数分前三章复习提纲

说明：

1、本提纲不是划定考试范围（也不会给大家划定范围）. 提纲中没有提到的地方并不表示考试不会涉及.

2、所举例题不一定具有代表性, 更不是考试的模拟试题.

3、希望同学们学会总结,在总结中提高. 充分理解概念和含义,关注不同内容的关联性,掌握分析、证明、推导和计算的方法.

第一章：极限的学习要点

一、对实数域 $\mathbb{R}$ 的认识

虽然本章没有详细介绍实数的系统理论, 但是对实数一些基本认识应该掌握.

1、 $\mathbb{R}$ **是有序域**.

2、 $\mathbb{R}$ **满足确界原理**： $\mathbb{R}$ 中任何有上（下）界的非空子集合 E 一定有上（下）确界, 即在 $\mathbb{R}$ 中存在最小（大）上（下）界 $\sup E$（$\inf E$）.

3、**有理数在实数中的稠密性**.

例 1 设 ξ 是一个无理数. 试证对任意两个实数 $a<b.$, 存在整数 m,n 使得 $m+n\xi\in(a,b)$, 即, 集合

$$S=\{m+n\xi\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

本题说明在实数域中, 除了有理数是稠密的以外, 上述集合 S 在实数域中也是稠密的.

证明 不妨设 $0<a<b$. 对任意正整数 i, 记 $n_i=-[i\xi]$, 这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 因此 $x_i=n_i+i\xi\in S$ 且 $x_i=i\xi-[i\xi]$ 表示 $i\xi$ 的小数部分. 因 ξ 是无理数, $i\xi$ 小数部分不可能为 0, 对任意正整数 i,j, $i\xi$ 与 $j\xi$ 的小数部分也不相等: $x_j\neq x_i$.

取正整数 k 使得

$$\frac{1}{k}<b-a,$$

则在 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in(0,1)$ 共$k+1$ 个互不相等的数中, 至少有两个, 记为 x_i,x_j, 满足

$$0<x_j-x_i<\frac{1}{k}$$

设 n 是使得 $n(x_j-x_i)>a$ 的最小正整数, 即

$$n(x_j-x_i)>a>(n-1)(x_j-x_i),$$

由此推出

$$a < n(x_j - x_i) = (n-1)(x_j - x_i) + (x_j - x_i) < a + \frac{1}{k} < a + b - a = b,$$

显然

$$n(x_j - x_i) = n(n_j - n_i) + n(j-i)\xi \in S,$$

这样就证明了在任何两个数 $a < b$ 之间, 一定有 S 中的一个数, 所以 S 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

二、极限的定义:

极限是数学分析的基础. 因此理解和掌握极限概念十分重要.

1、**数列和函数极限的定义**: 对"$\varepsilon - N$" 与 "$\varepsilon - \delta$" 语言的理解, 主要是对"任意"和"存在"的理解.

2、**对"不以a 为极限的表述**: 注意, "不以a 为极限"既可能是发散的, 也可能是以其它值为极限.

3、**函数极限的不同形式**: 例如当 $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$, $x \to x_0$ (有限数)时函数极限的表述.

4、**数列收敛与子列收敛的关系**.

数列收敛于 a, $\Longrightarrow$ 子列收敛于 a.

子列发散, 或两子列不收敛于同一值 $\Longrightarrow$ 数列发散.

5、**函数极限与左右极限的关系**.

6、**函数极限与数列极限的关系**:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Longrightarrow \forall x_n \to x_0, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

这里 x_0 可以是有限数也可以是无穷.

以上第4、5和第6在判别极限不存在时比较实用. 例如, 如果数列有两个子列极限不一致,或者存在发散子列,则数列发散; 在函数极限中, 左右极限不相等或某单侧极限不存可判断极限不存在.

二、性质:

1、**唯一性**.(数列和函数)极限的唯一性,保证定义的合理性.

2、**局部性**: 所谓"局部性"是指

数列: 收敛性只与充分大以后的项有关(即改变有限项不影响收敛性)

函数: 收敛性只与 x_0 附近的函数值有关.

注意这里的"充分大"含义是,$\exists N$,对 $n > N$ ....

"附近"是指: $\exists\delta > 0$ 对 $0 < |x - x_0| < \delta$ ......

3、**有界性**：收敛必有界（对函数极限来说是在 x_0 附近有界）

4、**相容性**：极限运算与四则运算和函数复合的相容性.特别是复合函数的极限

$$\lim_{y\to y_0} f(y)=a,\ \lim_{x\to x_0}\phi(x)=y_0,\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(\phi(x))=a$$

5、**"保序性"**：例如：

$a_n\to a,\ a>0\Longrightarrow a_n>0$ 对充分大的 n 成立.反之 $a_n>0\Longrightarrow a\geq 0$

$f(x)\to a,(x\to x_0),\ a>0\Longrightarrow$ 在 x_0 附近有 $f(x)>0$. 反之在 x_0 附近有 $f(x)>0\Longrightarrow a\geq 0$.(注意正反之间些微的差别)

三、实数完备性的有关等价命题：

以下三个等价命题本质上是实数完备性的基本定理, 但可用来解决数列的收敛性问题.

1、**确界原理**：确界的表述（特别是类似"$\varepsilon-\delta$" 语言的表述）和存在性；

确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界必收敛,$\Longrightarrow$ 区间套定理.

2、**列紧性**：有界数列必有收敛子列（注意证明方法）.

3、Cauchy **收敛准则**：数列以及函数或在一点或在无穷的收敛准则.收敛准则的重要性在于不需要已知极限值就可断定收敛性的基础性方法.

说明 1、等价性可从下列次序证明: 确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界定理$\Longrightarrow$ 闭区间套定理$\Longrightarrow$ 列紧性定理$\Longrightarrow$ Cauchy收敛准则 $\Longrightarrow$闭区间套定理$\Longrightarrow$ 确界原理. 其中由Cauchy收敛准则 $\Longrightarrow$闭区间套定理$\Longrightarrow$ 确界原理过程, 感兴趣的同学可自行完成.

2、指数 e 的定理, 可分别由下列两种极限给出

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

四、计算：

1、**三明治**：关键是估计不等式, 原则是**收放适度,恰到好处**.在估计数列不等式中"算术平均大于几何平均"会经常用到.

2、**单调有界**：首先要证明单调增（或单调减）以及有上界（或有下界）. 除了常规的方法外,可借助函数的单调增减给予证明.

3、**两个重要极限的应用**：以下是两个极限以及其他等价的表现形式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

一些极限的计算最终可归结到上述极限形式.

4、Stolz **定理和**L'Hospital**法则**：主要解决 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{*}{\infty}$ 型的极限问题. 其他不定式可以转化为这两种形式.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},\quad（差商）$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad（微商）$$

当然要注意数列和函数情形下的有关条件.

5、**无穷小和无穷小的替换和**Taylor**展开法**：理解什么是无穷小量, 掌握无穷小量的比较. 在取极限过程中, 特别是 L'Hospital 法则运用过程中, 无穷小替换非常重要, 可以减轻计算量.

五、例题

例 2　设 k 为正整数, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[k]{n}}$

解　本题实际上是函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$ $(\alpha>0$ 的离散形式. 由 L'Hospital 法则, 对任意 $\alpha>0$, 该函数极限为 0. 因此对 $\alpha=\frac{1}{k}$, 取 $x_n=n\to+\infty$, 所以极限也为 0.

例 3　设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 证明下列极限存在并求出极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

证明　设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}>S_n$ 严格单调增. 分两种情况:

(1)　若 S_n 无界, 则根据 "单调增无界的数列的极限一定是 $+\infty$" 可知 $S_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$, 就有

$$0<\frac{a_n}{S_n}\leq MS_n\to 0\ (n\to\infty).$$

这里 M 是 $\{a_n\}$ 的上界.

(2)　若 S_n 有界, 根据单调增有界数列一定收敛, 可设 $S_n\to S$ $(n\to\infty)$, 显然 $S\geq S_n>a_1>0$. 另一方面

$$a_n=S_n-S_{n-1}\to S-S=0\ (n\to\infty)$$

所以

$$0<\frac{a_n}{S_n}\to\frac{0}{S}=0\ (n\to\infty).$$

不管哪种情况, 原式的极限为 0.

例 4 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 a 和 b 的值.

解 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b=x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}{\frac{1}{x}}$$

极限为零表明分子是 $\frac{1}{x}$ 的高阶无穷小. 利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-1\sim\frac{1}{2}\frac{1}{x}$ 得

$$\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\sim(a+1)+\frac{3/2+b}{x}+\frac{2}{x^2},$$

因此要使得极限为零, 必须 $a+1=0, b+3/2=0$.

例 5 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

解 该题是$\frac{0}{0}$ 型未定式, 可以直接用罗必塔法则. 但是如果用无穷小替换的方法, 下列方法是**错误的**

错解 因 $\sin x\sim x, \tan x\sim x\ (x\to0)$, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

正解

$$\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$$

因为 $\sin x\sim x, \cos x-1=-\frac{1}{2}x^2, \cos x\sim1,\ (x\to0)$, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{1\cdot x^3}=-\frac{1}{2}$$

例 6 求下列极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^{\sin x}-1}{1-\cos x}.$$

解 该题是比较经典的用无穷小量替换的题目(虽然课堂上讲过). 首先将分子化为

$$\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^{\sin x}-1=e^{\sin x\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)}-1,$$

注意到

$$\sin x \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2}\right) \sim 0\ (x \to 0),$$

利用 $\mathrm{e}^x - 1 \sim x\ \ \ln(1+x) \sim x, \sin x \sim x\ 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2\ (x \to 0)$, 得

$$\mathrm{e}^{\sin x \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2}\right)} - 1 \sim \sin x \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2}\right) = \sin x \ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2}\right)$$

$$\sim x\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2} \sim x^2\ (x \to 0).$$

这样比较容易判断出该题是 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限问题. 分子分母用等价无穷小量替换, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2}\right)^{\sin x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2}\right)}-1}{1-\cos x} = 2$$

例 7 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

解 利用Taylor 展开 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^4)$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}4x^2-\frac{1}{2}9x^2+o(x^4))}{\frac{1}{2}x^2+o(x^4)} = 14.$$

例 8 设 $0 < x_1 < 1,\ x_{n+1} = x_n(1-x_n)\ (n=1,2,\cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = 1,\ 即\ x_n \sim \frac{1}{n}\ (n\to\infty).$$

证明 易见 $0 < x_n < 1\ (n=1,2,\cdots)$, 且

$$x_{n+1} = x_n(1-x_n) < x_n,\ n=1,2,\cdots,$$

所以x_n 单调减有界, 因而收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 则

$$x = x(1-x),$$

解得 $x=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 所以 x_n 是无穷小量. 下面要证明 x_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小.

借助 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n} = 1.$$

因此就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nx_n}=1$, 也就得到结论.

例 9 设 $a_0=1,\ a_{n+1}=\sin a_n\ (n=1,2,\cdots)$, 求

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na_n^2}$.

解 (1) 归纳可证 $\{a_n\}$ 单调减有界 $0\le a_n\le 1$. 因此有极限, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 则 $a=\sin a$, 推得 $a=0$.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{-2}-a_n^{-2}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-\sin^2 a_n}{a_n^2\sin^2 a_n}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

在上式中, 首先用到了Stolz定理, 然后用到函数极限与数列极限关系, 最后用到无穷小替换和L'Hospital 法则.

例 10 试证 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理: 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛于 0, $\{b_n\}$ 严格单调减. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

证明 根据条件, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n),$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式从 n 加到 $m-1$, 有

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_m-b_n)<a_m-a_n<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_m-b_n),$$

或

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_m-a_n}{b_m-b_n}<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

令 $m\to\infty$, 并利用 $a_m\to 0, b_m\to 0\ (n\to\infty)$ 就有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

对任何 $n>N$ 成立.

例 11 书上第106页,第25题：设 $a \in (0,1)$, $b_1 = 1-a$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{1-e^{-b_n}} - a$, 问 b_n 是否收敛?

分析：欲证其收敛,最好单调有界,欲证单调,借助函数

$$f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} - a,\ x > 0$$

显然

$$f(x) = -\frac{0-x}{e^{-0}-e^{-x}} - a = e^{\xi} - a > 1-a > 0$$

$$f'(x) = \frac{1-(1+x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} > 0$$

这里用到了不等式 $e^x > 1+x$. 因此 $f(x) > 1-a$, $f(x) \nearrow$. 因为 $b_1 = 1-a > 0$, $b_2 = f(b_1) > 1-a = b_1$.（归纳）如果 $b_1 < b_2 < \cdots b_n$ 则

$$b_{n+1} - b_n = f(b_n) - f(b_{n-1}) = f'(\xi)(b_n - b_{n-1}) > 0$$

所以 $\{b_n\} \nearrow$

如果 b_n 有上界, 记 $b_n \to b$ 因此 $b_n \le b$, 则在 $b_{n+1} = f(b_n)$ 两边取极限得 $f(b) = b$.

因此要证 b_n 有上界,即要证 $f(x) - x = 0$ 有唯一解.为此设

$$g(x) = f(x) - x = \frac{x}{e^x - 1} - a$$

显然

$$g(0+0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1-a > 0, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -a < 0$$

且

$$g'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} < 0$$

这是因为从 $e^x > 1+x$ 中,令 $x \to -x$ 得 $e^{-x} > 1-x, \Longrightarrow (1-x)e^x < 1$. 由零点定理以及 $g(x) \searrow$, 推得 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中有唯一解,记为 b.

下面要证明 b 是b_n 的上界,显然 $b = f(b) > 1-a = b_1$,（归纳）如果 $b > b_n$, 利用 $f(x) \nearrow$,则 $b = f(b) > f(b_n) = b_{n+1}$,所以 b 是b_n 的上界.

这样我们就证明了 b_n 单调增有上界 b,其中 b 是 $f(x) - x = 0$ 的唯一的零点.因此 $b_n \to b$.

第二章：连续性的学习要点

一、概念：

函数在一点 x_0 连续是函数在一点 x_0 极限的特殊情形.只是极限值等于函数在这点的函数值：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

极限的左右极限对应连续的左右连续以及三类间断点.

极限与四则运算和函数复合的相容性都继承下来,特别对连续函数

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0), \lim_{x\to x_0} \phi(x) = \phi(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(\phi(x)) = f(\phi(x_0))$$

只要 $y_0 = \phi(x_0)$.

但是要注意以下一点：一般函数只要自变量和因变量一一对应,就有反函数.但连续函数存在反函数充分必要条件是严格单调.

至此,我们得到如下结论：**所有初等函数在其定义域中连续**.

例 1 对连续函数 $f(x)$, 若 $f(x_0) > 0$, 则在x_0 的一个领域内恒大于零. 即存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$.

证明 上述结果是函数极限保序性在连续函数上的推广. 因

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0,$$

所以取 $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$.

例 2 对$[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$, 设 $E = \{x \mid x \in [a, b],\ f(x) = 0\}$ ($f(x)$ 零点的集合), 记 $\alpha = \inf E$, 则 $f(\alpha) = 0$, 上确界也是如此.

证明 因为 $E \subset [a, b]$, 所以 $\alpha \in [a, b]$.

若 $f(\alpha) \neq 0$, 不妨设 $f(\alpha) > 0$, 根据例 1, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x) > 0$ $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ 且 $x \in [a, b]$, 因此 $\inf E \geq \alpha + \delta$, 矛盾.

二、闭区间上连续函数：

函数在区间中每一点都连续, 则称函数在区间上连续.

特别, 闭区间上连续函数, 具有很好的性质：介值性；有界性；达到最大、最小值；值域是一个闭区间；连续一定一致连续.

关键：灵活运用. 如果一个函数在区间 I 上连续, 那么上述性质对任何闭子区间 $[x_1,x_2]\subset I$ 也成立.即便 I 不是闭区间, 也可在 I 的局部 $[x_1,x_2]\subset I$ 具有上述性质.例如,对于函数（前面例子中出现的函数）

$$g(x)=\frac{x}{e^x-1}-a,\ x\in(0,+\infty)$$

定义在一个无穷的开区间 $(0,+\infty)$ 并有

$$g(0+0)=\lim_{x\to 0^+}g(x)=1-a>0,\lim_{x\to+\infty}g(x)=-a<0$$

根据极限的性质,一定存在靠近 0 的一点$x_1>0$ 以及充分大的一点 x_2 分别满足 $g(x_1)>0,\ g(x_2)<0$ 因此在 $[x_1,x_2]$ 有零点也就是在 $(0,+\infty)$ 内有零点.

三、一致连续：

注意一致连续与连续的区别. 同时把握如何判断连续但不一致连续的方法.

结论 有限闭区间上连续函数在该区间上一定一致连续.

例 3 试证：有限开区间 (a,b) 上连续函数在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是在端点存在有限的两个单侧极限.

证明 先证充分性. 设

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a+0),\ \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)$$

存在有限. 补充定义

$$f(a)=f(a+0),\ f(b)=f(b-0)$$

使得 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 因此在$[a,b]$ 上一致连续, 当然也在 $(a,b)\subset[a,b]$ 上一致连续.

反之, $f(x)$ 在(a,b) 上一致连续, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当 $x',x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

因此对 $x',x''\in(a,a+\delta)$, 推出 $0<|x'-a|<\delta,\ 0<|x''-a|<\delta$, 且 $|x'-x''|<\delta$, 所以

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由极限的Cauchy 收敛准则知, 下列极限存在有限.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a+0)$$

例 4 试证：

（1）若 $f\Big|_{[a,+\infty)}$ 连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ （有限数）, 则 $f\Big|_{[a,+\infty)}$ 一致连续.

（2）若 $f\Big|_{[a,b)}$ 连续但 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$, 则 $f\Big|_{[a,b)}$ 不一致连续.

证明：

（1） $\forall\varepsilon > 0$ 由条件 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, 并利用Cauchy 收敛准则得 $\exists M > 0$ 对于满足 $x, x' > M$ 的点, 有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

在区间 $[a, M+1]$ 上,函数连续因此一致连续,所以存在 $\delta' > 0$ 使得对于 $x, x' \in [a, M+1]$ 中的两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta'$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

取 $\delta = \min\{\delta', 1\}$ 则对于任意的 $x, x' \in [a, +\infty)$ 只要 $|x - x'| < \delta$, 要么 $x, x' \in [a, M+1]$ 要么 $x, x' > M$, 因此都有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

这里为了防止出现 $x < M < x'$ 时无法判断的问题,做了上述技术处理.一般来说如果考虑有接点的情况,上述处理是常用的,避免出现在跨界处无法说清楚的现象出现.

（2）采用反证法. 如果一致连续,则对 $\forall\varepsilon > 0$, 一定 $\exists\delta > 0$ 当任何两点 x, x' 满足 $|x - x'| < \delta$ 时,就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

取数列 $x_n \in (a, b)$, $x_n \to b^-$, 则对于上述 $\delta > 0$, 一定存在 N, 当 $n, m > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \delta$ （Cauchy 收敛准则）

因此$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

也就是 $f(x_n)$ 满足Cauchy收敛准则,所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 这与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$ 矛盾.

第三章：微分的学习要点

一、导数:

差商$g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$x\neq x_0$的极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

几何意义：斜率,切线,以及切线方程.

回顾直线方程：过两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 的直线方程：

$y=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, 其中 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 是斜率.

过一点 $M_0(x_0,y_0)$ 及沿固定方向（由与x 轴正向夹角α刻画）的直线方程

$y=y_0+\tan\alpha(x-x_0)$

$f(x)$ 的切线方程 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

二、计算：

四则运算、复合函数、反函数的求导规则和微分规则

$\Longrightarrow$ 初等函数在其定义域内不但连续而且可导（可微）, 导函数还是初等函数.

高阶导数的计算(Leibniz公式)

隐函数的求导（微分）

参数方程表示函数的求导（微分）（特别注意参数方程表示的高阶导数,要理解这一点首先要理解参数方程表示的导数是怎么来的,对二阶情形要会推导）

三、理论:

1、Fermat 和 Rolle 定理：

Fermat: 在内部极值点 x_0, 必有$f'(x_0)=0$, 反之不然. 称使得 $f'(x)=0$ 的点为驻点.

Rolle: 端点函数值相等, 必在内不存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$（极值点）.

2、微分和带Peano 余项的Taylor公式：

微分：基本思想是近似. 对任意的 x_0, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

带Peano 余项的Taylor公式: 关键是如何展开.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

3、微分中值定理和带Lagrange余项的Taylor公式：

微分中值定理

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$$

带Lagrange余项的Taylor公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

4、Cauchy中值公式：

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

5、导函数的两大特点：（注意不需要假设导函数是连续的）

（1）导函数没有第一类间断点. 如果有第一类间断点, 因为左右导数等于导函数的左右极限：

$$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{x\to x_0^{\pm}}f'(x)$$

所以导函数连续, 矛盾.

（2）导函数的介值性. $f'(x)$ 能取到介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间的任何值.

四、利用导数研究函数性态:

1、确定 $f(x)$ 的单调区间:

$f'(x)\geq 0\Longrightarrow f(x)\nearrow$; $f'(x)\leq 0\Longrightarrow f(x)\searrow$; $f'(x)=0\Longrightarrow$ 驻点

2、确定驻点是否是极值点: 设 $f'(x_0)=0$

若在 x_0 左侧 $f'\geq 0$，右侧 $f'\leq 0\Longrightarrow f(x_0)$ 是极大值.

若在 x_0 左侧 $f'\leq 0$，右侧 $f'\geq 0\Longrightarrow f(x_0)$ 是极小值.

$f''(x_0)<0\Longrightarrow f(x_0)$ 极大； $f''(x_0)>0\Longrightarrow f(x_0)$ 极小.

3、确定函数的弯曲方式（凸凹性和拐点）：

$f''>0\Longrightarrow f$ 凸,$f''<0\Longrightarrow f$ 凹.$f''(x_0)=0$ 左右两侧分别凸凹,拐点.

凸性: 定义及其等价的不等式.在等价的不等式中

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\leq\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

是本质的,夹在两者之间的是上述结果的推论.

4、确定函数的弯曲程度（曲率）：

一是关于 $y=f(x), x\in[a,b]$ 曲率的计算:

$$\kappa=\frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}.$$

因此曲率 κ 的正负与 $f''(x)$ 的正负, 与曲线的凸凹是对应的.

二是由参数曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ 曲率的计算.

$$\kappa(t)=\frac{\phi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'^2(t)+\psi'^2(t))^{3/2}},\quad \phi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0.$$

五、例题:

例 1：设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解 $y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 推出

$$(1+x^2)y'(x)=1.$$

再利用Leibniz 公式得

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0$$

即可递推求出所要求的值. 也可直接利用展开

$$y'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^n)$$

得

$$y^{(2k)}(0)=0,\ y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!.$$

例 2：设 $f\Big|_{[a,b]}$ 连续, $f\Big|_{(a,b)}$ 二阶可导.记 $M_1(a,f(a))$, $M_2(b,f(b))$ 若线段 $\overline{M_1M_2}$ 与 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 在 (a,b) 内有交点,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$

证明：设交点为 $M(c,f(c))$, $c\in(a,b)$

$$\Longrightarrow \exists\xi_1\in(a,c), f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\ \exists\xi_2\in(c,b), f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

因为 M 在 $\overline{M_1M_2}$ 上,所以线段 $\overline{M_1M}$ 与线段 $\overline{MM_2}$ 的斜率相等,所以 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\Longrightarrow\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$

例 3：证明在 (a,b) 上无界的可微函数,其导函数在 (a,b) 上也一定无界.

证明：由于 $f\Big|_{(a,b)}$ 无界,因此对任意的正整数 n, 一定存在 $x_n \in (a,b)$ 使得 $|f(x_n)| \geq n$, 即 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$

假如导函数有界：$|f'(x)| \leq M,\ x \in (a,b)$, 则任取 $x_0 \in (a,b)$ 有

$|f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\xi)(x_n - x_0)| \leq M(b-a) \Longrightarrow |f(x_n)| \leq M(b-a) + |f(x_0)|$ 矛盾.

例 4：设 $a > 0$, 非负函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶导数, $f(0) = f'(0) = 0$, 且在 $[0, +\infty)$ 上满足不等式

$$f''(x) \leqslant af(x).$$

求证 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒为零.

证明：设 $g(x) = f'(x) - \sqrt{a}f(x),\ g(0) = 0$, 则

$$g'(x) = f''(x) - \sqrt{a}f'(x) \leq af(x) - \sqrt{a}f'(x) = -\sqrt{a}g(x)$$

所以

$$(\mathrm{e}^{\sqrt{a}}g(x))' = \mathrm{e}^{\sqrt{a}}(g'(x) + \sqrt{a}g(x)) \leq 0$$

推得 $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}g(x)$ 单调减, 推得 $g(x) \leq g(0) = 0$, 即

$$f'(x) - \sqrt{a}f(x) \leq 0$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}f(x))' = \mathrm{e}^{-\sqrt{a}}(f'(x) - \sqrt{a}f(x)) \leq 0$$

$\Longrightarrow \mathrm{e}^{-\sqrt{a}}f(x)$ 单调减，$\Longrightarrow f(x) \leq 0$。因此 $f(x) = 0$.

例 5：设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + xf'(x)\ln x) = l$.
求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\ln x}{\ln x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)\ln x + f(x)\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) + xf'(x)\ln x) = l.\end{aligned}$$

例 6： 讨论 e^x 与 $x^a, a > 0$ 在 $x > 0$ 的交点.

解：所谓交点即求 $e^x - x^a = 0$ 的根,等价于讨论 $f(x) = e^{\frac{x}{a}} - x$ 的零点问题. 显然 $f(0) = 1 > 0,\quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ （两端大于零）

$f'(x)=\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}-1$, 驻点 $x_0=a\ln a$, $f(x_0)=a(1-\ln a)$ 因此是极小值（最小值）

$f''(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^2e^{\frac{x}{a}}>0$，$f(x)$ 是凸函数 $(x>0)$

综上分析

$f'(x)<0(x<x_0)\Longrightarrow f(x)\searrow(x<x_0)$;

$f'(x)>0(x>x_0)\Longrightarrow f(x)\nearrow(x<x_0)$.

结论：当 $a>e$ 时,$f(x_0)=a(1-\ln a)<0$, 因此$f(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,+\infty)$ 各有一个零点,共两个零点.当 $a=\mathrm{e}$ 时, $f(x_0)=0$ 一个零点. 当 $0<a<e$ 时, $f(x)\geq f(x_0)>0$ 没有零点.

例 7：设 $f(x)$ 二阶可导, $2f(x)+f''(x)=-xf'(x)$,证明 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界

分析：这道题看上去有点无从下手的感觉.其实要证明 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界最简单的想法是它们的平方和 $f^2(x)+f'^2(x)$ 有界,因此求导 $2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$. 但与条件比还差一点系数,于是考虑

$$g(x)=f^2(x)+\frac{1}{2}f'^2(x)$$

的有界性,求导得

$$g'(x)=(2f(x)+f''(x))f'(x)=-xf'^2(x)$$

因此 $g'(0)=0$,

$x>0\Longrightarrow g'(x)\leq 0\Longrightarrow g(x)$ 单调减.

$x<0\Longrightarrow g'(x)\geq 0\Longrightarrow g(x)$ 单调增.

因此 $g(x)$ 在 $x=0$ 取到最大值,即

$$f^2(x)+\frac{1}{2}f'^2(x)\leq f^2(0)+\frac{1}{2}f'^2(0)$$

注意上式右端是一个常数, 因此 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界.

例 6 Cauchy 中值定理的另一种证明:

因为 $g'(x)\neq 0$, 根据导函数的介值性, 在 (a,b) 内, 要么 $g'(x)$ 恒大于零, 要么恒小于零. 不妨设 $g'(x)>0$ 因此严格增, 所以 $y=g(x)$有反函数 $x=g^{-1}(y)$ 对$f(g^{-1}(y))$ 使用中值公式, 存在$\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(g^{-1}(y_1))-f(g^{-1}(y_2))}{y_1-y_2}=\frac{\dot{\mathrm{f}}(g^{-1}(y))}{\dot{\mathrm{y}}}\Big|_{y=\eta}$$

令 $x_1=f(g^{-1}(y_1)),\ x_2=f(g^{-1}(y_2)),\xi=f(g^{-1}(\eta))$, 则

$$\frac{f(g^{-1}(y_1))-f(g^{-1}(y_2))}{y_1-y_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

例 9： （P142, 第8题）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=1, f(1)=\dfrac{1}{2}$. 求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0$$

证明

1、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点：令

$$F(x)=x-\frac{1}{f(x)},\ x\in[0,1]$$

则 $F(x)$ 满足

$$F(0)=F(1)=-1,\ F'(x)=1+\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

根据 Rolle 定理, 推得存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 也就是

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

2、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的一个零点 ξ：显然 $\xi\in(0,1)$,且是最小值点,所以

$$f(\xi)=0,\ f'(\xi)=0$$

结论显然成立.

3、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有超过两个及以上的零点：记

$$E=\{x\mid x\in[0,1],f(x)=0\}$$

因为 $f(0)=1,\ f(1)=\dfrac{1}{2}$, 所以 $E\subset(0,1)$. 分别记 $a=\inf E,\ b=\sup E$.

第一步,证明 a,b 也是零点.这是因为 a 是 E 的下确界, 如果 $f(a)\neq 0$, 那么,对任意的 $\dfrac{1}{n}$, $a+\dfrac{1}{n}$ 不是下确界,因此存在零点 $x_n\in E$, 使得

$$a<x_n<a+\frac{1}{n},\ f(x_n)=0$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ f(x_n)=0$$

由函数的连续性可知

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

同理可证 b 也是 $f(x)$ 的零点.

第二步,要证明在区间 $[0,a)$ 和 $(b,1]$ 上,有$f'(a)\le 0,\ f'(b)\ge 0$. 这是因为在 $[0,a)$ 上 $f(x)>0$, 在 $(b,1]$ 上 $f(x)>0$. 所以

$$f'(a)=f'_{-}(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}\le 0$$

同理可证 $f'(b)\ge 0$.

如果 $f'(a)\le 0,\ f'(b)\ge 0$ 中有一个等号成立,那么 $f^2(a)+f'(a)=0$ 或 $f^2(b)+f'(b)=0$. 结果自然成立. 否则有 $f'(a)<0,\ f'(b)>0$.

第三步, 因为 $f'(a)<0$, 由

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=f'_{+}(a)=f'(a)<0$$

得,存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)<0,\ a<x<a+\delta$$

记

$$\bar{a}=\inf\{x\mid f(x)=0,\ a+\delta<x<b\},$$

那么在 $a<x<\bar{a}$ 中,$f(x)<0$ 令

$$F(x)=x-\frac{1}{f(x)},\ x\in(a,\bar{a})$$

那么

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to\bar{a}^-}F(x)=-\infty$$

所以 $F(x)$ 在 $(a,\bar{a})$ 中有最大值点 $\xi\in(a,\bar{a})$, 所以

$$F'(\xi)=0,\ \text{即}\ f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

证毕.

说明 在第二步中,令 $g(x)=f^2(x)+f'(x)$,则 $g(a)<0,\ g(b)>0$.因为 $f^2(x)$ 连续,所以是某个函数的导函数,不妨设 $F'(x)=f^2(x)$, 这样 $g(x)=F'(x)+f'(x)=(f(x)+f(x))'$ 是 $F(x)+f(x)$ 的导函数,利用导函数 $g(x)=F'(x)+f'(x)=(f(x)+f(x))'$的介值性.直接可以得到存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $g(\xi)=0$.

例 10: P142 综合习题第19题.

设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在数列 $\{x_n\},\ x_n>0,\ x_n\to+\infty$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n).$$

证明 采取反证法.假如不存在题目所示的数列, 那么存在 $x_0 \geq 0$, 使得

$$f'(x) \geq f(ax),\ x \geq x_0.$$

推得 $f'(x) > 0\ (x \geq x_0)$, 即函数在$x \geq x_0$ 严格单调增.因为 $a > 1$, 所以只要取充分大的 $x > \dfrac{1}{a-1}$, 就有 $ax > x+1$. 那么利用微分中值公式知存在 $x < \xi < x+1$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geq f(ax) > f(x+1),$$

推得 $f(x) < 0$,矛盾.

例 11: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, $f(a) = 0$, 且当 $x \geqslant a$ 时, 有

$$|f'(x)| \leqslant |f(x)|.$$

求证: $f(x) = 0$.

证明 令 $g(x) = \left(e^{-x} f(x)\right)^2$. 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{-x} f(x) \left(e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x)\right) \\ &= 2e^{-2x} \left(f(x) f'(x) - |f(x)|^2\right) \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

这说明 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(a) = 0$, 说明 $g(x) \leqslant 0$. 但从 $g(x)$ 的定义可知 $g(x) \geqslant 0$. 于是 $g(x) = 0$, 从而 $f(x) = 0$.

例 12: 书上第139页,第17题.是给出 $f(x) = x\cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上尽可能小的上界.

按照常规做法,对 $f(x)$ 求导 $f'(x) = \cos x - x\sin x$, $f''(x) = -(2\sin x + x\cos x) < 0, f''(0) = 0$.因此在驻点 $f'(x_0) = 0$ 处取到极大. 因为 $f(x) > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}, f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$,所以极大值点也是最大值点.函数值就是最小的上界.

但是从 $f'(x) = \cos x - x\sin x = 0$ 难以解出具体极值点, 为此利用Taylor展开计算近似值.因为二阶导数是负的,所以

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

这里($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 为求一个具体的上界,不妨分别选择在 $x_0 = 0$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ 处展开.

在 $x_0 = 0$: $f(x) \leq 0 + x \leq \frac{\pi}{2}$,

在$x_0 = \frac{\pi}{4}$: $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + (1 - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\right)$.

在$x_0 = \frac{\pi}{3}$: $f(x) \leq \frac{\pi}{6} + (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}})(x - \frac{\pi}{3}) \leq \frac{\pi}{6} + (\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2})\frac{\pi}{3}$

在$x_0 = \frac{\pi}{2}$: $f(x) \leq -\frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2}) \leq \frac{\pi^2}{4}$

具体比比看,哪个上界最小?

例 12: 设$f(x)\Big|_{[a,b]}$ 二阶可导,证明,存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2$$

证明:在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 展开,并在展开式中分别取 $x=a,x=b$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

两式相加得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$$

因为 $\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$ 介于 $f''(\xi_1)$ 和 $f''(\xi_2)$ 之间,由导函数的介值性可知,存在 ξ 介于 ξ_1 和ξ_2 之间,使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$$