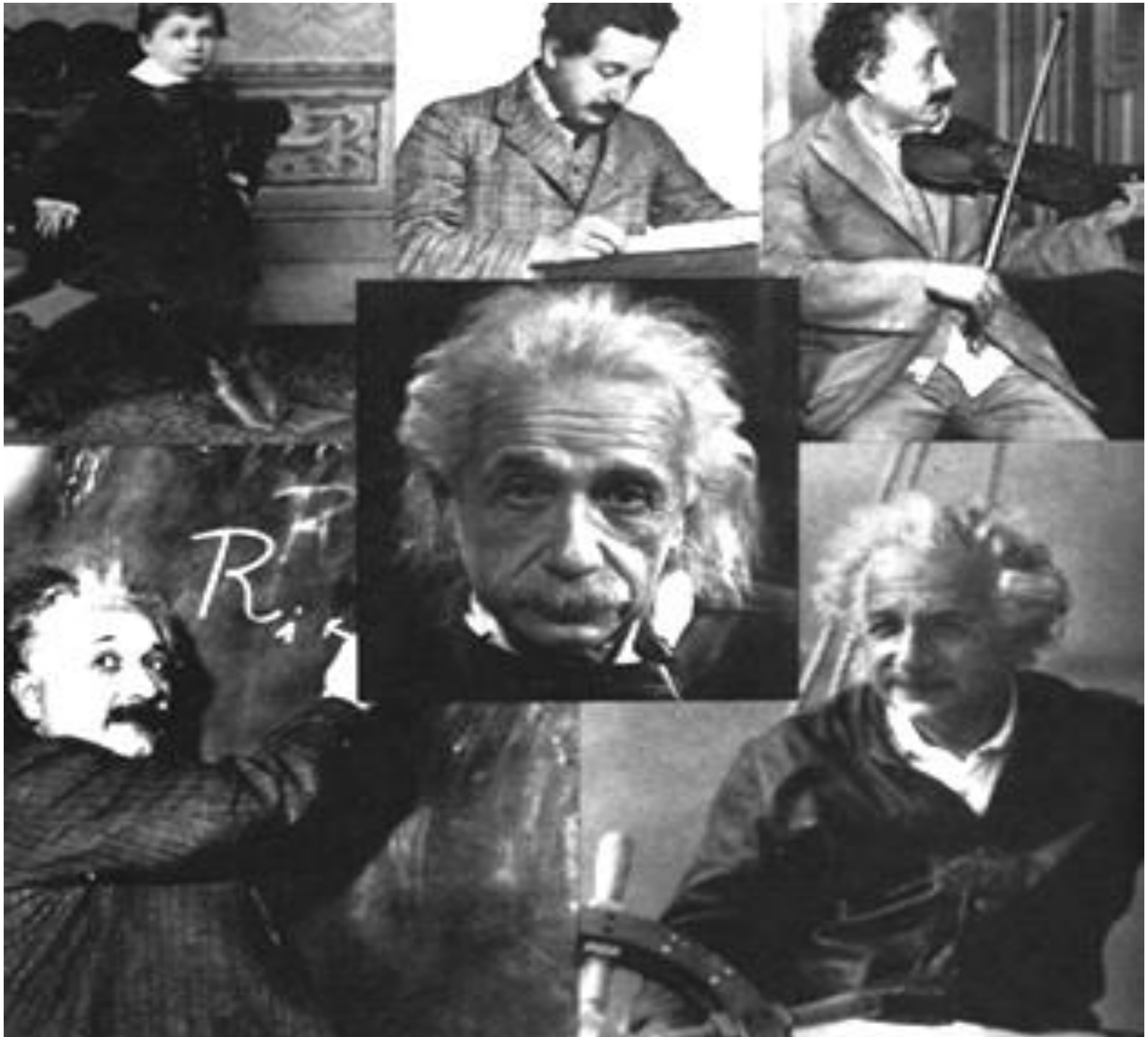
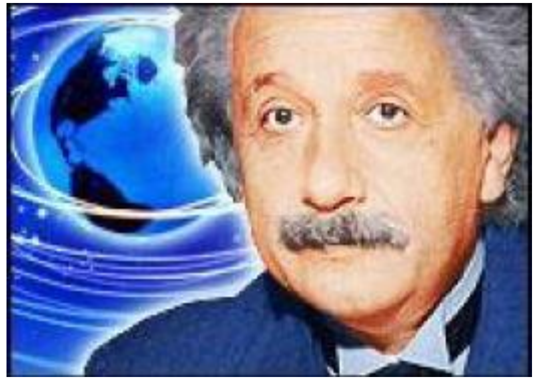
第十一章　狭义相对论

爱因斯坦（**Einstein**）:现代时空的创始人, 二十世纪的哥白尼





If A is a success in life, then A equals x plus y plus z.
Work is x; y is play; and z is keeping your mouth shut.

------Einstein

$$A = x + y + z$$

艰苦奋斗

正确方法

少讲空话

§11.1 狭义相对论基本原理

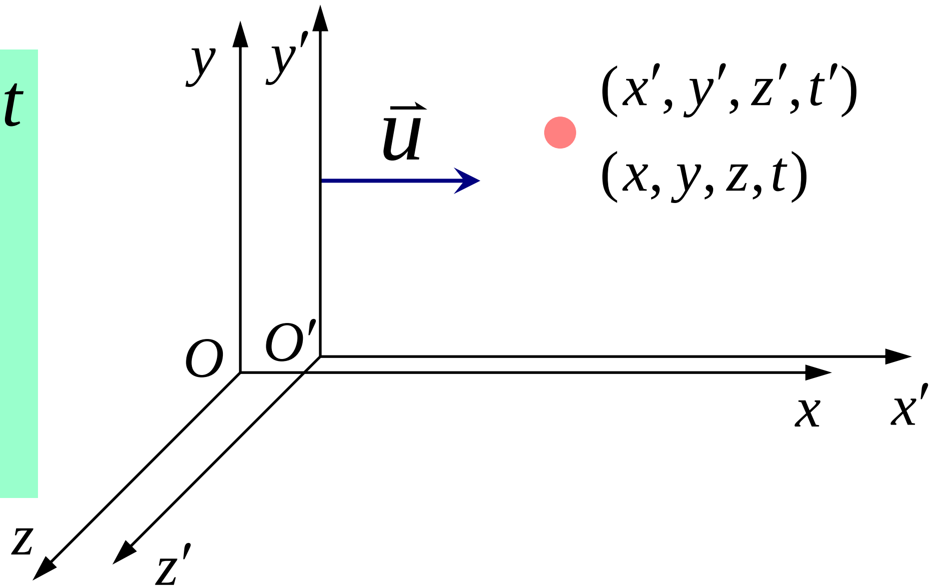
1. 伽利略变换(回顾)

伽利略变换:

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

●伽利略变换蕴含的时空观

同时性的绝对性： $t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad t_1' = t_2'$

时间间隔的绝对性： $\Delta t' = \Delta t$

长度间隔的绝对性： $\Delta l' = x_2' - x_1' = \Delta l = x_2 - x_1$

伽里略变换的实质就是牛顿力学所持的经典时空观，认为**时间的流逝和空间的度量与物体的运动没有任何关系。**

2. 力学的相对性原理——牛顿定律对伽里略变换不变

- 物体间的相互作用与参照系的选择无关： $\vec{F}' = \vec{F}$
- 在牛顿力学中，物体质量与其运动状态无关： $\boldsymbol{m' = m}$
- 由伽利略变换： $\vec{a}' = \vec{a}$

故只要在S系中牛顿定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 成立，

则在$\boldsymbol{S'}$系也一定有 $\vec{F}' = m'\vec{a}'$ 成立。

即在任何惯性系中，力学规律具有相同的形式，或者说从牛顿力学来看，任何惯性系都是平等的，（没有那个惯性系更为优越）。这就是力学相对性原理。

力学相对性原理说明， 无法用力学实验的方法来确定所在惯性系相对于另一惯性系是作匀速直线运动还是相对静止。

3. 牛顿力学的困难

①电子加速的速率不能无限增加。

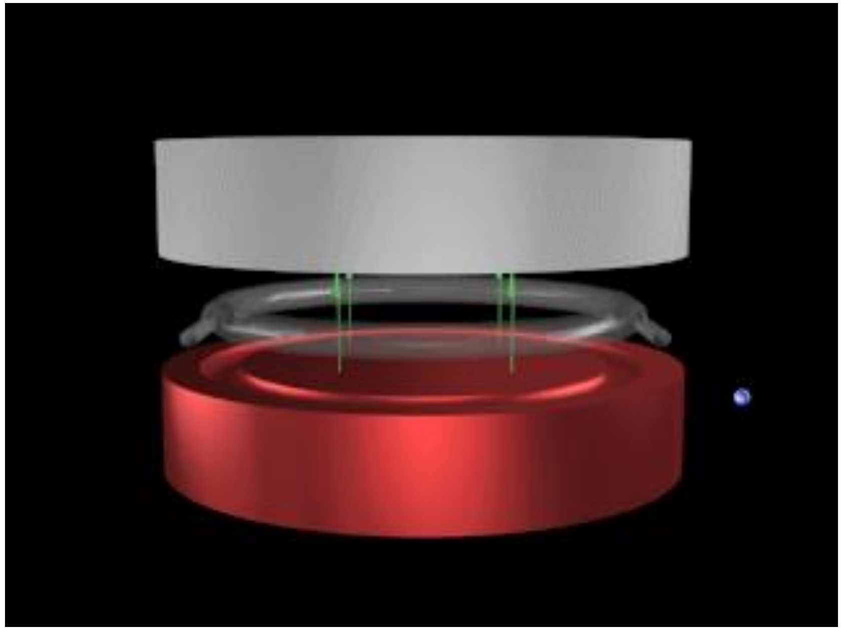


表 10.1　电子动能和速率的关系

动能 E_k/MeV	电子速率/(m/s)	由 $v=(2E_k/m)^{1/2}$ 计算值/(m/s)
0.5	2.60×10^8	4.20×10^8
1.0	2.73×10^8	5.93×10^8
1.5	2.88×10^8	7.27×10^8
4.5	2.96×10^8	12.59×10^8
15	$\approx3.00\times10^8$	22.98×10^8

②光的“以太”理论及其困难

十九世纪上半叶，光具有波动性被大多数物理学家承认，设想光波象机械波一样，需要在介质中传播，这种介质称为以太(ether)，光波就是以太中振动的传播的。以太学说认为有一种到处存在的、能穿透一切的介质，并充满所有物质的内部和它们之间的空间，它的作用是作为传播光波的基础。

- “以太”理论的困难

a) 无法解释光为什么没有纵波；

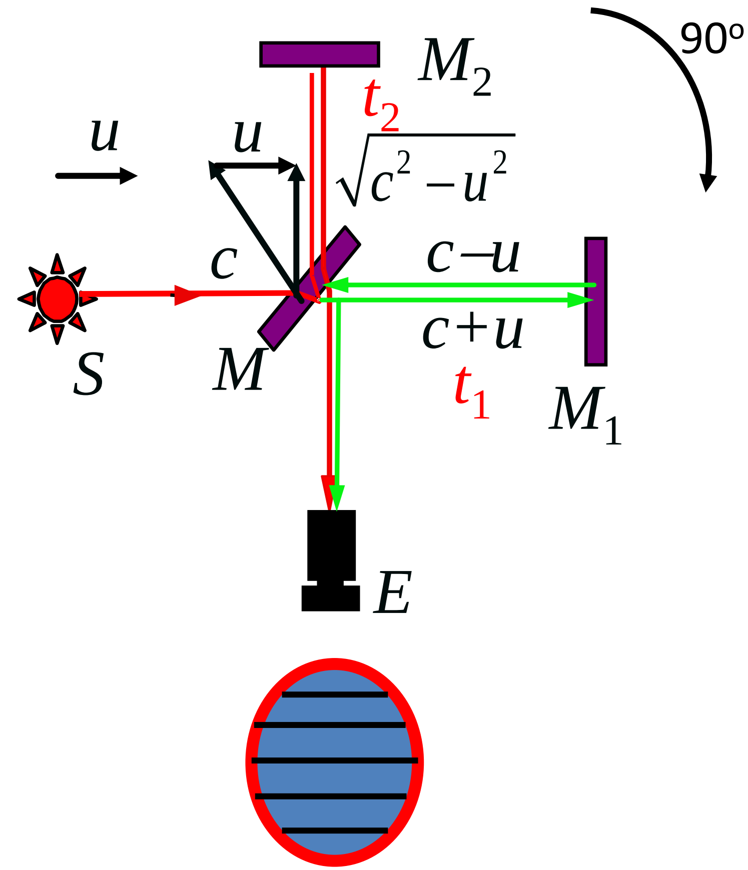
b) 波速 $u=\sqrt{G/\rho}$，因为光的传播速度很大，因此要求切变模量很大，即介质刚性很强（很硬）。如果这样的介质（宇宙以太）充满了我们周围整个空间的话，我们怎么能在地上跑来走去，行星又怎能千百万年地绕太阳转动而丝毫不受阻力呢？

➢ 迈克尔孙—莫雷实验

实验目的：用电磁学或光学的实验方法找出这一绝对惯性系，或测出我们的地球参考系相对绝对参考系（以太系）的速度有多大。

实验原理如图，光源发出的光束被分成两束后，被镜片反射，其往返时间分别为

u为“以太”相对地球的速度



$$t_1=\frac{l}{c-u}+\frac{l}{c+u}=\frac{2l}{c}\left[\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right]$$

$$t_2=\frac{2l}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]$$

仪器转动90度所引起的两光束的时间差的变化为

$$\Delta t = 2\left(t_1 - t_2\right) \approx 2lu^2/c^3$$

根据干涉原理，与此时间差改变对应的干涉条纹的移动数目为

$$\boxed{\Delta N = \frac{\omega \Delta t}{2\pi} = c\Delta t/\lambda \approx \frac{2l}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

实验中采用的数据大致如下：

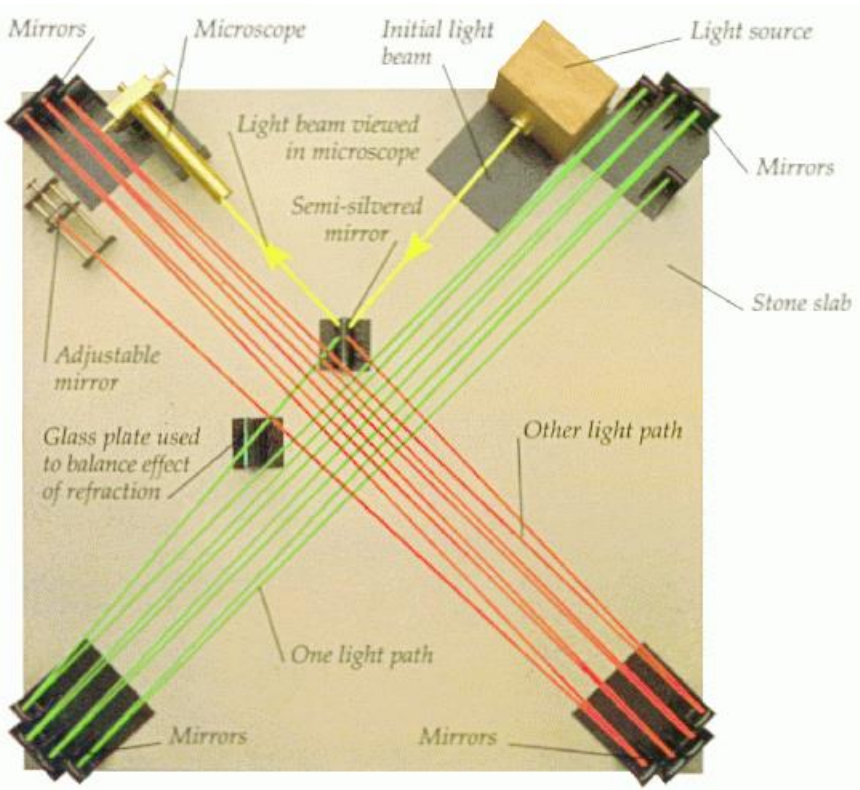
$$l = 1.2\mathrm{m},\ \ \lambda = 5.9\times10^{-7}\,\mathrm{m},$$

$$u \approx 30\mathrm{km/s} \Longrightarrow \Delta N = 0.04$$

这是1881年迈克耳孙干涉仪的实验精度。1887年迈克耳孙和莫雷合作改进了干涉仪，光路多次反射达到

$$l = 11\mathrm{m} \Longrightarrow \Delta N = 0.4$$

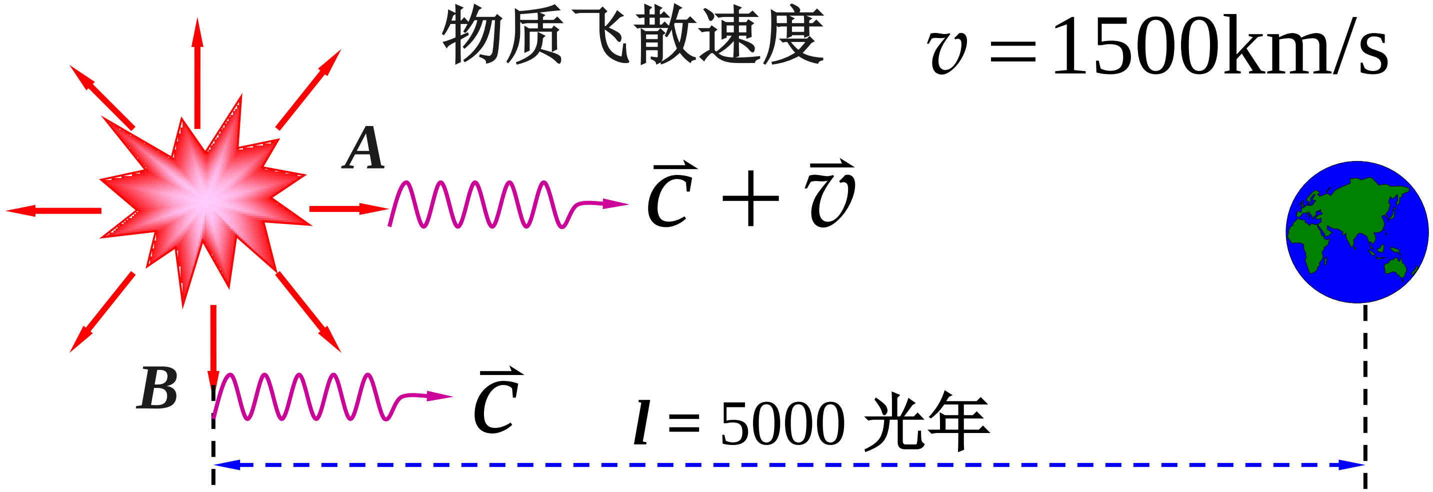
实验结果：没有观测到条纹的移动



③速度合成律中的问题

900 多年前（公元1054年5月）一次著名的超新星爆发， 这次爆发的残骸形成了著名的金牛星座的蟹状星云。北宋天文学家记载从公元 1054年 ~ 1056年均能用肉眼观察，特别是开始的 23 天，白天也能看见 。

物质飞散速度 $v = 1500\text{km/s}$



$$t' = \frac{L}{c+v}, \quad t = \frac{L}{c-v}$$

$$t - t' \approx 50\,years$$

□ 爱因斯坦的选择

修改电磁学定律，还是修改伽利略变换？

电磁学定律：实验验证是正确的

伽利略变换：适用于低速情况。高速情况？

爱因斯坦：修改伽利略变换

低速→高速

绝对时空观→相对论时空观

伽利略变换→洛仑兹(Lorentz)变换

§ 11.2　洛伦兹变换

1. 狭义相对论的基本假设

(1) 光速不变假设： 在所有的惯性系中测量到的真空光速恒为 c，与光源或观察者的运动无关。

$$c = 2.99792458 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

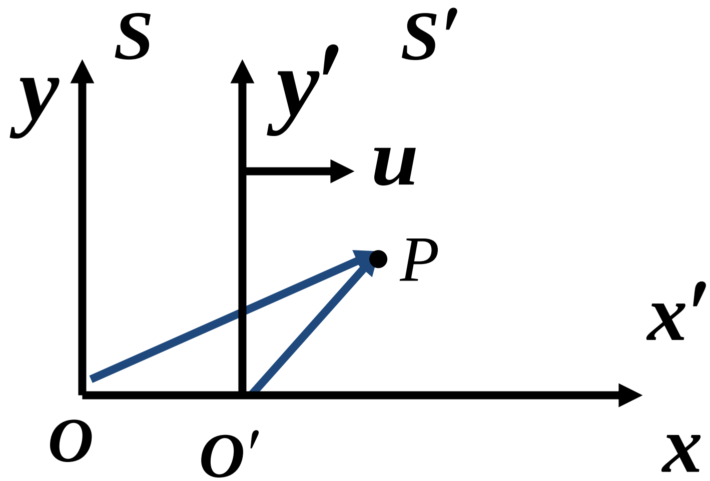
(2) 相对性原理：

物理规律（包括力学规律）在一切惯性参考系中都具有相同的形式，即对物理规律来说，一切惯性系都是平等的。不存在任何一个特殊的惯性系，例如绝对静止的惯性系。

或：物理定律在所有惯性系中具有数学形式不变性，即协变性。

- 伽里略变换与光速不变性假设不相符。
- 狭义相对论的基本假设否定了绝对空间的存在。

2. 洛伦兹变换



这里我们选取***S'*** 系相对***S***系的速度为***u***，沿***x***轴正方向。在***t = t'*** =**0**时刻，两个参考系的坐标原点***O***和***O'***重合。同时发出闪光，经一段时间光传到 ***P***点

$$S: \quad P(x, y, z, t)$$

$$S': \quad P(x', y', z', t')$$

目标

两个参考系相应的坐标值之间的关系

因为只在 ***x***方向上，***S***系与***S'***系有相对运动，***y***和***z***方向上并没有相对运动，所以关于***y***和***z***的变换应当为

$$\boxed{y' = y, \quad z' = z}$$

(x,t) 和 (x',t') 的变换基于下列两点：

①惯性系间的时空变换应该是线性的。

➢根据狭义相对性原理，两个惯性系是完全等价的，一个惯性系中的匀速运动在另一个惯性系看来也必须是匀速运动。只有时空坐标变换是线性的才能保证这一点。

➢由于空间的均匀性，即空间中各点的性质都是一样的，没有任何具有特别性质的点，新的时空关系必须是线性的。

➢从数学上看，S系和S'系是等价的，S 系和S' 系之间时空坐标变换必须是相同性质的变换，只有线性变换的逆变换仍然是线性变换。

$$x' = kx + bt$$

S' 系相对S系的速度为u，考虑S'系中的静止点，例如坐标原点O'

$$0 = kx + bt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{k} = u$$

$$\Rightarrow \quad b = -ku$$

所以 $S \to S'$ 的变换为：

$$\boldsymbol{x' = k(x - ut)}$$

根据Einstein相对性原理，$S' \to S$ 的变换为：

$$\boldsymbol{x = k(x' + ut')}$$

②新变换在低速下应能退化成伽利略变换：

$$\lim_{u \to 0} k = 1$$

由光速不变原理：

原点重合时，从公共原点发出一个光脉冲，其空间坐标为：

对 S 系： $x = ct$ 　　对 S' 系： $x' = ct'$

$$x = k(x' + ut')$$

$$x' = k(x - ut)$$

$$ct = k(c+u)t'$$

$$ct' = k(c-u)t$$

相乘

$$c^2tt' = k^2(c+u)t'(c-u)t$$

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$x = k(x' + ut') \qquad x' = k(x - ut)$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

综上可知，两惯性系 S 与S'之间的时空坐标变换关系：

$S \to S'$

正变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x / c) \end{cases}$$

$S' \to S$

逆变换

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \beta x' / c) \end{cases}$$

$$\beta \equiv u/c, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

●几点说明：

①在洛伦兹变换中时间和空间密切相关，它们不再是相互独立的

② $u>c$ 变换无意义 $\Longrightarrow$ 速度有极限！

③伽利略变换是洛仑兹变换的低速近似：

洛仑兹变换
（相对论时空）

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma(x-\beta ct) \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = \dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma(t-\beta x/c)
\end{cases}
$$

$u << c$ ⇒

伽利略变换
（绝对时空）

$$
\begin{cases}
x' = x-ut \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = t
\end{cases}
$$

- **关于狭义相对论的主要的工作**

➢ **1892年G.F.Fitzgerald 和 H.A.Lorentz 独立提出运动长度收缩的概念。**

➢ **1899年H.A.Lorentz 从“以太”论出发，导出了Lorentz 变换。**

➢ **1904年庞加莱提出物体质量随运动速度增加而增加，极限速度为光速 c。**

➢**1905年爱因斯坦《论动体的电动力学》给出相对论的物理基础。爱因斯坦的预言，其它人甚至都没想象过。**

□ 洛伦兹变换的另外一种推理方法（选读）

因为只在*x*方向上，*S*系与*S'*系有相对运动，*y*和*z*方向上并没有相对运动，所以关于*y*和*z*的变换应当为

$$y' = y, \quad z' = z$$

所以一般的线性变换简化为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{14}ct \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = a_{41}x + a_{44}ct \end{cases}$$

当*S*系和*S'*系的坐标原点*O*系和*O'*重合时，即*t* = *t'* =0时，位于原点的光源发出一个光信号。在*S*系的观测者看来，它的传播满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

由于光速不变，在*S'*系的观测者看来，这同一光波的传播满足

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

所以(x,y,z,t)与(x',y',z',t')之间的变换关系满足

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2}$$

这是光速不变原理的数学表达式。把时空的一般线性变换代入上式可得

$$\begin{aligned}x'^2-c^2t'^2&=(a_{11}x+a_{14}ct)^2-(a_{41}x+a_{44}ct)^2\\&=(a_{11}^2-a_{41}^2)x^2+(a_{14}^2-a_{44}^2)c^2t^2+2(a_{11}a_{14}-a_{41}a_{44})ct\\&=x^2-c^2t^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_{11}^2-a_{41}^2=1\Rightarrow a_{11}^2=a_{41}^2+1\\a_{14}^2-a_{44}^2=-1\Rightarrow a_{14}^2=a_{44}^2-1\\a_{11}a_{14}-a_{41}a_{44}=0\Rightarrow a_{41}^2a_{44}^2=a_{11}^2a_{14}^2=(a_{41}^2+1)(a_{44}^2-1)=a_{41}^2a_{44}^2-a_{41}^2+a_{44}^2-1\\\qquad\Rightarrow a_{44}^2=a_{41}^2+1\end{cases}$$

所以a_{11}, a_{14}, a_{41}和a_{44}之间满足下面的关系

$$\begin{cases} a_{11}^2 = a_{44}^2 \\ a_{14}^2 = a_{41}^2 \\ a_{11}^2 - a_{14}^2 = 1 \end{cases}$$

因为S系相对S'系的速度为u，相对S'系静止的点（例如S'系的坐标原点），有$dx'=dy'=dz'=0$，它们相对S系的速度都是u，即$dx/dt=u$

$$x' = a_{11}x + a_{14}ct = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{a_{14}}{a_{11}}c = u \Rightarrow a_{14} = -\frac{u}{c}a_{11}$$

于是可解得

$$a_{11}^2 = a_{44}^2 = \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}}, \quad a_{14}^2 = a_{41}^2 = \frac{u^2/c^2}{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$$

当两个参考系之间的相对速度$u \ll c$时，上式应能回到伽利略变换，故应取

$$a_{11}=a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}>0,\qquad a_{14}=a_{41}=-\frac{u}{c}a_{11}=-\frac{u/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

于是我们得到两惯性系 S 与S'之间的时空坐标变换关系:

时空坐标的洛伦兹变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma(x-ut) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma\left(t-\dfrac{u}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

时空坐标的洛伦兹逆变换

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma(x'+ut') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\dfrac{t'+\dfrac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma\left(t'+\dfrac{u}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

例题1：一短跑选手，在地球上以10s的时间跑完100m，在飞行速率为0.98c的飞船中观测者看来，这个选手跑了多长时间和多长距离（设飞船沿跑道的竞跑方向航行）？

解：设地面为S系，飞船为S'系。

$$\boldsymbol{x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

$$\boldsymbol{t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

$$\begin{cases} x_2' - x_1' = \dfrac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ t_2' - t_1' = \dfrac{(t_2 - t_1) - u(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\because \Delta x = x_2 - x_1 = 100m, \Delta t = t_2 - t_1 = 10s, u = 0.98c$$

$$\therefore\ x_2' - x_1' = \frac{100 - 0.98\times 10}{\sqrt{1-0.98^2}} \approx -1.47\times 10^{10}\,m$$

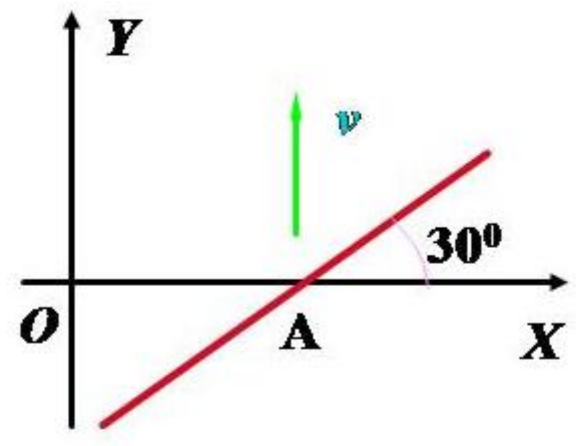
$$t_2' - t_1' = \frac{10 - 0.98c\times 100/c^2}{\sqrt{1-0.98^2}} \approx 50.25s$$

例题2：刚性长杆与X轴夹角为30^0，当杆沿Y轴正向以$v=2c/3$的速度平动时，杆与X轴的交点A的运动速度为多少？这是否与狭义相对论速率极限的理论相矛盾？

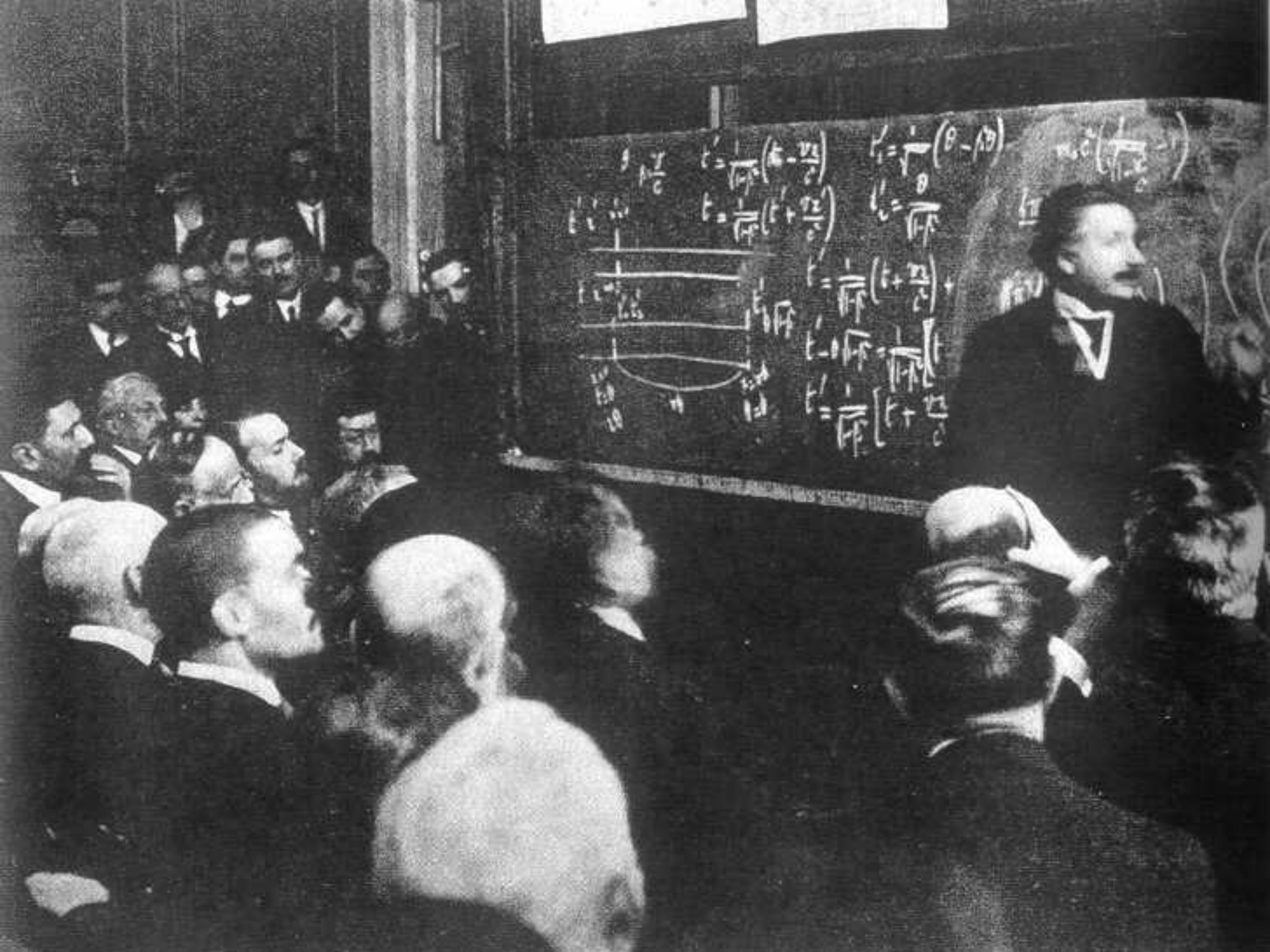
解：交点A的运动速度为

$$u = v \cdot \mathrm{ctan}30^0 = \frac{2}{3}c\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}c$$

$$= 1.155c > c$$



尽管A点的运动速率大于光速c，但并不与狭义相对论的理论相矛盾。因为杆与X轴的交点并不是真实的物体，所以其速度可以大于光速。“光速是一切物体运动的极限速率”是说真实物体（或者能量）在真空中相对任一参考系的运动速度，不能通过外力加速而得到光速。



§11.3狭义相对论的时空观

1. 同时的相对性

	S'	S
事件1	(x_1', t_1')	(x_1, t_1)
事件2	(x_2', t_2')	(x_2, t_2)

两事件同时发生

$$t_1' = t_2'$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

?

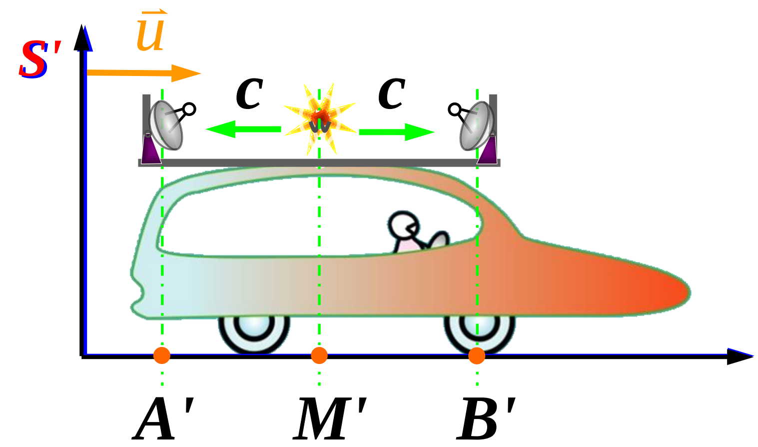
●通过特例说明同时性的相对性

以一个假想火车为例

S 地面参考系

S' 假想火车

(车上放置一套装置)



A'、B' 处分别放置一光信号接收器，中点 M' 处放置一光信号发生器。$t = t' = 0$ 时， M' 发出一光信号。

事件1：A' 接收到光信号　　事件2：B' 接收到光信号

$\overline{A'M'} = \overline{B'M'}$ ⇒ A'、B' 同时接收到光信号

1、2 **两事件同时发生**

S 闪光发生在M'处，地面上相应的点记为M

光速仍为 c

而这时， A'、B' 处的接收器随 S' 运动。

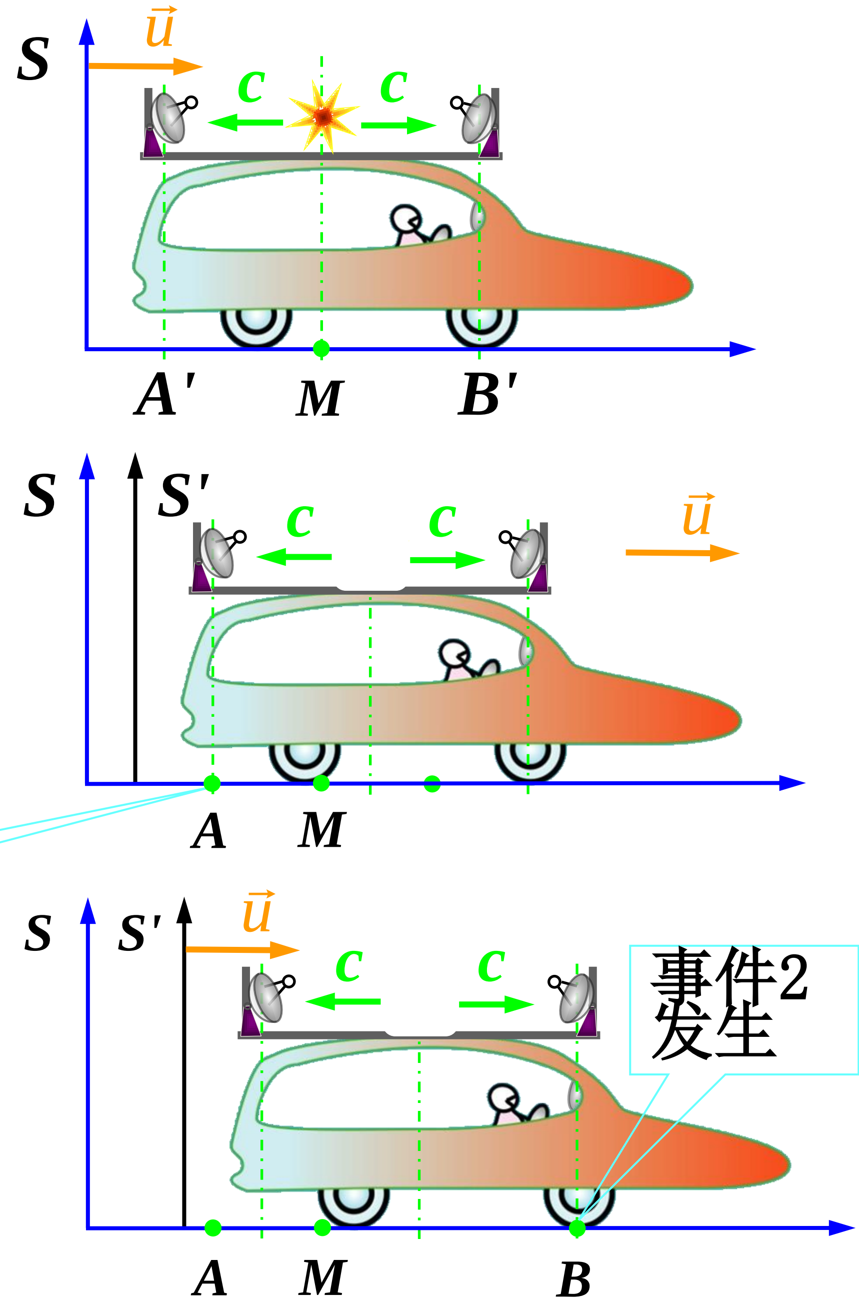
$$\overline{AM} < \overline{A'M'}$$

$$\overline{BM} > \overline{B'M'}$$

事件1发生

A' 比 B' 早接收到光信号

1事件先于2事件发生



●由洛仑兹变换看同时性的相对性

考虑两个物理事件 1和2，它们在两个惯性系*S*和*S′*中的时空坐标分别为 (x_1,t_1)、(x_2,t_2)与 (x_1',t_1')、(x_2',t_2') ，根据洛伦兹变换：

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2-t_1=\frac{(t_2'-t_1')+\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

➢若两个事件在*S*系中同时发生，即$t_1=t_2$，则在*S′*中

$$t_2'-t_1'=\frac{-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}<0,\text{如果}x_2>x_1$$

$$t_2'-t_1'=\frac{-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}>0,\text{如果}x_2<x_1$$

➢若两个事件在*S′*系中同时发生，即 $t_1'=t_2'$ ，则在*S*中

$$t_2-t_1=\frac{\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}>0,\text{如果}x_2'>x_1'$$

$$t_2-t_1=\frac{\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}<0,\text{如果}x_2'<x_1'$$

结论

沿两个惯性系相对运动方向上发生的两个事件，在其中一个惯性系中表现为同时的，在另一个惯性系中观察，则总是在前一个惯性系运动的后方的那一事件先发生。只有在同一地点，同一时刻发生的两个事件，才是在所有惯性系中同时发生。

讨论

(1)同时性的相对性是光速不变原理的直接结果。

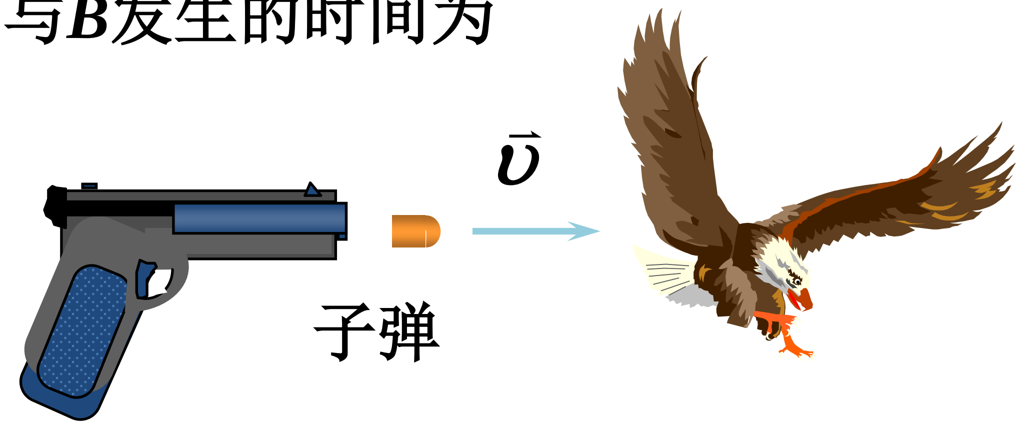
(2)相互运动的惯性系不再有统一时间，不同惯性系的各时钟只能在各自惯性系作同步操作。即否定了牛顿的绝对时空观。

2. 时序的相对性与因果性

两个物理事件 *A*和*B*，对*S*系来说,发生的地点和时间分别是 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) ，假定事件A是事件B发生的原因，因发生在果前，即 $t_2 > t_1$ 。则对于*S'*系，事件*A*与*B*发生的时间为

$$t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$



$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \dfrac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\left[1 - \frac{u}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

一切物质或者信息的传递速度不能超过*c*，所以 $\left|\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right| < c$

$$t_2' - t_1' \geq \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\left[1 - \frac{u}{c}\right] > 0$$

有因果联系的事件不会发生时序的颠倒。

3. 时间间隔的相对性（时间延缓）

设S'系中同一地点先后发生两个物理事件：

$$A:(x',y',z',t_1') \qquad B:(x',y',z',t_2')$$

在S系中，这两个事件发生的时刻为

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

故有

$$t_2-t_1=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\equiv\gamma(t_2'-t_1')>t_2'-t_1',\ \text{因为}\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\geq 1$$

固有时间：一个物理过程用相对于它静止的惯性系上的标准时钟测量到的时间（原时）,通常用 τ_0来表示。即 $\Delta t'=t_2'-t_1'=\tau_0$为固有时

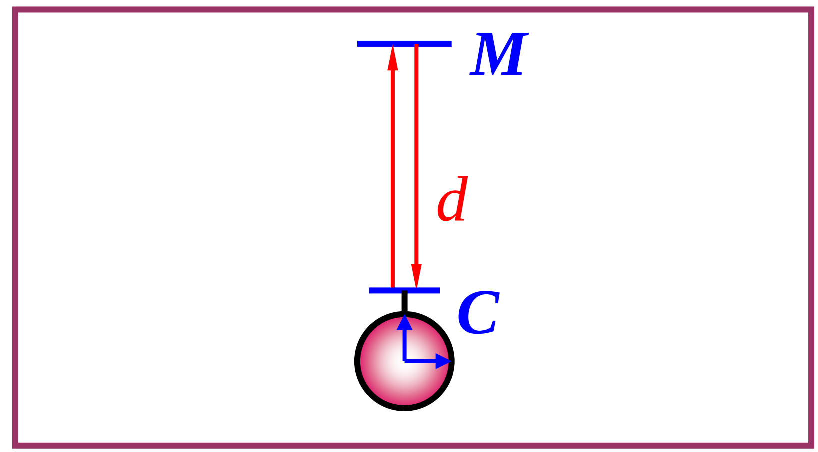
运动时间：一个物理过程用相对于它运动的惯性系上的标准时钟测量到的时间（两地时）。

①从惯性系S中的观测者来看，运动着的物体中发生的过程所费的时间变长了，变为固有时间的γ 倍。
②对事件发生地点（同一地点）相对静止的惯性系中测得的固有时间最短（即时钟变慢），称该现象为**钟慢效应**。

- 如何理解时间膨胀的概念

S'(钟静止)：

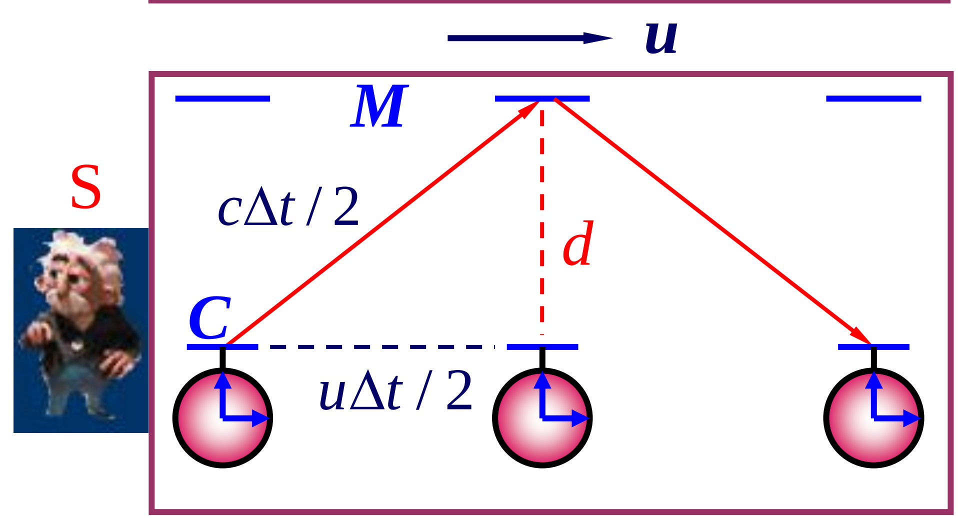
$$\Delta t' \equiv \tau_0 = \frac{2d}{c}$$



S(钟以速度u运动)：

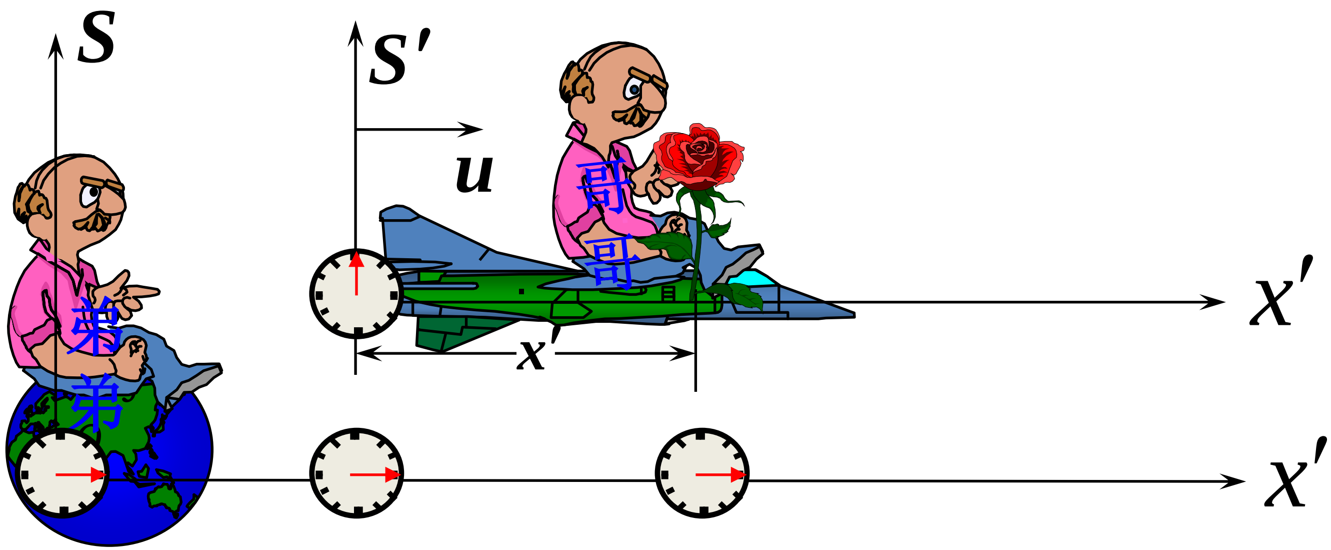
$$\frac{1}{2}c\Delta t = \sqrt{d^2 + \frac{1}{4}u^2\Delta t^2}$$

$$\Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

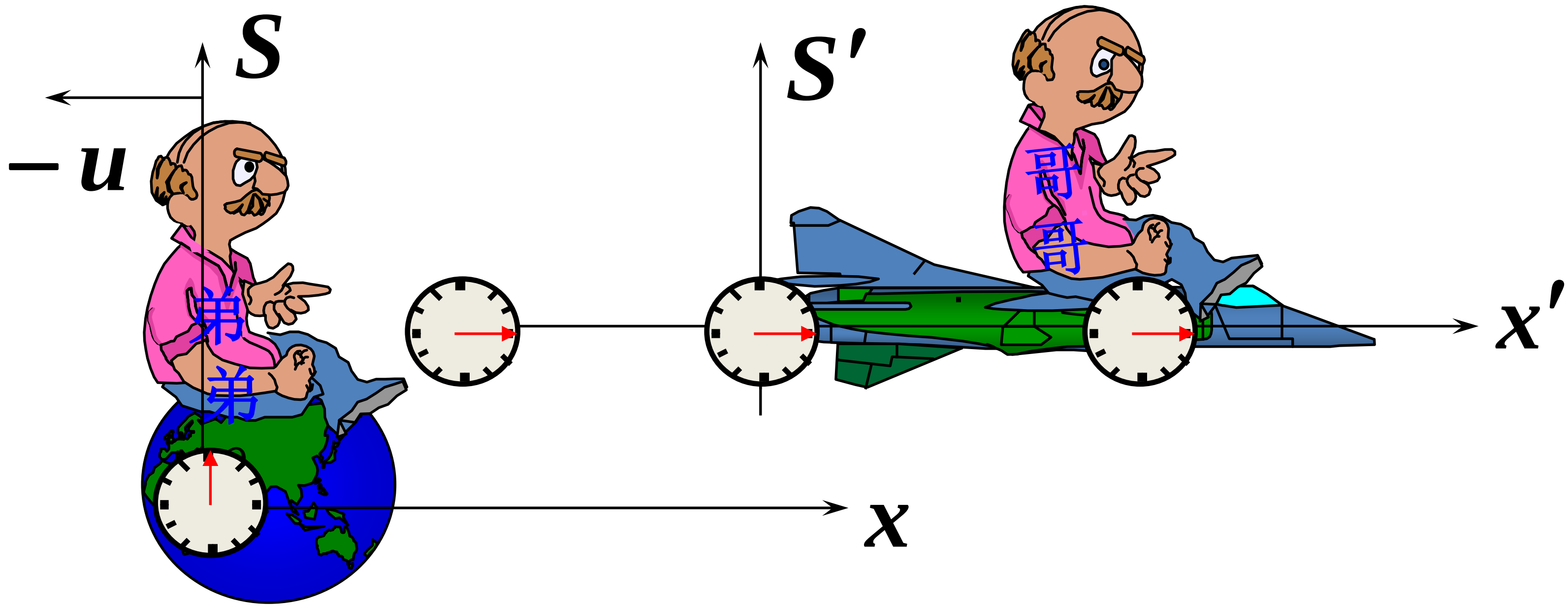


●孪生子佯谬和孪生子效应

设想有一对孪生兄弟，哥哥告别弟弟乘宇宙飞船去太空旅行。



在S系中观察者总觉得相对于自己运动的 S' 系的钟较自己的钟走得慢。 即弟弟认为哥哥比自己年轻。



在 S' 系中观察者总觉得相对于自己运动的S系的钟较自己的钟走得慢。 即哥哥认为弟弟也比自己年轻。

➢问题的关键是，时间延缓效应是狭义相对论的结果，它要求飞船和地球同为惯性系。要想保持飞船和地球同为惯性系，哥哥和弟弟就只能永别，不可能面对面地比较谁年轻。这就是通常所说的孪生子佯谬（twin paradox）。

➢如果飞船返回地球则在往返过程中有加速度，飞船就不是惯性系了。这一问题的严格求解要用到广义相对论，计算结果是，**兄弟相见时哥哥比弟弟年轻。**这种现象，被称为**孪生子效应。**

1971年，美空军用两组Cs（铯）原子钟作实验。

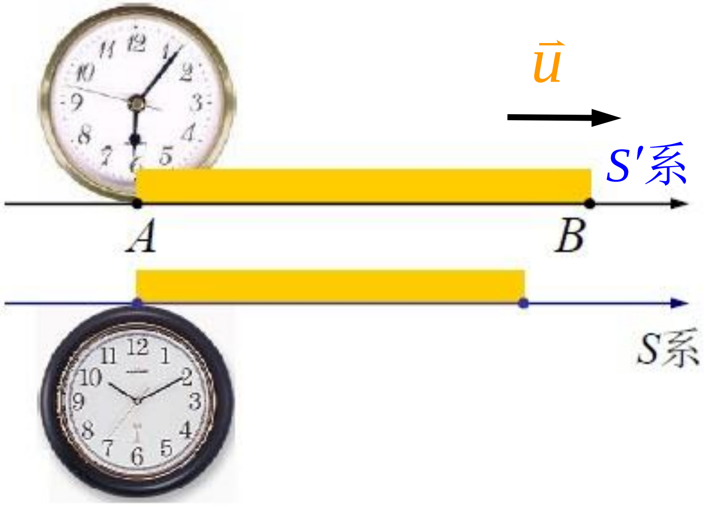
实验值：绕地球一周的运动钟变慢：**203±10ns**

理论值：运动钟变慢：**184 ±23ns**

实验值和理论值在误差范围内是一致的。实验验证了孪生子效应确实是存在的。

4. 长度的相对性

假定有一直尺相对于 S' 系是静止的，并且放置在沿 x 方向。如果直尺两端的坐标分别是 x_1' 及 x_2'，则对于 S' 系中的观察者，直尺的长度是 $L_0=|x_2'-x_1'|$（**称为固有长度**）。如果在 S 系中有一个观察者，在时刻 t，**同时测量**直杆两端坐标的坐标为 x_1 及 x_2。根据洛伦兹变换可得，



$$x_1'=\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad x_2'=\frac{x_2-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

所以对于S系，直尺的长度为：

$$L=x_2-x_1=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,(x_2'-x_1')=L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=L_0/\gamma<L_0$$

物体沿运动方向的长度比其固有长度短。这种效应叫做洛仑兹收缩，或尺缩效应。注意：与运动垂直方向上的长度不变。

●通过特例说明空间间隔的相对性

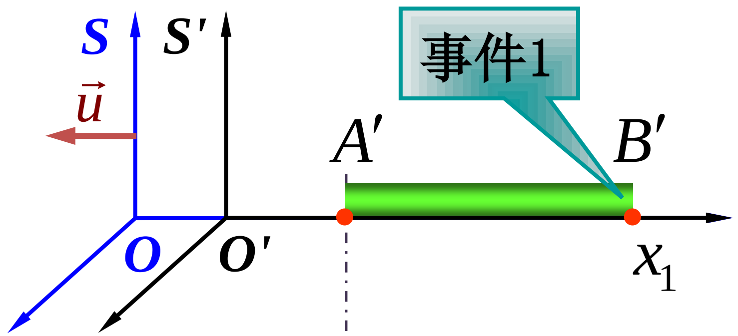
$S:\quad L = u\Delta t$

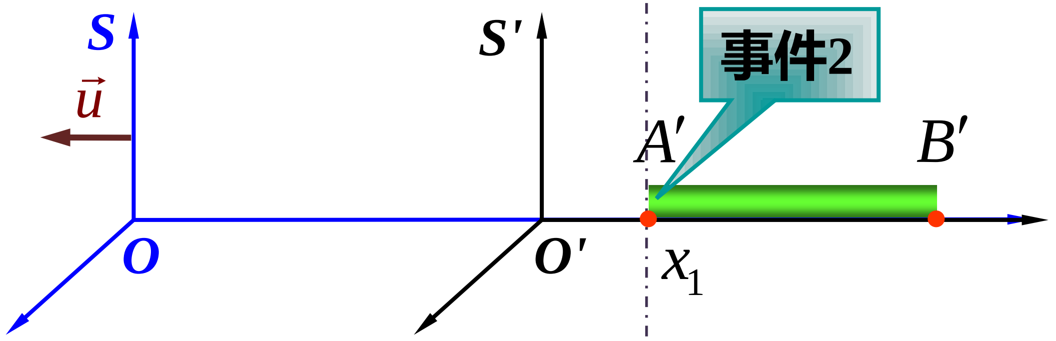
两事件同地发生，Δt 为固有时间

$S':\quad L_0 = u\Delta t'$

由 $\quad \Delta t' = \gamma \Delta t$

得 $\quad \dfrac{L_0}{u} = \dfrac{\gamma L}{u} \Rightarrow \boxed{L = L_0/\gamma}$





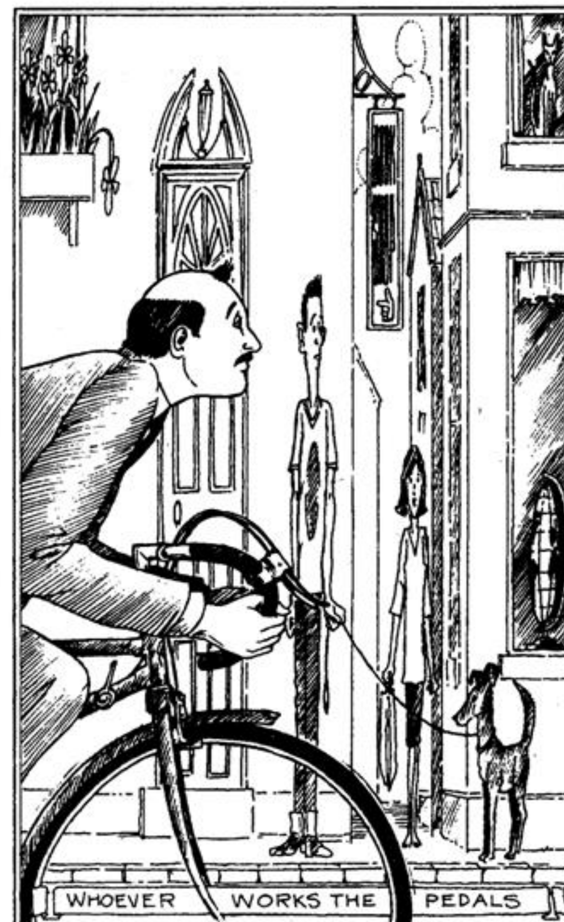
长度收缩效应是同时性相对性的直接结果。

●测量形象（观测者）和视觉形象（观看者）

测量形象：测量运动杆长度必须同时测量其两端点坐标，才能由坐标差得出长度的测量值。

视觉形象：是由物体上各点发出后“同时到达”眼睛或“照相机”的光线所组成，这些光线不是同时从物体发出的。

尺缩效应的形象是人们观测物体上各点对观察者参考系同一时刻的位置构成的“测量形象”，而不是物体产生的“视觉形象”，相对论中的“观测者”指的就是这种“测量者”。而作为“观看者”看到的高速运动的物体，除了应考虑由相对论效应引起的畸变外，还应考虑到由光学效应引起的畸变，故看到的物体仍是原有的形状，不过转过了一个角度。



5. 时空间隔的绝对性

设 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2) 是S系中发生两个物理事件A和B，定义时空间隔

$$\Delta s=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$$

则在S'系看到的事件A和B为 (x_1', y_1', z_1', t_1') 和 (x_2', y_2', z_2', t_2')

$$\Delta s'=\sqrt{c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2}$$

由洛伦兹变换可得：

$$\begin{cases} t_2'-t_1'=\dfrac{(t_2-t_1)-\dfrac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ x_2'-x_1'=\dfrac{(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y_2'-y_1'=y_2-y_1 \\ z_2'-z_1'=z_2-z_1 \end{cases}$$

$$(\Delta s')^2 = c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2$$

$$= \frac{c^2\left[(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)\right]^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{[(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)]^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - (y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

$$= \frac{(c^2-u^2)(t_2-t_1)^2-(1-\frac{u^2}{c^2})(x_2-x_1)^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - (y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

$$= c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 = (\Delta s)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta s = \Delta s'}$$

即时空间隔 Δs是不依赖于参考系的选择的，是一个绝对量。

对于时空上无限邻近的两个事件，其时空间隔可以写成微分形式

$$ds = \sqrt{c^2(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2}$$

$$= cdt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

例题3： 相对于μ 静止的坐标系中
2.15×10^{-6} s。在离地面6000m高空
速率垂直向地面飞来。试问它能

解： 解法1： 设地面参考系为惯性
S'系相对于S系的运动速率为
为

$$\tau_0=2.15\times10^{-6}s$$

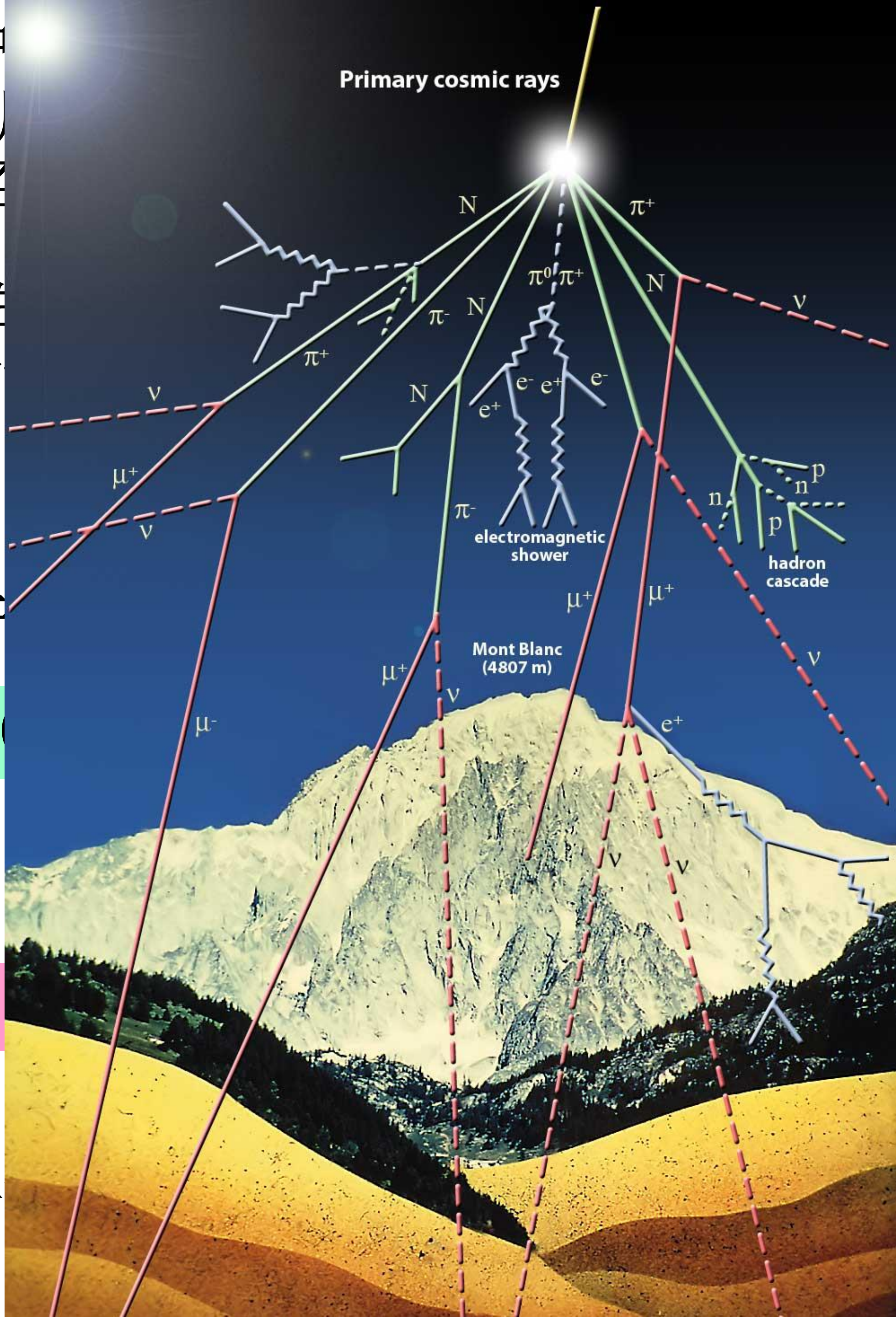
根据相对论时间延缓效应，对于

$$\tau=\gamma\tau_0=10\tau_0=2.15\times1$$

μ子在时间τ内运动的距离为

$$s=u\tau=10\tau_0 v=6418m$$

所以μ子在衰减之前，地面已经



解法**2**：在相对μ子静止的惯性系S' 中，μ子衰减之前地球朝μ 子运动的距离为

$$s' = u\tau_0 = 0.995c \times 2.15 \times 10^{-6} s$$
$$= 641.8\text{m}$$

然而，对S' 系来说，地面与μ子之间的距离存在长度收缩效应。也就是说，S'系中的观测者所测得的地面与 μ 子的距离为

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 599m$$

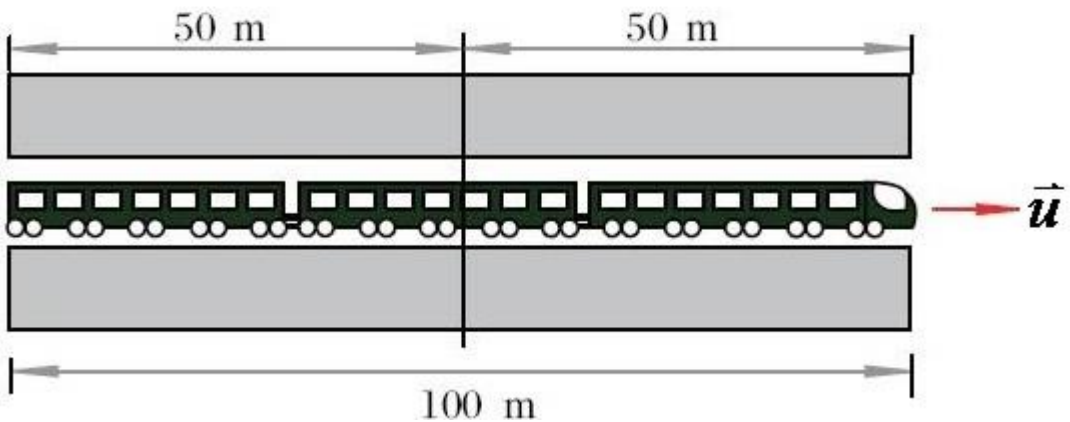
所以μ子在衰减之前，地面同样会碰上μ子。

例题4：一列静止长度为**100**米的火车在平直的轨道上以速度$u=0.6c$匀速行驶，穿过一个长度为**100**米的隧道。

（**1**）在火车中点与隧道的中点重合时，火车的前后两端同时向上垂直发射火箭。由于隧道相对于火车运动长度会缩短，所以火车司机说前后两只火箭都会发射到空中，但站在地面上的人说，由于运动火车的长度缩短，两只火箭都会打在隧道顶部。

（**2**）在火车的中点与隧道的中点重合时，将隧道两端的大门同时关上。由于运动的火车长度缩短，可以将火车关在隧道内；但火车上的人说，由于隧道相对于火车长度会缩短，不能将火车关在隧道内。

请问，火箭能不能射向空中？门能不能将火车关在隧道内？如何解释？



解：（1）当火车的中点与隧道的中点重合时，取中点处为坐标原点，向右为正方向。取火车为**S**系，地面为 S' 系，S' 系相对**S**系以的 $-\bar{u}$ 速度向左运动。在火车上看，前后两端同时发射火箭时隧道前后大门处坐标为

$$x = x' \times \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \pm 50 \times \sqrt{1 - (0.6)^2} = \pm 40m$$

由于相对运动，在火车上看，隧道的长度只有**80**米，所以火箭可以射到空中。那么在地面上是怎样的呢？事实上，在运动的火车上同时发生的事在地面上看不是同时发生的！取火车的中点与隧道的中点重合时为计时零点，即此时$t=0$，则有

$$t' = \frac{t - \frac{-u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{t - \frac{-0.6c}{c^2}x}{\sqrt{1 - (0.6c)^2/c^2}} = \pm \frac{0.6}{0.8c} \times 50 = \pm \frac{75}{2c}$$

火车末端发射火箭在两者中点重合之前，前端发射火箭在两者中点重合之后。因为

$$\frac{75}{2c}\times 0.6c = 22.5m, \qquad 40+22.5-50=12.5m$$

所以后端发射火箭时火车在隧道外**12.5**米，前端发射火箭时火车已经开出隧道大门外**12.5**米，故火箭能射向空中。

（**2**）现在换个角度。选取地面为S系，火车为 S' 系，S' 系相对于S系以速度向右运动。在地面上看，隧道前后大门同时关闭时，火车前后两端的坐标为

$$x = x'\times\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \pm 50\times\sqrt{1-(0.6)^2} = \pm 50\times 0.8 = \pm 40m$$

由于相对运动，在地面上看，火车的长度只有**80**米，所以可以将火车关在隧道内。那么在火车上看是怎样的呢？事实上，在地面上同时发生的事件在运动的火车上看不是同时发生的！取火车的中点与隧道的重点重合时未计时零点，即此时$t=0$，则有

$$t' = \frac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{t-\dfrac{0.6c}{c^2}x}{\sqrt{1-(0.6c)^2/c^2}} = \mp\frac{0.6}{0.8c}\times 50 = \mp\frac{75}{2c}$$

在火车上看，前方隧道门关闭是在两者中点重合之前，后方隧道门关闭是在两者中点重合之后。由于

$$\frac{75}{2c}\times 0.6c = 22.5m, \qquad 40+22.5-50=12.5m$$

可知火车前方隧道门关闭时，火车前端距离隧道门还有**12.5**米，火车后方隧道门关闭时，火车已经开进隧道离开后方大门**12.5**米，故可以将火车关在隧道内。

§11.4 相对论的速度和加速度变换

1. 速度变换

对于 S系，质点的速度分量是:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

对于 S' 系，质点的速度分量是

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

把洛伦兹变换式写成微分形式可得

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - u\,t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \dfrac{u}{c^2}x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx' = \gamma(dx - u\,dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \dfrac{u}{c^2}dx) \end{cases}$$

于是有

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\dfrac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\dfrac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\frac{\frac{dz}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

相对论速度变换

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \\ v'_z = \dfrac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} \end{cases}$$

相对论速度逆变换

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + \dfrac{uv'_x}{c^2}} \\ v_y = \dfrac{v'_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \dfrac{uv'_x}{c^2}} \\ v_z = \dfrac{v'_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \dfrac{uv'_x}{c^2}} \end{cases}$$

在低速情况 $u << c$，略掉上式中含u/c的项，它就过渡为伽利略变换中的速度合成律。

●若物体相对一个参考系的运动速率小于c，即 $v_x^2+v_y^2+v_z^2<c^2$
则相对于任意参考系，它的速率都小于c。

$$v_x'^2+v_y'^2+v_z'^2=\frac{(v_x-u)^2+\left(v_y^2+v_z^2\right)\left(1-u^2/c^2\right)}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)c^2-2uv_xc^2+u^2c^2-\left(v_y^2+v_z^2\right)u^2}{\left(c^2-uv_x\right)^2}c^2$$

$$=\frac{v^2c^2-2uv_xc^2+u^2c^2-\left(v^2-v_x^2\right)u^2}{\left(c^2-uv_x\right)^2}c^2=\frac{\left(c^4-2uv_xc^2+u^2v_x^2\right)+\left(v^2c^2-c^4+u^2c^2-u^2v^2\right)}{\left(c^2-uv_x\right)^2}c^2$$

$$=\frac{\left(c^2-uv_x\right)^2-\left(c^2-u^2\right)\left(c^2-v^2\right)}{\left(c^2-uv_x\right)^2}c^2\quad=c^2-\frac{\left(c^2-u^2\right)\left(c^2-v^2\right)c^2}{\left(c^2-uv_x\right)^2}\quad<c^2$$

如果 $v_x^2+v_y^2+v_z^2=c^2 \Rightarrow v_x'^2+v_y'^2+v_z'^2=c^2$

在任何参考系中光速不变

例题5：飞船 A，B相对于地面分别以 $0.6\,c$ 和 $0.8\,c$ 的速度相向而行，试求

(1) 飞船 A 上测得地球的速度；

(2) 飞船 A 上测得飞船 B 的速度；

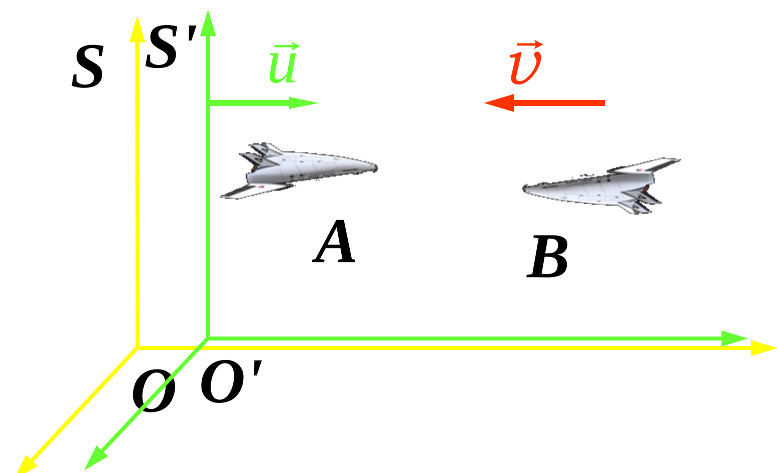
(3) 地面上测得飞船 A 和飞船 B 的相对速度。

解：(1) 根据运动的相对性，飞船A上测得地球的速度为：$-0.6c$

（2）设地面为S系，飞船A为 S' 系，S'系相对于S 系的速度为 $u=0.6\,c$。依题意飞船B 在S系中的速度$v_x=-0.8\,c$，由洛仑兹速度变换，S'系(飞船A)测得飞船B的速度为

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2}$$

$$= \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + 0.8 \times 0.6c / c^2} = -0.94c$$



(3）地面上测得飞船 A 和飞船 B 的相对速度为

$$0.6c + 0.8c = 1.4c$$

在相对论中，物质的运动速度不会超过真空中的光速 c，是指某观察者看到的所有物体相对于它的速度不会超过 c。 在地面上观测飞船 A 和飞船 B 的相对速度是地面看到的其它两物体的相对速度，它不是某一物体对地面的速度，因此不受极限速度的限制。

2. 加速度变换

在参考系S'中，加速度定义为： $a'_x = \dfrac{dv'_x}{dt'}$，$a'_y = \dfrac{dv'_y}{dt'}$，$a'_z = \dfrac{dv'_z}{dt'}$

对相对论速度变换公式微分，得

$$dv'_x = \frac{dv_x}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}} + \frac{v_x - u}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2}\frac{udv_x}{c^2} = \frac{1-\dfrac{u^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2} dv_x$$

$$dv'_y = \frac{dv_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}} + \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2}\frac{udv_x}{c^2}$$

$$dv'_z = \frac{dv_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}} + \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2}\frac{udv_x}{c^2}$$

考虑到 $$dt' = \frac{dt - \frac{u\,dx}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1-\frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}dt$$ 可得

相对论加速度变换

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^3} a_x \\ a'_y = \dfrac{1-\dfrac{u^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2} a_y + \dfrac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\dfrac{uv_y}{c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^3} a_x \\ a'_z = \dfrac{1-\dfrac{u^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2} a_z + \dfrac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\dfrac{uv_z}{c^2}}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^3} a_x \end{cases}$$

相对论加速度逆变换

$$
\begin{cases}
a_x = \dfrac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\dfrac{uv'_x}{c^2}\right)^3} a'_x \\[2em]
a_y = \dfrac{1-\dfrac{u^2}{c^2}}{\left(1+\dfrac{uv'_x}{c^2}\right)^2} a'_y - \dfrac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\dfrac{uv'_y}{c^2}}{\left(1+\dfrac{uv'_x}{c^2}\right)^3} a'_x \\[2em]
a_z = \dfrac{1-\dfrac{u^2}{c^2}}{\left(1+\dfrac{uv'_x}{c^2}\right)^2} a'_z - \dfrac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\dfrac{uv'_z}{c^2}}{\left(1+\dfrac{uv'_x}{c^2}\right)^3} a'_x
\end{cases}
$$

加速度变换的三个特征：

①在相对论中，加速度不是不变量 $\vec{a} \neq \vec{a}'$

②加速度的分量之间存在交叉变换关系，变换公式冗长而复杂

③加速度的变换与速度有关

因此，经典力学中牛顿第二定律需要修正。

§11.5 狭义相对论力学

在相对论中，动力学的一系列物理概念和规律都面临着重新定义的问题。重新定义新物理量的原则是：

①满足爱因斯坦相对性原理：粒子或粒子系统的动力学方程必须在洛伦兹变换下形式不变。

②对应原则的限制：即 $v << c$ 时，新定义的物理量必须趋于经典物理学中对应的物理量；

③尽量保持基本守恒定律继续成立。

1. 相对论的质量和动量

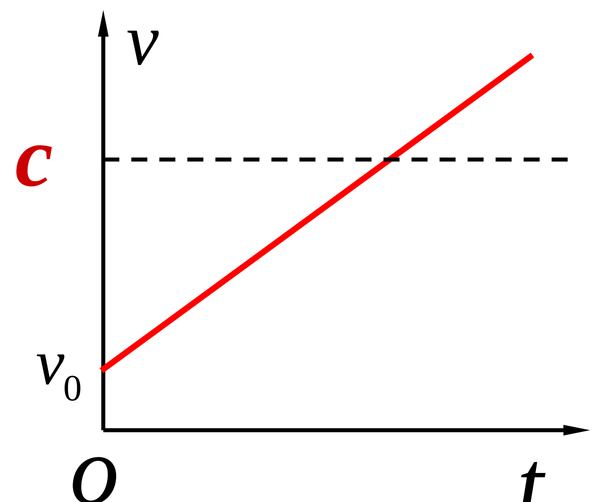
牛顿定律与光速极限的矛盾！

由牛顿第二定律

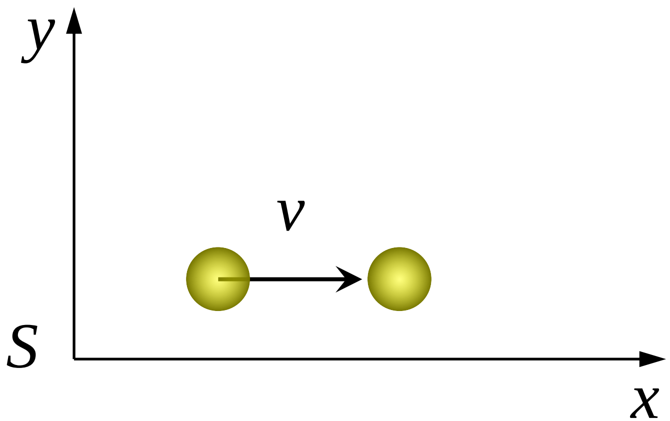
$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

若质量与运动无关，力为恒力，则

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

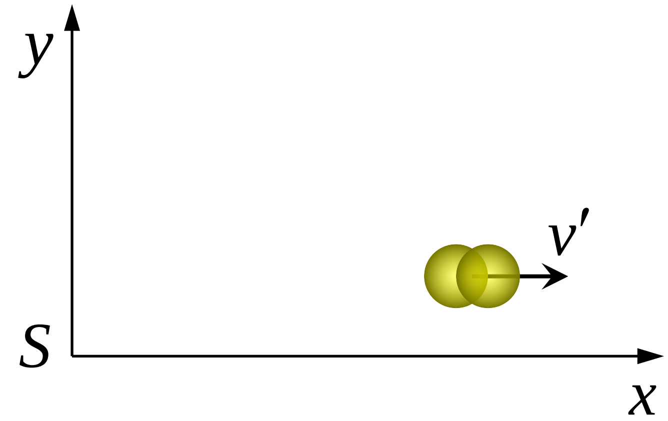


●动质量公式



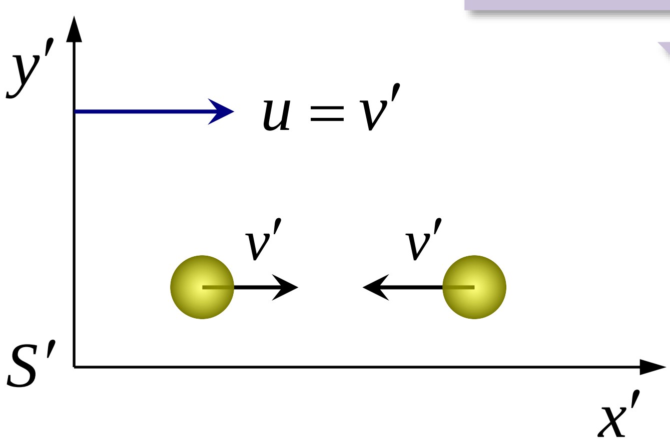
碰前

S系

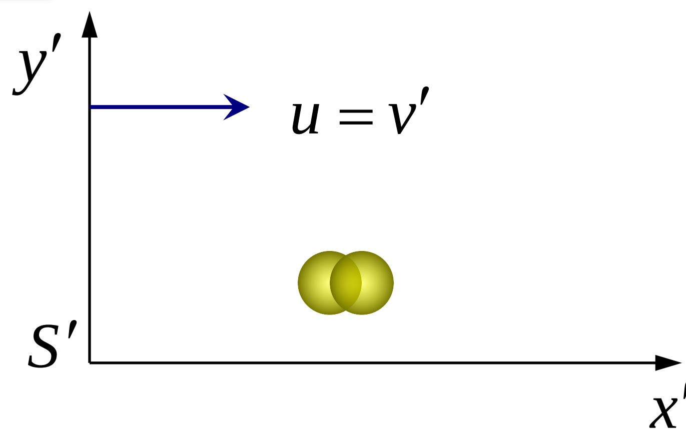


碰后

S'系相对S系以匀速v'向右运动



S'系



S'系：两个相同的小球以等速v'相向运动，碰后静止

在S系中，小球1和2碰撞前的速度分别为

$$v_1 = v = \frac{v' + v'}{1 + \frac{v'}{c^2} v'} = \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \qquad v_2 = \frac{-v' + v'}{1 + \frac{v'}{c^2} v'} = 0$$

两球碰后的速度 $\frac{0 + v'}{1 + \frac{v'}{c^2} 0} = v'$

根据动量守恒和质量守恒 $\begin{cases} mv = Mv' \\ m + m_0 = M \end{cases} \Rightarrow m = m_0 \frac{v'}{v - v'}$

从v_1速度变换式中解出v'，略去大于光速的解，即得

$$v' = \frac{c^2}{v}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right] \Rightarrow v' = \frac{c^2}{v}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right]$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

物体对观测者有相对速度**v**时测出的质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

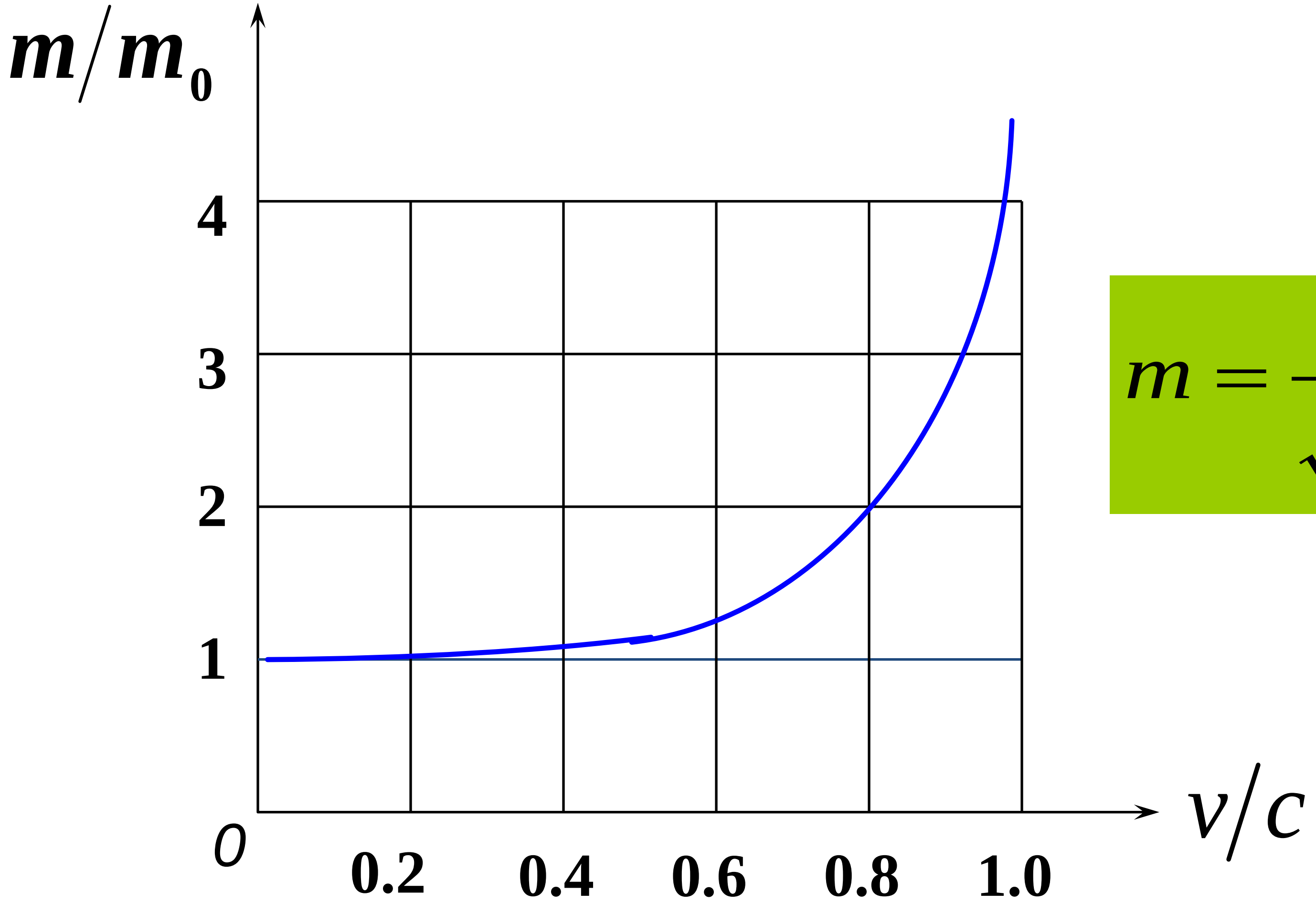
物体在相对静止的惯性系中测出的质量，或称静止质量

①当$v \ll c$时： $m(v) \rightarrow m_0$(静止质量)

②当$v \rightarrow c$ 时， $m(v) \rightarrow \infty$ ⟹ $a \rightarrow 0$

——物体运动速度不能大于c

即：光速是不可逾越的



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

在相对论中，定义动量$\vec{p}$为：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

2. 相对论质点动力学方程

质点的相对论动量：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$$

相对论动力学方程：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}}$$

讨论：

①作用力不仅改变速度，同时还改变质量，恒力作用下，不会有恒定的加速度。

②低速时质量可视为恒量，则动力学方程过渡至牛顿第二定律。

3. 相对论动能以及质能关系

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = dE_k$$

$$E_k = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{v}} \vec{v}\cdot d(m\vec{v})$$

而 $\vec{v}\cdot d(m\vec{v}) = m\vec{v}\cdot d\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}dm = mvdv + v^2dm$

由 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\Rightarrow$ $dm = \dfrac{m_0 vdv/c^2}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}$

于是可得

$$E_k = \int_0^v \frac{m_0 vdv}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = \int_{m_0}^{m} c^2dm = (m-m_0)c^2$$

质量变化和能量变化相联系，质量大小决定了能量大小。质量与能量相关，这是极其重要的结论。

故相对论动能等于因运动而引起质量增加量乘以光速的平方。

●非相对论极限：

$$v << c\text{时},\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots \approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)m_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_k = \frac{1}{2}m_0 v^2}$$

牛顿力学中定义的动能

$v \to c$, $E_k \to \infty$,说明将一个静质量不等于零的粒子加速到光速需做无穷大的功。或者说实物粒子速度有一极限速度c。

4. 相对论质能关系

爱因斯坦将动能表达式中出现 m_0c^2 的这一恒量，解释为粒子因静止质量而具有的能量，称为静能 E_0。而称 mc^2 为质点的总能量E。由此即得著名的质能关系

$$\boxed{E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E_k + E_0}$$

爱因斯坦指出，如果使粒子系统的静质量减少 Δm_0，它就能释放出数量为 $(\Delta m_0)c^2$ 的巨大能量。

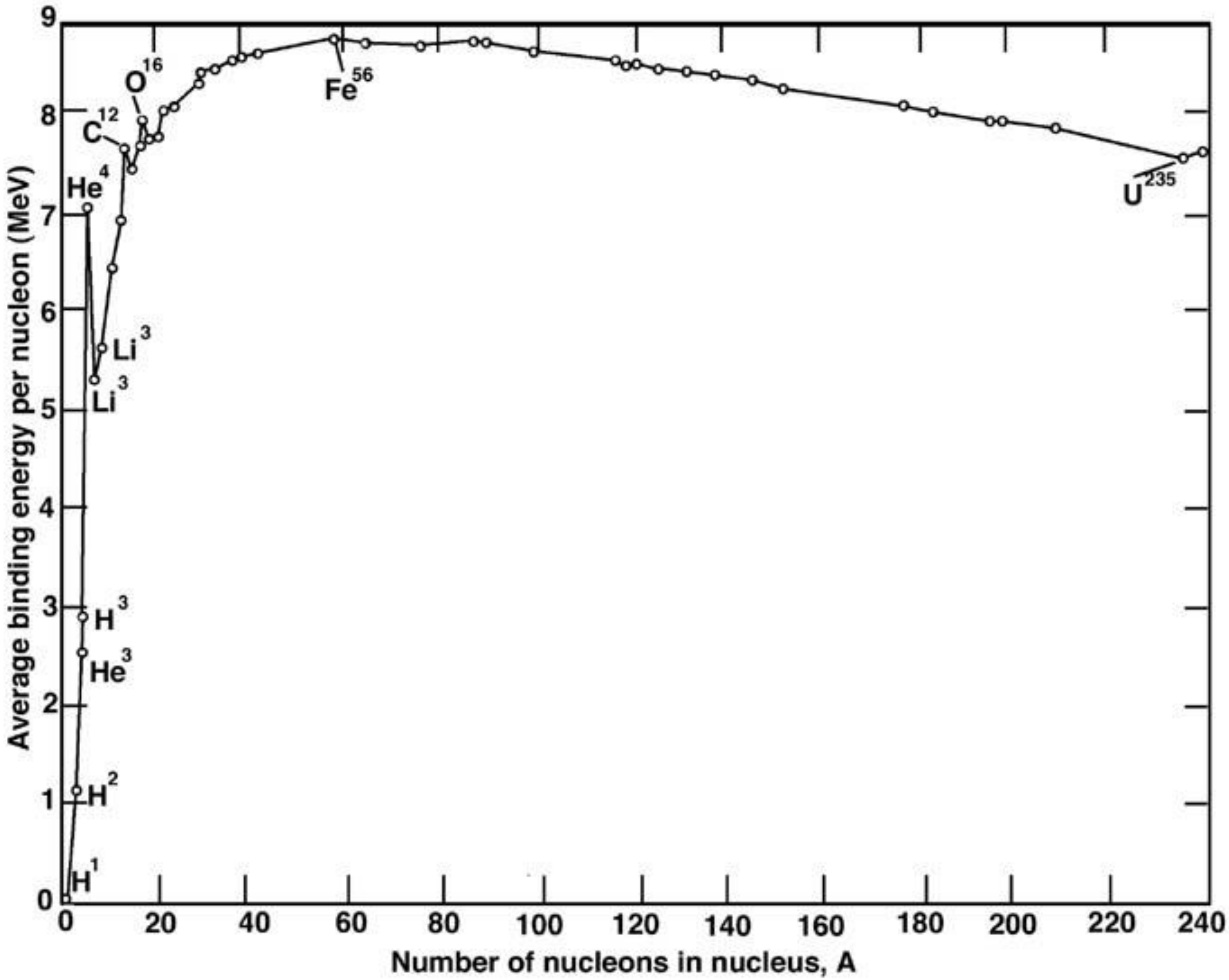
实验表明，原子核的静质量小于组成它的所有核子的静质量之和，其差额称为原子核的质量亏损B，即

$$B = \sum_i m_{i0} - m_0$$

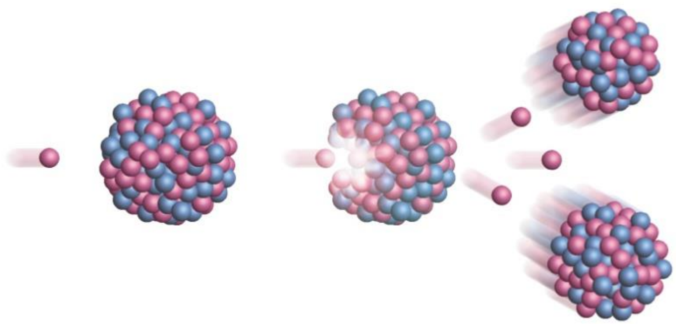
与此相应的静能 Bc^2称为原子核的结合能，即

$$E_B = Bc^2 = \left(\sum_i m_{i0} - m_0\right)c^2$$

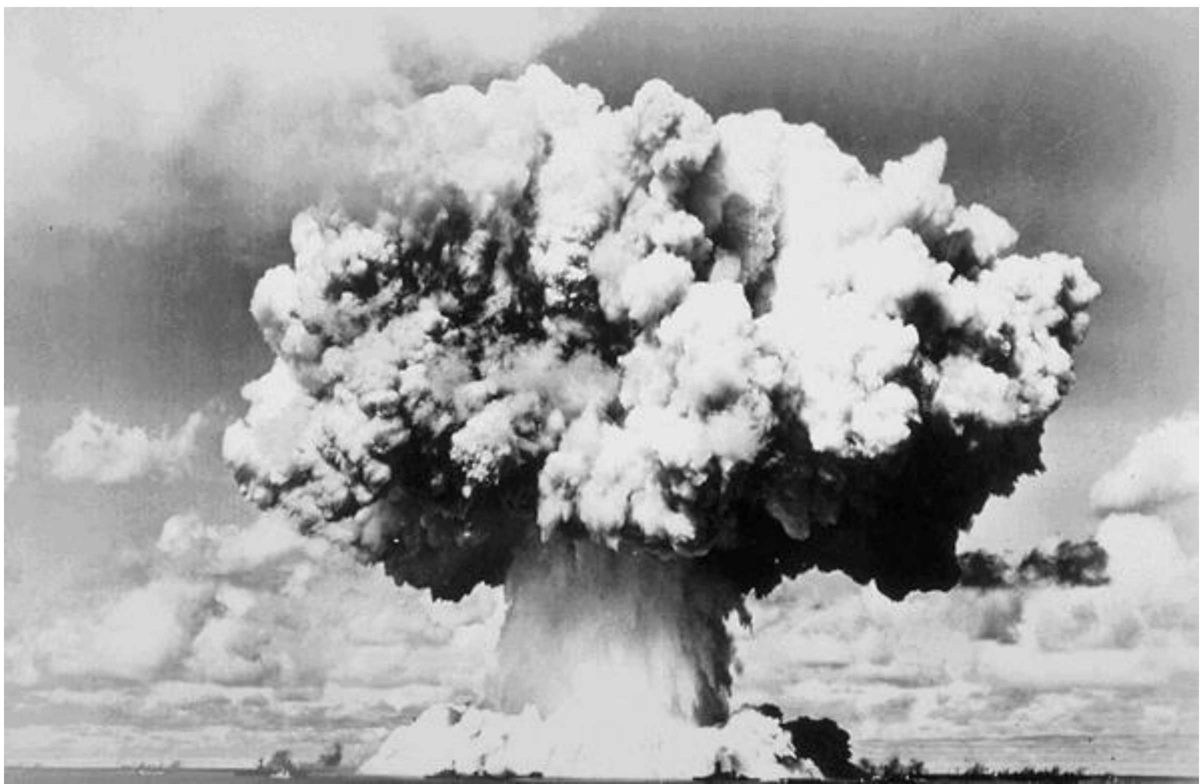
早在20世纪20年代，人们用质谱仪测定了各种核同位素的质量。



●重核裂变: $n+{}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{64}Xe+{}^{94}_{38}Sr+2n+180MeV$



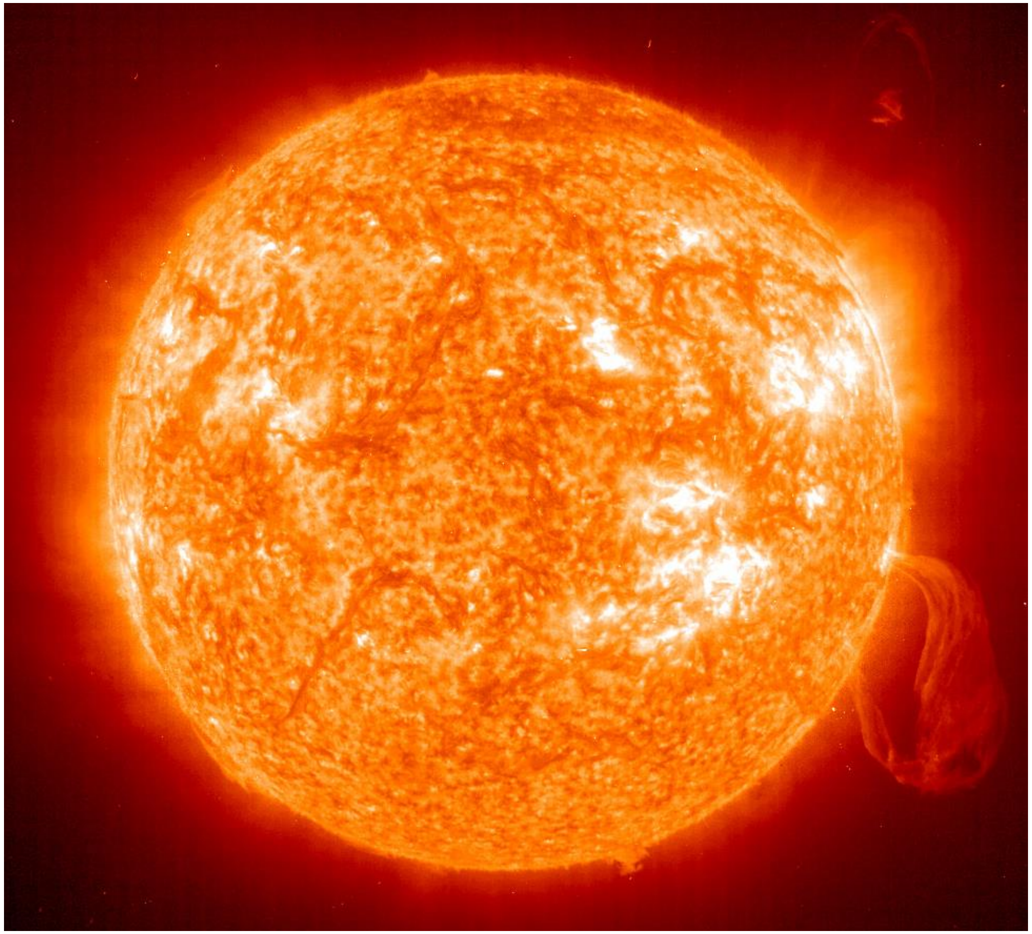
1kg的^{235}U核裂变，释放能量8x10^{13}J，相当于燃烧27000吨优质煤。



1942年世界上第一个核反应堆运行成功。由于战争时期保密，不允许拍照，这是一张油画。图中右上方是由三位青年物理学家组成的"敢死队"，他们手握大罐，万一发生意外，随时准备将吸收中子的镉溶液注入反应堆。站在下面的那位科学家正按照费米的指令，一点一点地往外抽最后一根镉棒，将链式反应启动。

●轻核聚变 $${}_{1}^{2}\mathrm{H}+{}_{1}^{3}\mathrm{H}\rightarrow {}_{2}^{4}\mathrm{He}+\mathrm{n}+17.6\mathrm{MeV}$$

聚变反应是恒星发射巨大能量的来源

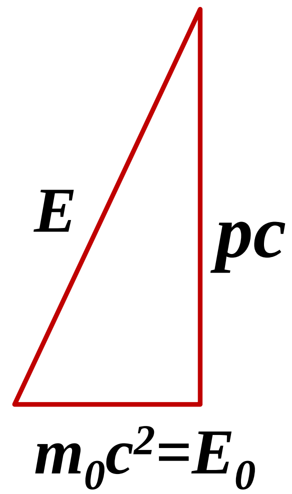


SOHO's Extreme ultraviolet Imaging Telescope.

5. 能量动量关系

在狭义相对论中质量为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Longrightarrow m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=m_0$$



两边平方得并乘以c^4得

$$\boxed{E^2=p^2c^2+E_0^2}$$

对于静止质量为零的粒子 $m_0=0$

$$E=pc=mvc \Longrightarrow v=c$$

说明：一个静质量为零的粒子，在任一惯性系中只能以光速运动，永远不会停止，如光子、中微子等。

【思考题】①求动量和能量在不同惯性系之间的洛伦兹变换；②证明$E^2-p^2c^2$是洛伦兹变换的不变量。

	相对论	非相对论
质量	$m = m_0 \big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$	m_0
动量	$\vec{p} = m\vec{v} = m_0\vec{v} \big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$	$\vec{p} = m_0\vec{v}$
基本方程	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + \vec{v}\dfrac{dm}{dt}$	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m_0\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m_0\vec{a}$
静能	$E_0 = m_0c^2$	
动能	$E_k = mc^2 - m_0c^2$	$E_k = \dfrac{1}{2}m_0v^2$
总能（质能关系）	$E = mc^2$	
动量与能量的关系	$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$	$p^2 = 2m_0E_k$

6. 动量和能量的相对论变换

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{v} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

由时空间隔的定义：

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

所以有

$$\begin{cases} p_x = m_0\dfrac{dt}{d\tau}v_x = m_0\dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dx}{dt} = m_0\dfrac{dx}{d\tau} \\ p_y = m_0\dfrac{dt}{d\tau}v_y = m_0\dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dy}{dt} = m_0\dfrac{dy}{d\tau} \\ p_z = m_0\dfrac{dt}{d\tau}v_z = m_0\dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dz}{dt} = m_0\dfrac{dz}{d\tau} \\ E = m_0c^2\dfrac{dt}{d\tau} \end{cases}$$

因此 $(p_x, p_y, p_z, E/c^2)$ 的变换性质和时空坐标 (x, y, z, t) 的变换相同。

于是动量和能量的洛伦兹变换式为

$$\begin{cases} p_x' = \dfrac{p_x - \dfrac{uE}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ p_y' = p_y \\ p_z' = p_z \\ E' = \dfrac{E - up_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

在洛伦兹变换中，动量和能量是相联系的。

逆变换为

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{p_x' + \dfrac{uE'}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ p_y = p_y' \\ p_z = p_z' \\ E = \dfrac{E' + up_x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{cases}$$

容易验证

$$E'^2 - p'^2c^2 = E'^2 - p_x'^2c^2 - p_y'^2c^2 - p_z'^2c^2$$

$$= \left(\frac{E-up_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{p_x - \dfrac{uE}{c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)^2 c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2$$

$$= \frac{(1-u^2/c^2)E^2 + (u^2-c^2)p_x^2}{1-u^2/c^2} - p_y^2c^2 - p_z^2c^2$$

$$= E^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2$$

$$= E^2 - p^2c^2$$

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2}$$

除时空间隔的另外一个相对论不变量！

7. 动量、能量守恒和不变量的应用

●动量、能量守恒

相对论动力学方程： $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$

若粒子受合外力，即 $\vec{F}=0$，则该粒子的动量 $\vec{p}$ 不再随时间变化，由能动量关系 $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$ ，可知体系的总能量也不会改变。

实验表明：

对于不受外界影响的多粒子体系所经历的过程(包括不能用力的概念描述的过程，例如衰变、裂变、产生新粒子等)，体系的总动量和总能量守恒。

相对论动力学的研究对象主要是不受外界影响的粒子体系。动力学方程通常表现为体系的能量守恒和动量守恒的形式。

设反应式为

$$A_1 + A_2 + \cdots \to A_1' + A_2' + \cdots$$

在某一惯性参考系中，体系的总动量和总能量守恒表示成

$$\begin{cases} \vec{p} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \cdots \equiv \vec{p}' \\ E \equiv E_1 + E_2 + \cdots = E_1' + E_2' + \cdots \equiv E' \end{cases}$$

因为体系的动量和能量守恒，所以反应前后体系能动量的不变量相等，即

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2$$

因为不变量与参考系无关，而动量和能量守恒要涉及参考系的变换，所以对于复杂的反应过程，**用不变量要比用能动量守恒更简单。**

● 两体反应的阈值

利用加速器使得A_1、A_2两粒子碰撞，以产生某个或某些新粒子A_3:

$$A_1 + A_2 \to A_1 + A_2 + A_3$$

这是相当典型的一类粒子反应。在所有产物（A_1，A_2和A_3）都相对静止的情况下所需能量最少，这能量称为反应的阈值（为什么？）。此时与产物相对静止的参考系显然是质心系。

（1） 将一种粒子A_1加速到很高的能量去撞击静止的靶粒子 A_2

反应前（实验室系）：

$$P_1 = (0, 0, p_1, E_1)$$

$$P_2 = (0, 0, 0, m_{20}c^2)$$

反应前（实验室系）：

$$P_1=(0,0,p_1,E_1)$$
$$P_2=(0,0,0,m_{20}c^2)$$

$$P=P_1+P_2$$
$$=(0,0,p_1,E_1+m_{20}c^2)$$

反应后（质心系）：

$$P_1'=(0,0,0,m_{10}c^2)$$
$$P_2'=(0,0,0,m_{20}c^2)$$
$$P_3'=(0,0,0,m_{30}c^2)$$

$$P'=P_1'+P_2'+P_3'$$
$$=(0,0,0,(m_{10}+m_{20}+m_{30})c^2)$$

不变量：
$$\begin{cases}\left(E_1+m_{20}c^2\right)^2-p_1^2c^2=(m_{10}c^2+m_{20}c^2+m_{30}c^2)^2\\ \quad\text{（反应前）}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{（反应后）}\\ E_1^2=p_1^2c^2+m_{10}^2c^4\end{cases}$$

所以靶静止，为产生新粒子加速粒子的最小能量为

$$\boxed{E_{阈}^{L}=E_1=\frac{\left[2m_{10}m_{20}+2(m_{10}+m_{20})m_{30}+m_{30}^2\right]c^2}{2m_{20}}}$$

（2）对撞情况，假定A_1和A_2是同一种粒子，即$m_{10}=m_{20}\equiv m_0$

反应前（实验室系）：

$$P_1=(\vec{p},E)$$
$$P_2=(-\vec{p},E)$$

$$P=P_1+P_2=(0,0,0,2E)$$

此时实验室系和质心系重合。反应后（质心系）：

$$P_1'=(0,0,0,m_0c^2)$$
$$P_2'=(0,0,0,m_0c^2)$$
$$P_3'=(0,0,0,m_{30}c^2)$$

$$P'=P_1'+P_2'+P_3'=(0,0,0,(2m_0+m_{30})c^2)$$

不变量：$$(2E)^2=(m_0c^2+m_0c^2+m_{30}c^2)^2$$

（反应前）　　　　（反应后）

所以对撞情况下，加速粒子最小能量为

$$E_{阈}^{CM}=2E=(2m_0+m_{30})c^2$$

于是我们可得到实验室系和质心系的阈值能量之比

$$\frac{E_{阈}^{L}}{E_{阈}^{CM}}=\frac{2m_{10}m_{20}+2(m_{10}+m_{20})m_{30}+m_{30}^{2}}{2m_{20}(2m_{0}+m_{30})}$$

在高能情况下，可以产生静止质量很大的新粒子，即 $m_{30}>>m_{10},m_{20}$，于是两阈值比例简化为

$$\frac{E_{阈}^{L}}{E_{阈}^{CM}}\approx\frac{m_{30}}{2m_{0}}>>1$$

例如，对于北京正负电子对撞机

$$\boldsymbol{m}_{0}c^{2}\approx 0.5\,\mathbf{MeV} \qquad 电子$$

$$m_{30}c^{2}\approx 4.4\,\mathbf{GeV} \qquad 新粒子$$

$$m_{30}/m_{0}\approx 8.8\times 10^{3}$$

$$E_{阈}^{CM}=(2m_{0}+m_{30})c^{2}\approx m_{30}c^{2}\approx 4.4\,\mathbf{GeV}$$

如果不采用对撞机的形式，加速器的能量需要有

$$E_{阈}^{L}=\frac{\left(2m_0^2+4m_0m_{30}+m_{30}^2\right)c^2}{2m_0}\approx\frac{m_{30}^2c^2}{2m_0}=\frac{(4.4\mathbf{GeV})^2}{2\times0.5\mathbf{MeV}}\approx1.9\times10^4\mathbf{GeV}$$

才能得到相同多的资用能。现代的加速器基本上均采用对撞形式。

例题6：已知二质点A、B静止质量均为m_0，若质点A静止，质点B以$6m_0c^2$的动能向A运动，碰撞后合成一粒子，若无能量释放。求：合成粒子的静止质量。

解：二粒子的能量分别为

$$E_A = m_0c^2$$

$$E_B = E_{0B} + E_{kB} = m_0c^2 + 6m_0c^2 = 7m_0c^2 \qquad (1)$$

由能量守恒定律求合成后粒子的能量

$$E = E_A + E_B = 8m_0c^2$$

根据相对论质能关系

$$E = Mc^2 \qquad \therefore M = 8m_0$$

由质速关系求粒子的静止质量

$$M_0 = M\sqrt{1-(V/c)^2} = 8m_0\sqrt{1-(V/c)^2}$$

接下来关键问题是求复合粒子的速度*V*=?

由动量守恒定律 $p = p_A + p_B = MV$ (2)

由相对论能量与动量关系

$$E_B^2 = p_B^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (3)$$

由题已知 $p_A = 0$ (4)

联立(1)-(4)四式得：

$$V^2 = \frac{p_B^2}{M^2} = \frac{48 m_0^2 c^2}{64 m_0^2} = \frac{3}{4} c^2$$

$$\boldsymbol{M_0 = 8m_0\sqrt{1-(V/c)^2} = 4m_0}$$

解法二：

二粒子的能量分别为

$$E_A = m_0 c^2$$

$$E_B = E_{0B} + E_{kB} = m_0 c^2 + 6m_0 c^2 = 7m_0 c^2$$

二粒子的动量分别为

$$p_A = 0$$

$$p_B = \sqrt{E_B^2 - m_0^2 c^4} / c = \sqrt{(7m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4} / c = 4\sqrt{3}\, m_0 c$$

由能量守恒定律动量守恒求得合成后粒子的能量和动量分别为

$$E = E_A + E_B = 8m_0 c^2, \quad p = p_A + p_B = 4\sqrt{3}\, m_0 c$$

由相对论能量与动量关系可得

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{E^2 - p^2 c^2} / c^2 = \sqrt{64m_0^2 c^4 - 48m_0^2 c^4} / c^2 = 4m_0$$

例题7: 已知电子的静质量。求：1） 电子的静能；2）从静止开始加速到0.60c的速度需作的功；3） 动量为0.60MeV/c时的能量。

解: 1）电子的静能为

$$E_0 = m_0 c^2 = 5.12\times 10^5\,\mathbf{eV} = 8.199\times 10^{-14}\,\mathbf{J}$$

2）加速到0.60c时电子的能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{8.199\times 10^{-14}}{\sqrt{1-0.60^2}}$$

$$= 1.025\times 10^{-13}\,\mathbf{J}$$

需要做的功为

$$\boldsymbol{W = E - E_0 = 1.025\times 10^{-13} - 8.199\times 10^{-14}}$$

$$\boldsymbol{= 2.05\times 10^{-14}\,\mathrm{J}}$$

3）当 ***p*=0.60MeV/*c***时，其能量为*E*，则有

$$
\begin{aligned}
E^2 &= p^2c^2 + E_0^2 \\
&= \frac{(0.60\mathrm{MeV})^2}{c^2} \times c^2 + (0.512\mathrm{MeV})^2 \\
&= 0.622(\mathrm{MeV})^2
\end{aligned}
$$

所以

E =0. 789MeV=1. 262×10^{-13}J