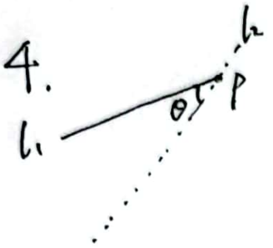
3月4日

3.(1) $y \longrightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$，单叶双曲面

(3) $x \longrightarrow \pm\sqrt{x^2+z^2} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$，椭球面

4.



所成锥面的锥点P为$(0,1,1)$

被转直线l_1的方向向量为$\vec{l_1}=(0,2,1)$

转轴直线l_2的方向向量为$\vec{l_2}=(0,1,1)$

设所成曲面上的点Q为(x,y,z)，则$\vec{PQ}=(x,y-1,z-1)$

则 $\frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{PQ}|\cdot|\vec{l_2}|}=|\cos\theta'|=|\cos\theta|=\frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}|\cdot|\vec{l_2}|}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

即 $\frac{|y+z-2|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow 9x^2+4y^2+4z^2-10yz+2y+2z-2=0$

Rmk. 对一般曲线，还可设$\exists R=(0,2t-1,t)$，st $\vec{RQ}\cdot\vec{l_2}=0$

且$|\vec{PR}|=|\vec{PQ}|$，再消去t即可。

9. $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ x^2=y^2+z^2 \end{cases} \xRightarrow{\text{消去}z}$ 曲面交线在 x-o-y 的投影落在 $x^2+y^2+4(x^2-y^2)=1$

即 $5x^2-3y^2=1 \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2})$

11. 消去z得曲线方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{5\cdot 4}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2+20y^2-24x-116=0 \\ z=0 \end{cases}$

8.4.4(2) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$

得柱面坐标系方程为 $r^2+4z^2=10$

球面：令 $x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$

得 $r^2(1+3\cos^2\theta)=10$

(5) 同~~上~~直角系方程为 $x^2+y^2+2z^2=4$，再同上

得球面系方程 $r^2(1+\cos^2\theta)=4$

(9) $r^2=2r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=2y$

(11) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \dfrac{y^2z^2}{x^2+y^2}=1-y^2$

8.4.6 所生成曲面为 $2(x^2+y^2)-z^2=2$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$ 得 $2r^2-z^2=2$

8.4.9 $\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=b\sin\theta\sin\varphi \\ z=c\cos\theta \end{cases}$ $0\le\theta\le\pi$，$0\le\varphi\le2\pi$

8.4.11 利用 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ 得参数表示

单叶：$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta}\cos\varphi \\ y=\dfrac{b}{\cos\theta}\sin\varphi \\ z=c\tan\theta \end{cases}$ $0\le\varphi\le2\pi$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$

双叶：$\begin{cases} x=a\tan\theta\cos\varphi \\ y=b\tan\theta\sin\varphi \\ z=\dfrac{c}{\cos\theta} \end{cases}$ $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$，$\varphi\in[0,2\pi]$

3月6日

9.1.2：设 A_1, A_2 均为开集，$\forall x \in A_1 \cap A_2$

$\exists r_1, r_2 > 0$, st $B(x, r_1) \subset A_1$, $B(x, r_2) \subset A_2$

取 $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$，则 $B(x, r_0) \subset A_1 \cap A_2 \Longrightarrow A_1 \cap A_2$ 为开集

$\forall x \in A_1 \cup A_2$，不妨设 $x \in A_1$，则 $\exists r > 0$, st $B(x, r) \subset A_1 \subset A_1 \cup A_2$

故 $A_1 \cup A_2$ 也为开集

设 B_1, B_2 均为~~开~~闭集，则 $(B_1)^c, (B_2)^c$ 均为开集（用上述结论）

故 $B_1 \cup B_2 = ((B_1)^c \cap (B_2)^c)^c$ 为闭集

$B_1 \cap B_2 = ((B_1)^c \cup (B_2)^c)^c$ 也为闭集

9.1.4. 依题意，$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n', M_0') = 0$

结合 $0 \leq |\rho(M_n, M_n') - \rho(M_0, M_0')| \leq |\rho(M_n, M_n') - \rho(M_n', M_0)| + |\rho(M_n', M_0) - \rho(M_0, M_0')|$

$\leq \rho(M_n, M_0) + \rho(M_n', M_0') \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty)$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, M_n') = \rho(M_0, M_0')$

9.1.5 设收敛点列为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且收敛于 x，则对 $\varepsilon = 1$

$\exists n_0 \in N^+$, st $\forall n > n_0$, $\rho(x_n, x) < 1$

故 $\forall n > n_0$, $\rho(x_n, 0) < \rho(x_n, x) + \rho(x, 0) < 1 + \rho(x, 0) \triangleq \rho_0$

记 $R = \max\{\rho(x_1, 0), \cdots, \rho(n_0, 0), \rho_0\}$

则 $\forall n \in N^+$, $x_n \in B(0, R)$，即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界

9.1.11 $\sin t \leq \cos t \Leftrightarrow t \in [-\frac{3}{4}\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi]$, $k\in Z$

故 $f(t)=\begin{cases} 0 & t\in[-\frac{3}{4}\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi], k\in Z \\ 1 & t\in[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi], k\in Z \end{cases}$

9.1.13. $f[\varphi(x,y), \psi(x,y)] = (x+y)^{x-y}$

$\varphi[f(x,y), \psi(x,y)] = x^y + x - y$; $\psi[\varphi(x,y), f(x,y)] = x+y-x^y$

3月8日

9.1.14 (1) 由 $0 \leq \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq |x|+|y| \to 0$ 知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$

(5) 由 $0 \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y||x^2+y^2-xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2}(|x|+|y|)$ 知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

(6) 由 $0 \leq \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{x^2+y^2}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2}$ 知 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$

(7) 当 $x,y>0$ 时，$e^{x+y} \geq \frac{1}{4!}(x+y)^4 \geq \frac{1}{4!}(x^4+y^4)$

故 $0 \leq (x^2+y^2)e^{-(x+y)} \leq 4!\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \xRightarrow[(6)]{利用}$ 知 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = 0$

(10) 先证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在

令 $y = x^2-x$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x} = -1$

令 $y=x$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x+x} = 0$

而 $\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \frac{xy}{x+y}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 利用反证法知其无极限

(11) $(1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = e^{\frac{\ln(1+xy)}{x+y}}$

令 $y=x^2-x$，$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x^3-x^2)}{x^2}} = e^{-1}$ 从而极限不存在

令 $y=x$，$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{2x}} = 1$

9.1.15 (1) $e^{\frac{1}{x^2-y^2}}=e^{\frac{1}{\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}}=e^{\frac{1}{\rho^2\cos 2\varphi}}$

当且仅当 $\cos 2\varphi<0$ 时，即 $\varphi\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{7}{4}\pi)$ 时，$\rho\to 0$ 有极限

9.1.17 (4) 当 $x+y\neq 0$ 时，$\frac{x-y}{x+y}$ 显然连续

$\forall(a,-a)\in$ 直线 $x+y=0$，沿~~过该点$(a,-a)$且斜率为k的直线趋近~~ ~~$(a,-a)$时~~，$\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to -a}}\frac{x-y}{x+y}=\infty\neq 0\ (a\neq 0)\Rightarrow f$ 在 $(a,-a)$ 处不连续

当 $a=0$ 时，沿 $y=kx$ 趋近于 $(0,0)$ 的极限为 $\frac{1-k}{1+k}$ 不一致 $\Rightarrow (0,0)$ 也不连续

综上可得，f 在除 $x+y=0$ 以外的点上连续

9.1.18 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{t\cos^4\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{t}}$

$=0=f(0,0)$ 即沿斜率 $k=\tan\alpha$ 的直线极限为 0

而当以 $x=k\sqrt{y}$ 趋近时 $\lim\limits_{y\to 0}f(k\sqrt{y},y)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{k^2y^2}{(k^4+1)y^2}=\frac{k^2}{k^4+1}$

与 k 有关，从而 f 在 $(0,0)$ 不连续

9.1.20. $f(x,y)=x$ 为初等函数显然连续，$y=\frac{1}{x}$ 的图像 G 为 R^2 中闭集，而 $f(G)=R\setminus\{0\}$ 为 R 中开集

9.1.23 $f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$ 为初等函数复合显然在 $xy\neq 1$ 处连续

取 $P_1=(\frac{n-1}{n},\frac{n-1}{n})$，$P_2=(\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1})$，则 $|P_1P_2|=\frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$

而 $|f(P_1)-f(P_2)|=\left|\frac{1}{1-(\frac{n}{n+1})^2}-\frac{1}{1-(\frac{n-1}{n})^2}\right|=\frac{2n^2-1}{4n^2-1}\geqslant\frac{1}{3}$

从而 f 在其上不一致连续