第九章　机械振动

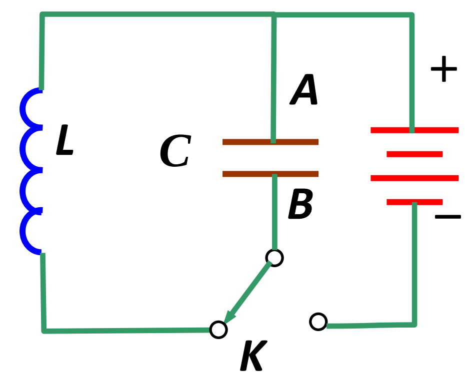
§9.1简谐振动

●振动：任何一个物理量在某一数值附近的反复变化。振动具有重复性和周期性。

➢振动是普遍存在的一种运动形式

①物体的来回往复运动(弹簧振子、单摆等)

②电流、电压的周期性变化。



●机械振动：物体在一定位置附近作周期性往复运动。

1. 简谐振动的特征及其表达式

弹簧振子——轻弹簧与物体m组成的系统。

物体只受弹力作用

$$F_x = -kx$$

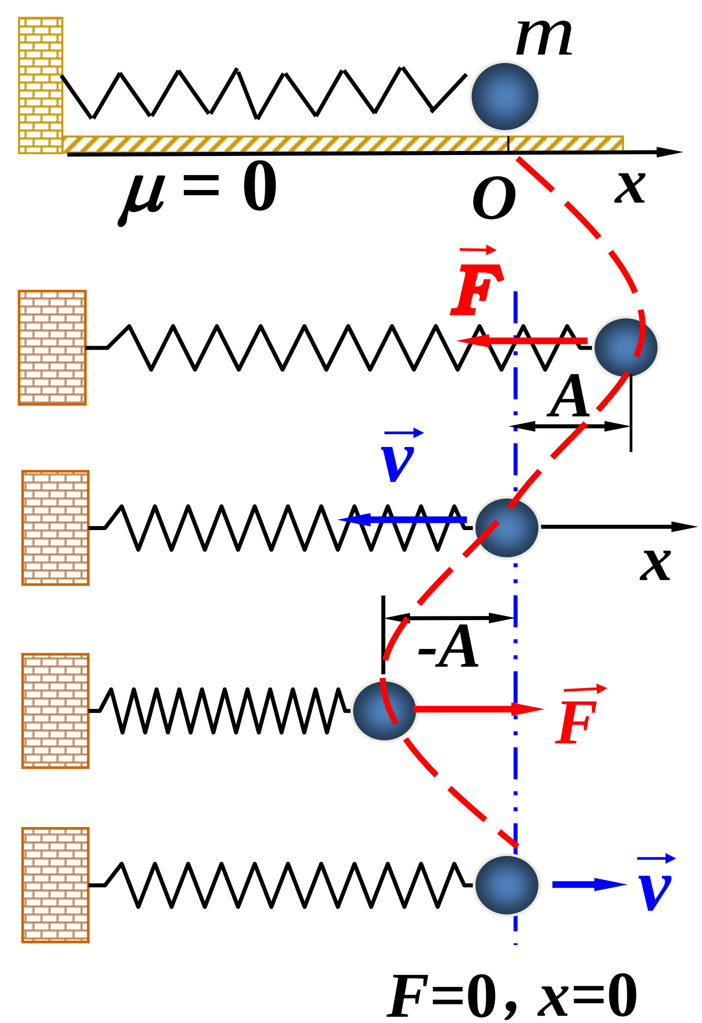
其中k弹性系数

弹力的两个特点:

①弹力的指向总是与位移x的方向反向，总是指向平衡位置。

②弹力的大小正比于位移x的大小。

在弹性力作用下的质点，其基本的运动形式是在平衡点附近来回振荡，它是一种被“束缚”在平衡点附近的运动。



物体只受弹力作用

$$\boxed{F_x = -kx}$$ k——劲度系数

由牛顿第二定律有

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{或} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$，则有 $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 由振动系统本身的性质决定.

●简谐振动的动力学定义：

若物体运动的动力方程可表示为

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

其中 ω_0 是由系统本身的性质所决定的，则此物体做**简谐振动**。

方程的解为: $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$ A与φ_0 由初始条件确定

——简谐振动的运动方程

速度表达式:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

加速度表达式:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

2. 描述简谐振动的特征参量

①周期、频率和角频率

周期(T)——系统作一次完整振动所需时间。

$$x(t)=x(t+T)\text{，}\quad v(t)=v(t+T)$$

$$\begin{cases} A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A\cos[\omega_0(t+T)+\varphi_0] \\ -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=-A\omega_0\sin[\omega_0(t+T)+\varphi_0] \end{cases}$$

$$\omega_0 T=2n\pi,\quad n=1,2,3,\dots$$

T、 ν 和ω_0由振动系统本身的性质决定, 振幅A无关，这是简谐振动的重要特征。

T 的最小值：

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

频率(ν)—— 单位时间内物体所做完全振动的次数。

角频率(ω_0)—— 2π 秒内完成振动的次数，也称固有频率。

$$\boxed{\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}}\qquad \boxed{\omega_0=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}}$$

②相位和初相位

相位：决定简谐运动状态的物理量 $\omega_0 t+\varphi_0$

初相：决定初始时刻物体运动状态的物理量 φ_0

相位比时间更直接更清晰地反映振子运动的状态。

③振幅

振幅*A*—— 物体离开平衡位置最大位移的绝对值。

●初始条件决定振幅和初相位

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad v=\frac{dx}{dt}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

设 $t=0,\ x=x_0\ ,v=v_0$

则 $x_0=A\cos\varphi_0,\quad v_0=-A\omega_0\sin\varphi_0$

$$\Rightarrow A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}},\qquad \tan\varphi_0=-\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件（两个）决定。

例题1： 一放置在水平桌面上的弹簧振子, 周期为***0.5 s***。当t=0时，$x_0=-1.0\times10^{-2}m, v_0=4\sqrt{3}\pi\times10^{-2}m\cdot s^{-1}$; 求它的运动方程？

解：

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=4\pi(s^{-1}), A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}}=2.0\times10^{-2}(m)$$

$$tg\varphi_0=-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}=\sqrt{3} \Longrightarrow \varphi_0=\frac{4}{3}\pi$$

注意：由初始位置可知 $\cos\varphi_0<0$

代入简谐振动表达式，则有

$$x=2.0\times10^{-2}\cos(4\pi t+\frac{4}{3}\pi)(m)$$

3. 常见的简谐振动

①竖直悬挂的弹簧振子

选平衡位置为坐标原点，

平衡时，弹簧伸长量为：

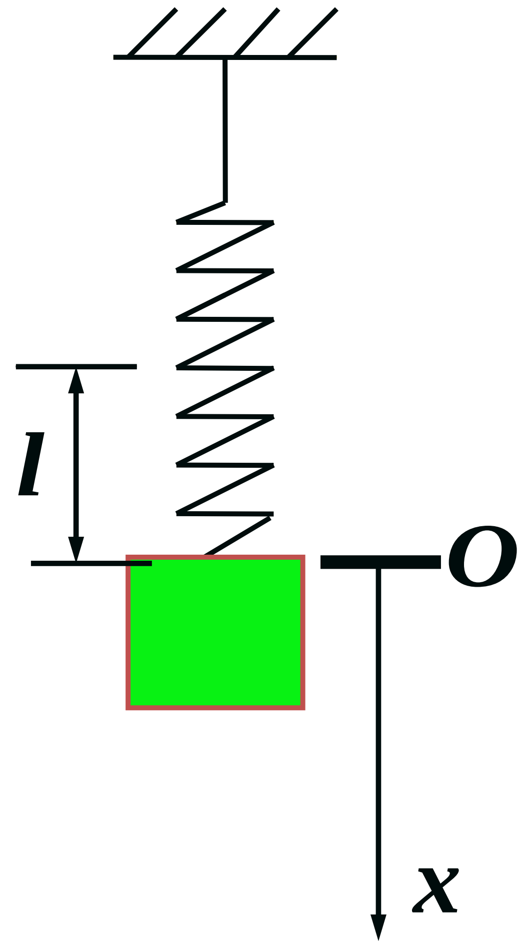
$$mg = kl$$

物体位移为x时，物体所受合力

$$F = mg - k(l + x) = -kx$$

由牛顿第二定律有

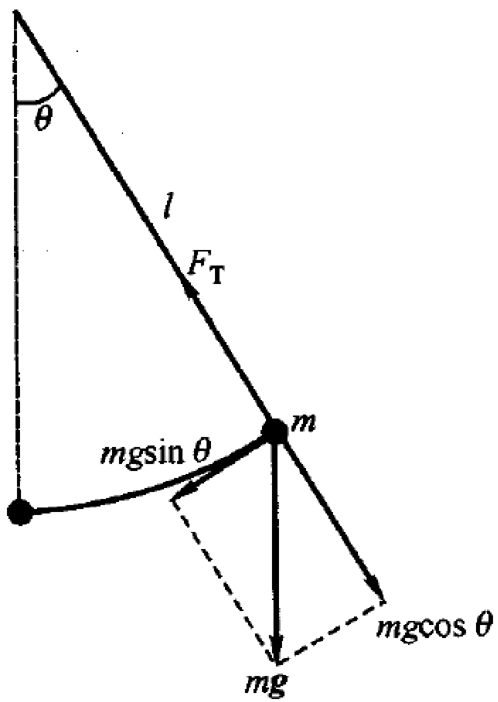
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



故物体仍做简谐振动，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

②单摆

单摆在拉力和重力作用下做圆周运动，利用切向的牛顿方程可得



$$ml\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

在角度很小时有

$$\sin\theta \approx \theta$$

于是单摆的运动方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

表明：单摆的运动也是简谐振动，故

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

【思考题】试求任意摆角下的单摆周期。

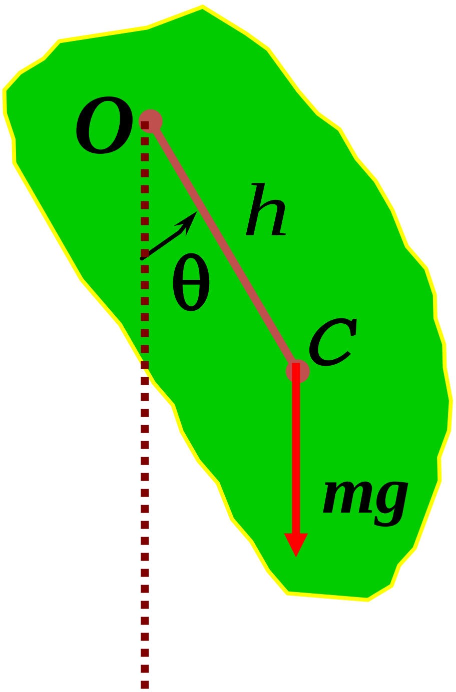
③复摆：一可绕水平固定轴摆动的刚体

类似单摆写出方程为：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta \approx -mgh\theta$$

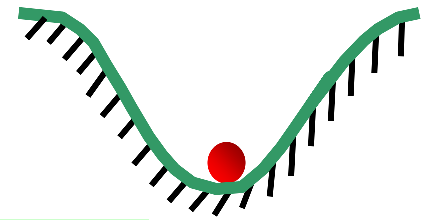
$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$



④实际振动系统:质点在稳定平衡位置附近的微小运动

系统沿x轴运动，势能函数为$E_p(x)$，势能曲线存在极小值，该位置就是系统的稳定平衡位置。



在该位置（取x=0）附近将势能函数作级数展开

$$E_p(x)=E_p(0)+\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\Bigg|_{x=0}x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0}x^2+\cdots$$

$x=0$，有 $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\Big|_{x=0}=0$

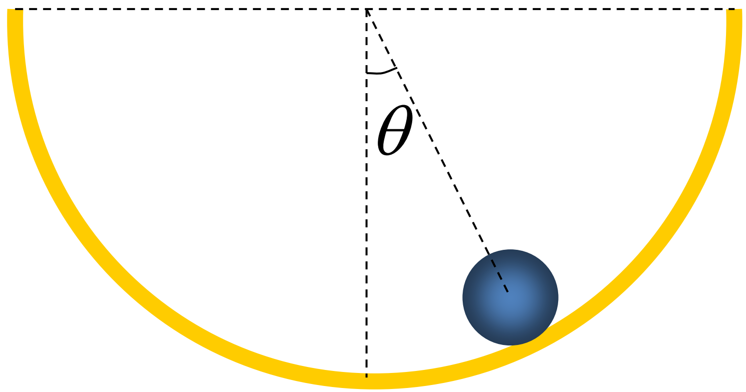
$$E_p(x)\approx E_p(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0}x^2$$

$$F=-\frac{dE_p(x)}{dx}=-\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0}x$$

⟶ 线性恢复力

所以微振动系统一般可以当作简谐振动处理。

例题2： 半径为 r 的小球在半径为 R 的半球形大碗内作纯滚动，这种运动是简谐振动吗？如果是，求出它的周期。



解： 设小球的质心速度 v_C，绕质心转动的角速度为 ω。小球在滚动过程中系统的机械能守恒：

$$mg(R-r)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2=E_0$$

其中 $I_C=\frac{2}{5}mr^2$ $\qquad \omega r=v_C \qquad v_C=(R-r)\dot{\theta}$

所以可得

$$mg(R-r)(1-\cos\theta)+\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2=E_0$$

两边对t求导

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta=0$$

小角度滚动时 $\theta<<1,\sin\theta\approx\theta$ ，运动方程化简为

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0 \quad\Longrightarrow\quad \omega_0=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

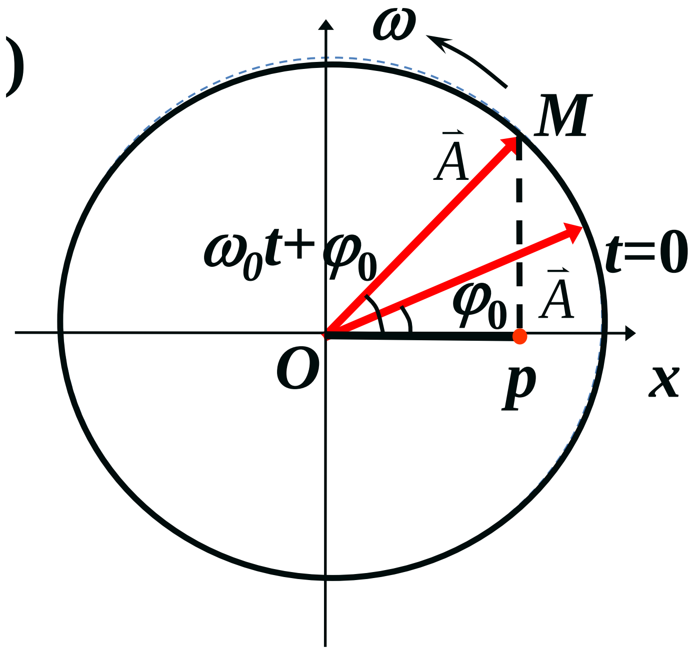
因此小球在碗底部的小角度滚动是简谐振动，其周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

4. 简谐振动的表示法

① 旋转矢量图示法

作坐标轴Ox, 自原点作一矢量 $\vec{A}(\overrightarrow{OM})$



旋转矢量	简谐振动
模	振幅A
初始与x 轴的夹角	初相 φ_0
角速度	角频率 ω_0
与x 轴的夹角	相位 $\omega_0 t+\varphi_0$

矢端M在x 轴上的投影P点的运动规律：

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

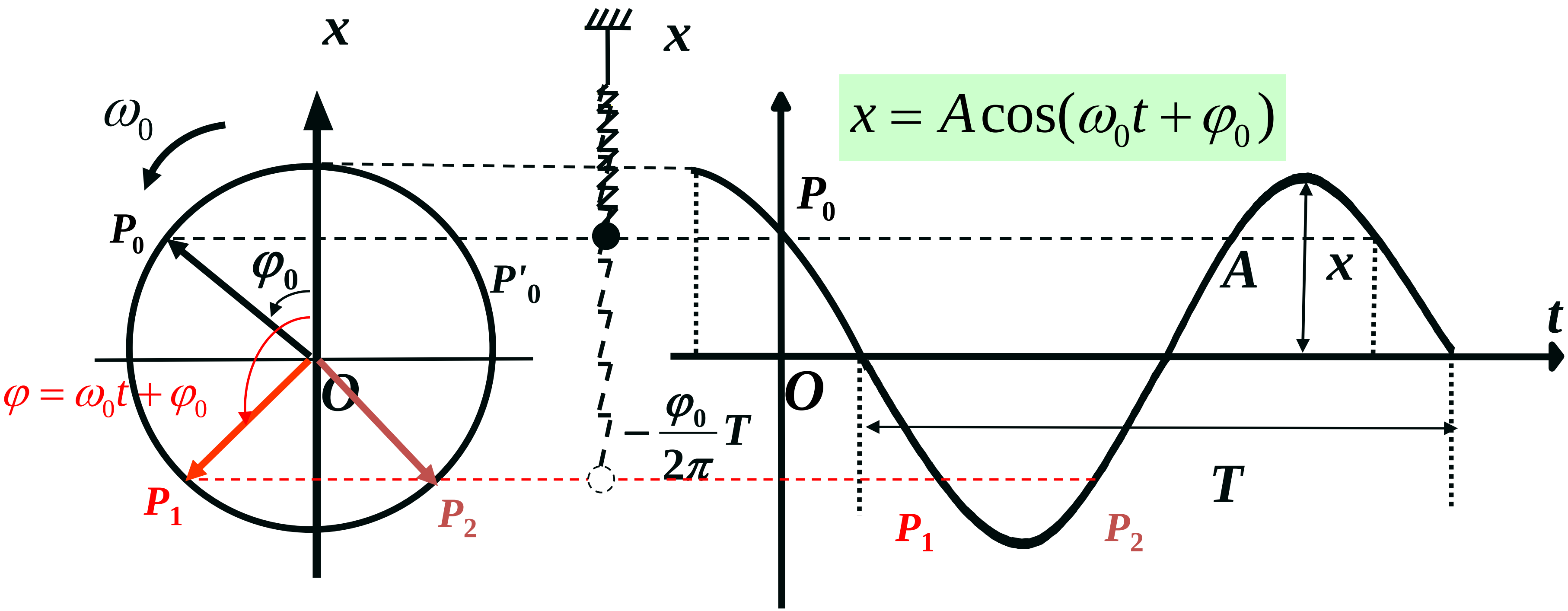
$$v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

➢做圆周运动的质点的位矢在x轴或y轴上的投影作简谐运动，**不能把M的运动误认为简谐振动**。

② x-t曲线图示法

简谐振动也可用x-t 的振动曲线表示，如下图所示，图上已将**振幅、周期和初相**标出。



振幅大小决定曲线的“高低”，频率影响曲线的“密集和疏散”．

③复数表示

利用三角函数与复数的关系，简谐振动也可用复数描述：

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega_0 t+\varphi_0)} = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + iA\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

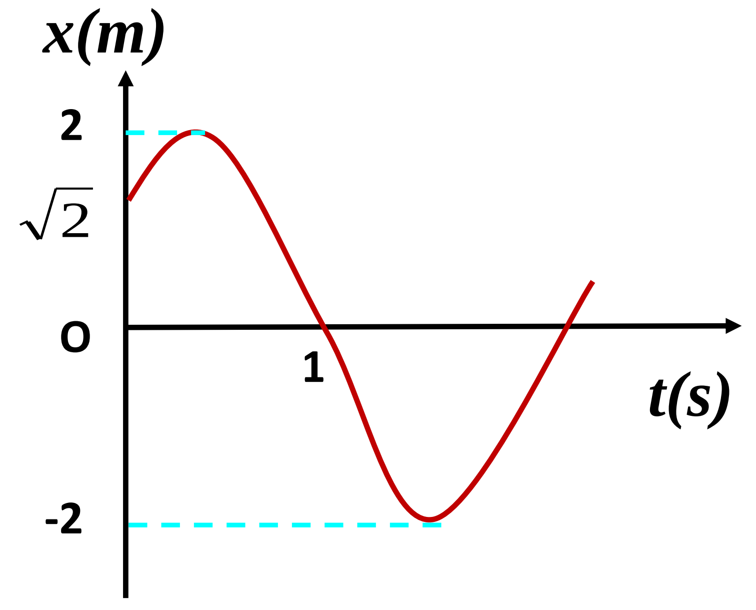
复数的实部对应真实的振动量

复数表示的优越之处：求导、积分很方便。

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{dt} = i\omega_0 Ae^{i(\omega_0 t+\varphi_0)} = i\omega_0 \tilde{x}$$

$$\tilde{a} = \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt} = i\omega_0 \tilde{v} = (i\omega_0)^2 \tilde{x} = -\omega_0^2 \tilde{x}$$

例题3： 已知某质点作简谐运动，振动曲线如图，试根据图中数据写出振动表达式。



解： 设运动表达式

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

由图可见，***A*=2*m***，当***t* = 0**时有：

$$x_0 = 2\cos\varphi_0 = \sqrt{2}$$

$$v_0 = -2\omega_0 \sin\varphi_0 > 0$$

由此得

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$$

当$t = 1$时有

$$x_1 = 2\cos(\omega_0 - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$v_1 = -2\omega_0 \sin(\omega_0 - \frac{\pi}{4}) < 0$$

解得：

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

因为周期$T > 1$秒，所以取$n=0$，即 $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$

$$\therefore \quad x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

§ 9.2简谐振动的合成

任何一个复杂的振动都可看成若干个简谐振动的合成。

1.同方向同频率简谐振动的合成

两简谐振动：
$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2) \end{cases}$$

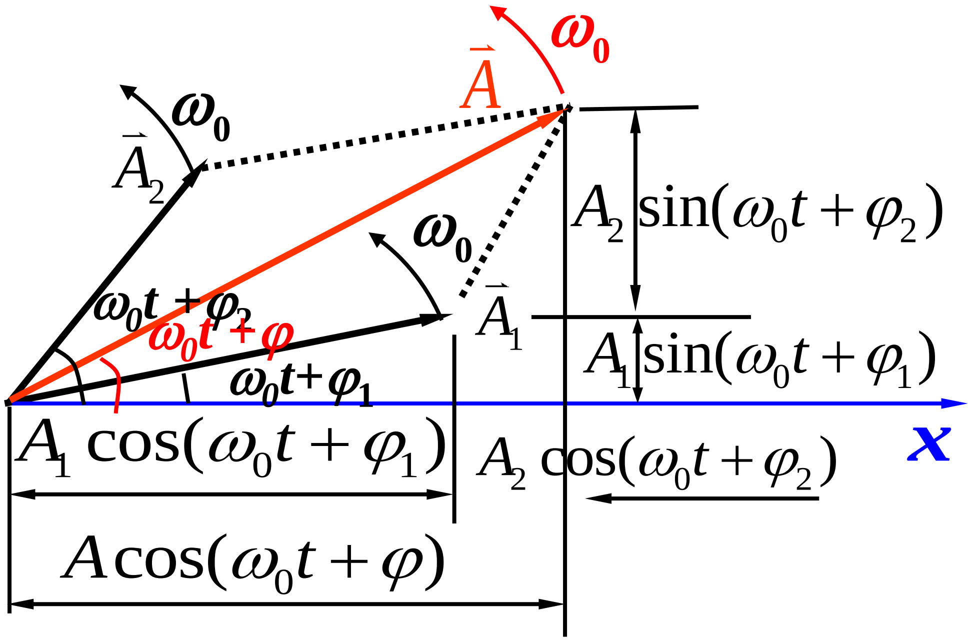
- ❖ 合成结果仍为简谐运动；
- ❖ 合振动与分振动在同一方向，且有相同频率。

合振动的运动方程：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)$$

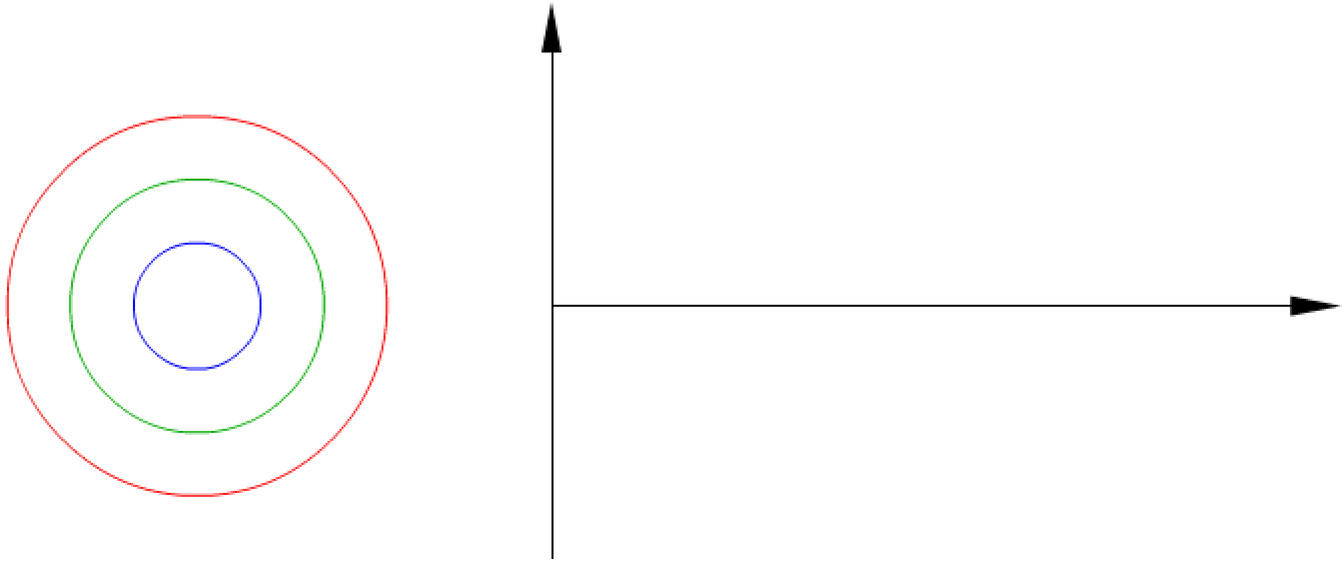
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)}$$

$$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$



同一直线上同频率振动的合成

说明：绿色相位为0，振幅是25　　红色为合振动



0　π　12.5

蓝色相位　蓝色振幅

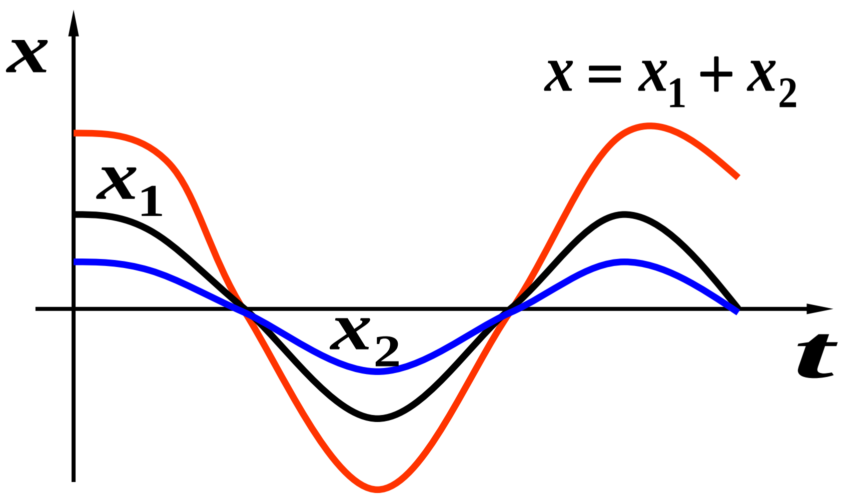
讨论：

相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 反映了两谐振的步调关系。

$$(1)\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$A_{\max} = A_1 + A_2$$

两振动步调一致，同达最大，同达平衡 。

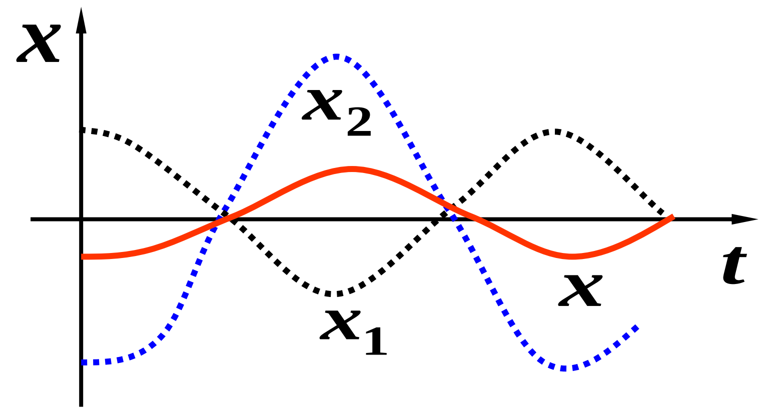


$$(2)\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2n+1)\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$A_{min}=|A_2-A_1|$$

两振动步调反向,

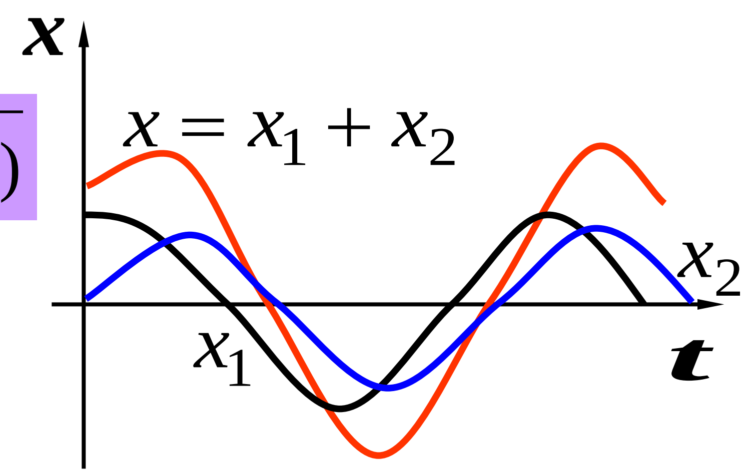
$$若A_1=A_2, \Rightarrow A=0$$



(3) 一般情况下(相位差任意)

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$|A_2-A_1|<A<A_1+A_2$$



两个振动的相位差在同方向同频率简谐振动合成中起决定性作用。

●多个同方向同频率简谐振动的合成

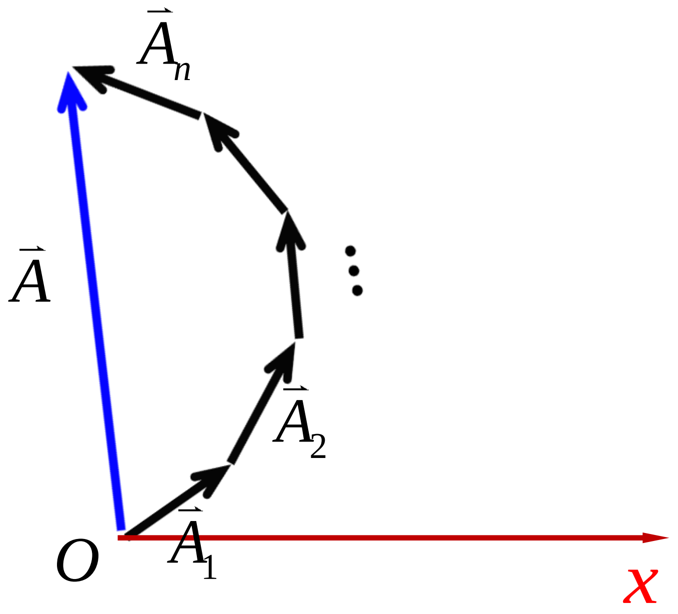
n个简谐振动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = A_n\cos(\omega_0 t + \varphi_n)$$



合振动为

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$= A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

令

$$H = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 + \cdots + A_n\sin\varphi_n$$

$$L = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 + \cdots + A_n\cos\varphi_n$$

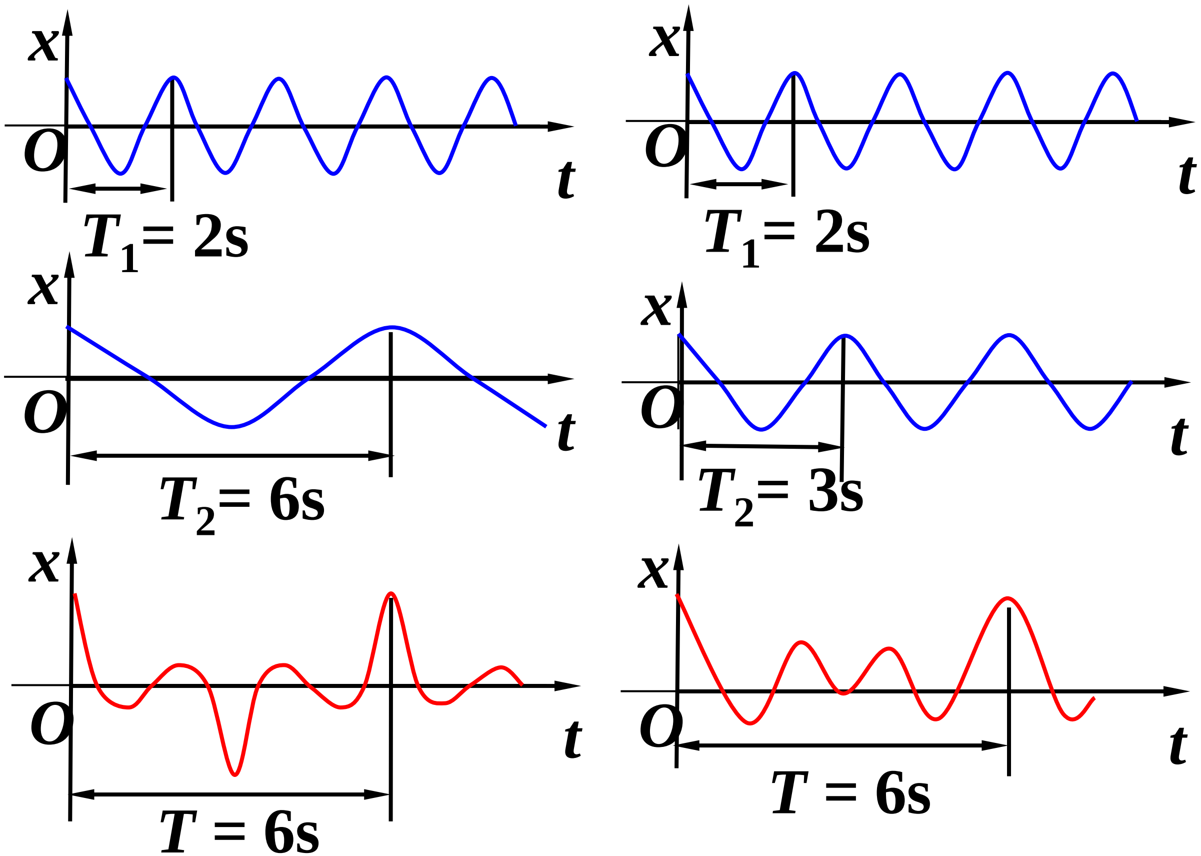
则有

$$A = \sqrt{H^2 + L^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{H}{L}$$

2.同方向不同频率简谐振动的合成

设一质点同时参与了角频率分别为ω_1，ω_2的两个同方向的简谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1),\quad x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$



- 如果两个振动的周期之比是有理数，则合成的振动仍然是周期运动，但不再是简谐振动。合振动周期是分振动周期的最小公倍数。

特例：两同方向，振动振幅相等，且两频率之差远小于这两振动各自的频率。

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

其中 $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1,\ \omega_2$

合振动的位移为：

$$x = x_1 + x_2$$
$$= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$
$$= A_{调}(t)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

振幅随时间缓慢变化的“简谐振动”。

$$A_{调}(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

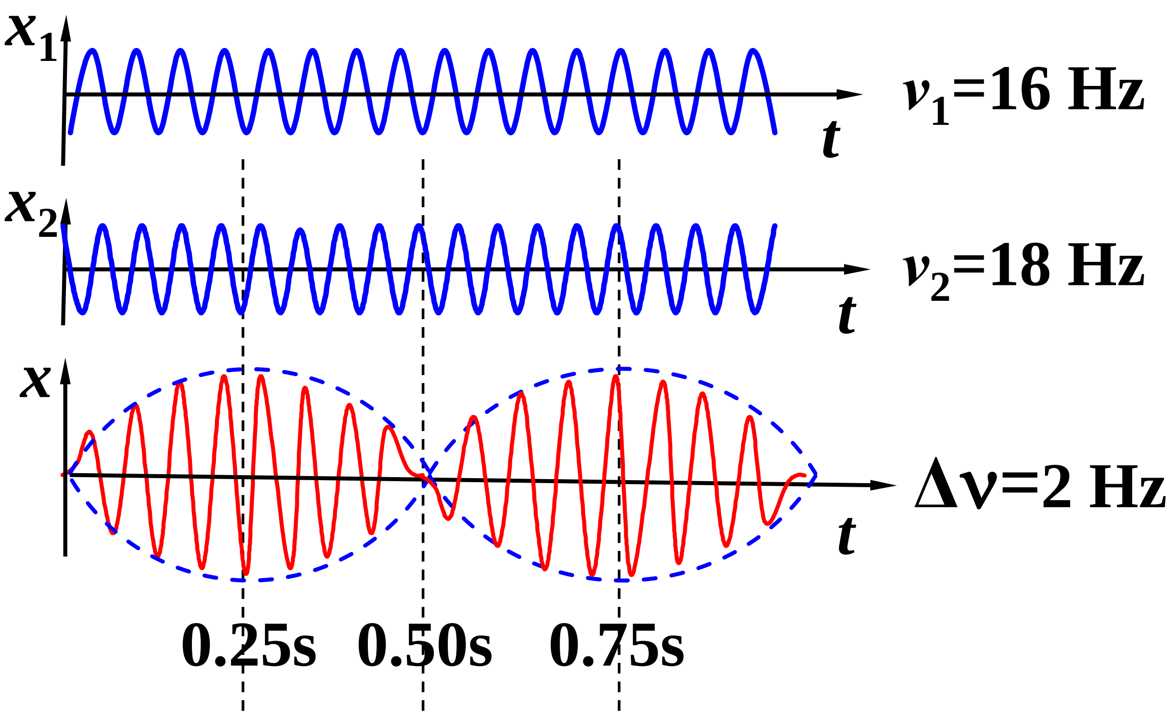
合振动的角频率：$\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

调制振幅：
$$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|$$

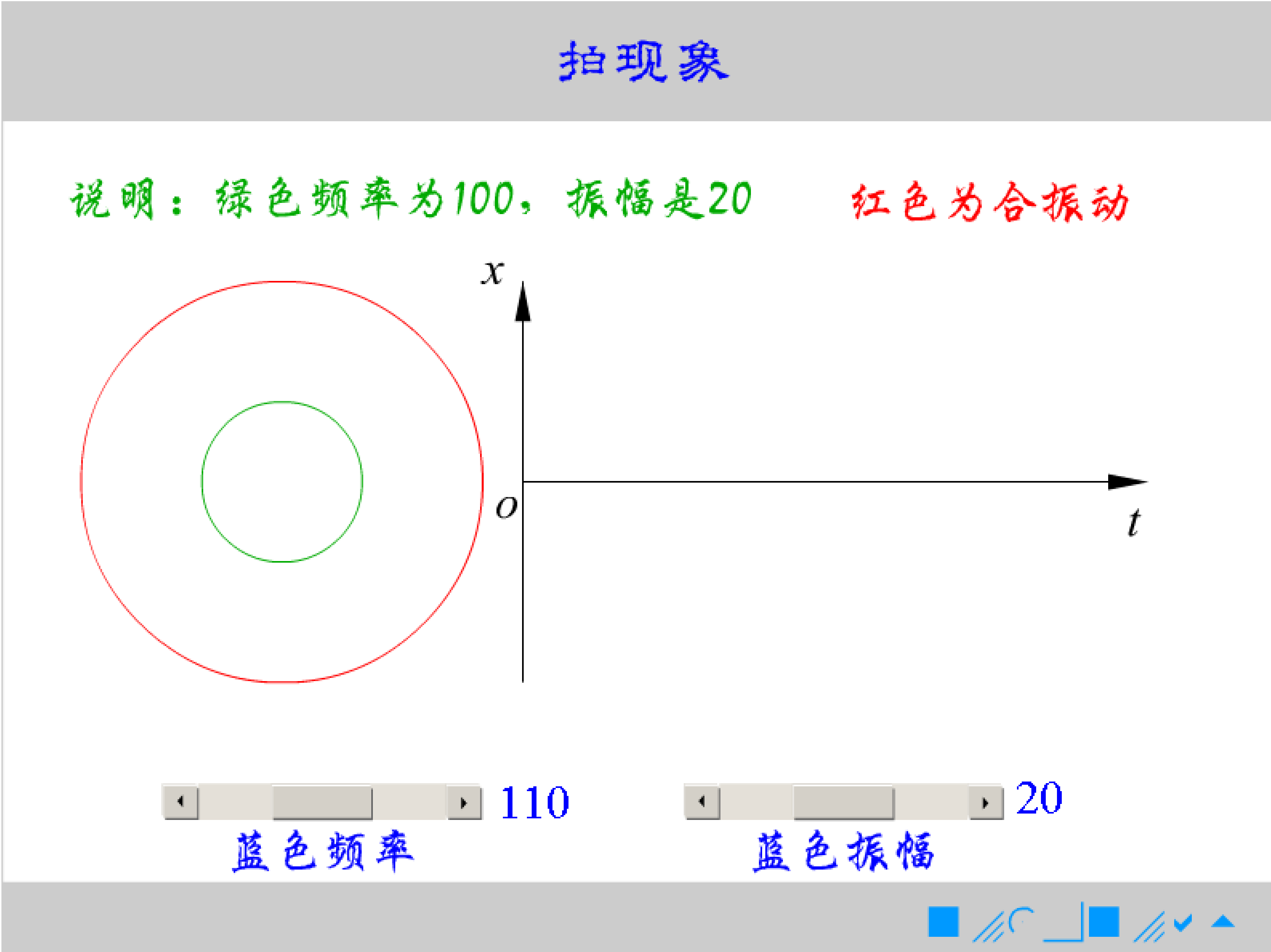
振动的强弱与振幅的平方相关。

振幅调制周期：
$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right|}=\frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

振幅调制频率：
$$\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}\right|=|\nu_1-\nu_2|$$



两个同方向不同频率简谐振动的合成(动画演示)



拍——频率较大但相差不大的两个同方向简谐振动合成时产生合振动振幅周期性变化的现象。

拍频——单位时间内振动加强或减弱的次数。

拍频：$\Delta \nu = |\nu_2 - \nu_1|$　　　振幅变化的周期为：$\dfrac{1}{\Delta \nu} = \dfrac{1}{|\nu_2 - \nu_1|}$

● 拍现象的应用：

- 用标准音叉振动校准乐器
- 测定超声波
- 测定无线电频率
- 调制高频振荡的振幅和频率等

3.互相垂直相同频率简谐振动的合成

如果两个振动频率相同，但一个沿*x*方向、一个沿*y*方向

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

合振动坐标的参量方程

将两式联立，消去参数*t*,可得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A_x}\cos\varphi_y - \dfrac{y}{A_y}\cos\varphi_x = \sin\omega t \cdot \sin(\varphi_y - \varphi_x) \\ \dfrac{x}{A_x}\sin\varphi_y - \dfrac{y}{A_y}\sin\varphi_x = \cos\omega t \cdot \sin(\varphi_y - \varphi_x) \end{cases}$$

再将上两式平方后相加即可得

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)$$

合成的运动轨迹一般为一椭圆（包括圆，直线段），形状决定于分振动的振幅和相位差，两振幅相等时为圆。

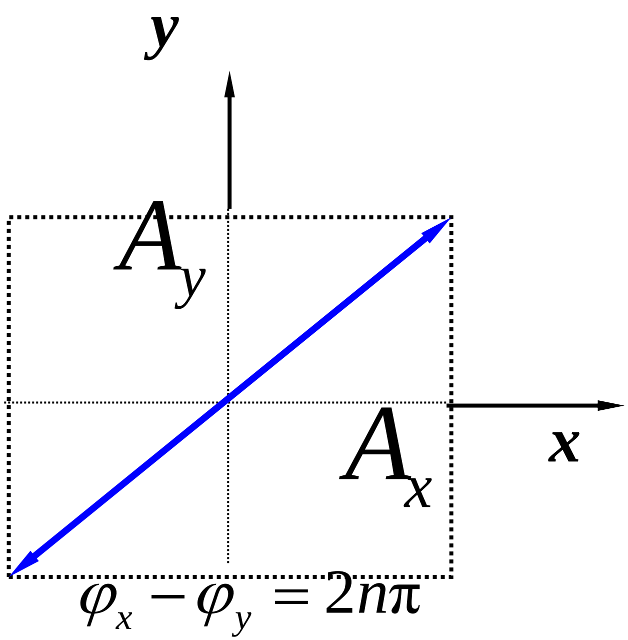
讨论： $$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos(\varphi_y-\varphi_x)=\sin^2(\varphi_y-\varphi_x)$$

① 分振动相位相同：$\varphi_y-\varphi_x=2n\pi \qquad n=0,1,2,3,\ldots$

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}=\left(\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}\right)^2=0$$

$$\therefore y=\frac{A_y}{A_x}x$$

轨迹为过原点的直线



时刻t 质点离开平衡位置的位移（合振动）

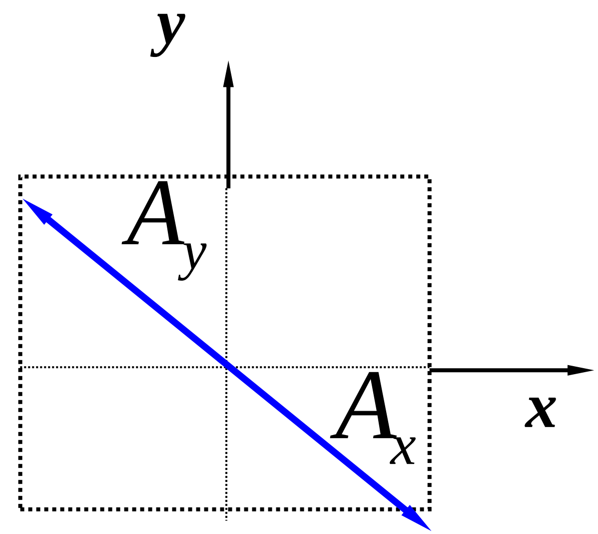
$$r=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y=\left(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y\right)\cos(\omega t+\varphi_x)$$

所以合振动也是频率相同的简谐振动，振幅为 $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$

②分振动相位相反： $\varphi_y - \varphi_x = (2n+1)\pi \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) = A_y \cos(\omega t + \varphi_x + 2n\pi + \pi)$$
$$= -A_y \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\frac{x}{A_x} = -\frac{y}{A_y}$$

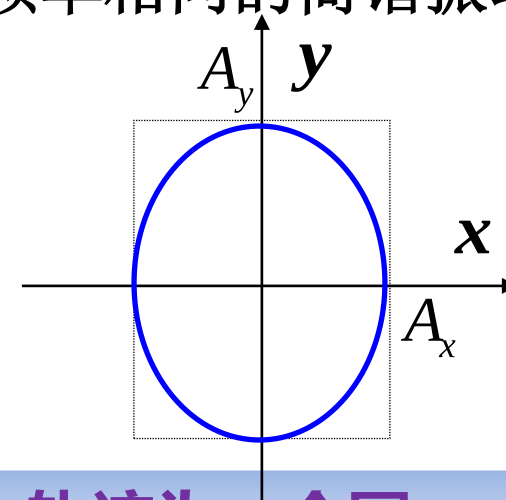


$\varphi_x - \varphi_y = (2n+1)\pi$

时刻t 质点离开平衡位置的位移(合振动)也是频率相同的简谐振动。

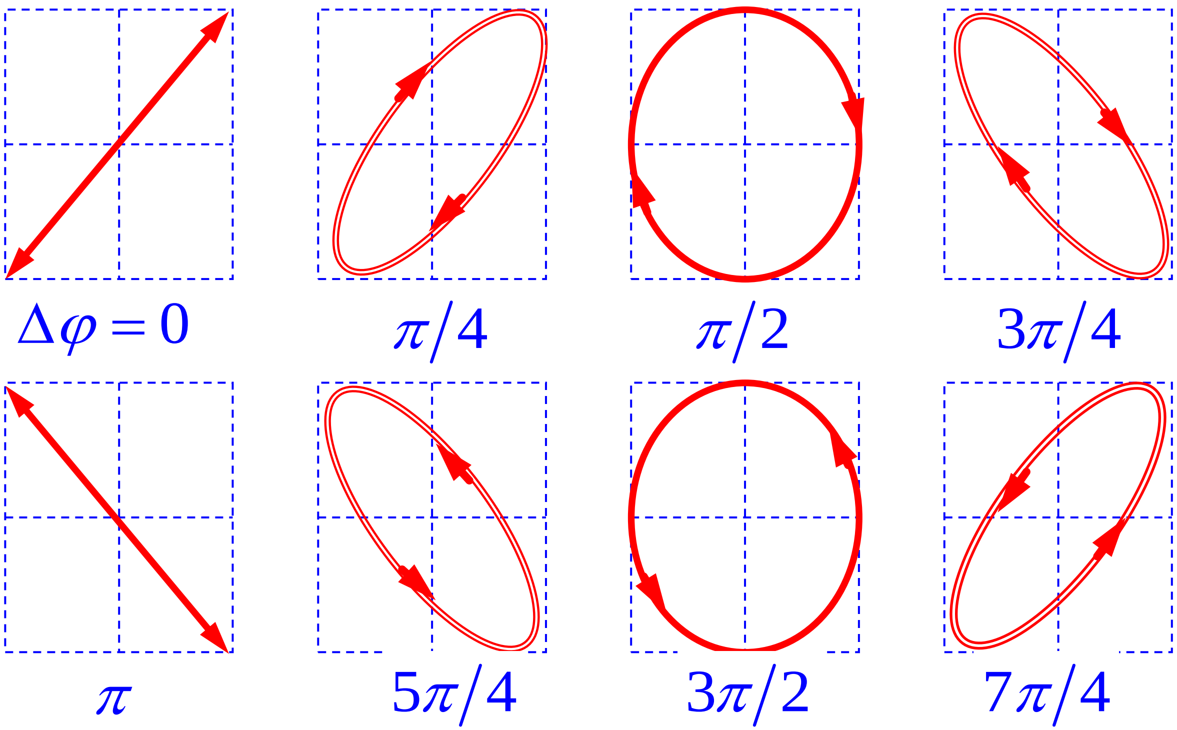
③ $\varphi_y - \varphi_x = (n + 1/2)\pi, \ n = 0,1,2,3\ldots$

轨迹方程： $\dfrac{x^2}{A_x^2} + \dfrac{y^2}{A_y^2} = 1$



振动的空间轨迹一般为一正椭圆。当A_x=A_y时，轨迹为一个圆。

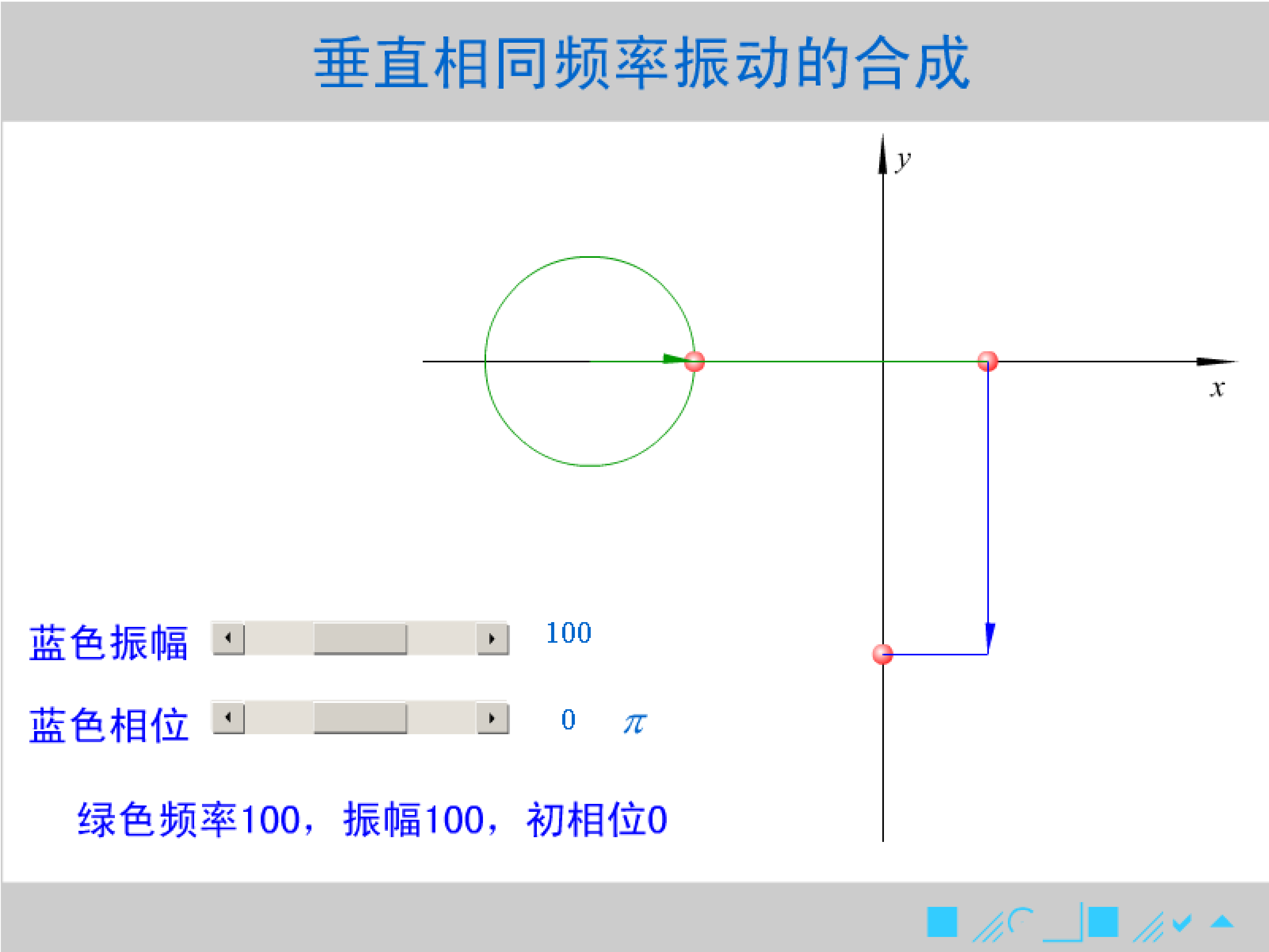
④$\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x$为其它值：合振动的轨迹表现为方位与形状各不相同的椭圆，质点运动方向亦各异。



$0<\varphi_y-\varphi_x<\pi$　　质点沿顺时针方向运动

$\pi<\varphi_y-\varphi_x<2\pi$　　质点沿逆时针方向运动

相互垂直的同频率的简谐振动的合成：（动画演示）



4. 互相垂直不同频率简谐振动的合成以及李萨如图形

两互相垂直的简谐振动 $\begin{cases} x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \end{cases}$

●当频率 ω_x / ω_y 为无理数比时：其合成运动将永远不重复已走过的路径，它的轨迹将逐渐密布在振幅所限定的整个矩形面内。 这种非周期性运动称为准周期运动。

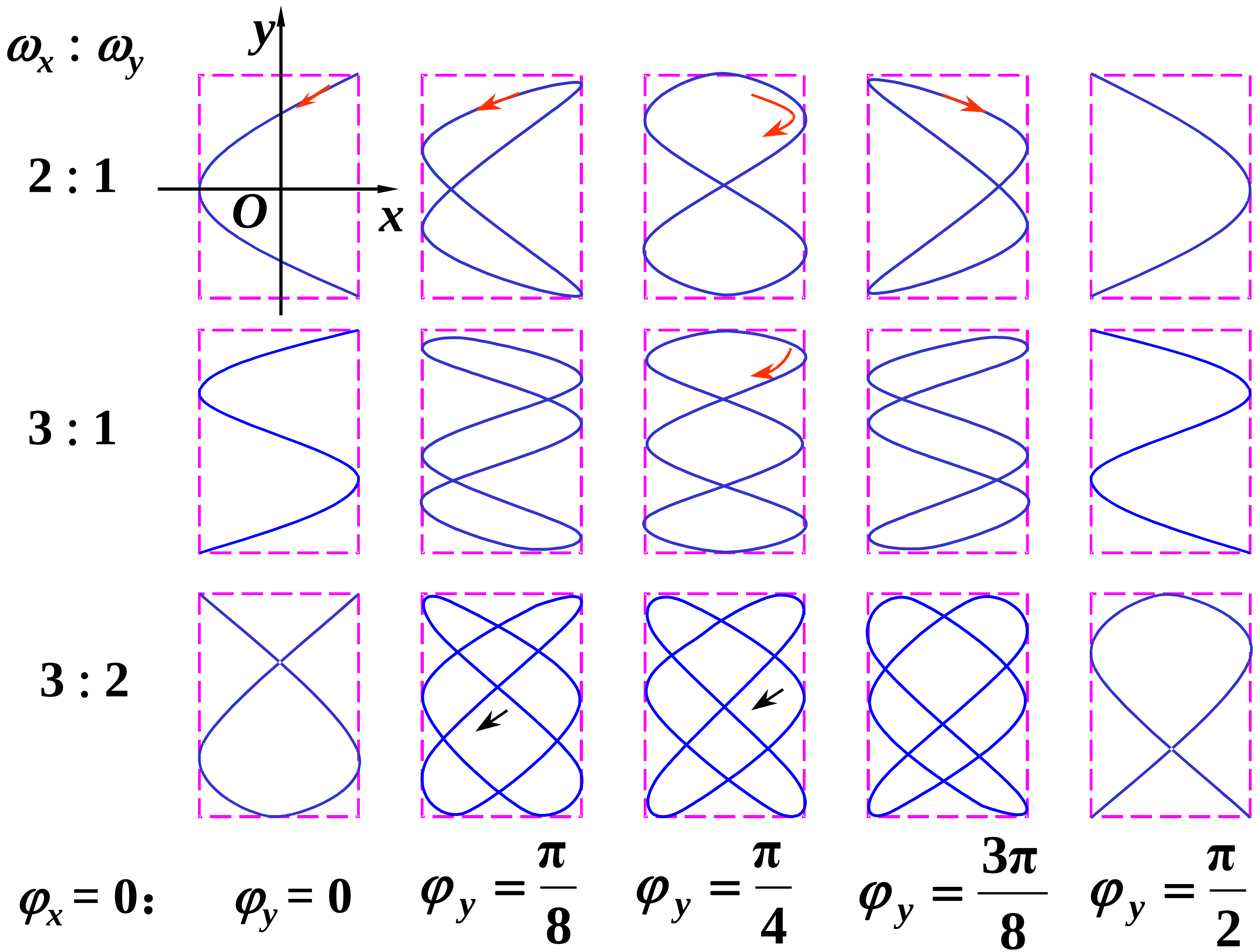
●当频率成整数比时：$\dfrac{\omega_x}{\omega_y} = \dfrac{n_x}{n_y}$， $\boldsymbol{n_x, n_y}$为不可约的正整数

合振动周期： $T = n_x T_x = n_y T_y$

合振动的轨迹可以是一些封闭曲线，称为李萨如图形。曲线形状与频率比和初位相差相关。显然相互垂直方向上的振动频率满足

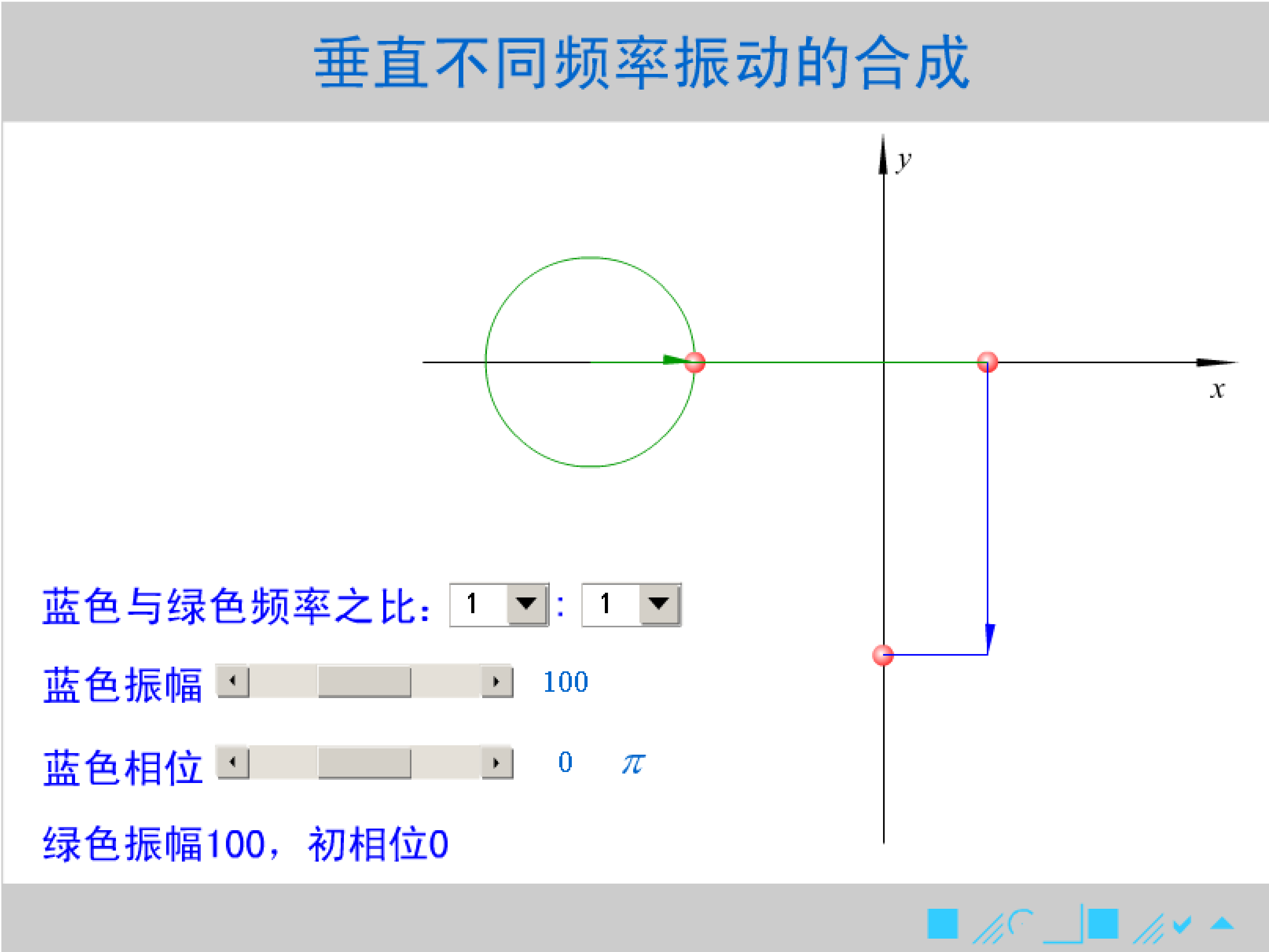
$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{x\text{ 达到最大值的次数}}{y\text{ 达到最大值的次数}} = \frac{\text{平行于}y\text{轴的直线与图形的最多交点个数}}{\text{平行于}x\text{轴的直线与图形的最多交点个数}}$$

通过这一规律可以用已知的振动频率确定另一未知的振动频率。

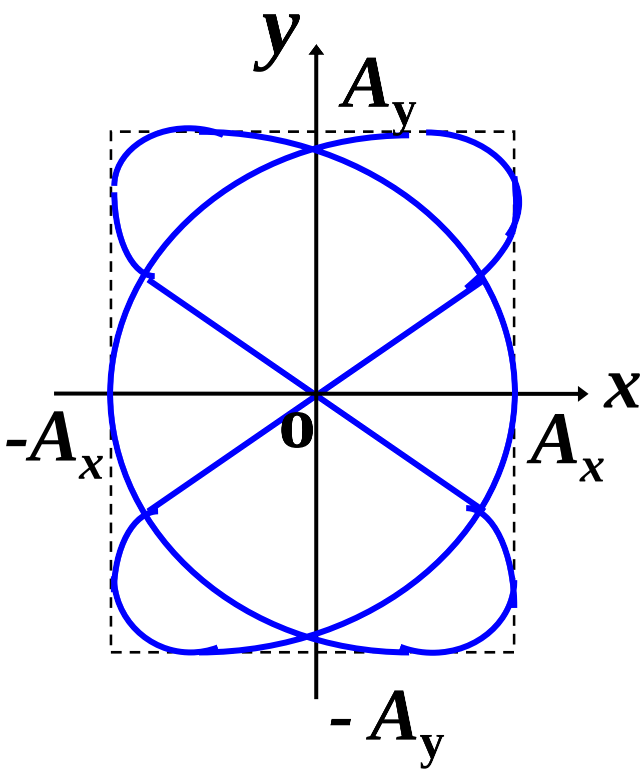


$\omega_x : \omega_y$
y
O
x
2 : 1
3 : 1
3 : 2
$\varphi_x = 0$:
$\varphi_y = 0$
$\varphi_y = \frac{\pi}{8}$
$\varphi_y = \frac{\pi}{4}$
$\varphi_y = \frac{3\pi}{8}$
$\varphi_y = \frac{\pi}{2}$

相互垂直不同频率的简谐振动的合成：李萨如图



例题4： 已知两个振动方向相互垂直的简谐振动合成的李萨如图形如下图所示，求x方向和y方向振动频率的比例。



解：

$$\frac{\nu_x}{\nu_y}=\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{x\ \text{达到最大值的次数}}{y\ \text{达到最大值的次数}}=\frac{3}{2}$$

5.一般周期振动的分解

一般地，任何一个复杂的周期性振动都可看成若干个简谐振动的合成（傅里叶级数展开），例如 $f(t)=f(t+T)$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega t\right)+b_n\sin\left(n\omega t\right)\right]$$

$$\omega\equiv\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt,\qquad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt,\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

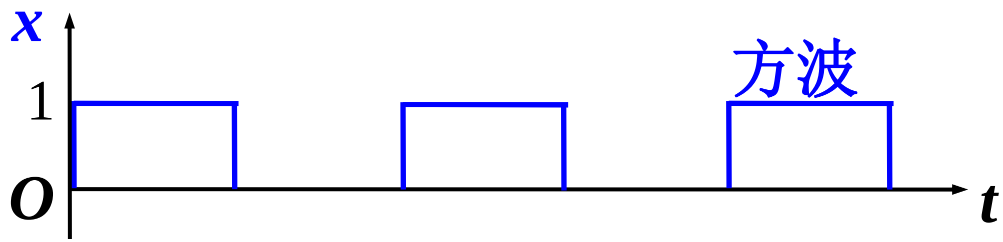
$f(t)$ 被分解为（除常数项$a_0/2$之外）频率为$n\omega$的一系列简谐振动,

则各分振动的频率为: $\nu_0\equiv 1/T$， $2\nu_0$， $3\nu_0$， …，

分别称作: 基频， 二次谐频， 三次谐频， …

展开式中各简谐函数前的系数a_n和b_n，代表了这个振动中各简谐振动成分的多少。以各个分简谐振动的频率为横坐标，以相应的振幅为纵坐标所作的图解，称为该振动的**频谱**，是分立谱。

例题5：方波的傅里叶级数 $x(t)=\begin{cases}1, & nT<t<nT+T/2\\ 0, & nT+T/2<t<(n+1)T\end{cases}$



解：利用傅里叶展开的系数公式可得

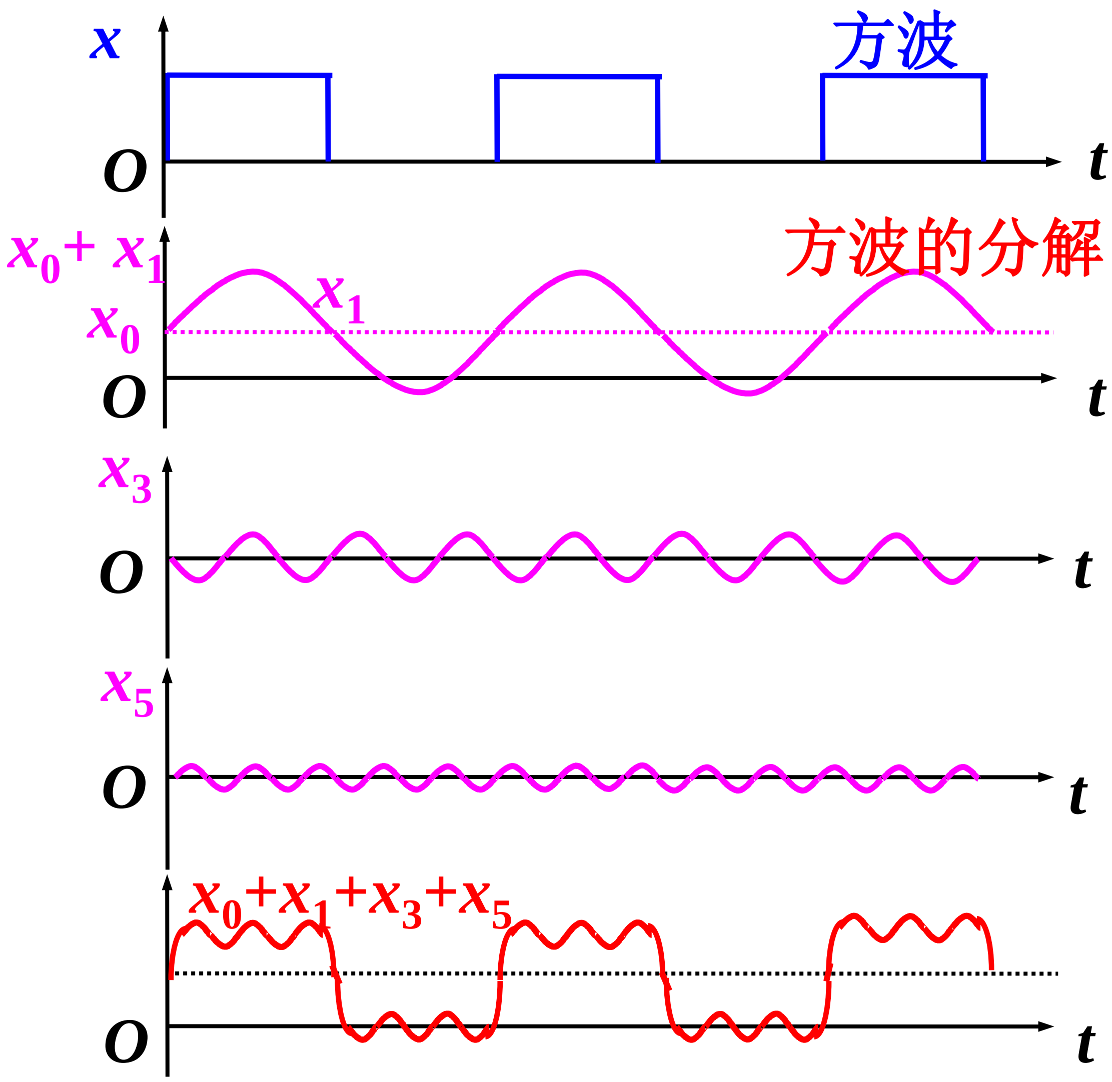
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}dt=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos(n\omega t)dt=\frac{2}{T}\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\Big|_0^{T/2}=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\frac{-1}{n\omega}\cos(n\omega t)\Big|_0^{T/2}=\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ \dfrac{2}{n\pi} & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\cdots\right]$$



例题7：有两个振动方向相同的简谐振动，其振动方程分别为：

$$x_1 = 4\cos(2\pi t + \pi)\ \mathrm{cm} \quad 和 \quad x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/2)\ \mathrm{cm}$$

（1）求它们的合振动方程；

（2）另有一同方向的简谐振动 $x_3 = 2\cos(2\pi t + \varphi_3)\ \mathrm{cm}$

问：当φ_3为何值时，x_1+x_3的振动为最大值？当φ_3为何值时，x_1+x_3的振动为最小值？

解：(1) 两个振动方向相同，频率相同的简谐振动合成后还是简谐振动，合振动方程为

$$x = A\cos(2\pi t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 5(\mathrm{cm})$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = -\frac{3}{4}$$

根据已知条件，t=0时，合矢量应在第二象限，故

$$\varphi = \pi - \arctan\frac{3}{4}$$

所求的振动方程为

$$x = 5\cos(2\pi t + \varphi)\ (\text{cm})$$

(2) 当 $\varphi_3 - \varphi_1 = 2k\pi\left(k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots\right)$ 时，相位相同。

即 $\boldsymbol{\varphi_3 = (2k+1)\pi\left(k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots\right)}$，振幅最大

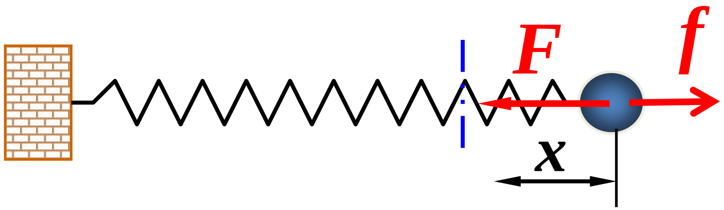
当 $\varphi_3 - \varphi_1 = \left(2k-1\right)\pi\left(k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots\right)$ 时，相位相反。

即 $\varphi_3 = 2k\pi\left(k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots\right)$，振幅最小

§9.3 阻尼振动

阻尼振动——振幅(或能量)随时间不断减少的振动。

1. 阻尼振动的运动微分方程



对水平弹簧振子

弹簧力： $F=-kx$

阻尼力： $f=-\gamma v=-\gamma\dfrac{dx}{dt}$

γ为阻尼系数，与物体的形状以及周围性质有关

由牛顿第二定律可得： $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\dfrac{dx}{dt}$

令 $\omega_0=\sqrt{k/m}$ ——固有角频率

$\beta=\gamma/2m$ ——阻尼因子

于是可得运动微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=0$$

将形如 $e^{\lambda t}$ 的解代入微分方程，得特征方程

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

其特征根是

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

于是方程的解得一般形式为

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

这里系数A_1和A_2由振动的初始条件确定。按阻尼度β/ω_0大小的不同，微分方程有三种不同形式的解，代表了振动物体的三种运动方式。

①过阻尼：$\beta > \omega_0$

特征方程有两个不同的实根，这时方程的解为

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

这种过阻尼运动方式是非周期运动，振动从初始最大位移处缓慢回到平衡位置，不再做往复运动。

A_0和φ_f 决定于初始条件的积分常数。质点的运动速度为：

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)A_1e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)A_2e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$

由初始条件

$$\begin{cases} x_0=x(0)=A_1+A_2 \\ v_0=v(0)=-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)A_1-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)A_2 \end{cases}$$

可解得

$$A_1=\frac{x_0}{2}+\frac{v_0+\beta x_0}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}},\quad A_2=\frac{x_0}{2}-\frac{v_0+\beta x_0}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow\quad x(t)=x_0e^{-\beta t}\cosh\left(\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t\right)+\frac{v_0+\beta x_0}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}e^{-\beta t}\sinh\left(\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\ t\right)$$

在$\beta\to\omega_0$的极限下

$$x(t)=e^{-\beta t}\left[x_0+(v_0+\beta x_0)t\right]$$

②欠阻尼振动： $\beta < \omega_0$

特征方程有两个互为共轭的复根

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega_f, \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega_f, \quad \omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

两个线性无关解

$$x_1 = e^{-\beta t} e^{i\omega_f t}, \quad x_2 = e^{-\beta t} e^{-i\omega_f t}$$

以上两个解的实部和虚部均是方程的解，根据线性齐次微分方程解的线性叠加性质可知，方程的解为

$$x(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t) + A_2 e^{-\beta t} \sin(\omega_f t)$$

$$= A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_f) \qquad A_0 \equiv \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \ \tan\varphi_f \equiv -A_2 / A_1$$

A_0和φ_f 决定于初始条件的积分常数。质点的运动速度为：

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_f t + \varphi_f) + \omega_f \sin(\omega_f t + \varphi_f)]$$

由初始条件

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = A_0\cos\varphi_f \\ v_0 = v(0) = -A_0\left[\beta\cos\varphi_f + \omega_f\sin\varphi_f\right] = -\beta x_0 - A_0\omega_f\sin\varphi_f \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0 + \beta x_0}{\omega_f}\right)^2} \\ \tan\varphi_f = -\dfrac{v_0 + \beta x_0}{\omega_f x_0} \end{cases}$$

所以

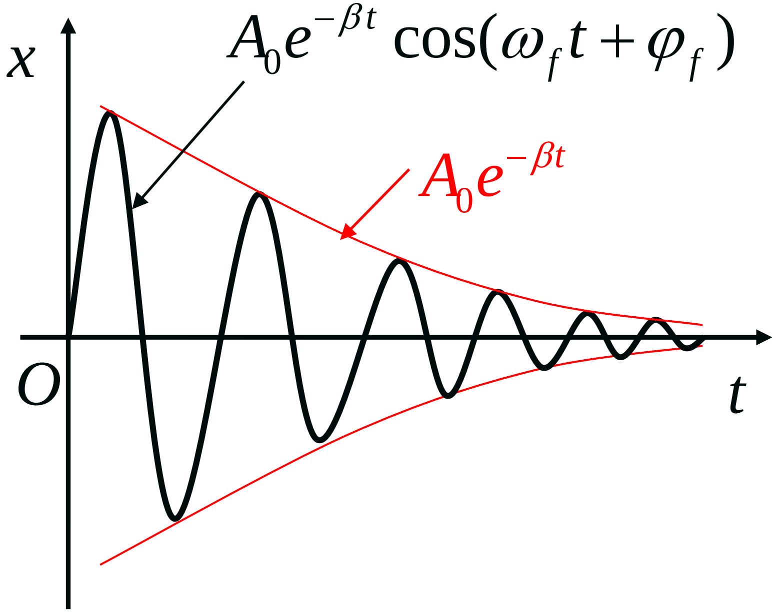
$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

振幅随时间衰减

周期振动

严格讲振子的运动不是周期运动，但仍然可看做振幅衰减的“周期运动”。

●阻尼振动曲线：



准周期为： $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega_f}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$

振子两次从同一方向经过平衡位置或者两次位移最大值之间的时间间隔

❖阻尼振动周期比系统的固有周期长，阻尼越大， “周期” 越长

●振子机械能的耗散

体系机械能： $\boldsymbol{E=E_k+E_p=\dfrac{1}{2}mv_x^2+\dfrac{1}{2}kx^2}$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}\ =(m\ddot{x}+kx)\dot{x}=fv_x=-\gamma v_x^2<0$$

机械能的减少是由于阻尼力提供了负的功率。

●品质因数：用来描述阻尼的大小

在低阻尼情况下 $\beta \ll \omega_0$

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-A_0e^{-\beta t}[\beta\cos(\omega_f t+\varphi_f)+\omega_f\sin(\omega_f t+\varphi_f)]$$

$$\approx -A_0e^{-\beta t}\omega_f\sin(\omega_f t+\varphi_f)$$

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\approx\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t}$$

品质因数定义为：t 时刻阻尼振子的能量(E)与经一个准周期后损失的能量(ΔE)之比的2π倍，用Q表示，

$$Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}=2\pi\frac{\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t}}{\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t}\left(1-e^{-2\beta T}\right)}=\frac{2\pi}{1-e^{-2\beta T}}=\frac{\omega_f}{2\beta}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}$$

在阻尼很小的情况下描述阻尼能耗的品质因数与固有频率成正比，与阻尼系数成反比。

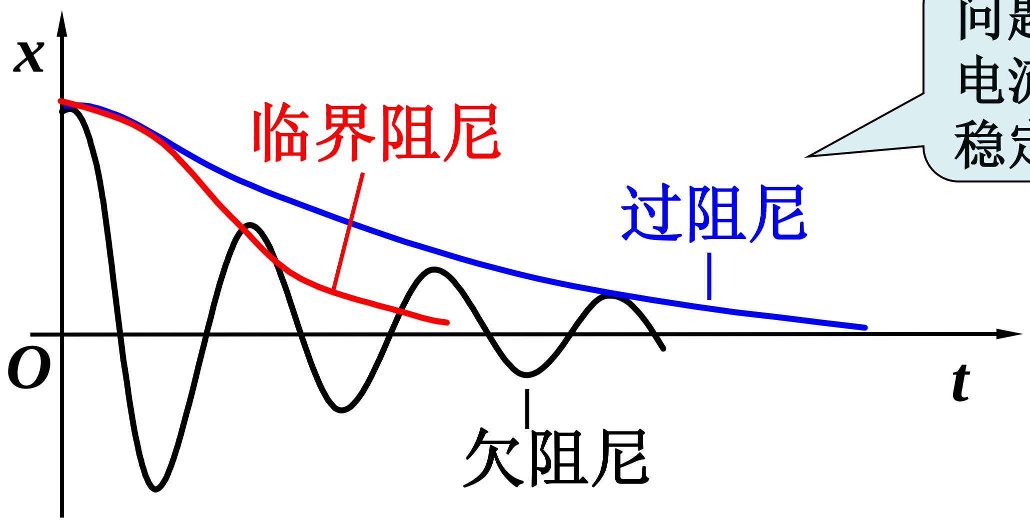
③临界阻尼状态： $\beta = \omega_0$

特征方程只有一个重根，微分方程的解为:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

A_1、A_2亦由初始条件定。可解得

$$x(t) = \left[x_0 + (v_0 + \beta x_0)t\right]\mathrm{e}^{-\beta t}$$



问题：怎样使灵敏电流计的指针尽快稳定以得到读数?

一般情况下，从偏离平衡位置开始回复到平衡位置所需的时间，临界阻尼将比过阻尼快。

§9.4 受迫振动和共振

没有外部不断供给能量，耗散系统的振动是不能持久的, 激励振动的方式主要有两种：周期力和单向力。

受迫振动——振动系统在周期性外界强迫力作用下的振动。

周期力中简谐策动力最重要：

①简谐策动力最简单，也很常见；

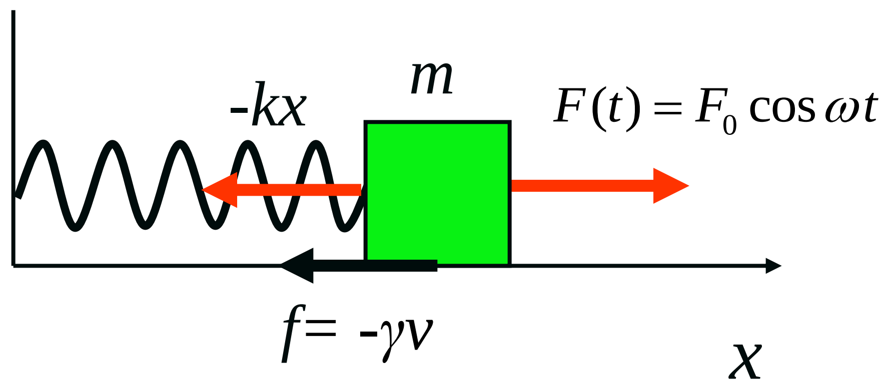
②非简谐周期性策动力都可以看作简谐策动力的线性叠加。

1. 受迫振动的运动微分方程

恢复力： $-kx$

阻尼力： $-\gamma\dfrac{dx}{dt}$

强迫力： $F_0\cos(\omega t)$



根据牛顿第二定律

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\frac{dx}{dt}+F_0\cos(\omega t)$$

令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$， $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$， $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$

得

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

方程的通解 = 齐次方程的通解+方程的特解

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\beta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 & \text{通解} \\ \ddot{x}_2 + 2\beta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = f_0 \cos(\omega t) & \text{特解} \end{cases} \Rightarrow x = x_1 + x_2$$

x_1满足的是阻尼振动方程，在前面已经求得了它的通解，可分成过阻尼、欠阻尼和临界阻尼三种情况。下面我们将考虑欠阻尼情况，则有

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_f), \quad \omega_f \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

受迫振动的微分方程的求解问题就转化为寻找方程的特解x_2。

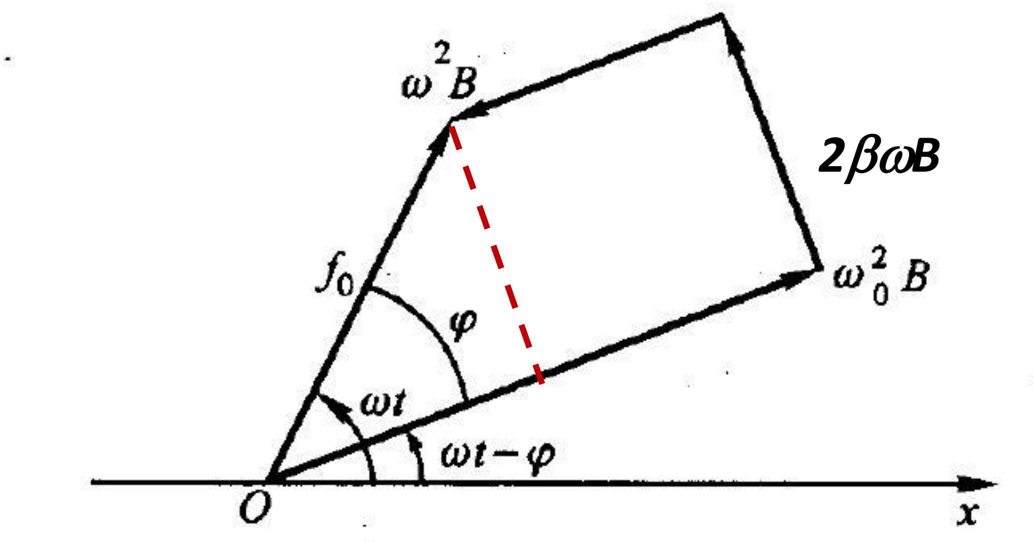
试探解： $x_2 = B\cos(\omega t - \varphi)$

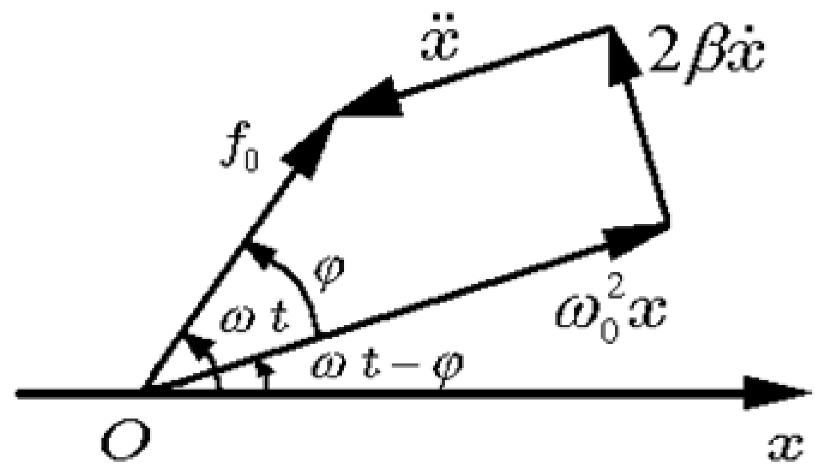
$$\dot{x} = -\omega B\sin(\omega t - \varphi) = \omega B\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 B\cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 B\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

把受迫振动的运动方程的各项用旋转矢量法表示

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$





$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 B^2+\left(2\beta\omega B\right)^2=f_0^2,$$

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

所以在小阻尼情况，受迫振动方程的解为

$$\boxed{x=A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_f t+\varphi_f)+B\cos(\omega t-\varphi)}$$

阻尼振动，随时间消失，**暂态解**

简谐振动, **稳态解**

经一段时间，振子达到稳定振动状态，受迫振动变为简谐振动

$$x=B\cos(\omega t-\varphi)$$

稳态解的特点：频率与强迫力频率相同，振幅及初相位完全由策动力和系统的固有参量决定，与系统初始条件无关。

●寻找受迫振动方程特解的第二种方法(选读)

猜测 $$x_2 = B\cos(\omega t - \varphi)$$

代入运动方程 $$\ddot{x}_2 + 2\beta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = f_0\cos(\omega t)$$

$$-\omega^2 B\cos(\omega t - \varphi) - 2\beta\omega B\sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 B\cos(\omega t - \varphi) = f_0\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)B\cos(\omega t - \varphi) - 2\beta\omega B\sin(\omega t - \varphi) = f_0\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)B\left[\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi\right] - 2\beta\omega B\left[\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi\right] = f_0\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)B\cos\varphi + 2\beta\omega B\sin\varphi\right]\cos\omega t + \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)B\sin\varphi - 2\beta\omega B\cos\varphi\right]\sin\omega t = f_0\cos\omega t$$

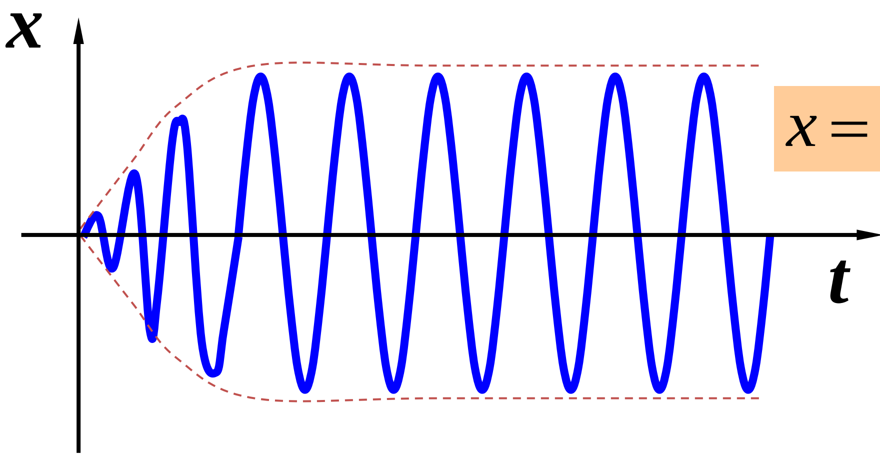
两边对应项的系数相等：
$$\begin{cases}(\omega_0^2 - \omega^2)B\cos\varphi + 2\beta\omega B\sin\varphi = f_0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)B\sin\varphi - 2\beta\omega B\cos\varphi = 0\end{cases}$$

两边对应项的系数相等

$$\begin{cases}(\omega_0^2-\omega^2)B\cos\varphi+2\beta\omega B\sin\varphi=f_0\\(\omega_0^2-\omega^2)B\sin\varphi-2\beta\omega B\cos\varphi=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}},\qquad \tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

与旋转矢量法得到相同的结果



$$x = B\cos(\omega t - \varphi)$$

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

2. 共振

共振： 无论选ω或ω_0作变量，位移和速度的振幅都有一个极大值。阻尼β越小峰值越尖锐。这种现象叫做**共振**。

● 振幅共振：振动系统受迫振动时, 其振幅达极大值的现象。

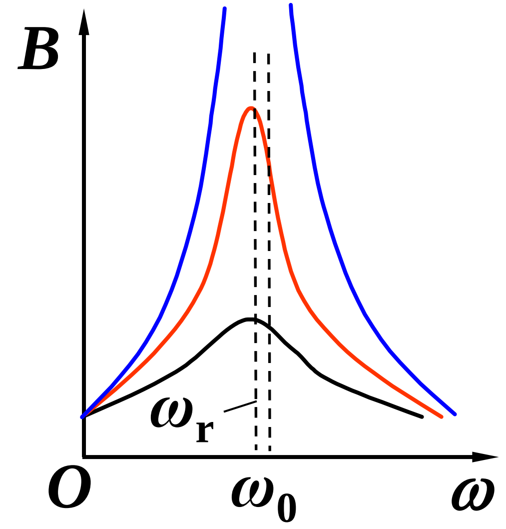
发生振幅共振时: $\dfrac{dB}{d\omega} = 0$

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\right)$$

$$= 2f_0\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{-3/2}\omega\left[\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2\right] = 0$$

由此可得

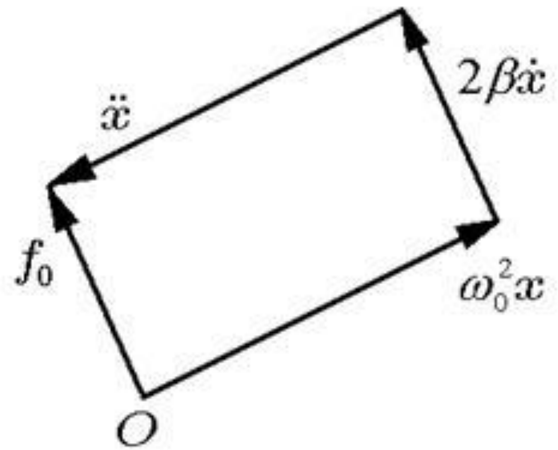
共振频率：$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0$，若 $\beta \ll \omega_0$



共振振幅：$B_r = \dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \dfrac{f_0}{2\beta\omega_0}$

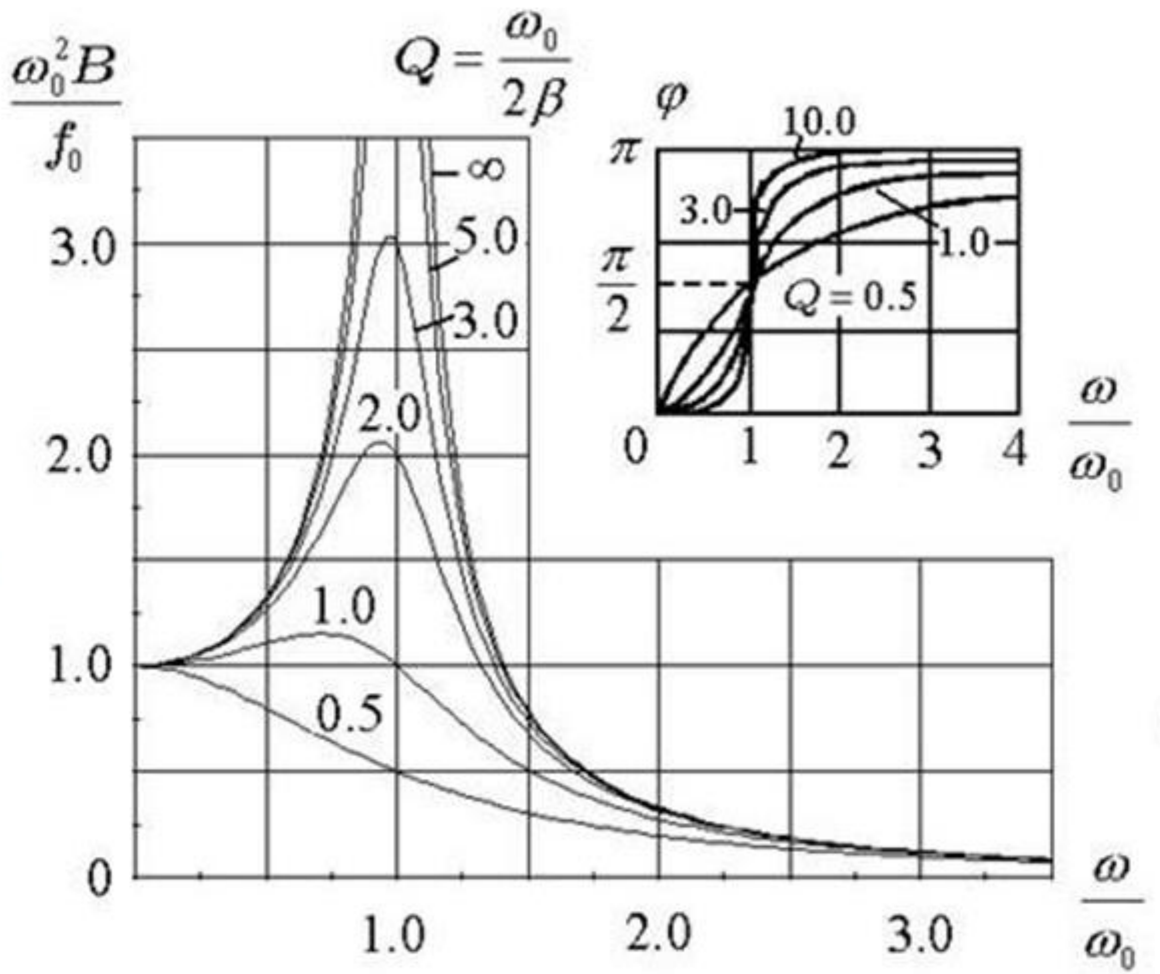
共振位相：$\varphi_r = \arctan\dfrac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \approx \arctan\dfrac{\omega_0}{\beta} \approx \dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{x \approx B_r \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}\sin(\omega t)}$$



即位移落后于策动力**π/2**的相位，而速度恰好与驱动力同相位。功率=***Fv***，故此时外力永远做正功。

●**频率响应曲线**: ***B*-ω图常称频率响应曲线或称共振曲线**。当 $Q>1$ 时，所有的曲线都有一个峰，这就是**共振峰**。品质因素 Q 越大，曲线的峰越明显。共振峰处 $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}<\omega_0$



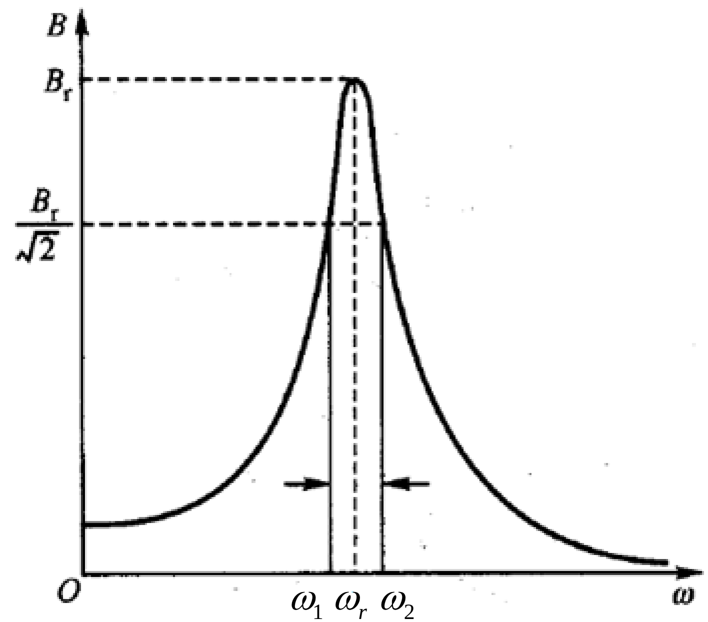
$$B=\frac{f_0}{\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

$$\tan\varphi=\frac{1}{Q}\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

●共振峰的锐度（Q 值的第二种意义）

通常用锐度来描写共振曲线的尖锐程度，当 $\omega=\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ ，**即共振时，** 振幅 $B=B_r=\dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ ；当ω偏离ω_r时，B 值将迅速减少，当 $B=B_r/\sqrt{2}$ 时，对应的角频率分别为ω_1和ω_2，则 **共振峰锐度**定义为：

$$S=\frac{\omega_r}{\omega_2-\omega_1}$$



所以有

$$\frac{f_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}=\frac{1}{2}\times\frac{f_0^2}{4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2=8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega^2=\omega_0^2-2\beta^2\pm2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\approx\omega_0^2\pm2\beta\omega_0$$

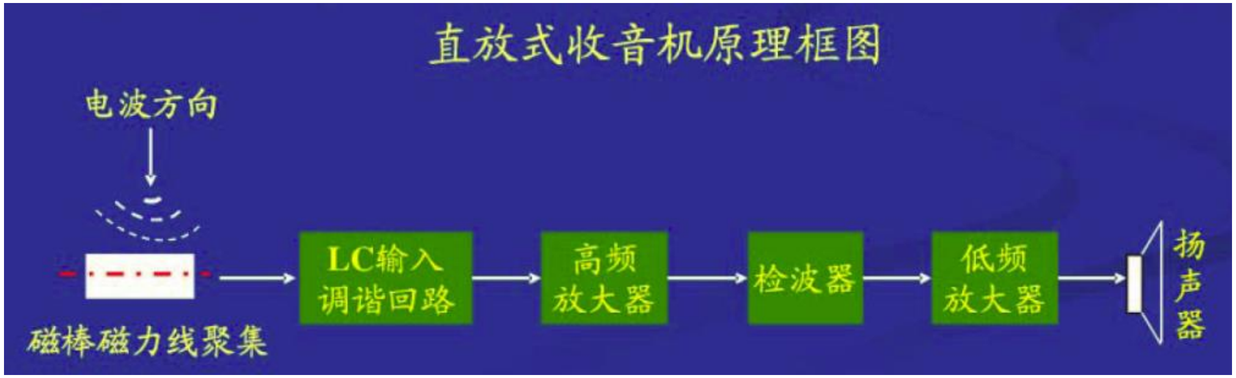
$$\omega_1\approx\sqrt{\omega_0^2-2\beta\omega_0}=\omega_0\left(1-\frac{2\beta}{\omega_0}\right)^{1/2}\approx\omega_0-\beta$$

$$\omega_2\approx\sqrt{\omega_0^2+2\beta\omega_0}=\omega_0\left(1+\frac{2\beta}{\omega_0}\right)^{1/2}\approx\omega_0+\beta$$

$$B=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$S\approx\frac{\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}{2\beta}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}=Q$$

●电磁学中的共振——LC振荡电路



由电阻***R***，电容***C***和电感***L***与交流电源串连而成的电路，设电源电动势为***V(t)***

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=V(t)$$

有阻尼受迫振动 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\beta)$$

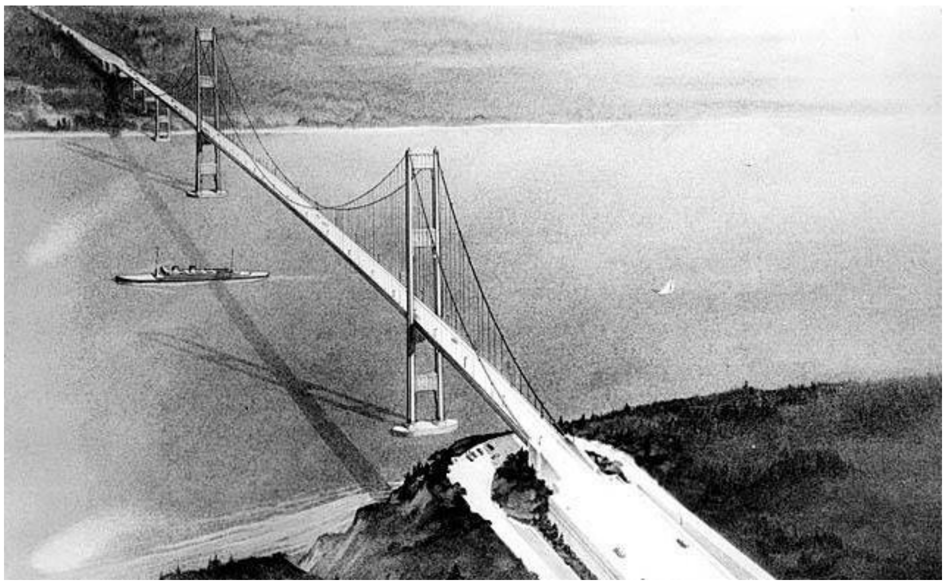
形式类似

其中 $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ $\gamma=\frac{R}{L}$

3. 共振的应用

我们周围的世界充满了各种振动

- 自然的和人为的
- 有益的和有害的



1940年7月1日,桥龄仅4个月的美国Tocama大桥在一场不算太强的大风中坍塌。风产生的周期性效果导致大桥共振,大桥在风中坚强的摇曳了近一天,最终轰然坠下。

●乐器中的共振

宋朝的沈括(11世纪)在《梦溪笔谈》里说："予友人家有一琵琶，置之虚室，以管色奏双调，琵琶弦辄有声应之。奏他调则不应，宝之以为异物，殊不知此乃常理。二十八调中但有声同者即应……"

●研究避免共振的破坏的措施

- 破坏外力(强迫力)的周期性;
- 改变外力的频率;
- 改变系统固有频率;
- 增大系统阻尼力.

风洞试验: 工程师确保飞机在整个飞行过程中所产生的力不能和其自然频率相同，否则共振就会产生导致破坏。

【思考题】策动力换为 $F_0(t)=a+bt$ 或 $F_0\cos^2\omega t$， 试求受迫振动方程的特解。