



第九章 多元函数微分学

- 多变量函数的连续性
- 多变量函数的微分
- 隐函数定理和逆映射定理
- 空间曲线与曲面
- Taylor公式与极值
- 向量场的微商
- **微分形式**

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

\mathbb{R}^3 中区域 Ω 上的微分形式：

0次微分形式： Ω 上的可微函数，常记为 $\omega_\varphi^0 = \varphi$.

1次微分形式： $A dx + B dy + C dz = \omega_v^1$, $v = (A, B, C)$.

2次微分形式： $D dy \wedge dz + E dz \wedge dx + F dx \wedge dy = \omega_v^2$, $v = (D, E, F)$.

3次微分形式： $h dx \wedge dy \wedge dz = \omega_h^3$.

同次的微分形式的全体按照自然的加法和数乘构成线性空间.

微分形式的**外积** \wedge :

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz.$$

规定：外积满足**结合律、分配律**和**拟交换律**： $\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda$

0次形式和任何形式的外积：系数相乘。例如： $\omega_\varphi^0 = \varphi(x, y, z)$,

$$\omega_v^1 = Adx + Bdy + Cdz, \quad \omega_u^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

则： $\omega_\varphi^0 \wedge \omega_v^1 = \varphi Adx + \varphi Bdy + \varphi Cdz = \omega_{\varphi v}^1.$

$$\omega_\varphi^0 \wedge \omega_u^2 = \varphi Pdy \wedge dz + \varphi Qdz \wedge dx + \varphi Rdx \wedge dy = \omega_{\varphi u}^2.$$

两个1次形式的外积：设 $\omega_{v_j}^1 = A_j dx + B_j dy + C_j dz, j=1,2.$

$$\begin{aligned}\omega_{v_1}^1 \wedge \omega_{v_2}^1 &= (A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz) \wedge (A_2 dx + B_2 dy + C_2 dz) \\ &= (B_1 C_2 - B_2 C_1) dy \wedge dz + (C_1 A_2 - C_2 A_1) dz \wedge dx + (A_1 B_2 - A_2 B_1) dx \wedge dy \\ &= \omega_{v_1 \times v_2}^2.\end{aligned}$$

1次形式和2次形式的外积：设

$$\omega_v^1 = Adx + Bdy + Cdz, \quad \omega_u^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

$$\begin{aligned}\omega_v^1 \wedge \omega_u^2 &= (Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) \\ &= (AP + BQ + CR) dx \wedge dy \wedge dz. \\ &= \omega_{v \cdot u}^3.\end{aligned}$$

3个1次形式的外积：设

$$\omega_{v_j}^1 = A_j dx + B_j dy + C_j dz, \quad j=1,2,3.$$

则： $\omega_{v_1}^1 \wedge \omega_{v_2}^1 \wedge \omega_{v_3}^1 = \omega_{v_1 \times v_2 \cdot v_3}^3.$

除此以外，**3维空间中**微分形式的外积再没有其它非平凡的情形.

外微分 $d: p$ 次形式 $\rightarrow p+1$ 次形式.

0. 对于0次形式 $\omega_\varphi^0 = \varphi(x, y, z)$, 其外微分定义为 :

$$d\omega_\varphi^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \omega_{\text{grad}\varphi}^1 = \omega_{\nabla\varphi}^1.$$

1. 对于1次形式 $\omega_v^1 = Pdx + Qdy + Rdz$, 其外微分定义为 :

$$d\omega_v^1 = d(Pdx + Qdy + Rdz) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \omega_{\text{rot } v}^2 = \omega_{\nabla \times v}^2. \end{aligned}$$

2. 对于2次形式 $\omega_v^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, 其外微分定义为:

$$d\omega_v^2 = d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy)$$

$$= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$= \omega_{\text{div } \mathbf{v}}^3 = \omega_{\nabla \cdot \mathbf{v}}^3.$$

显然, 在三维空间, 三次形式的外微分总是零.

对于外微分运算，有如下重要的 Poincaré 引理.

引理 (Poincaré) : 设 ω 是一个微分形式, 其系数具有二阶连续的偏微商, 则 $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.

定义 : 对给定的 微分形式 ω , 若存在低一次的微分形式 θ 使得 $d\theta = \omega$, 则称 ω 是恰当的.

定理 (Poincaré引理之逆) : 若 ω 满足 $d\omega = 0$, 且其定义域为单连通区域时, ω 是恰当的.

例 : $\omega = yzdx + zx dy + xy dz$ 是恰当的. 事实上, $\omega = d(xy z)$.

$\omega = ydx + zdy + xdz$ 不是恰当的, 或者说, 不是全微分.

$$d\omega_{\varphi}^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \omega_{\text{grad } \varphi}^1.$$

$$\varphi \longleftrightarrow \text{grad } \varphi$$

$$d\omega_v^1 = d(Pdx + Qdy + Rdz)$$

$$\mathbf{v} \longleftrightarrow \text{rot } \mathbf{v}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \omega_{\text{rot } \mathbf{v}}^2.$$

$$d\omega_v^2 = d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy)$$

$$\mathbf{v} \longleftrightarrow \text{div } \mathbf{v}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \omega_{\text{div } \mathbf{v}}^3.$$

梯度、旋度、散度都是 d 的体现；3维空间中再没有其它的“度”。

Poincaré引理 : 设 ω 是一个微分形式, 则 $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.

$$\longleftrightarrow \quad \text{rot}(\text{grad}(\varphi)) = 0, \quad \text{div}(\text{rot}(\boldsymbol{v})) = 0$$

即: 梯度场(有势场)一定是无旋场; 有向量势的场一定是无源场.

Poincaré引理之逆 : 若 ω 满足 $d\omega = 0$ (区域单连通), 则存在 θ 使得 $\omega = d\theta$.

\longleftrightarrow 在区域满足一定条件时 :

无旋场一定是梯度场; 无源场一定是有向量势的场.

微积分基本定理： $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$

ω 的次数	空间 Ω	公式
0	直线段	Newton-Leibniz公式
1	平面区域	Green公式
2	空间曲面	Stokes公式
3	空间中区域	Gauss公式