第四章　动量定理

§ 4.1 冲量与动量定理

1、动量

单位: kg·m·s^{-1}

牛顿第二定律: $\vec{F}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$

定义动量: $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$

于是有：作用在质点上的外力等于质点动量随时间的变化率。

2、单质点的动量定理

牛顿第二定律→质点的动量定理：

由 $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ ⟹ $\vec{F}dt=d\vec{p}$

动量定理微分形式

⟹ $$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)dt=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}d\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

定义 $d\vec{I}=\vec{F}dt$ 为力的元冲量，则冲量 $\vec{I}$ 为力对时间的积分

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)dt=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

动量定理积分形式

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

即力对质点的冲量等于质点动量的增加，这就是质点动量定理。

动量定理说明，力在时间上的积累作用产生的效果是使质点的动量增加。

动量定理常用于碰撞过程，在碰撞过程中，相互作用时间很短且量值变化很大，碰撞(或打击)过程的平均冲击力定义为

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

结论：物体之间的相互作用力，取决与动量变化和作用时间。


§ 4.2 质点系动量定理

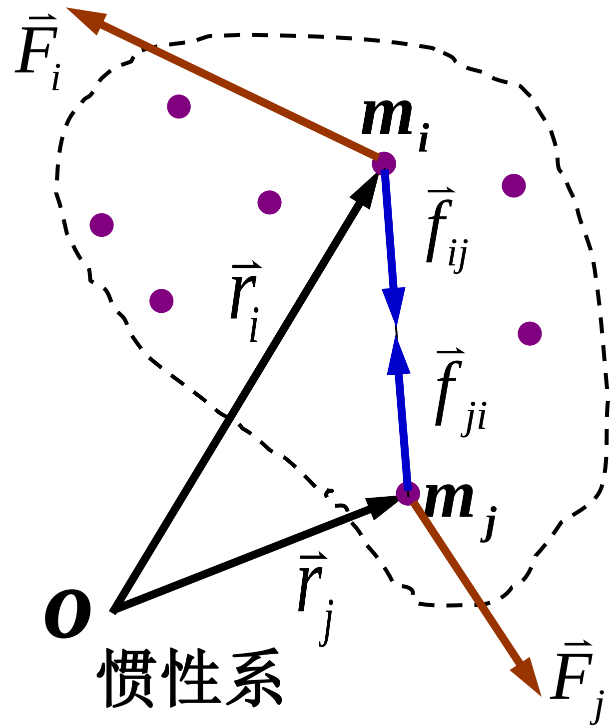
1、质点系动量定理

质点系(质点组)——由相互作用的若干个质点组成的系统。

内力——系统内各质点间的相互作用力。

$$\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$$

外力——系统以外的其它物体对系统内任意一质点的作用力，例如：$\vec{F}_i$，$\vec{F}_j$。



设质点组由N个质点组成，则第i个质点的动力学方程为：

$$\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}=\frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

对所有质点的运动方程求和，则有

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i+\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{N}\vec{f}_{ij}=\frac{\sum_{i=1}^{N}d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}{dt}$$

系统内所有质点所受的外力总和

系统内所有质点所受的内力总和 $=0$

$$\vec{F}_{ex}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

微分形式

或者

$$\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ex}dt'=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_{i0}=\vec{p}-\vec{p}_0$$

积分形式

$$\vec{F}_{ex}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i,\qquad \vec{p}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i$$

质点系的动量定理——作用于系统的合外力在一段时间内的总冲量等于系统动量的增量。

几点说明：

(1)只有外力对体系的总动量变化有贡献。内力对体系的总动量变化没有贡献，但内力对动量在体系内部的分配是有作用的；

(2)动量定理是矢量式，应用时可用沿坐标轴的分量式求解, 如 x 轴分量式

$$\sum_i F_{ix} = \frac{d\left(\sum_i p_{ix}\right)}{dt}$$

或者

$$\int_{t_0}^{t}\left(\sum_i F_{ix}\right)dt' = p_x - p_{0x}$$

即冲量在某一方向上的分量等于该方向上动量的增量。

(3)动量定理与牛顿定律的关系：

①对一个质点，牛顿定律表示的是力的瞬时效应，而动量定理表示的是力对时间的积累效果；

②牛顿第二定律只适于质点，不能直接用于质点系；动量定理既适于质点又适于质点系；

③牛顿定律和动量定理都只适用于惯性系，要在非惯性系中应用动量定理，必须考虑惯性力的冲量。

2、动量守恒定律

由体系动量定理：$\vec{p}-\vec{p}_0=\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ex}dt'$

若 $\vec{F}_{ex}=0$，则

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=\vec{p}_0=\text{恒矢量}$$ ——质点系动量守恒

如果质点系所受合外力为零，则质点系的总动量不随时间改变

$$\vec{p}=\sum_i\vec{p}_i=\text{常矢量}$$

几点说明：

①只适用于惯性系。

②动量守恒是矢量式，它有三个分量，各分量可以分别守恒：

$$F_{ex,x}=0 \Rightarrow p_x=const$$

$$F_{ex,y}=0 \Rightarrow p_y=const$$

$$F_{ex,z}=0 \Rightarrow p_z=const$$

③内力对体系的动量无贡献，但内力对体系动量的具体分配有重要作用。当体系所受外力矢量和为零时，

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \ldots = const$$

但由于内力作用，可以有

$$\vec{p}_1 \neq \vec{p}_1', \vec{p}_2 \neq \vec{p}_2' \ldots$$

④在某些过程（如爆炸、碰撞）中，体系虽受外力，但外力有限(外力<<内力)，过程时间很短，外力冲量很小；而其间内力很大，体系内每一部分的动量变化主要来自内力的冲量，**外力的冲量可忽略不计，体系动量近似守恒**，故可以利用动量守恒定律研究体系内部各部分间的动量再分配问题。

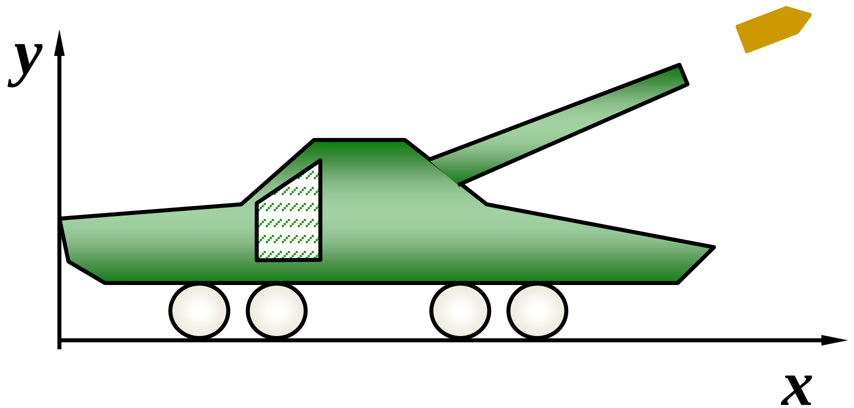
⑤动量守恒定律虽可由牛顿定律导出，但它比牛顿定律的适用范围更广；尤其是微观领域的某些过程中，牛顿定律也许不成立，但动量守恒定律仍然成立。

例：在β衰变中，中微子的发现

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu}_e$$

1930年 泡利 中微子假说
1956年 实验观测到中微子

例题1：如图表示一战车，置于摩擦很小的铁轨上，车身质量为 m_1 ，炮弹质量为 m_2，炮筒与水平面夹角θ角炮弹以相对于炮口的速度为 $\vec{v}_2$ 射出，求炮身后坐速率 $\vec{v}_1$ 。

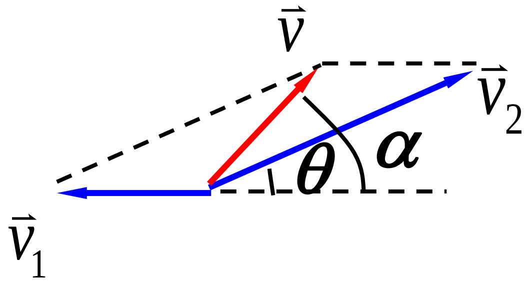


解: 本题铅直方向动量不守恒。水平方向动量守恒

炮弹相对于地面的速度 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

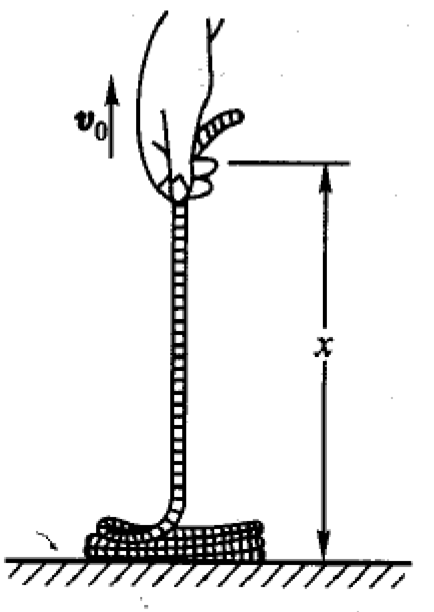
由图得 $m_2(v_2\cos\theta - v_1) - m_1 v_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_1}\cos\theta$$



例题2：单位长度质量为ρ的柔软绳索放在水平台面上，用手将绳索的一端以恒定速率v_0向上提起，求当提起高度为x时手的拉力。

解：这是一个质点系的动量问题，可用体系动量定理求解。以整根绳子作为研究体系，设其长度为L，它共受3个力：重力$\rho L g$，台面的支撑力N 和手的拉力F。在这三个力的共同作用下，体系的动量不断变化。选取地面上的一点为坐标原点建立竖直向上的x轴。在t 时刻，当绳索提起x时体系的动量为：



$$p(t) = \rho x v_0$$

根据动量定理，外力的矢量和等于体系动量的变化率

$$F + N - \rho L g = \frac{dp(t)}{dt} = \rho v_0 \frac{dx}{dt} = \rho v_0^2$$

这里我们用到 $\frac{dx}{dt} = v_0$，另外支撑力N只与剩在地面上的绳索质量有关，即

$$N = \rho (L - x) g$$

所以手的拉力$\boldsymbol{F}$为：

$$F = \rho xg + \rho v_0^2$$

长为$\boldsymbol{x}$的绳索的重力

使体系动量增加所需的附加力

§4.3变质量物体的运动

●**变质量**:是指体系在运动过程中不断与外界交换质量

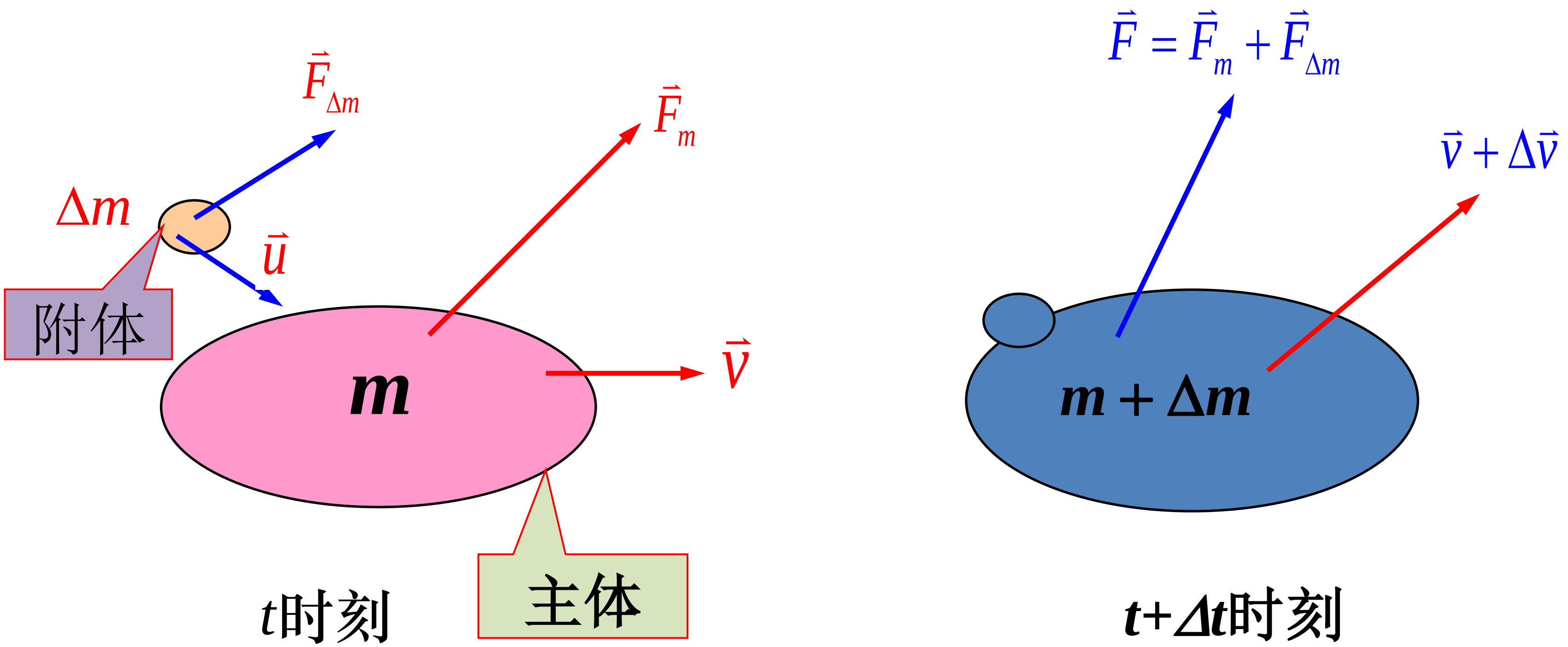
1、变质量体系运动方程

对这样体系的运动过程分析思路如下：

①可分解为一系列元过程；

②在元过程中，其组成是确定的，质量是不变的，体系动量变化服从体系动量定理；

③由此即可导出主体的运动方程。



如图，在t时刻，主体m与附体Δm是分离的。经过Δt时间，附体并入主体。于是，由体系的动量定理，可得

$$(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-(m\vec{v}+\Delta m\vec{u})=\vec{F}\Delta t$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m\Delta\vec{v}+(\vec{v}-\vec{u})\Delta m+\Delta m\Delta\vec{v}=\vec{F}\Delta t}$$

$$\Rightarrow m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=(\vec{u}-\vec{v})\frac{\Delta m}{\Delta t}+\vec{F}-\Delta\vec{v}\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

令 $\Delta t\to 0$ 则 $\Delta v\to 0$，上式取极限得

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}+\vec{F}}$$

外力：$\vec{F}=\vec{F}_m+\vec{F}_{\Delta m}$

$(\vec{u}-\vec{v})\dfrac{dm}{dt}\mapsto$ 附体对主体的作用力

这就是变质量质点（即主体）运动方程（密舍而斯基方程）

几点说明：

①当 $\bar{u}=\bar{v}$ 时，可得 $m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}$

方程形式上与牛顿第二定律一样，但注意**m**是变量。

②当 $\bar{u}=0$ 时，方程变为

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}+\bar{v}\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}(m\bar{v})=\frac{d\bar{p}}{dt}=\bar{F}$$

这与动量形式的牛顿第二定律 $\frac{d\bar{p}}{dt}=\bar{F}$ 一致，因为此时

$$\bar{p}=\sum_i m_i\bar{v}_i=m\bar{v}+\Delta m\cdot 0=m\bar{v}\mapsto \text{动量仅由主体决定}$$

③变质量质点的运动方程是在 $\frac{dm}{dt}>0$ 的情况下导出，但当 $\frac{dm}{dt}<0$ 时，结论仍然正确。

④当主体参与外界两种(或两种以上)质量交换过程时，变质量质点运动方程为：

$$\boxed{m\frac{d\bar{v}}{dt}=\left(\bar{u}_1-\bar{v}\right)\frac{dm_1}{dt}+\left(\bar{u}_2-\bar{v}\right)\frac{dm_2}{dt}+\bar{F}}$$

2、火箭飞行原理

设火箭喷出的气体相对速度沿火箭轨道切向，且为一常量v_r，并且忽略火箭的重力和空气阻力的影响。

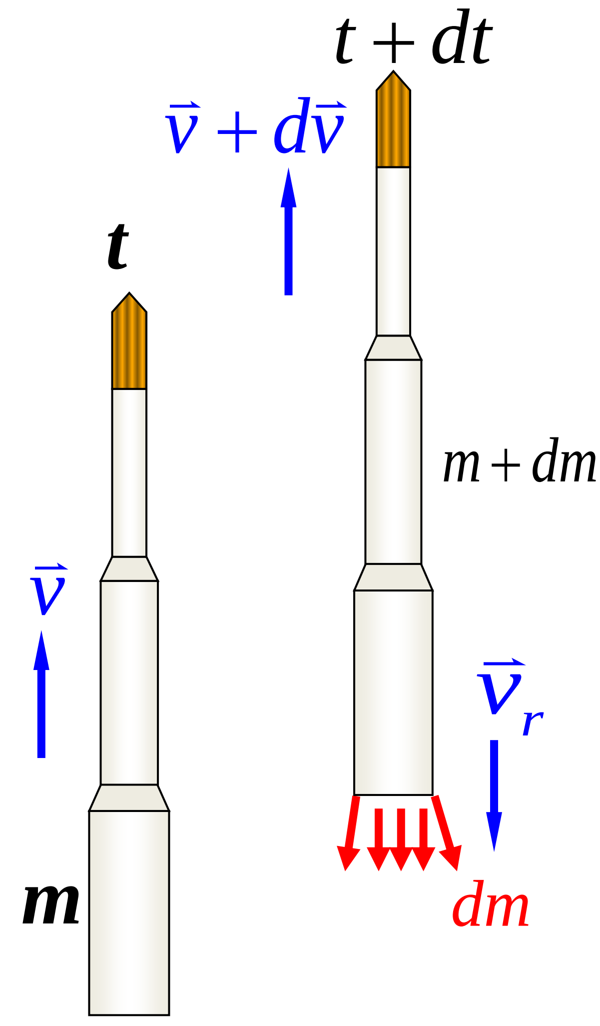
根据变质量质点运动方程，有

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}$$

由于是一维运动，且相对速度 $\vec{u}-\vec{v}$ 与 $\vec{v}$ 的方向相反，得

$$m\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow dv=-v_r\frac{dm}{m}$$



注意，上式中$dm<0$，$dv>0$，两边同时积分得

$$-\int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m}=\frac{1}{v_r}\int_0^{v_f}dv \quad \Longrightarrow \quad v_f=v_r\ln\frac{m_0}{m}$$

$\boldsymbol{m_0}$ — 火箭+燃料　　　$\boldsymbol{m}$ — 火箭自身质量

增大单级火箭的末速度有两种方法: **(1)增大$\boldsymbol{v_r}$**　**(2)增大$\boldsymbol{\frac{m_0}{m}}$**

考虑本身结构和必要的载荷，通常

$$v_r\approx 2\sim 3\,\text{km/s},\quad \frac{m_0}{m}\approx 6$$

目前单级火箭从静止开始至多可获得的末速度

$$v\approx 4\sim 5\ \ \text{km/s}$$

小于第一宇宙速度**7.9km/s**，所以单级火箭不能把人造地球卫星或其他航天器送入轨道。

增大末速度必须用多级火箭——由若干单级火箭串联形成。

以二级为例，第一次达到的速度为

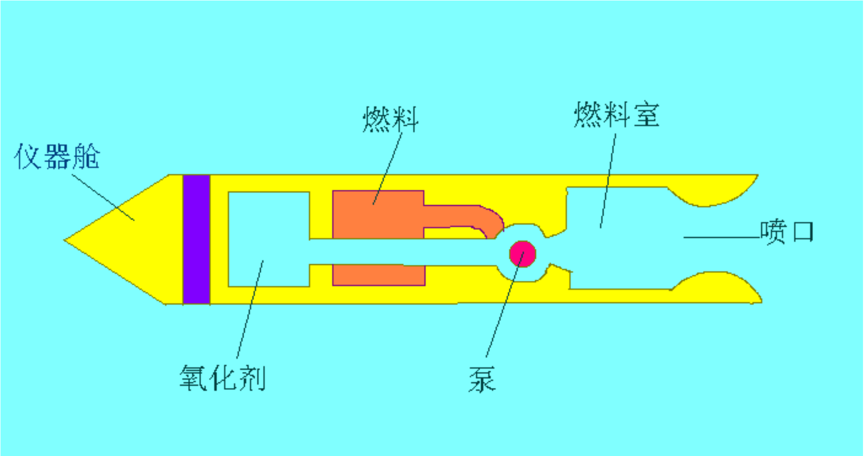
$$v_1 = v_r \ln(\frac{m_0}{m})_1$$

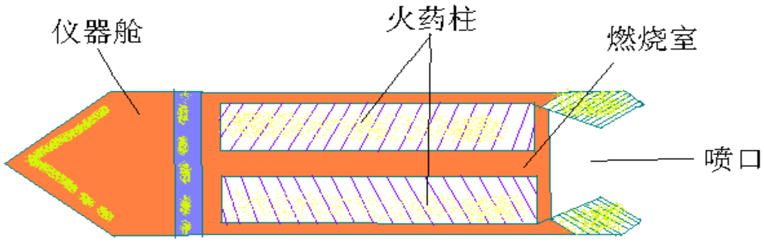
第二次达到的速度为 (设$v_{r1} = v_{r2}$)

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + v_r \ln(\frac{m_0}{m})_2 \\ &= v_r \left[\ln(\frac{m_0}{m})_1 + \ln(\frac{m_0}{m})_2 \right] \\ &= v_r \ln\left[(\frac{m_0}{m})_1 (\frac{m_0}{m})_2 \right] \end{aligned}$$

即每一次m_0/m不能太大，但其乘积却可以很大，所以末速度很大。

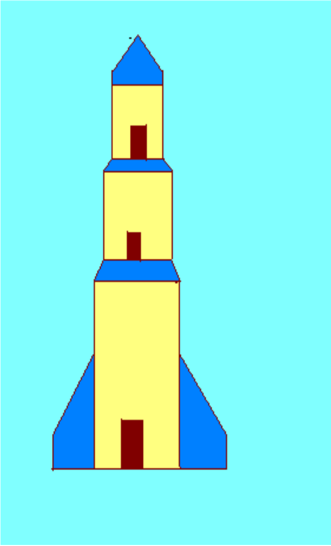
由于技术上的原因，多级火箭一般是三级。



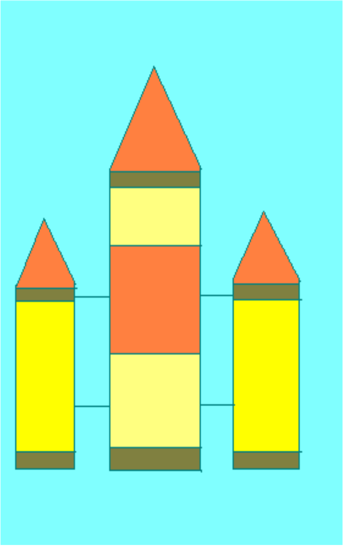


液体火箭推进原理示意图

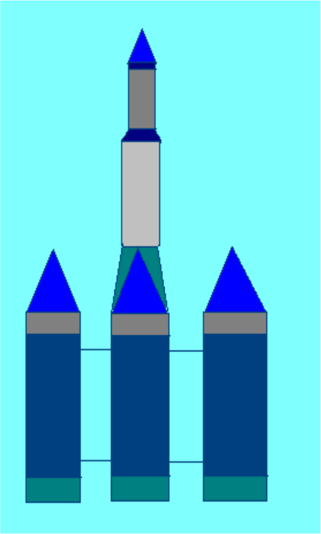
固体火箭推进原理示意图



串联式

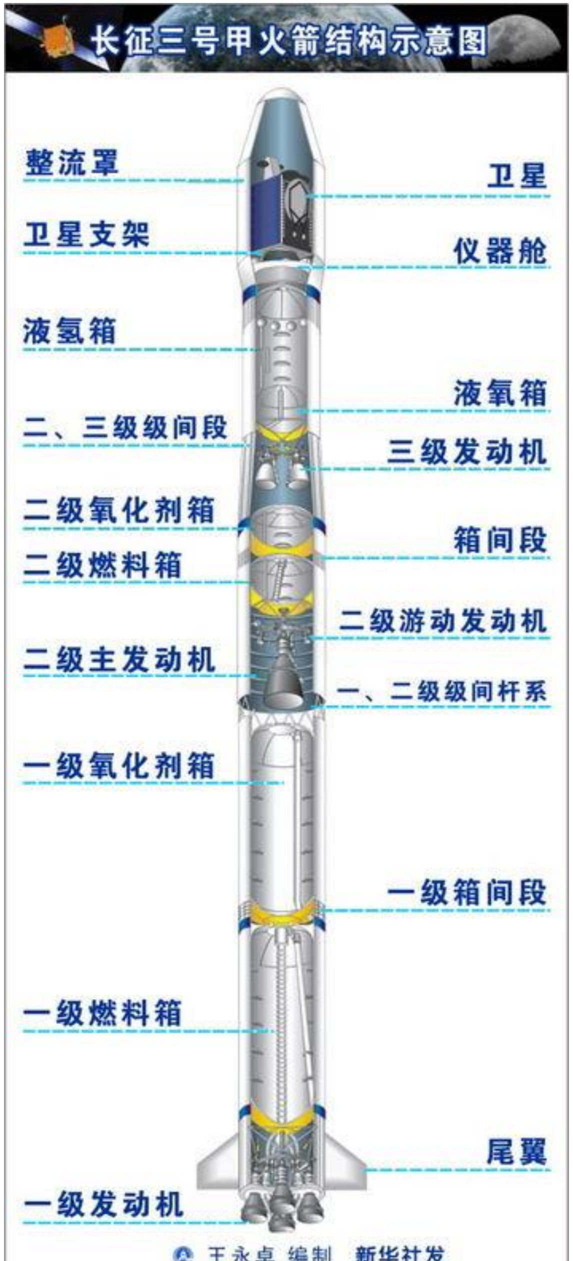


并联式

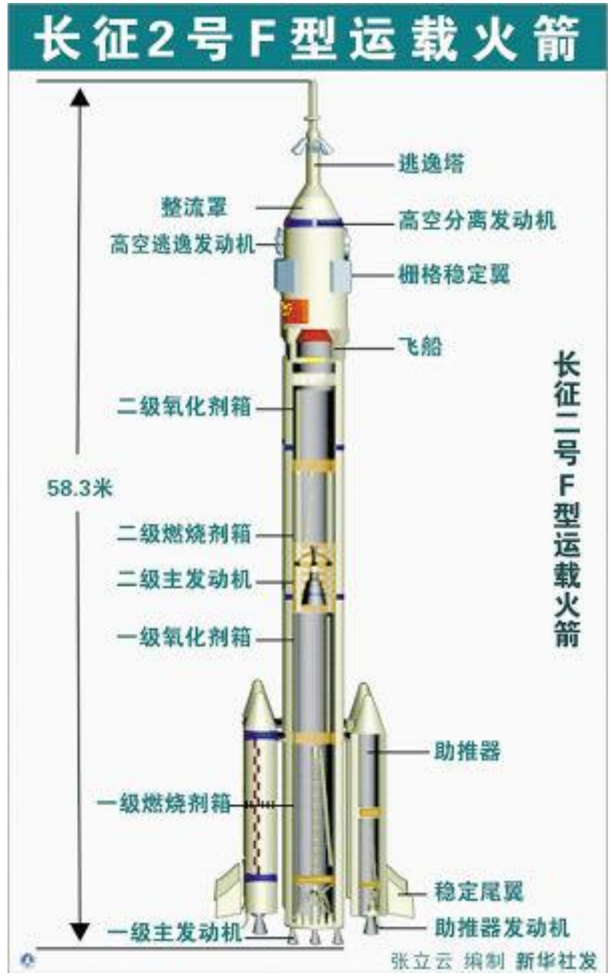


混联式

火箭“接力”的三种形式



长征三号甲运载火箭示意图



长征二号*F*型运载火箭示意图（神七 ）

法国“阿丽亚娜”运载火箭

美国大力神号运载火箭（“旅行者”探测器）

例题3：雨滴自由下落时质量为m_0，在下落过程中，单位时间凝聚的水汽质量为λ。试求雨滴经过时间t下落的距离。（忽略空气阻力）

解：设水汽附着于雨滴前的速度$u=0$，利用变质量动量定理

$$\frac{d}{dt}[(m_0+\lambda t)v]=(m_0+\lambda t)g$$

对此积分，并利用初始条件$t=0$时，$v=0$，得

$$v=\frac{m_0 t+\frac{1}{2}\lambda t^2}{m_0+\lambda t}g \quad \text{即} \quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}gt+\frac{m_0 g}{2\lambda}-\frac{m_0^2 g/2\lambda}{m_0+\lambda t}$$

再次积分，并利用初始条件$t=0$时，$x=0$，得

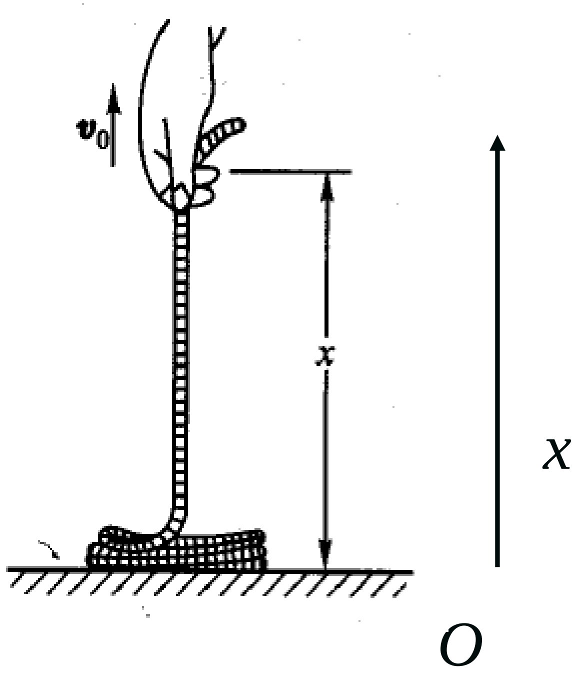
$$x=\frac{1}{2}g\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{m_0}{\lambda}t-\left(\frac{m_0}{\lambda}\right)^2\ln\left(1+\frac{\lambda}{m_0}t\right)\right]$$

这就是雨滴经时间 t 下落的距离。

例题4：　试以变质量物体运动的观点重新求解例2。

解：取提起的绳索为主体，落在地面的绳子为附体。建立竖直向上为x正方向，则附体速度为0，主体的质量为

$$m = \rho x \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dx}{dt} = \rho v_0$$



作用在体系上的外力为：

$$F_{ex} = F - mg = F - \rho x g$$

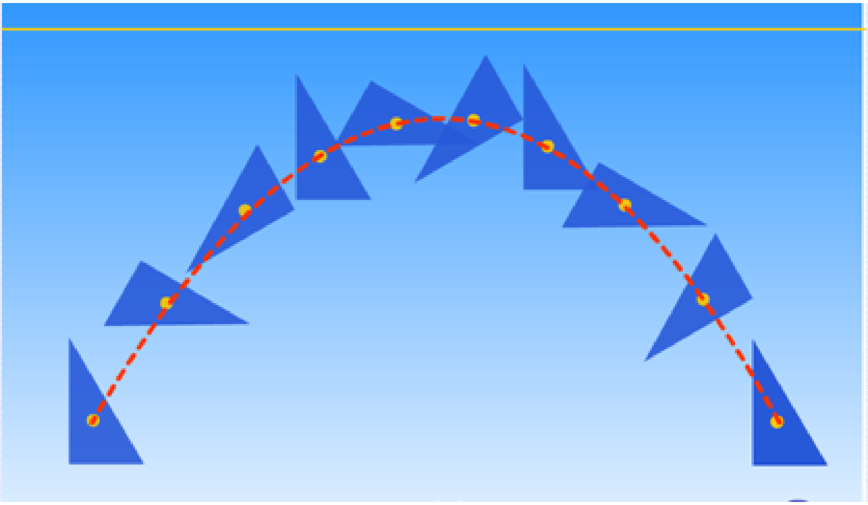
于是可得主体运动方程：

$$0 = -v_0 \frac{dm}{dt} + F_{ex} = -\rho v_0^2 + F_{ex} = -\rho v_0^2 + F - \rho x g$$

$$\Rightarrow F = \rho x g + \rho v_0^2$$

§4.4质心与质心运动定律

1.质心



由质点系动量定理:

$$\vec{F}_{ex}=\sum_i \vec{F}_i=\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\right)$$

考虑到

$$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$m=\sum_i m_i$为质点系的总质量

所以有

$$\vec{F}_{ex}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)=\left(\sum_i m_i\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right)=m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}$$

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

即质点系中存在一个特殊点*C*，满足

$$\boxed{\vec{F}_{ex} = m\vec{a}_c}$$

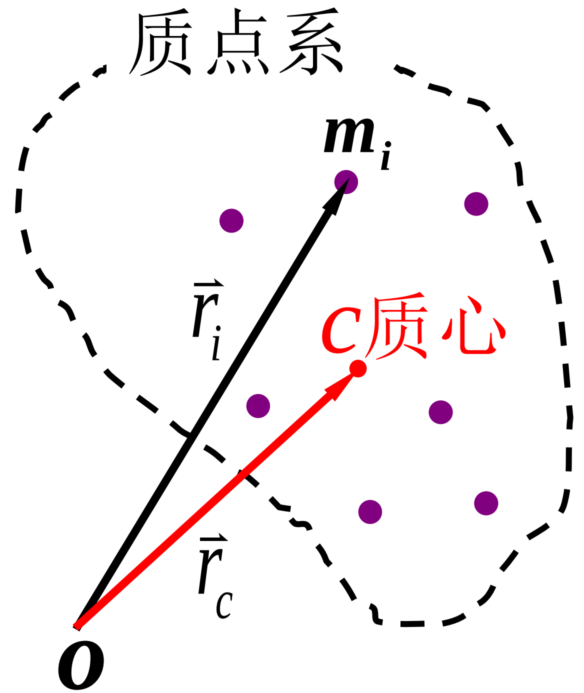
该特殊点*C* 称为<u>质心</u>。

2. 质心的求法

（1）分立质点组的质心

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \sum_i \frac{m_i}{m} \vec{r}_i$$

质心位矢是质点位矢的带权平均值，这个“权”是质点的质量。



在直角坐标系下可以表示为：

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$

➢两质点体系的质心：

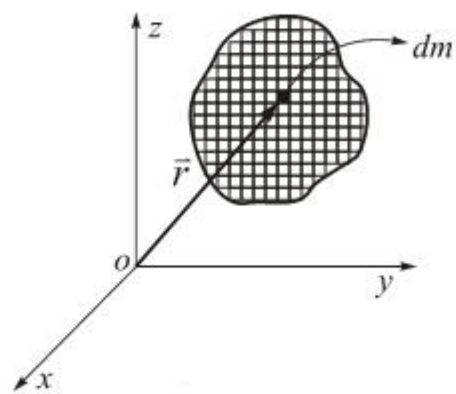
$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 - \vec{r}_c = \dfrac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_c = -\dfrac{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

质心必位于m_1与m_2的连线上，且质心与各质点距离与质点质量成反比。

(2) 连续质点组的质心

$$\boxed{\vec{r}_c = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \vec{r} dV}{\int \rho dV}}$$



在直角坐标系下可以表示为：

$$x_c=\frac{\int xdm}{\int dm},\quad y_c=\frac{\int ydm}{\int dm},\quad z_c=\frac{\int zdm}{\int dm}$$

（3）若一个物体由*A*、*B* 两部分组成，则质心表达式可改写为

x方向：

$$x_c=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}=\frac{\sum\limits_{i\in A} m_i x_i+\sum\limits_{j\in B} m_j x_j}{\sum\limits_{i\in A} m_i+\sum\limits_{j\in B} m_j}$$

$$=\frac{\left[\frac{\sum\limits_{i\in A} m_i x_i}{m_A}\right]m_A+\left[\frac{\sum\limits_{j\in B} m_j x_j}{m_B}\right]m_B}{m_A+m_B}=\frac{x_{c,A}m_A+x_{c,B}m_B}{m_A+m_B}$$

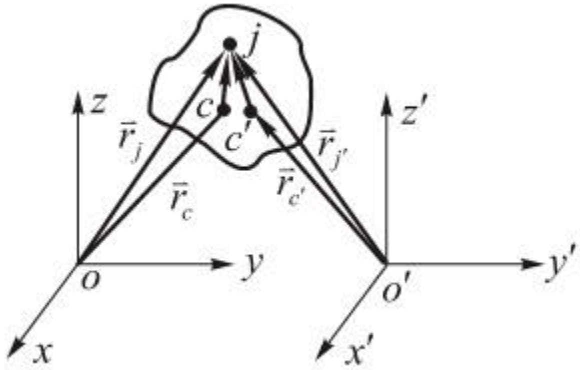
同样*y*、*z*方向质心位置分别为

$$y_c=\frac{y_{c,A}m_A+y_{c,B}m_B}{m_A+m_B},\quad z_c=\frac{z_{c,A}m_A+z_{c,B}m_B}{m_A+m_B}$$

推论：质量均匀分布的物体，其质心就在物体的几何中心。

（4）质心特点——相对质点系本身的唯一性

$$\Delta\vec{r}_{jc}=\vec{r}_j-\vec{r}_c=\frac{(\sum_i m_i)\vec{r}_j}{m}-\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}=\frac{\sum_i m_i(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{m}$$



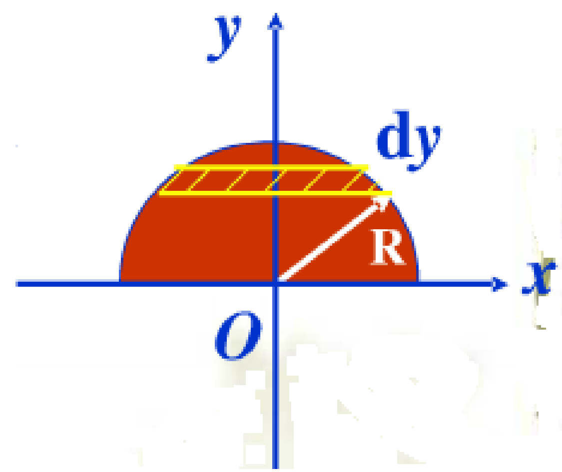
$$\Delta\vec{r}\,'_{jc'}=\vec{r}\,'_j-\vec{r}\,'_{c'}=\frac{(\sum_i m_i)\vec{r}\,'_j}{m}-\frac{\sum_i m_i\vec{r}\,'_i}{m}=\frac{\sum_i m_i(\vec{r}\,'_j-\vec{r}\,'_i)}{m}$$

$\because\ \vec{r}_j-\vec{r}_i=\vec{r}\,'_j-\vec{r}\,'_i$ 是由质点 i 指向质点 j 的有向线段

$$\boxed{\therefore\ \Delta\vec{r}_{jc}=\Delta\vec{r}\,'_{jc'}}$$

质心的位矢与坐标原点的选取有关，但质心与体系各质点的相对位置和坐标原点的选取无关!

例题5：均匀半圆盘的质心。



解： 如图所示，设质心坐标为（X_c，Y_c），平板的质量为m，面密度为σ。因为平板质量分布均匀，且圆心在原点，由对称性知$X_c=0$ 。对于板边缘上的每一点有$x^2+y^2=R^2$。将半圆形板分割成无数个平行于 轴的细条，每细条的质心为（$0, y_c=y$），则系统的质心为：

$$Y_c=\frac{1}{m}\int y_c dm=\frac{1}{m}\int_0^R y(\sigma 2xdy)$$

$$=\frac{1}{m}\int_0^R y(2\sigma\sqrt{R^2-y^2}\,dy)$$

$$=-\frac{2\sigma}{3m}\left(R^2-y^2\right)^{3/2}\Big|_0^R=\frac{2\sigma R^3}{3m}=\frac{4R}{3\pi}$$

即质心位置为 $\left(0,\frac{4R}{3\pi}\right)$

3. 体系动量定理与质心运动定理

引入质心概念，质点系动量则可表示为

$$\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i=m\frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}=m\dot{\vec{r}}_c=m\vec{v}_c$$

体系动量定理可写成

$$\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ex}dt'=\vec{p}-\vec{p}_0=m\vec{v}_c-m\vec{v}_{c0}$$

上述结论亦称为质心运动定理，其微分形式为

$$\vec{F}_{ex}=\frac{d}{dt}\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}_c)=m\ddot{\vec{r}}_c$$

质心的行为与一个质点相同!

几点说明：

（1）质心运动定理和牛顿定律的适用范围相同。

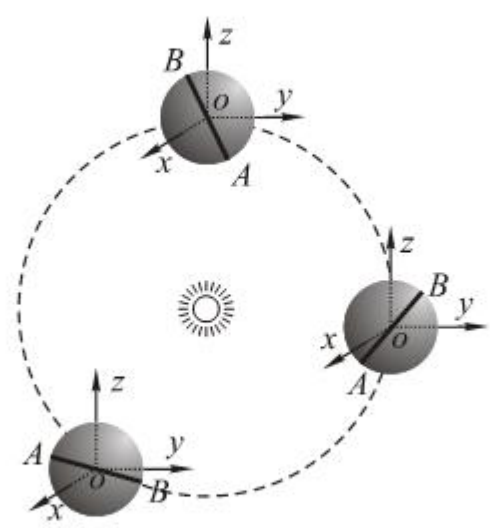
（2）质心运动定理实际上是矢量方程，可以写成三个分量方程，运动的独立性同样成立；

（3）在动力学上,质心是整个质点系的代表点，质心的运动只决定于系统的外力，内力不影响质心的运动。

（4）不论体系如何复杂，体系质心的行为与一个质点相同。从这个意义上说，牛顿定律所描绘的不是体系中任一质点的运动，而是质心的运动。而质心的存在，正是任意物体在一定条件下可以看成质点的物理基础。

4. 质心坐标系

质心坐标系：把原点取在质心上，坐标轴的方向始终与某固定参照系（惯性系）的坐标轴保持平行的平动坐标系。



说明：

①对于孤立体系或所受外力的矢量和为零的体系

$$\vec{p} = m\vec{v}_c = const，\quad \vec{v}_c = const$$

其质心坐标系为惯性系；

对于受外力作用的体系，则是非惯性系。

②物体相对固定参照系的运动可分解为它相对质心系的运动与质心系相对固定参照系的运动。

③质心系是“零动量系”。

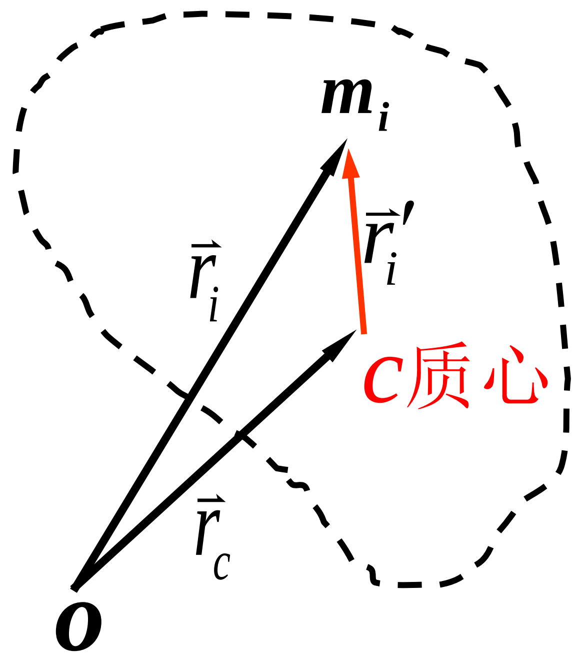
在质心参考系中，质点组的质心位矢为：

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_c\right)$$

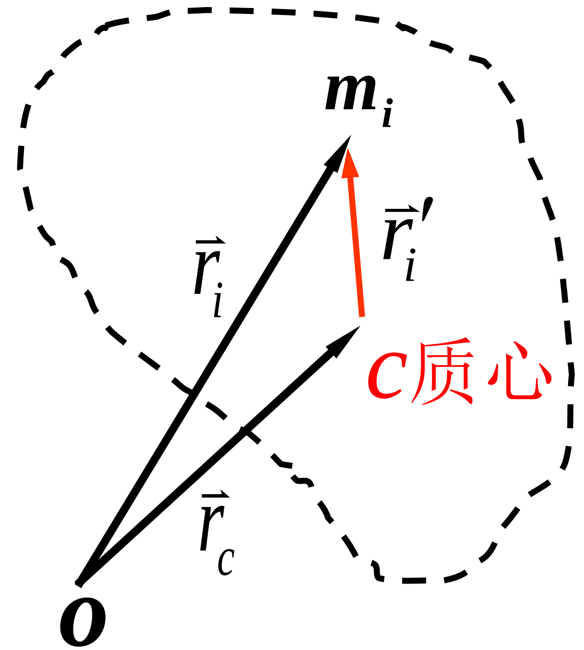
$$= \sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{r}_c$$

$$= m\vec{r}_c - m\vec{r}_c = 0$$



$$\boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0}$$

质心系中质心位置矢量是零矢量，即质心在坐标原点。



质点组相对质心坐标系的动量为

$$\boxed{\vec{p}' = \sum_i m_i \vec{v}_i' = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{r}_i'\right) = 0}$$

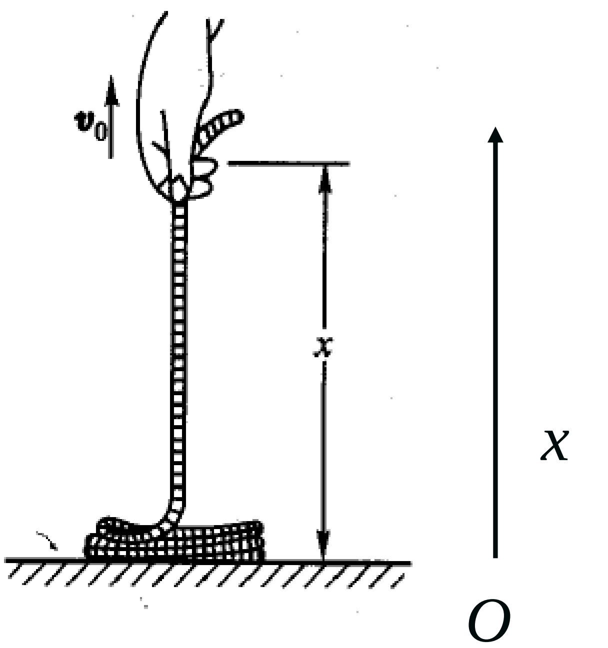
④质心坐标系在讨论质点系的力学问题中十分有用。

例题6： 试质心的观点重新求解例2。

解： 把绳子看作一质点系。建立竖直向上的**x**轴，当绳索提起 **x**时，其质心高度和速度分别为：

$$x_c = \frac{1}{m}\int_0^x \rho x' dx' = \frac{\rho x^2}{2m}$$

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{dx_c}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{\rho x}{m} v_0$$



由此可得质心加速度为

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho x}{m} v_0\right) = \frac{\rho v_0^2}{m}$$

对整根绳子应用质心运动定理，则有

$$F + N - mg = ma_c$$

这里支撑力**N**只与剩在地面上的绳索质量有关，即

$$N = \rho(L - x)g \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow F = \rho x g + \rho v_0^2$$

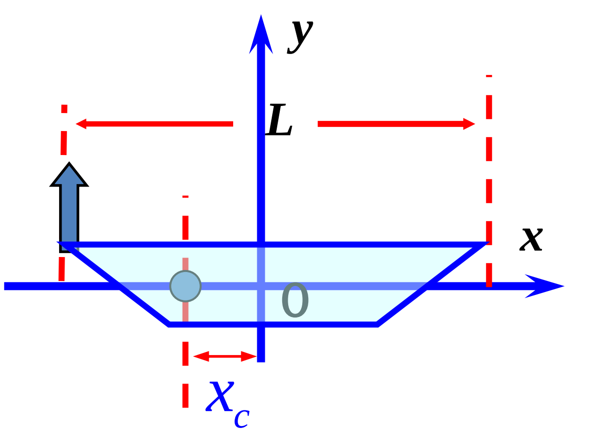
例题7： 质量为*M*=500kg、长为4m的木船浮在静止水面上，一质量为*m*=50kg的人站在船尾。此人以时快时慢的不规则速率从船尾走到船头，问船相对岸移动了多少距离?设船与水之间的摩擦忽略。

分析：由于体系原来静止，没有外力作用，质心加速度为零，质心在水平方向的位置保持不变，故宜用质心概念求解。

解： 取*x*轴沿水平方向，取原来船的中点为坐标原点，以人的行走方向为*x*正方向。人在船尾时，体系质心的坐标x_c为

$$x_c=\frac{mx_m+Mx_M}{m+M}=\frac{m\left(-\frac{L}{2}\right)+M\cdot 0}{m+M}$$

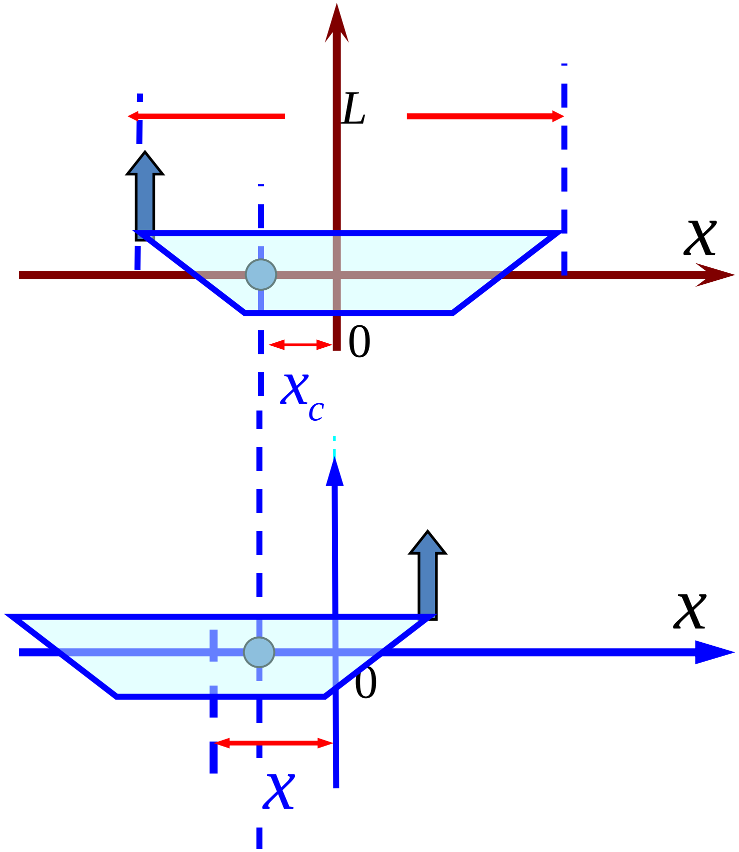
$$=-\frac{mL}{2(m+M)}=-\frac{50\times 4}{2(500+50)}=-\frac{2}{11}(m)$$



当人走到船头后，设船的中心坐标为x，
则体系质心坐标为

$$x_c' = \frac{m\left(x+\frac{L}{2}\right)+Mx}{m+M}$$

$$= x + \frac{mL}{2(m+M)} = x + \frac{2}{11}$$



质心水平位置不变，即 $x_c' = x_c$ ，故

$$x = -\frac{4}{11}(m)$$

故船相对岸移动了4/11米。

总结图

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

$$\vec{F}_{ex}dt = d\vec{p} = d(\sum_i m_i\vec{v}_i) \Rightarrow \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_c$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{ex}dt = d\vec{p}, \ \int_{t_0}^{t}\vec{F}_{ex}dt = \vec{p} - \vec{p}_0$$

$$\vec{F}_{ex} = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = const$$