通过绕z 轴旋转 $\dfrac{\pi}{4}$, 或令

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\ z'=z,$$

则方程变换为 (x',y',z') 满足的方程

$$z'=\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}.$$

因此 $z=xy$ 表示的也是马鞍面, 只是图5.17 中的马鞍面绕 z 轴旋转了 $\dfrac{\pi}{4}$ 而已.

§5.4 其它常用坐标系

直角坐标系是通过确定原点和空间三个两两正交的单位向量构成的. 这样坐标系称为**线性坐标系**. 它们的特征之一是, 一个坐标分量等于常数对应面的都是平面. 例如 $z=c$ 表示空间中平行于坐标平面 Oxy 的平面. 下面介绍常用的极坐标系、柱坐标系和球坐标系, 但这些坐标系已经不再是线性坐标系.

1° 平面的极坐标系

为了保持完整性, 首先介绍平面极坐标系. 在平面上取定一点 O（称为极点）, 从极点引一条射线 Ox（称为极轴）, 再选定一个长度单位和角度的正向（通常取极轴正向的逆时针方向）, 这样就构成了平面上的**极坐标系**. 对于平面上任意一点 P, 用 r 表示 P 到极点 O 的距离（线段 $\overline{OP}$ 的长度或向量 $\overrightarrow{OP}$ 的大小）, θ 表示从极轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 的正向夹角（幅角）, 则数组 (r,θ) 可以用来确定点 P 在空间的位置, 并称为 P 点的极坐标. 这里, r 的取值范围为 $[0,+\infty)$, θ 的取值范围为 $[0,2\pi)$.

如果在平面直角坐标系 Oxy 中, 取原点为极坐标系的极点, x 轴为极轴, 那么平面上任意一点 P 的直角坐标和极坐标之间的关系（变换）如下:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad\text{或者}\qquad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}.$$

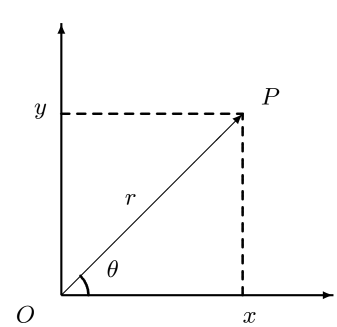

图 5.18

P 的位置向量可以表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=r\cos\theta\boldsymbol{i}+r\sin\theta\boldsymbol{j}.$$

不难发现, $r=$ 常数是平面上以原点为圆心的同心圆, $\theta=$ 常数是从原点出发的射线.

2° 柱面坐标系

设空间取定直角坐标系 $Oxyz$ 对任意一点 $P(x,y,z)$, 位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 Oxy 平面的投影向量

$$\overrightarrow{OP'}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

用极坐标表示

$$\overrightarrow{OP'}=r\cos\theta\boldsymbol{i}+r\sin\theta\boldsymbol{j},$$

因此, 位置向量可表示为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+z\boldsymbol{k}=r\cos\theta\boldsymbol{i}+r\sin\theta\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

或者

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z,$$

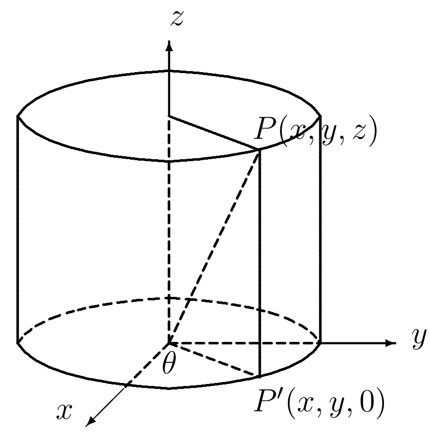

图 5.19

其中

$$0\leqslant r<+\infty,\ 0\leqslant\theta<2\boldsymbol{\pi},\ -\infty<z<+\infty.$$

这样就给出了空间的**柱面坐标系**. 数组$(r,\ \theta,\ z)$称为点 P 的柱面坐标. 在柱面坐标系中, $r=c$（正的常数）表示以 c 为半径的圆柱面 $x^2+y^2=c^2$, $\theta=\theta_0$（常数）是以 z 轴为边的半平面.

3° 球面座标系

设位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴的方向角为 θ, $\overrightarrow{OP}$ 在 Oxy 平面的投影向量为 $\overrightarrow{OP'}$, 则

$$z=|OP|\cos\theta,\quad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+|OP|\cos\theta\boldsymbol{k}.$$

将点 P' 用 Oxy 平面的极坐标表示出, 设 φ 是 $\overrightarrow{OP'}$ 在 Oxy 平面上的幅角, 则

$$\overrightarrow{OP'}=|OP'|\cos\varphi\boldsymbol{i}+|OP'|\sin\varphi\boldsymbol{j}.$$

令 $r=|OP|=|\boldsymbol{r}|$, 则 $|OP'|=|OP|\sin\theta$, 因此

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+r\cos\theta\boldsymbol{k},$$

或

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

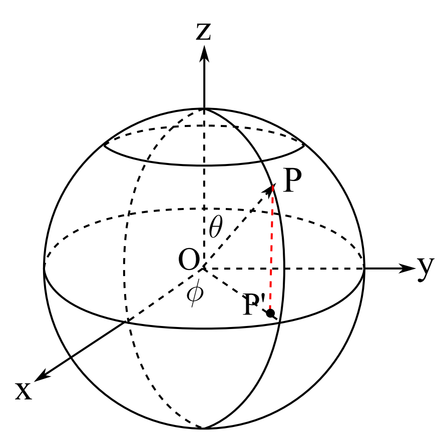

图 5.20

其中

$$0\leqslant r<+\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\boldsymbol{\pi},\ 0\leqslant\varphi<2\boldsymbol{\pi}.$$