第八章 空间解析几何

§8.1 向量与坐标系

§8.2 平面与直线

§8.3 二次曲面

§8.4 坐标变换和常用坐标系

平面与直线

一、平面的方程

二、直线的方程

三、平面、直线的位置关系

一、平面的方程

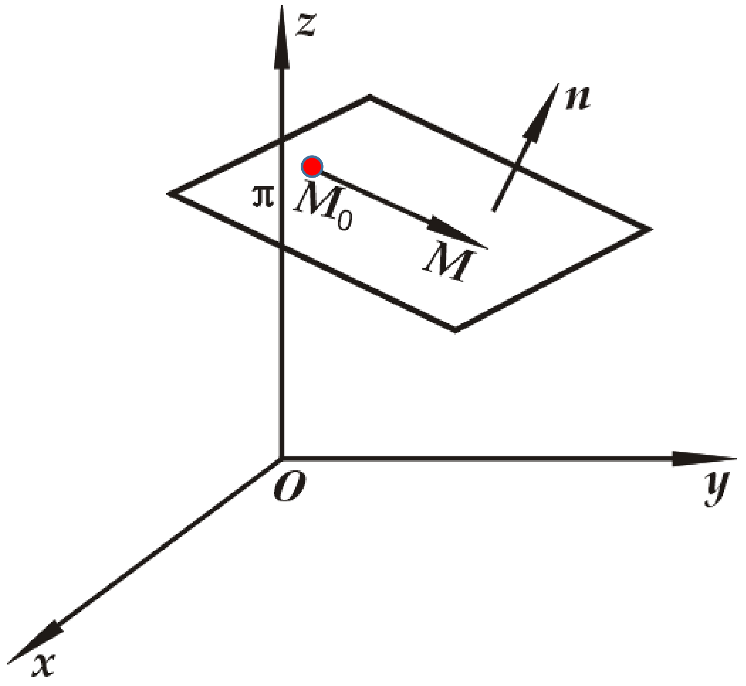
1. 平面的点法式方程

问题：已知平面$\boldsymbol{\pi}$的法向量是$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,且过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，则$\boldsymbol{\pi}$的方程为?

因为 $M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot \boldsymbol{n}=0.$

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}=(A,B,C)\\ \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



该方程称为平面$\boldsymbol{\pi}$的点法式方程.

例： 求过点 $M_1(1,2,-1)$, $M_2(2,3,1)$ 且和平面 $x-y+z+1=0$ 垂直的平面方程.

解： 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,2)$ 在该平面上, 已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$,

所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\boldsymbol{n}_1$ 都垂直.

$$\text{故 } \boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(3,1,-2).$$

由公式得该平面的方程为 $3(x-1)+(y-2)-2(z+1)=0$

即 $3x+y-2z-7=0$

例： 求过点$A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$ 三点的平面方程.

解： 所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 都垂直，故 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$M\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad \left(\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0\right).$$

称之为平面的三点式方程.

例： 设a,b,c均不为零，平面过点$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$, 求其方程.

解： 代入三点式方程 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ 得 $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$

展开整理得： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

称之为平面的**截距式方程.**

任意平面有**点法式**方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般式方程.

令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$，则 $Ax+By+Cz+D=0.$

反之，若有几何对象方程为 $Ax+By+Cz+D=0,$

设 (x_0, y_0, z_0) 是其上任意一点，则 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

相减即得：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

它表示过点 (x_0, y_0, z_0) 且以 $n=(A,B,C)$ 为法向量的平面.

结论： 任一三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C 不同时为零)

表示一张平面，其法向为 (A,B,C).

例： 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解： 因平面通过 x 轴，可设其方程为 $By+Cz=0$

又点 $(4,-3,-1)$ 在平面上, 因此 $-3B-C=0$，即 $\boldsymbol{C=-3B}$.

代入原方程并化简, 得所求平面方程为 $y-3z=0$

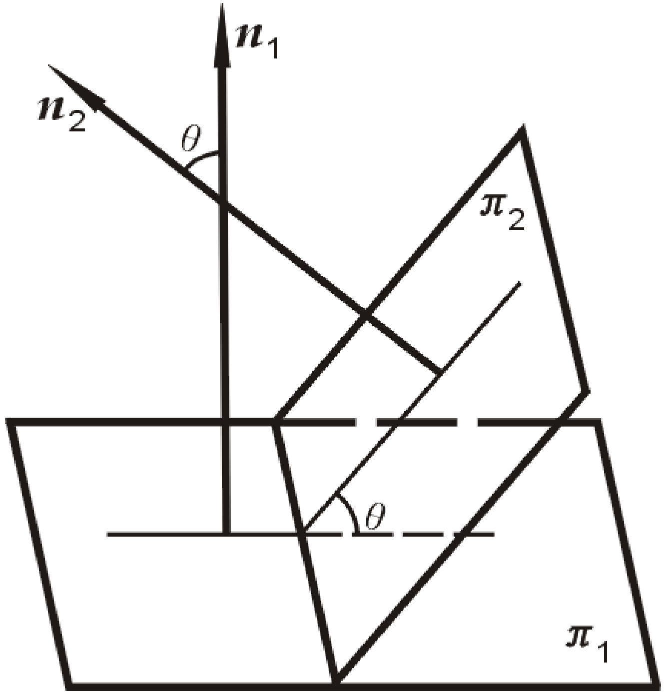
例： 将平面 $3x-4y+z-5=0$ 化为截距式方程.

解： 截距即为平面与各坐标轴交点到原点的有向距离. 由

$$\begin{cases} y=z=0 \Rightarrow a=\dfrac{5}{3} \\ x=z=0 \Rightarrow b=-\dfrac{5}{4} \\ x=y=0 \Rightarrow c=5. \end{cases}$$

截距式方程为：$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1$$

两平面的夹角



两平面的夹角：两平面法向量的夹角(通常取锐角). 设：

$$\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

因此 π_1 与 π_2 的夹角的余弦为：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

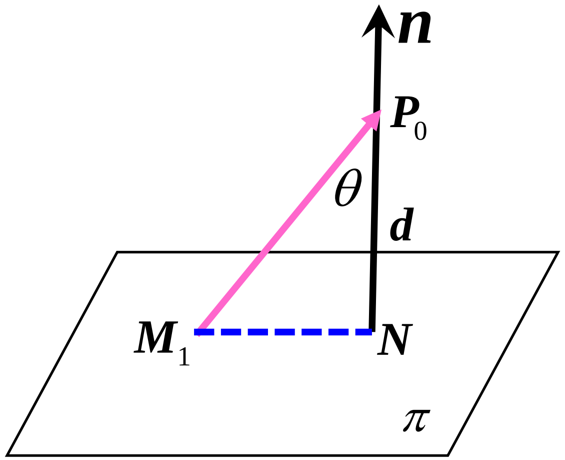
特别地： $\pi_1//\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1//\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

$$\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

点到平面的距离

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是空间一点，则 P_0 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $d=?$

在平面上任取一点 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$，



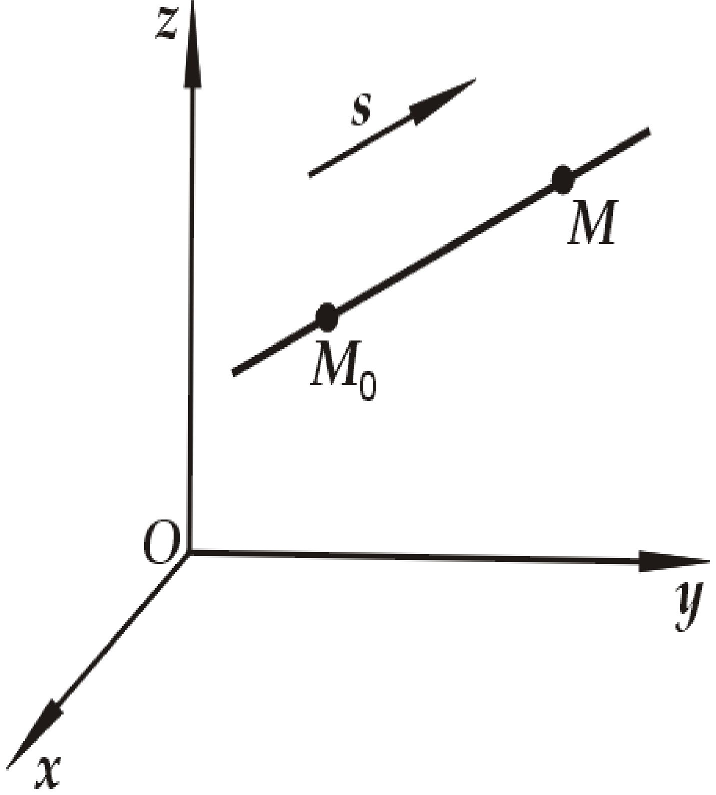
$$d=\left|\overrightarrow{M_1P_0}\right|\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{M_1P_0}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|\cdot\cos\theta}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{\left|(A,B,C)\cdot(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|(Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1))\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

注意到 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$，代入得：

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

二、直线的方程



1. 直线的点向式方程

设直线 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，它的一个方向向量为

$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$. 则直线 L 的方程是？

取直线上任一点 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$，则：

$$M = (x, y, z) \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M} // \boldsymbol{s} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此方程组称为直线的**点向式方程**.

注： 点向式中，x, y, z 的系数必须是1.

当 m, n, p 中有一个或两个为零时，就理解为相应的分子也为零.

2. 直线的两点式方程

过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 L 的方程？

可取 L 的方向向量为 $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，由点向式知 L 的方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

称之为直线的**两点式方程**.

3. 直线的参数方程

设直线 L 的点向式方程为 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

令其比值为 t，则：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ 此式称为直线 L 的**参数方程**，t 为参数.

4. 直线的一般方程

空间直线可以看作是两个**不平行**平面的交，因此可由下面的方程组表示：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

称之为直线的**一般方程**.

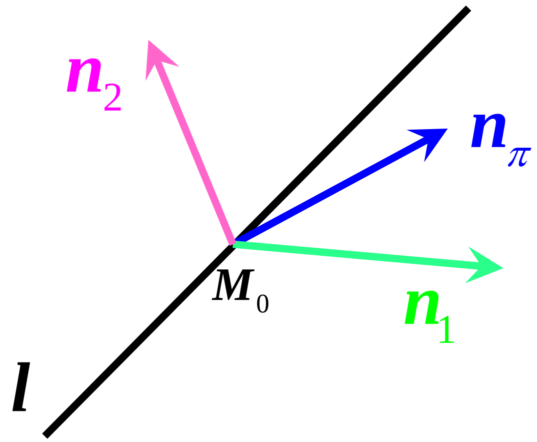
例： 求直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$ 的点向式方程.

解： 先求直线上一点 $M_0(1,0,-2)$（可取 $x=1$，代入原方程组解得 $y=0, z=-2$ ）

再求直线的方向向量：$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4,-1,-3)$. 故点向式方程为：

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}.$$

例： 求过直线 l: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的平面束方程.



解： 若平面 π 过 l，则 π 过 l 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，且法向量与

$n_1=(A_1,B_1,C_1)$，$n_2=(A_2,B_2,C_2)$ 共面.

$\Rightarrow$ 存在数 λ,μ 使得 $n_\pi=\lambda n_1+\mu n_2=\lambda(A_1,B_1,C_1)+\mu(A_2,B_2,C_2)$.

$\Rightarrow$ π 的方程为 $(\lambda(A_1,B_1,C_1)+\mu(A_2,B_2,C_2))\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$

代入 $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$，$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$ 化简得：

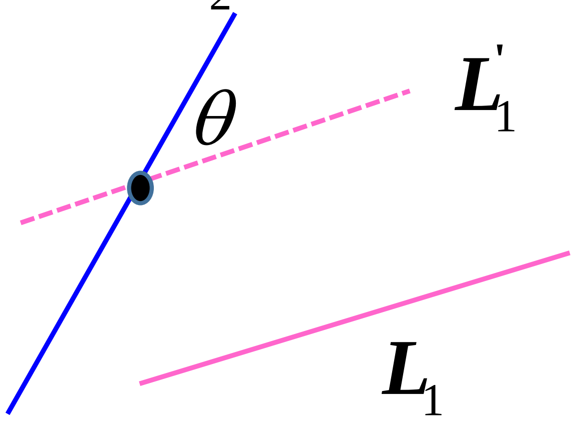
$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

又显然对任意 λ,μ，平面 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

过直线 l，故有：**通过直线 l 的平面束为**

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

两直线的夹角



两直线的夹角：两直线方向向量的夹角(取锐角). 设：

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

方向向量 $s_1=(m_1,n_1,p_1)$, $s_2=(m_2,n_2,p_2)$

因此 L_1 与 L_2 的夹角的余弦为：$\cos\theta=\dfrac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1|\cdot|s_2|}=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

特别地：$L_1 // L_2 \Leftrightarrow s_1 // s_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

$$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow s_1\perp s_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

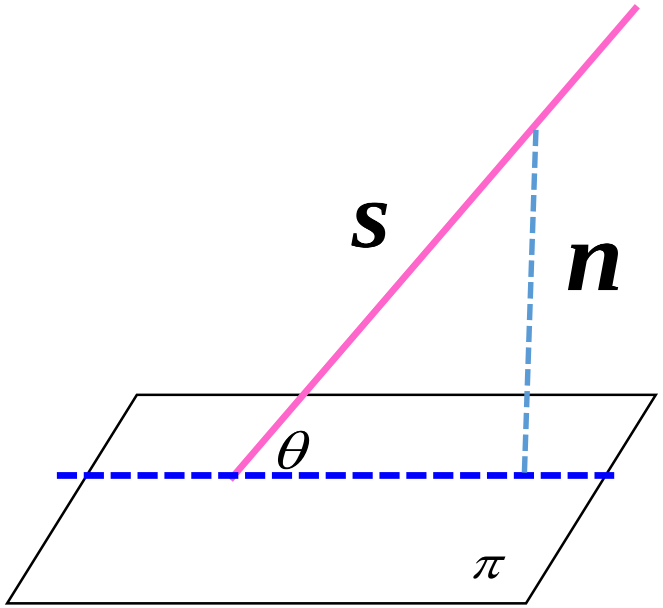
直线与平面的夹角

直线与平面的夹角：直线与其在平面上的投影直线的夹角，称为该直线平面的夹角.

设 π： $Ax+By+Cz+D=0 \longrightarrow n=(A,B,C)$

L： $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \longrightarrow s=(m,n,p)$

则：$\sin\theta=\dfrac{|n\cdot s|}{|n|\cdot|s|}=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

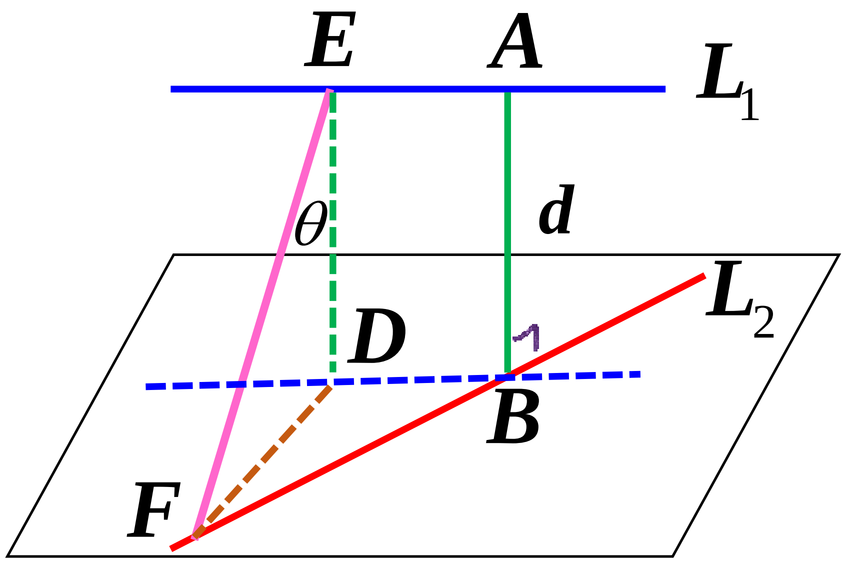


特别地：$L_1 // \pi \Leftrightarrow n\perp s \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$

$L_1\perp\pi \Leftrightarrow n//s \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}.$

异面直线的公垂线与距离

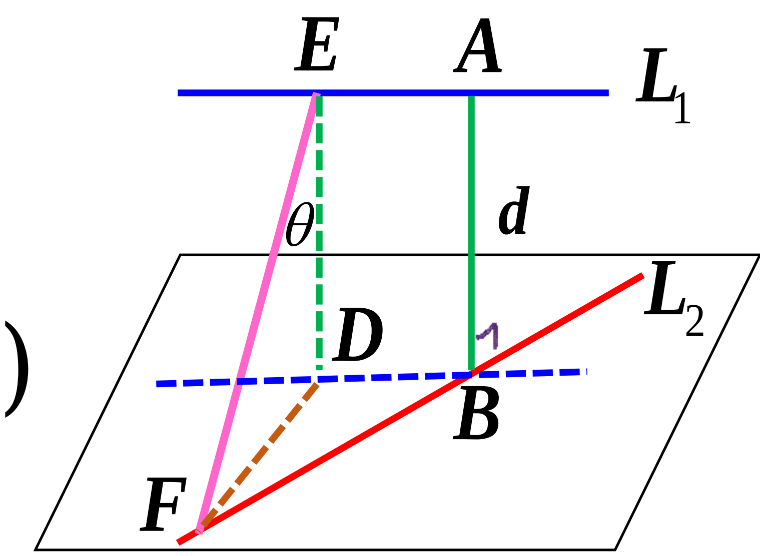
公垂线与距离：与两异面直线都**垂直相交**的直线，称为它们的**公垂线**； 两垂足的距离称为两**异面直线的距离**.



设 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ 的方向分别为 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ 且 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$ 为直线 $\boldsymbol{AB}$ 的一个方向.

如图所示，$\boldsymbol{d}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{ED}\right|=\left|\overrightarrow{EF}\right|\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\theta}{|\boldsymbol{s}|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{s}\right|}{|\boldsymbol{s}|}$

计算公垂线方程的两种方法:



法一

① 设 $A=A(t_1),\ B=B(t_2)$

② $\overrightarrow{AB}\,//\,s=s_1\times s_2\ \Rightarrow\left(B(t_2)-A(t_1)\right)=\lambda\cdot\left(s_1\times s_2\right)$

③ 解三元一次方程组得 t_1,t_2,λ 从而得A,B.

④ 两点式得公垂线AB的方程.

法二

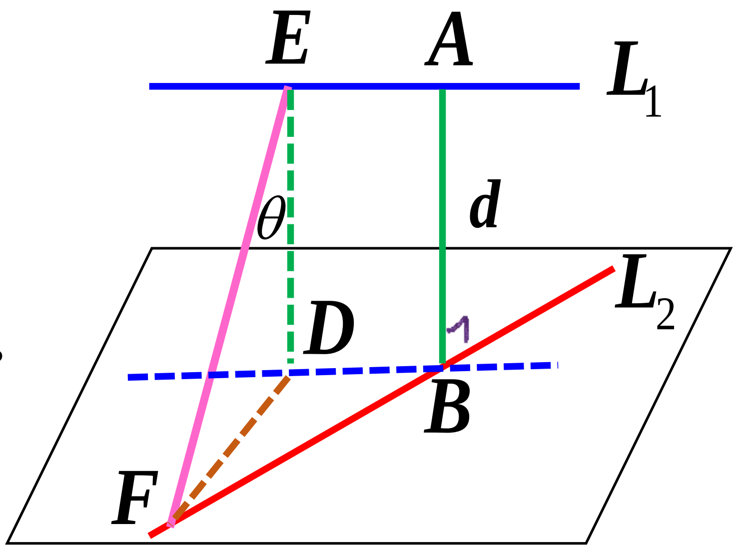
①在 L_1,L_2 上分别取点 E,F.

②计算平面 EAB (过点 E 且法向量为 $n_1=s_1\times s=s_1\times(s_1\times s_2)$)

③计算平面 FAB (过点 F 且法向量为 $n_2=s_2\times s=s_2\times(s_1\times s_2)$)

④联立两者即是公垂线的一般方程.

例： 求两直线 $L_1:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-t \\ z=2-2t \end{cases}$ 的公垂线方程和距离.



解： (1)设公垂线的两垂足为 A,B，其中

$$A=A\left(-\frac{4t_1+5}{3},\frac{t_1+2}{3},t_1\right),\ B=B(-1+2t_2,-t_2,2-2t_2).$$

L_1,L_2 的方向分别为 $s_1=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3},1\right),s_2=(2,-1,-2).$

于是AB 的方向为 $s=s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\sim(1,-2,2)$

$$\boxed{A = A\left(-\frac{4t_1+5}{3}, \frac{t_1+2}{3}, t_1\right), \quad B = B(-1+2t_2, -t_2, 2-2t_2), \quad s = (1,-2,2).}$$

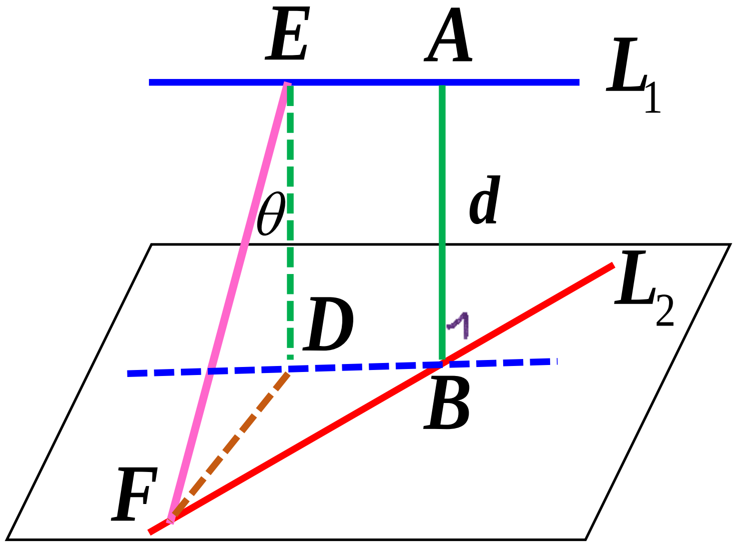
由 $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot s$ 得方程组 $\begin{cases} 2t_2 + \dfrac{4t_1+2}{3} = \lambda \\ t_2 + \dfrac{t_1+2}{3} = 2\lambda \\ -2t_2 - t_1 + 2 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ 故:

$$A = A\left(-\frac{4t_1+5}{3}, \frac{t_1+2}{3}, t_1\right) = (1,0,-2), \quad B = B(-1+2t_2, -t_2, 2-2t_2) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

于是两异面直线距离为 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 2.$

公垂线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+2}{2}.$

例： 求两直线 $L_1:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-t \\ z=2-2t \end{cases}$ 的公垂线方程和距离.



解： (2)取 L_1, L_2 上两点 $E(-3,1,1), F(-1,0,2)$.

L_1 的方向为：$s_1=(1,1,1)\times(2,-1,3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$=(4,-1,-3)$

L_2 的方向为：$s_2=(2,-1,-2)$

于是公垂线 AB 的一个方向为：$s=s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-1,\ 2,-2)$

故平面ABE的法向为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=(8，11，7)$，而其方程为：

$$8x+11y+7z+6=0.$$

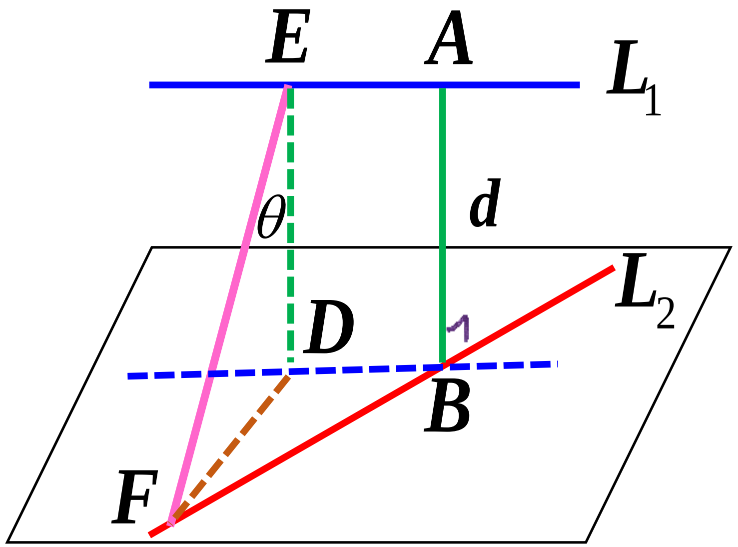
同理可得：平面ABF的法向为$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{s}=(6,6,3)\sim(2,2,1)$，而其方程为：

$$2x+2y+z=0.$$

故公垂线AB的方程为：$\begin{cases}8x+11y+7z+6=0\\2x+2y+z=0\end{cases}$

再由 $d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{ED}\right|=\left|\overrightarrow{EF}\right|\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{s}\right|}{|\boldsymbol{s}|}$ 得：

$$d=\frac{\left|(2,-1,1)\cdot(-1,2,-2)\right|}{\sqrt{9}}=2.$$



$E(-3,1,1)$, $F(-1,0,2)$,

$\boldsymbol{s}=(-1,\ 2,-2)$

1. 已知直线 $\boldsymbol{L}_1$： $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{1}=\dfrac{\boldsymbol{y}-5}{-2}=\dfrac{\boldsymbol{z}+8}{1}$， $\boldsymbol{L}_2$：$\begin{cases}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=6\\2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=3\end{cases}$ 求两直线的夹角.

2. 直线 $\boldsymbol{L}$ 过点 $\boldsymbol{M}_0(2,1,3)$，与定直线 $\boldsymbol{L}_1$： $\dfrac{\boldsymbol{x}+1}{3}=\dfrac{\boldsymbol{y}-1}{2}=\dfrac{\boldsymbol{z}}{-1}$ 垂直相交，求其方程.

3. 求点 $\boldsymbol{M}_0$ 在平面 $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=4$ 上的投影.

直线与平面小结

本节主要知识点：

1.平面的方程
- 点法式
- 三点式
- 截距式
- 一般式

2.直线的方程
- 点向式
- 两点式
- 参数方程
- 一般方程

3.平面、直线相关的一些几何量的计算
- 点到平面、直线的距离
- 平面、直线的夹角
- 点、直线的投影
- 异面直线的距离、公垂线
- ……

4.重要的是定义和方法，不是公式.