12.4.2 (3) $F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\cos\lambda x\,dx = \begin{cases} \frac{2\cos\frac{\pi}{2}\lambda}{1-\lambda^2} & \lambda\neq\pm1 \\ \frac{\pi}{2} & \lambda=\pm1 \end{cases}$

3. (1) 偶：$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} \overset{e^{-x}}{f(x)}\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2}{1+\lambda^2}$

故 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$

(2) 奇：$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} e^{-x}(-i\sin\lambda x)\,dx = \frac{-2i\lambda}{1+\lambda^2}$

故 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{-2i\lambda}{1+\lambda^2}(i\sin\lambda x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$

4. $F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 2\int_0^1 \cos(\lambda x)\,dx = 2\frac{\sin\lambda}{\lambda}$

故 $f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos(\lambda x)\,d\lambda = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos(\alpha x)}{\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x|<1 \\ \frac{\pi}{4} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

12.7 $A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt\,dx$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dx\right)\cdot f(t)\,dt = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right)^2 = a_0^2$

$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\cos(nx)\,dx\,dt$

$\xlongequal{x+t=\lambda} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\lambda)\cos[n(\lambda-t)]\,d\lambda\,dt$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)(\cos n\lambda\cdot\cos nt+\sin n\lambda\cdot\sin nt)\,d\lambda\,dt.$

$= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)^2 = a_n^2+b_n^2.$

$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\,dt \xlongequal{-x+t=\lambda} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\lambda+x)f(\lambda)\,d\lambda$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda+x)f(\lambda)\,d\lambda = F(x) \Rightarrow B_n=0$

故 $f(x) \sim \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$，令 $x=0$，即得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

12.8 依题知 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 一致收敛于 $f(x)$

故 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx + nb_n\cos nx)$

由Parseval等式知 仅需证 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2) \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

又 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$，故上式显然成立，

当且仅当 $a_n=b_n=0$，$\forall n\geqslant 2$，即 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时上式取等

13.1.1 (2) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛知其收敛

(3) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} = +\infty$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散知其发散

(4) 由 $\frac{1}{x\ln\ln x} > \frac{1}{x\ln x}$，$\forall x\geqslant e^2$ 且 $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ 发散知其发散

13.1.2 (1) 由 $\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}$ 单调递减趋于0 $(x\to+\infty)$，$\left|\int_1^A\cos(1-2x)\,dx\right|\leqslant 1$

结合Dirichlet判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ 收敛，同理 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2-4x)}{2x}dx$ 收敛

又 $\frac{|\cos(1-2x)|}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{|\cos(1-2x)|}{x} \geqslant \frac{\cos^2(1-2x)}{x} = \frac{\cos(2-4x)+1}{2x}$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散 知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(1-2x)}{x}dx$ 发散 从而原积分条件收敛

(3). ~~(2)~~ 与 (1) 用同样的方法 仍是条件收敛

(5) 注意 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 且 $\frac{|\sin x|}{x(1+\sqrt{x})} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ 知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}dx$ 绝对收敛

13.1.3. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，若 $f(x)$ 无下界

则存在 $x_0\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_0)<-1$，进而 $f(x)\le -1$，$\forall x\in[x_0,+\infty)$

由 $\int_a^{+\infty}-1\,dx$ 发散知 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 发散，矛盾！进而可设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

若 $A\ne 0$，则存在 $x_1\in[a,+\infty)$ 使得 $\begin{cases} f(x_1)>\dfrac{A}{2}, & A>0,\ \forall x>x_1 \\ f(x)<\dfrac{A}{2}, & A<0,\ \forall x>x_1 \end{cases}$

均与 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛矛盾！综上知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

13.1.1 (6) 由 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=+\infty$ 且 $\int_0^1\dfrac{1}{1-x}\,dx$ 发散知其发散

(7) 由 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}=1$ 且 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 收敛知其收敛

(10) 由 $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac34}\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}=0$ 且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{x^{\frac34}}\,dx$ 收敛知其收敛

(12) 由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\dfrac{1}{\cos x\sqrt{\sin x}}=1$ 且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\,dx$ 发散知其发散

13.1.2. (4) 由 $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}=1$ 且 $\int_0^1\dfrac{1}{x}\,dx$ 发散知其发散

(6) $\int_0^1\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,dx \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \int_1^{+\infty}t^p\sin t\,\dfrac{1}{t^2}\,dt=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^{2-p}}\,dt$

① 若 $p<1$ 时，由 $\dfrac{|\sin t|}{t^{2-p}}\le\dfrac{1}{t^{2-p}}$ 知其绝对收敛

② 若 $1\le p<2$，$\dfrac{1}{t^{2-p}}$ 递减且趋于 0，$\left|\int_1^A\sin t\,dt\right|\le 2$

结合 Dirichlet 判别法知其收敛，同理 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2t}{t^{2-p}}\,dt$ 收敛

又 $\dfrac{|\sin t|}{t^{2-p}}\ge\dfrac{\sin^2 t}{t^{2-p}}=\dfrac{1-\cos 2t}{2t^{2-p}}$ 且 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^{2-p}}\,dt$ 发散知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{2t^{2-p}}\,dt$ 条件收敛

③ 若 $p\ge2$，$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}t^{p-2}\sin t\,dt\ge\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$，$\forall k\in N^+$

故此时反积分发散

13.1.4 令 $\varphi(x)=f(x)-\int_0^x g(t)\,dt$，则 $\varphi(x)$ 单调递减

由 $g(x)$ 非负，$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛知 $\exists M\geq 0$，st $0\leq \int_0^x g(t)\,dt\leq M$

故 $\varphi(x)\geq -M \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty} g(t)\,dt+\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 也存在.

13.3.1 (1) 由 $\sqrt{x^2+\alpha^2}\in C^0([-1,1]^2)\Rightarrow$ 原式 $=\int_{-1}^1 |x|\,dx=1$

另：原式 $\overset{\lim\limits_{\alpha\to0}}{=} 2|\alpha|^2\int_0^{\frac{1}{|\alpha|}}\sqrt{t^2+1}\,dt = \lim\limits_{\alpha\to0} 2|\alpha|^2\left(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)\Big|_0^{\frac{1}{|\alpha|}}$

$=\lim\limits_{\alpha\to0}\alpha^2\left[\frac{1}{|\alpha|}\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}+\ln\left(\frac{1}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}\right)\right]=1$

(2) 由 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\in C^0(R^2)$ 知原式 $=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$

另：原式 $=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{1}{1+\alpha^2}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_{\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}^{\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$

$=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\arctan\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)=\frac{\pi}{4}.$

13.3.2 (1) $F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx-\sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\, e^{\alpha|\cos\alpha|}$

(3) $F'(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{1}{1+\alpha x}\,dx+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}=\frac{2\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}$；$F'(0)=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{F(\alpha)}{\alpha}=0.$

13.3.3. $y'=\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\cos k(x-t)\cdot k\,dt$；$y''=\int_c^x -k\sin k(x-t)f(t)\,dt$

$+f(x)\Rightarrow y''+k^2y=f(x).$

13.3.4 (1) 记 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$，则 $I(a)=\pi\ln a.$

$I'(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\cdot\frac{\cos^2x}{\sin^2x+\cos^2x}\,d(\tan x)$

$=\int_0^{+\infty}\frac{2b}{a^2t^2+b^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{a+b}$

故 $I(b)=\int_a^b I'(t)\,dt+I(a)=\int_a^b \frac{\pi}{t+a}\,dt+\pi\ln a=\pi\ln\frac{b+a}{2}$

(4) 记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$，则 $I(0)=0$

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x+(1-a^2)\cos^2 x}\,d(\tan x)$$

$$=\int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+(1-a^2)}\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

故 $I(a)=\int_0^a I'(t)\,dt=\pi\arcsin a$.

13.4.1 (2) $x^{\mu}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\sim x^{\mu}\ (x\to+\infty)$ 故收敛域为 $(-\infty,-1)$

(4) $\sin^{-\mu}x\sim x^{-\mu}\ (x\to 0)$，$\sin^{-\mu}x\sim(\pi-x)^{-\mu}\ (x\to\pi)$；故收敛域为 $(-\infty,1)$

(5) $\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(1+x)}\sim x^{2-\alpha}$ 知 $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(1+x)}dx$ 收敛 $\Leftrightarrow 2-\alpha>-1$ 即 $\alpha<3$

$\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(1+x)}\sim\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha+1}}$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha+1}}dx$ $\begin{cases}\alpha+1\le 0\text{ 时 发散 (Cauchy)}\\ \alpha+1\in(0,1]\text{ 时 发散 (Dirichlet)}\\ \alpha+1>1\text{ 时 收敛}\end{cases}$

综上收敛域为 $\alpha\in(0,3)$

(6) $\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}\sim x^{2-\alpha}$ 知 $\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}dx$ 收敛 $\Leftrightarrow 2-\alpha>-1$ 即 $\alpha<3$

若 $\alpha>1$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}=0$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}dx$ 收敛知 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}dx$ 收敛

若 $\alpha\le 1$ 由 $\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}\ge\frac{1}{x^{\alpha}}$ 且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ 发散知 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha}}dx$ 发散

综上收敛域为 $(1,3)$

13.4.2 (1) 由 $\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$

知其在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) $\forall \alpha \neq 0$, $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \xlongequal{\sqrt{\alpha}x=t} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

当 $\alpha=0$ 时, $I(0)=0$ (记 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$)

若 $I(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 又 $\sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} \in C^0([0,+\infty)\times[0,1])$

则 $I(0)=\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 矛盾! 故其不在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(6) 由 $\cancel{\left|\sin(x^2)\right|}$ $\frac{1}{1+x^p}$ 单调 (固定 p) 且 $\frac{1}{1+x^p} \in (0,1]$, $\forall p \in [0,+\infty)$, $x\in[0,+\infty)$

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ 关于 p 一致收敛 由 Abel 判别法可得

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

13.4.3 若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛, 则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M>0$

$\forall A, A' > M$, $\forall u \in [\alpha,\beta)$, 有 $\left|\int_A^{A'} f(x,u)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

由 $f(x,u) \in C([A,A']\times[\alpha,\beta])$ 知 $\left|\int_A^{A'} f(x,\beta)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

结合 Cauchy 原理知 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\,dx$ 收敛矛盾! #.

13.4.4. $\forall [\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$, $\left|u e^{-ux}\right| \le \beta e^{-\alpha x}$

又 $\int_a^{+\infty} \beta e^{-\alpha x} dx$ 收敛知 $\varphi(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

而 $u e^{-ux} \in C^0((a,+\infty)\times(0,+\infty))$ 知 $\varphi(u)$ 在 $u>0$ 上连续

13.4.6 由 $\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$ 及 M 判别法知 $F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上

一致收敛, 又 $\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \in C^0([0,+\infty)\times[0,+\infty))$ 故 $F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续

而 $\left(\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right)' = \frac{-2\cos x\cdot(x+\alpha)}{(1+(x+\alpha)^2)^2}$ 于记 $f(x,\alpha)=\frac{-2\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$, $g(x,\alpha)=\frac{x+\alpha}{1+(x+\alpha)^2}$

由 $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，$g(x,\alpha)$ 关于 x 递减（固定 α，且 x 足够大）~~结合~~且 $g(x,\alpha)\in(0,\frac{1}{2}]$ 结合Abel判别法知

$\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\alpha x}{1+(x+\alpha)^2}\right)dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛 $\Rightarrow F(\alpha)$ 可微.

13.4.7 (1) 设 $f(x,u)=e^{-x(u+1)}$，$x\in[0,+\infty)$，$u\in[\alpha,\beta]$

由 $0\le e^{-x(u+1)}\le e^{-(\alpha+1)x}$ 结合M判别法知 $\int_0^{+\infty}f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，又 $f(x,u)\in C^0([0,+\infty)\times[\alpha,\beta])$

故 $\int_\alpha^\beta\int_0^{+\infty}f(x,u)\,dx\,du=\int_0^{+\infty}\int_\alpha^\beta e^{-x(u+1)}\,du\,dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(\alpha+1)}-e^{-x(\beta+1)}}{x}dx \xlongequal{x=-\ln t}\int_0^1\frac{t^\beta-t^\alpha}{\ln t}dt$$

又 $\int_\alpha^\beta\int_0^{+\infty}f(x,u)\,dx\,du=\int_\alpha^\beta\int_0^{+\infty}e^{-x(u+1)}dx\,du=\int_\alpha^\beta\frac{1}{u+1}du=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$

故 $\int_0^1\frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}dx=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$.

补充1：设 $\alpha>1$，试证明。

(1) $\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,dx$

(2) $\int_0^{+\infty}\sin x^3\,dx\cdot\int_0^{+\infty}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{\pi}{9}$

Hint: (1) RHS $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{2\alpha}+1}dt$，$\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}\sin x\,dt$ 在 $[\varepsilon,A]$ 上一致收敛

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-t^\alpha x}dt=\frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha})$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha+1}dt=\frac{\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}$