# 中国科学技术大学 2013–2014 学年第一学期
# 数学分析 (B1)　期末考试

**1. (10 分)** 计算下面的导数:

(1) $(\ln(1+\mathrm{e}^{x\sin x}))'$

(2) $((x^2+1)\sin x)^{(n)}$.

**2. (20 分)** 计算下面的极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}$

**3. (20 分)** 计算下面的不定积分和积分:

(1) $\displaystyle\int(x+1)\mathrm{e}^x\ln x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

**4. (10 分)** 求解微分方程 $y\cos x-y'\sin x=y^2(1-\sin x)\cos x$.

**5. (10 分)** 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

**6. (10 分)** 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域及和函数.

**7. (10 分)** 求证: 对任意 $x>0,\ y>0$ 有 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+xy<\mathrm{e}^{x+y}+1$.

**8. (10 分)** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x),f'(x),f''(x)$ 都大于 0, 假设存在正数 $a,b$, 使得 $f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立. 求证:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$;

(2) 存在常数 $c$, 使得 $f'(x)\leqslant cf(x)$.

# 中国科学技术大学 2015–2016 学年第一学期
# 数学分析 (B1)　期末考试

**1. (10 分, 每小题 5 分)** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{n}\cos nx\sin x^n\,\mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

**2. (20 分, 每小题 5 分)** 求下列积分:

(1) $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \dfrac{1}{x(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \dfrac{(1-x)^2\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

**3. (15 分)** 设 $f(x)=x\ln(1+x^2)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

**4. (15 分)** 求在 $[0,+\infty)$ 上连续可微函数 $f(x)$, $f(0)=1$, 使得对任意 $t>0$, 曲线段 $L: y=f(x)$, $x\in[0,t]$ 的弧长恰好等于 $L$ 与两个坐标轴及垂线 $x=t$ 所围成的区域的面积. 并求 $L$ 绕 $x$ 轴旋转所得的旋转体的体积.

**5. (20 分, 每小题 10 分)** 求微分方程的通解.

(1) $(\sin x)y''-(\cos x)y'=\sin^2 x+1$.

(2) $y''-3y'+2y=2x$.

**6. (12 分)** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且满足方程 $f(x+a)=-f(x)$. 求证:

$$\int_0^{2a} xf(x)\,\mathrm{d}x=-a\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**7. (8 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 求证:

$$2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

并求使上式成为等式的连续函数.

# 中国科学技术大学 2016–2017 学年第一学期
# 数学分析 (B1)　期末考试

**1. (10 分, 每小题 5 分)** 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^3)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-x)\cos(nx)\sin(x^n)\,\mathrm{d}x$

**2. (24 分, 每小题 8 分)** 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

**3. (10 分)** 设 $\delta>0$, 考察函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2x}$ 分别在区间 $[\delta,+\infty)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是否一致收敛.

**4. (10 分)** 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$ 的收敛半径及和函数.

**5. (20 分)** 求下列微分方程的通解:

(1) $y'+y=y^2x$;

(2) $xy''+2y'=2$.

**6. (10 分)** 求微分方程 $y''-2y'=\mathrm{e}^{4x}$ 满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的特解.

**7. (8 分)** 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正连续函数, 满足 $f_1(x)\leqslant 2f_0(x)$. 设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

求证:

(1) $f_n(x)\leqslant c_nf_{n-1}(x)$, 其中 $c_1=2$, $c_{n+1}=\dfrac{2c_n}{c_n+1}$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}|f_1(x)-f_0(x)|$;

(3) 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

**8. (8 分)** 设 $\{a_n\}$ 是大于 1 的递增数列. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

# 中国科学技术大学 2017–2018 学年第一学期
# 数学分析 (B1) 期末考试

**1. (10 分)** 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 $n+1$ 个实数, $x_0 \in \mathbb{R}$, 求 $n$ 次多项式 $P_n(x)$ 满足

$$P_n^{(k)}(x_0) = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

**2. (24 分, 每小题 6 分)** 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

**3. (14 分, 每小题 7 分)** 求解下面的微分方程:

(1) 求 $y''' + y'' + y' + y = 0$ 的实的通解.

(2) 求 $\begin{cases} y' + 2xy = 4x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解.

**4. (10 分)** 设 $f(x)$ 是在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上非负单调递增的连续函数. 求证:

$$x \int_0^x f(t) \sin t\,\mathrm{d}t \geqslant (1 - \cos x) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

**5. (12 分)** 设 $u_n(x) = (-1)^n x \mathrm{e}^{-nx}$. 证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(2) 对于任何 $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 收敛;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

**6. (10 分)** 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 2$ 处的 Taylor 级数展开, 并指出收敛集合.

**7. (10 分)** 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上可导, $x_0 \in (a,b)$. 定义函数

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \in (a,b) \setminus \{x_0\}, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

设 $g(x)$ 在 $x_0$ 可导, 且 $f(x)$ 在 $x_0$ 二阶可导. 求证: $g'(x)$ 在 $x_0$ 连续.

**8. (10 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2 \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

# 中国科学技术大学 2018–2019 学年第一学期
# 数学分析 (B1)　期末考试

2019 年 1 月 11 日

**1. (10 分)** 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

**2. (20 分, 每小题 5 分)** 求积分和不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

**3. (20 分, 每小题 10 分)** 求解下面的微分方程:

(1) 求 $(1+x^2)y''+2xy'=x$ 的通解.

(2) 求 $y''-3y'+2y=2x-3$ 的通解.

**4. (10 分)** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数. 求证:

$$\int_0^{\pi} xf\left(|\cos x|\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(|\cos x|\right)\mathrm{d}x.$$

**5. (10 分)** 研究函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛.

**6. (10 分)** 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

**7. (10 分)** 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n^2},\quad n\geqslant 2.$$

试证明:

(1) $\dfrac{a_n n\ln n}{a_{n+1}(n+1)\ln(n+1)}<1+\dfrac{1}{n^2}$;

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

**8. (10 分)** 设 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上取值为正的可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|f'(x)-f'(y)\right|^2\leqslant|x-y|.$$

求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $\left|f'(x)\right|^3<3f(x)$.

# 中国科学技术大学 2019–2020 学年第一学期

# 数学分析 (B1) 期末考试

2020 年 1 月 10 日

**1. (30 分, 每小题 6 分)** 计算题 (给出必要的计算步骤).

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int |\ln x|\,\mathrm{d}x$;

(5) 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^p}$, $p$ 是常数, $p>0$, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^{p+1}}}$.

**2. (10 分)** 已知曲线 $y=y(x)$ 经过原点, 且在原点的切线平行直线 $2x-y-5=0$, 而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$, 求曲线 $y=y(x)$.

**3. (10 分)** 求由方程 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所表示的平面曲线所围成的平面图形的面积.

**4. (10 分)** 设 $\alpha,\beta$ 为实数. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x^\beta}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0. \end{cases}$

问当且仅当 $\alpha,\beta$ 取何值时, $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积? (需说明理由)

(注: 此处的可积是指有通常意义的积分, 不包含反常积分. )

**5. (12 分, 每小题 6 分)**

(1) 设实数 $\alpha>0$, 讨论正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)$ 的敛散性.

(2) 设实数 $A>0$, 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在闭区间 $[-A,A]$ 上的一致收敛性.

**6. (8 分)** 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数且有反函数, 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

**7. (12 分)** 设函数 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 证明: $F(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数的充分必要条件是 $\displaystyle\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

**8. (8 分)** 设数列 $\{a_n\}$ 为有界数列, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 证明: 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

# 中国科学技术大学 2020–2021 学年第一学期

## 数学分析 (B1) 期末考试

2021 年 3 月 7 日

**1. (30 分, 每小题 6 分)** 计算题.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{\tan x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$;

(4) $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^2$ 的通解;

(5) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛点集及其和函数 $S(x)$.

**2. (10 分)** 求在极坐标平面中 $r \leqslant 1+\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 所表示的平面图形绕极轴旋转一周所产生旋转体的侧面积 $S$.

**3. (10 分)** 求微分方程 $y''+4y = 9x\sin x$ 的通解.

**4. (10 分)** 求积分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x$.

**5. (10 分)** 将 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在点 $x_0 = -4$ 处展开成 Taylor 幂级数, 并指出使展开式成立的 $x$ 的变化范围.

**6. (10 分)** 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{2^{nx}}$ 在区间 $J = (0,+\infty)$ 中是否逐点收敛? 是否一致收敛? 要提供相应证明.

**7. (10 分)** 设 $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^{2n}}\,\mathrm{d}t$. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的收敛性; 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛? 提供相应证明.

**8. (10 分)** 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负, $f(x)$ 不恒为零, $g(x)$ 恒取正值. 对自然数 $n$, 记 $I_n = \displaystyle\int_a^b (f(x))^n g(x)\,\mathrm{d}x$. 试证数列 $\left\{\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 是收敛的, 且其极限为 $\displaystyle\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.