中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十二章　Fourier分析

例. 求如下热传导问题：在一个长度为ℓ 的长杆上，两端保持零度，外部绝缘，杆上初始的温度分布为$f(x)$, 设随着时间的演化，t 刻的温度分布$u(x,t)$满足下述方程(k是比热系数).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, & & \text{泛定方程} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t > 0 & \text{边界条件} \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \ell. & \text{初始条件} \end{cases}$$

分离变量法： 先求满足方程和边界条件特殊的解，则其任任意组合仍满足方程和边界条件，再决定合适的组合系数，使之满足初始条件.

解： ① 设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 则由泛定方程导出 $\dfrac{k^2 T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\lambda.$

将 $u(x,t)$ 代入边界条件可得：$X(0)=X(\ell)=0.$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad X(0)=X(\ell)=0 \\ T'(t)-\dfrac{\lambda}{k^2}T(t)=0 \end{cases}$$

② 求解固有值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(\ell)=0 \end{cases}$

方程通解为：$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x \ \ (\lambda>0).$

由定解条件可知固有值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2,$

相应的固有函数为 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$

③ 将$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$代入 $\frac{k^2T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$得 $k^2T'(t)+\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2T(t)=0$

$$\Longrightarrow\quad T_n(t)=C_n\cdot e^{-(\frac{n\pi}{k\ell})^2 t}$$

即: $u_n(x,t)=X_n(x)\cdot T_n(t)=C_n\cdot e^{-(\frac{n\pi}{k\ell})^2 t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\ \ (\forall n)$ 都是满足泛定方程与边界条件的解，于是$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot e^{-(\frac{n\pi}{k\ell})^2 t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ 也是.

④ 现在，只需要取合适的组合系数 C_n's, 使得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot e^{-(\frac{n\pi}{k\ell})^2 t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$, 则它即是原定解问题的解！

此即求 C_n's, 使得 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$ . . . $f(x)$的正弦级数

丹尼尔·伯努利(Bernulli)

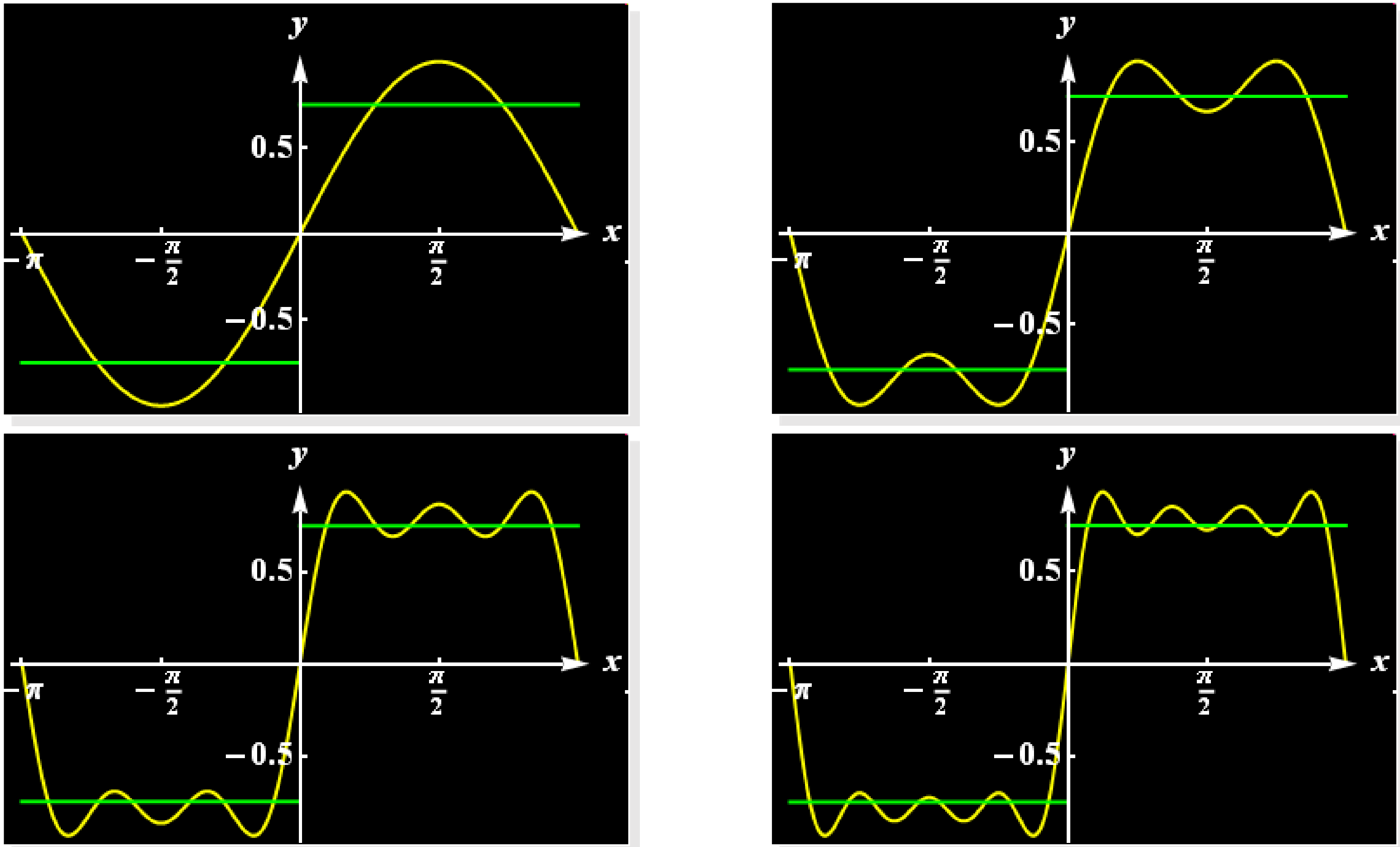
任何复杂的振动都可以分解成一系列简谐振动之和.

傅里叶（Fourier）

“任意”函数都可以展开成三角级数.

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin n\omega x + b_n \cos n\omega x \right)$$



$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7} \longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

周期函数

定义： 若 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$\exists T>0$, s.t.

$$f(x+T)=f(x),\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

则称 $f(x)$ 是周期函数，T 是$f(x)$的一个周期.

周期函数的基本性质:

(1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $nT(n\in Z^{+})$也是它的周期.

(2) 若 $f(x)$ 在有限区间上可积，T 是它的周期，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

(3) $f(x)$ 的图像可由任一区间上的图像不断copy得到.

设$R[-\pi,\pi]$是$[-\pi,\pi]$上Riemann可积函数的全体，其上可定义

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \ \forall f,g\in R[-\pi,\pi].$$

则$\langle f,g\rangle$是$R[-\pi,\pi]$上的一个**内积**，即：

1° 正定性：$\langle f,f\rangle\geq 0$, 且 $\langle f,f\rangle\geq=0\Leftrightarrow f=0\ (a.e)$

2° 对称性：$\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$

3° 线性性：$\langle c_1f_1+c_2f_2,g\rangle=c_1\langle f_1,g\rangle+c_2\langle f_2,g\rangle$

若$\langle f,g\rangle=0$, 则称 f 与 g 是**正交**(垂直)的.

如果**周期 2π** 的函数 $f(x)$ 能表示为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$，

如何计算系数 a_k，b_k？

定理. 组成三角级数的函数系

$$1\,,\ \cos x\,,\ \sin x\,,\ \cos 2x\,,\ \sin 2x\,,\cdots,\ \cos nx\,,\ \sin nx\,,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上**正交**，即

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0\left(\forall m,n\right)\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\left(m\neq n\right)\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\left(m\neq n\right)\end{cases}\quad 且\quad \begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=\pi\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx=\pi\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx=2\pi\end{cases}$$

两边分别与 $\cos kx$, $\sin kx$ 作内积，即相乘后在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，在逐项可积的假设下，可得 a_k，b_k.

周期函数的Fourier级数

定义： 设 $f(x)$ 是周期 2π 的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上**可积且绝对可积**，称

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

为 $f(x)$ 的**Fourier级数.** 其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

称为该Fourier级数的**Fourier系数.**

定理 (Dirichlet收敛定理)： 设 $f(x)$ 以 2π 为周期.

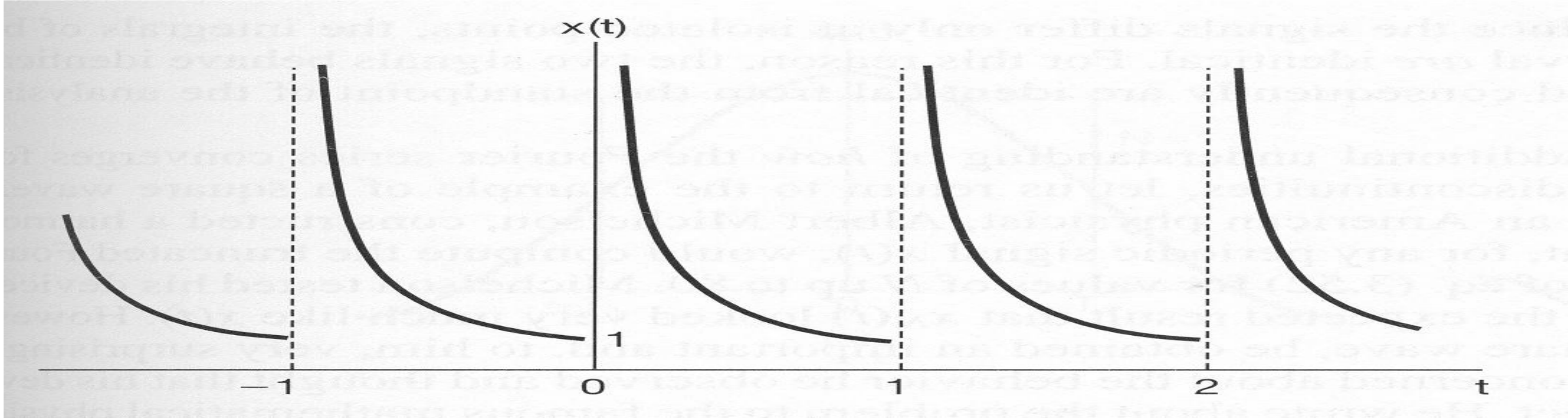
1) 如果 $f(x)$ 在任一有限区间上分段可微，那么它的Fourier级数在整个数轴上都收敛，且

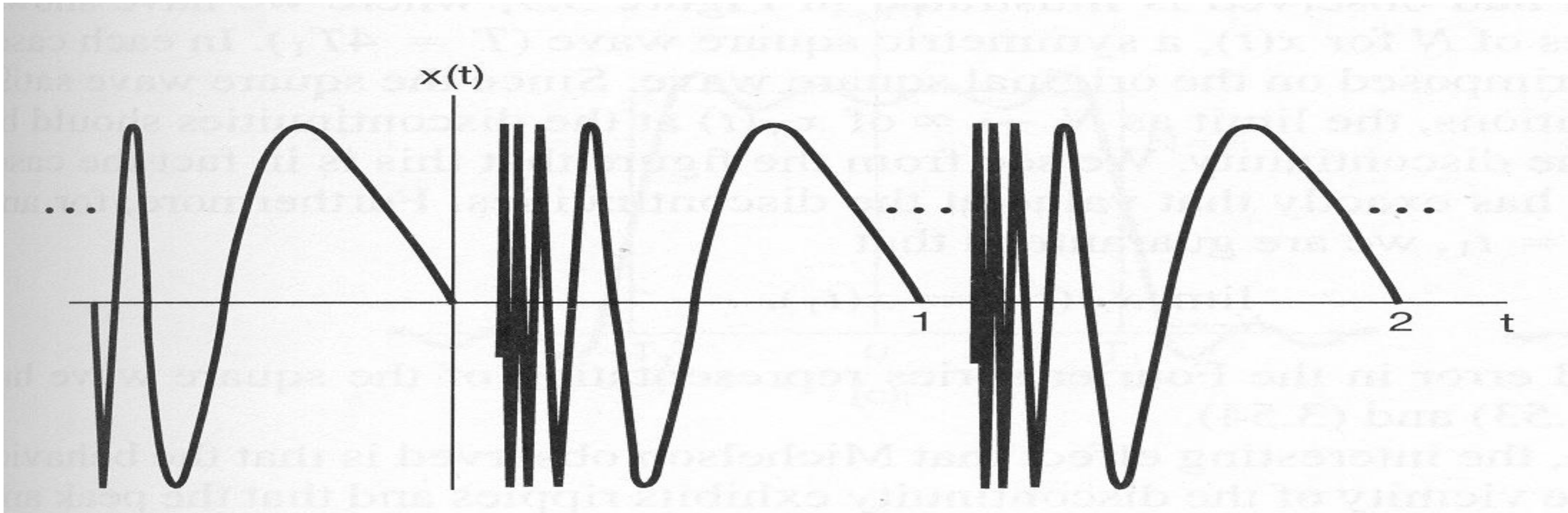
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

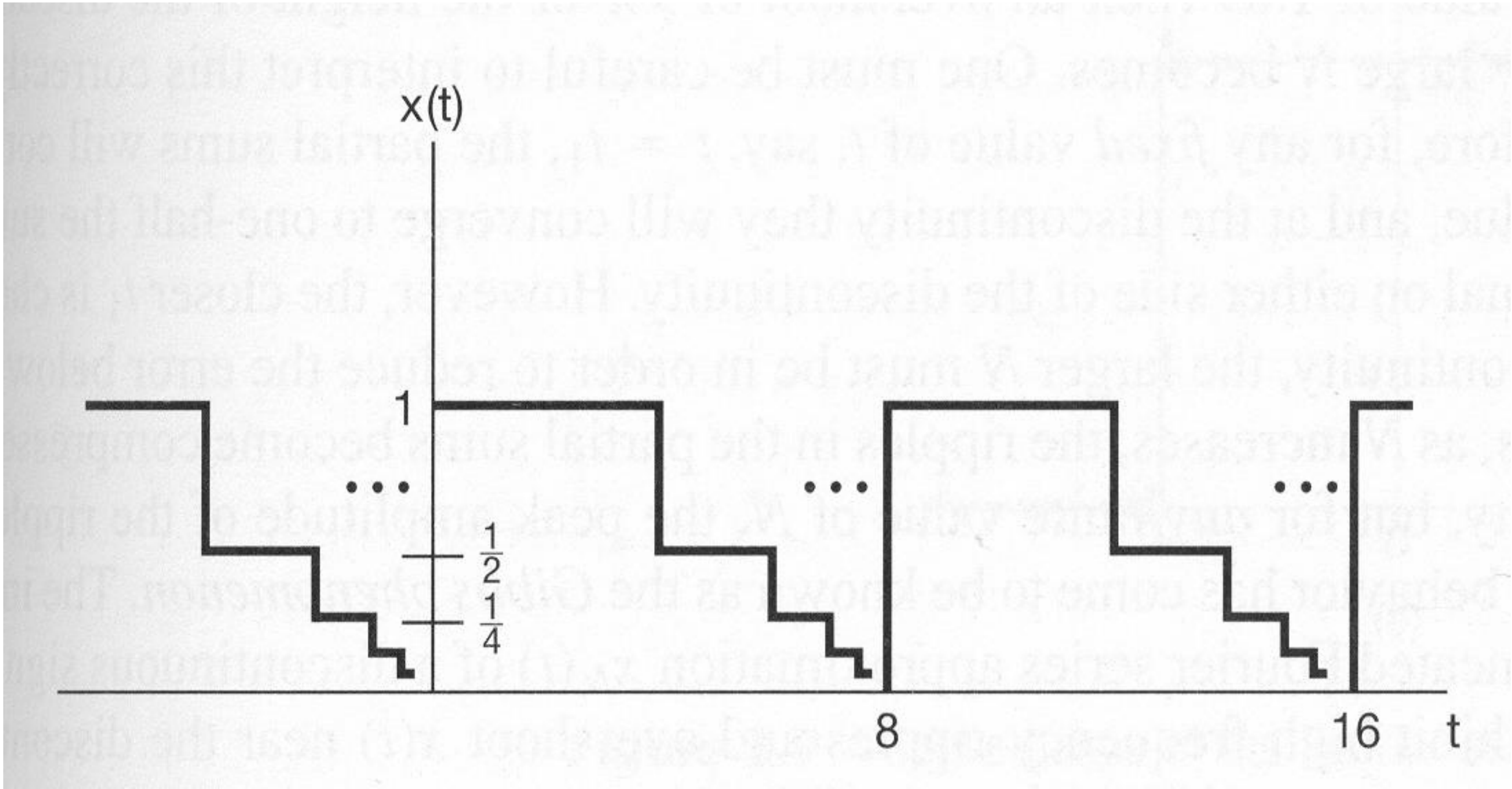
2) 如果在1)的条件下再加上函数处处连续的条件，那么其Fourier级数在整个数轴上一致收敛于 $f(x)$.

这里的分段可微是指，函数除有限个点外，$f(x)$有连续的微商 $f'(x)$，而这有限个点只能是$f(x)$ 或 $f'(x)$ 的第一类间断点.

几个不满足Dirichlet条件的函数

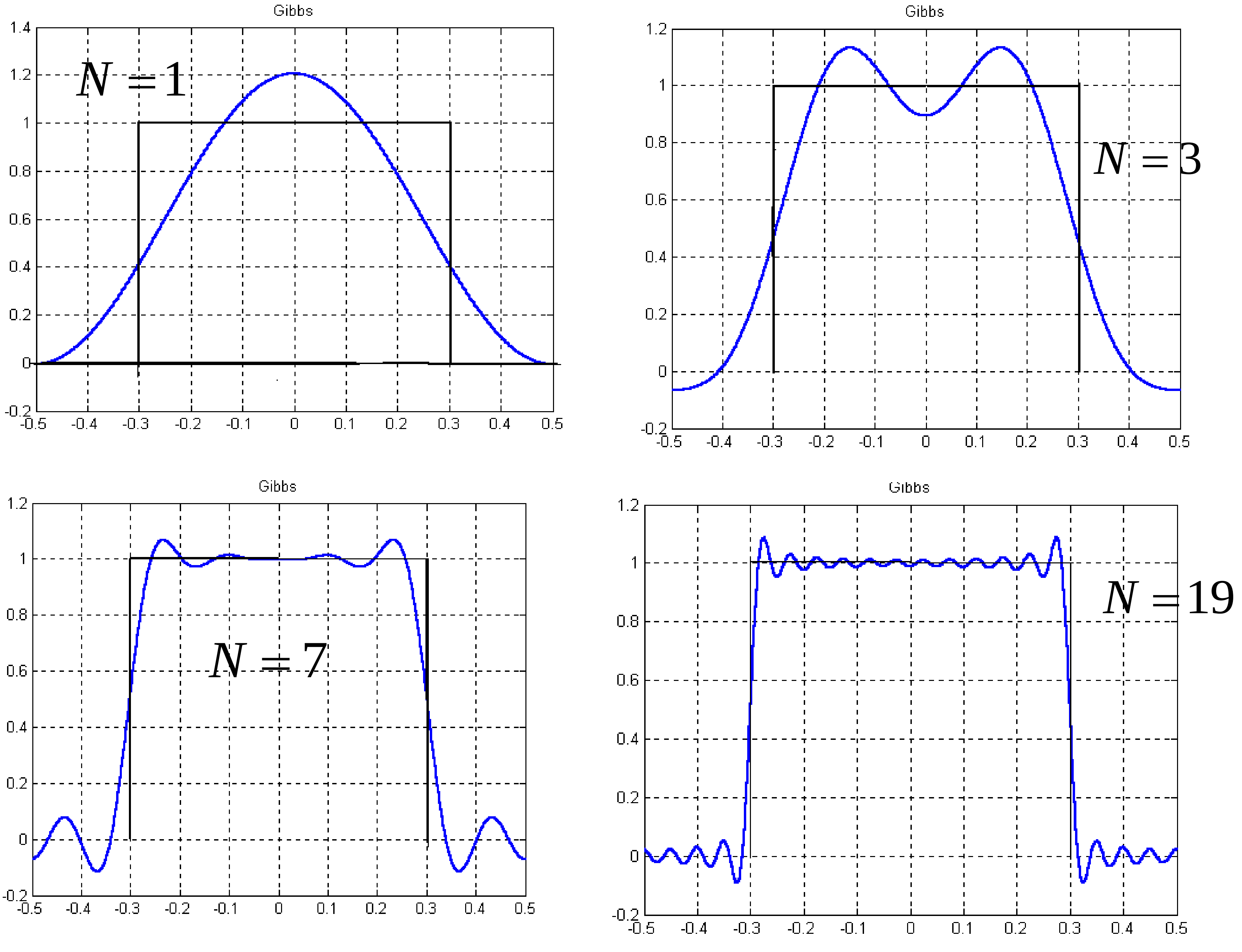


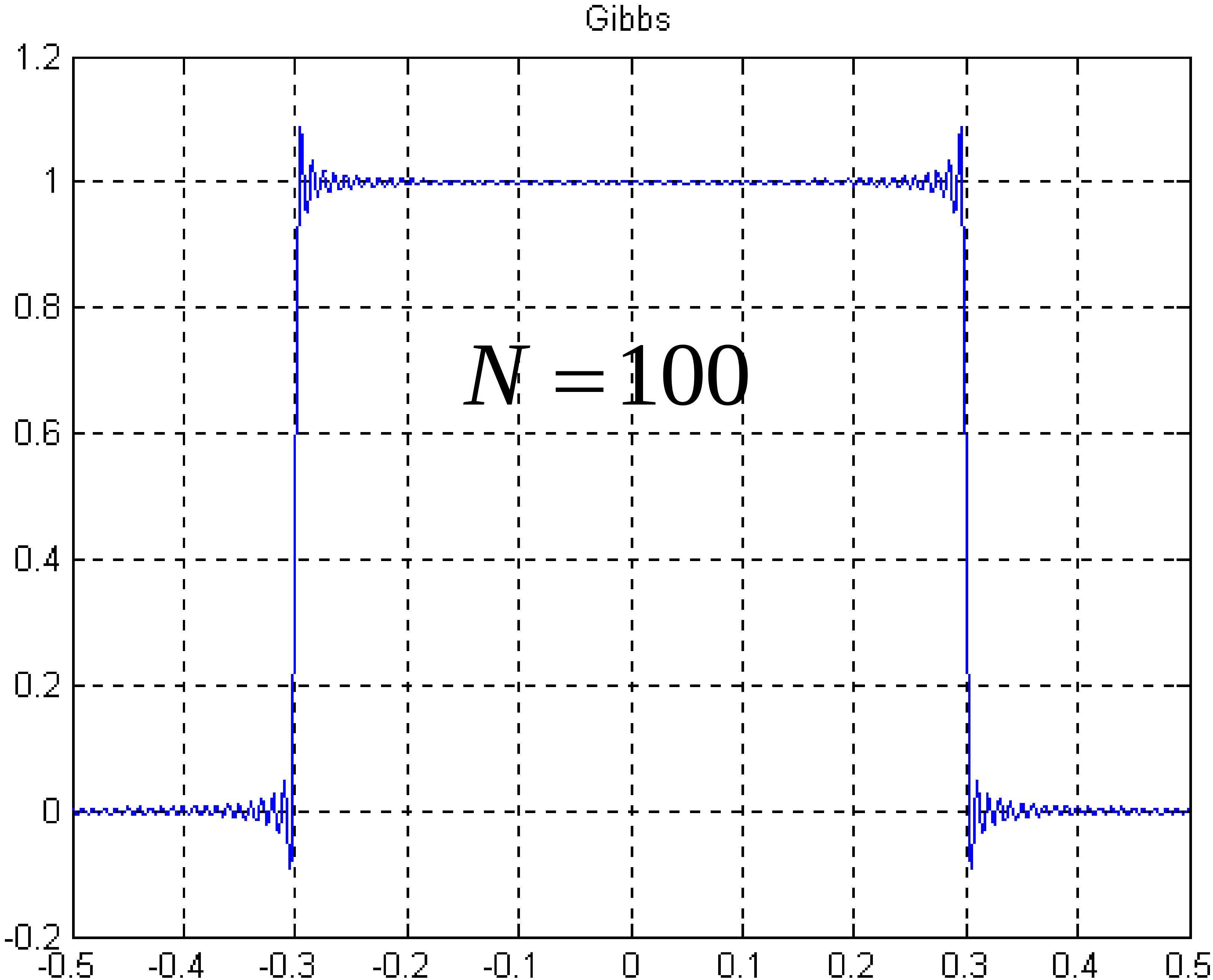



x(t)
1
1/2
1/4
8
16
t

Gibbs现象

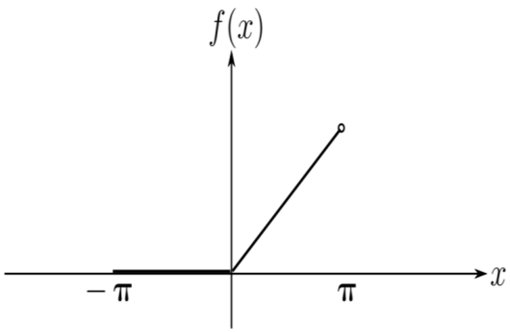
用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近会不可避免的出现振荡和超量。超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。


Gibbs
N = 1
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
Gibbs
N = 3
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
Gibbs
N = 7
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
Gibbs
N = 19
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5


Gibbs
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$N = 100$

例： 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 内 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\pi \\ 0, & -\pi\le x<0 \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成Fourier级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

对一般周期 2ℓ 的函数 $f(x)$，$g(t)=f(\frac{\ell}{\pi}t)$ 是周期 2π 的函数.

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\quad \text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

代入 $t=\frac{\pi}{\ell}x$ 可得：$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\tfrac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\tfrac{n\pi}{\ell}x)$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\tfrac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\\ b_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\tfrac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\end{cases}$$

注： 此时**Dirichlet**收敛定理完全类似.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \tfrac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \tfrac{n\pi}{\ell} x),$$ 其中 $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \tfrac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x \\ b_n = \dfrac{1}{\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \tfrac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

1. 当 $f(x)$ 为奇函数时，得到 $f(x)$ 的正弦级数：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \tfrac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{其中 } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \tfrac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x$$

2. 当 $f(x)$ 为偶函数时，得到 $f(x)$ 的余弦级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \tfrac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{其中 } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \tfrac{n\pi}{\ell} x \, \mathrm{d}x$$

注:

1. 三角函数系

$$1, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{\pi}{\ell}x, \cos\frac{2\pi}{\ell}x, \sin\frac{2\pi}{\ell}x, \cdots, \cos\frac{n\pi}{\ell}x, \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \cdots$$

是 $\mathrm{R}[-\ell,\ell]$ 上的**正交系.**

2. 可以由函数的正交性求出Fourier级数中的系数;

3. 函数的Fourier级数展开，是函数空间中的向量以三角函数为“基”进行分解.

4. Fourier级数展开的意义在于，把复杂的周期函数用简单的三角级数表示;

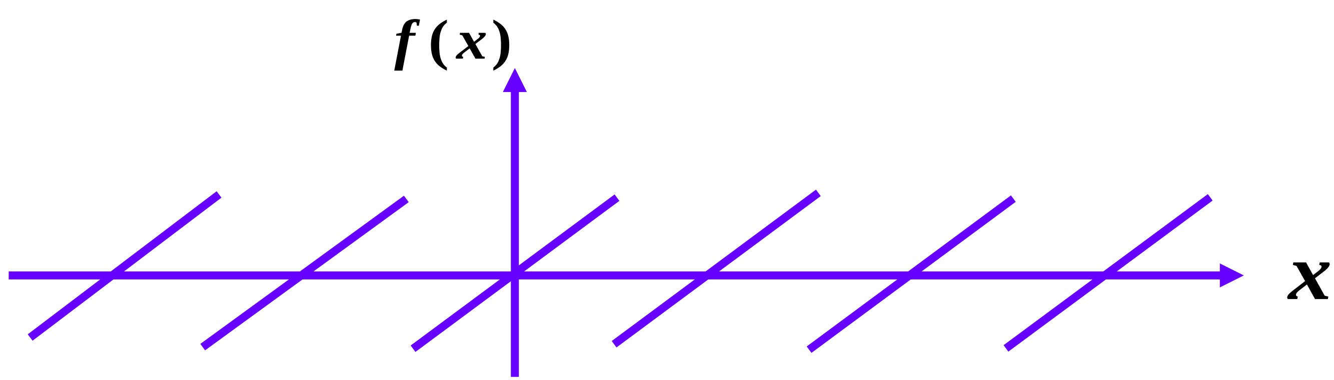
有限区间上函数的Fourier级数

有限区间上的函数可延拓成周期函数，其Fourier级数称为原来函数的Fourier级数.

1. (**直接延拓**) 若 $f(x)$ 在 $(-\ell,\ell)$ 上有定义，则

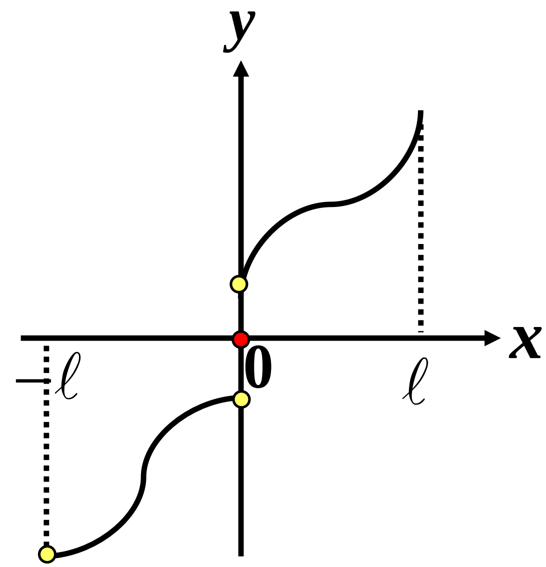
$$F(x)=\begin{cases} f(x-2n\ell), & (2n-1)\ell<x<(2n+1)\ell \\ \dfrac{f(\ell)+f(-\ell)}{2}, & x=(2n+1)\ell \end{cases},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2ℓ 为周期的函数.



2. **(奇延拓)** 若 $f(x)$ 在 $(0,\ell)$ 上有定义，令

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell) \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\ell,0) \end{cases}$$



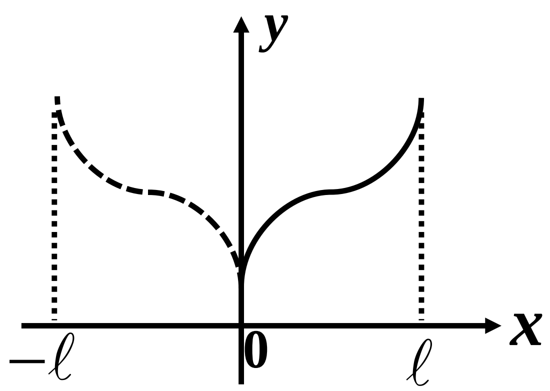
再将 $f_o(x)$ 按周期 2ℓ 延拓至 $(-\infty,+\infty)$ 上，成为周期 2ℓ 的奇函数. 此时得到 $f(x)$ 的**正弦级数**表示.

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=1,2,\cdots)$$

3. **(偶延拓)** 若 $f(x)$ 在 $[0,\ell)$ 上有定义，令

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\ell] \\ f(-x), & x\in[-\ell,0] \end{cases}$$



再将 $f_e(x)$ 按周期 2ℓ 延拓至 $(-\infty,+\infty)$ 上，成为周期 2ℓ 的偶函数.

此时得到 $f(x)$ 的**余弦级数**表示.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=0,1,\cdots)$$

注： 有限区间上的函数，可以通过无穷种延拓方法得到周期函数.

引理： 设 $f(x)$ 是以 2ℓ 为周期的函数，其Fourier系数为 a_n, b_n，则 $f(x+h)$（h 为常数）的Fourier系数为：

$$a_n' = a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}h + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}h, \quad b_n' = b_n \cos\frac{n\pi}{\ell}h - a_n \sin\frac{n\pi}{\ell}h.$$

证明:

$$a_n' = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x+h)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell+h}^{\ell+h} f(t)\cos\frac{n\pi}{\ell}(t-h)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\int_{-\ell+h}^{\ell+h} = \int_{-\ell}^{\ell}}$$

$$= \cos\frac{n\pi}{\ell}h\cdot\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi}{\ell}t\,\mathrm{d}t + \sin\frac{n\pi}{\ell}h\cdot\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}t\,\mathrm{d}t$$

$$= a_n\cdot\cos\frac{n\pi}{\ell}h + b_n\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}h.$$

类似可得 b_n'.

若 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，令 $g(x)=f(x+\frac{a+b}{2}),\ x\in(-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2})$.

将 $g(x)$ 以 $2\ell=b-a$ 为周期**直接延拓**得周期函数 $\overline{g}(x)$:

$$\overline{g}(x)\sim\frac{\overline{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{a}_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+\overline{b}_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ \begin{cases}\overline{a}_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}g(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\\ \overline{b}_n=\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}g(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\end{cases}.$$

注意到：$\overline{g}(x-\frac{a+b}{2})$ 即为 $f(x)$ 通过直接延拓得到的周期函数.

由引理知，$f(x)$ Fourier系数为 $\left(h=-\frac{a+b}{2}\right)$

$$a_n=\overline{a}_n\cos\frac{n\pi}{\ell}h+\overline{b}_n\sin\frac{n\pi}{\ell}h,\quad b_n=\overline{b}_n\cos\frac{n\pi}{\ell}h-\overline{a}_n\sin\frac{n\pi}{\ell}h.$$

结论： 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，以 $2\ell=b-a$ 为周期将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上，则 $f(x)$ 的Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right),$$

其中：

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\,\mathrm{d}x, & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\,\mathrm{d}x, & (n=1,2,\cdots) \end{cases}.$$

各种延拓下得到的周期函数的Fourier级数满足类似的Dirichlet收敛定理. 例如:

定理: 设函数 $f(x)$ 是定义在 $[-\ell,\ell]$ 上的分段可微函数，那么 $f(x)$ 的Fourier级数收敛，并有:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\in(-\ell,\ell)\\ \dfrac{f(-\ell+0)+f(\ell-0)}{2}, & x=\pm\ell\end{cases}$$

如果再增加函数在 $[-\ell,\ell]$ 上连续，并满足 $f(-\ell)=f(\ell)$ 的条件，那么其Fourier级数就在 $[-\ell,\ell]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

注: 虽然 $f(x)$ 有不同的Fourier级数表示，但在 $f(x)$ 的定义域上，它们收敛的结果相同.

1. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

则它的Fourier级数在 $x=\pi$ 处收敛于_____, 在 $x=4\pi$ 处收敛于 ____.

2. 设 $f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$. $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的正弦级数展开式的和函数，求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$ 的表达式 .

1. 求$f(x)=\cos ax$在$[-\pi,\pi]$上的Fourier级数，这里 a 不是整数.

2. 半波整流函数的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$, 在区间$[-\frac{\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}]$上，它的表达式为

$$f(t)=\begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega}\le t<0 \\ E\sin\omega t, & 0\le t<\frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

试求半波整流函数的Fourier级数.

3. 求函数 $f(x)$ 的Fourier级数，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h}, & |x|<h \\ 0, & h\le|x|\le\ell\end{cases}$

4. 将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数和余弦级数，

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\frac{\ell}{2} \\ \ell-x, & \frac{\ell}{2}\le x\le\ell\end{cases}$$

5. 把 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x^2$ 展开为Fourier级数.

Fourier级数的复数形式

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)}$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}+e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}-e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}}{2i}\right]$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\right]$$

$$=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_ne^{i\frac{n\pi}{\ell}x}+F_{-n}e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{i\frac{n\pi}{\ell}x}$$

$$F_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$F_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\ell}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x - i\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2\ell}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}x - i\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2\ell}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\,\mathrm{d}x\right] \qquad (n\in\mathbb{Z}),$$

注： 复数形式的Fourier级数是以 $\left\{e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\right\}$ 为正交系展开的级数.

Fourier级数的复数形式：$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}$

其中 $F_n=\left\langle f(x), e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}\right\rangle \Big/ \left\langle e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}, e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}\right\rangle$

$$=\frac{1}{2\ell}\left[\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\,\mathrm{d}x\right], \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

复函数空间中的内积为

$$\langle g(x), h(x)\rangle=\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\cdot\overline{h}(x)\mathrm{d}x$$