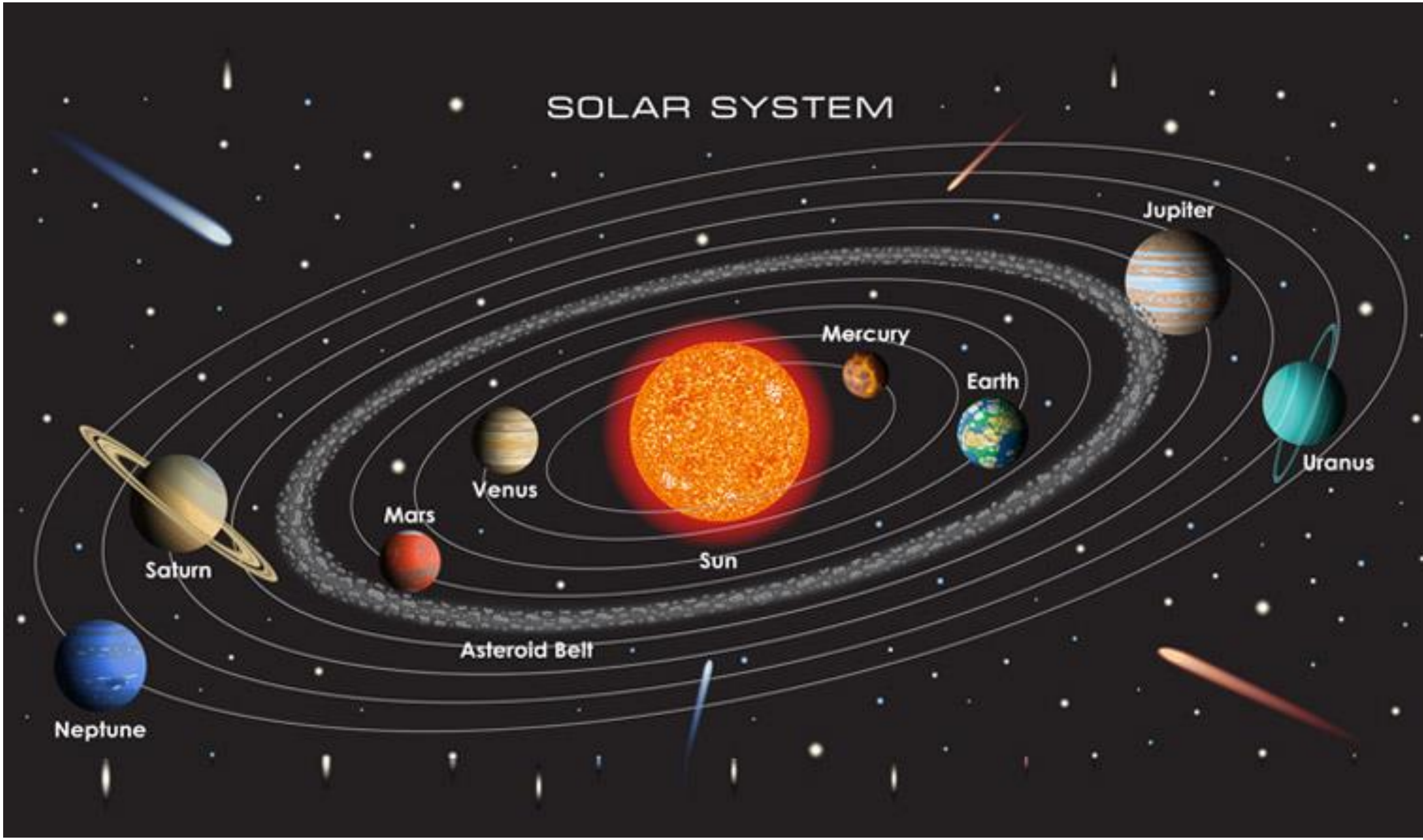
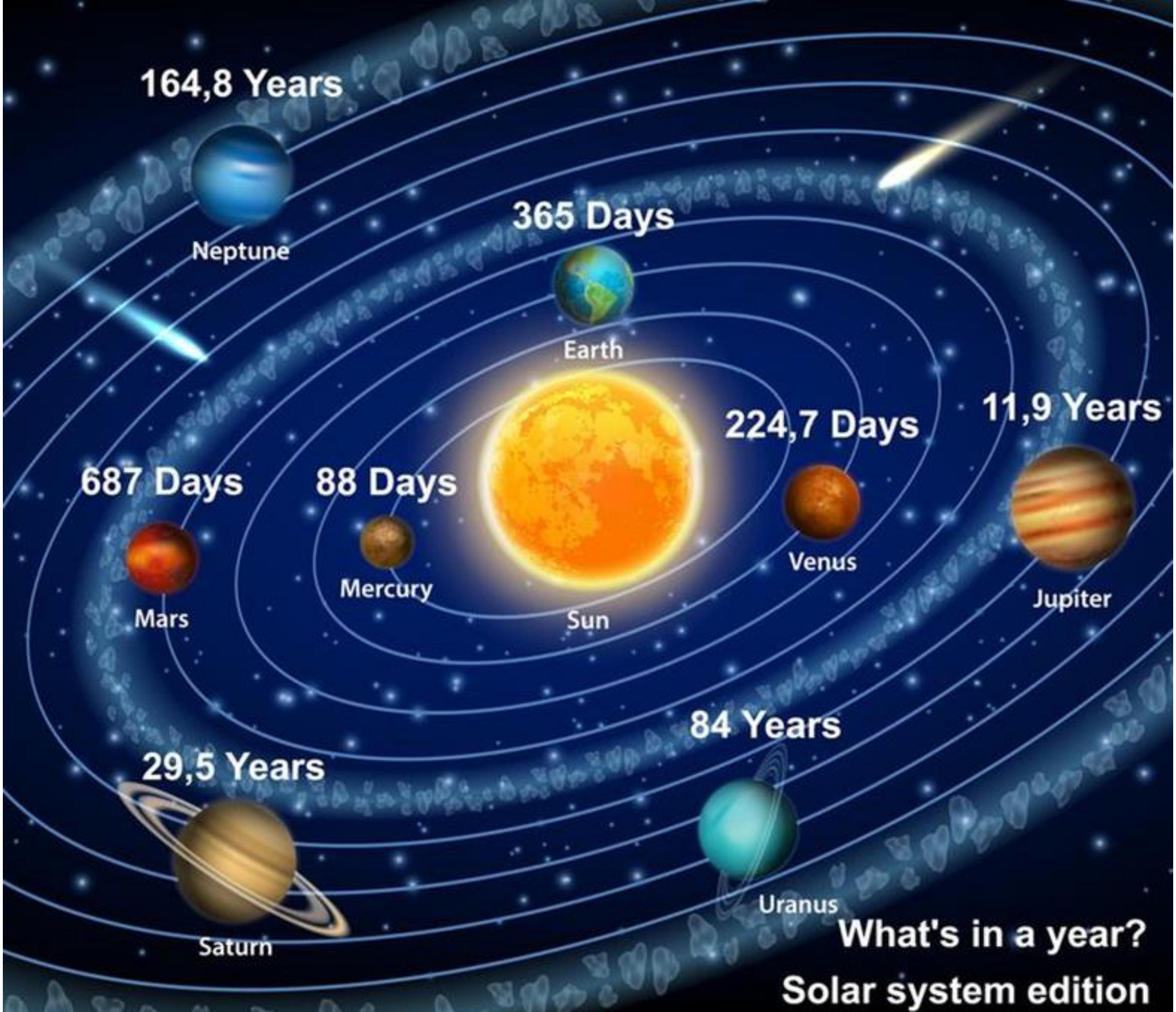
第七章　万有引力定律

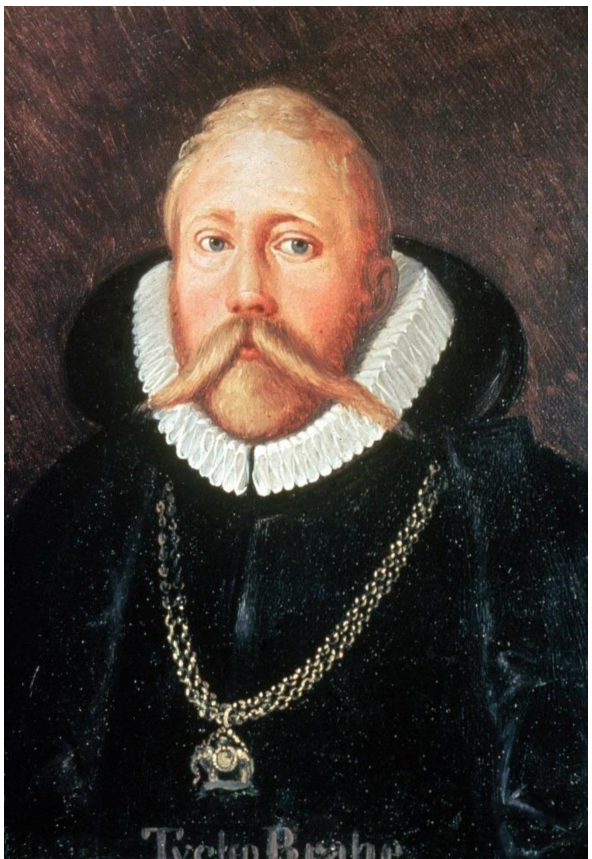

SOLAR SYSTEM
Jupiter
Mercury
Earth
Uranus
Venus
Mars
Saturn
Sun
Asteroid Belt
Neptune

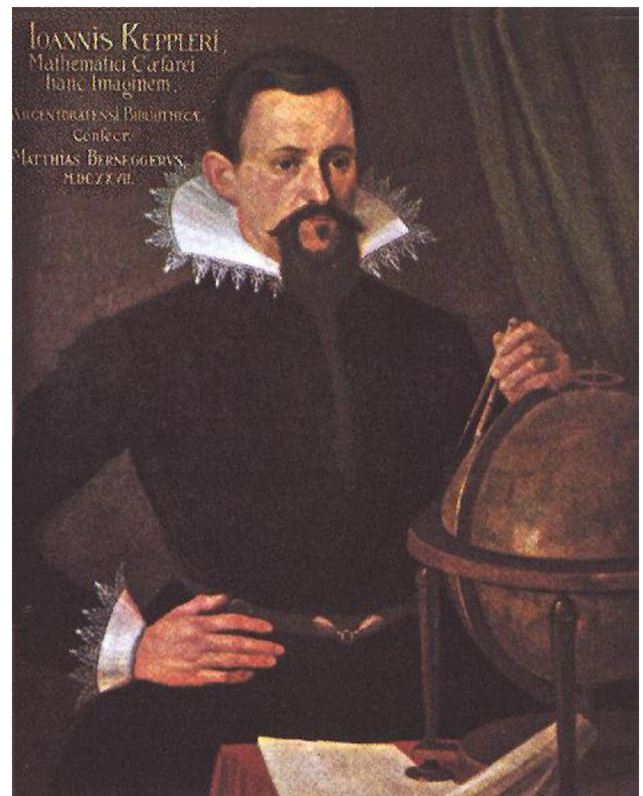

164,8 Years
Neptune
365 Days
Earth
224,7 Days
11,9 Years
687 Days
88 Days
Venus
Jupiter
Mercury
Mars
Sun
84 Years
29,5 Years
Uranus
Saturn
What's in a year?
Solar system edition

§7.1开普勒的行星运动三定律

1、开普勒三定律

- 人们对金、木、水、火、土五颗行星的运动有过长期观察；
- 特别是丹麦天文学家第谷（Tyeho Brahe ,1546-1601）进行了连续20年的仔细观测和记录；
- 他的学生开普勒（Kepler Johamnes,1571-1630）则花了大约20年的时间分析这些数据，总结出三条行星运动规律。

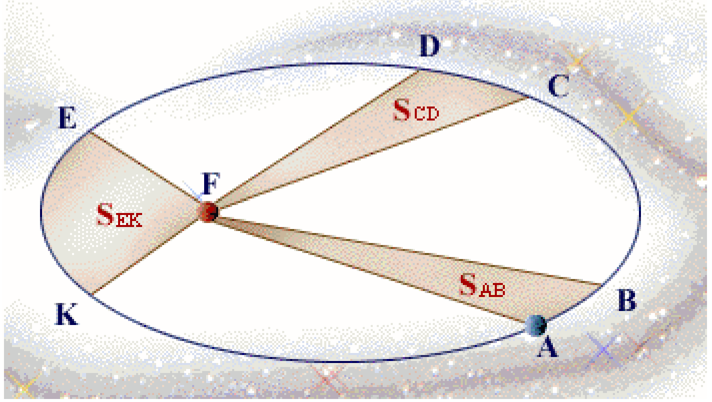




●开普勒三定律

①第一定律（轨道定律）：每个行星都各在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动。

②第二定律（面积定律）：由太阳到行星的矢径,在相等的时间内扫过相等的面积。



③第三定律（周期定律）：行星绕太阳运动的椭圆轨道半长轴 a 的立方与周期 T 的平方之比为常量:

$$\frac{a^3}{T^2}=k$$

这一常量对所有行星均相同(严格说应略有差异)仅与太阳性质有关,称开普勒常数。

●开普勒的太阳系

开普勒本人在得到上述的行星运动的规律之后，也曾试图寻找运动的原因，来解释行星运动的现象。

①土星的轨道在最外的一个大圆上；

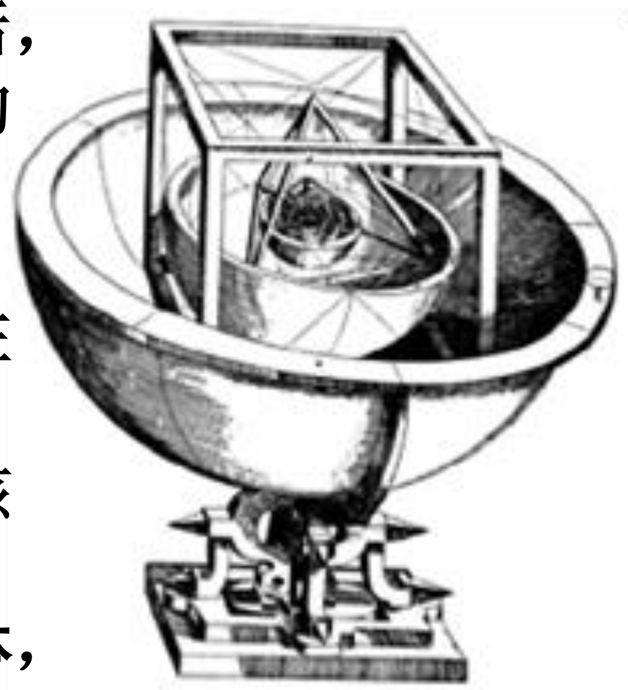
②在该球内作一内接的**正六面体**，木星轨道在该六面体的内切球面上；

③在这球内再作一**正四面体**，火星轨道则在该四面体的内切球面上；

④相继地，再在这球面内作一内接**正十二面体**，地球轨道在这十二面体的内切球面上；

⑤再继续作一内接的**正二十面体**，金星轨道就在二十面体的内切球面上；

⑥最后，作内接的**正八面体**，其内切球面就是水星的轨道所在之处。



因为正多面体的种类是不多的，只有5种，所以开普勒相信行星只有6颗。用上述的一系列正多面体的套装，开普勒能给出符合观测的行星轨道半径之间的比例（只是水星和木星的情况有显著的偏差），不得不说这是一个很有意义的尝试。

§7.2万有引力定律

1、引力的性质——平方反比

由开普勒轨道定律，为了简便，可把行星轨道看作圆形。这样，根据面积定律，行星应作匀速圆周运动，令 v 是行星的速率，r 是圆轨道的半径。由开普勒第三定律 可得

$$T^2 = r^3 / k$$

行星运动的向心加速度

$$a_n = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 k}{r^3} \cdot r = \frac{4\pi^2 k}{r^2}$$

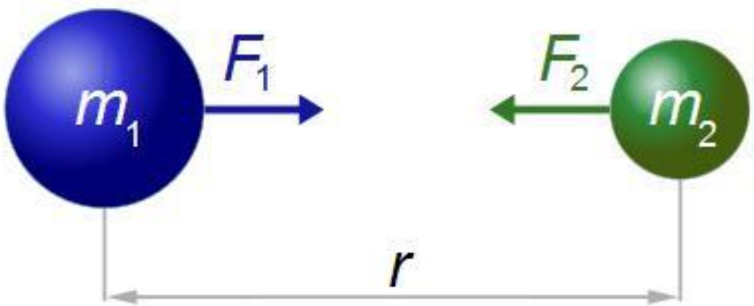
于是有：

$$F = m a_n = \frac{4\pi^2 k m}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

开普勒常数k取决于太阳的性质。由此，牛顿得到第一个重要结果：
如果太阳引力是行星运动的原因，则这种力应和距离的平方成反比。

2、万有引力定律

任何具有质量 m_1 和 m_2、相距为 r 的两质点之间的引力，总是沿着两质点之间的连线方向，其引力的大小为：



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

式中 G 是对所有质点都具有相同数值的常数，称为万有引力常数。m_1 和 m_2 称为两质点的引力质量。国际科学联盟理事会科技数据委员会1986年推荐的数值为 $G = 6.67259(85)\times10^{-11}$ 牛顿·米^2/千克^2。为了和引力质量相区别，我们以前定义的质量称为惯性质量。由上式可知G的量纲为：

$$[G]=\frac{[F][r^2]}{[m^2]}=M^{-1}L^3T^{-2}$$

3. 引力质量与惯性质量

引力质量——引力大小的量度，类似于库仑力中的电荷。

引力质量和作为惯性大小量度的惯性质量含义并不相同， 最简单的实验是在地面同一地点测定各种物体的重力加速度。

引力质量为m_1的物体受地球的引力为

$$F_1 = G\frac{m_{地} m_{1引}}{R^2}$$

引力质量为m_2的物体受地球的引力为

$$F_2 = G\frac{m_{地} m_{2引}}{R^2}$$

在同一地点，两物体自由下落加速度分别为g_1和g_2，由牛顿第二定律有

$$G\frac{m_{地} m_{1引}}{R^2} = m_{1惯} g_1 \Rightarrow g_1 = \frac{Gm_{地}}{R^2}\frac{m_{1引}}{m_{1惯}}, \qquad G\frac{m_{地} m_{2引}}{R^2} = m_{2惯} g_2 \Rightarrow g_2 = \frac{Gm_{地}}{R^2}\frac{m_{2引}}{m_{2惯}}$$

实验表明, 同一地点各种物体的重力加速度相等, 即

$$g_1 = g_2 = g$$

代入上式得

$$\frac{m_{1惯}}{m_{1引}}=\frac{m_{2惯}}{m_{2引}}=\ldots=\frac{Gm_{地}}{R^2 g}\Rightarrow m_{引}\propto m_{惯}$$

适当地选取万有引力常数*G*的取值可使

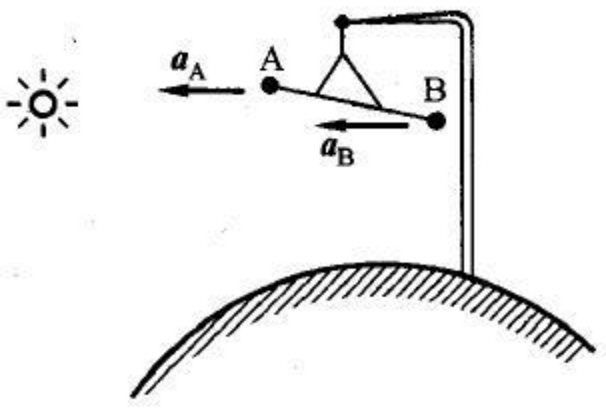
$$\boldsymbol{m_{引}=m_{惯}}$$

即惯性质量与引力质量等价。

关键是同一地点各种物体的重力加速度是否相等

牛顿单摆实验：$\dfrac{\Delta m}{m_{惯}}\equiv\dfrac{\left|m_{惯}-m_{引}\right|}{m_{惯}}<10^{-3}$

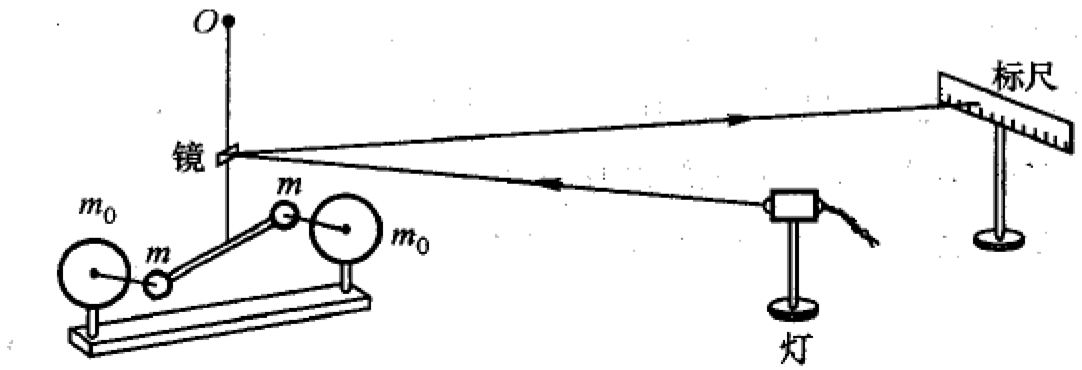
更精确的实验证明是厄特沃什实验及以后的改进实验。惯性质量与引力质量被证明在10^{-13}的精度上成正比。



厄特沃什实验（狄克所作）示意图

4. 引力常数的测量

因为引力太弱，又不能屏蔽对它的干扰，实验很难做，故万有引力常数是目前测量最不精确的一个基本物理常量。



1798年，即牛顿发表万有引力定律之后**100**多年，卡文迪许做了第一个精确的测量。他所用的是扭秤装置，如图所示，两个质量均为***m***的小球固定在一根轻杆的两端，再用一根石英细丝将这杆水平地悬挂起来，每个质量为***m***的小球附近各放置一个质量为***M***的大球。由于小球受到吸引力，悬杆因受到一个力矩而转动，使悬丝扭转。引力力矩最后被悬丝扭转所产生的弹性恢复力矩所平衡。在八九十年间竟无人超过他的测量精度。

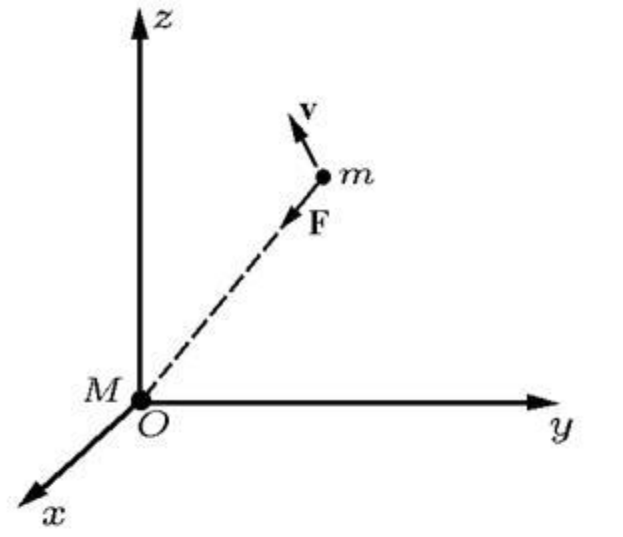
"称地球的质量"的实验

$$g=\frac{Gm_{地}}{R^2}\Rightarrow m_{地}=\frac{gR^2}{G}=\frac{9.81\times\left(6.37\times10^6\right)^2}{6.67259\times10^{-11}}\approx5.97\times10^{24}kg$$

5. 引力的几何性

考虑质点 **m** 在 **M** 的引力场中运动，设 **M** 位于原点，**m** 的矢径为 **r**，由运动定律和万有引力定律可得运动方程为：

$$-G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}=-G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



质点在引力场中的运动

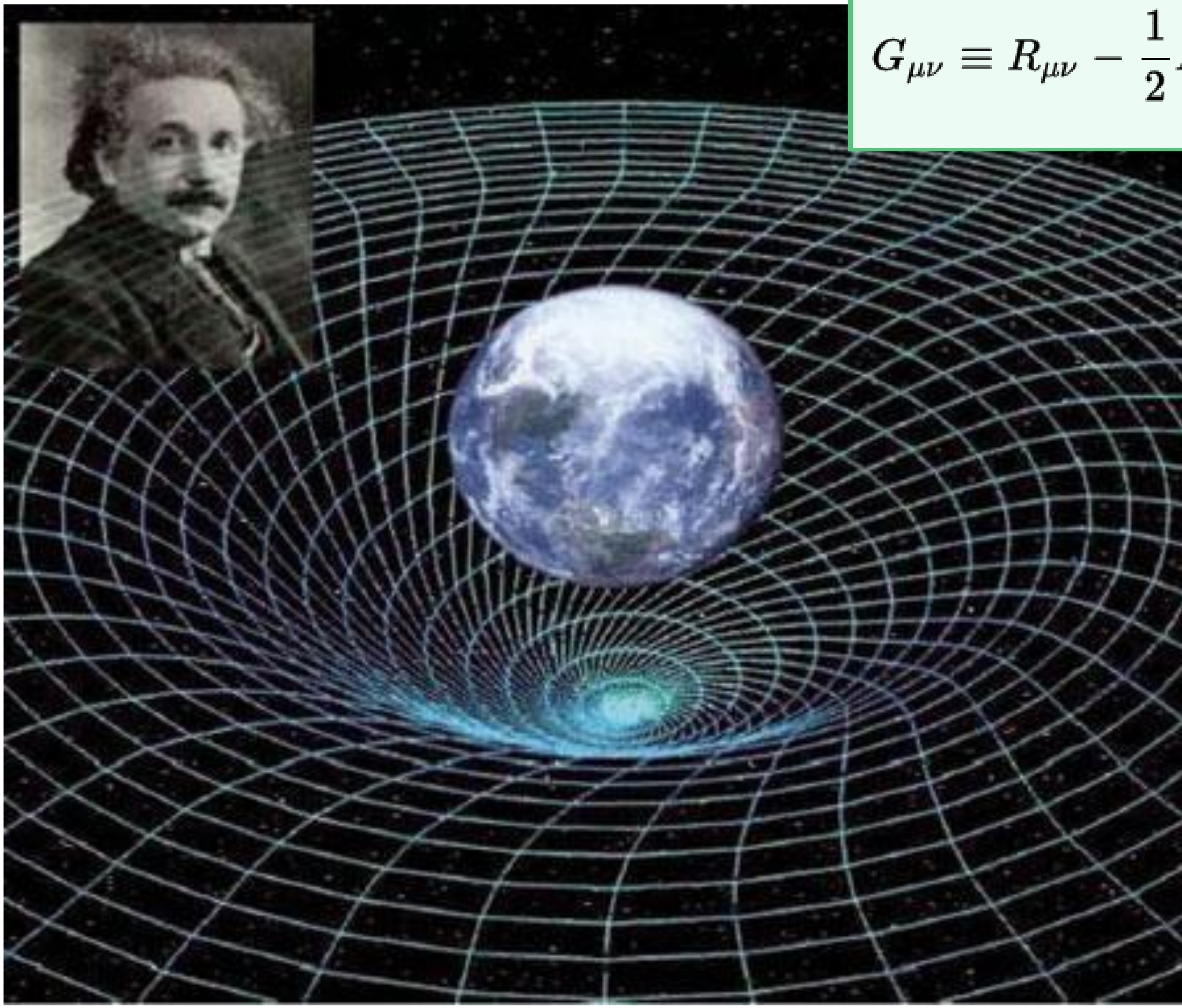
式中不含有运动物体的质量！于是我们得到结论：在引力场中质点的运动与其质量无关。

➢在引力场中的任何物体，不管其质料和质量如何，均具有相同的加速度，在初始位置和初始速度相同的情况下，必有相同的运动，包括空间轨道。于是，零质量物体也会受到引力作用，因而**光在引力场中传播也会弯曲**（广义相对论的结论）。

➢引力场的几何性是其它力场（如电场、磁场）没有的，爱因斯坦把引力场的这一性质看成是纯粹的时空几何属性，广义相对论就是引力场的几何理论。

Einstein's field equations

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



Spacetime tells matter how to move;
matter tells spacetime how to curve.

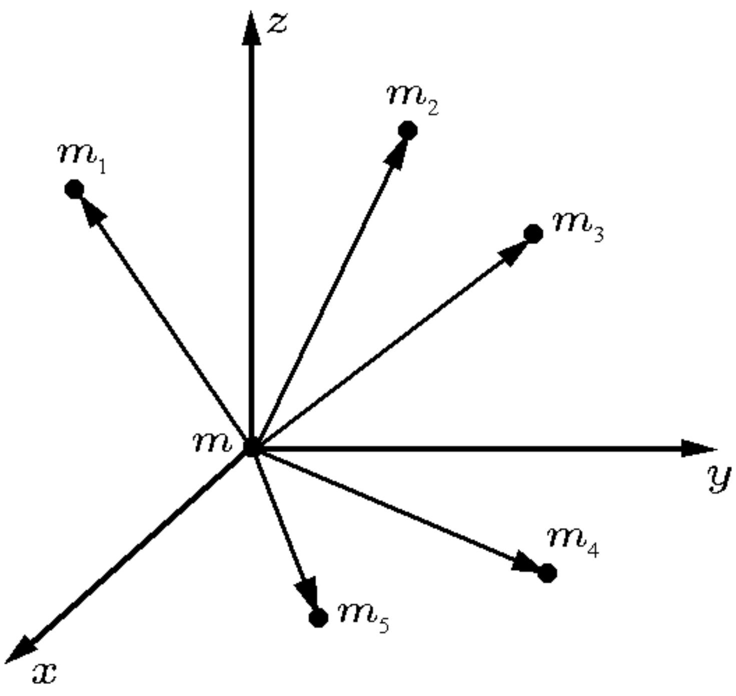
6. 多质点体系的万有引力

问题：我们多次利用地球对地球表面物体的吸引力为

$$F = G\frac{m_{地}m}{R^2} = mg, \qquad g = \frac{Gm_{地}}{R^2}$$

注意牛顿的万有引力定律是对两个质点而言的，在这里我们把地球看成一个位于地心的质点，为什么可以这样做？

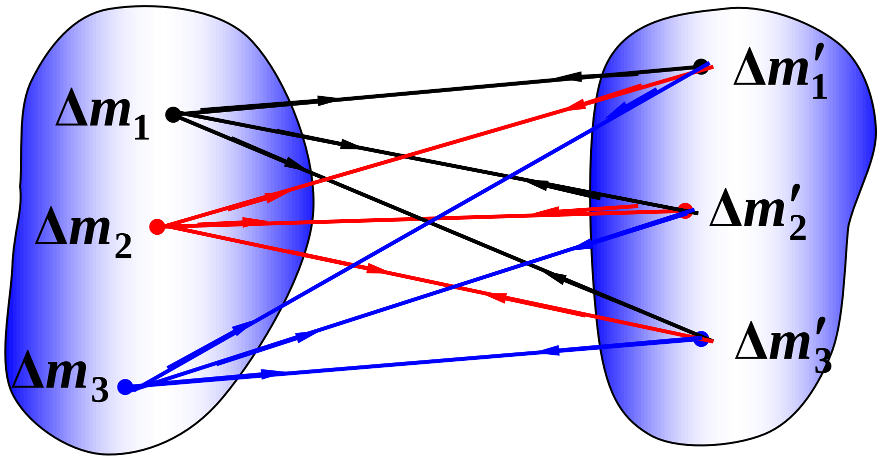
如图示，在原点有一质量为 m 的质点，空间分布着质量分别为 m_1， m_2， ……， m_n 的 n 个质点组成的体系，它们的位置矢径分别为 r_1， r_2， ……， r_n，则我们认为该体系对质点的引力可以写成：



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_i -G\frac{mm_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

7.连续体的万有引力

讨论两个物体之间的万有引力，如果物体不能视作质点，需将物体分成许多小部分，使每一部分都能视作质点，利用上式求出物体1各小部分与物体2各小部分之间的引力，每个物体所受的引力等于其各部分所受引力的矢量和.

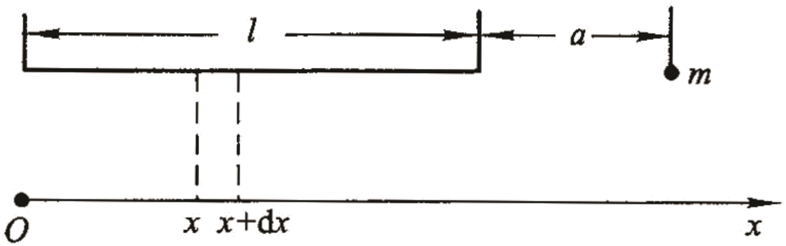


用“分割”方法计算两物体间的万有引力

●均质细杆对质点的万有引力

“微元”

细杆质量为M，长为l，距细杆的一端a处有一质量为m的质点，计算细杆对质点m的引力。



把细杆分成许多小段(微元)，每一小段可看作质点。细杆上x至$x+dx$ 的一小段可看作质量为 Mdx/l 的质点，对质点m的引力为

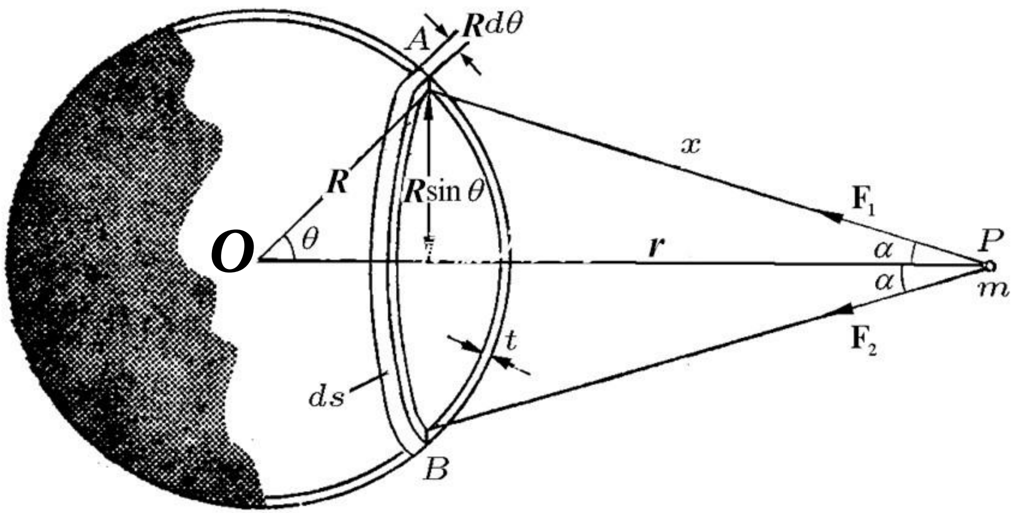
$$dF=-\frac{GMmdx}{l(l-x+a)^2}$$

求合力只需计算代数和

$$F=\int dF=-\int_0^l\frac{GMmdx}{l(l-x+a)^2}=-\frac{GMm}{l}\frac{1}{l-x+a}\bigg|_0^l=-\frac{GMm}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{l+a}\right)$$

$$=-\frac{GMm}{a(l+a)}$$

●球壳对一点的万有引力



考虑一密度均匀的薄球壳，它的质量为***M***，质量面密度为**σ**。我们要求出它对球壳外一个质量为 ***m*** 的质点 ***P*** 的引力。可先在球壳上取图示的一圆环，其质量为：

$$dM = \sigma ds = \sigma \cdot 2\pi R\sin\theta \cdot Rd\theta = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

由于对称性，圆环（因而球壳）对***m***的引力方向应指向球心。可求出圆环对***m***的引力大小为：

$$dF = G\frac{mdM}{x^2}\cos\alpha = 2\pi Gm\sigma R^2 \frac{\sin\theta d\theta}{x^2}\cos\alpha$$

由余弦定理

$$R^2 = x^2 + r^2 - 2rx\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2rx}$$

进一步利用余弦定理

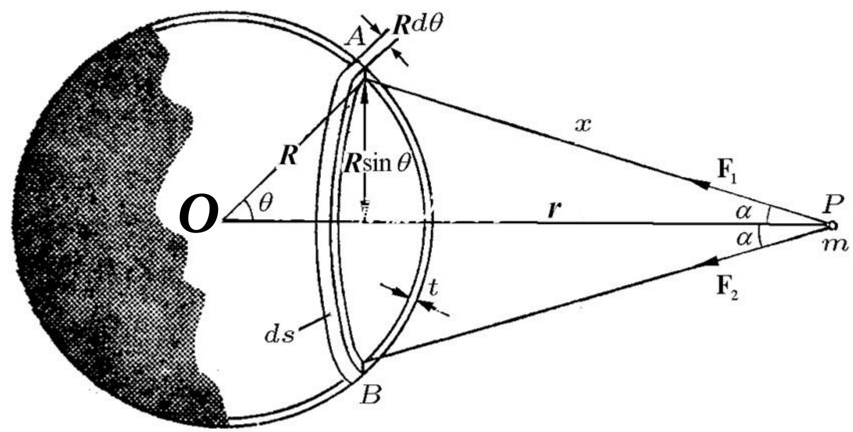
$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta \quad \Rightarrow \quad xdx = Rr\sin\theta d\theta,\ \sin\theta d\theta = \frac{xdx}{Rr}$$

于是可得

$$dF = 2\pi Gm\sigma R^2 \frac{\sin\theta d\theta}{x^2}\cos\alpha$$

$$= 2\pi Gm\sigma R^2 \frac{1}{x^2}\frac{xdx}{Rr}\frac{x^2 + r^2 - R^2}{2rx}$$

$$= \frac{\pi Gm\sigma R}{r^2}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx$$



① ***R*< *r*，** 即 ***m*** **在球外，*x*** **从*r* —*R*到 *r*＋*R***

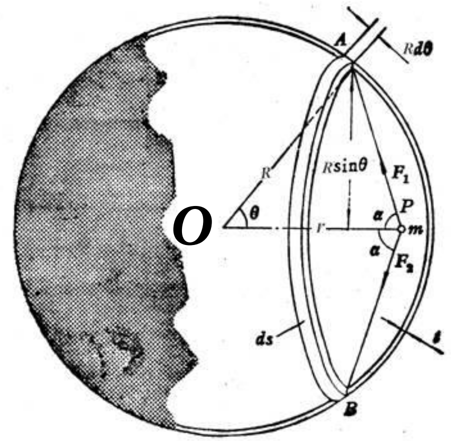
由于：$$\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx = -\frac{r^2 - R^2}{x} + x\Big|_{r-R}^{r+R} = 4R$$

$$F=\frac{\pi G\sigma mR}{r^2}\times 4R=G\frac{m}{r^2}4\pi R^2\sigma=G\frac{Mm}{r^2}$$

该结果表明，一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力，等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。

② $R>r$，即 m 在球内，x 从$R-r$到$R+r$：

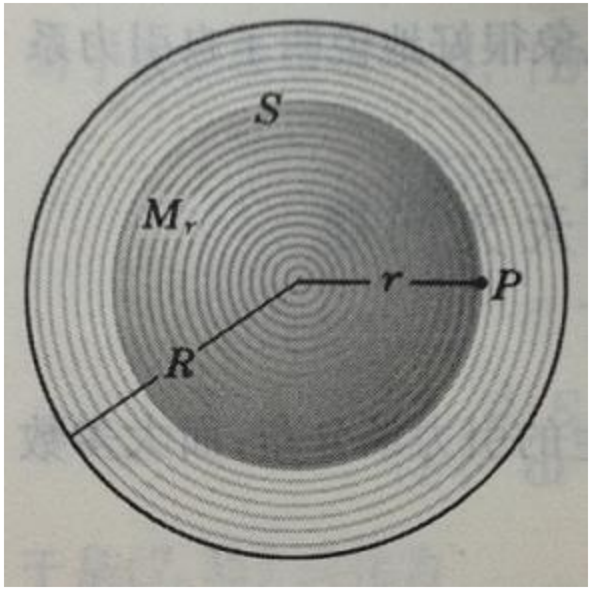
$$\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{r^2-R^2}{x^2}+1\right)dx$$
$$=-\frac{r^2-R^2}{x}+x\Big|_{R-r}^{R+r}$$
$$=0\Rightarrow F=0$$



对球壳内部的引力

该结果表明，一个密度均匀的球壳对球壳内任一质点的引力为零！其原因恰恰是因为引力与两质点之间距离的反平方关系。

●均匀实心球体对一点的万有引力



令球体的半径为R，质量为M，均匀分布在球体内，因而其体密度为$\rho=3M/(4\pi R^3)$，把球体分成许多层同心球壳。

①若质点位于球体内的一点P（$r<R$）

过P点做同心球面S，于是S以外的球壳对P点的引力场没有贡献，而S以内位于x到$x+dx$之间的球壳的质量为

$$dM=\rho 4\pi x^2 dx=4\pi\rho x^2 dx$$

该球壳对质点的引力就好像把球壳的质量集中在球心一样，即

$$dF=G\frac{mdM}{r^2}=4\pi\rho Gm\frac{x^2 dx}{r^2}$$

所以质点受到的引力为：

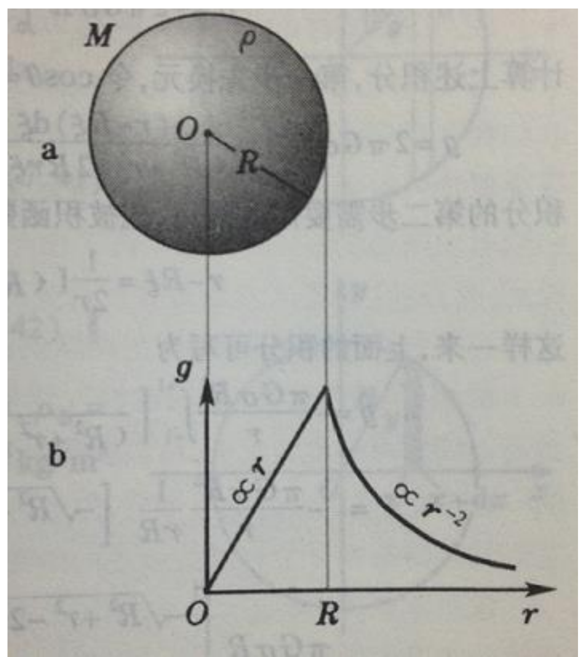
$$F=\int_0^r dF=\int_0^r 4\pi\rho Gm\frac{x^2dx}{r^2}=4\pi\rho Gm\frac{x^3}{3r^2}\Big|_0^r=Gm\frac{4\pi}{3}\rho r=Gm\frac{4\pi}{3}\frac{3M}{4\pi R^3}r=\frac{GMm}{R^3}r\propto r$$

②若质点位于球体外的一点***P***（***r*** **>** ***R***）

此时所有的球壳都对质点有引力，

$$F=\int_0^R dF=\int_0^R 4\pi\rho Gm\frac{x^2dx}{r^2}=4\pi\rho Gm\frac{x^3}{3r^2}\Big|_0^R=Gm\frac{4\pi}{3}\rho\frac{R^3}{r^2}=Gm\frac{4\pi}{3}\frac{3M}{4\pi R^3}\frac{R^3}{r^2}=\frac{GMm}{r^2}\propto\frac{1}{r^2}$$

所以地球对地表物体的万有引力等效于把地球质量集中于地心时两质点间的万有引力。



8.逃逸速度

在引力场中质量为 m 的质点的机械能为零时，该质点可以运动到无穷远处。若质点位于质量为 M，半径为 R 的星体表面，则机械能为零时应有：

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

此时质点 m 的速度称为逃逸速度，用 $v_{逃}$ 表示，由上式有：

$$v_{逃} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

星球表面逃逸速度的不同，星球的性质会有很大的不同。

① 行星表面的逃逸速度如果太小，则不可能有大气。

	质量	半径	逃逸速度	有无大气
水星	$M=0.056\,M_{地}$	$R = 0.38\,R_{地}$	$v_{逃} = 4.3$km/s,	无大气
金星	$M=0.82\,M_{地}$	$R = 0.95\,R_{地}$	$v_{逃} = 10.4$km/s,	90大气压
地球	$M=M_{地}$	$R = R_{地}$	$v_{逃} = 11.2$km/s,	1大气压
火星	$M = 0.108\,M_{地}$	$R = 0.53\,R_{地}$	$v_{逃} = 5.06$km/s,	0.008大气压
月球	$M = 0.012\,M_{地}$	$R = 0.27\,R_{地}$	$v_{逃} = 2.4$km/s	无大气

②星球表面的逃逸速度如果太大，以致于达到光速，则称为黑洞。

逃逸速度为光速时$v_{逃} = c$（光速），天体的半径为：

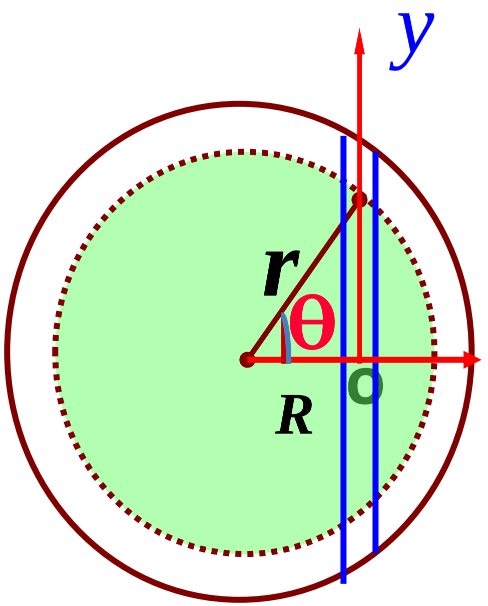
$$R_S = \frac{2GM}{v_{逃}^2} = \frac{2GM}{c^2}$$

R_S 叫做天体的引力半径或史瓦西(Schwarzchild)半径。大约200年前，法国数学家、天文学家拉普拉斯于1796年曾预言："一个密度如地球而直径为太阳250倍的发光恒星，由于其引力作用，将不容许任何光线离开它。由于这个原因，宇宙中最大的发光物体也不会被我们发现。"如果把地球的全部质量能缩小到半径为1厘米的小球上，那么生活在这样小球上的人将无法和外界进行光或者无线电联系。

例题1：设想地球内有一光滑隧道，如图所示，试分析证明质量为m质点在此隧道内的运动。

解： 如图，质点m在r处受到地球的吸引力为

$$\vec{F}=-\frac{Gm}{r^2}\left(\frac{r^3}{R^3}M_e\right)\vec{e}_r=-\frac{GmM_e}{R^3}r\vec{e}_r$$



$$\Rightarrow F_y=-F\sin\theta=-G\frac{mM_e}{R^3}r\sin\theta=-G\frac{mM_e}{R^3}y$$

由牛顿定律，有

$$-G\frac{mM_e}{R^3}y=m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{GM_e}{R^3}y=0$$

所以质点做简谐振动，周期为：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_e}}=84.3(\min)$$

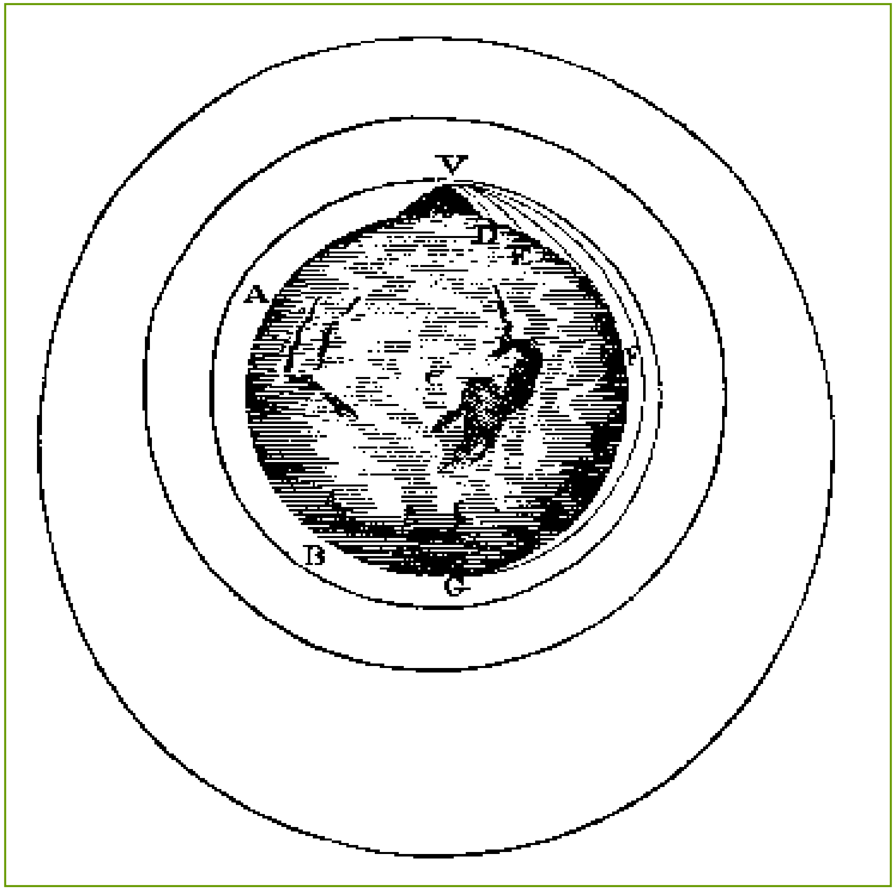
例题2：计算第一、第二、第三宇宙速度，地球大气层的影响可忽略。

地球半径: $R_E = 6.37 \times 10^6 \mathrm{m}$

地球轨道半径: $R_S = 1.50 \times 10^{11} \mathrm{m}$

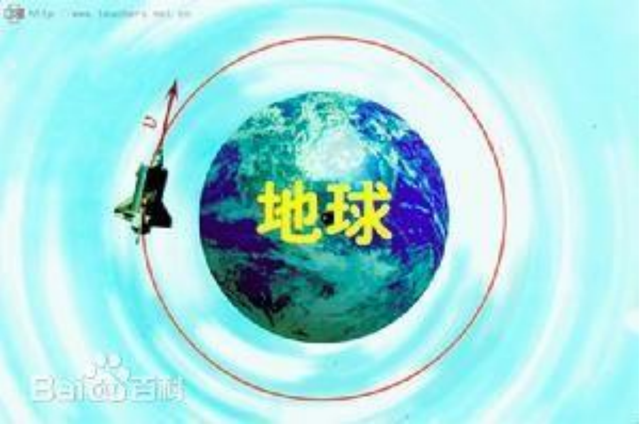
太阳质量: $M_S = 1.99 \times 10^{30} \mathrm{kg}$

地表重力加速度: $g = 9.8 \mathrm{m/s^2}$



牛顿的《自然哲学的数学原理》插图，抛体的运动轨迹取决于抛体的初速度。

解：第一宇宙速度——物体可以环绕地球表面运行所需的最小速度(环绕速度)。



$$G\frac{m_E m}{R_E^2} = m\frac{v_1^2}{R_E}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{Gm_E}{R_E}} = \sqrt{gR_E} \approx 7.91\,\mathrm{km/s}$$

第二宇宙速度——逃脱地球引力所需要的从地面出发的最小速度(脱离速度)。

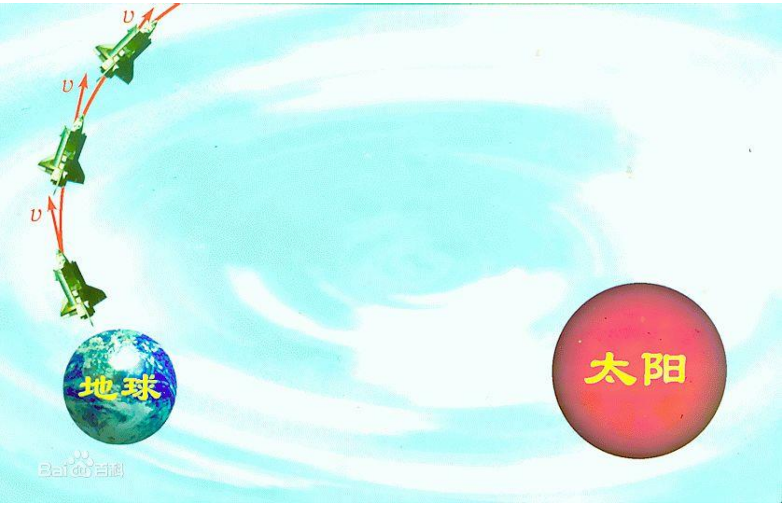
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{m_E m}{R_E} = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = \sqrt{2gm_E} = 11.2\ \mathrm{km/s}$$

第二宇宙速度与第一宇宙速度的关系是

$$v_2 = \sqrt{2}\,v_1$$

第三宇宙速度：从地面向上发射太空飞行器，为使它能相继脱离地球和太阳的引力束缚远离太阳系而去的最小发射速度v_3。

①先只考虑太阳的引力，在太阳和卫星的质心系中，利用机械能守恒可得卫星中要脱离太阳引力所需速度（卫星相对于太阳的速度）满足



$$E=\frac{1}{2}mv_3'^2+\left(-G\frac{M_S m}{R_S}\right)=E_{k\infty}+E_{p\infty}=0$$

$$\Rightarrow v_3'=\left(\frac{2GM_S}{R_S}\right)^{1/2}$$

设地球绕太阳轨道近似为一圆，地球绕太阳转的速度为u

则 $$m_E\frac{u^2}{R_S}=G\frac{m_E M_S}{R_S^2} \Rightarrow u=\left(\frac{GM_S}{R_S}\right)^{1/2}$$

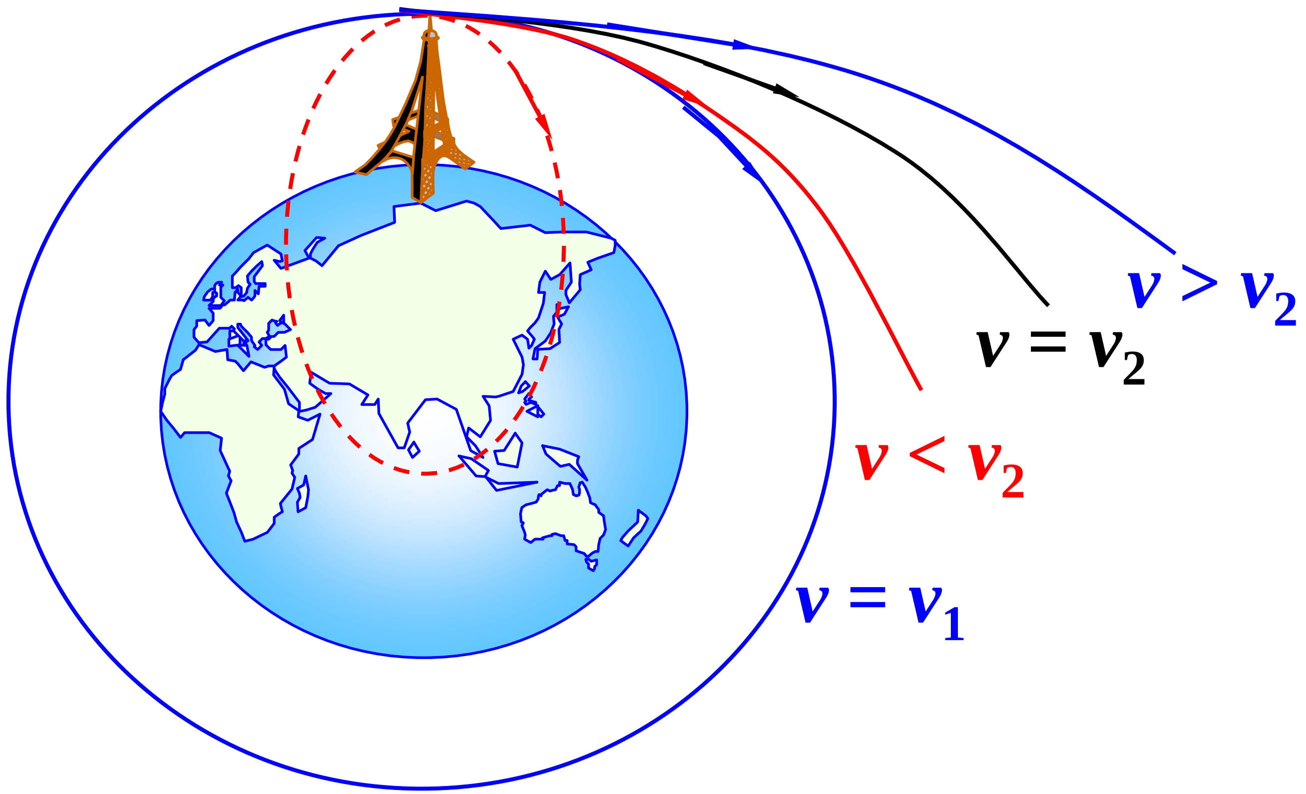
②若$\vec{v}_3'$与$\vec{u}$同向，则卫星飞出太阳系时，其相对地球的速率最小，

$$v_3'' = v_3' - u \quad \Longrightarrow \quad v_3'' = (\sqrt{2}-1)\left(\frac{GM_S}{R_S}\right)^{1/2} = 12.3 km\cdot s^{-1}$$

再考虑到地球的影响，在地球和卫星的质心系中，利用机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{Gmm_E}{R_E} = \frac{1}{2}mv_3''^2$$

$$\Longrightarrow \quad v_3 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E} + v_3''^2} = \sqrt{v_2{}^2 + v_3''^2} = 16.7\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

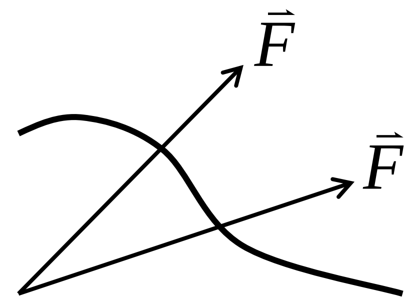


抛体以不同速度抛出时不同类型的运动轨迹。

§7.3质点在有心力场中的运动

1、有心力

有心力：方向始终指向（或背向）固定中心的力。



定点：力心

$$\vec{F} = f(\vec{r})\vec{e}_r, \quad \begin{cases} f(\vec{r}) > 0, & 斥力 \\ f(\vec{r}) < 0, & 引力 \end{cases}$$

该固定中心称为力心。在许多情况下，有心力的大小仅与考察点至力心的距离有关，即

$$\boxed{\vec{F} = f(r)\vec{e}_r}$$

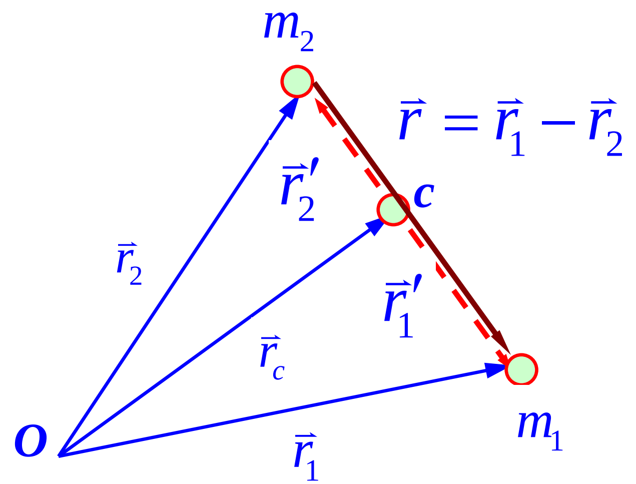
保守有心力

有心力场：有心力存在的空间，如万有引力场、库仑力场、分子力场。

2. 两体问题

考虑质量分别为m_1和m_2的两个质点组成的孤立系统，它们相距r，相互作用力$f(r)$是距离r的函数，方向沿着两质点的连线。以惯性系中的固定点O为坐标原点，则它们的运动方程分别为：

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = f(r)\vec{e}_r, \quad m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -f(r)\vec{e}_r \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \qquad \vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases} \qquad (\#)$$



即$\vec{e}_r$是从m_2指向m_1的单位矢量。两式相加可得质心运动方程

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = 0, \quad m = m_1 + m_2$$

所以质心做匀速直线运动。

两式分别除以m_1和m_2，然后相减可得

$$\boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=f(r)\vec{e}_r}$$

即m_1相对m_2的运动与一个质量为约化质量μ的质点相对于固定质点m_2的运动情况相同， m_2相对m_1的运动也是如此。于是我们把两体问题化简为单体问题。

研究方法：研究两体系统运动的方便方法是研究质心的运动和它们之间的相对运动。

➢对于行星系统，由于太阳的质量比行星的质量大得多，系统的约化质量约等于行星的质量，可将太阳看做固定力心，行星的运动就退化为单个物体在固定有心力场中的运动。

3、有心力场中质点运动的一般特征

由于有心力是保守力，故在有心力场中质点运动的一般特征为：

①运动必定在一个平面上（因为角动量守恒或掠面速度守恒）

选择力心作为坐标原点，则有心力的力矩为

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=f(r)\vec{r}\times\vec{e}_r=0$$

根据角动量定理可知体系的角动量守恒

$$\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{v}=m\vec{r}_0\times\vec{v}_0\equiv\vec{L}_0\Rightarrow\vec{r}\cdot\vec{L}_0=0$$

即质点的位矢 $\vec{r}$ 始终与常矢量 $\vec{L}_0$ 垂直，所以质点只可能在初速度和初始位矢构成的平面内运动，于是质点在有心力场中的运动本质上是一个二维问题。显然，选取极坐标系较为方便，则有

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow\quad \vec{L}=m\vec{r}\times\vec{v}=mr\vec{e}_r\times\left(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)=mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta$$

$\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta$ 是一个不变的单位矢量，方向垂直于运动平面。故角动量守恒可简写成

$$mr^2\dot{\theta} = L(\text{常量})$$

②体系机械能守恒

有心力是保守力，可定义相应的势能（选取无穷远处为势能零点）

$$E_p(r) = \int_r^{\infty} f(r)dr \equiv V(r)$$

体系的机械能为

$$E_k + E_p(r) = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = E(\text{常数})$$

进一步考虑到角动量守恒，可得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E(\text{常数})$$

4、有心力问题的定性处理：有效势能与轨道特征

设在有心力作用下，质点的角动量为L,机械能为E，

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = L \\ \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \end{cases}$$

因此矢径r变化所满足的方程与动能为 $\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$，势能为

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \mapsto \text{有效势能}$$

的一维运动质点的机械能守恒方程相同。有效势能由两部分组成：

- $L^2/(2mr^2)$ 是一等效的斥力势能,它对应一斥力 $L^2/(mr^3)$ 作用在质点上
- $V(r)$ 则由有心力的具体形式决定。

对于在力源 M 作用下的万有引力作用下的质点m，其势能为

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r} \Longrightarrow V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

通过对有效势能的分析可以给出各种复杂有心力情况下的轨道在空间中的分布。

◆利用势能曲线对引力场轨道特征作定性讨论

●质点总能量E 的大小决定了质点在有心力场中的运动范围，即质点可作不同类型的轨道运动。

●拱点：质点的总能量为E的水平线与有效势能曲线的交点。

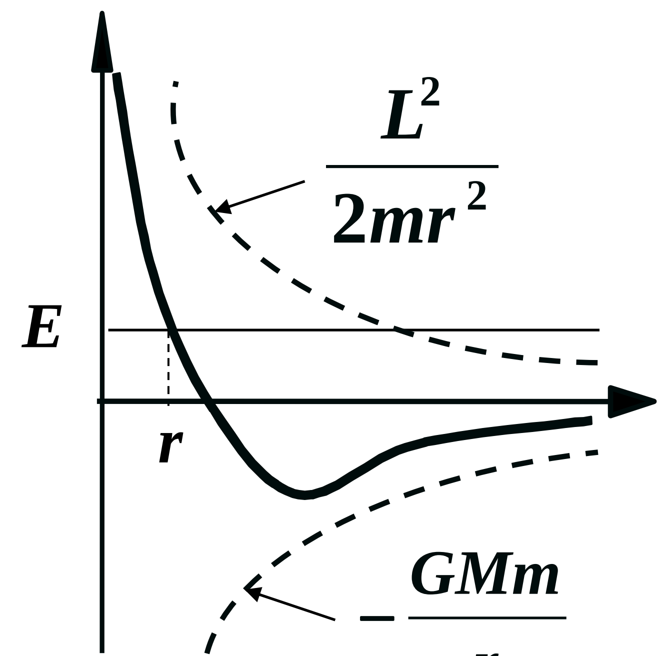
$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E$$

$$r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0$$

$$r=-\frac{GMm}{2E}-\sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2+\frac{L^2}{2mE}}$$

或者

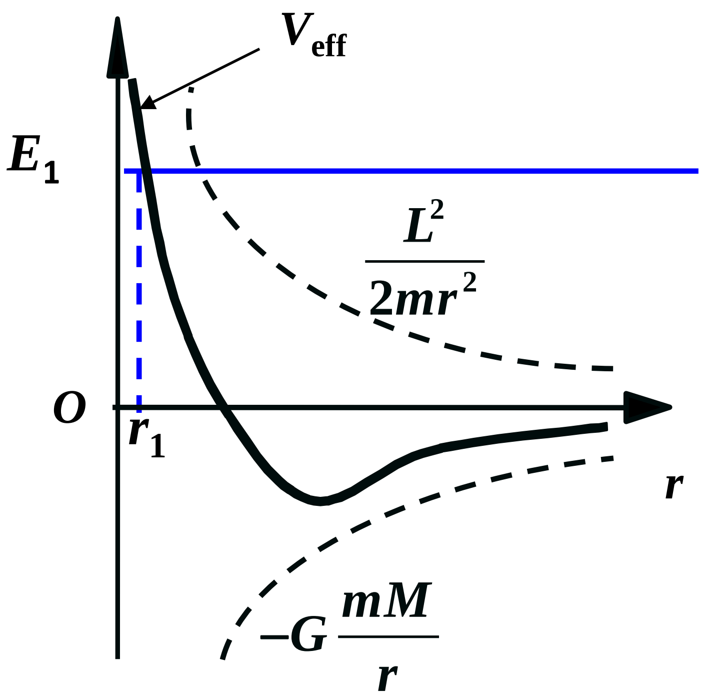
$$r=-\frac{GMm}{2E}+\sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2+\frac{L^2}{2mE}}$$

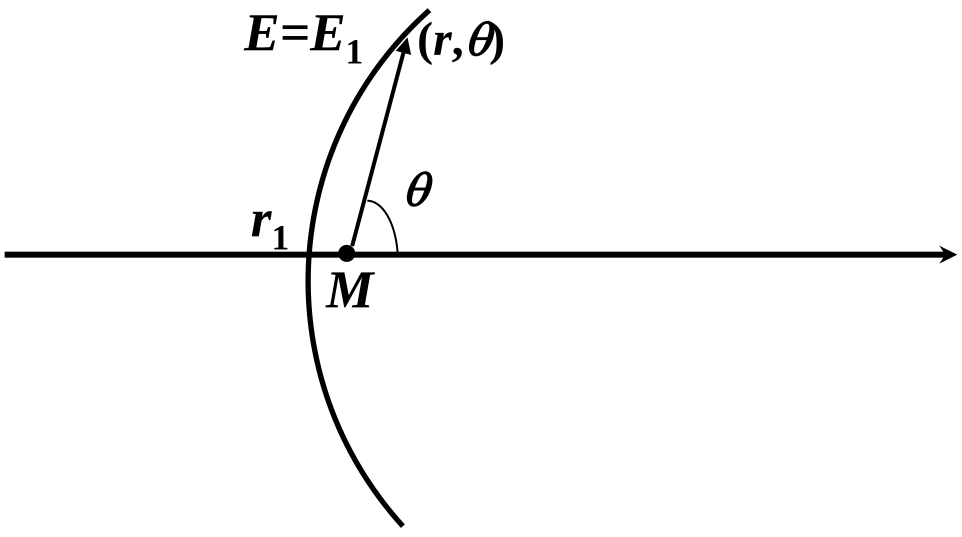


① 若$E=E_1>0$，$r_1 \le r < \infty$ ，拱点方程只有一个正根

$$r_1 = -\frac{GMm}{2E} + \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

可证明此轨道为一双曲线；

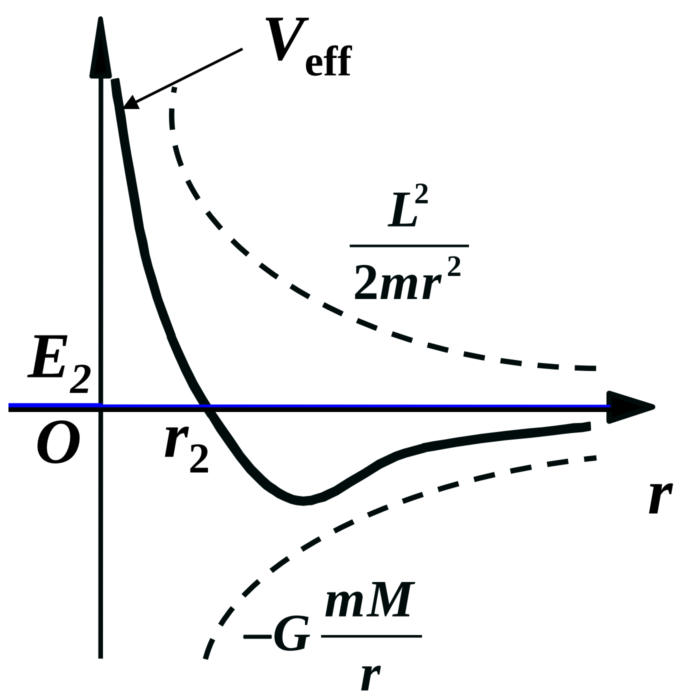


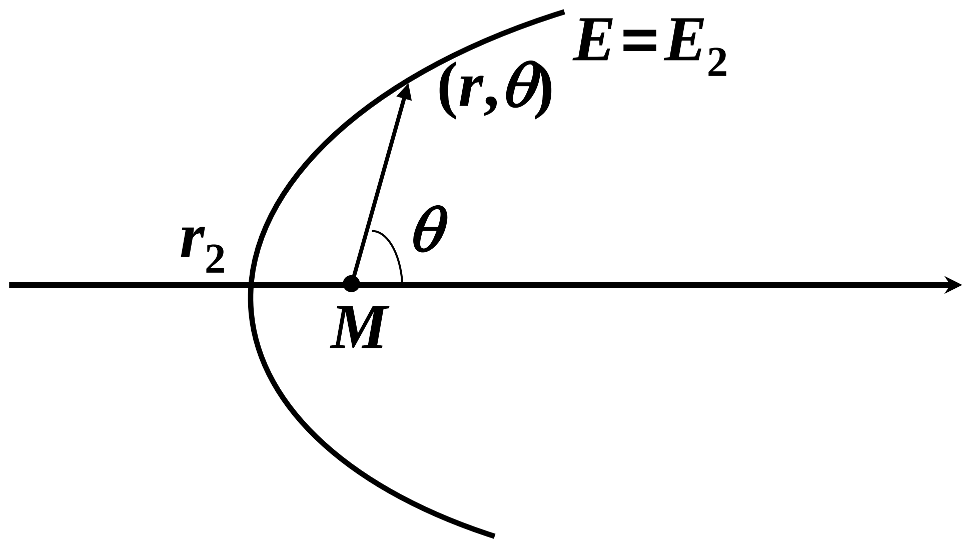


②若$E = E_2 = 0$， $r_2 \le r < \infty$ ，拱点方程只有一个正根

$$r_2 = \frac{L^2}{2GMm^2}$$

可证明此轨道为一抛物线；



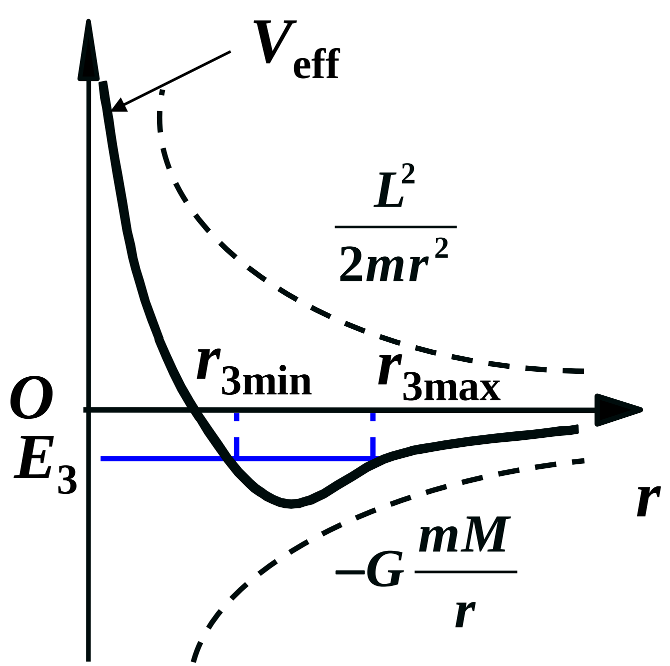


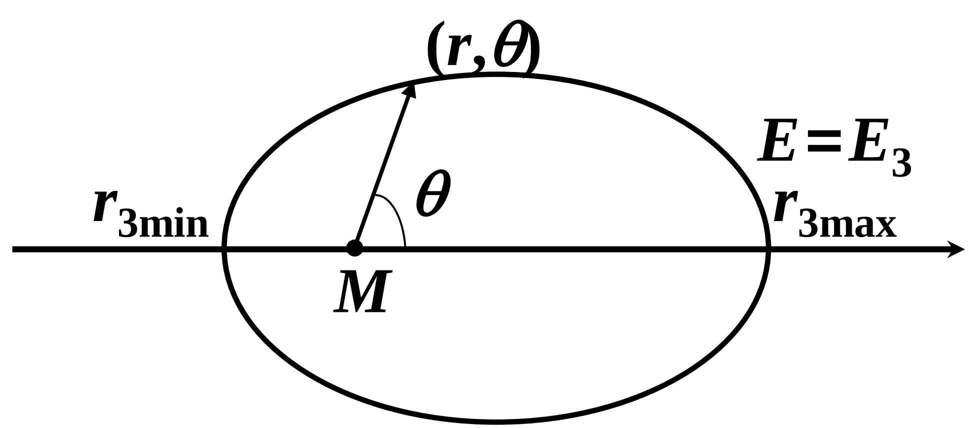
③若$E=E_3<0, r_{3min} \le r \le r_{3max}$，拱点方程有两个正根

$$r_{3min} = -\frac{GMm}{2E} - \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

$$r_{3max} = -\frac{GMm}{2E} + \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

此轨道为一椭圆，力心为椭圆的一个焦点。

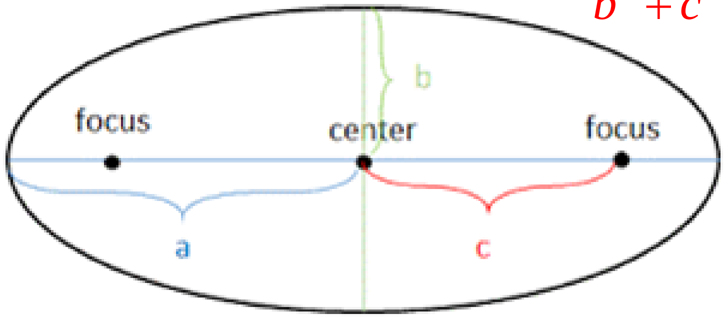




●椭圆的半长轴、半短轴和偏心率

$b^2+c^2=a^2$

$$\begin{cases} a+c=r_{3\max} \\ a-c=r_{3\min} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\left(r_{3\max}+r_{3\min}\right)=-\dfrac{GMm}{2E} \\ c=\dfrac{1}{2}\left(r_{3\max}-r_{3\min}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{GMm}{2E}\right)^2+\dfrac{L^2}{2mE}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\sqrt{a^2-c^2}=\dfrac{L}{\sqrt{-2mE}} \\ e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \end{cases}$$

➢椭圆的半长轴只与能量有关，与角动量无关，能量越大，即$|E|$越小，则半长轴a越大。

➢椭圆的半短轴与能量和角动量都有关，在能量一定的情况下，角动量越小，对应的半短轴越小，椭圆越扁；角动量越大，椭圆越胖。

行星绕太阳的公转周期为：

$$T=\frac{\text{椭圆面积}}{\text{掠面速率}}=\frac{\pi ab}{L/2m}=\pi\left(-G\frac{Mm}{2E}\right)\frac{L}{\sqrt{-2mE}}\frac{2m}{L}=-\frac{\pi GMm^2}{E\sqrt{-2mE}}$$

所以有

$$k \equiv \frac{a^3}{T^2} = a^3\left(\frac{L}{2\pi abm}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2 m^2}\frac{a}{b^2} = \frac{L^2}{4\pi^2 m^2}\left(-\frac{GMm}{2E}\right)\left(\frac{\sqrt{-2mE}}{L}\right)^2 = \frac{GM}{4\pi^2}$$

因此，a^3/T^2是一个与行星无关的常数，开普勒第三定律得证。考虑到太阳的有限质量后，我们可得

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\left(1+\frac{m}{M}\right) = k\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

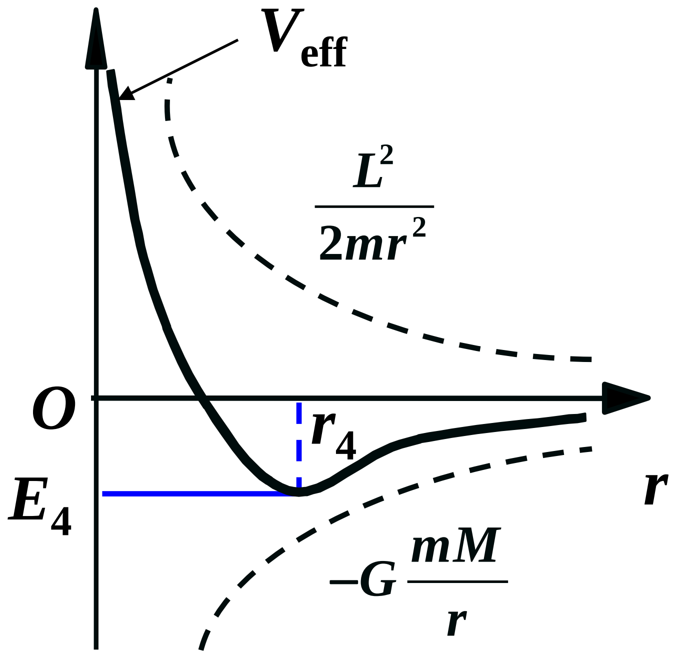
对于最大的行星(木星)，$m/M \approx 9.5\times 10^{-4}$，开普勒第三定律依然符合得很好。

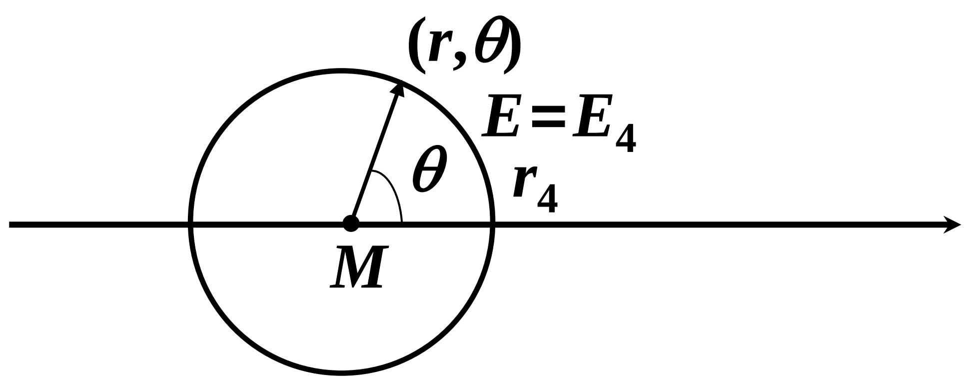
【思考题】：试求得如上所示的太阳质量对开普勒第三定律的修正。

④若$E=E_4=-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2}$，$r=r_4$，拱点方程的两个正根重合

$$r_4=-\frac{GMm}{2E_4}=\frac{L^2}{GMm^2}$$

即质点到力心的距离不变，此轨道为一圆。



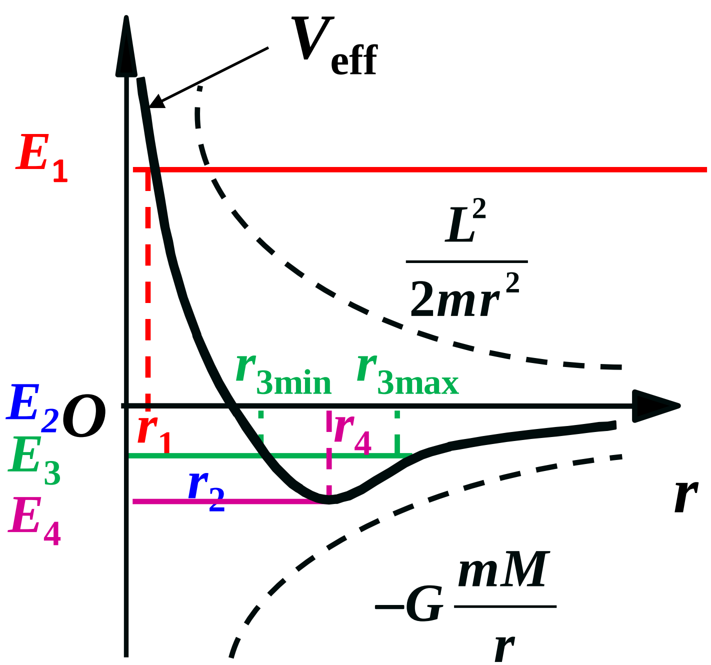


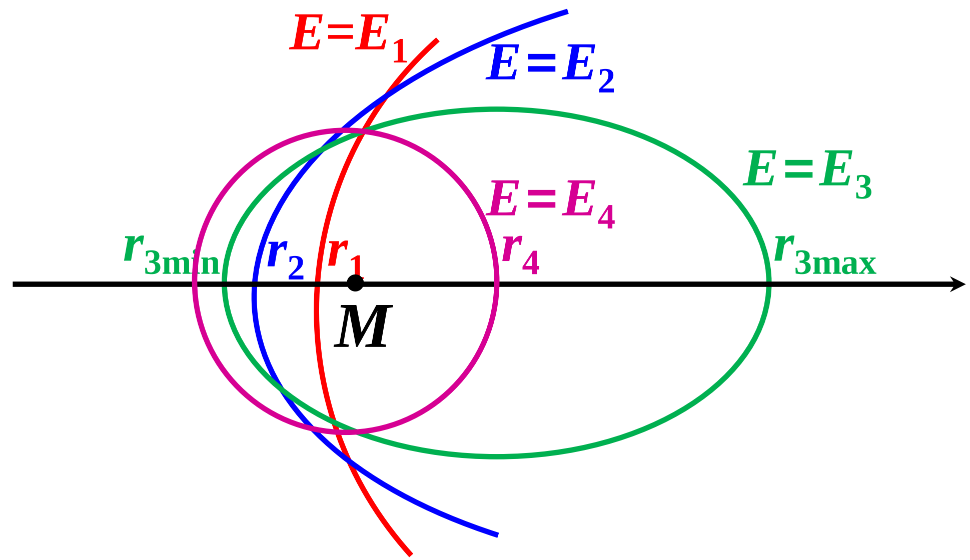
➢若$E=E_1>0$，此轨道为一双曲线；

➢若$E=E_2=0$，此轨道为一抛物线；

➢若$E=E_3<0$，此轨道为一椭圆，力心为椭圆的一个焦点；

➢若$E=E_4=-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L^2}$，此轨道为一圆。





【思考题】：对于一般形式的吸引性的有心力，

$f(r) = -Ar^{\alpha}$，$A > 0$，α为任意整数

试定性分析其轨道特征。

5、有心力问题的定量处理及轨道问题

质点在有心力场中的运动方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r) \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=\dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \Rightarrow r^2\dot{\theta}=L/m \end{cases}$$

做变量变换 $u=1/r \Rightarrow \dot{\theta}=Lu^2/m$ ，可得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}=\frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

所以径向方程化简成

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{L^2}{m^2}u^3=-\frac{L^2u^2}{m^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\frac{f(r)}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{m}{L^2u^2}f(r)\mapsto \text{比内公式}}$$

只要知道 ***f*(*r*)**的表达式，即可求得轨道方程式；反之，若已知轨道方程，则可以求得 ***f*(*r*)**的表达式。

对于万有引力，相互作用力为

$$f(r)=-\frac{GMm}{r^2}=-GMmu^2$$

比内公式为

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{m}{L^2u^2}f(r)=\frac{GMm^2}{L^2}\equiv\frac{1}{r_0},\quad r_0\equiv\frac{L^2}{GMm^2}$$

其解为：

$$u=\frac{1}{r_0}+\frac{\varepsilon}{r_0}\cos(\theta-\theta_0),\quad \varepsilon\text{和}\theta_0\text{为待定常数}$$

若选取力心到质点近力心点的连线为极轴，则有$\boldsymbol{\theta_0=0}$，轨道简化为

$$r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

下面确定 r_0和ε 的值：

$$\dot{r}=\frac{r_0\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\dot{\theta}=\frac{r^2\varepsilon\sin\theta}{r_0}\dot{\theta}=\frac{L\varepsilon}{mr_0}\sin\theta$$

由系统机械能守恒

$$r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

$$=\frac{1}{2}m\frac{L^2\varepsilon^2}{m^2r_0^2}\sin^2\theta+\frac{L^2}{2mr_0^2}(1+\varepsilon\cos\theta)^2-\frac{GMm}{r_0}(1+\varepsilon\cos\theta)$$

$$=\frac{L^2}{2mr_0^2}(1+\varepsilon^2)-\frac{GMm}{r_0}+\left(\frac{L^2}{mr_0^2}-\frac{GMm}{r_0}\right)\varepsilon\cos\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}E=\dfrac{L^2}{2mr_0^2}(1+\varepsilon^2)-\dfrac{GMm}{r_0}\\[2ex]\dfrac{L^2}{mr_0^2}-\dfrac{GMm}{r_0}=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}r_0=\dfrac{L^2}{GMm^2}\\[2ex]\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\end{cases}}$$

- ➢***E*> 0** → **ε >1**，双曲线的一支，***M***位于内焦点;
- ➢***E*= 0** → **ε =1**，抛物线， ***M***位于焦点处，顶点与焦点相距$r_0/2=r_2$;
- ➢***E*< 0** → **0<ε<1**，椭圆方程，偏心率为**ε**, ***M***位于其中一个焦点;
- ➢ **$E=-G^2M^2m^3/(2L^2)$** → **ε=0**，圆方程，半径 $r=r_0=r_4$。

方法二（选读）：

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = L \\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \end{cases}$$

所以可得径向速度和横向速度

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2}}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr}$$

故有

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rv_r}{v_\theta} = \pm\frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2E}{m} + 2G\frac{M}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

$$= \pm r^2\sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2\left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}$$

引入参量

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

$$d\theta=\pm\frac{dr/r^2}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)^2}}$$

作变量代换 $u=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0},\quad du=-\frac{dr}{r^2}$

$$d\theta=\mp\frac{du}{\sqrt{(\varepsilon/r_0)^2-u^2}}$$

积分后可得

$$\theta=\pm\arccos\frac{r_0u}{\varepsilon}+\theta_0$$

总可选取 $\theta_0=0$，于是有

$$\pm\arccos\frac{r_0u}{\varepsilon}=\theta\Rightarrow\frac{r_0u}{\varepsilon}=\cos\theta$$

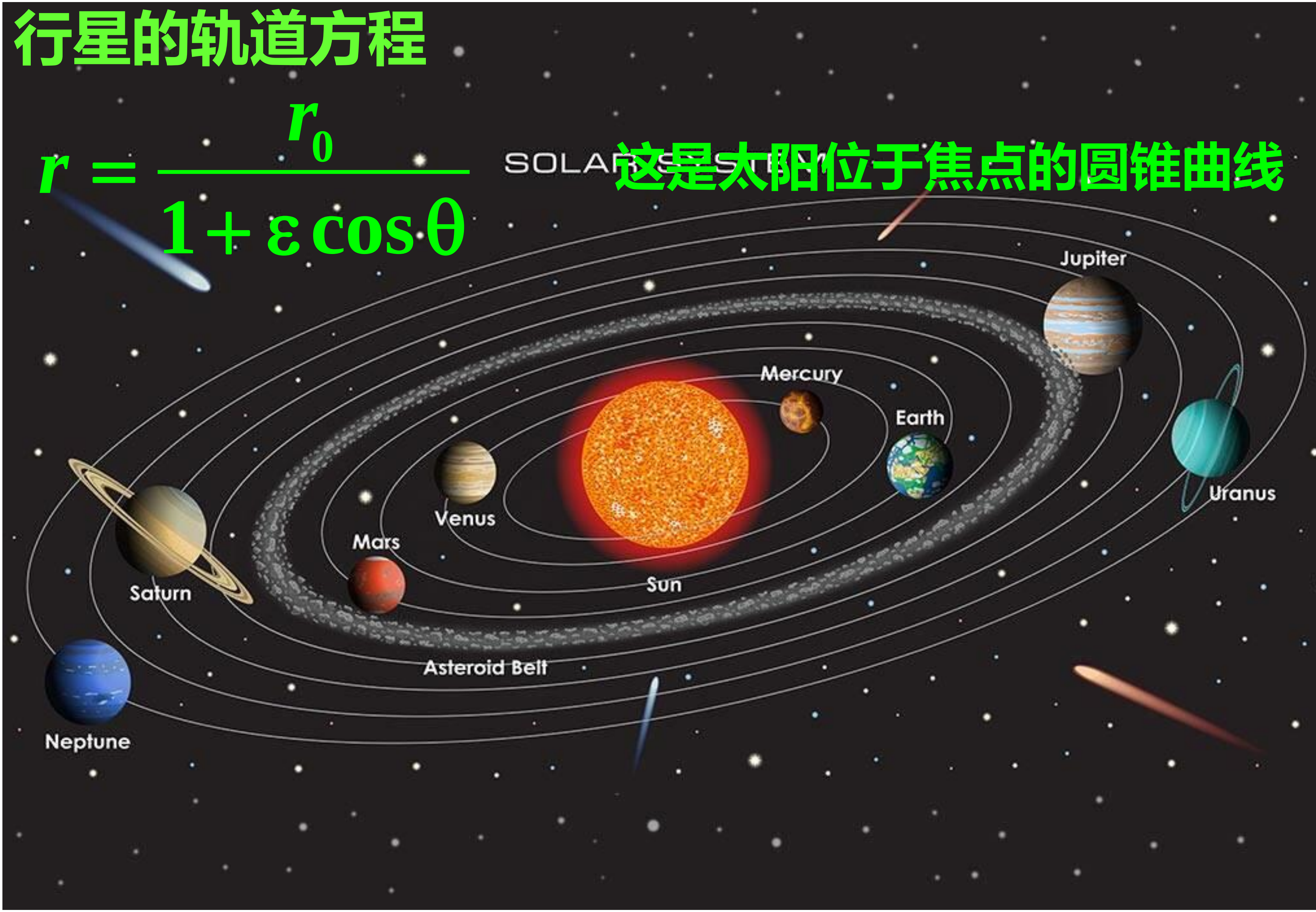
$$\Rightarrow u=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=\frac{1}{r_0}\varepsilon\cos\theta$$

$$\Rightarrow r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

行星的轨道方程

$$r = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

这是太阳位于焦点的圆锥曲线



太阳系各大行星轨道偏心率

水星	**0.206**	金星	**0.007**	地球	**0.017**
火星	**0.098**	木星	**0.048**	土星	**0.055**
天王星	**0.051**	海王星	**0.007**	冥王星	**0.252**

【思考题】：

①从角动量守恒和机械能守恒出发求行星运动轨道；

②试分析两带电量为q和Q的两点电荷系统的运动特征。

例题3：宇宙飞船绕一行星作半径为R_0的圆轨道飞行，飞行速率为v_0，如下图所示，飞船现在A点，船长想用增大切向速率的办法把轨道改变为经过B点的椭圆形，B点到行星中心的距离为$3R_0$。

（1）飞船在A点的速率必须增到多少？

（2）若飞船在A点不增加切向速率，而是增加向外的径向速度分量，使得飞船以后沿半长轴为$\frac{4}{3}R_0$的椭圆运动，试求飞船需获得的径向速度Δv是多少？

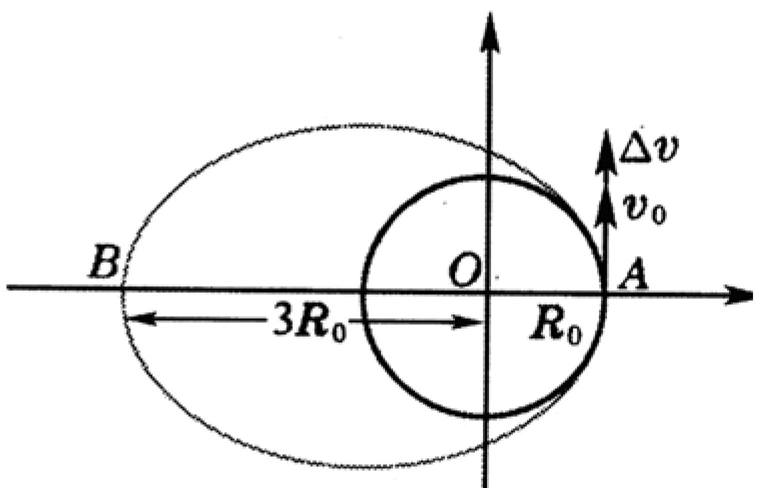


图 a

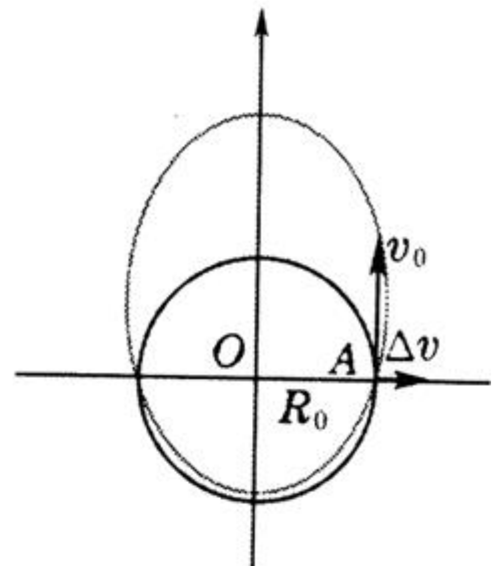


图 b

解：（1）解法一：因宇宙飞船在万有引力作用下做为v_0半径为R_0的圆周运动，所以有

$$m\frac{v_0^2}{R_0}=\frac{GMm}{R_0^2}\Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

由题意知，预期椭圆轨道的半轴为

$$a=(R_0+3R_0)/2=2R_0$$

由半长轴与总机械能之间关系可知

$$E=-\frac{GMm}{2a}=-\frac{GMm}{4R_0}$$

在A点，飞船与星球的引力势能为$V=-\frac{GMm}{R_0}$，所以此时动能为

$$E_k=E-V=-\frac{GMm}{4R_0}+\frac{GMm}{R_0}=\frac{3GMm}{4R_0}$$

于是在A点，飞船的速率为：

$$v_A=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{3GM}{2R_0}}=\sqrt{\frac{3}{2}}v_0$$

解法二：设飞船在**A**点和**B**点的速率分别为，因飞船星球的万有引力下运动，是有心力。所以角动量和机械能守恒，即

$$\begin{cases} mv_A R_0 = mv_B \times (3R_0) \\ \dfrac{1}{2}mv_A^2 - \dfrac{GMm}{R_0} = \dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{GMm}{3R_0} \end{cases}$$

解该联立方组可得

$$v_A = \sqrt{\frac{3GM}{2R_0}} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_0$$

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{6R_0}} = \frac{1}{\sqrt{6}}v_0$$

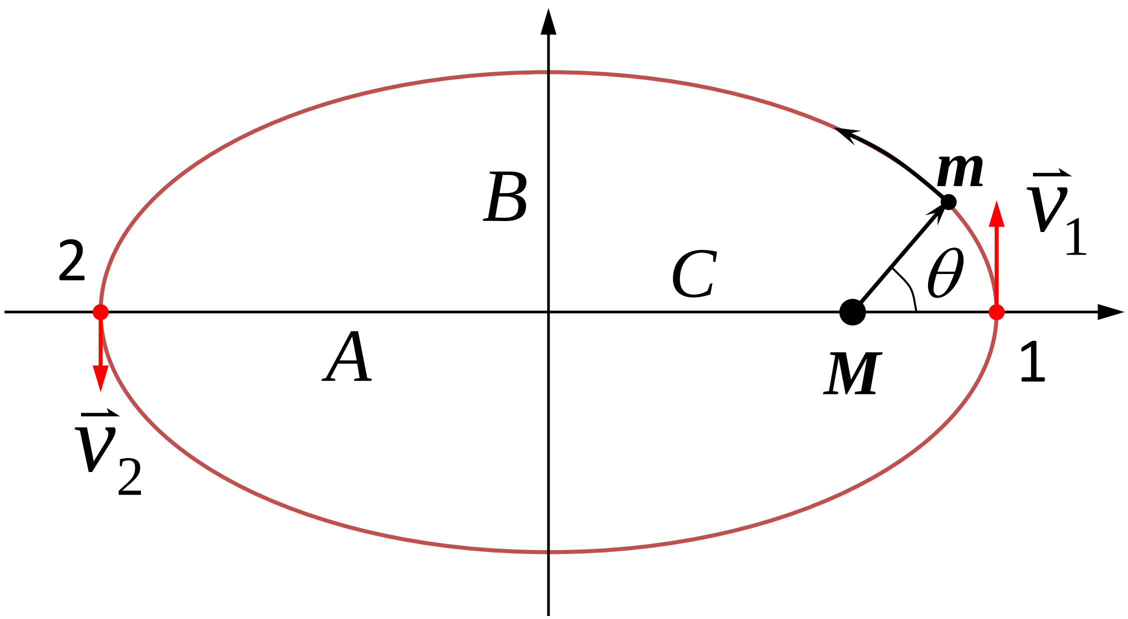
（**2**）由半长轴与总机械能之间的关系可得可得飞船的机械能应为

$$E = -\frac{GMm}{2\times\frac{4}{3}R_0} = -\frac{3}{8}\frac{GMm}{R_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R_0}$$

所以有

$$v^2 = v_0^2 + \Delta v^2 = \frac{5}{4}\frac{GM}{R_0} = \frac{5}{4}v_0^2 \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{2}v_0$$

例题4：太阳质量M，行星椭圆轨道半长轴A、半短轴B。行星的轨道运动周期T，试导出开普勒第三定律。



选择长轴的两点：近日点 1和远日点 2，在这两点，速度与径矢方向互相垂直。

解：

机械能守恒：
$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{A-C} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{A+C}$$

角动量守恒：
$$(A-C)mv_1 = (A+C)mv_2$$

联立以上两方程可解得：
$$v_1 = \frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}, \qquad v_2 = \frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

掠面速率：$\kappa = \frac{1}{2}(A-C)v_1 = \frac{1}{2}B\sqrt{\frac{GM}{A}}$

行星的轨道运动周期：$T = \frac{\pi AB}{\kappa} = 2\pi A\sqrt{\frac{A}{GM}}$

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{常数})$$

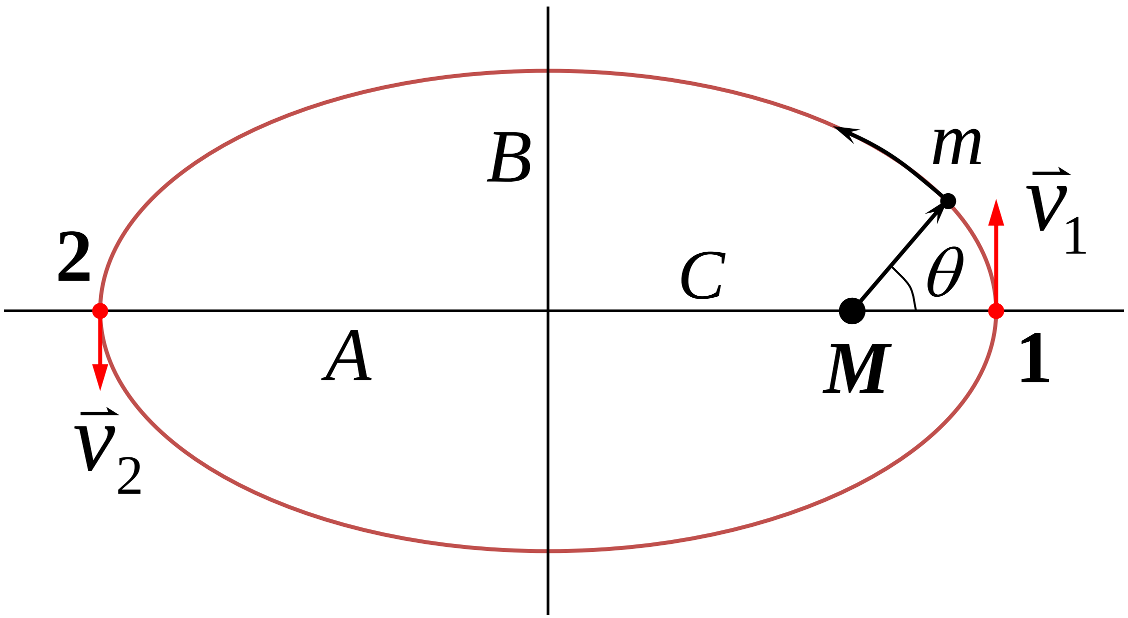
开普勒第三定律

例题5：通过天文观测，发现存在行星椭圆轨道，假设质点间的万有引力大小与距离 r 的关系为 $F = GMmr^{\alpha}$

试就下面两种情况分别确定α

（1）太阳在椭圆轨道的一个焦点上；

（2）太阳在椭圆的中心

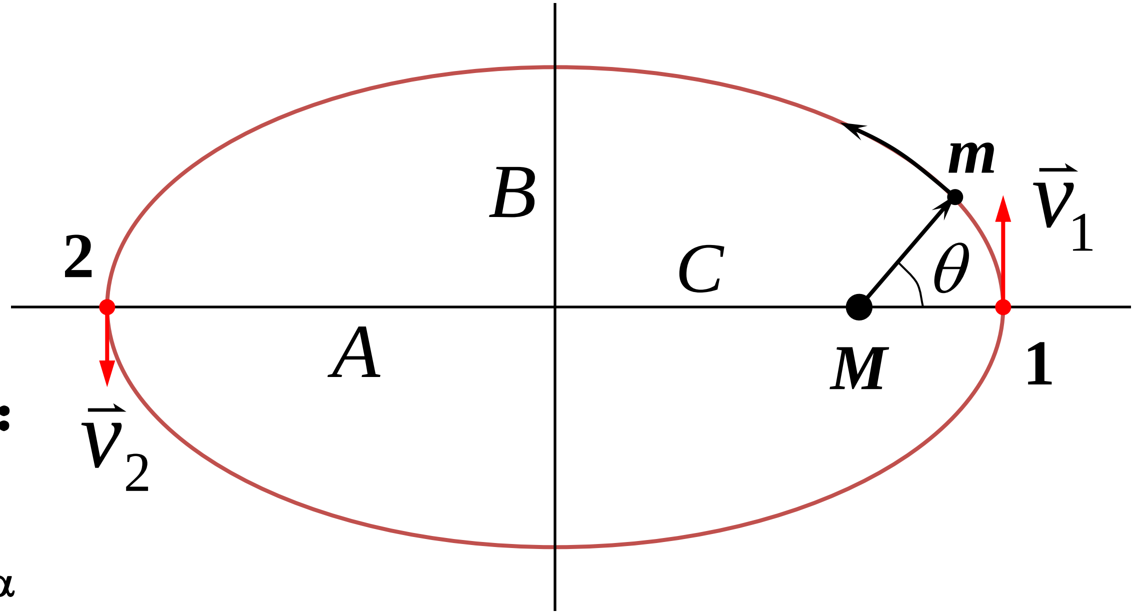


解： （1）

由掠面速度不变可得：

$$v_1(A-C)=v_2(A+C)$$

再利用牛顿第二定律可得：



$$\begin{cases} m\dfrac{v_1^2}{\rho_1}=GMm(A-C)^{\alpha} \\ m\dfrac{v_2^2}{\rho_2}=GMm(A+C)^{\alpha} \\ \rho_1=\rho_2 \end{cases} \Rightarrow (A+C)^{2+\alpha}=(A-C)^{2+\alpha}$$

对于椭圆 $C\neq 0$，必有 $\alpha=-2$

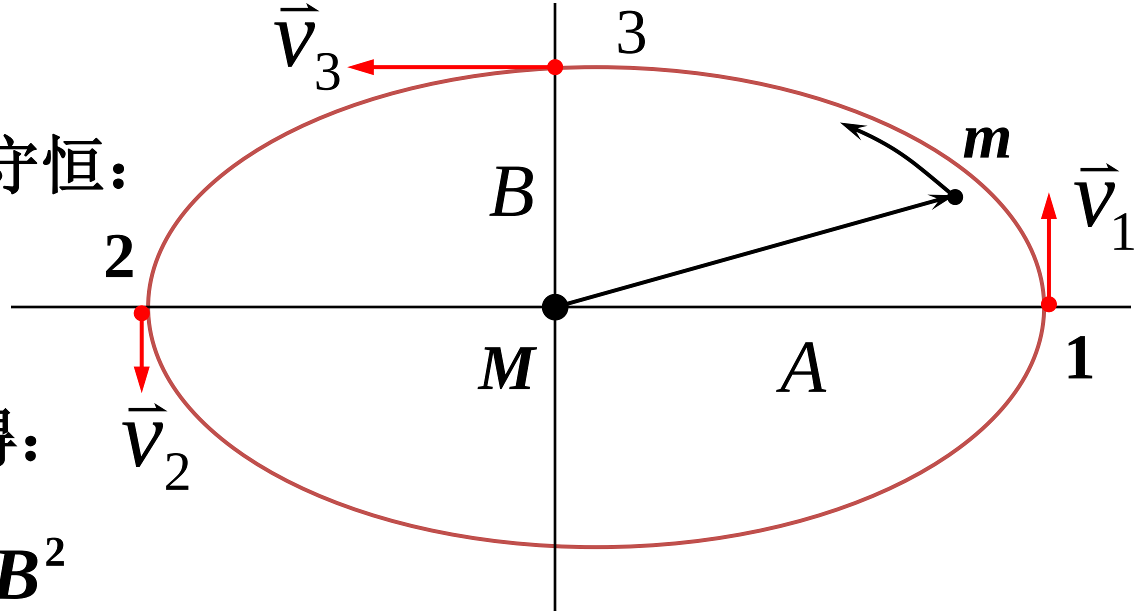
从开普勒第一、第二定律，导出了引力的平方反比律

（2）

对于1、3两处应用角动量守恒：

$$v_1 A = v_3 B$$

接着利用牛顿第二定律可得：



$$\begin{cases} m\dfrac{v_1^2}{\rho_1} = GMmA^{\alpha},\ \rho_1 = \dfrac{B^2}{A} \\ m\dfrac{v_3^2}{\rho_3} = GMmB^{\alpha},\ \rho_3 = \dfrac{A^2}{B} \end{cases} \Rightarrow A^{\alpha-1} = B^{\alpha-1}$$

对于椭圆，$A \neq B$, 必有$\alpha = 1$，所以引力将具有弹性力的特点。