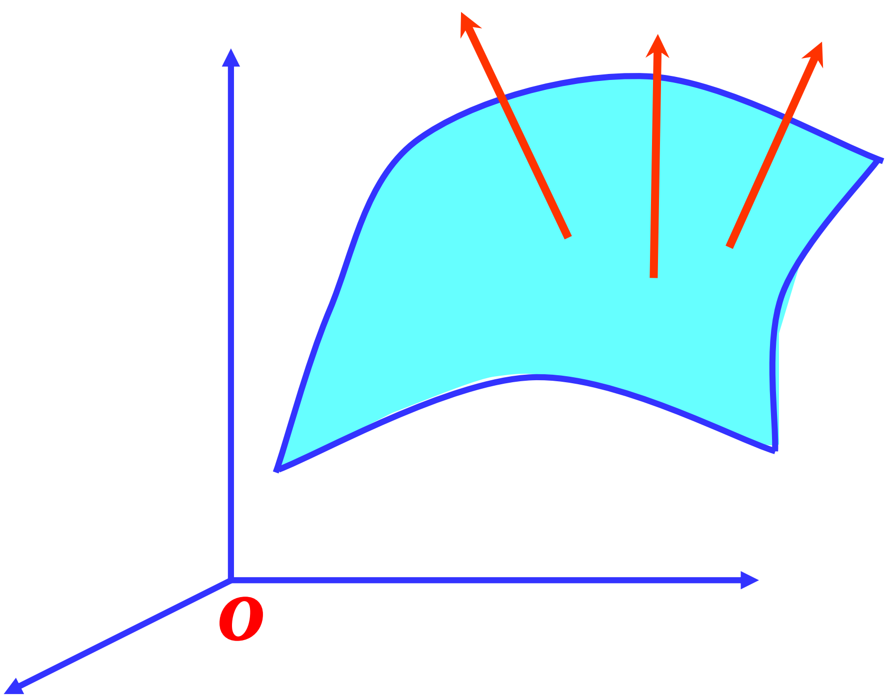
# 第十一章　曲线积分与曲面积分

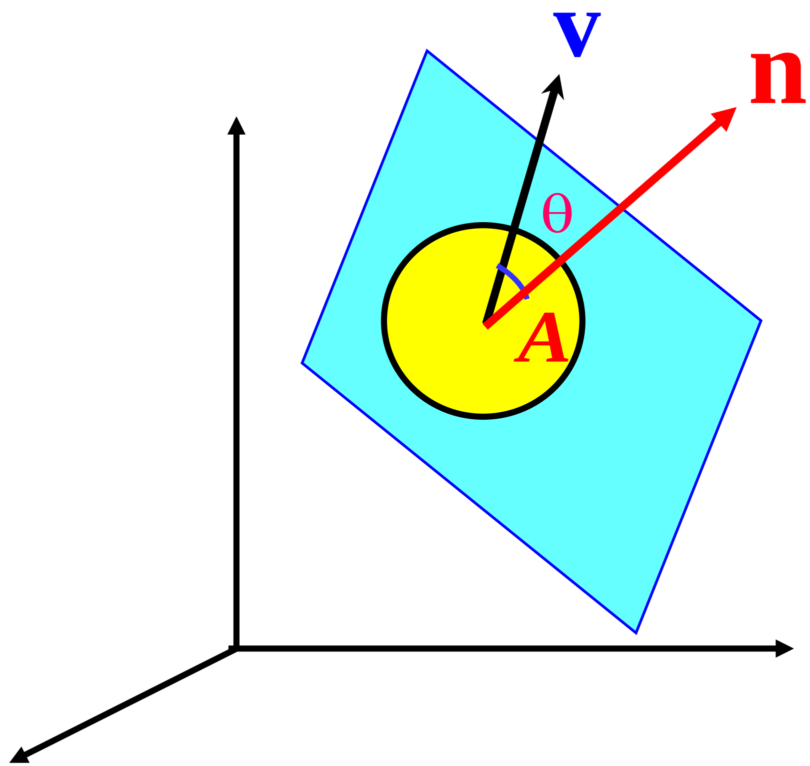
- 数量场在曲线上的积分
- 数量场在曲面上的积分
- 向量场在曲线上的积分
- **向量场在曲面上的积分**
- Gauss定理和Stokes定理
- 保守场
- 微分形式的积分

# 流量或通量

设空间中有流速场 $\mathbf{v}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big)$,

$S$ 为力场中一光滑或分片光滑曲面. **求单位时间内流过曲面的流量.**

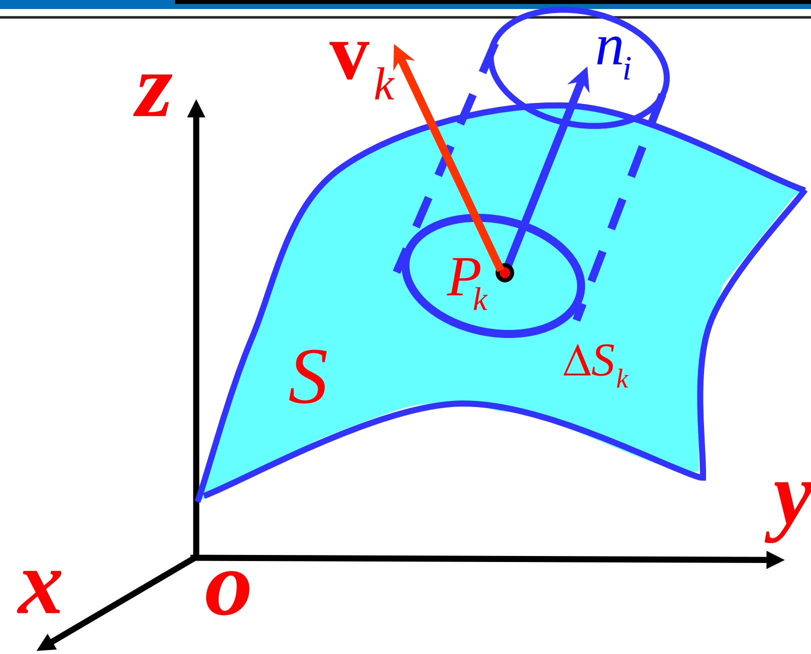


**1) 分割：**

任意划分 $S$ 得 $n$ 个小块

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_k, \cdots, \Delta S_n.$$




**2) 近似**

每个小块 $\Delta S_k$ 上任取一点 $P_k$，

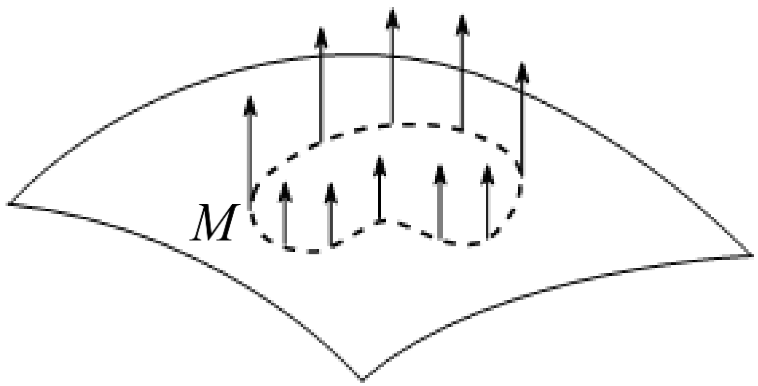
用该点处的流速和法向量分别作为该小块的流速和法向量，流速场在该小片上的流量的近似值为：$\Phi_k \approx \mathbf{V}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot n_k \ \Delta S_k$

**3) 求和** $\Phi \approx \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot n_k \ \Delta S_k$

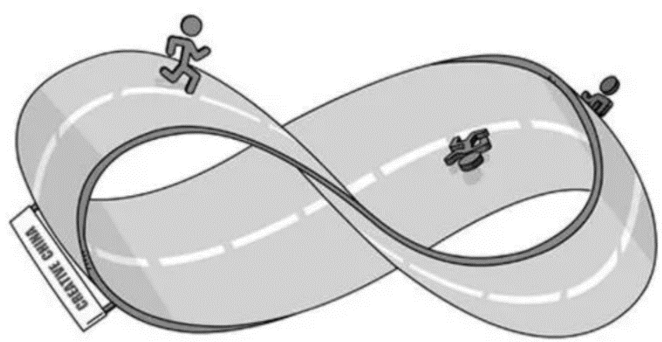
**4) 取极限** $\Phi = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{1 \le k \le n} \mathbf{V}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot n_k \ \Delta S_k$，$\boxed{\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\mathrm{diam}\{\Delta S_k\}\}}$

# 有向曲面

**双侧曲面**：$S$ 上任一点 $M$ 处的法向量，沿过 $M$ 的**任一条**闭曲线(不越过边界) 连续变化移动一周回到 $M$ 处时，方向不变.




**单侧曲面**：Mobius带



# 双侧曲面的定向

可定向曲面S有两侧，指定其中一侧为正向(通过连续变化的单位法向指定)，则S为**定向曲面**.

(1) 设光滑曲面由参数方程

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D$$

给出. 这时曲面$S$上的法向量为

$$n = \pm \mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v' = \pm \left( \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right).$$

如果选正号，表示选定了曲面的一侧， 则取负号表示曲面的另一侧.

(2) 光滑显式曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 两个单位法向量是

$$\mathbf{n}=\pm\left(-f_x',-f_y',1\right)\Big/\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}$$

通常称具有法向量 $\left(-f_x',-f_y',1\right)\Big/\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}$ 的一侧称为曲面的上侧，具有相反法向量的一侧为曲面的下侧.

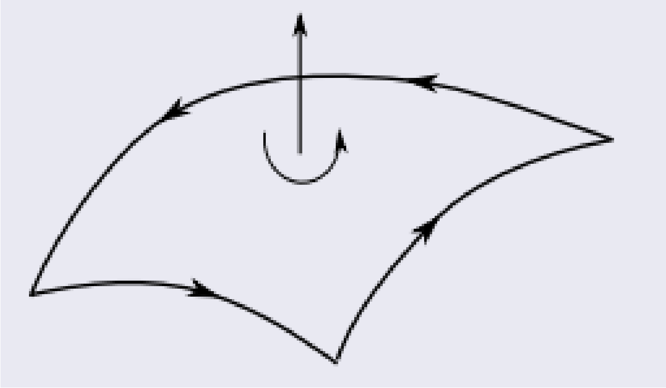
类似，对显式曲面 $y=g(x,z)$可定义其两侧为右侧和左侧；

对显式曲面 $x=h(y,z)$可定义其两侧为前侧和后侧.

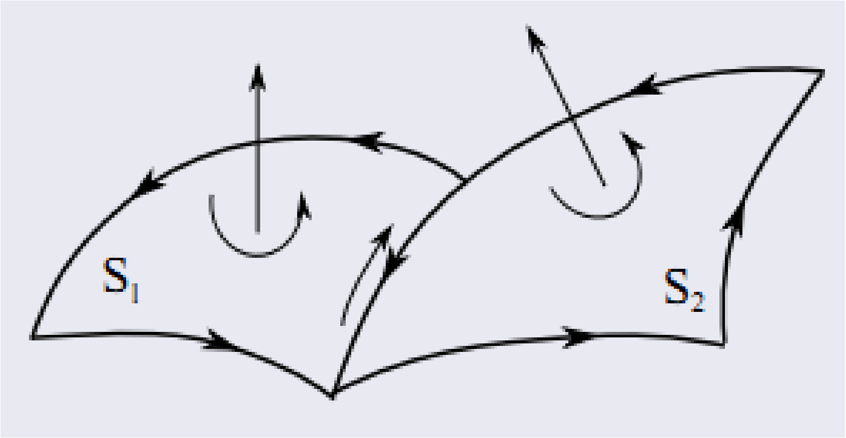
(3) 封闭曲面常用内侧和外侧说明两侧，习惯上称外侧为正向.

将平面块的面积 $S$ 赋予一个方向 $\mathbf{n}$ (其法向)，称 $\mathbf{n}S$ 为**面积向量**.

曲面定向与其边界定向的**协调性**：构成右手系.



曲面的**协调拼接**：



设 $\mathbf{v}$ 是空间区域 $V \in \mathbb{R}^3$ 中的一个向量场，$S$ 是 $V$ 中一张光滑的定向曲面，$\mathbf{n}$ 是其正向单位法向量，称

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$$

为向量场 $\mathbf{v}$ 在定向曲面 $S$ 上的**第二型曲面积分**，也称为向量场 $\mathbf{v}$ 通通过定向曲面 $S$ 指定侧的**通量**. 当 $S$ 为封闭曲面时，也记为 $\oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

设 $\mathbf{v} = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$, 单位法向 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为曲面上面积微元在相应坐标平面内的有向投影.

第二型曲面积分又可表示为 $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S P\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

# 第二型曲面积分的性质

**1. 对场的线性性**： 若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$，则有

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=c_1\iint_S \mathbf{v}_1\cdot d\mathbf{S}+c_2\iint_S \mathbf{v}_2\cdot d\mathbf{S}.$$

**2. 对积分曲面的可加性**： 若 $S$ 是由 $S_1$ 和 $S_2$ **协调拼接**而成，则：

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S_1} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_2} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}.$$

**3. 对曲面的方向性**：用 $S^+$ 和 $S^-$ 表示曲面的不同两侧，则

$$\iint_{S^-} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=-\iint_{S^+} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}.$$

# 第二型曲面积分的计算

**1.** 设光滑曲面 $S$ 的参数方程为

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v)\in D.$$

曲面 $S$ 指定侧的单位法向量为 $\mathbf{n}=\varepsilon\dfrac{\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'}{\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|}$， 其中 $\varepsilon=\pm 1.$

由 $\mathrm{d}S=\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$， 故有：

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\varepsilon\iint_D \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\varepsilon\iint_D\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\varepsilon\iint_D\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

注： $\varepsilon=1\Leftrightarrow\left(\mathbf{r}_u',\mathbf{r}_v',\mathbf{n}\right)$ 构成右手系.

**注：**

(1). 这里有向面积微元在坐标平面上的代数投影为：

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(2). 与二重积分的变量代换不同. 二重积分中面积微元是非负的，

即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

(3). $\iint_S R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是特殊的向量场 $\mathbf{v}=(0,0,R)$ 的曲面积分，不是二重积分.

**2.** 若曲面 $S$ 有显式表示 $z = f(x,y), (x,y) \in D$，则有

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \varepsilon \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \varepsilon \iint_D \left(-Pf_x' - Qf_y' + R\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$S$ 的定向指向上侧时 $\varepsilon = 1$，否则 $\varepsilon = -1$.

**注：** 不论曲面是参数或显式表示，**将第二型曲面积分转化为第一型曲面积分**，都是最重要最本质的方法，尤其是法向量易于确定时(例如曲面为平面片或球面片).

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S (P,Q,R) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

**Examples：**

**1.** 求向量场 $\mathbf{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ 通过球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧的通量，讨论 $\mathbf{v}=\mathbf{E}=\dfrac{q}{r^3}\mathbf{r}$ 的情形.

**2.** 求向量场 $\mathbf{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ 通过柱面 $S: x^2+y^2=a^2, -h\le z\le h$ 外侧的通量.

**3.** 设向量场 $\mathbf{v}=y(x-z)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+\left(y^2+xz\right)\mathbf{k}$, 求 $\mathbf{v}$ 通过长方体 $0\le x\le a$, $0\le y\le b, 0\le z\le c$ 的外侧 $S$ 的通量.

**4.** 求曲面积分 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $S$ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 (z\ge 0)$, 定向为上侧.

**5.** 求曲面积分 $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 $S$ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(z\geq 0)$, 定向为上侧.

**6.** 计算曲面积分 $I=\iint_S \frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$, 其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

**7.** 计算曲面积分 $\iint_S -y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $S$ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被两平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截下的部分的外侧.