第12章 $Fourier$分析

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

Fourier分析开创背景

1807年，法国数学家Fourier向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现，其解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而大胆地断言：

任意一个函数都可以展成三角函数的无穷级数.

虽然他没有明确给出这个断言成立的数学条件，以及严格的数学证明，但是Fourier级数、Fourier积分以及Fourier变换等理论均由此创始，开创了“**Fourier分析**”这一重要的数学分支，拓广了传统的函数概念.

引例：一维杆状物体的热流问题

在一个长度为l 的长杆上，两端保持零度，初始的温度分布为$f(x)$，随着时间的演化，k 是比热系数，求t 时刻的温度分布$T(x,t)$. 该问题的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial T}{\partial t}, \quad T = T(x,t) & (1) \\ T(0,t) = T(\ell,t) = 0, \quad (t > 0) & \text{（边界条件）} (2) \\ T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell & \text{（初始条件）} (3) \end{cases}$$

分离变量法: 设方程的解有如下形式:

$$T(x,t)=\varphi(x)\psi(t).$$

将此代入方程得

$$\varphi''(x)\psi(t)=k^2\varphi(x)\psi'(t) \qquad \text{或} \qquad \frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}. \tag{4}$$

上式两端分别是x 与t 的函数, 所以

$$\frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=-\lambda,$$

其中λ 是常数. $k=1$ 时, 上式等价于下列方程

$$\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, \tag{5}$$

$$\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. \tag{6}$$

(5) 式的通解为 $\varphi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}x+c)$.
由边界条件(2) 知$\varphi(0)=\varphi(l)=0$, 则$c=0$, $\sqrt{\lambda}\ell=n\pi$,
$(n=1,2,\cdots)$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2. \tag{7}$$

将(7) 代入, 方程(5), (6) 有一组解:

$$\varphi_n(x) = b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad \psi_n(t) = \exp\left(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t\right).$$

这样得到一组满足条件的解

$$T_n(x,t) = b_n \exp\left(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t\right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \ n = 1, 2\cdots$$

这里b_n是任意常数. 因为原方程是线性的, 边界条件是齐次的, 所以不同解的线性组合还是解, 这样就得到满足边界条件的通解

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t\right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{8}$$

再根据初始条件(3)

$$f(x)=T(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x. \tag{9}$$

确定$\{b_n\}$ 即可.

问题: 函数$f(x)$ 是否一定可以表示为(9) 式右端的级数? 如果可以有这样的表示, 那么怎样求系数b_n ?

目录

目录

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

若$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且存在$T>0$ 使得

$$f(x+T)=f(x),\quad \forall\, x\in(-\infty,+\infty),$$

则称$f(x)$ 是一个周期函数, T 是$f(x)$ 的一个周期.

- **周期函数的基本性质:**

(1) 若T 是$f(x)$ 的周期, 则nT $(n\in\mathbb{Z})$ 也是它的周期.

(2) 若$f(x)$ 在有限区间上可积, T 是它的周期, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

- **三角函数的正交性:**

设$\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 是$[-\pi,\pi]$ 上Riemann 可积函数全体. 对于$f,g\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$, 定义

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx,$$

则$\langle f,g\rangle$ 是$\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 上一个**内积**: 即

1° (**正定性**) $\langle f,f\rangle\geq 0$, 且$\langle f,f\rangle=0 \Longleftrightarrow f \xlongequal{a.e.} 0$

2° (**对称性**) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$

3° (**线性性**) $\langle c_1f_1+c_2f_2,g\rangle=c_1\langle f_1,g\rangle+c_2\langle f_2,g\rangle$

若$\langle f,g\rangle=0$, 则称f 与g 是**正交**的.

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

- **三角函数的正交性:**

三角函数$1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin nx, \cos nx, \cdots$称为**三角函数系**. 它们共同的周期是$2\pi$, 在其一个周期$[-\pi, \pi]$内, 满足:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n.\end{cases}\ (m,n=1,2,\cdots)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\delta_{mn},\ (m,n=1,2,\cdots)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0\ (m,n=0,1,2,\cdots),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x=2$$

三角函数系是正交函数系.

§12.1.2 周期函数的$Fourier$级数

若函数$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$ 上可以展开成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则根据级数理论及三角函数的正交性，有

$$\langle f(x),\cos kx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=a_k,\quad k=0,1,\cdots$$

$$\langle f(x),\sin kx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x=b_k,\quad k=1,2,\cdots$$

称为$f(x)$ 的**Fourier 系数**.

§12.1.2 周期函数的$Fourier$级数

设$f(x)\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$, 或者在$[-\pi,\pi]$上**可积且绝对可积**, 就可以计算出Fourier 系数a_n,b_n, 然后构造一个三角级数

$$f(x)\longrightarrow\{a_n,\ b_n\}\longrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

称它为$f(x)$ 的**Fourier级数**. 记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

其中符号~仅表示一种对应关系. 不能写为等号.

因为一是没有证明$Fourier$级数是否收敛; 二是即使$Fourier$级数收敛, 是否收敛函数$f(x)$本身, 也是需要证明的.

§12.1.2 周期函数的$Fourier$级数

- *Dirchlet* **收敛定理:**

设周期函数$f(x)$的周期为2π.

(1) 如果在任何有限区间上$f(x)$逐段光滑, 那么它的Fourier级数在整个数轴上都收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

(2) 如果函数处处连续, 且在任何有限区间上是逐段光滑的, 则其Fourier 级数就在整个数轴上一致收敛于$f(x)$.

注记: Dirchlet收敛定理中的**逐段光滑**是指, 函数除有限个点外, $f(x)$ 连续且有连续的导数$f'(x)$, 而这有限个点只能是$f(x)$ 或$f'(x)$ 的第一类间断点.

Example

求周期为2π 的函数$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi, \end{cases}$ 的Fourier 级数，并讨论其收敛性.

解: 首先计算$f(x)$ 的$Fourier$ 系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

所以有$f(x)$ 的$Fourier$ 级数

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

显然$f(x)$满足$Dirichlet$定理的条件(1), 则其Fourier级数收敛, 并有

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]=\begin{cases} f(x), & x\neq(2k-1)\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x=(2k-1)\pi \end{cases}$$

令$x=0$, 则有

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=f(0)=0\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

当$x = \frac{\pi}{2}$时, 得

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2},$$

因而n为奇数时, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

所以利用Fourier级数可以求一些数项级数的和.

Example

设$f(x)$以2π为周期，$f(x)=x^2,\quad x\in[-\pi,\pi]$，将$f(x)$展成以$2\pi$为周期的$Fourier$级数，求其和函数$S(x)$,并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

解: 先计算$Fourier$系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$f(x)$满足$Dirichlet$收敛定理条件(2), 因此其Fourier级数一致收敛于$f(x)$, 即

$$S(x)=f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12},\quad x\in[-\pi,\pi]\qquad(*)$$

令$x=\pi$得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; 令$x=0$得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$;

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

对(*)求导，利用函数项级数的微分性，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\frac{x}{2}$$

$x=\frac{\pi}{2}$时，得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

对(*)在$[0,x]$, $x\in[-\pi,\pi]$上积分，利用函数项级数的积分性，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi^2x}{12}$, $x=\frac{\pi}{2}$时，得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

- **奇偶函数的Fourier级数:**

若周期函数$f(x)$是奇函数，则$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$,
故其Fourier级数中只含有正弦函数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

称为Fourier正弦级数，其中

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

- **奇偶函数的Fourier级数:**

若周期函数$f(x)$是偶函数，则$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$
故其Fourier级数中只含有余弦函数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

称为Fourier余弦级数，其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Example

考察周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \leqslant x < \pi, \\ -\pi, & x=\pi. \end{cases}$，写出其$Fourier$级数，并求和函数$S(x)$及级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

解： 因$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上为奇函数，其$Fourier$系数有

$$a_n=0,\ n=0,1,2\cdots, \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n+1}}{n},\quad n\geqslant 1.$$

由$Dirichlet$收敛定理，当$x\neq(2k-1)\pi$时，其$Fourier$级数收敛于$f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

当$x=(2k-1)\pi$时，其$Fourier$级数收敛于
$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0$. 故其和函数

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq(2k-1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots;\\ 0, & x=(2k-1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots. \end{cases}$$

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时，

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n}{2}\pi=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

§12.1.2 周期函数的$Fourier$级数

- **任意周期的情形:**

若$f(x)$以$2l$为周期的函数，作变换 $x=\dfrac{l}{\pi}t$,

则$f(x)=f(\frac{l}{\pi}t)=g(t)$.

$$f(x)=f(2l+x)=f(\frac{l}{\pi}(2\pi+\frac{\pi}{l}x))=f(\frac{l}{\pi}(2\pi+t))=g(2\pi+t)$$

所以$g(t)$以2π为周期，其$Fourier$级数为

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

从而$f(x)=g(\frac{\pi}{l}x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x),$

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\mathrm{d}t \xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\mathrm{d}t \xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots$$

若$f(x)$是偶函数，则它的Fourier级数就是**余弦级数**

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,$$

若$f(x)$是奇函数，则它的Fourier级数就是**正弦级数**

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots$$

Example

设$f(x)=x-l, \quad x\in[0,2l)$，以$2l$为周期的周期函数，求其$Fourier$级数，并说明收敛情况.

解: 计算Fourier系数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l}(x-l)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l}(x-l)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = -\frac{2l}{n\pi}$$

$f(x)$以$2l$为周期逐段光滑，则其Fourier级数收敛.

当$x = 2kl \quad (k \in \mathbb{Z})$ 为第一类间断点，其Fourier级数收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = 0$;

当$x \neq 2kl$ 时，$f(x) = -\dfrac{2l}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x.$

Example

设$f(x) = e^{ax}, \quad x \in (-1, 1]$，以2为周期的周期函数，求其$Fourier$级数，并说明收敛情况.

解: 计算Fourier系数 $a_0 = \int_{-1}^{1} e^{ax}\mathrm{d}x = \dfrac{e^a - e^{-a}}{a} = \dfrac{2}{a}\sinh a,$

$$a_n = \int_{-1}^{1} e^{ax}\cos n\pi x\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n a(e^a - e^{-a})}{a^2+\pi^2n^2} = \frac{(-1)^n 2a\sinh a}{a^2+\pi^2n^2},$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} e^{ax}\sin n\pi x\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n \pi(e^{-a} - e^{a})}{a^2+\pi^2n^2} = \frac{(-1)^{n+1} 2\pi\sinh a}{a^2+\pi^2n^2},$$

$f(x)$以2为周期逐段光滑函数, 则其Fourier级数收敛

$$f(x) \sim \frac{\sinh a}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\sinh a}{a^2+\pi^2n^2}(a\cos n\pi x - \pi\sin n\pi x)$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \neq 2k-1, \\ \frac{e^a+e^{-a}}{2}, & x = 2k-1. \end{cases}$$

§12.1.3 有限区间上函数的$Fourier$级数

- **周期延拓:**

  若$f(x)$ 在$(-\ell,\ell)$ 上有定义, 则

$$F(x)=\begin{cases} f(x-2n\ell), & (2n-1)\ell<x<(2n+1)\ell \\ \frac{f(\ell)+f(-\ell)}{2}, & x=(2n+1)\ell, \end{cases}$$

  $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上以2ℓ 为周期的函数.

- **偶延拓:** 若$f(x)$ 在$[0,\ell)$ 上有定义, 则

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\ell] \\ f(-x), & x\in[-\ell,0] \end{cases}$$

  是$(-\ell,\ell)$ 上偶函数, 将它周期延拓到$(-\infty,+\infty)$ 上, 成为以2ℓ 为周期的偶函数.

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

- **奇延拓:**

若$f(x)$ 在$(0,\ell)$ 上有定义, 则

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell) \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\ell,0) \end{cases}$$

是$(-\ell,\ell)$ 上奇函数, 将它周期延拓到$(-\infty,+\infty)$ 上, 成为以2ℓ 为周期的奇函数.

§12.1.3 有限区间上函数的$Fourier$级数

(1) 若$f(x)$ 在$[-\ell,\ell)$ 上有定义, 则以2ℓ为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上, 那么$f(x)$ 的$Fourier$ 级数为

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=1,\cdots).$$

§12.1.3 有限区间上函数的$Fourier$级数

有限区间上函数的Dirchlet 收敛定理: 设函数$f(x)$是定义在有限区间$[-l,l]$上的逐段光滑，那么它的$Fourier$级数收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\in(-l,l),\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l.\end{cases}$$

如果函数在$[-l,l]$逐段光滑且连续，并满足$f(-l)=f(l)$，则其$Fourier$ 级数就在$[-l,l]$上一致收敛于$f(x)$.

注记: 这里条件$f(-l)=f(l)$是为了保证周期延拓后的周期函数也是连续的.

§12.1.3 有限区间上函数的$Fourier$级数

若$f(x)$ 定义在$[a,b]$上，则以$2l=b-a$ 为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上，那么$f(x)$ 的$Fourier$ 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x,\quad(n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x,\quad(n=1,2,\cdots).$$

§12.1.3 有限区间上函数的$Fourier$级数

(2) 若$f(x)$ 在$[0,\ell)$ 上有定义, 则先**偶延拓**到$[-\ell,\ell)$, 再以2ℓ 为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上, 那么$f(x)$ 的$Fourier$ 级数为一个余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x \, dx, \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

(3) 若$f(x)$ 在$(0,\ell)$ 上有定义，则先**奇延拓**到$[-\ell,\ell)$，再以2ℓ 为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上，则$f(x)$ 的Fourier 级数为一个正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad(n=1,2,\cdots).$$

Example

设$f(x)=x^2,\quad x\in[0,\pi]$

(1) 将$f(x)$展成以π为周期的$Fourier$级数;

(2) 将$f(x)$展成以2π为周期的余弦级数;

(3) 将$f(x)$展成以2π为周期的正弦级数. 并说明它们的收敛情况.

解: (1) $f(x)$在$[0,\pi]$连续, $f(0)\neq f(\pi)$, 故$f(x)$以π为周期开拓后所成的函数在$x=0,\pi$不连续, 其$Fourier$系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin 2nx\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

于是, 由$Dirichlet$收敛定理,

$$f(x)\sim\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx-\frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,\pi),\\ \dfrac{\pi^2}{2}, & x=0,\ x=\pi.\end{cases}$$

(2) 将$f(x)$偶延拓，使其在$[-\pi,\pi]$上为偶函数，这时$f(x)$的$Fourier$ 级数为余弦级数，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^n}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

于是，由$Dirichlet$收敛定理，$f(x)$的$Fourier$级数在$[0,\pi]$上一致收敛到自身，即

$$x^2=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

(3) 将$f(x)$奇延拓，使其在$[-\pi,\pi]$上为奇函数，这时$f(x)$的$Fourier$级数为正弦级数，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}+\frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n-1],\quad n=1,2,\cdots.$$

于是，由$Dirichlet$收敛定理，

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}+\frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx,\qquad (0\leqslant x<\pi).$$

当$x=\pi$时，其正弦级数收敛于0.

注记: 由此题可知，由于要求不同，所得$f(x)$的$Fourier$展开式各不相同，但由于满足 $Dirichlet$收敛定理的条件，在开区间$(0,\pi)$上它们都收敛于$f(x)$.

Example

函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1, \end{cases}$

$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, $-\infty<x<+\infty$, 其中$a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$, 求$S(-\frac{5}{2})$, $S(3)$, $S(\frac{9}{4})$.

解: 由题意知, a_n是$f(x)$进行偶延拓，再开拓后的周期为2的周期函数的Fourier系数，$S(x)$为其相应的Fourier级数的和函数，限定在$[0,1)$上就是函数$f(x)$, 所以

$$f_e(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1, \\ -x, & -\frac{1}{2}\leqslant x<0, \\ 2+2x, & -1<x<-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$S(-\frac{5}{2})=S(-\frac{5}{2}+2)=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$$
$$=\frac{f(\frac{1}{2}+0)+f(\frac{1}{2}-0)}{2}=\frac{3}{4},$$

$$S(3)=S(1)=\frac{f_e(1-0)+f_e(-1+0)}{2}=0,\ S(\frac{9}{4})=S(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}.$$

Example

证明等式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{\pi}{8}\cos x,\quad x\in(0,\pi).$

分析: 观察所证等式，左边是一个三角级数，右边是初等函数$\frac{\pi}{8}\cos x$. 若从等式左边证到右边，看作是函数项级数求和问题，很难求解. 但反过来，从等式右端出发去证明，就是函数的$Fourier$级数展开问题，且是偶函数$f(x)=\cos x$在$(0,\pi)$上展开的正弦级数.

证明: 问题可看作函数$f(x)=\cos x,\quad x\in(0,\pi)$作奇延拓到区间$(-\pi,\pi)$上,再以$2\pi$周期开拓, 其$Fourier$系数为

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0, \qquad n=0,1,2,\cdots,\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{2n[(-1)^n+1]}{(n^2-1)\pi},\quad n=1,2,\cdots.
\end{aligned}
$$

故函数$\cos x$在$(0,\pi)$上展开的正弦级数为

$$
\cos x=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n)^2-1},\ \text{即}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{\pi}{8}\cos x,\ x\in(0,\pi)
$$

§12.1.4 $Fourier$ 级数的复数形式

根据$Euler$ 公式有

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

由这些公式就可以将$Fourier$ 级数表示为复数形式.
设$f(x)$ 在$[-\ell, \ell]$ 上的$Fourier$ 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\big), \quad (\omega = \frac{\pi}{\ell})$$

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i},$$

§12.1.4 $Fourier$ 级数的复数形式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - b_n i}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-in\omega x} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{n\omega x},$$

其中 $$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx$$

$$F_{\pm n} = \frac{a_n \mp b_n i}{2} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \big(\cos n\omega x \mp i \sin n\omega x \big) dx$$

$$= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{\mp in\omega x}\, dx, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

小结

- 熟记$Fourier$级数及其系数公式，并准确写出$f(x)$的$Fourier$级数;
- 根据Dirchlet收敛定理准确写出其和函数;
- 利用$Fourier$展开式求某些数项级数的和.

此节是本章的重点.

目录

§12.2.1 基本概念

(1) 设$L^2[a,b]$表示$[a,b]$中可积且平方可积函数的全体, 即

$$L^2[a,b]=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,\middle|\,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\ \text{存在且有限}\right\}.$$

可积并且平方可积包含了黎曼积分和广义积分.

(2) 在$L^2[a,b]$ 中引入内积$\langle f(x),\ g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 它诱导了$L^2[a,b]$上的度量(或距离)

$$\begin{aligned}\|f(x)-g(x)\|&=\sqrt{\langle f(x)-g(x),\ f(x)-g(x)\rangle}\\&=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

这个度量称为L^2度量.

§12.2.1 基本概念

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \cdots$$

是$L^2[-\pi,\ \pi]$上的**标准正交系**.

(3) 对$L^2[a,b]$中给定的函数$f(x)$, 如果存在$L^2[a,b]$中的函数列$\{f_n(x), n=1,2,\cdots\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\| = \lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

那么称$\{f_n(x)\}$平方平均收敛于$f(x)$.

§12.2.2 *Bessel*不等式

对任何一组实数$\alpha_0, \alpha_k, \beta_k, k=1,2,\cdots$，称

$$g_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

为n次三角多项式.

研究目标： 设$f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$，下面确定常数α_k, β_k，使得$f(x)$与$g_n(x)$的平方平均偏差$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - g_n(x)]^2 \mathrm{d}x$为最小.

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x + \beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \pi\left(\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2 kx + \beta_k^2\sin^2 kx)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right).$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta_n = &\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x + \\ &\pi\left(-\alpha_0 a_0 - 2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right) \\ = &\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right) \\ &+ \pi\left(\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right)\right).\end{aligned}$$

在上式中，当$\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$时，即这些系数为对应的$Fourier$系数时，$\Delta_n$取最小值.

Theorem ($Fourier$系数的最优性)

设$f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$, 则在所有的n次三角多项式中, 唯以$f(x)$的$Fourier$ 系数构成的三角多项式

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

与$f(x)$的距离最小, 即与$f(x)$的平方平均偏差Δ_n最小, 且最小值为

$$\Delta_n = \|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

因为$\Delta_n \geqslant 0$, 则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Corollary (推论1)

【*Bessel*不等式】 设$f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$，则它的*Fourier*系数构成的正项级数
$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛，且满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

称为*Bessel*不等式.

Corollary (推论2)

设$f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$，则其Fourier系数a_n和b_n满足：

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|+|b_n|}{n}$收敛；

(2)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

证明： 由Bessel不等式知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$均收敛，从而(2)成立．再由不等式

$$\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+a_n^2), \qquad \frac{|b_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+b_n^2),$$

由比较判别法知(1)成立．

§12.2.3 $Parseval$等式

定理: 设$f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, 则$f(x)$的$Fourier$级数部分和$S_n(x)$构成的三角多项式列平方平均收敛于$f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

等价于$Bessel$不等式中的等号成立, 即

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x.$$

称为$Parseval$ 等式.

§12.2.3 *Parseval*等式

注记: *Parseval* 等式说明向量组

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots$$

是区间$L^2[-\pi,\ \pi]$中的一组**标准正交基**.

而$L^2[-\pi,\pi]$中任何一个向量$f(x)$的模长的平方等于其在标准正交基下各坐标的平方和，这是有限维空间中的**勾股定理的推广**.

Corollary (推论3)

对于$[-\pi,\pi]$上的连续函数$f(x)$, 如果与三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, m=1,2,\cdots\right\}$$

中的每个都正交, 则$f(x)\equiv 0$; 若两个连续函数f和g的$Fourier$系数都相等, 则$f(x)\equiv g(x)$.

Corollary (推论4)

【推广形式的$Parseval$ 等式】 设$f(x), g(x) \in L^2[-\pi,\ \pi]$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 和$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$分别是$f(x)$和$g(x)$的$Fourier$系数，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

即两个平方可积函数的内积等于其在标准正交基下对应坐标乘积之和.

证明： 考虑函数$f \pm g$的$Parseval$ 等式，然后两者相减，再除以4即得.

Theorem (*Fourier*级数的逐项积分)

设$f(x) \in L^2[-\pi,\ \pi]$, 其*Fourier*级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

则对区间$[-\pi,\ \pi]$中的任意a, b, 有如下逐项积分公式

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t \tag{2}$$

特别地, 对于$x \in [-\pi,\ \pi]$, 有

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) \tag{3}$$

证明: 首先, 将推广形式的$Parseval$ 等式写成

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x.$$

再令函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x\in[a,\ b], \\ 0, & x\in[-\pi,\ a)\cup(b,\ \pi], \end{cases}$$

代入推广形式的$Parseval$ 等式，即得

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nt + b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

特别地，取$a=0$，对于$x\in[-\pi,\ \pi]$，可得

$$\int_0^x\Big[f(t)-\frac{a_0}{2}\Big]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\Big),$$

由于级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$收敛，上式右端的级数还是一致收敛的.

注记: 由于没有假设$f(x)$连续，$f(x)$的$Fourier$级数不一定一致收敛于$f(x)$，即(1)不一定是等式. 但是逐项积分后却得到了等式(2)和(3). 仔细观察$Fourier$级数的逐项积分公式，发现求一次积分之后，$Fourier$系数相当于乘以因子$\dfrac{1}{n}$，因此，逐项积分之后的$Fourier$级数具有更好的收敛性.

Example

试将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 1\leqslant x<2,\\ x-2, & 2\leqslant x<3,\end{cases}$ 展开为以 2 为周期的$Fourier$级数; 并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

解: (1) 将$f(x)$以 2 为周期开拓至全x轴上，开拓之后的新函数不妨记为$F(x)$.

$a_0=\int_{-1}^{1}F(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_2^3(t-2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$,

$a_n=\int_1^3 f(t)\cos n\pi t\mathrm{d}t=\int_2^3(t-2)\cos n\pi t\mathrm{d}t=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$,

$b_n=\int_1^3 f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t=\int_2^3(t-2)\sin n\pi t\mathrm{d}t=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}$,

其中，$n=1,2,\cdots$.

由$Fourier$级数的$Dirichlet$收敛定理，当 $1<x<3$时，

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin n\pi x\right];$$

当 x是奇数时，$f(x)$的$Fourier$级数收敛

到 $\frac{1}{2}[f(1-0)+f(1+0)]=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$.

(2) 在$f(x)$的Fourier级数展式中, 令 $x=2$, 计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

因而

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S\ ,$$

即得 $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

(3) 由$Parseval$等式得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^4\pi^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$=\int_1^3 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_2^3(x-2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ ,$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{4}\cdot\frac{1}{24}=\frac{\pi^4}{96}\ .$$

故

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\frac{1}{16}S',$$

即

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{16}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Example

设$f(x)$是以2π为周期的分段可导的连续函数,

a_0, a_n, b_n, $n=1, 2 \cdots$为其$Fourier$系数, 求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的$Fourier$系数A_0, A_n, B_n, $n=1, 2 \cdots$. 利用所得结果, 证明$Parseval$等式.

证明: 易见$F(x)$也是以2π为周期的分段光滑的连续函数,

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t,$$

由于 $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t}f(x+t)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u=a_0,$$

故 $$A_0=\frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=a_0^2.$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t,$$

由于
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cdot\cos nt+\sin nu\cdot\sin nt)\mathrm{d}u$$
$$= a_n\cos nt + b_n\sin nt,$$

故
$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t = a_n^2+b_n^2.$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\sin nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t,$$

类似地，可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin n(u-t)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\sin nu\cdot\cos nt - \cos nu\cdot\sin nt)\mathrm{d}u$$
$$= b_n\cos nt - a_n\sin nt.$$

故

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(b_n\cos nt - a_n\sin nt)\mathrm{d}t = b_n a_n - a_n b_n = 0.$$

于是, 由$Dirchlet$定理,

$$F(x) \sim \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx = F(x), \qquad (-\pi < x < \pi).$$

令$x=0$, 有 $F(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$

这正是$Parseval$等式.

Example

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\le x\le 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\le\pi\end{cases}.$

(1) 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\quad(0\le x\le\pi)$;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ 的和, 并证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$;

(3) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$ 的和.

解： (1) 将$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开成正弦级数. 对$f(x)$的奇延拓

$$f_o(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & -\pi<x\le -1\\ \frac{\pi-1}{2}x, & -1<x\le 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\le \pi,\end{cases}$$

那么$a_n=0, n=0,1,\cdots$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^\pi\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\\ &=\frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x\sin nx\mathrm{d}x+\int_1^\pi\sin nx\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_1^\pi x\sin nx\mathrm{d}x\\ &=\frac{\sin n}{n^2}.\end{aligned}$$

所以$f(x)$的正弦级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx.$$

由$Dirchlet$收敛定理，$f(x)$在$[0,\pi]$上分段光滑且连续，则其正弦级数收敛于自身，即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx \quad (0 \le x \le \pi).$$

(2) $x=1$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$. 由函数项级数的微分性质 $f_o'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx \quad (-1\le x\le 1)$,

$$f_o'(0)=\frac{\pi-1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$$

(3) 在$[-\pi,\pi]$上用$Parseval$等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\frac{(\pi-1)^2}{4}x^2\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\frac{(\pi-x)^2}{4}\mathrm{d}x\right)=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$

§12.2.4 广义Fourier级数

定义: 设$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$ 是$L^2[a,b]$ 中一组标准正交系, 即

$$\langle\varphi_m(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

那么对任意$f(x)\in L^2[a,b]$,
称$a_n=\langle f(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$ 为$f(x)$ 的广义Fourier系数. 称$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ 为$f(x)$ 的广义Fourier 级数, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

§12.2.4 广义Fourier级数

设$T_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$ 为n 次$\varphi-$多项式. 在所有n 次$\varphi-$多项式中,

广义Fourier 级数的前n 项和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$ 到f 的距离最短.

$$\begin{aligned}\Delta_n=\|f-T_n\|^2&=\left\langle f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k, f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\rangle\\&=\|f\|^2-2\sum_{k=1}^{n}a_k\alpha_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\\&=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\geq\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\|f-S_n\|^2,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当$\alpha_k=a_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 时成立.

Theorem

设$f(x)\in L^2[a,b]$, $\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中一组标准正交系, 则对任意的n次$\varphi-$多项式$T_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$, 有

$$\|f-S_n\|\le\|f-T_n\|,\quad \|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\le\|f\|^2$$

这称为广义Fourier级数的Bessel不等式. 从而级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$收敛.

Definition

设$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中一组标准正交系，如果$Parseval$等式 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2$成立，那么称$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中**完备的标准正交系**.

Theorem

设$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中完备的标准正交系，那么f的广义$Fourier$级数部分和$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$平方平均收敛于$f$，即 $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$.

$L^2[-\pi,\pi]$中的三角函数系满足$Parseval$等式，因此**三角函数系是完备的**.

Theorem

设$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中完备的标准正交系，则

1° 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么$f(x)=0 \Longleftrightarrow f(x)$的广义$Fourier$系数$a_n=0, n=1,2,\cdots$.

2° 如果从$\{\varphi_n\}$中删去任何一个函数，那么剩余的函数所构成的函数系就不再是完备的.

3° 设$\displaystyle\int_a^b \varphi_0^2(x)\mathrm{d}x=1$，如果把$\varphi_0(x)$添加到$\{\varphi_n\}$中，那么新构成的函数系不再是标准的正交系.

本节的重点是利用$Fourier$展开式及$Parseval$等式求某些数项级数的和.

目录

§12.4.1 *Fourier*积分

为展开定义在整个数轴上的非周期函数$f(x)$的*Fourier*级数，利用“**有限逼近无限**”的思想.

(1) 对任意正数l，截取函数$f(x)$在有限区间$(-l,\ l)$上的取值;

(2) 作周期为$2l$的周期开拓，得到一个周期为$2l$的周期函数$f_l(x)$;

(3) 将周期函数$f_l(x)$展开为*Fourier*级数，即得函数$f(x)$在区间$(-l,\ l)$上的*Fourier*级数展开;

(4) 取极限$l \to +\infty$.

下面通过形式上的计算，来说明这个极限过程将导致一种积分表示，即*Fourier*积分表示.

设函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，在任何有限区间上逐段光滑，且开拓后的周期函数$f_l(x)$可以展开成*Fourier*级数，于是

$$f_l(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x),\quad -l<x<l,$$

其中$\omega=\dfrac{\pi}{l}$,$a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t$,$b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t$,

即 $$f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t.$$

由于函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，所以当$l\to+\infty$时，

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

为考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t$的极限,

令$\lambda_n=n\omega=\frac{n\pi}{l}$, $\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=\frac{\pi}{l}=\omega$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_n(x-t)\mathrm{d}t,$$

右端和式为被积函数为$g_l(\lambda)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}g_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda$的黎曼和形式. 而当$l\to+\infty$时, $\Delta\lambda_n\to0$, 以及$g_l(\lambda)\to\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$, 于是有当$l\to+\infty$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t\to\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}\lambda.$$

综上, 可得函数$f(x)$的积分表示

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

其中

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,\ \ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

称为$Fourier$积分.

§12.4.1 *Fourier*积分

【*Fourier*积分的收敛定理】 设函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，在任何有界闭区间上逐段光滑，则对任意实数x，函数$f(x)$所对应的*Fourier*积分必收敛于它在该点左右极限的平均值，即对任意 $-\infty < x < +\infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

当$f(x)$连续时，有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t = f(x).$$

Example

利用$Fourier$积分公式, 证明:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}\cos x, & |x|<\pi/2,\\ 0, & |x|>\pi/2.\end{cases}$$

证明： 令$f(x)$表示所需证明的等式右端的函数，它在整个数轴上绝对可积、处处连续，在任何有限区间上逐段光滑，因此，它的$Fourier$积分表示点点收敛到其自身.下面计算其$Fourier$积分表示，由于$f(x)$是偶函数，故$B(\lambda)=0$. 直接计算，可得

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

代入$Fourier$积分表示，即得所要证明的等式.

Example

求出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

的$Fourier$积分; 并说明其收敛性.

解： 由于函数$f(x)$为偶函数，因此$B(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t=0$. 直接计算，可得

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}.$$

综上，函数$f(x)$的*Fourier*积分表示为$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}\lambda$. 由于除去$x=\pm1$之外，函数$f(x)$处处连续；而在$x=\pm1$处，函数$f(x)$的左、右极限的平均值$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{1}{2}$. 因此，函数$f(x)$的*Fourier*积分表示

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & x=\pm1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$x=0$时，即得*Dirichlet*积分.

§12.4.1 *Fourier*积分

*Fourier*积分的复数形式

由Euler公式$e^{ix} = \cos x + i\sin x \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$，从而

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(x-t)}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt.
\end{aligned}$$

§12.4.1 Fourier积分

于是, 函数$f(x)$的Fourier积分表示化为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t.$$

这是**Fourier积分的复数形式**.

§12.4.1 *Fourier*积分

【*Fourier*积分复数形式的收敛定理】 设函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，在任何有界闭区间上逐段光滑，则对任意$x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

当$f(x)$连续时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = f(x).$$

§12.4.2 $Fourier$变换

- **定义:**

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t$$

称为函数$f(x)$ 的$Fourier$变换 或 像函数, 记为$F=\mathcal{F}[f]$;
而函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

称为函数$F(\lambda)$的$Fourier$逆变换或本函数,记为$f=\mathcal{F}^{-1}[F]$.

§12.4.2 *Fourier*变换

- **余弦变换与正弦变换:**

(1) 若函数$f(x)$是偶函数, 则$f(x)$的$Fourier$变换为

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \mathrm{d}t,$$

称它为$f(x)$的*Fourier*余弦变换; 其逆变换公式为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

§12.4.2 $Fourier$变换

- **余弦变换与正弦变换:**

(2) 若函数$f(x)$是奇函数，则$f(x)$的$Fourier$变换为

$$F(\lambda)=-2i\int_0^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t,$$

为避免出现复数因子i，定义函数

$$G(\lambda)=iF(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t,$$

称它为$f(x)$的$Fourier$正弦变换；其逆变换公式为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}G(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda.$$

Example

p 是一个正常数，并设函数 $f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2p}, & |x| \leqslant p, \\ 0, & |x| > p. \end{cases}$ 试求 $f_p(x)$ 的$Fourier$变换以及$Fourier$反演公式.

解: $f_p(x)$是一个偶函数, 其*Fourier*变换及逆变换皆是余弦变换(仅系数不同), 且满足*Fourier*积分表示的收敛定理的条件, 即

$$\begin{aligned} F_p(\lambda) &= 2\int_0^{+\infty} f_p(x)\cos\lambda x \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^p \frac{1}{2p}\cos\lambda x \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin p\lambda}{p\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_p(\lambda)\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin p\lambda}{p\lambda}\cdot\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2p}, & |x| < p, \\ \dfrac{1}{4p}, & |x| = p, \\ 0, & |x| > p. \end{cases} \end{aligned}$$

Example

求函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$的*Fourier*正弦变换和余弦变换.

解： 把函数$f(x)$先作奇延拓，即当$x<0$时，补充定义

$$f(x)=-f(-x)=-\frac{1}{\sqrt{-x}}.$$

再作*Fourier*变换可得函数$f(x)$的*Fourier*正弦变换，或者直接计算，得函数$f(x)$的*Fourier*正弦变换为

$$G(\lambda)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

其中利用了Fresnel积分(13章)的结果

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

类似计算，得$f(x)$的Fourier余弦变换

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

注记： 例题中的函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$不满足Fourier**积分表示收敛定理**中的条件，但是仍然求出了它的Fourier变换. 这是因为收敛定理中的条件**是充分条件，不是必要的**. 事实上，收敛定理的条件可放宽为：

(1°) 函数$f(x)$在任何有限区间上绝对可积；

(2°) 存在$M>0$，当$|x|\geqslant M$时，$f(x)$单调减，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

可以验证，函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$满足上面两个条件.

Example

已知积分方程$\int_0^{+\infty} g(t)\cos xt\mathrm{d}t = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$，求$g(x)$.

分析：方程中的广义积分与余弦变换及逆变换公式相差个系数，当凑成余弦变换，则$g(x)$便是像原函数；当凑成余弦逆变换公式时，则$g(x)$为已知函数的*Fourier*变换，即像函数.

解法1： 由已知令

$$F(x) = 2\int_0^{+\infty} g(t)\cos xt\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

则$F(x)$为$g(t)$的余弦变换，$g(t)$便是像原函数，故

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\lambda\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda = \frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{\pi(1-x^2)}.$$

解法:2： 由已知令

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}g(t)\cos xt\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

则$g(t)$为$f(x)$的余弦变换, 故

$$g(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\lambda}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

即 $$g(x)=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{\pi(1-x^2)}.$$

§12.4.3 *Fourier*变换的性质

记$f(x)$ 的*Fourier* 变换为

$$\mathcal{F}[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi.$$

以

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda$$

表示函数$F(\lambda)$ 的*Fourier* 逆变换.

§12.4.3 *Fourier*变换的性质

1° 共轭性:

$$\mathcal{F}^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} \cdot \overline{\mathcal{F}[f]}\,, \qquad \mathcal{F}[f(-x)] = \overline{\mathcal{F}[f(x)]}\,.$$

2° 线性性:

若函数$f(x)$和$g(x)$存在*Fourier*变换, 则有

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g].$$

3° 频移特性和时移特性:

$$\mathcal{F}[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] = \mathcal{F}[f](\lambda + \lambda_0).$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\lambda)e^{ix_0\lambda}] = f(x + x_0).$$

§12.4.3 *Fourier*变换的性质

4° 导函数的*Fourier*变换:

若$f(\pm\infty)=0$, 且其导数$f'(x)$ 的*Fourier* 变换存在, 则有

$$\mathcal{F}[f'(x)](\lambda)=i\lambda\mathcal{F}[f(x)](\lambda).$$

一般地, 若$f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=\cdots=f^{(k-1)}(\pm\infty)=0$, 且其$k$阶导数$f^{(k)}(x)$的*Fourier*变换存在, 则有

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\lambda)=(i\lambda)^k\mathcal{F}[f(x)](\lambda).$$

5° 像函数的导数:

若函数$f(x)$和$xf(x)$的傅里叶变换都存在, 则$f(x)$ 的*Fourier* 变换是可微的, 并且有

$$F'(\lambda)=\mathcal{F}[-ixf(x)](\lambda).$$

§12.4.3 $Fourier$变换的性质

卷积定义： 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 都在$(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积. 称含参变量积分

$$f*g(x):=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\,dt$$

为f 与g 的**卷积**. 易知, 卷积有如下性质:

1) 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 都在$(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积,

则$f*g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积.

2) 卷积满足通常乘积的三个性质:

$$f*g=g*f \qquad \text{(交换律)}$$

$$(f*g)*h=f*(g*h) \qquad \text{(结合律)}$$

$$(f+g)*h=f*h+g*h \qquad \text{(分配律)}$$

§12.4.3 *Fourier*变换的性质

6° 卷积的*Fourier*变换:

设函数$f(x)$和$g(x)$在整个实数轴上绝对可积，则卷积$f*g$也在整个实数轴上绝对可积，并且有

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$$

其中卷积$f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$

7° Parseval等式:

设函数$f(x)$在整个实数轴上可积且平方可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda,$$

其中$F(\lambda)$是$f(x)$的*Fourier*变换.

Example

计算Gauss函数$f(x)=e^{-ax^2}$ $(a>0)$ 的*Fourier* 变换.

解： 因$f'(x)=-2axf(x)$, 故$f(x)$ 和$f'(x)$ 都在$(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 且当$|x|\to+\infty$ 时, $f(x),f'(x)$ 都趋于0. 因此,
由*Fourier* 变换的性质, 得

$$\begin{aligned}i\lambda F(\lambda)&=\mathcal{F}[f'(x)](\lambda)=\mathcal{F}[-2axf(x)](\lambda)\\&=-2ai\mathcal{F}[-ixf(x)](\lambda)=-2aiF'(\lambda),\end{aligned}$$

即,

$$F'(\lambda)=-\frac{\lambda}{2a}F(\lambda).$$

解此微分方程, 得

$$F(\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

这里$C = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

Example (微分方程的求解)

考虑以下热传方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ -\infty < x < +\infty, \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

其中初始条件$\varphi(x)$在整个实数轴上可积且平方可积.

解： 对未知函数$u(x,t)$和初始条件$\varphi(x)$作关于x的*Fourier*变换，记$\hat{u}(\lambda,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$，$\hat{\varphi}(\lambda)=\mathcal{F}[\varphi(x)]$，则由*Fourier*变换的性质，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -a^2\lambda^2\hat{u}, \quad t>0, \\ \hat{u}(\lambda,\ 0)=\hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

这是一个一阶常微分方程的初值问题，解之可得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

再作*Fourier*逆变换，由卷积定理可得

$$u(x,t)=\varphi(x)*\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}y.$$

注记： 由上面例题可以看出，*Fourier*变换将一个偏微分方程转化为一个常微分方程，从而简化了计算.

小结

- 把定义在$(-\infty,+\infty)$上或$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$表示成Fourier积分，或求Fourier变换、正弦变换与余弦变换;
- 利用Fourier变换求某些不易求的积分值;
- 利用Fourier变换求某些积分、微分方程的解.

本节的重点是求Fourier变换，熟记Fourier变换公式，其它内容了解即可.