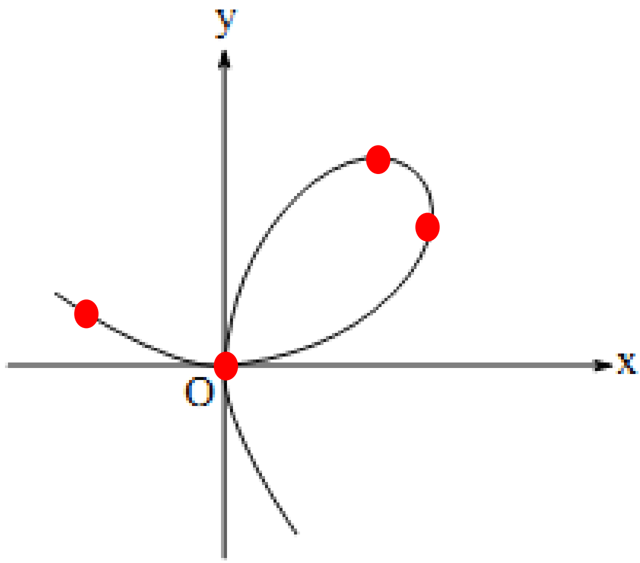
第九章　多元函数微分学

- 多变量函数的连续性
- 多变量函数的微分
- **隐函数定理和逆映射定理**
- 空间曲线与曲面
- Taylor公式与极值
- 向量场的微商
- 微分形式

显函数： 映射关系由一个表达式确定，例如 $z=f(x,y)$.

隐函数： 变量间的关系由方程或方程组确定，例如 $F(x,y,z)=0$.

考察笛卡尔(Descartes)叶形线 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$



- **非**(0,0)点的附近，y能写成 x 的函数，或 x 能写成 y 的函数，即原方程在非(0,0)处**能**确定隐函数.

- 在(0,0)的无论多小的邻域中，y 不能写成 x 的函数，x 也不能写成 y 的函数，即原方程在(0,0)处**不能**确定隐函数

问题： 在什么条件下，一个方程 $F(x,y)=0$ 可以确定一个隐函数？当这个隐函数显示表示时，它是否连续与可微呢？

定理(**隐函数存在定理**)：设区域 $D\subset\mathbb{R}^2$, $M_0(x_0,y_0)\in D$. 若 $F(x,y)$ 在 D 中满足:

1° $F(x,y)\in C^1(D)$,　　即 $F(x,y)$ 在 D 中偏导函数连续.

2° $F(x_0,y_0)=0$,　　即 M_0 在方程确定的曲线上.

3° $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

1.这只是充分条件，不满足条件的时候隐函数仍可能存在；

2.条件 3° 改成 $3'$ $F_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，隐函数为 $x=x(y)$.

则存在 M_0 的邻域 $I\times J\subset D$ 使得:

(1).对任意 $x\in I$, 方程 $F(x,y)=0$ 存在唯一解 $y=y(x)$ 满足 $y_0=y(x_0)$.

(2).由(1)所确定的隐函数 $y=y(x)$ 有连续的微商，且

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

隐函数有连续的导函数： $\begin{cases} F\left(x,y(x)\right)=0 \\ F\left(x+h,y(x+h)\right)=0 \end{cases} \xrightarrow{y(x+h)=y(x)+k}$

$$0=F(x+h,y+k)-F(x,y)=kF_y'\left(x+h,y+\theta_2 k\right)+hF_x'\left(x+\theta_1 h,y\right)\ (0<\theta_1,\theta_2<1).$$

F_x', F_y' 连续，且 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0 \longrightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{F_x'\left(x+\theta_1 h,y\right)}{F_y'\left(x+h,y+\theta_2 k\right)}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

即：$y=y(x)$ 可导，且 $y'(x)=-\dfrac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

例：求由函数 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：令 $F(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则

(法一：公式) $F'_x=-\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，$F'_y=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ $\Rightarrow y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

$$\Rightarrow y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

(法二：微分法)对方程两边求微分得 $\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

整理得：$(x-y)\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}x\Rightarrow y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$. 进而，$y''=\cdots\cdots$.

例： 求由函数 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(法二：微分法)对方程两边求微分得 $\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

整理得：$(x-y)\mathrm{d}y=(x+y)\mathrm{d}x\Rightarrow y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$. 进而，$y''=\cdots\cdots$.

(法三：求导) 由题知y是x的函数，方程两边对x求导得：

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

整理可得 $\Rightarrow y'=-\dfrac{F_x'}{F_y'}=\dfrac{x+y}{x-y},\Rightarrow y''=\cdots\cdots$.

注记： 对于由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 求导数常用方法：

1)利用隐函数的**求导公式.**

2)利用复合函数求导法则直接对方程 $F\left(x,y\right)=0$ 两边对 x 求偏导数----**求导法**.

3)利用一阶微分形式不变性直接对方程两边求微分，再求微商，即**微分法**．此时不必先区分变量是因变量还是自变量.

定理： 设 $F(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续偏导数且 $F(M_0)=0$, $F_z'(M_0)\neq 0$. 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 M_0 的某邻域内确定唯一连续的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$F\big(x,y,z(x,y)\big)=0,\qquad z_0=z(x_0,y_0)$$

且有连续偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

注： $F_x'(M_0)\neq 0$ 或 $F_y'(M_0)\neq 0$ 亦可确定隐函数 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(x,z)$.

也即： $grad(F)_{M_0}\neq 0$ 时，M_0 的附近一定存在隐函数.

例： 设函数 $z=z(x,y)$ 是由 $e^{-xy}-2z+e^{z}=0$ 所确定的二元函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：（法一：公式）令 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^{z}$，则

$$F_x'=-ye^{-xy},F_y'=-xe^{-xy},F_z'=e^{z}-2$$

于是：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$. 进而：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-y^2e^{-xy}}{\left(e^{z}-2\right)^3}\left[\left(e^{z}-2\right)^2+e^{z-xy}\right].$$

（法二：微分法）对方程两边求微分得 $-e^{-xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)-2\mathrm{d}z+e^{z}\mathrm{d}z=0.$

整理得 $\mathrm{d}z=\dfrac{e^{-xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)}{e^{z}-2}$. 故：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$.

例： 设函数 $z=z(x,y)$ 是由 $e^{-xy}-2z+e^{z}=0$ 所确定的二元函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(法二：微分法)对方程两边求微分得 $-e^{-xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)-2\mathrm{d}z+e^{z}\mathrm{d}z=0.$

整理得 $\mathrm{d}z=\dfrac{e^{-xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)}{e^{z}-2}$. 故：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$.

(法三：求导)对方程两边关于 x 求偏导得：$-ye^{-xy}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0.$

故有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$. 再对求 y 偏导，类似可得：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$.

定理： 三维空间中的方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，其中 F,G 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有连续偏导数，且 $F(M_0)=G(M_0)=0$，$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}=\left.\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}\right|_{M_0}\neq 0.$

则该方程组在 M_0 的某邻域内确定唯一的隐函数组 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，满足：

$$\begin{cases} F\big(x,y(x),z(x)\big)=0 \\ G\big(x,y(x),z(x)\big)=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0=y(x_0) \\ z_0=z(x_0) \end{cases}$$

且它们有连续导数：$y'(x)=-\dfrac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$

注： $\left.\mathrm{grad}\,F\right|_{M_0}\times\left.\mathrm{grad}\,G\right|_{M_0}\neq 0$，在 M_0 的邻域就存在隐函数组.

例： 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ z=xf(x+y) \end{cases}$ 所确定的函数，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解： (1. 求导法) 在方程组中直接对 x 求导得：

$$\begin{cases} F_x' + F_y' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z' \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + x\left(1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) f' \end{cases}$$

解关于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的线性方程组得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-F_x' - \left(f + xf'\right) F_z'}{F_y' + xf' F_z'}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(f + xf'\right) F_y' - xf' F_x'}{F_y' + xf' F_z'}.$$

例： 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ z=xf(x+y) \end{cases}$ 所确定的函数，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

(2. 微分法) 方程组中两个方程微分得：

$$\begin{cases} F_x'\mathrm{d}x+F_y'\mathrm{d}y+F_z'\mathrm{d}z=0 \\ \mathrm{d}z=f\,\mathrm{d}x+xf'(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \end{cases}$$

解关于 $\mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 的线性方程组得：

$$\mathrm{d}y=-\frac{F_x'+\left(f+xf'\right)F_z'}{F_y'+xf'F_z'}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}z=\frac{\left(f+xf'\right)F_y'-xf'F_x'}{F_y'+xf'F_z'}\mathrm{d}x.\quad \Rightarrow \ldots\ldots$$

例： 方程组 $\begin{cases} u^2 - v + x = 0 \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$ 在(0,0)邻域中确定 u,v 是 x,y 的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解： (1. 求导法) 在方程组中对 x 求导得：

$$\begin{cases} 2uu_x' - v_x' + 1 = 0 \\ u_x' + 2vv_x' = 0 \end{cases}$$

解关于 u_x', v_x' 的线性方程组得：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2v}{1+4uv}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+4uv}.$$

例： 方程组 $\begin{cases} u^2 - v + x = 0 \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$ 在(0,0)邻域中确定 x, y 是 u, v 的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解： (2. 微分法) 方程组中两个方程求微分得：

$$\begin{cases} 2u\,\mathrm{d}u - \mathrm{d}v + \mathrm{d}x = 0 \\ \mathrm{d}u + 2v\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}y = 0 \end{cases}.$$

解关于 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 的线性方程组得：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{-2v\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{1+4uv} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x + 2u\,\mathrm{d}y}{1+4uv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{2v}{1+4uv} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{1+4uv} \end{cases}.$$

对一般情形，设 $F: D\subset\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n$ 在 D 上可微，$F=(F_1,F_2,\cdots,F_n)^T$，其中 $F_i=F_i(x,y)$ $\big(x=(x_1,x_2,\cdots,x_m),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\big)$.

定理： 若 $F(x,y)=0$, $\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\neq 0$, 则存在包含 x 的开集 $V\subset\mathbb{R}^m$ 和唯一的可微隐函数 $y=y(x)$ 满足：

$$(1)\ F\big(x,y(x)\big)=0;$$

$$(2)\ Jy(x)=-\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x,y)\right).$$

定理: 设映射 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 有连续偏导数. 若在一点 (x_0, y_0) 处有 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)\neq 0$, 则在 $(u_0,v_0)=(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))$ 的邻域内, 存在逆映射 $(u,v)\longrightarrow(x,y): x=x(u,v), y=y(u,v)$ 而且逆映射可导, 其偏导数的 Jacobi行列式满足

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$$

一般地，若定义在区域上两个 C^1 满秩的映射互为逆映射，则它们的Jacobi矩阵互逆.

例： 求由方程组 $\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \end{cases}$ 确定的反函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 的偏导数 u_x', u_y', v_x', v_y' 和 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

解： 对方程组两边求微分得：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = f_u'\mathrm{d}u + f_v'\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y = g_u'\mathrm{d}u + g_v'\mathrm{d}v \end{cases}$$

将 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 看作未知数，解此方程组得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = g_v' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}x - f_v' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}y = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = -g_u' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}x + f_u' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}y = \dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x' = g_v' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, & u_y' = -f_v' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ v_x' = -g_u' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, & v_y' = f_u' \Big/ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{cases}$$ 其中 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u' & f_v' \\ g_u' & g_v' \end{vmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v} & -\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}.$$

两边取行列式得： $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$.

例： 求极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 的反变换的偏导数.

解： 由逆映射定理，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$