6.(1) $\vec{r_u}=(\cos v,\sin v,0)$　$\vec{r_v}=(-u\sin v,u\cos v,a)$

$\vec{n}=\vec{r_u}\times\vec{r_v}=(a\sin v,-a\cos v,u)$

切平面：$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-av_0)=0$

即 $a\sin v_0\,x-a\cos v_0\,y+u_0z-au_0v_0=0$

法线方程：$\dfrac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\dfrac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\dfrac{z-av_0}{u_0}$

8(3). 令 $F(x,y,z)=e^z-z+xy$. 则 $(F_x,F_y,F_z)|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$

切平面：$(x-2)+2(y-1)=0$ 即 $x+2y-4=0$

法线：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$.

11. 设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0). 法向量 $\vec{n}=(x_0,2y_0,3z_0)$.

则 $\vec{n}\perp(2,1,-2)$ 且 $\vec{n}\perp(6-x_0,3-y_0,\frac{1}{2}-z_0)$

联立 $\begin{cases}x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21\\2x_0+2y_0-3z_0=0\\x_0(6-x_0)+2y_0(3-y_0)+3z_0(\frac{1}{2}-z_0)=0\end{cases}$

解得 $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$ 或 $(3,0,2)$

π：$x+4y+6z-21=0$ 或 $3x+6z-21=0$

13. 设 (x_0,y_0,z_0) 是两曲面的交点. 在该点处两曲面的法向量为：

$\vec{n_1}=(2x_0-a,2y_0,2z_0)$，$\vec{n_2}=(2x_0,2y_0-b,2z_0)$

$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=4(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-2ax_0-2by_0$

$\quad=2(x_0^2+y_0^2+z_0^2-ax_0)+2(x_0^2+y_0^2+z_0^2-by_0)$

$\quad=0$

故两曲面正交

15. 在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为 $\left(-\dfrac{x_0+y_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}},\dfrac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}},1\right)$

切平面：$-\dfrac{x_0+y_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}}(x-x_0)+\dfrac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}(y-y_0)+(z-x_0e^{\frac{x_0}{y_0}})=0$

即 $-\frac{x_0+y_0}{y_0}e^{\frac{x_0}{y_0}}\cdot x+\frac{x_0^2}{y_0^2}e^{\frac{x_0}{y_0}}\cdot y+z=0$ 故该平面过原点

17. 曲面 $y^2+z^2=25$ 在 $(1,3,4)$ 处的法向量为 $\vec{n_1}=(0,3,4)$

曲面 $x^2+y^2=10$ 在 $(1,3,4)$ 处的法向量为 $\vec{n_2}=(1,3,0)$

故曲线在 $(1,3,4)$ 处的切向量为 $\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(-12,4,-3)$.

切线方程：$\frac{x-1}{-12}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-3}$

法平面方程：$-12(x-1)+4(y-3)-3(z-4)=0$ 也即 $12x-4y+3z-12=0$

1.(1) $F'(t)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y+tk)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x+th,y+tk)$

$$=[2h(x+th)+k]\cos[(x+th)^2+(y+tk)^2]$$

于是在 $t=1$ 处的斜率为 $F'(1)=[2h(x+h)+k]\cos[(x+h)^2+(y+k)^2]$

3. 令 $(x_1,y_1)=(0,\frac{1}{2})$，$(x_2,y_2)=(\frac{1}{2},0)$. $\frac{\partial f}{\partial x}=\pi\cos\pi x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-\pi\sin\pi y$.

根据微分中值定理 存在 $\theta\in(0,1)$. s.t.

$2=f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)\cdot(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta(x_2,y_2)+(1-\theta)(x_1,y_1)),$
$\frac{\partial f}{\partial y}(\theta(x_2,y_2)+(1-\theta)(x_1,y_1)))$

即 $2=\frac{1}{2}\pi\cos\frac{\pi\theta}{2}+\frac{1}{2}\pi\sin\frac{\pi(1-\theta)}{2}$. 也即 $\frac{4}{\pi}=\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin[\frac{\pi}{2}(1-\theta)]$

4.(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ $\quad -\infty<x<+\infty$

$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)$ $\quad -1<y<1$

$e^x\ln(1+y)=y+xy-\frac{y^2}{2}+\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}+R_3$ $\quad (x\in\mathbb{R},y\in(-1,1))$

4(3). $f(x,y)=\frac{1}{(1-x)(1-y)}$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$ $\quad -1<x<1$

$\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+\cdots+y^n+o(y^n)$ $\quad -1<y<1$

故 $f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}(x^k+x^{k-1}y+\cdots+xy^{k-1}+y^k)+R_n$ $\quad (x,y\in(0,1))$

4(7): $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-2)}=0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)}=0$. $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-2)}=4$. $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,-2)}=-2$

$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,-2)}=-1$. $f(1,-2)=5$.

故 $f(x,y)=5 \quad +2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2+R_2$

又因为 $f(x,y)$ 是二次多项式. 故阶数超过 2 的偏导数均为 0

因此 $R_2=0$ 此 Taylor 展开式在 $\mathbb{R}^2$ 上恒成立

5. 令 $F(x,y,z)=z^3-2xz+y$.

根据隐函数定理. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2z}{3z^2-2x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-1}{3z^2-2x}$

进一步地, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}(3z^2-2x)-2z(6z\frac{\partial z}{\partial x}-2)}{(3z^2-2x)^2}=\frac{-16xz}{(3z^2-2x)^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6z\frac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2-2x)^2}=\frac{-6z}{(3z^2-2x)^3}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{6z\frac{\partial z}{\partial x}-2}{(3z^2-2x)^2}=\frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^2}$

于是在点 $(1,1,1)$ 附近, 有

$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+R_2$

7(2) 令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$, 又因为在 $(2,-2)$ 处, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$

故 Hess 矩阵负定, $(2,-2)$ 是极大值点. 极大值为 $f(2,-2)=8$

7.(4) 不妨设 $a>0$, 令 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)$.

$F_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-2xa^2$, $F_y(x,y)=4y(x^2+y^2)+2ya^2$

由隐函数定理. 当 $y\neq 0$ 时 方程确定了隐函数 $y=y(x)$

令 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=0$, 解得 $x=0$ 或 $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$

当 $x=0$ 时 $y=0$. 舍去.

当 $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$ 时. 有 $x^2-y^2=\frac{a^2}{4}$, 故 $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}a, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}a)$

进一步地，可求得在 $(\frac{\sqrt{6}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 和 $(-\frac{\sqrt{6}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处二阶导数值为 $-\frac{3}{\sqrt{2}a}<0$

在 $(\frac{\sqrt{6}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 和 $(-\frac{\sqrt{6}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处二阶导数值为 $\frac{3}{\sqrt{2}a}>0$

于是它们分别是极大值点和极小值点，极大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}a$，极小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}a$

8、考虑 $F(x,y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(\pi-x-y)$

在 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x, y$ 且 $x+y\le\pi\}$ 上的最大值，注意到 $F|_{\partial\Omega}\equiv0$，在 Ω° 上

令 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\ y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ $\quad f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

于是 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 必为 $f(x,y)$ 在有界闭集 Ω 上的最大值点

也即当三角形是等边三角形时，三个角的正弦乘积最大.

14. 注意到 $f(x,y)=(y-x^2)(x^2-2y)$

分别取点列 $P_n=(\frac{1}{n},\frac{3}{4n^2})$，$Q_n=(\frac{1}{n},\frac{2}{n^2})$ 不难看出.

$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=(0,0)$. 但 $f(P_n)>f(0,0)=0$，$f(Q_n)<f(0,0)=0$

在直线 $\begin{cases}x=\cos\theta t\\ y=\sin\theta t\end{cases}$ 上 $f(x,y)=3\cos^2\theta\sin\theta t^3-\cos^4\theta t^4-2\sin^2\theta t^2=g(t)$

$g'(0)=0$. $g''(0)=-4\sin^2\theta$.

当 $\theta\ne0$ 或 π 时. $g''(0)<0$. $\Rightarrow$ 极大值点

当 $\theta=0$ 或 π 时，$g(t)=-t^4$. $t=0$ 是极大值点.

综上. $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点. 但沿任一过 $(0,0)$ 的直线. $(0,0)$ 都是极大值点