中国科学技术大学 2016—2017 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5=20$ 分) 填空题.

(1) 若 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 3x_1-4x_2+3x_3+x_4=t \end{cases}$ 有解, 则参数 $t=$ ____.

(2) 若向量 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(2,3,t)$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维子空间, 则参数 $t=$ ____.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的相合规范型为 ____.

(4) 二次曲面方程 $2x^2-3y^2-3z^2-2yz-5=0$ 表示的曲面类型是 ____.

(5) 实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+2txy+2txz+2yz$ 为正定当且仅当参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 5=25$ 分) 判断题.

(1) 设 A 是 n 阶方阵, 则 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^2$.

(2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定是奇异矩阵.

(3) 设 A 是 n 阶方阵, 若对任意 n 维列向量 x 都有 $x^TAx=0$, 则 A 为反对称方阵.

(4) 若 A,B 是 n 阶正定矩阵, 则 AB 也是 n 阶正定矩阵.

(5) 设 A 是 n 阶方阵, 则 A 是正交矩阵当且仅当 A 的 n 个行向量组成的 n 维实数组空间的标准正交基.

3. (14 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y,x-3z,2y-z)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$ 下的表示矩阵.

(2) 是否存在基 β_1,β_2,β_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (14 分) 设 $V=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\}$ 为次数不超过 2 的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明: $(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ 定义了 V 上的一个内积.

(2) 应用 Schmidt 正交化方法将向量值 $\{1,x\}$ 改造成相对 (1) 中所定义内积的标准正交向量组.

5. (14 分) 设 M 是 $2n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix}$, 其中 A 是满足 $A^2=I$ 的 n 阶对称实方阵.

(1) 求矩阵 M 的所有特征值; (2) 可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}MP$ 为对角矩阵.

6. (8 分) 假设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵. 证明: $\det A\cdot\det B\leqslant\left(\dfrac{1}{n}\operatorname{tr} AB\right)^n$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 6 = 30$ 分) 填空题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018} = $ ____.

(2) 若方阵 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1,2,3. 设 A_{ii} 为 a_{ii} 的代数余子式, $i = 1, 2, 3$, 则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} = $ ____.

(3) 设 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$. 如果向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1, -1, 1)$, 则在基 (II) 下的坐标为 ____.

(4) 设矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\operatorname{diag}(-1, 2, b)$, 则 $b = $ ____.

(5) 方程 $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1$ 所表示的二次曲面类型为 ____.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (tI_3 + A)^2$, $t \in \mathbb{R}$, 则 B 正定当且仅当 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 不相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(3) 设 $\mathbb{R}^n$ 中, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 为正交向量组. 如果 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关, 且 $\gamma, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 也线性无关, 则有 β, γ 线性相关.

(4) 若 A 正定, 则 A 的主对角线上的元素均为正实数.

3. (16 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的变换: $f(X) = AX - XA$, $\forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) 求证: f 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换.

(2) 求出 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

(3) 求 $W = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid f(X) = 0\}$.

4. (10 分) 设 $\mathbb{R}^4$ 的内积为 $(X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i y_i$, $\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. 请将下列向量化为 $\mathbb{R}^4$ 在该内积下的一组标准正交基: $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$.

5. (16 分) 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1,2,3, 并且有 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 分别为属于特征值 1 和 2 的特征向量.

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量的全体.

(2) 求矩阵 A.

6. (8 分) 设 $A = (a_{ij})$ 为正定矩阵, d_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 证明: $\det A \leqslant a_{nn} d_{n-1}$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6=24$ 分) 填空题.

(1) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2,\end{cases}$ 有无穷多解, 则 $\lambda=$____.

(2) 若 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(2,3,t)$ 生成 $\mathbb{R}^3$ 的二维子空间, 则 $t=$____.

(3) 若方阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1, -3, -4, 则 $\det(I+A)=$____.

(4) 设 (I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; (II) β_1,β_2,β_3 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$. 如果向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1,0,1)$, 则在基 (II) 下的坐标为____.

(5) 设 $\alpha_1=(a,0,-1)^T$, $\alpha_2=(1,b,1)^T$, $\alpha_3=(c,1,2)^T$ 分别是三阶实对称矩阵 A 的三个不同特征值所对应的特征向量, 如果矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$, 则 $\det B=$____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2$, 则当 $t\in$____ 时, 该二次型正定.

2. (6 分 $\times 4=24$ 分) 判断题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(2) 设 $V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\,\middle|\,a_i\in\mathbb{R},i=0,1,2\right\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 若定义 $(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$, $\forall f(x),g(x)\in V$, 则 $(f(x),g(x))$ 是 V 上的一个内积.

(3) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 如果非零向量 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 这 $n-1$ 个向量都正交, 则有 β, α_n 线性相关.

(4) 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ C & A_2\end{pmatrix}$, 且 A_1, A_2 均为方阵. 如果 A 正定, 则 A_1, A_2 均正定.

3. (5 分 +5 分 = 10 分) 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$, 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,-1,0,2)^T$, 其中 k 为任意实数.

(1) α_1 能否由 α_2, α_3, α_4 线性表示?

(2) α_3 能否由 α_1, α_2, α_4 线性表示? 请分别说明理由.

4. (8 分 +8 分 = 16 分) 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换, 在基 (I): α_1, α_2, α_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}$.

(1) 求 σ 在基 (II): $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$, $\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 设向量 $\xi=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3$, $\eta=\beta_1-\beta_2+\beta_3$, 求 $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$ 分别在基 (I) 下的坐标.

5. (8 分 +8 分 = 16 分) 设实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$.

(1) 利用正交变换化该二次型为标准型, 并且给出具体的正交变换;

(2) 判断 $Q(x,y,z)=1$ 所表示的二次曲面类型.

6. (5 分 +5 分 = 10 分) 设 A 为 n 阶实对称阵, 且 $A^2+3A+2I=0$.

(1) 请给出 A 的可能的全部互异特征值.

(2) 试证明: 当 n 为奇数时, A 的伴随矩阵 A^* 正定.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 =$ ____.

(2) 向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3,4)$, $\alpha_3 = (2,3,4,5)$, $\alpha_4 = (1,-2,2,-1)$ 的秩等于 ____.

(3) 已知非齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解, 则 $\lambda =$ ____.

(4) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP - PAP^{-1} + I$. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 B 的 n 个特征值, 则 $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i =$ ____.

(5) 实二次型 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正惯性指数为 ____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若 0 为矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(2) 若 f 为线性空间 V 上的一个线性变换, 且 f 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则在 V 中存在一组基, 使得 f 在这组基下的矩阵为对角阵.

(3) 设 $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若对任意 $f(x), g(x) \in V$ 定义 $(f(x), g(x)) = f(0)g(0)$, 则此二元运算 (,) 可以成为 V 上的一个内积.

(4) 设 $2n$ 阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_2 均为 n 阶方阵. 若 A 正定, 则 $A_1 + A_2$ 也正定.

3. (10 分) 设 $\alpha_1 = (1,1,0)^T$, $\alpha_2 = (1,0,1)^T$, $\alpha_3 = (0,1,1)^T$ 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解.

(1) 求 $Ax = 0$ 的通解; (2) 求 $Ax = b$ 的通解; (3) 求满足题设条件的一个非齐次线性方程组.

4. (15 分) 设 (I): $\alpha_1 = (1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (0,1,0)^T$, $\alpha_3 = (0,0,1)^T$; (II): $\beta_1 = (-1,0,1)^T$, $\beta_2 = (0,1,1)^T$, $\beta_3 = (2,-1,-2)^T$ 分别为 $\mathbb{R}^3$ 的两组基. 设 σ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 并且 $\sigma(\beta_1) = (1,0,-3)^T$, $\sigma(\beta_2) = (0,-1,-1)^T$, $\sigma(\beta_3) = (-5,-1,0)^T$. 请分别求出 σ 在 (I)、(II) 这两组基下的矩阵.

5. (15 分) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 可以经过正交变换 $(x_1, x_2, x_3)^T = P(y_1, y_2, y_3)$ 化为标准型 $y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 确定 a 和 b 的取值. (2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

6. (8 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $A^2 = 2A$. 证明: A 相似于对角阵.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, α_1, α_s 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零向量, 且满足 $\alpha_i^T A \alpha_j = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant s$. 证明: $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \dfrac{1}{2}\alpha_2, \dfrac{1}{3}a_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为 ____.

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\mathrm{diag}(1,2,3)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3$ 下的矩阵为 ____.

(3) 若矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x=$ ____, $y=$ ____.

(4) 若实的正交矩阵 A 的每个元素都是 $\pm\dfrac{1}{2n}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 A 的阶数为 ____.

(5) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3) = tx_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2(t-1)x_1x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若 n 阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 满足相似等价关系 $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, 则 $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$.

(2) 若两个同阶实对称矩阵具有相同的特征多项式, 则这两个方阵相似.

(3) 在实 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上定义 $(A,B) = \mathrm{tr}(A^TB)$, 则 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个内积.

(4) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

3. (14 分) 给定 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 α_i 为 4 维列向量, $i = 1,2,3,4$, 且 α_1, α_2 线性无关. 若 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_3 + \alpha_4$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

4. (18 分) 设实二次型 $Q(x,y,z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 8xz$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x,y,z) = -1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

5. (13 分) 证明: n 阶全 1 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与同阶方阵 $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

6. (10 分) 设 V 为 n 维欧式空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V$, 对于 s 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times s}$, 其中 $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, 证明: 矩阵 A 的秩等于向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 ____.

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若 A 的特征值为 1,2,3,4, 则 $|B^{-1} - I| =$ ____.

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a + b =$ ____.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank} A = 2$, 则 $a =$ ____.

(6) 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 则 $a_{11} =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否相似? 是否相合?

(2) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, $AB = I_m$, 则 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ 是否成立?

(3) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$, $i, j = 1, \cdots, n$, 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$ 的符号差是否为 n?

(4) 设方阵 A 的每行元素之和都为 1, 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1?

3. (56 分) 计算及证明题.

(1) (8 分) 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定, $|A| = -1$, 且 $(1, 1, 1)^T$ 为 -1 的特征向量. 求 A.

(2) (8 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha = (3, -1, 2)^T$, 求 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} |A^n \alpha|$.

(3) (8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n > 1$, $\alpha \in V$. 设 $T^n\alpha = 0$, 但是 $T^{n-1}\alpha \neq 0$.

(a) 证明: 向量组 $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关. (b) 证明: T 不能对角化.

(4) (6 分) 设 $K = \{c_1 + c_2 x + c_3 \cos x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成线性空间. 定义内积 $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x$, 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

(5) (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x| < 3$ 时, $|A| < 10^5$.

(6) (8 分) 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型: $x_1^2 + x_2^2 + t x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$.

(7) (10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(a) 证明: $1, x+2, x^2+x+3$ 是 K 的一个基.

(b) 求线性变换 $Tf := f'' - f$ 在这个基下的矩阵.

(c) 求 T 的特征向量.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是 ____.

(2) 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 那么 $A^3 =$ ____.

(3) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V = \mathrm{span}\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3\}$ 的维数是 ____.

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $x =$ ____, $y =$ ____.

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为 ____.

(6) 若实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关.

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在记作加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

3. (12 分) 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A, 满足 $\mathrm{rank}\, A = 3$. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^T$, $5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 2, 0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的. (2) 求出这个线性方程组的通解.

4. (14 分) 用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix}$.

5. (14 分) $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1 = (2, 3, 5)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)^T$ 分别映为 $\beta_1 = (1, 2, 0)^T$, $\beta_2 = (2, 4, -1)^T$, $\beta_3 = (3, 0, 5)^T$. 求:

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵 B.

6. (16 分) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

中国科学技术大学 2020—2021 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值是 ____.

(2) 3 阶实对称矩阵组成的集合恰有 ____ 个相合等价类.

(3) 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^2$ 的正惯性指数等于 ____.

(4) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量, 则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是 ____.

(5) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的线性变换: $\mathscr{A}(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \gamma)\gamma$, 其中 γ 是 V 中给定的单位向量, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值为 ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题.

(1) n 维线性空间 V 中同一个线性变换在两组不同的基本下的矩阵彼此相合.

(2) 任何一个 n 阶实方阵都实相似于上三角矩阵.

(3) 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

(4) 设 A, B 都是 n 阶实方阵, 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

(5) 设 A 是 n 阶实对称方阵, 若 A 的每一个顺序主子式都是非负的, 则 A 半正定.

3. (12 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1 = (2,3,5)^T$, $\alpha_2 = (0,1,2)^T$, $\alpha_3 = (1,0,0)^T$ 变换为 $\beta_1 = (1,2,0)^T$, $\beta_2 = (2,4,-1)^T$, $\beta_3 = (3,0,5)^T$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵; (2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

4. (16 分) 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 给出的度量矩阵 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 请由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按现在的顺序进行 Schmidt 正交化给出一组标准正交基.

5. (12 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程是 $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出这曲面的类型.

6. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB = BA$. 求证: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 P^TAP 与 P^TBP 都是对角矩阵.