中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十章　多元函数的重积分

- 二重积分
- 二重积分的换元
- 三重积分
- **n 重积分**

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

n 维长方体上的累次积分

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 维闭区间或 n 维方体

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n, I_i = [a_i, b_i]$$

上的连续函数，它的积分可以化为累次积分

$$\int\cdots\int_I f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n.$$

等式右边的积分的顺序可以是任意的.

n 维有界闭域上的**累次积分**：

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是有体积的有界闭集，$f(\mathbf{x})$ 是 V 上连续函数．对于 V 中的点 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，

一、先一后 $n-1$ 的累次积分法

设 D 是 V 关于 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的投影，且 $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D$ 时，有 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})\le x_n\le\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})$，其中 φ_1,φ_2 是 D 上的连续函数，则有

$$\int_V f\,\mathrm{d}\sigma=\int\cdots\int_D \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

二、先 $n-1$ 后一的累次积分法

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是有体积的有界闭集, $f(\mathbf{x})$ 是 V 上连续函数. 对于 V 中的点 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, 当 $x_n\in[a,b]$ 时, 有 $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D_{x_n}\subset\mathbb{R}^{n-1}$. 则有

$$\int_V f\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{D_{x_n}} f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

注记： 还有更多的累次积分计算公式 . 总之, n 重积分化为逐次计算若干重数较低但和为 n 的积分.

n 重积分的换元法

设 V 和 V' 是 $\mathbb{R}^n$ 中有体积的有界区域，映射 $\Phi: V' \to V$

$$\Phi: x_i = x_i\left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right) \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$\Phi \in C^1\left(V'\right)$, 且 $\dfrac{\partial\left(x_1, \cdots, x_n\right)}{\partial\left(u_1, \cdots, u_n\right)} \neq 0$, 那么对于定义在 V 上的连续函数 $f(\mathbf{x})$, 有**n 重积分的换元公式**

$$\int \cdots \int_V f\left(x_1, \cdots, x_n\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int \cdots \int_{V'} f \circ \Phi\left(u_1, \cdots, u_n\right) \left|\frac{\partial\left(x_1, \cdots, x_n\right)}{\partial\left(u_1, \cdots, u_n\right)}\right| \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n$$

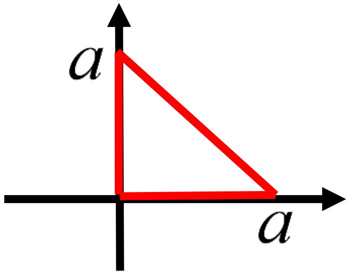
n 维单形

n 维单形是空间 $\mathbb{R}^n$ 中这样的点集

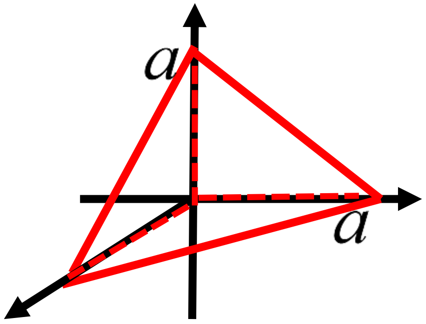
$$S_n(a)=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n\right): x_1,\cdots,x_n\geq 0;\ x_1+\cdots+x_n\leq a\right\}$$

- 当 $n=1$ 时, $S_1(a)$:

- 当 $n=2$ 时, $S_2(a)$:



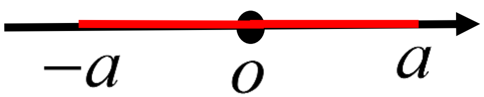
- 当 $n=3$ 时, $S_3(a)$



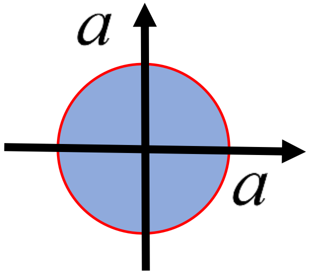
n 维球体

$B_n(a)=\left\{\left(x_1,\cdots,x_n\right):x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2\right\}$, 称其为以原点为球心、以 a 为半径的 **n 维球体**. $a=1$时称为**单位球体.**

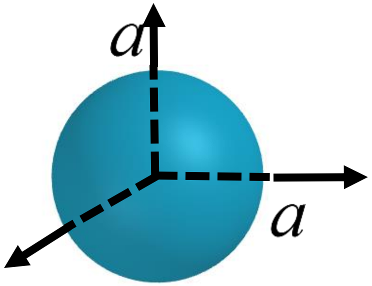
- 当$n=1$时, $B_1(a)$:



- 当$n=2$时, $B_2(a)$:



- 当$n=3$时, $B_3(a)$:



$$S_n(a)=\left\{(x_1,\cdots,x_n):x_1,\cdots,x_n\ge 0;\ x_1+\cdots+x_n\le a\right\}$$

定理： n维单形 $S_n(a)$ 的体积为：

$$\sigma\left(S_n(a)\right)=\int_{S_n(a)}\mathrm{d}\sigma=a^n\int_{S_n(1)}\mathrm{d}\sigma=\frac{a^n}{n!}.$$

$$B_n(a)=\left\{(x_1,\cdots,x_n):x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2\right\},$$

定理： n维球体 $B_n(a)$ 的体积为：

$$\sigma\left(B_{2n}(a)\right)=\frac{\pi^n}{n!}a^{2n},\qquad \sigma\left(B_{2n-1}(a)\right)=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!!}a^{2n-1}.$$

或总结为：$\sigma\left(B_n(a)\right)=\dfrac{a^n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$

本小节作业：

P186: 1(1,3)，2，4

P187(第10章综合习题): 3(2)，4，8.