8.(1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)dx=\frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{3}\pi^3)=2-\frac{2}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$

$b_n=0$

$f(x)$连续且分段可微 故 $1-x^2=1-\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$. $x\in[-\pi,\pi]$

令 $x=0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

9. 偶延拓. $f(x)=\begin{cases}1+x, & 0\le x\le\pi\\ 1-x, & -\pi\le x\le 0\end{cases}$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2+\pi$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}$

$f(x)$连续且分段可微 故 $f(x)=1+\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx$, $x\in[-\pi,\pi]$

取 $x=1$. 得 $2=1+\frac{\pi}{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2\pi}$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$

取 $x=4$ 得 $f(4)=f(4-2\pi)=2\pi-3=1+\frac{\pi}{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2\pi}$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}=\pi-\frac{3}{8}\pi^2$

10. $F_{\pm n}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{\mp in\frac{2\pi x}{T}}dx$

$F_0=\frac{H\tau}{T}$. $F_n=\frac{H}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}$ $(n\neq 0)$

$f(x)=\frac{H\tau}{T}+\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\right)\frac{H}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{in\frac{2\pi x}{T}}$

1. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}1\,dx=\frac{2a}{\pi}$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\cos nx\,dx=\frac{2\sin na}{n\pi}$. $b_n=0$

由Parserval等式. 得 $\frac{2a^2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^2 na}{n^2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2a}{\pi}$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{a(\pi-a)}{2}$. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2-3\pi a+3a^2}{6}$

2、$f(x)$可积，且平方可积，故 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$

由正项级数的比较判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 均收敛.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，且 $\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\frac{a_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}$，$\left|\frac{b_n}{n}\right|\le\frac{b_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_n}{n}\right|$ 收敛 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

3. $a_n=0$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$

由Parserval等式得：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=2$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

再由 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x$，　$x\in(0,\pi)$

该函数项级数在 $(0,\pi)$ 上内闭一致收敛

逐项积分可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}x$　$x\in(0,\pi)$

当 $x=0$ 和 π 时，上式也成立.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}x$

4.(2) $\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx=\frac{l}{2}\delta_{m,n}$

故该函数系是正交的. 其标准正交系为：

$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi}{l}x,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x,\ \cdots,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x.$

6. $\int_0^l\cos^2\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{l}{2}$

$\int_0^l f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{2l^2(2n-1)\pi(-1)^{n+1}-4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}$

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l(2n-1)\pi(-1)^{n+1}-8l}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$

5: $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{n+1}{2}\pi+\frac{1}{n-1}\sin\frac{n-1}{2}\pi\right]$

$b_n=0$

$|\cos x|$连续且分段可微.

故$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx$

7: $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6-n^2\pi^2}{n^3}\sin nx$

$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{6-n^2\pi^2}{n^4}\cos nx$

对后两式用Parserval等式即得

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}$

8: 奇延拓后求得 $b_n=\frac{\sin n}{n^2}$

$f(x)$连续且分段可微. 故 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx$. $x\in[0,\pi]$

9: 由(8), 令 $x=1$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=f(1)=\frac{\pi-1}{2}$.

再考虑周期2π的函数$g(x)=\frac{\pi-x}{2}$. $(0<x<2\pi)$

可知 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<2\pi)$. 令 $x=1$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$

利用Parserval等式. 可得

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{(\pi-1)^2}{6}$