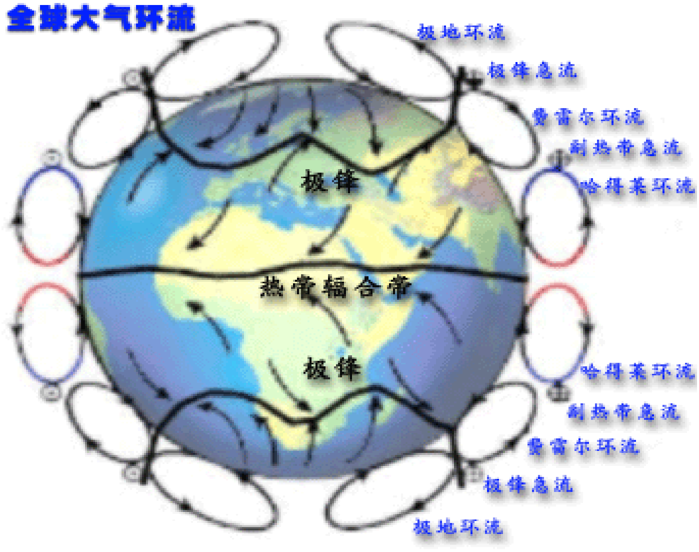

全球大气环流
极地环流
极锋急流
费雷尔环流
副热带急流
哈得莱环流
极锋
热带辐合带
极锋
哈得莱环流
副热带急流
费雷尔环流
极锋急流
极地环流

第十二章　流体力学基础

§12.1 流体的基本性质

流体指能流动的物质，是液体和气体的总称。

流体 { 气体 / 液体

1. 流体的性质

●流动性：流体内部各部分之间容易发生相对运动，没有固定的形状。(流动性是流体最基本的特性，是流体区别于固体的主要特征。)

●粘性：实际流体内各部分之间有相对运动时，各部分之间存在阻碍相对滑动的内摩擦力作用的性质。(粘性力：流体流动时内部各部分之间的内摩擦力。多数流体，例如水、空气、酒精等，粘滞力很小，即粘滞性很小。)

●可压缩性：实际流体(特别是气体)都是可压缩的。

2、流体的分类

（1）根据流体受压体积缩小的性质，流体可分为：

可压缩流体：流体密度随压强变化不能忽略的流体

不可压缩流体：流体密度随压强变化很小，流体的密度可视为常数的流体。

- 注意：严格来说，不存在完全不可压缩的流体。一般情况下的液体可视为不可压缩流体。对于气体，当所受压强变化相对较小时，可视为不可压缩流体；当所受压强较大时，应作为可压缩流体。

（2）根据流体是否具有粘性，可分为：

粘性流体：指具有粘度的流体，在运动时具有抵抗剪切变形的能力，即存在摩擦力，粘度。

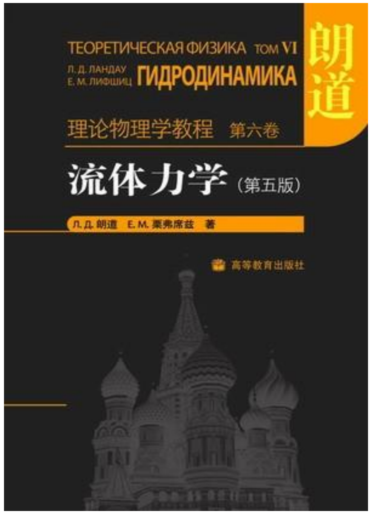
理想流体：忽略粘性的流体，运动时不能抵抗剪切变形。

✓ 有些书称不可压缩、无粘滞性的流体为理想流体。

流体动力学研究流体(液体和气体)的运动.因为流体动力学中考察的现象是宏观的,所以把流体看作连续介质.这意味着对流体中的任何小体元,总是假定它大得仍然包含非常大量的分子.因此,当我们谈到无限小体元时,总是指“物理上”的无限小,也就是说,它与所讨论的物体体积相比很小,而与分子间距离相比却很大.①

——L.D.朗道(L.D.Landau,1908—1968),

栗弗席茨(E.M.Lifshitz)



虽然流体的真实结构是由分子构成，分子间有一定的孔隙，但流体力学研究的并不是个别分子微观的运动，而是研究大量分子组成的宏观流体在外力的作用下所引起的机械运动。

§12.2 流体静力学

流体静力学：流体静力学是流体质元之间无相对运动时的理论。

流体质元的受力

- 体积力：作用在流体所有质点上的力，如重力，电磁力和惯性力。
- 表面力：只作用在所分出的流体侧面上的力，如流体压力，内摩擦力。

1. 应力和压强

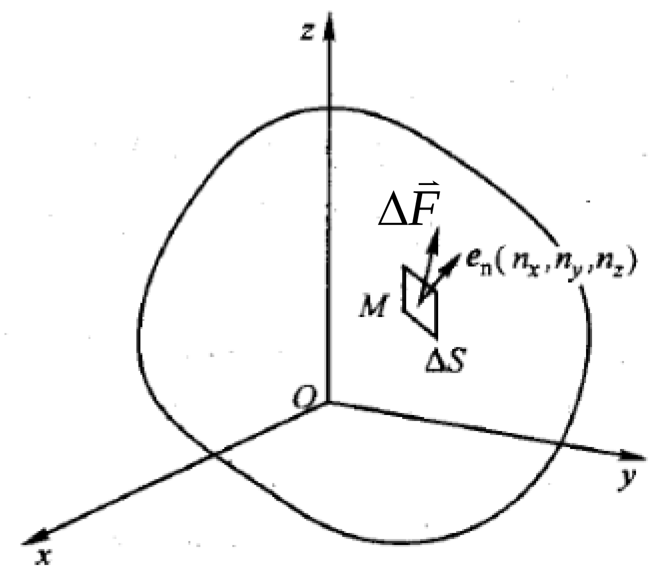
在流体内部某点处取一假想面元ΔS，在ΔS两侧的两侧流体通过ΔS发生相互作用：

应力：$\vec{T}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta\vec{F}}{\Delta S}$

应力不仅与位置有关，还与所取截面的方向有关。

法向应力（正应力）：$T_{nn}=\dfrac{\Delta F_n}{\Delta S}$

切应力：$T_{n\tau}=\dfrac{\Delta F_\tau}{\Delta S}$



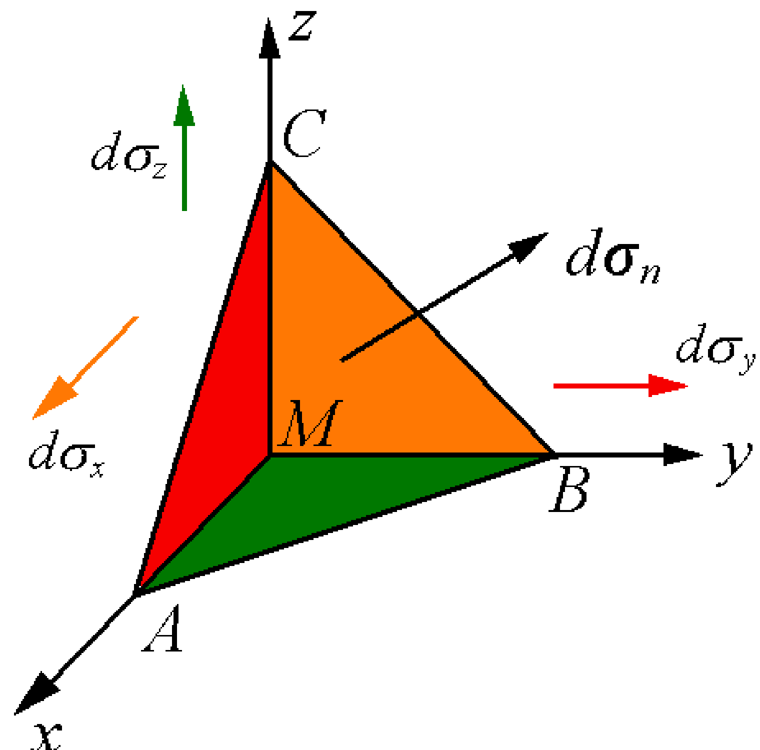
- 过一点可以做无穷多个截面。可以证明，只要知道了过一点的三个互相正交的截面（例如法线分别为**x**正方向、**y**正方向和**z**正方向的三个截面）上应力的**9**个分量，就可以求出对于过该点任一截面的应力的三个分量

截面法线：$\vec{e}_{\mathrm{n}} = \alpha\,\vec{e}_x + \beta\,\vec{e}_y + \gamma\,\vec{e}_z$

应力：$\vec{T}_{\mathrm{n}} = \alpha\,\vec{T}_x + \beta\,\vec{T}_y + \gamma\,\vec{T}_z$

分量式：

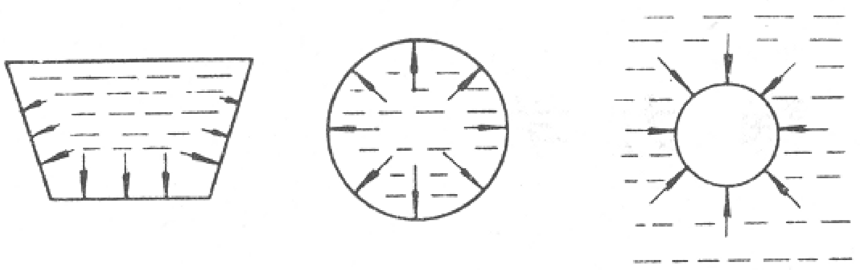
$$\begin{cases} T_{\mathrm{nx}} = \alpha\,T_{xx} + \beta\,T_{yx} + \gamma\,T_{zx} \\ T_{\mathrm{ny}} = \alpha\,T_{xy} + \beta\,T_{yy} + \gamma\,T_{zy} \\ T_{nz} = \alpha\,T_{xz} + \beta\,T_{yz} + \gamma\,T_{zz} \end{cases}$$



九个应力的集合，构成一个二阶张量，称为**应力张量**

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

- 流体与一般固体不同，实验证明，流体中不存在静摩擦力，只可能有动摩擦力（即粘滞力）。因此在静止流体中不可能存在切向力，只可能存在正应力。因此，流体静力学的第一个结论是：应力总是垂直于流体内任何一个面(正应力)。



- 流体中任意取一个假想的面，对于静止流体，此面受有来自两边的法向力，且相等。每单位面积受到的法向力称为压强。利用切向力为零的事实，可以证明流体静力学的第二个结论：②静止流体中某点处的压强对于一切方向都相同。

压强：$p=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta S}=\dfrac{dF}{dS}$

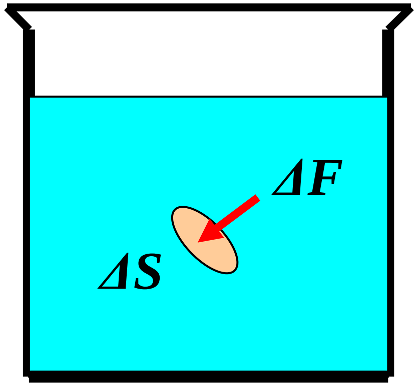
压力：$dF=pdS$

压强单位：$1\,\text{Pa}=1\,\text{N/m}^2$

$1\ \text{bar}=10^5\ \text{Pa}$,

$1\ \text{mmHg}=133.32\ \text{Pa}$,

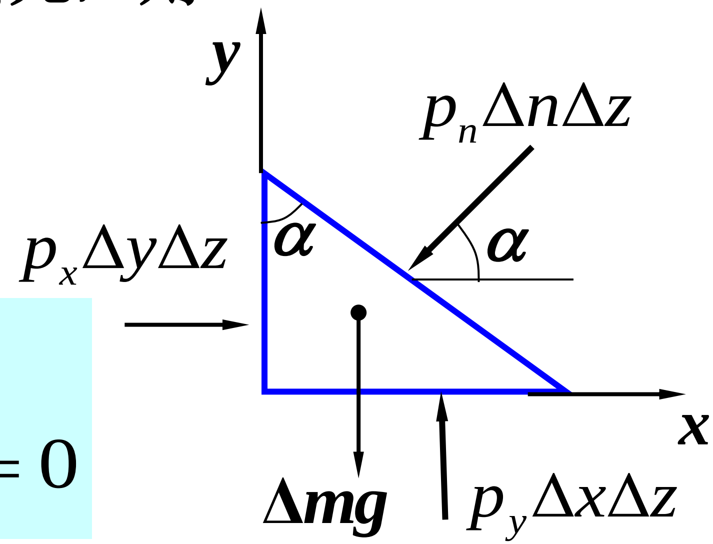
$1\ \text{atm}=760\ \text{mmHg}=1.01325\times10^5\ \text{Pa}=1.013\ \text{bar}$



➢ 证明静止流体中某点处的压强对于一切方向都相同

在流体内某点取体元如右下图所示的质元，则

$$\Delta m = \frac{1}{2}\rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

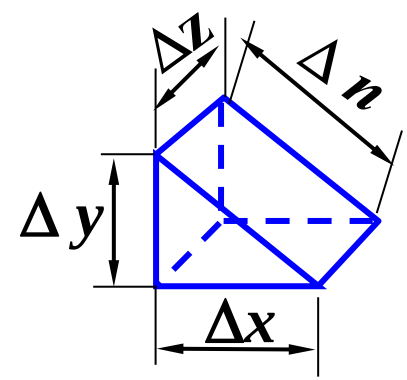


由流体平衡方程

$$\begin{cases} p_x \Delta y \Delta z - p_n \Delta n \Delta z \cos\alpha = 0 \\ p_y \Delta x \Delta z - p_n \Delta n \Delta z \sin\alpha - \Delta m g = 0 \end{cases}$$

此外有几何关系

$$\Delta n \sin\alpha = \Delta x, \quad \Delta n \cos\alpha = \Delta y$$



联立得

$$p_x = p_n, \quad p_y = p_n + \frac{1}{2}\rho g \Delta y$$

令 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta n \to 0$，则可得

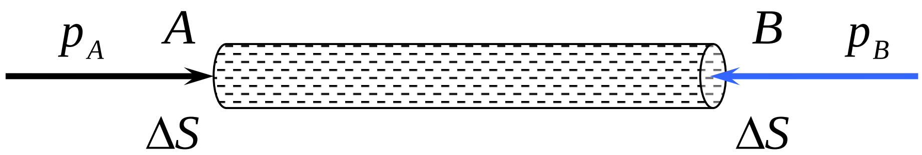
$$\boldsymbol{p_x = p_n = p_y}$$

过静止流体一点各不同方位无穷小面元上的压强大小都相等。

2. 重力场中静止流体中的压强分布

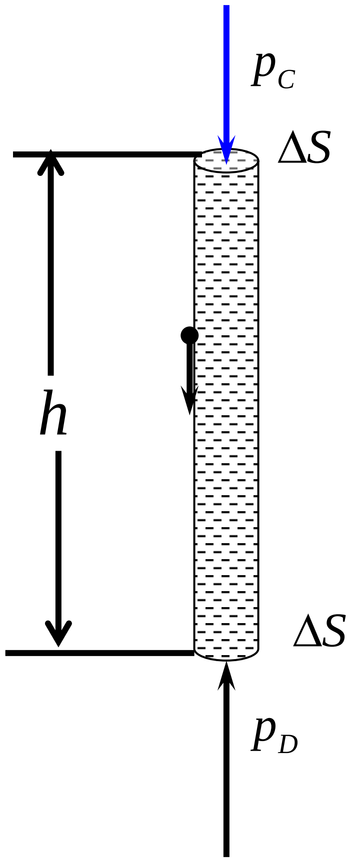
这里我们假设流体不可压缩，即密度不变。

①等高的地方压强相等



在水平方向利用流体平衡方程

$$p_A \Delta S = p_B \Delta S \Rightarrow p_A = p_B$$



②高度相差 ***h*** 的两点间压强差为 ρgh

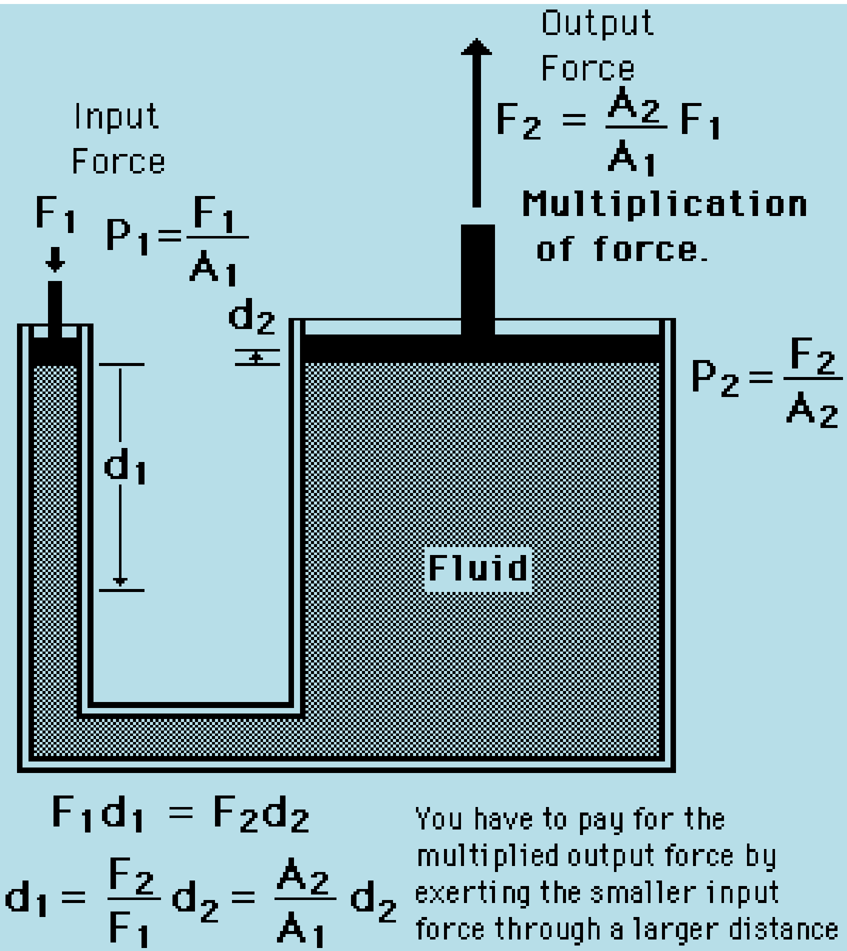
由竖直方向利用流体平衡方程

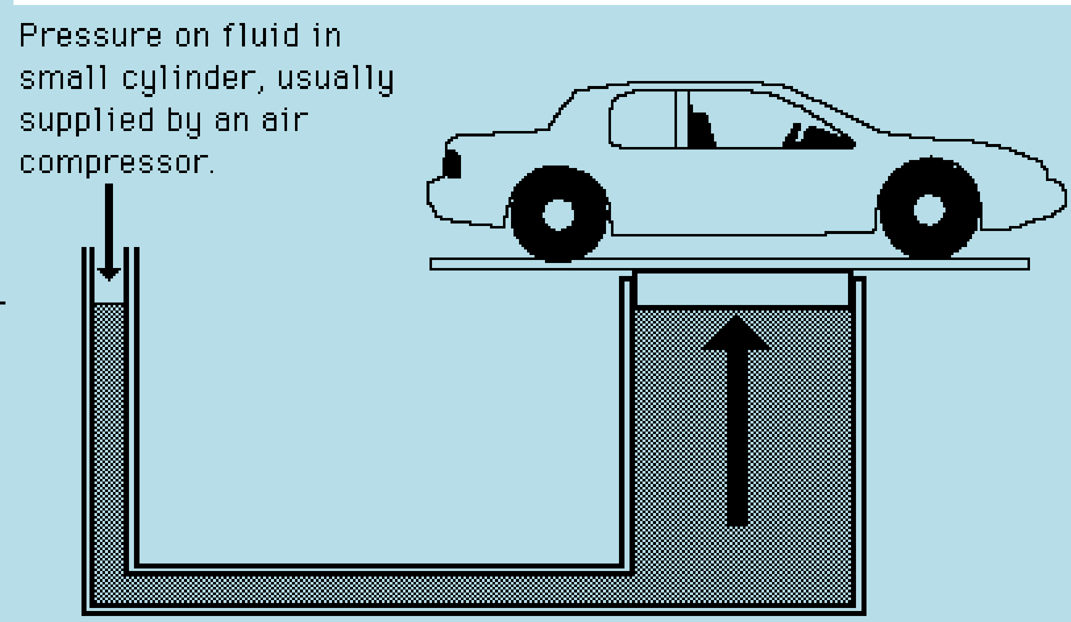
$$p_C \Delta S + \rho gh \Delta S = p_D \Delta S \Rightarrow p_C + \rho gh = p_D$$

3. 帕斯卡原理

帕斯卡原理：作用在密闭容器中流体上的压强等值地到流体各处和器壁上去。

说明：因为静止流体中两点间的压强差仅决定于高度差。当某处导致流体中每一点的压强都增大同



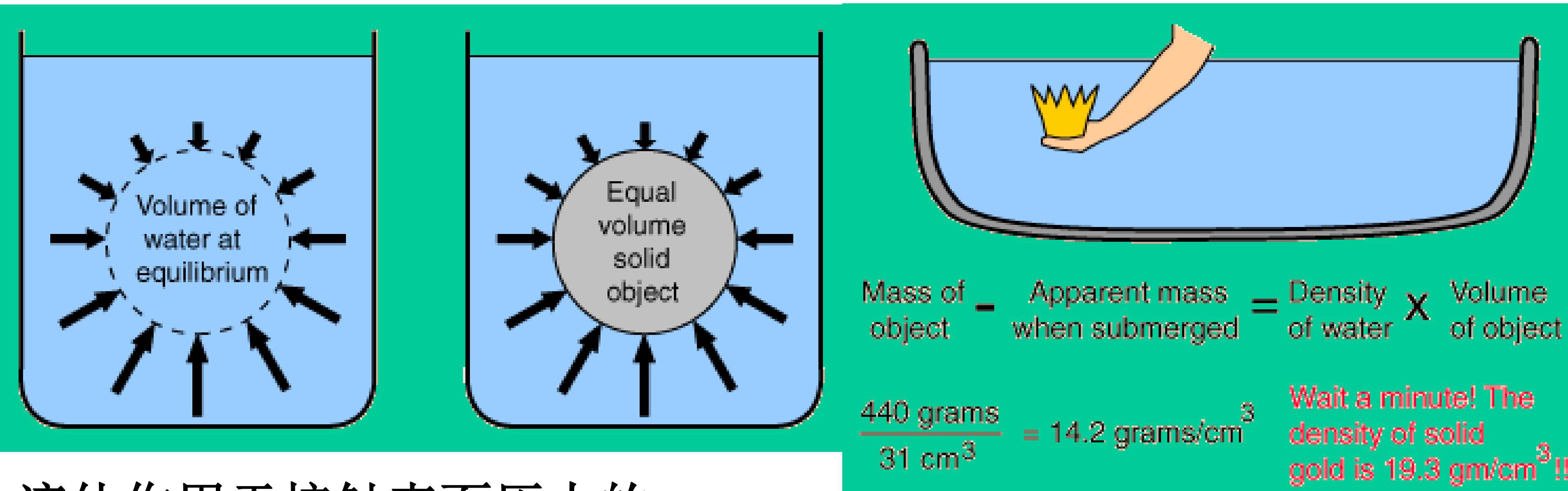


各种油压和水压机械

都是根据帕斯卡原理制成的。

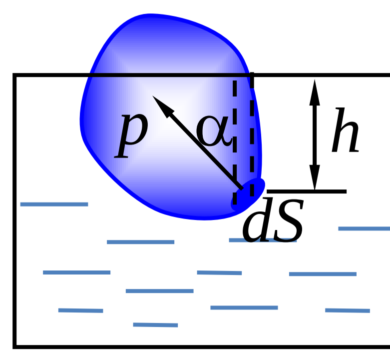
4. 阿基米德原理

阿基米德原理：当一物体全部或部分浸没于流体中时，它所受浮力等于该物体排开的流体的重量。



流体作用于接触表面压力的合力为物体所受的浮力

$$F=\int_S \rho g h\cos\alpha \mathrm{d}S=\int_V \rho g \mathrm{d}V=\rho g V$$



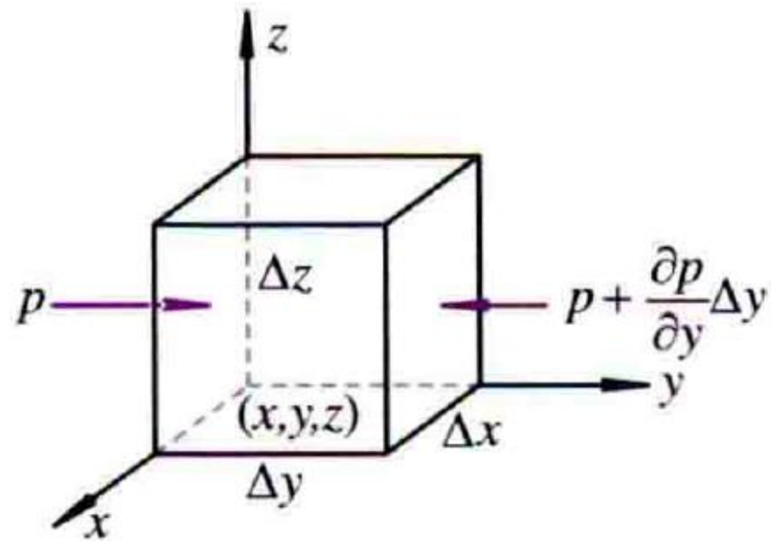
积分遍及物体和流体的接触面，$\cos\alpha dS$等于面元在水平面上的投影。$h\cos\alpha\ dS$等于dS上方以$\cos\alpha\ dS$为底的柱体的体积dV。

5. 流体静力学方程

在压强逐点变化的静止流体中，考察一个小立方体。当流体处于静止状态时，此小立方体所受的面力和体力之和必为零，即平衡条件

$$\sum \vec{F}_{\text{面}} + \sum \vec{F}_{\text{体}} = 0$$

①先计算面力。如图所示，y方向的合压力为



$$p\Delta x\Delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z = -\frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

x和z方向有相类似的表达式。小立方体受到的压力之和为

$$\sum \vec{F}_{\text{面}} = -\Delta x\Delta y\Delta z\left(\vec{e}_x\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\nabla p\,(\Delta x\Delta y\Delta z)$$

其中梯度算符为 $\nabla \equiv \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$

②再计算体力。设 $\vec{f}$ 表示作用于单位质量上的体力，**ρ**为流体密度，则小立方体受到的体力和为，

$$\sum \vec{F}_{体} = \vec{f}\rho\Delta x\Delta y\Delta z$$

例如重力：$\vec{f} = -g\vec{e}_z$

所以平衡条件可以表达成

$$-\nabla p\,(\Delta x\Delta y\Delta z) + \vec{f}\rho\Delta x\Delta y\Delta z = 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla p = \rho\vec{f}$$

称为流体静力学方程。写成分量形式为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x,\quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y,\quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

当流体处在重力场中时，把 $\vec{f} = -g\vec{e}_z$ 代入上式可得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

所以压强**p**仅是**z**的函数，对于不可压缩流体，**ρ**=常数，可解得压强分布

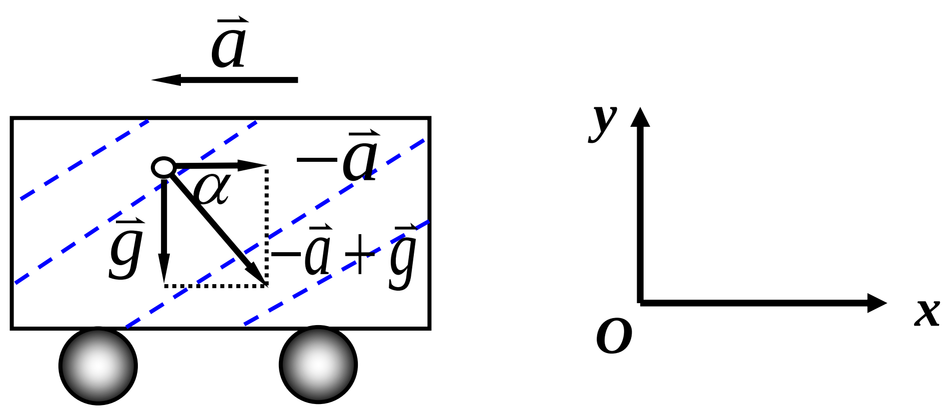
$$p = p_0 - \rho g z$$

p_0为z=0处的压强

➢ 相对于非惯性系静止的流体

相对于非惯性系静止的流体，体积力还应计入惯性力

$$\vec{f} = -g\vec{e}_y + a\vec{e}_x$$



利用流体静力学方程可得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

所以有

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = \rho a dx - \rho g dy = d(\rho a x - \rho g y)$$

可解得压强分布是

$$p = p_0 + \rho a x - \rho g y$$

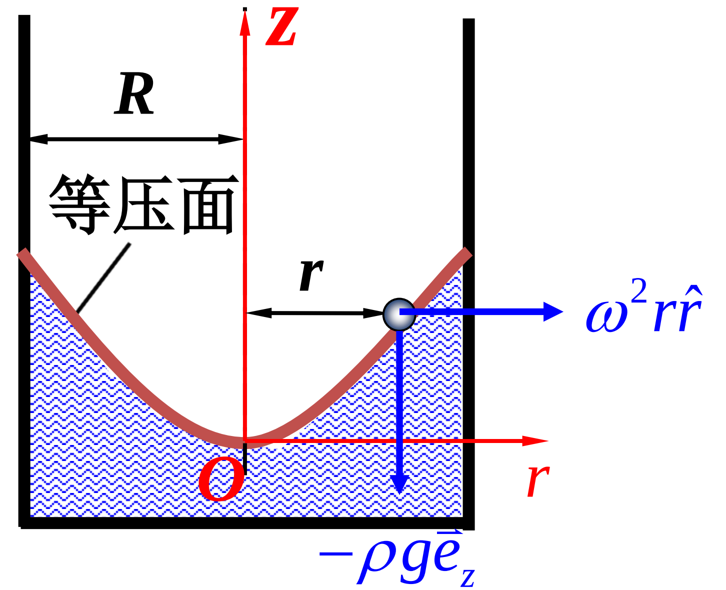
p_0为$x=y=0$处的压强

所以等压面与水平方向的夹角为 $\tan\alpha = a/g$

等压面方向与总体积力方向垂直。

例题1： 水桶绕铅直轴以角速度ω 匀速转动。设水因黏性而完全随桶一起运动，求液体内压强分布和液体表面的形状。

解： 以水桶为参考系，以液面中心为坐标原点，建立坐标系如右图。此时任一流体质点都受到重力和惯性离心力



$$\vec{f} = -g\vec{e}_z + \omega^2 r\hat{r}$$
$$= -g\vec{e}_z + \omega^2 x\vec{e}_x + \omega^2 y\vec{e}_y$$

利用流体静力学方程 $\nabla p = \vec{f}\rho$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

所以有

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\omega^2 x dx + \rho\omega^2 y dy - \rho g dz$$
$$= d\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 - \rho g z\right)$$

积分后可得液体内部压强分布为

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \rho g z$$

这里 $\boldsymbol{p_0}$为$\boldsymbol{x = y = z = 0}$处的压强，即大气压强。因为液体表面上任一点的压强等于大气压强 $\boldsymbol{p}$=$\boldsymbol{p}_0$，所以液体表面的曲线方程为

$$z = \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2g}$$

所以液体表面是一旋转抛物线。

§ 12.3　流体运动学的基本概念

理想流体——绝对不可压缩、完全没有粘滞性的流体。

1.描写流体运动的两种方法

①拉格朗日法（随体法）：将流体分成许多无穷小的微元，求出它们各自的运动轨迹实际上是用质点组动力学方法来讨论流体的运动。在任何时刻t，各质元的坐标x, y, z可表示成

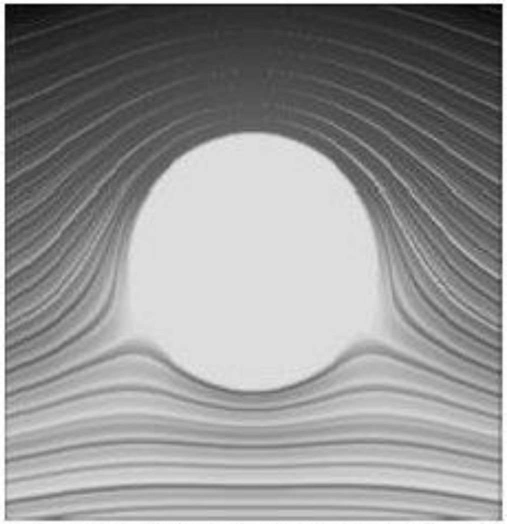
$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \Longrightarrow \text{速度：} u = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x_0, y_0, z_0}, v = \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{x_0, y_0, z_0}, w = \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{x_0, y_0, z_0}$$

这里我们利用各质元在$t = 0$时刻的坐标x_0, y_0, z_0来标记它们。

- ✓ 迹线：质元的轨迹在流体力学中称为迹线。
- ✓ 在同一时刻t，不同质元所处的位置以及速度和加速度等各不相同。
- ✓ 空间某一位置，即给定x, y, z值的位置，不同时刻被不同的流体质元所占据。

②欧勒法（当地法）:把注意力集中到各空间点，观察流体微元经过每个空间点的流速 $\vec{v}$，寻求它的空间分布和随时间的演化规律。

流速场： $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$



Steady Fluid Flow Past Cylinder

实际上流体微元是很难区分的，追踪每个流体微元的轨迹也没有多大的意义。描述流体运动的欧勒法比拉格朗日法更为有效，在流体力学中得到更广泛的应用。

- 流体质元的加速度

所考察的质元，因为位置随时间发生变化，速度将由 $\vec{v}(x,y,z,t)$ 变为 $\vec{v}(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,t+\Delta t)$，因此加速度应为：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z,t+\Delta t)-\vec{v}(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

且有关系

$$\Delta x=v_x\Delta t,\quad \Delta y=v_y\Delta t,\quad \Delta z=v_z\Delta t$$

把$t+\Delta t$时刻的速度$\vec{v}(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z, t+\Delta t)$ 展开至一阶项：

$$\vec{v}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) \approx \vec{v}(x,y,z,t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\Delta t$$

$$\approx \vec{v}(x,y,z,t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\Delta t$$

把上式代入到加速度的表达式，整理后取极限可得到：

$$\vec{a} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

梯度算符：$\nabla \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

✓ 流速场$\vec{v}(x,y,z,t)$表示在坐标为$\boldsymbol{x, y, z}$的位置处不同时刻观察到的不同流体质元的速度。

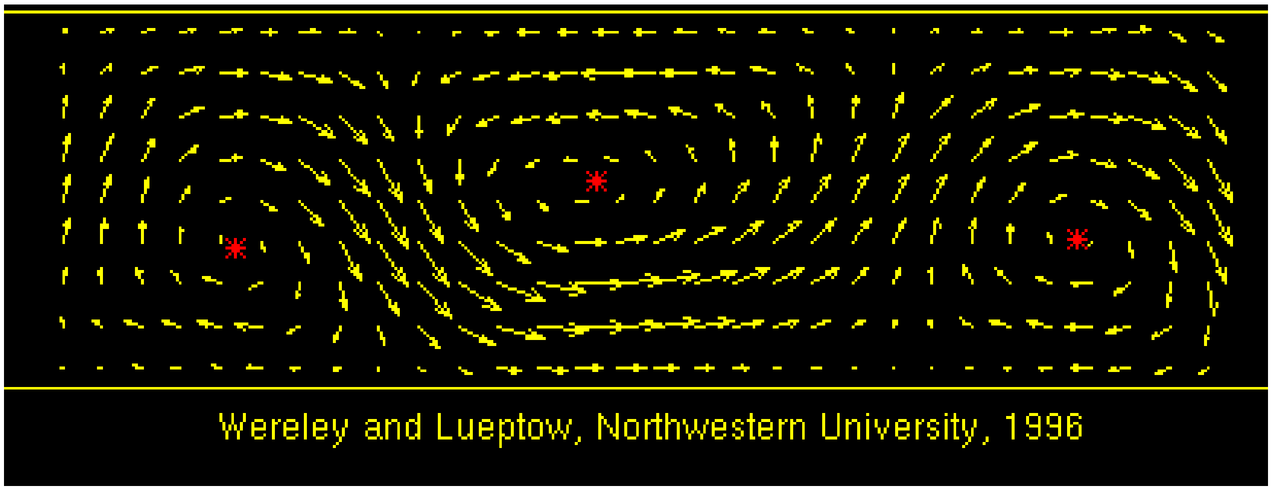
✓ 在欧勒法中，由于流体在流动，同一质元在两个不同时刻的速度对应于空间两个不同地点处在两个不同时刻观察到的速度。

✓ 偏导数 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ 表示经过空间一给定位置处两个流体质元的速度的差异与相应的时间间隔之比，并**不是同一流体质元的速度随时间的变化率**

2.定常流动

流速场的空间分布一般是随时间变化的，即

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

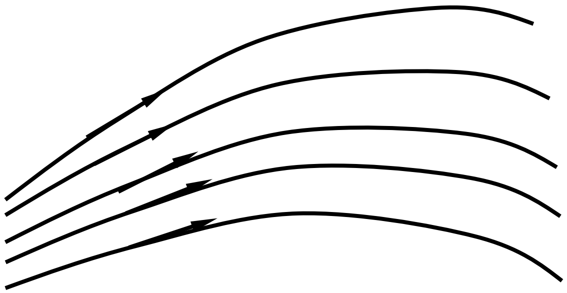


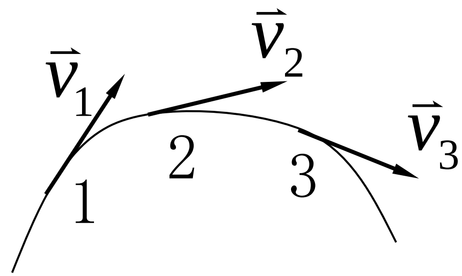
若流速场的空间分布不随时间改变，即 $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ，

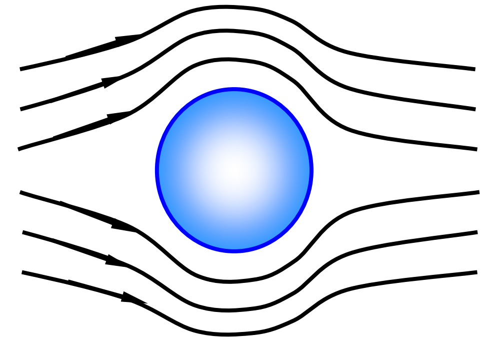
则称流体的运动为定常流动或称稳恒流动。

3. 流线与流管

流线： 流速场中的一系列假想的曲线。在每一瞬时，曲线上每一点的切线方向与该处流体质元的速度方向一致。



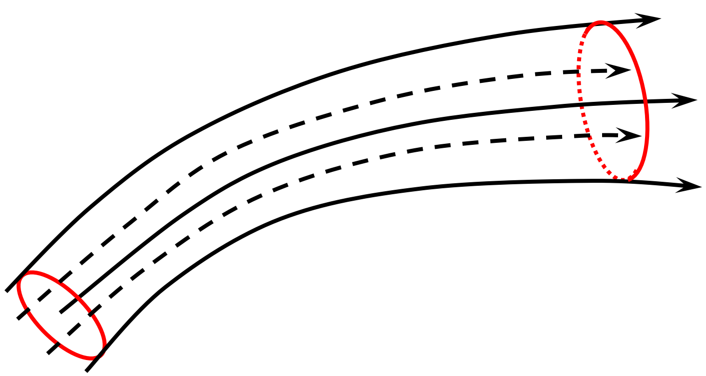




➢由于每一点都有唯一确定的流速，因此流线不会相交。

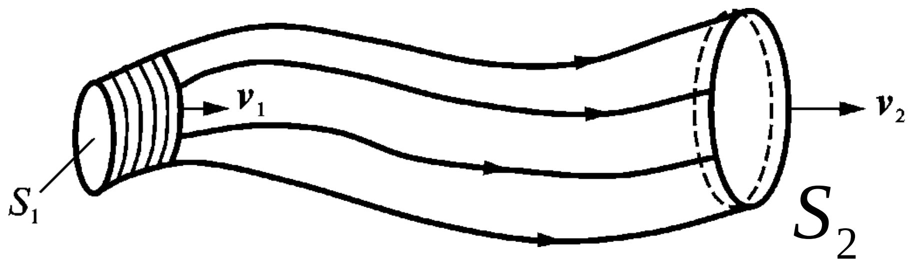
➢一般流线分布随时间改变, 在定常流动中流线分布不随时间改变。

流管： 流体内作一闭合曲线，通过其上各点的流线所围成的细管。



流管内外的流体都不会穿越管壁。

4. 连续性方程



当流体作稳定流动时，我们取一段流管，截面S_1和S_2处的流速分别为v_1和v_2。经过时间Δt，通过截面S_1进入流管的流体质量

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$$

同时通过截面S_2流出该流管的流体质量为

$$\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$

根据质量守恒：

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

如果是理想流体，不可压缩$\rho_1=\rho_2$，则

$$\boxed{Sv = \text{常量}}$$ ——理想流体稳定流动时的连续性方程

§ 12.4 伯努利方程及其应用

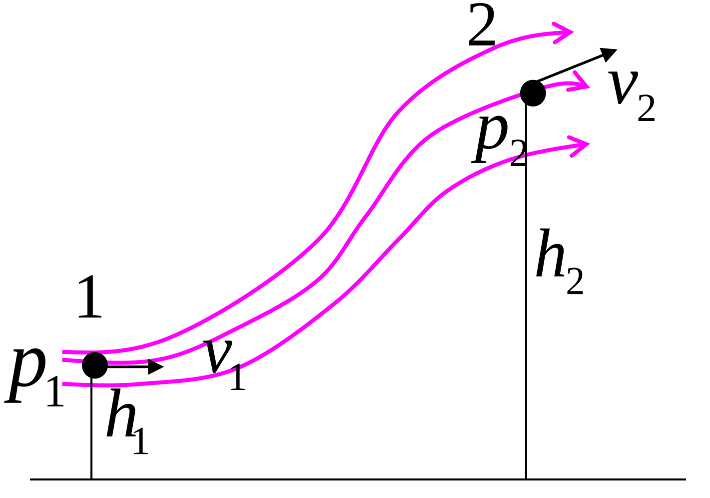
伯努利方程是1738年首先由**Daniel Bernoulli** (1700-1782)提出的。

➢伯努利方程不是一个新的基本原理，而是机械能守恒定律应用于流体力学的一个推论。

1. 理想流体的伯努利方程

在理想流体稳定流动时，沿某一流线，任意两点的压强、流速和所在高度三者之间的关系：

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



●伯努利方程的推导：

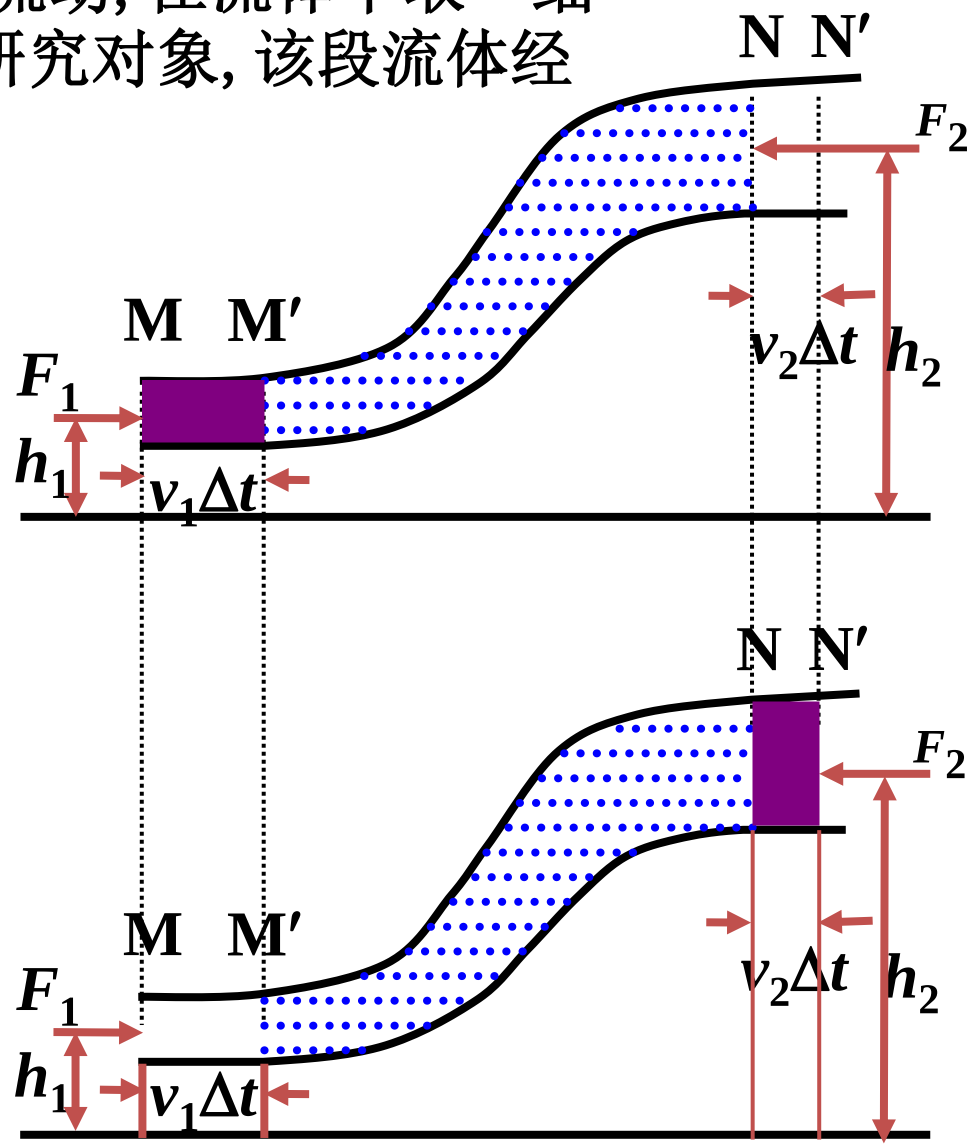
设理想流体在重力场中作稳定流动, 在流体中取一细流管, 在其上选MN 段流体为研究对象, 该段流体经 Δt 时间流动到M′N′位置,

$$F_1 = p_1 S_1, \quad F_2 = p_2 S_2$$

$$\begin{cases} \Delta V_1 = S_1 v_1 \Delta t \\ \Delta V_2 = S_2 v_2 \Delta t \end{cases}$$

由连续性方程，可得

$$\begin{cases} \Delta V_1 = \Delta V_2 \equiv \Delta V \\ \Delta m_1 = \Delta m_2 \equiv \Delta m \end{cases}$$



①求流体由MN 位置流到M′ N′位置过程中机械能的变化

$$\begin{cases} E_1 = E_{k1} + E_{p1} = \dfrac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g h_1 \\ E_2 = E_{k2} + E_{p2} = \dfrac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g h_2 \end{cases}$$

所以机械能的变化为：

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g h_2\right) - \left(\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g h_1\right)$$

②求流体由MN 位置流到M′ N′位置过程中外力所作的功

$$W_1 = F_1 l_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \Delta V, \qquad W_2 = -F_2 l_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \Delta V$$

所以外力作的总功为：

$$W_{外} = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

对于理想流体，粘滞性可忽略，所以非保守内力做功为零，即

$$W_{非保内} = 0$$

③根据功能原理：

$$W_{外}+W_{非保内}=\Delta E$$

$$(p_1-p_2)\Delta V=\left(\frac{1}{2}\Delta m v_2^2+\Delta m g h_2\right)-\left(\frac{1}{2}\Delta m v_1^2+\Delta m g h_1\right)$$

等式两边同除**ΔV**，利用 $\rho=\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 可得，

$$p_1-p_2=\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2\right)-\left(\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1\right)$$

移项

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2$$

或者

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g h=常量$$

伯努利方程

2. 伯努利方程的应用

①皮托(Pitot)管

皮托管用于测量流速，是最简单、最有用的仪器之一。

取通过**A**，**B**两点的流线，由伯努利方程

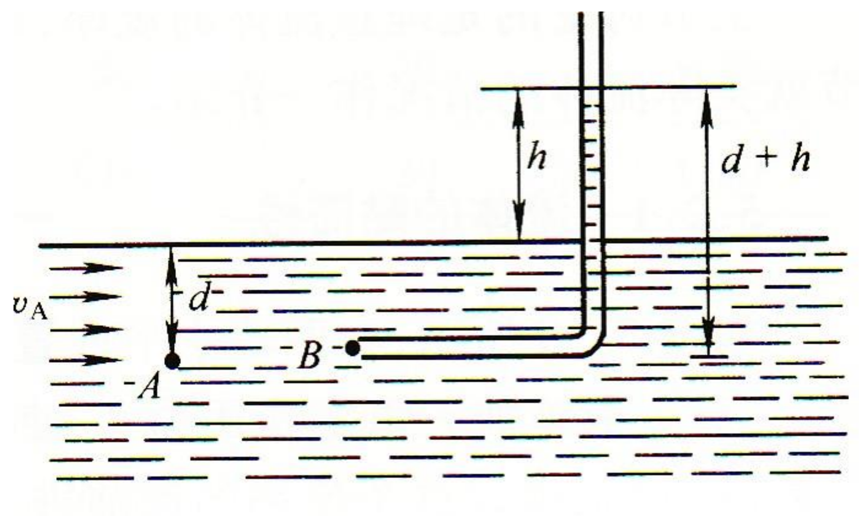
$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B$$

以及已知条件

$$p_A = p_0 + \rho g d,$$

$$p_B = p_0 + \rho g(d + h)$$

$$v_B = 0, \quad h_A = h_B$$

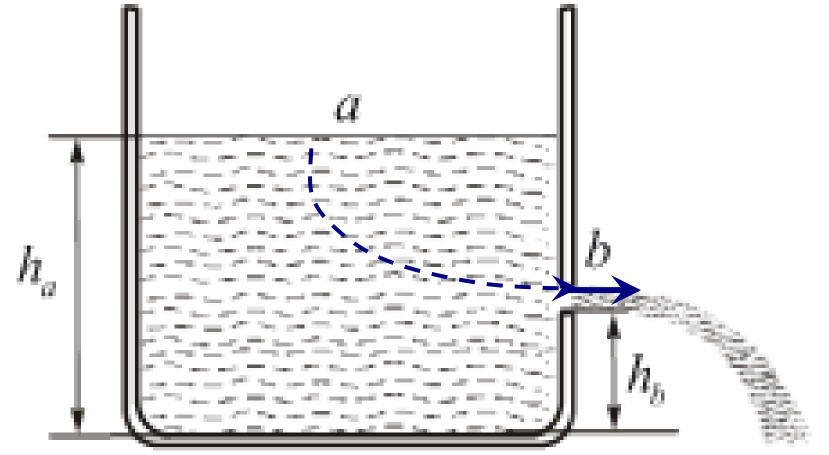


可得液体的流速为

$$v = v_A = \sqrt{2gh}$$

②射流速率

大桶侧壁有一小孔，桶内盛满了水，求水从小孔流出的速度和流量。



取一根从水面到小孔的流线，由伯努利方程

$$p_a+\frac{1}{2}\rho v_a^2+\rho g h_a=p_b+\frac{1}{2}\rho v_b^2+\rho g h_b$$

由连续性方程 $S_a v_a=S_b v_b$

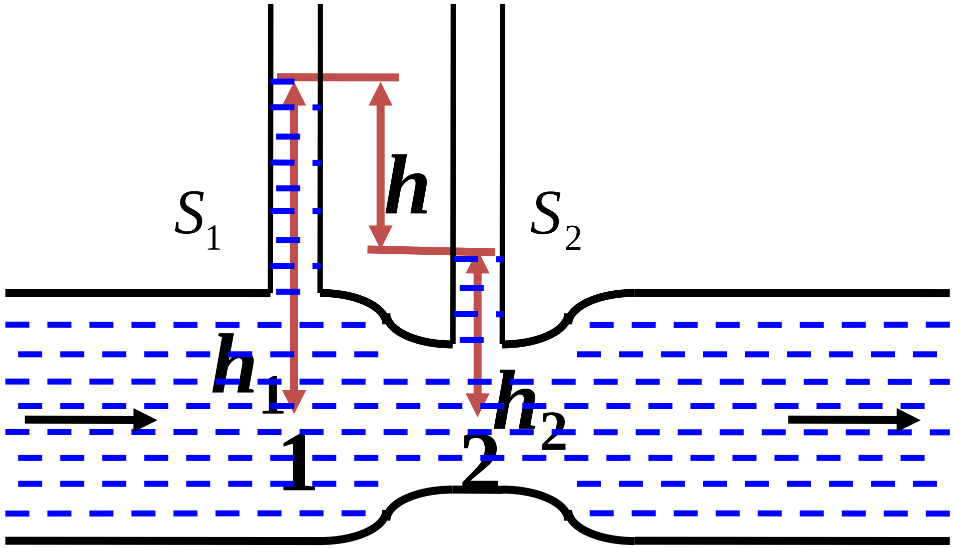
近似条件 $S_a>>S_b,\ v_b>>v_a,\ v_a\approx 0$

联立以上各式可解得小空处的流速和流量

$$v_b=\sqrt{2g(h_a-h_b)} \qquad Q_V=v_b S_b=\sqrt{2g(h_a-h_b)}\,S_b$$

这时出口处水流速度与自由落体速度相等。

③文丘里流量计



文丘里流量计是一种最简单的流量计， 测量时如图放置。在水平管道中取一条流线，在1、2 两点处取截面S_1、S_2，应用伯努利方程:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

连续性方程　$\boldsymbol{v_1 S_1 = v_2 S_2}$

由题意知，管道中心线上1处与2处的压强差为 $p_1 - p_2 = \rho g h$

联立以上三个方程，可得

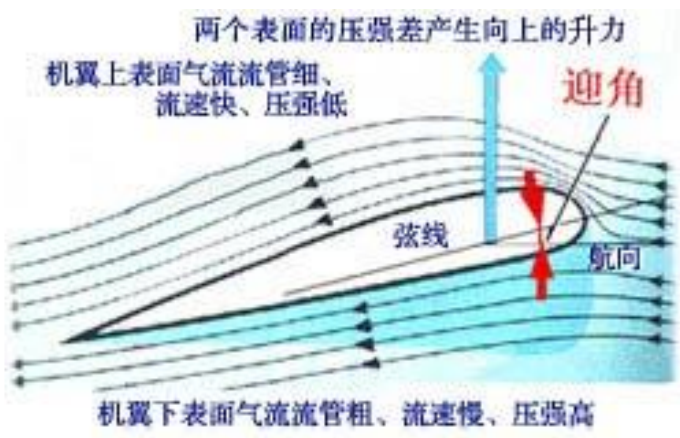
$$v_1=\sqrt{\frac{2ghS_2^2}{S_1^2-S_2^2}},\quad v_2=\sqrt{\frac{2ghS_1^2}{S_1^2-S_2^2}}$$

所以体积流量为

$$Q_V=S_1v_1=S_2v_2=S_1S_2\sqrt{\frac{2gh}{S_1^2-S_2^2}}$$

④飞机机翼的升力

飞机之所以能够飞上天是因为机翼受到向上的升力。飞机飞行时经过特殊设计的机翼**上方的空气流速大**；机翼**下方的空气流速小**。由伯努利方程可知，机翼**上方的空气压强小**，而**下方空气的压强大**，这样就产生了作用在机翼上由下向上的升力。



例题2：一圆柱形纯净水桶，横截面面积300cm^2，上端与大气相通，可以通过装在底部的阀门放水，开始时桶内水面距阀门高40cm。完全打开阀门接满容量为100ml的水杯需要5s。问：将桶中的水全部放完需多长时间？

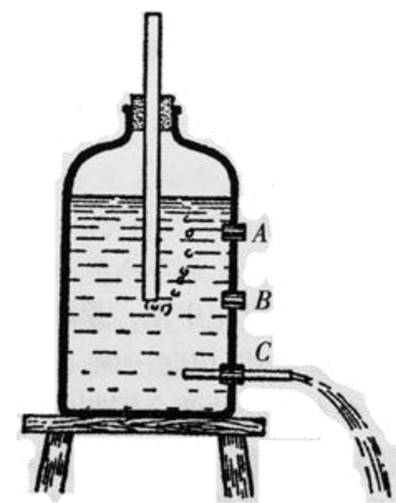
解：水桶中共有水 $300 \times 40 = 12000$ ml，放出100ml需要5s，所以全部放完需要 $5 \times 12000/100 = 600\text{s} = 10\text{min}$。 **对吗？**

根据伯努利定理，随着水面高度下降，放水阀处的流速降低！

设桶的横截面积为S，放水阀开口面积为s，桶内水面高h，根据伯努利定理，有

$$\frac{dV}{dt} = S \cdot \frac{dh}{dt} = -sv = s\sqrt{2gh}$$

$$-\frac{Sdh}{s \cdot \sqrt{2gh}} = dt$$



$$-\frac{S}{s\cdot\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}=dt$$

两边同时积分可得

$$T=-\frac{S}{s\cdot\sqrt{2g}}\int_H^0\frac{dh}{\sqrt{h}}=-\frac{S}{s\cdot\sqrt{2g}}\cdot\left(2\sqrt{h}\right)\Big|_H^0=\frac{S}{s\cdot\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{H}$$

$$=\frac{2\cdot S\cdot H}{s\cdot\sqrt{2gH}}=\frac{2\times 300\times 40}{100/5}=1200(\mathrm{s})=20\min$$

是刚才算法的两倍!

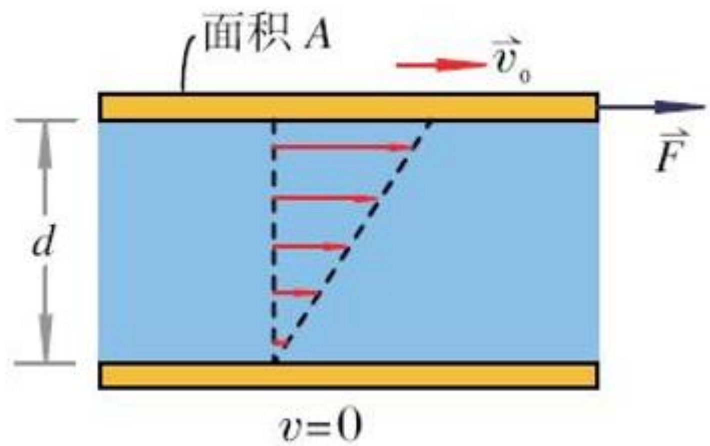
§ 12.5 粘滞流体的流动

1. 粘性定律

静止流体中是不存在剪切应力的，但是当各层流体之间有相对滑动时，在它们之间有切向的摩擦力，称为粘滞力。则快的一层对慢的一层有拉力作用，而满的一层对快的一层有阻力的作用，使得流动较快的一层流体减速，流动较慢的一层流体加速。

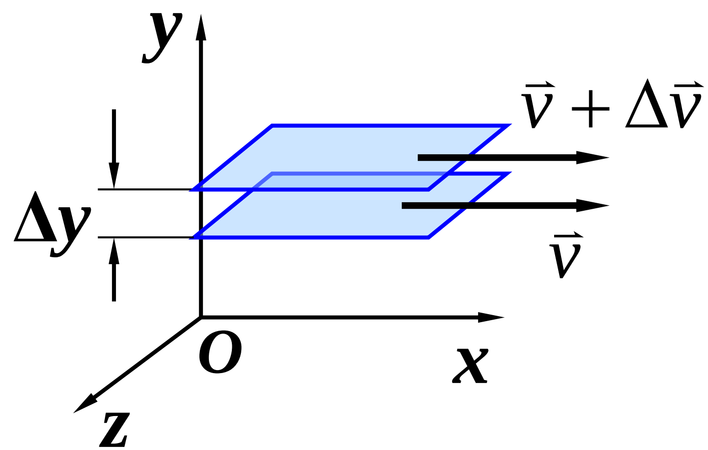
- 考虑下述实验：假设两块中间夹有水的固体板面，保持下板固定，拉上板使其以低速 $\vec{v}_0$ 向右作直线运动。上板除受拉力 $\vec{F}$ 作用外还受到流体的阻力，当上板速度 $\vec{v}_0$为常量时，$\vec{F}$ 与阻力平衡。由实验知，拉力 $\vec{F}$ 的大小与板的面积A和v_0/d都成正比，因此有：

牛顿粘滞定律 $$F=\eta\frac{v_0}{d}A$$



- ✓ 粘性系数η:流体粘滞性大小的量度, 单位：千克/(米·秒)=帕·秒
- ✓ 粘滞力与速度成正比的流体称为“**牛顿流体**”。

当流体中的流动非均匀变化时，取平行于流动的上下两面，设流动方向取为x方向，垂直于流动方向为y方向。两面距离很小(可**近似认为速度变化均匀**)时，方程可写为



牛顿粘滞定律： $$F=\eta\frac{dv}{dy}A$$

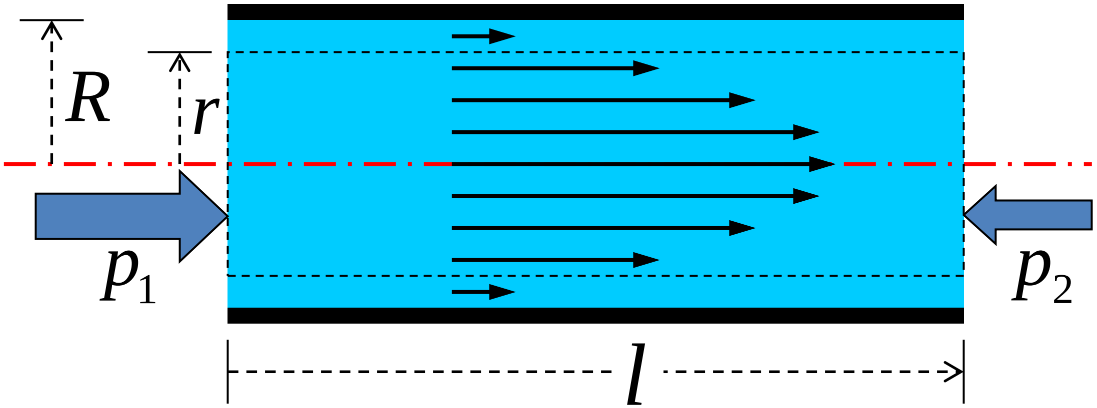
速度梯度: $$\frac{dv}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}$$

- ✓ 粘性系数η与流体材料、温度和压强有关。液体的粘滞系数随温度升高而减小，气体反之。氦的同位素 ^4He 和 ^3He，当温度低于**2.19K**时，粘滞性完全消失，这种现象称为**超流**。

空气	20°C	1.82×10^{-5} Pa·s
水	20°C	1.01×10^{-3} Pa·s
重机油	15°C	6.6×10^{-1} Pa·s

- ✓ 从分子动力学的观点看，气体的粘滞性来源于分子的运动所引起的动量交换。液体的粘滞性主要起因于流动中分子团的形变。

2. 粘性流体在水平圆管内的定常流动：泊肃叶公式



粘性流体在半径为$\boldsymbol{R}$的圆管内定常流动时，截面上各点的流速与离轴的距离有关。在管壁处流体质元的速度为零 $\boldsymbol{v=0}$ ，离管壁越远，流速越大，在中心处，速度最大。取半径为$\boldsymbol{r}$的一段圆柱形流体作为考察对象。这段流体两端所受的压力差为

$$F=(p_1-p_2)\pi r^2$$

这段流体还受到还受到其他流体对它的粘滞力的作用，

$$f=\eta\cdot 2\pi rl\frac{dv}{dr}$$

由流体作稳定流动可知流体元受合力为零，即

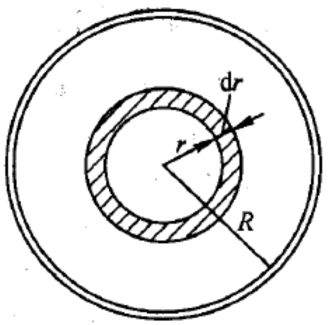
$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr$$

两边同时积分可得

$$\int_v^0 dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l}\int_r^R r dr \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

- 体积流量

在截面上取半径为$\boldsymbol{r \to r + dr}$ 的一个圆环，单位时间内流过此圆环的流体体积为



$$dQ_V = v dS = v 2\pi r dr$$

积分可得总流量

$$Q_V = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$= \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta l}\left(\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^R = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l}\pi R^4$$

泊肃叶公式：

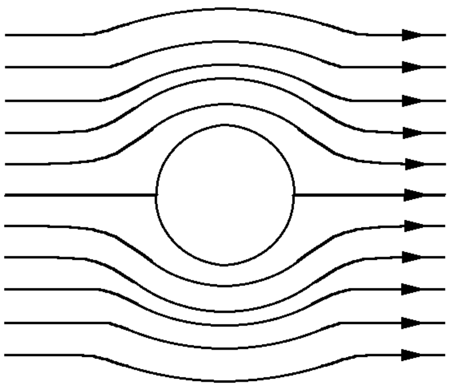
$$\boxed{Q_V = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l}\pi R^4}$$

3. 粘性流体中运动物体所受的阻力：斯托克斯公式

物体在粘滞流体中运动时，受到两种阻力

①粘滞阻力：物体表面的流体速度为零，附在物体上，与邻近的流体有相对运动，产生的粘滞力将阻碍物体的运动

②压差阻力：运动物体的前方流体受挤压，压强增大；后方的流体变稀疏，压强减小。这种也阻碍物体的运动



- 英国数学和物理学家斯托克斯（G. G. Stokes）于1851年从理论上推导出了半径为r的小球在静止流体中以速度v运动时所受的阻力

斯托克斯公式: $\boxed{f = 6\pi\eta r v}$

- 小球所受的粘滞阻力与浮力之和与重力平衡，小球开始作匀速直线下落时的速度称为收尾速度：

收尾速度: $$v = \frac{2}{9}\frac{\rho - \rho_0}{\eta} g r^2$$

ρ —小球密度

ρ_0—液体密度

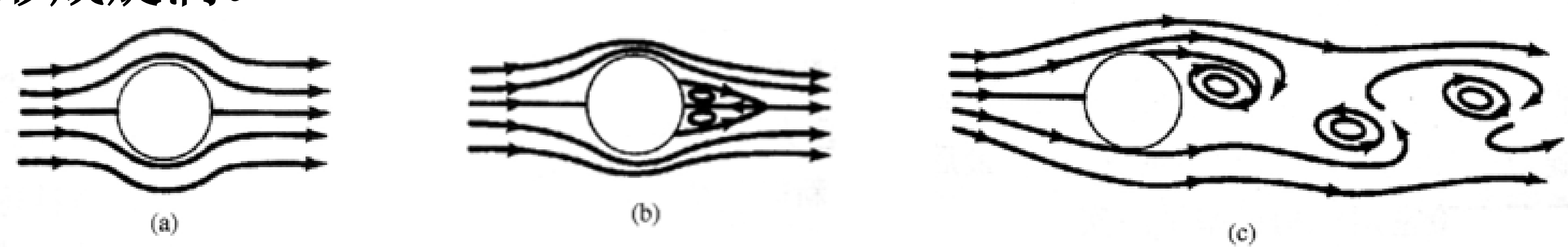
4. 层流、湍流和雷诺数

流体的流动形态随着流体速度而改变：

- **层流：** 管中的流速很小时，流体的流动是定常流动，这种流动的另一个特点是，流体分层流动，相邻流层之间只作相对滑动，没有横向混杂，各层互不混杂。

- **过渡流：** 当流速增大到一定程度，定常流动的状态会被破坏，流动会不稳定，但流动仍具有部分层流的特征。

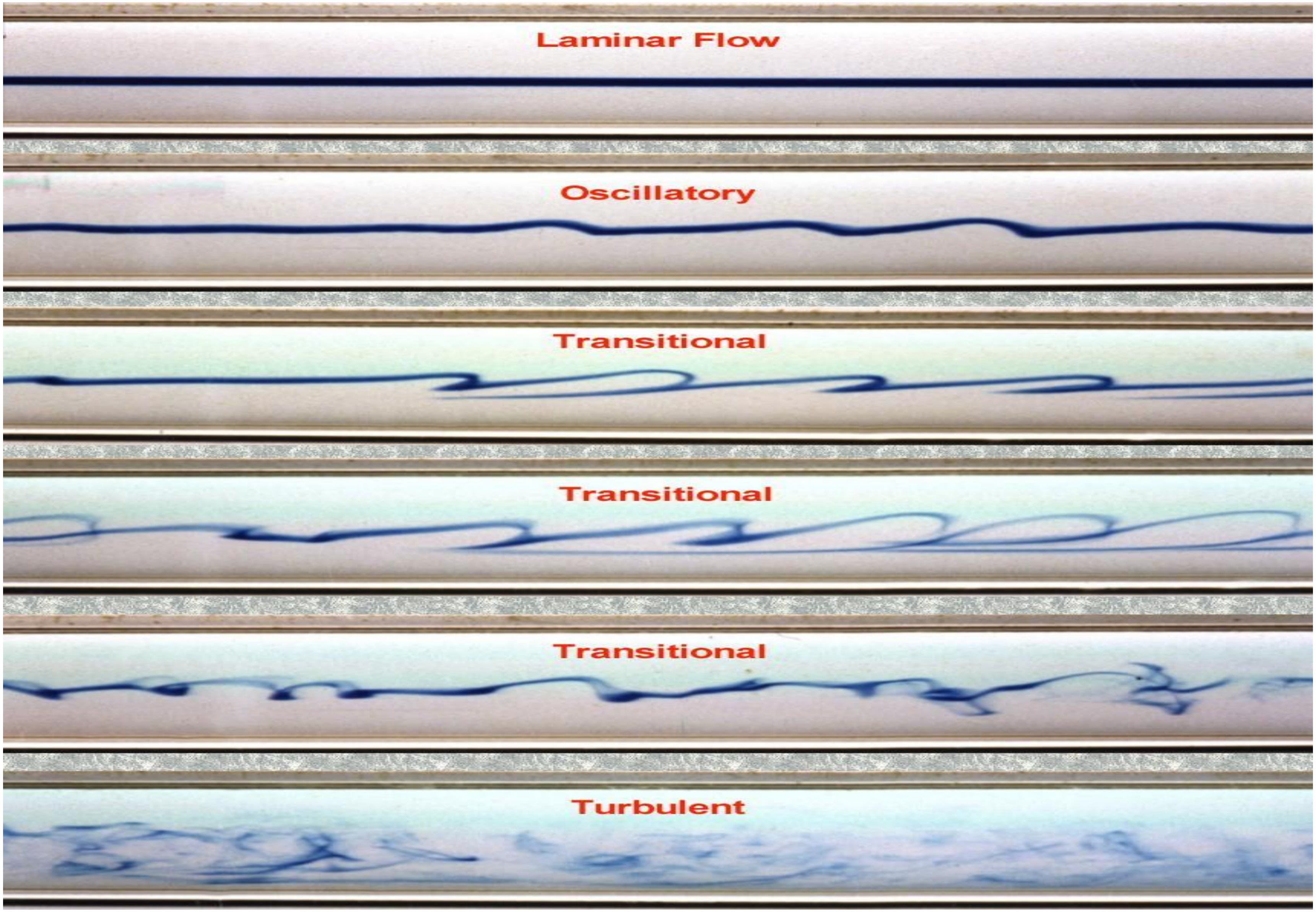
- **湍流：** 当流速进一步增大，层流状态将被破坏，流体将作不规则流动。各流层相互掺混，流态显得杂乱而不稳定，并有可能形成旋涡。



层流　　过渡流　　湍流

1880年前后，英国的实验流体力学家雷诺 **(O. Reynolds)**研究了在长管里流动的流体产生湍流的过程。

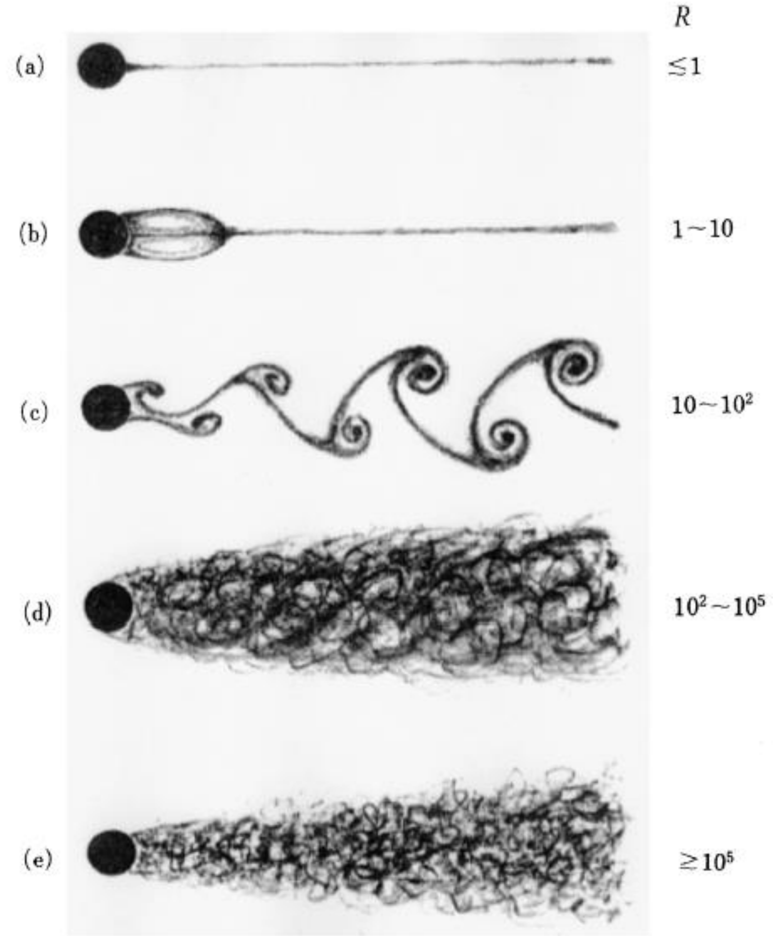
从层流到湍流的过渡



- 运动流体由层流转变为湍流的条件决定于流速的大小v，与流体的密度ρ、粘度η、以及管道半径r均有关系。雷诺综合考虑了上述因素后，首先于1883年提出了一个无量纲的量

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho v r}{\eta}}$$

- 相似法则：两种流动，只要雷诺数相同，其动力学也相似，即流线形态，流线分布等都是相似的。



层流：$\mathrm{Re} < 2000$

湍流：$\mathrm{Re} > 4000$

不稳定过度状态：

$2000 < \mathrm{Re} < 4000$

谢谢大家！