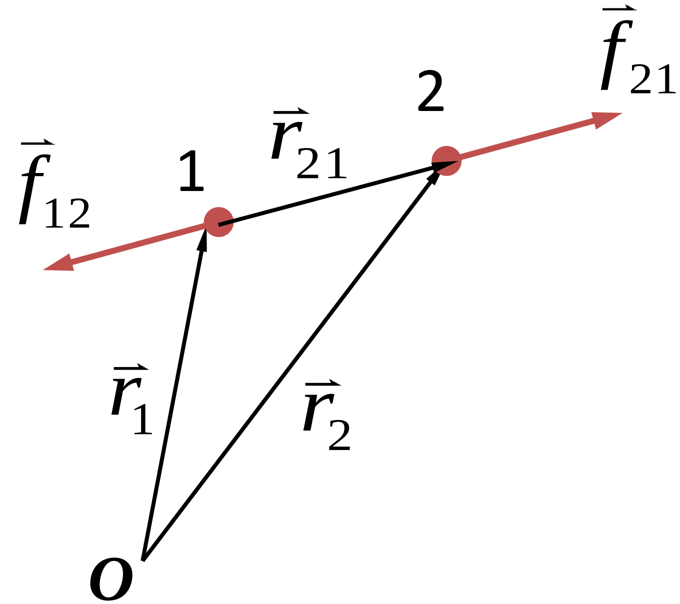
③若质点受N个力同时作用时

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\cdots+\vec{r}\times\vec{F}_N$$
$$=\vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_N)$$
$$=\vec{r}\times\sum\vec{F}_i$$

即诸力对参考点的力矩的矢量和等于合力对同一参考点的力矩。

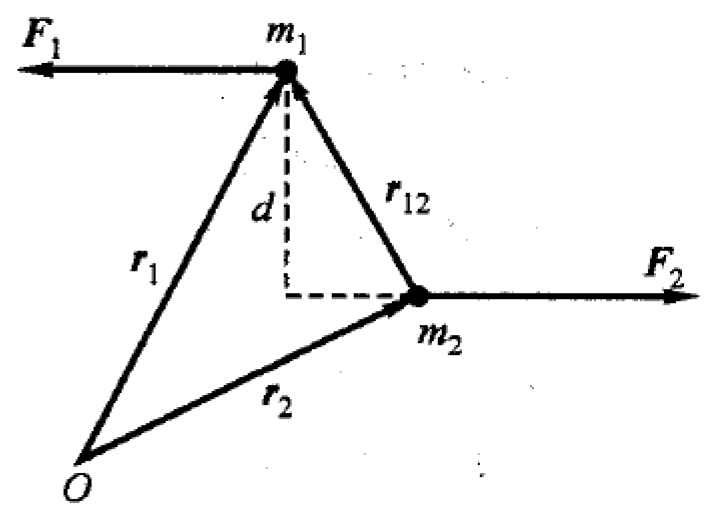
④两质点之间一对作用力与反作用力相对于同一参考点力矩之和必为零。

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_1\times\vec{f}_{12}+\vec{r}_2\times\vec{f}_{21}\\ &= -\vec{r}_1\times\vec{f}_{21}+\vec{r}_2\times\vec{f}_{21}\\ &= (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times\vec{f}_{21}=\vec{r}_{21}\times\vec{f}_{21}\\ &= 0\end{aligned}$$



⑤力偶的力矩

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2\\ &= \vec{r}_1\times\vec{F}_1-\vec{r}_2\times\vec{F}_1\\ &= (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_1\\ &= \vec{r}_{12}\times\vec{F}_1, \qquad \vec{r}_{12}\equiv\vec{r}_1-\vec{r}_2\end{aligned}$$



$\vec{r}_{12}$ 是从质点2指向质点1的矢量，它不因参考点而异，因此力偶的力矩与参考点无关。另外力偶矩的大小为

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}_1\right| d$$

d是两个力的作用线之间的垂直距离，称为力偶臂。

【思考题】（1）作用于质点上的力不为零，质点所受的力矩是否也总不为零；（2）作用于质点系的外力矢量和为零，是否外力矩之和也为零；（3）质点的角动量不为零，作用于该质点上的力是否可能为零。

⑥质点系重力对于某一参考点的力矩

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{g} = m\vec{r}_c \times \vec{g}$$

➢质点系的重力势能

$$E_p = \sum_i m_i g z_i = \left(\sum_i m_i z_i\right) g = mgz_c$$

➢质点系的重力做功

$$dW = \sum_i m_i \vec{g} \bullet d\vec{r}_i = \vec{g} \bullet \sum_i m_i d\vec{r}_i = \vec{g} \bullet d\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = m\vec{g} \bullet d\vec{r}_c$$

3、单质点的角动量定理

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

其中 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{v}\times\vec{p}=0,\ \dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$ ——角动量定理微分形式

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$ ——角动量定理积分形式

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt$ —冲量矩，力矩的时间积累。

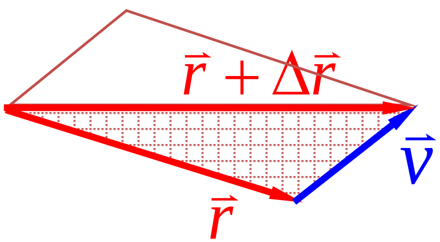
质点角动量定理：质点对任一固定点的角动量的时间变化率等于合外力对**该点**的力矩。（注意：角动量和力矩都是相对于**惯性系中的同一点**定义的）

4. 质点角动量守恒定律

当 $\vec{M}=0$ 时，

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=const}$$

$\vec{L}$ 为恒矢量,即角动量的大小和方向都保持不变, 则质点作**平面运动**(初始条件决定)，掠面速度守恒。



掠面速度：$\vec{\kappa}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}=\frac{\vec{L}}{2m}$

● 常见的角动量守恒条件：

①孤立质点，$F=0$

②力F 通过定点O，即有心力

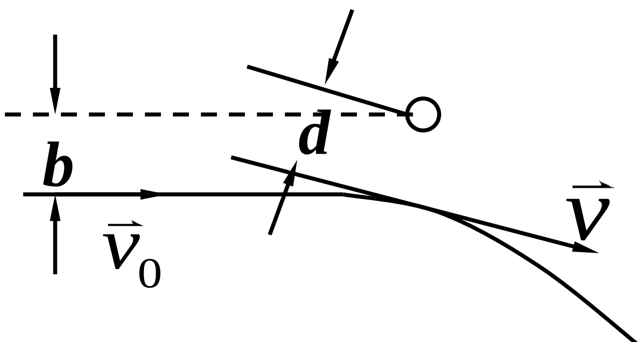
③当外力矩对定点的某一分量为零时，则角动量的该分量守恒：

$$M_x=0 \Rightarrow L_x=yp_z-zp_y=const$$

$$M_y=0 \Rightarrow L_y=zp_x-xp_z=const$$

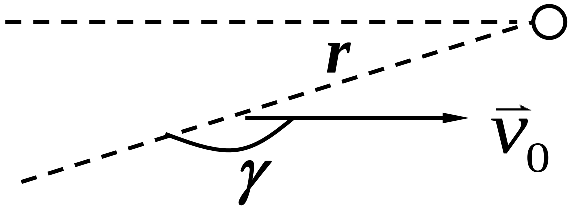
$$M_z=0 \Rightarrow L_z=xp_y-yp_x=const$$

例题2： 卢瑟福等人发现用α粒子轰击金铂时有些入射偏转角很大，甚至超过90°。卢瑟福于1911年提出原子必有一带正电的核心，即原子核；此即原子结构的行星模型。已知 α粒子的质量为m，以速度 $\vec{v}_0$ 接近电荷为Ze 的重原子核。已知瞄准距离为b，如图所示，求 α 粒子接近重核的最近距离。设原子核质量比 α 粒子大很多，可近似看作静止。



(*a*)

解： 设 z 轴垂直于粒子运动平面且通过重核中心。



(b)

对 z 轴的角动量为：　$rmv_0 \sin\gamma$

$$\because \quad r\sin\gamma = b$$

故

$$rmv_0 \sin\gamma = bmv_0$$

粒子最接近重核（距离为 d）时角动量为 dmv 。

对 z 轴的角动量守恒

$$dmv = bmv_0$$

得

$$v = \frac{b}{d} v_0$$

只有静电力作用，故能量守恒

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{2kZe^2}{d}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

将v代入得

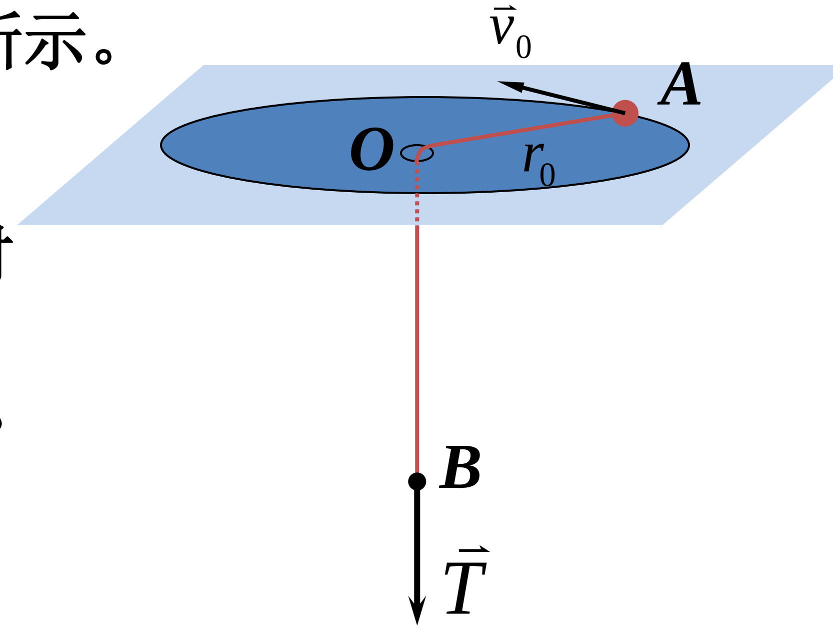
$$\frac{mv_0^2b^2}{2d^2}+\frac{2kZe^2}{d}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow d^2-\frac{4kZe^2}{mv_0^2}d-b^2=0$$

$$\therefore\ d=\frac{kZe^2}{mv_0^2}\pm\sqrt{\left(\frac{kZe^2}{mv_0^2}\right)^2+b^2}$$

因d只能为正，故式中负号无物理意义，舍去。

例题3：小球绕O作圆周运动，如图所示。



（1）求B端所受竖直向下的外力T_0；

（2）拉力T_0极缓慢增到 $2T_0$，求此时小球的速率v；

（3）求拉力在上述过程中所作的功。

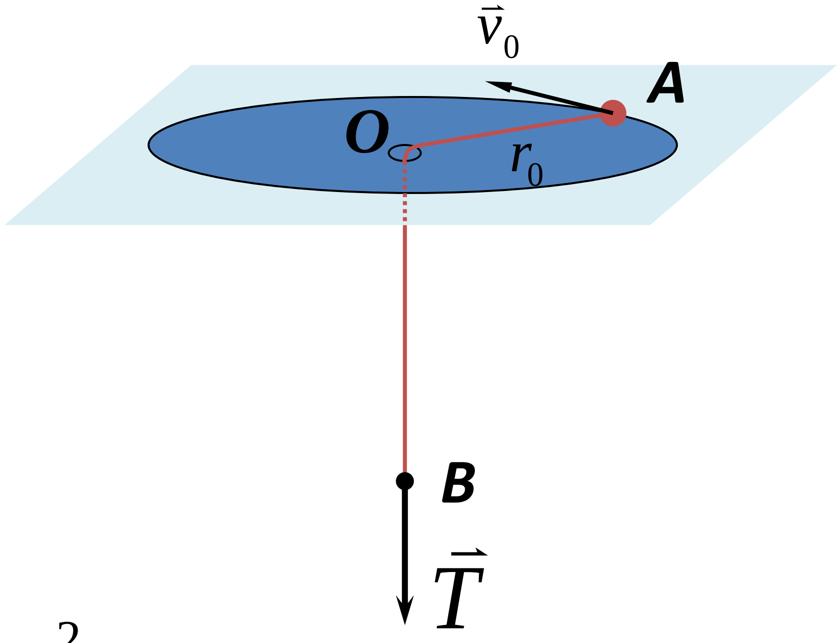
分析物理过程

以O为参考点，力矩为零，角动量守恒。

T_0极缓慢增大，径向速度可略，中间过程近似为圆周运动。

解：

（1） $$T_0 = m\frac{v_0^2}{r_0}$$



（2）

角动量守恒 $$mvr = mv_0 r_0$$

圆周运动 $$\frac{mv^2}{r} = 2T_0 = \frac{2mv_0^2}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt[3]{2}\, v_0, \quad r = \frac{r_0}{\sqrt[3]{2}}$$

（3）拉动过程中，小球作螺旋线运动

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{r} = -Tdr$$

$$T = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv_0^2 r_0^2}{r^3}$$

$$W = -\int_{r_0}^{r_0/\sqrt[3]{2}} \frac{mv_0^2 r_0^2}{r^3} dr = \frac{1}{2} m v_0^2 (\sqrt[3]{4} - 1)$$

它恰好等于小球的动能增量

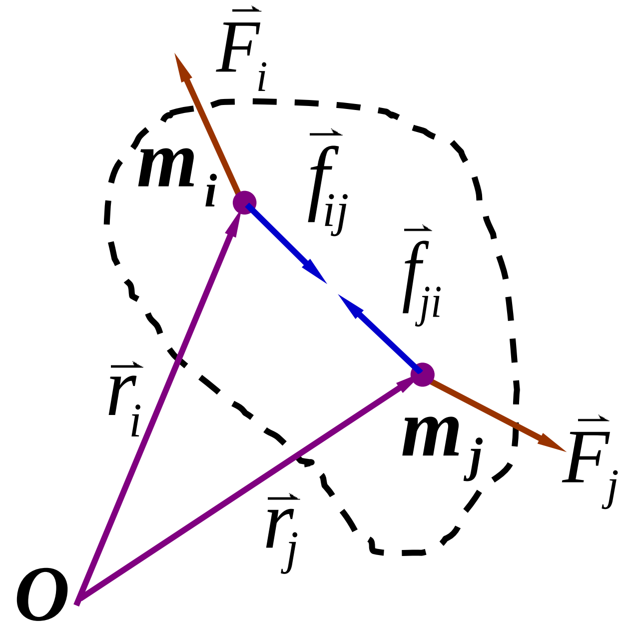
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (\sqrt[3]{4} - 1)$$

§ 6.2 质点系统的角动量定理

1、质点系的角动量定理

质点系对给定点的角动量等于各质点对该点的矢量和：

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$



对质点系中的第 *i* 个质点, 利用角动量定理

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\vec{M}_i=\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i+\sum_{j(\neq i)}\vec{f}_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i+\underbrace{\sum_i\sum_{j(\neq i)}\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}}_{\text{合内力矩为零}}=\sum_i \vec{M}_{i外}\equiv\vec{M}_{ex}$$

$$\because \sum_i\sum_{j(\neq i)}\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j(i\neq j)}\left(\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j(i\neq j)}\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\times\vec{f}_{ij}=0$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ex}}$$

体系角动量定理的微分形式

即质点系对给定点(参考点)的角动量的时间变化率等于作用在体系上所有外力对该点力矩矢量和。

体系角动量定理的积分形式

$$\boxed{\vec{L} - \vec{L}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_{ex} dt}$$

体系对给定点角动量的增量等于外力对该点的总冲量矩。

●几点说明：

①各量均对同一参考点；

②该定理是由牛顿定律导出，故它仅适用于惯性系。

③只有外力矩才对体系的角动量变化有贡献。内力矩对体系角动量变化无贡献，但对角动量在体系内的分配是有作用的。

④处理转动的所有公式都是从这个公式导出。

2、质点系的角动量守恒定律

$$\text{若}\vec{M}_{ex}=0 \Longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}_{ex}=0 \Longrightarrow \vec{L}=const$$

即若外力对参考点的力矩的矢量和始终为零，则质点系对该点的角动量保持不变。

●关于总外力矩 **M=0**，有以下三种常见情况：

①对于孤立系统，体系不受外力作用；

②所有外力都通过定点；

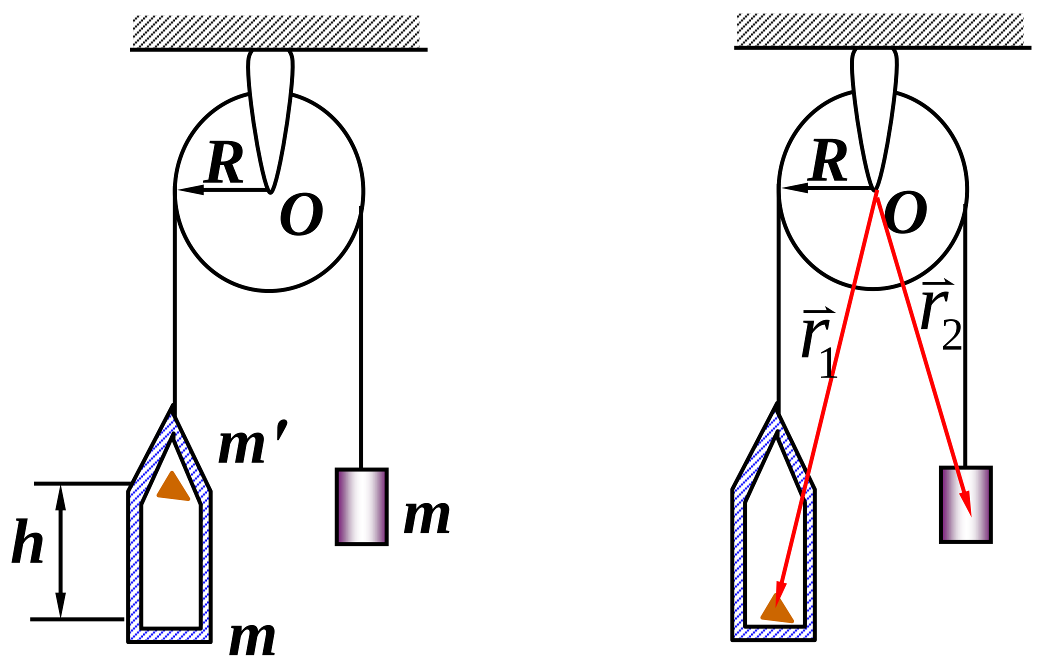
③每个外力的力矩不为零，但总外力矩 ***M=0***。

●角动量守恒定律是矢量式，它有三个分量，各分量可以分别守恒：

$$\begin{cases} M_{ex,x}=0 \Rightarrow L_x=const \\ M_{ex,y}=0 \Rightarrow L_y=const \\ M_{ex,z}=0 \Rightarrow L_z=const \end{cases}$$

●角动量守恒定律是一个独立的规律，并不包含在动量守恒定律或能量守恒定律中。

例题4： 装置如图所示，滑轮右边悬挂的重物与盘的质量相同、均为m，初始时刻整个装置处于平衡。现有距盘底高为h质量为m'的胶泥自由下落，求胶泥粘在盘上时盘获得的初速度。滑轮和绳质量不计，不计轴承摩擦及绳的伸长。



解： 胶泥自由下落至盘面的速度为 $v_0=\sqrt{2gh}$。将盘、重物和胶泥视为质点系。在碰撞时，可不计外力矩，于是质点系对O轴角动量守恒。取垂直纸面朝向读者的方向为O 轴正方向，有

$$R(m'+m)v_1+Rmv_2=Rm'v_0$$

绳不伸长，故 $v_1=v_2=v$

可得

$$v=\frac{m'v_0}{2m+m'}$$

将 v_0代入，得

$$v=\frac{m'\sqrt{2gh}}{2m+m'}$$

讨论： 质点系动量是否守恒？若动量守恒，则有：

$$m'\sqrt{2gh}=(m+m')v-mv=m'v,\Rightarrow v=\sqrt{2gh}=v_0$$

§6.3 质心系中的角动量定理

1、角动量的柯尼希定理

在惯性系中，质点系相对于定点的角动量为

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

将 $\vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}_i'$，$\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i'$ 代入上式可得

$$\vec{L}=\sum_i\left(\vec{r}_c+\vec{r}_i'\right)\times m_i\left(\vec{v}_c+\vec{v}_i'\right)$$

$$=\vec{r}_c\times\left(\sum_i m_i\right)\vec{v}_c+\sum_i\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'+\vec{r}_c\times\sum_i m_i\vec{v}_i'+\left(\sum_i m_i\vec{r}_i'\right)\times\vec{v}_c$$

$$=\underbrace{\vec{r}_c\times m\vec{v}_c}_{\text{质心角动量}}+\underbrace{\sum_i\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'}_{\text{体系相对质心的角动量}}$$

质心角动量

体系相对质心的角动量

即：体系的角动量等于质心角动量与体系相对于质心的角动量之和。

2、质心系中的角动量定理

角动量定理和角动量守恒定律只在惯性系中成立。质心系若为非惯性系，则加上惯性力的力矩，角动量定理仍适用。设 $\vec{L}'$ 为质心系中体系对质心的总角动量， $\vec{M}'_{ex}$ 为外力对质心力矩之和，$\vec{M}'_{惯}$ 为惯性力对质心的力矩之和，则

$$\vec{M}'_{ex}+\vec{M}'_{惯}=\frac{d\vec{L}'}{dt}$$

由于质心系是平动参考系，作用在各质点的惯性力与质量成正比，方向与质心加速度相反，故对质心的力矩为

$$\vec{M}'_{惯}=\sum_i \vec{r}_i'\times\vec{f}_i=\sum_i \vec{r}_i'\times(-m_i\vec{a}_c)=-(\sum_i m_i\vec{r}_i')\times\vec{a}_c=0$$

因而可得

$$\vec{M}'_{ex}=\frac{d\vec{L}'}{dt}$$

质心系中角动量定理的微分形式

$$\int_{t_0}^{t}\vec{M}'_{ex}dt=\vec{L}'-\vec{L}_0'$$

质心系中角动量定理的积分形式

注意：

①质心系角动量定理虽与惯性系的角动量定理具有完全相同的形式；

②后者总被强调在惯性系中成立，而即使质心有加速度，质心系为非惯性系(如在重力场中)，质心系角动量定理仍成立。

3、质心系中的角动量守恒定律

当外力相对质心的总力矩为零时，体系相对质心的角动量为恒量。

$$当\sum \vec{M}'_{ex}=0时,\ \frac{d\vec{L}'}{dt}=0\Rightarrow \vec{L}'=常矢量$$

$$\begin{aligned}同样：\quad M'_{ex,x}&=0 \quad\Rightarrow\quad L'_x=常量\\ M'_{ex,y}&=0 \quad\Rightarrow\quad L'_y=常量\\ M'_{ex,z}&=0 \quad\Rightarrow\quad L'_z=常量\end{aligned}$$

例：运动员在跳水过程中，若忽略空气阻力，所受到的唯一的外力是重力，它在质心系中的总力矩恒为零，因此运动员绕质心的角动量守恒。

例题4:质量为 $\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$的两个质点的位矢和速度分别为 $\vec{r}_1$、 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{r}_2$ 、 $\vec{v}_2$ ， 试求:

(1)每个质点相对于两质点质心的动量;

(2)两质点相对于它们的质心的动能;

(3)两质点相对于它们的质心的角动量.

解:(1)质心的速度为

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

于是可得质心系中质点的速度为

$$\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v},$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_C = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

由此可得，每个质点相对于质心的动量分别为

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v} = -\mu\vec{v}$$

两质点的约化质量

$$\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = \mu\vec{v}$$

(2) 质心系中两质点体系的动能为

$$E_{kC} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2$$

(3) 利用质心表达式，每个质点相对于质心的位矢分别为

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_c = \frac{m_2\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2\vec{r}_{21}}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_c = \frac{m_1\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_{21}}{m_1 + m_2}$$

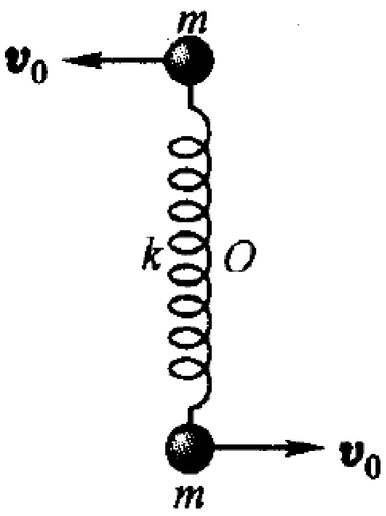
故两个质点相对于它们的质心的角动量为

$$\vec{L}_c = \vec{r}_1' \times \vec{p}_1' + \vec{r}_2' \times \vec{p}_2'$$

$$= \mu \frac{m_2\vec{r}_{21}}{m_1 + m_2} \times \vec{v} + \mu \frac{m_1\vec{r}_{21}}{m_1 + m_2} \times \vec{v}$$

$$= \mu\vec{r}_{21} \times \vec{v} = \vec{r}_{21} \times \left(\mu\vec{v}\right)$$

例题5： 如下图所示，质量为m的两小球系于轻弹簧的两端，置于光滑水平面上，当弹簧处于自然状态时，长为a，弹簧的劲度系数为k。令两球同时受冲力作用，各获得与连线垂直的等值方向的初速度，若在以后运动过程中弹簧的最大长度$b = 2a$，求两球的初速度v_0。



解： 以初始时刻两球连线中点*O*为定点来考察体系的角动量，初始时

$$L = mv_0\frac{a}{2} + mv_0\frac{a}{2} = mv_0 a$$

体系水平方向不受外力，竖直方向外力的合力为零，故体系角动量守恒。当弹簧达到最大伸长时，小球无径向速度，体系的角动量为

$$L' = mv\frac{b}{2} + mv\frac{b}{2} = mvb$$

体系相对质心的角动量守恒 $L = L'$, 即

$$mv_0 a = mvb \qquad (1)$$

另外弹簧的弹性力是保守内力，地面的支持力和重力不做功，所以体系的机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(b-a)^2$$

$$\Rightarrow \quad mv_0^2 = mv^2 + \frac{1}{2}k(b-a)^2 \qquad (2)$$

由（1）、（2）式消去$\boldsymbol{v}$，可得

$$v_0 = b\sqrt{\frac{k(b-a)}{2m(b+a)}}$$

将$\boldsymbol{b = 2a}$代入可得，

$$v_0 = a\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

力学的理论体系

惯性系S　$m\vec{a} = \vec{F}$

非惯性系S'　$\boldsymbol{m\vec{a}' = \vec{F}_{eff}}$　$\boldsymbol{\vec{F}_{eff} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯性力}}}$

$\vec{F}dt$
动量定理

$\vec{F}\cdot d\vec{r}$
动能定理

$\boldsymbol{\vec{r}\times\vec{F}dt}$
角动量定理

动量守恒定律

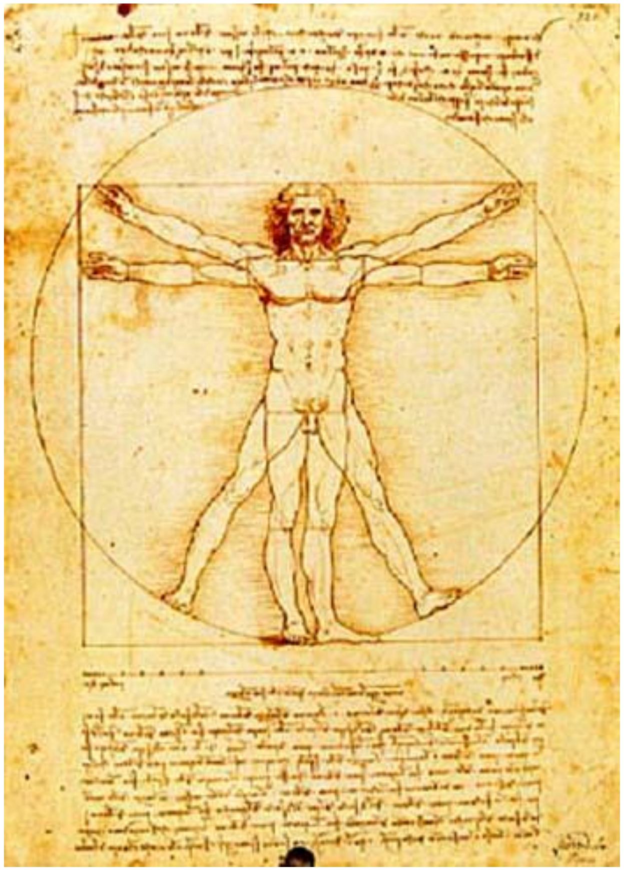
机械能守恒定律

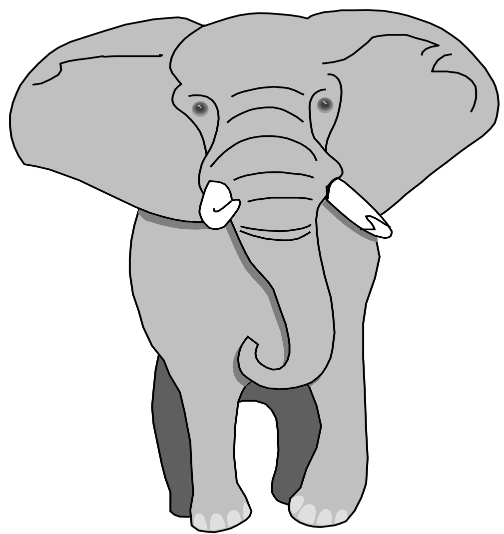
能量守恒定律

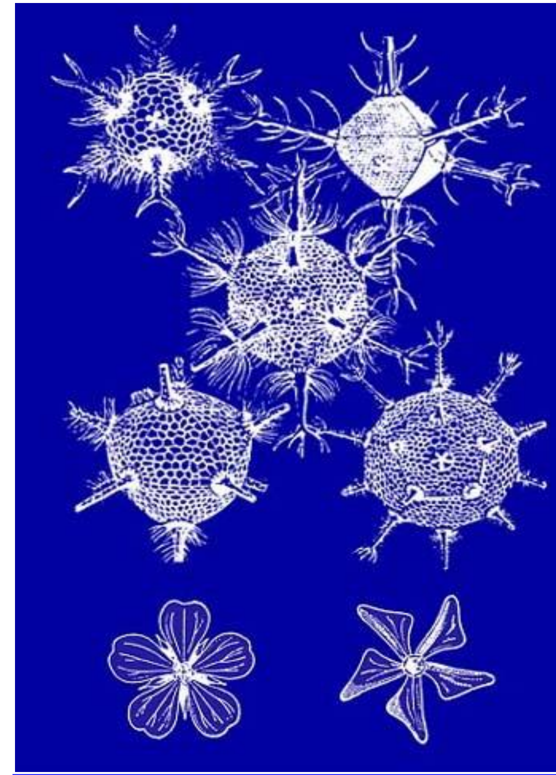
角动量守恒定律

§6.4对称性与守恒定律

●人体、动植物结构对称

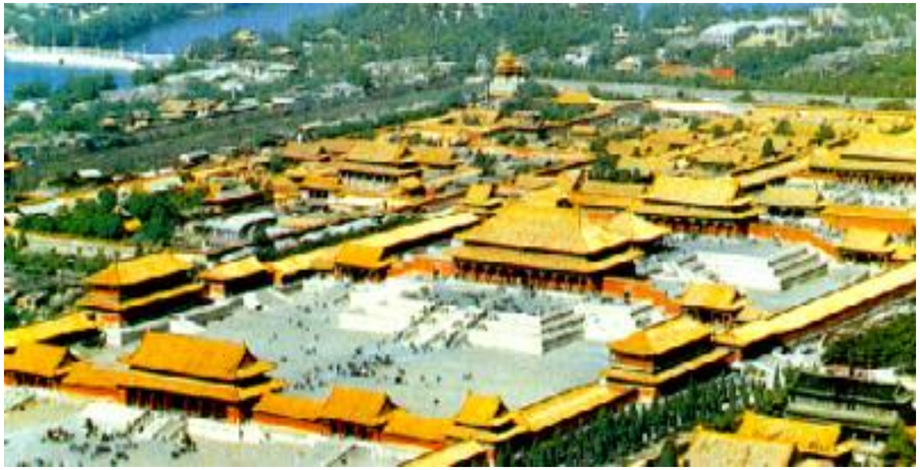




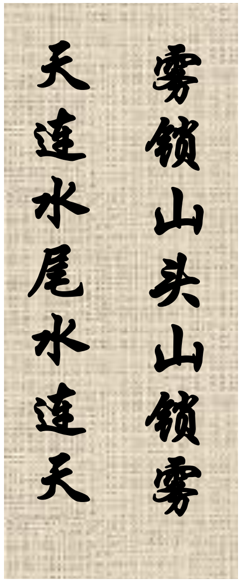


天竺葵 长春草

● 建筑物(宫殿,寺庙,陵墓,教堂)左右对称



●文学创作中的对称性



福建厦门鼓浪
屿的一幅对联

凉	长	水	香
风	日	动	莲
动	夏	风	碧
水	凉	凉	水
碧	风	夏	动
莲	动	日	风
香	水	长	凉

清代女诗人吴绛雪的
《四季回文诗. 夏》

香莲碧水动风凉 水动风凉夏日长 长日夏凉风动水 凉风动水碧莲香

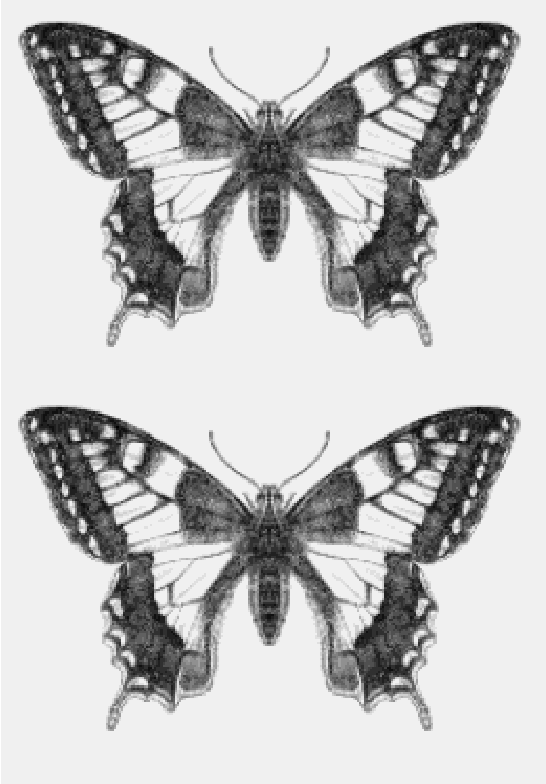
镜面对称

1.对称性

关于对称性的普遍的严格的定义是德国数学家魏尔（**H.Weyl**）**1951**年给出的：

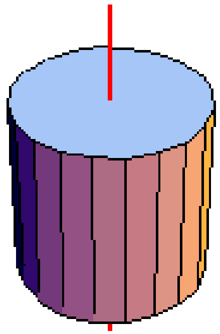
对一个事物进行一次变动或操作，如果经过操作后，该事物完全复原，则称该事物对所经历的操作是对称的。而该操作就叫对称操作。 由于操作方式不同而有若干种不同的对称性。

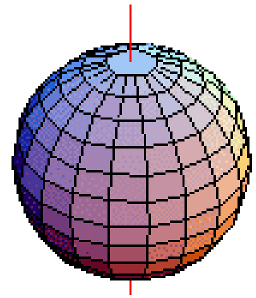
例：左右对称，
也称镜面对称

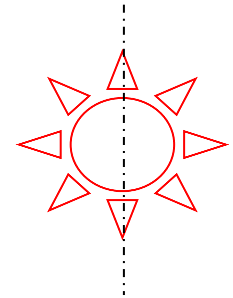


2.常见的对称性

①空间旋转对称

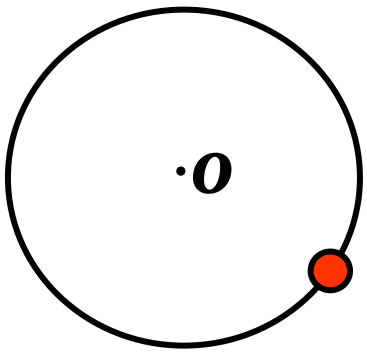




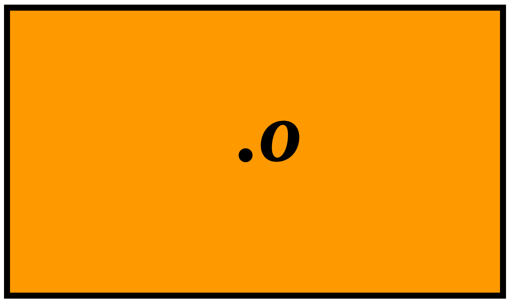


若体系绕某轴旋转 $2\pi/n$ 后恢复原状，则称该体系具有 n 次对称轴。

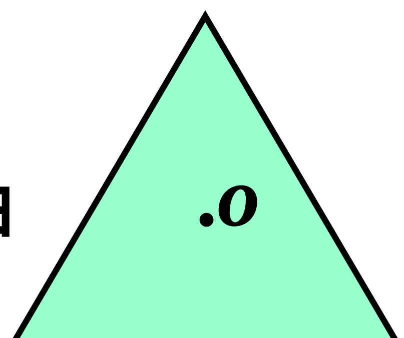
1次轴



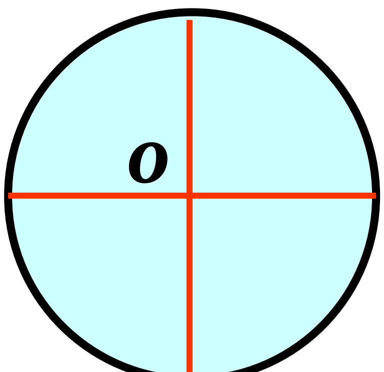
2次轴



3次轴



4次轴

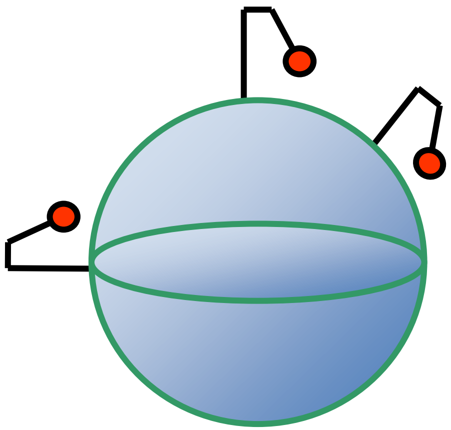


●物理定律的旋转对称性——空间各向同性

（空间各方向对物理定律等价，没有哪一个方向具有特别优越的地位）。

实验仪器方位旋转，实验结果不变。

物理定律的数学形式在旋转操作中保持不变。



例如：实验仪器取向不同，得出的单摆周期公式相同。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

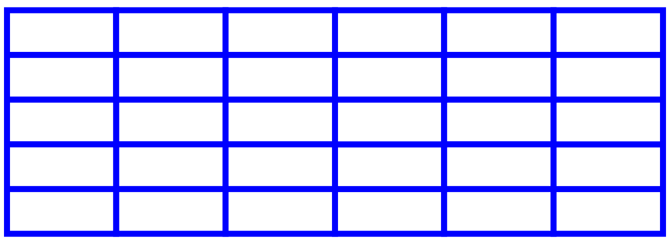
②空间平移对称性

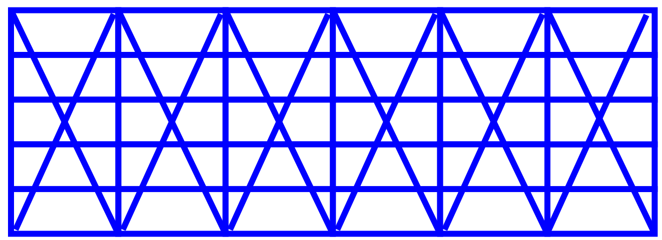
系统在空间平移，即 $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$ 变换下具有的不变性。

- 无限长直线：对沿直线移动任意步长的平移操作对称。

- 无限大平面：对沿面内任何方向、移动任意步长的平移操作**对称。**

- 平面网格：对沿面内某些特定方向、移动特定步长的平移操作(不变元)对称。



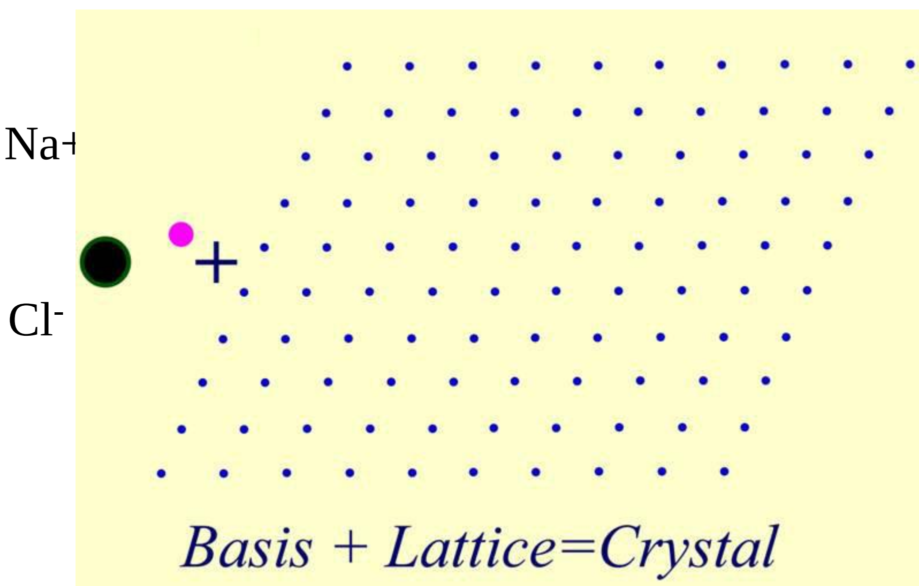


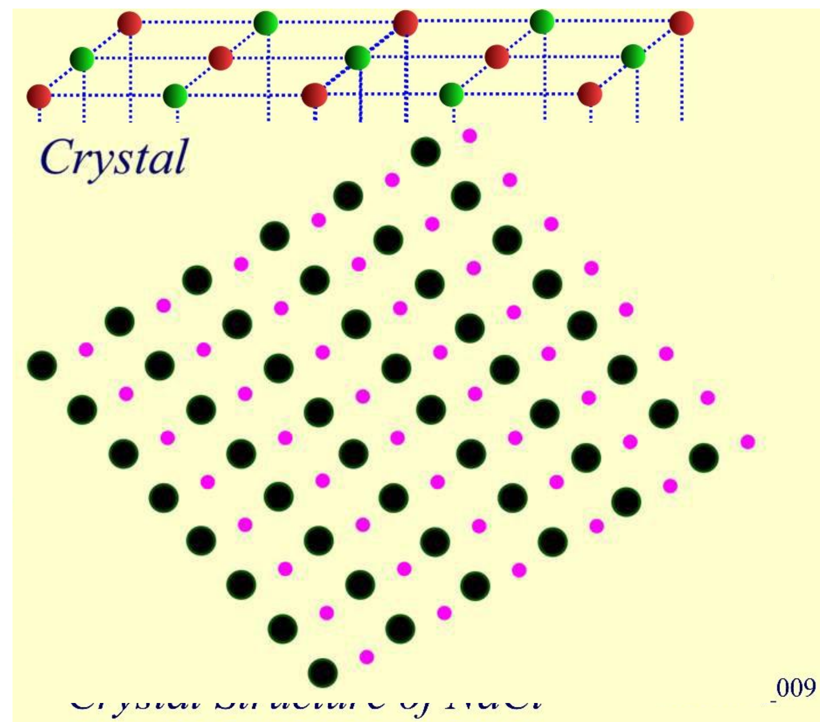
一个图形可以有很多不变元。

应用： 晶体是由结构基元（可以是原子、分子或离子）在空间呈不随时间变化的规则的三维周期排列而成。晶体的很多性质，只决定于它的点阵结构。两个化学成分完全不一样的晶体，如果它们的点阵结构完全一样，那么它们就具有许多相同的性质。

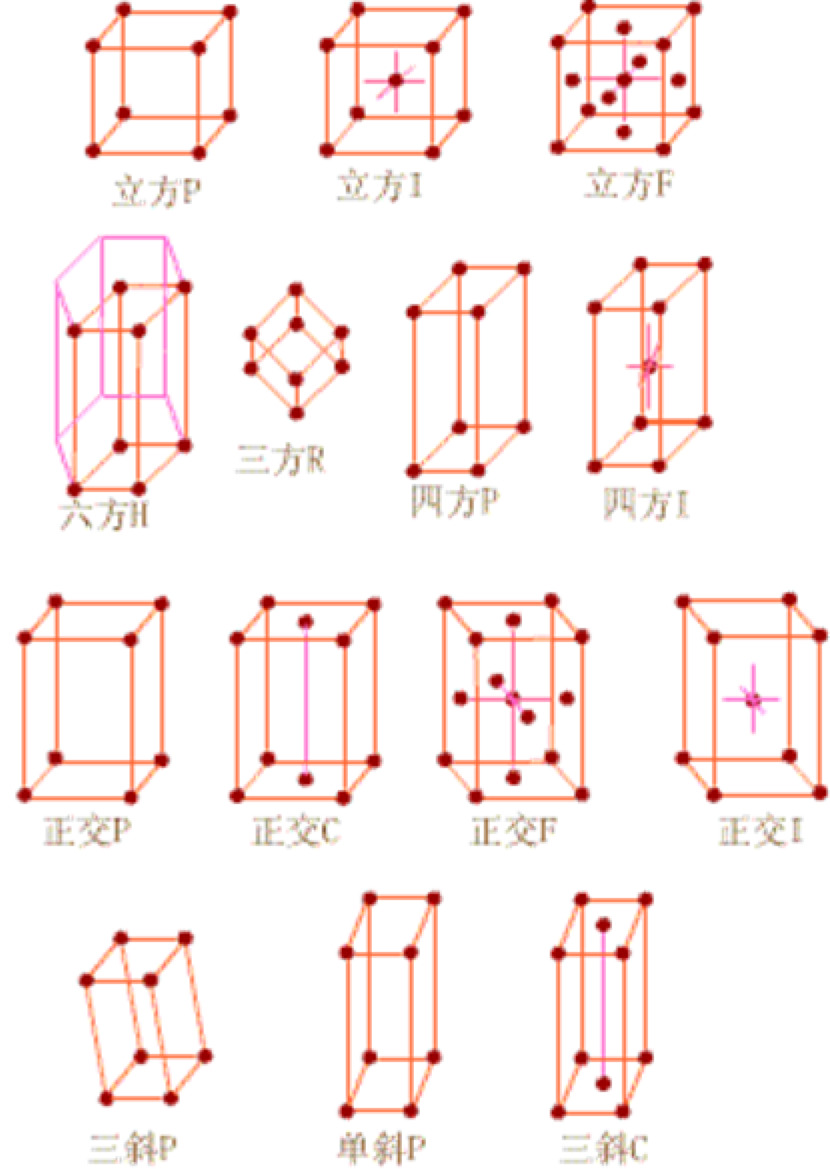
晶体结构＝点阵＋基元

氯化钠晶体结构





晶体空间点阵理论——固体理论的重要支柱



二维空间：17种不变元结构，17个不同的二维空间群。

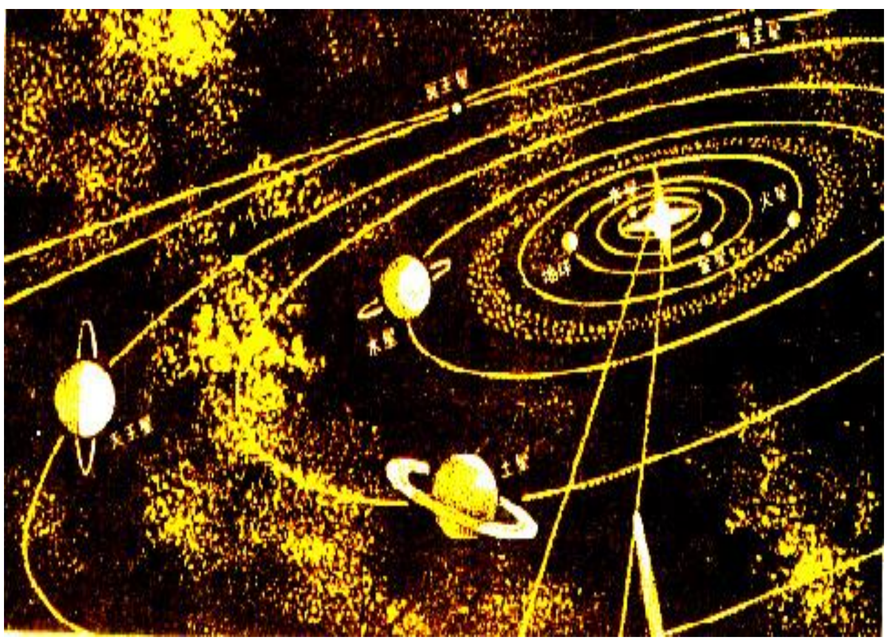
三维空间：230种不变元结构，任何晶体的空间点阵一定属于这230个空间群。

历史上晶体学研究的一个里程碑布拉维空间点阵（14种）

●物理定律的平移对称性——空间均匀性

（空间各位置对物理定律等价，没有哪一个位置具有特别优越的地位。）

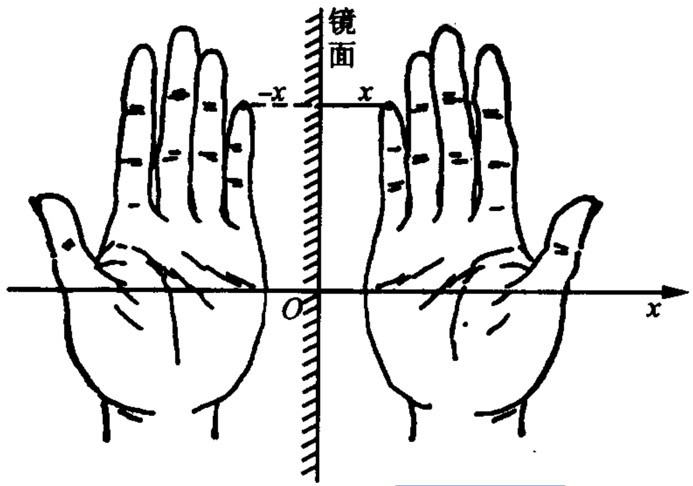
物理实验可以在不同地点重复，得出的规律不变。
物理定律的数学形式在平移操作中保持不变。



例如：在地球、月球、火星、河外星系...进行实验，得出的引力定律（万有引力定律、广义相对论）相同。

③镜象对称或左右对称

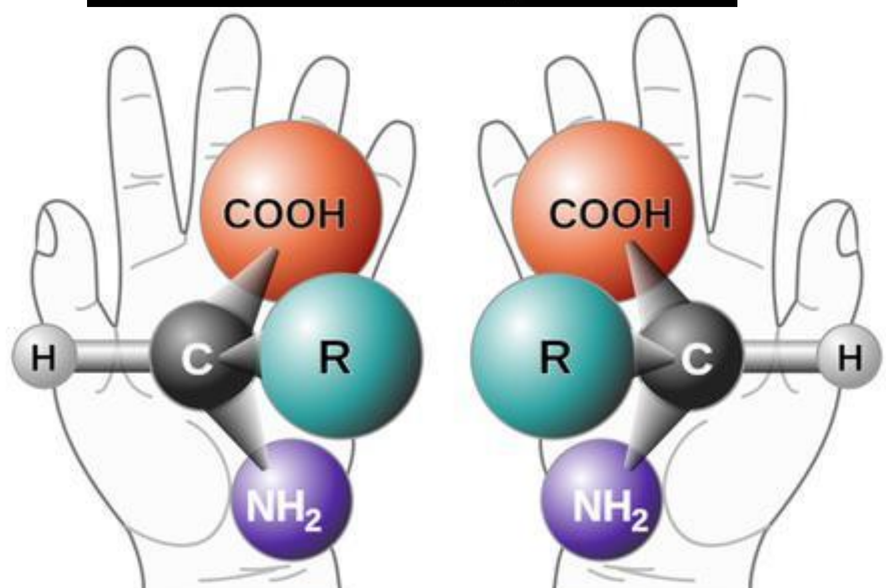
相应的操作是镜面反射。



左手　　右手

镜象反射对称，称为手性(chirality)。如具有手性特征的分子。

左右对称与平移、旋转不同（例如手套、鞋）

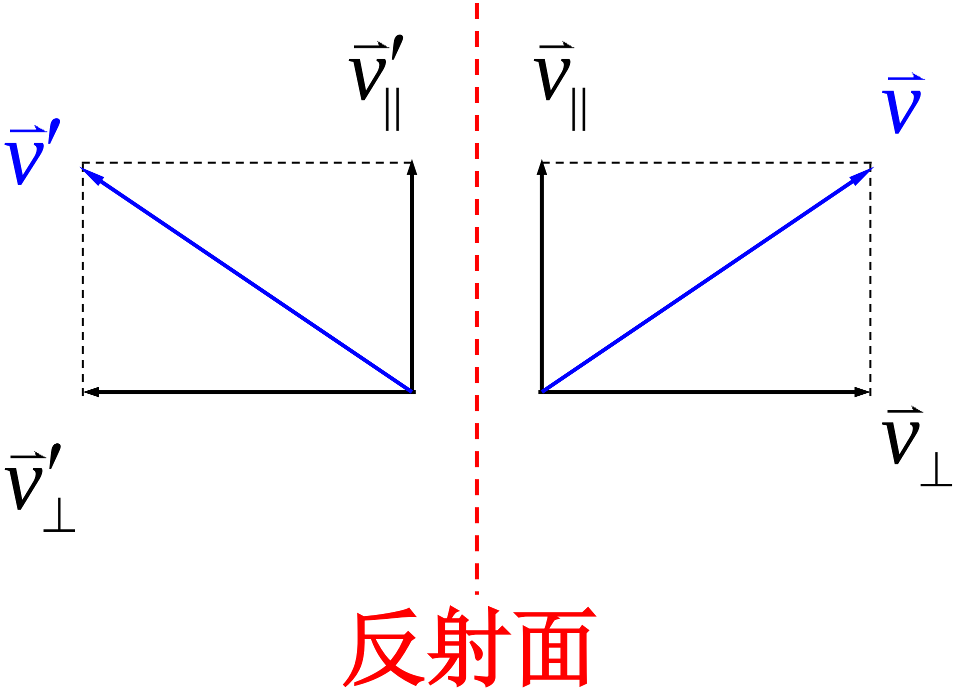


●根据镜象反射的性质可将物理学中的矢量分成两类：

极矢量 和 轴矢量

➢极矢量：镜象反射中垂直反射面的分量反向，
平行反射面的分量不变向。

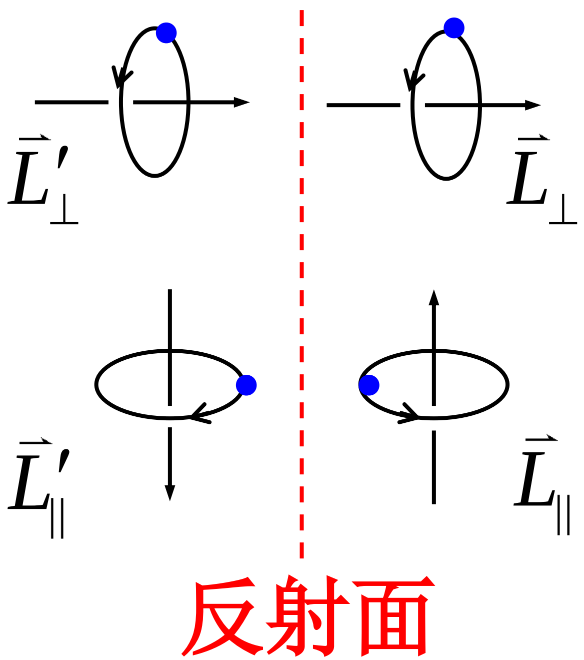
例如： $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{E} \cdots$



$$\begin{cases} \vec{v}'_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel} \\ \vec{v}'_{\perp} = -\vec{v}_{\perp} \end{cases}$$

➢轴矢量（赝矢量）：镜象反射中垂直反射面的分量不变向，
平行反射面的分量反向。

如：$\vec{\omega}$, $\vec{L}$, $\vec{B}$, …



$$\begin{cases} \vec{L}'_{\perp} = \vec{L}_{\perp} \\ \vec{L}'_{\parallel} = -\vec{L}_{\parallel} \end{cases}$$

$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$

（极） （极） （轴）

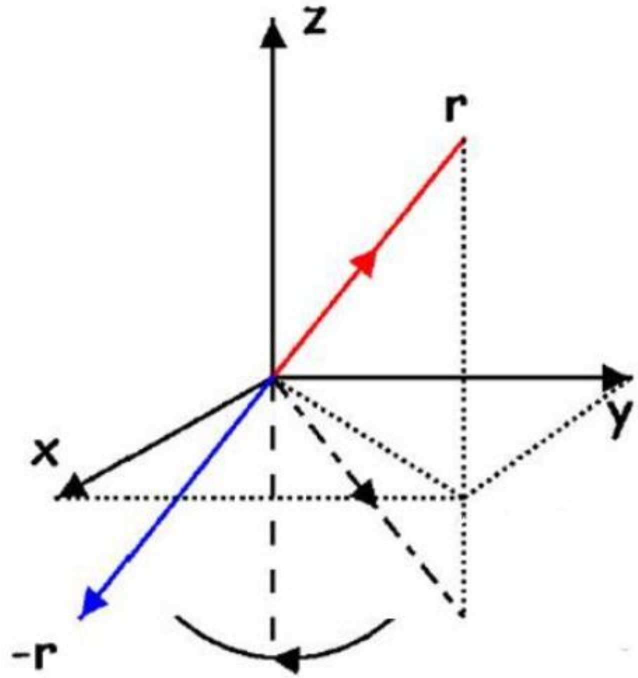
可以证明：极矢量×极矢量 ⟶ 轴矢量

④空间反演对称性

$\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$ 的操作称为对原点O的空间反演。

直角坐标系中的空间反演 $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \\ z \to -z \end{cases}$

相应的对称性称为空间反演对称性，或宇称。



●弱相互作用宇称不守恒

宇称概念1924年提出，20世纪50年代中期以前，大量实验证明**宇称守恒定律**是正确的。

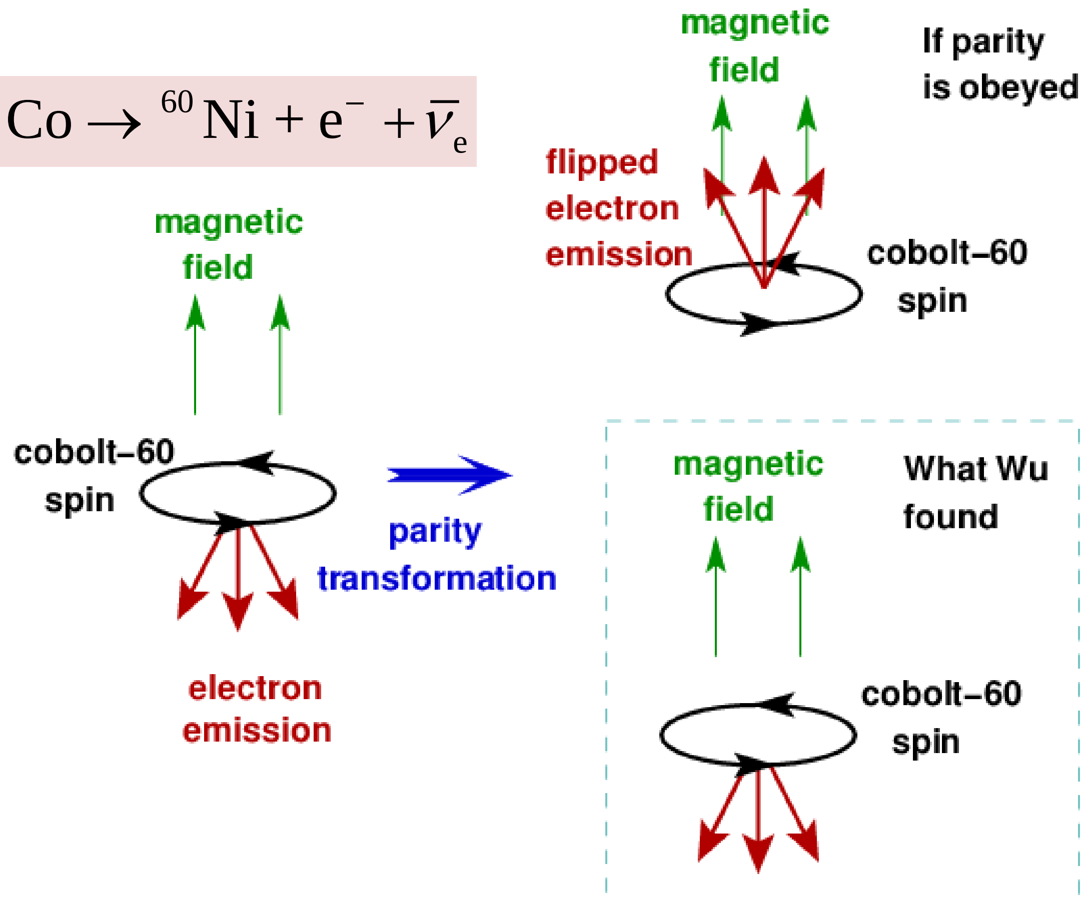
1956年，杨振宁、李政道:“弱作用下宇称不守恒”，1957年吴健雄的实验证明了这一假说。杨、李荣获1957年诺贝尔物理学奖

李政道

杨振宁

吴健雄实验（Wu-experiment）

$$^{60}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{60}\mathrm{Ni} + \mathrm{e}^{-} + \overline{\nu}_{\mathrm{e}}$$



Beta emission is preferentially in the direction opposite the nuclear spin, in violation of conservation of parity.

⑤时间平移对称性

时间平移变换： $t \rightarrow t + \Delta t$

- 静止物体对时间平移具有对称性；
- 匀速运动物体的速度对时间平移具有对称性；
- 周期系统(单摆、弹簧振子)只对周期T及其整数倍的时间平移变换具有对称性。

物理定律的时间平移对称性：

物理定律的数学形式不随时间变化。
物理实验可以在不同时间重复，其遵循的规律不变。

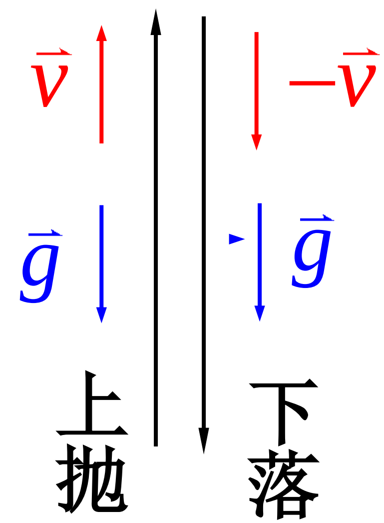
⑥时间反演对称性

时间反演： $t \to -t$ 又称时间倒流

某些理想过程： 无阻尼的单摆、自由落体…… 时间反演不变

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \xrightarrow[dt \to -dt]{t \to -t} -\vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \xrightarrow[dt^2 \to dt^2]{t \to -t} \vec{a}$$



时间反演不变：任何时刻只要速度反向，过程就会逆转

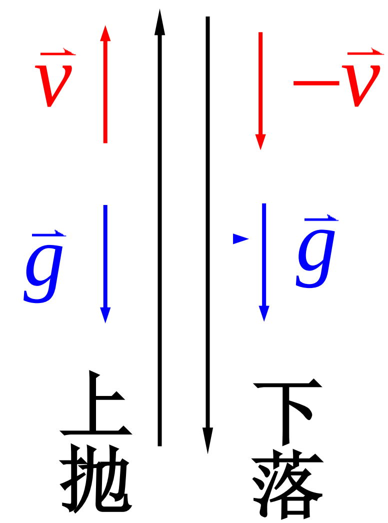
⑥时间反演对称性

时间反演： $t \rightarrow -t$

又称时间倒流

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \xrightarrow[dt \rightarrow -dt]{t \rightarrow -t} -\vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \xrightarrow[dt^2 \rightarrow dt^2]{t \rightarrow -t} \vec{a}$$



时间反演不变：任何时刻只要速度反向，过程就会逆转

某些理想过程： 无阻尼的单摆
自由落体……

$\left.\begin{array}{l}\text{无阻尼的单摆} \\ \text{自由落体……}\end{array}\right\}$ 时间反演不变

●力对时间反演变换有两种情况：

➢保守力只与物体相对位置有关，故对时间反演不变。

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\xrightarrow{\text{时间反演}}\vec{F}=m\frac{d(-\vec{v})}{d(-t)}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

➢耗散力与速度方向有关，故对时间反演变化。

●牛顿第二定律对保守系统时间反演不变，

对非保守系统则不具有时间反演不变性。

实际宏观过程总是无法避免耗散，因此现实生活中的许多现象不具有时间反演不变性：

武打片动作的真实性：紧身衣——真实，大袍——不真实；

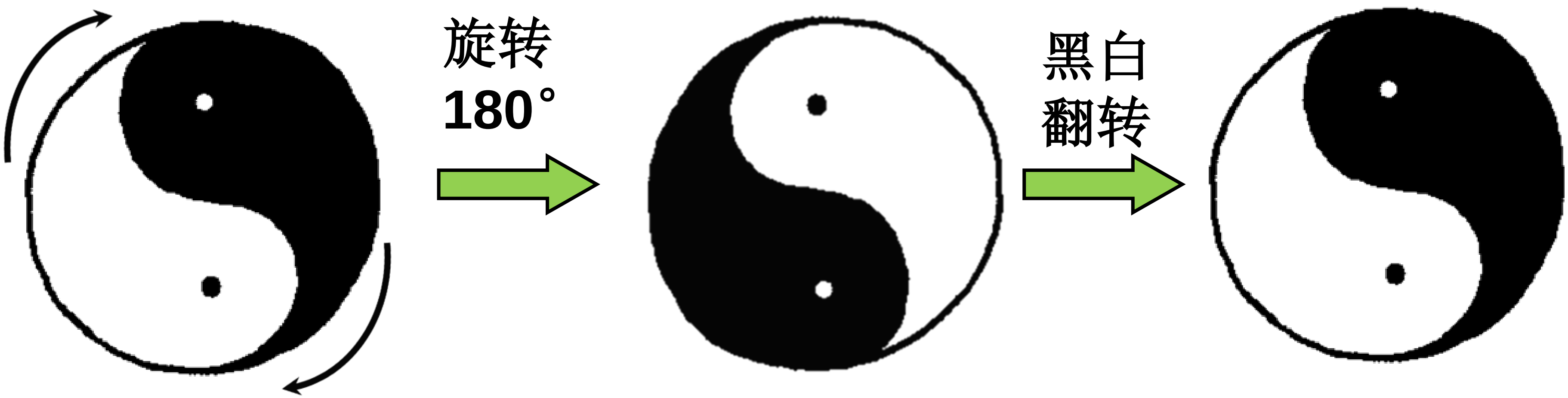
热功转换；扩散现象；生命现象……

非保守系统中的过程不具有时间反演对称性，实际宏观过程不具有时间反演对称性——热力学第二定律。

⑦联合操作与对称性

有的系统对某种操作可能不具有对称性，但对几种操作的联合却可能具有对称性。

例如：



ESCHER（埃舍尔）的骑士图案是镜象反射、黑白置换、平移操作构成对称操作。

2. 对称性原理

法国物理学家皮埃尔.居里（**Pierre Curie**）在**1894**年指出

对称性原理：

原因中的对称性必然存在于结果中，

结果中的不对称性必然存在于原因中。

●对称性原理是凌驾于物理规律之上的自然界的一条基本原理。根据对称性原理，往往可在不具体知道某些物理规律的情况下给出所需的结论。

●在物理学中具有更深刻意义的是物理定律的对称性。物理定律的对称性是指经过一定的操作后，物理定律的形式保持不变，因此物理定律的对称性又叫不变性。对称性概念在现代物理学中具有重要作用。它为物理学家致力于认识错综复杂的宇宙提供了强有力的工具。

3. 对称性与守恒定律

诺特定理：连续变换的对称性都对应一条守恒定律。

Emmy Noether (1882-1935)

诺特：最伟大的女数学家

对称性 ——对应—— 守恒量 ——对应—— 守恒定律

严格的对称性 —— 严格的守恒定律

近似的对称性 —— 近似的守恒定律

物理学中存在着许多守恒定律, 如能量守恒、动量守恒、角动量守恒、电荷守恒、奇异数守恒、重子数守恒、同位旋守恒……这些守恒定律的存在并不是偶然的，它们是物理规律具有各种对称性的结果。

守恒定律总结


空间平移对称
空间旋转对称
时间平移对称
动量守恒
角动量守恒
机械能守恒
对称性破缺
力
力矩
功
动量定理
角动量定理
动能定理

例题6：两体正碰

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

因

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 \\ v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2 \end{cases}$$

果

因果对称关联 $\begin{cases} \text{因：具有下标1，2置换对称性} \\ \text{果：具有相同对称性} \end{cases}$