中国科学技术大学2017-2018学年第二学期
(数学分析(B2)期中考试试卷, 2018年05月05日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 120 分钟　满分: 100 分

一、(本题 10 分) 设 $\Phi(x,y,z)$ 是三元可微函数且方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 能确定可微的隐函数 $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$.

解　根据隐函数求导法则,

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial z}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

故, $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

注 每个偏导数给 3 分, 结论给 1 分.

二、 (本题 10 分) 设 $F(x,y)$ 是二元可微函数. 求证空间中存在一条直线使得由方程 $F(x-ay,z-by)=0$ (a,b 是常数) 表示的曲面的切平面总与此直线平行.

证明　设 $G(x,y,z)=F(x-ay,z-by)$. 则

$$G'_x=F'_1,\ G'_y=-aF'_1-bF'_2,\ G'_z=F'_2.$$

因此, 切平面的法向为

$$\vec{n}=(G'_x,G'_y,G'_z)=(F'_1,-aF'_1-bF'_2,F'_2).$$

因为 $\vec{n}\cdot(a,1,b)=0$, 所以切平面法向与常向量 $(a,1,b)$ 垂直. 故, 切平面与以 $(a,1,b)$ 为方向的直线平行.

注 求出切平面的法向给 5 分, 得出结论再给 5 分.

三、 (本题 15 分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的可微性, 以及它在原点的偏导数是否连续?

解 记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 则

$$f(x,y)=f(0,0)+\rho^2\sin\frac{1}{\rho}=o(\rho)\ (\rho\to 0).$$

这说明 f 在 $(0,0)$ 可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x\sin\frac{1}{\rho}+\rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\frac{-x}{\rho^3}=2x\sin\frac{1}{\rho}-\frac{x}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2y\sin\frac{1}{\rho}+\rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\frac{-y}{\rho^3}=2y\sin\frac{1}{\rho}-\frac{y}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

(x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 都无极限. 故, 它们不连续.

注 可微给 5 分, 偏导数计算给 5 分, 不连续给 5 分.

四、(本题 15 分) 设 $a_j>0,(j=1,2,\cdots,n)$. 求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 在条件 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$ 之下的最小值.

解 因为 f 是非负系数的多项式, 所以 f 在所给条件下有最小值, 但无最大值. 构造函数

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^n x_i^2-\lambda\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i-1\right).$$

根据 Lagrange 乘数法, f 取到极值的点应为 F 的驻点, 即有,

$$2x_i-\lambda a_i=0,\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i-1=0. \tag{2}$$

从 (1) 可得 $x_i=\lambda\frac{a_i}{2}$, 代入 (2) 得 $\lambda=\frac{2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. 因此, 得唯一的驻点 $P=\left(\frac{a_1}{Mb_1},\cdots,\frac{a_n}{M}\right)$, 其中 $M=\sum_{i=1}^n a_i^2$. 该驻点必为 f 在所给条件下的最小值点. 因此, 在所给条件下 f 的最小值是

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{M}\right)^2=\frac{1}{M}.$$

注 构造 F 给 3 分. 求出驻点 4 分. 判断驻点为最小值点 4 分. 求出最小值 4 分.

五、(本题 15 分) 求定义在星形区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqslant 1\}$ 上满足 $f(1,0)=1$ 的正值连续函数 $f(x,y)$ 使得 $\iint\limits_{D}\dfrac{f(x,y)}{f(y,x)}\,dxdy$ 达到最小, 并求出这个最小值.

解 对积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{f(x,y)}{f(y,x)}\,dxdy$ 作变换 $x\to y$, $y\to x$, 由 D 的对称性, 知 $I=\iint\limits_{D}\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\,dxdy$. 因而

$$I=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{f(x,y)}{f(y,x)}+\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)dxdy\geqslant\iint_D 1dxdy=\sigma(D).$$

$$I-\sigma(D)=\frac{1}{2}\iint_D\left(\sqrt{\frac{f(x,y)}{f(y,x)}}-\sqrt{\frac{f(y,x)}{f(x,y)}}\right)^2dxdy\geqslant 0.$$

$I=\sigma(D)$ 当且仅当 $f(x,y)=f(y,x)$. 故, 所求函数为所有满足 $f(x,y)=f(y,x)$ 及 $f(1,0)=0$ 的连续正值函数. (.....8 分)

D 边界的参数方程为 $x=\cos^3\varphi,\ y=\sin^3\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. 故, I 的最小值为

$$\sigma(D)=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}}3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,drd\varphi=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{3}{8}\pi.\qquad(.....7\text{ 分})$$

六、 (本题 15 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)^5z\,dxdydz$, 其中 V 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 1$ 被曲面 $z=\sqrt{3x^2+y^2+1}$ 及 Oxy 平面所截下的部分。

解 记所求积分为 I, 则

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5\int_0^{\sqrt{3x^2+y^2}}z\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5(3x^2+y^2+1)dxdy.$$

由对称性,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5x^2\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5y^2\,dxdy,$$

故,

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5(2x^2+2y^2+1)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}r^{10}(2r^2+1)\,r\,drd\varphi=\frac{19}{84}\pi.$$

七、（本题 10 分）设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一阶连续可微函数, 满足 $\nabla f\neq 0$ 且 $y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ($\forall\ (x,y)\in D$). 求 $f(x,y)$ 的等值线方程.

解 设 $x=x(t),\ y=y(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是等值线 $f(x,y)=C$ 的参数方程. 则

$$f(x(t),y(t))=C.$$

两边对变量 t 求导, 得

$$x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

结合条件 $y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 可得

$$x(t)x'(t)-y(t)y'(t)=0,$$

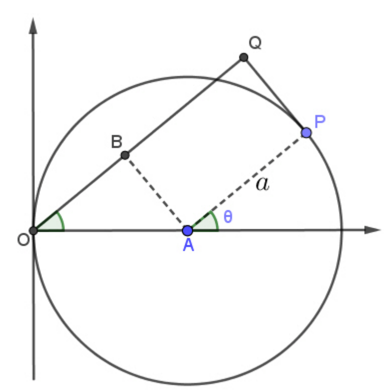
即, $(x^2(t)-y^2(t))'=0$. 故, $x^2-y^2=C_1$ 是常数. 也就是说 f 在 D 上的等值线方程为

$$x^2-y^2=C_1\ (\text{常数}).$$

八、（本题 10 分）设 P 是圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 上的动点. 从原点往圆过 P 点的切线作垂线, 垂足为 Q. 当 P 沿圆运动时, 点 Q 的轨迹是 xy 平面上一条封闭曲线. 求此封闭曲线围成区域的面积.

解 设 $A=(a,0)$, Q 点坐标为 (x,y), AB 与 x 轴夹角为 θ. 则

$$\begin{aligned}OQ&=OB+BQ=a\cos\theta+a\\ x&=OQ\cos\theta=a\cos\theta(1+\cos\theta)\\ y&=OQ\sin\theta=a\sin\theta(1+\cos\theta),\ \ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\end{aligned}$$



故, 点 Q 的极坐标方程为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=a(1+\cos\theta).$$

Q 的轨迹所围的区域的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

注 求出 Q 点的坐标给 4 分. 求出面积给 6 分.