第八章 空间解析几何

二次曲面分类

一般二次曲面方程：

$$\boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+c=0.$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}+c=0.$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

取正交方阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$，并记$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Q}=(b_1',b_2',b_3')$

$$\xLeftrightarrow{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}} \lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2+b_1'y_1+b_2'y_2+b_3'y_3+c=0.$$

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2+b_1' y_1+b_2' y_2+b_3' y_3+c=0.$$ 考虑非退化情形.

一、$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0 \xrightarrow{\text{配方}} \lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=d$

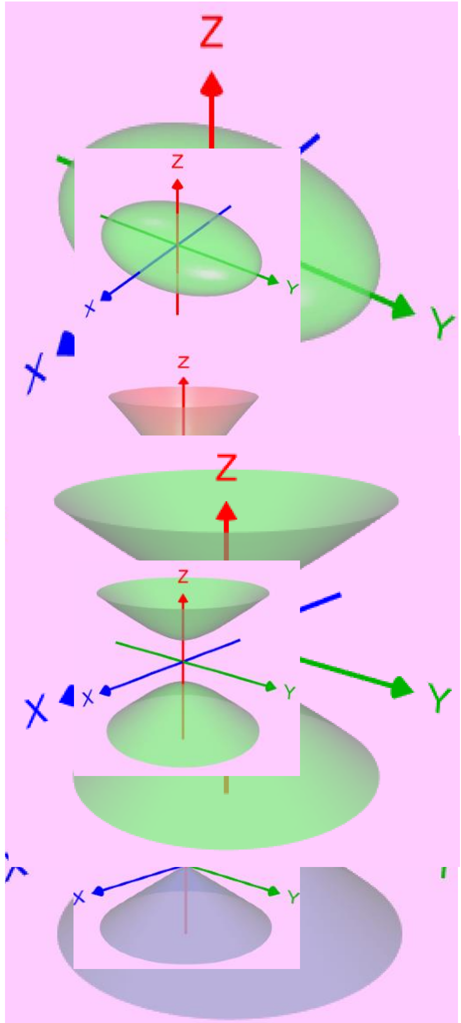
(1) $d \neq 0 \longrightarrow \dfrac{z_1^2}{\alpha_1}+\dfrac{z_2^2}{\alpha_2}+\dfrac{z_3^2}{\alpha_3}=1$

i . $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 三正 $\Rightarrow \dfrac{z_1^2}{a^2}+\dfrac{z_2^2}{b^2}+\dfrac{z_3^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ 椭球面

ii . $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两正一负 $\Rightarrow \dfrac{z_1^2}{a^2}+\dfrac{z_2^2}{b^2}-\dfrac{z_3^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ 单叶双曲面

iii. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两负一正 $\Rightarrow \dfrac{z_1^2}{a^2}-\dfrac{z_2^2}{b^2}-\dfrac{z_3^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ 双叶双曲面

(2) $d=0 \longrightarrow \dfrac{z_1^2}{\alpha_1}+\dfrac{z_2^2}{\alpha_2}+\dfrac{z_3^2}{\alpha_3}=0 \xrightarrow[\text{两正一负}]{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} z_3^2=\dfrac{z_1^2}{a^2}+\dfrac{z_2^2}{b^2}$ 二次锥面



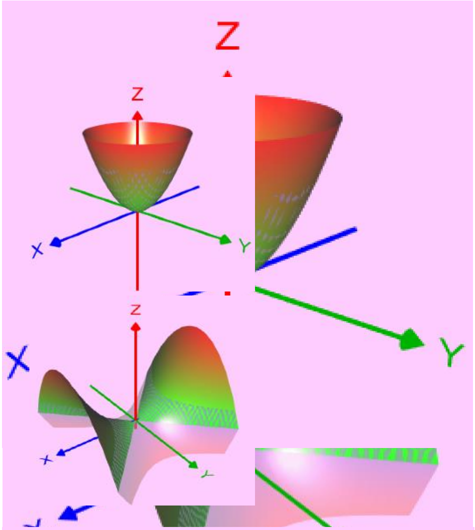
$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2+b_1' y_1+b_2' y_2+b_3' y_3+c=0.$$

二、 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$中有一个为零（设$\lambda_3=0$）

(1) $b_3'\neq 0 \longrightarrow \lambda_1 \boldsymbol{z}_1^2+\lambda_2 \boldsymbol{z}_2^2=\boldsymbol{b}_3'\boldsymbol{z}_3 \longrightarrow \boldsymbol{z}_3=\dfrac{\boldsymbol{z}_1^2}{\alpha_1}+\dfrac{\boldsymbol{z}_2^2}{\alpha_2}$

i . α_1,α_2 同正负 $\Longrightarrow z_3=\dfrac{z_1^2}{a^2}+\dfrac{z_2^2}{b^2} \Longrightarrow$ 椭圆抛物面

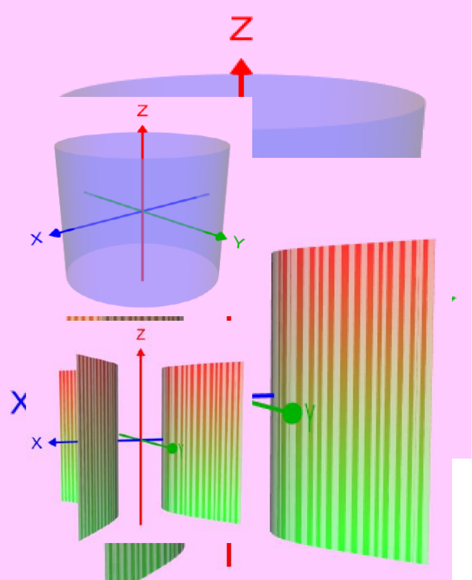
ii . α_1,α_2 一正一负 $\Longrightarrow z_3=\dfrac{z_1^2}{a^2}-\dfrac{z_2^2}{b^2} \Longrightarrow$ 双曲抛物面（马鞍面）



(2) $b_3'=0 \longrightarrow \lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=d \xrightarrow{d\neq 0} \dfrac{\boldsymbol{z}_1^2}{\alpha_1}+\dfrac{\boldsymbol{z}_2^2}{\alpha_2}=1$

i . α_1,α_2 两正 $\Longrightarrow \dfrac{z_1^2}{a^2}+\dfrac{z_2^2}{b^2}=1 \Longrightarrow$ 椭圆柱面

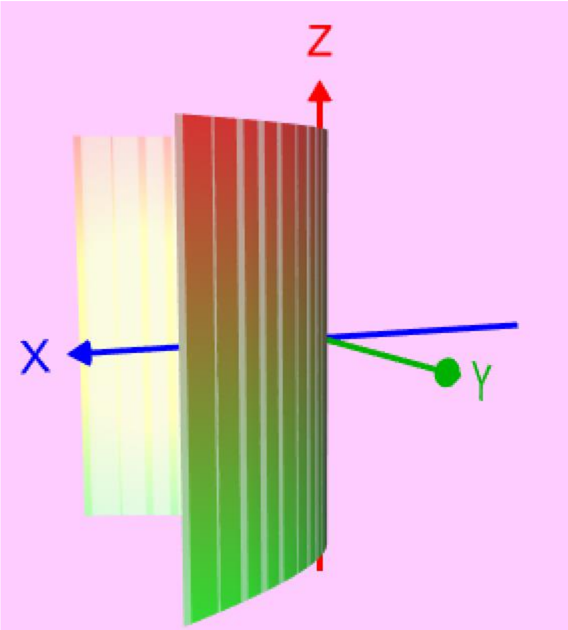
ii . α_1,α_2 一正一负 $\Longrightarrow \dfrac{z_1^2}{a^2}-\dfrac{z_2^2}{b^2}=1 \Longrightarrow$ 双曲柱面



$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1' y_1 + b_2' y_2 + b_3' y_3 + c = 0.$$

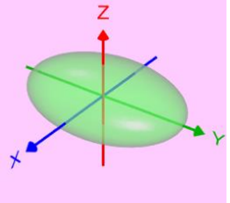
三、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中有两个为零（设$\lambda_1 \neq 0$）

b_2', b_3' 不同时为零 $\longrightarrow$ $z_2 = p z_1^2$ 抛物柱面

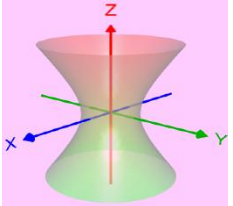


定理： $\mathbb{R}^3$ 中**非退化**的二次曲面经过正交变换和平移变换可变为下列9种之一.

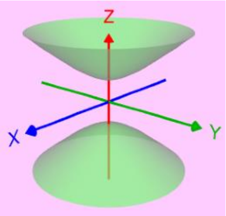
$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$$ 椭球面



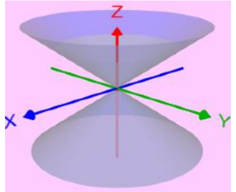
$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$ 单叶双曲面



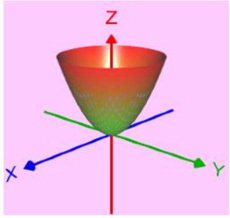
$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$ 双叶双曲面



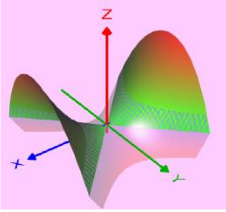
$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=0$$ 二次锥面



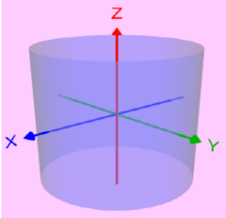
$$z_3=\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}$$ 椭圆抛物面



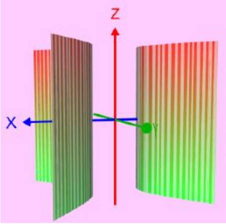
$$z_3=\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}$$ 双曲抛物面



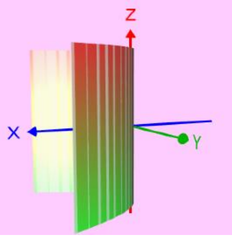
$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$$ 椭圆柱面



$$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=1$$ 双曲柱面



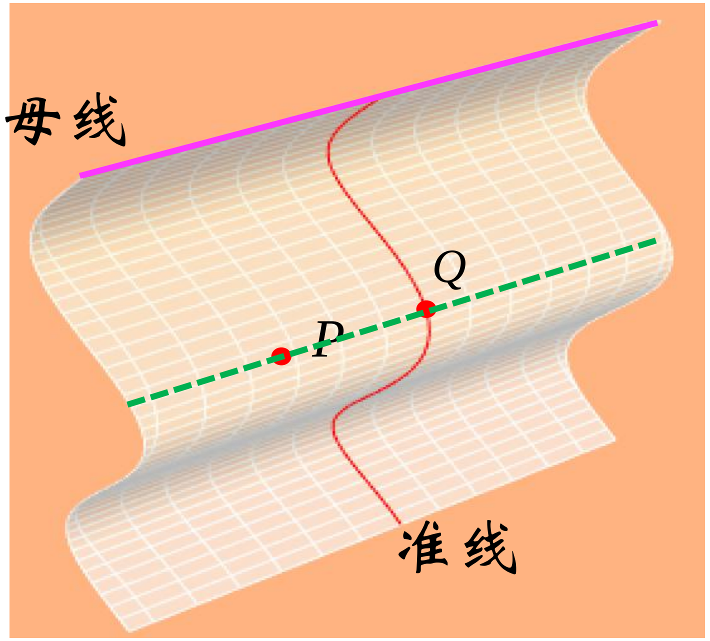
$$z_2=pz_1^2$$ 抛物柱面



几种常见曲面

1. 柱面：一族平行的直线形成的曲面.

例如：平面、圆柱面、抛物/椭圆/双曲柱面……



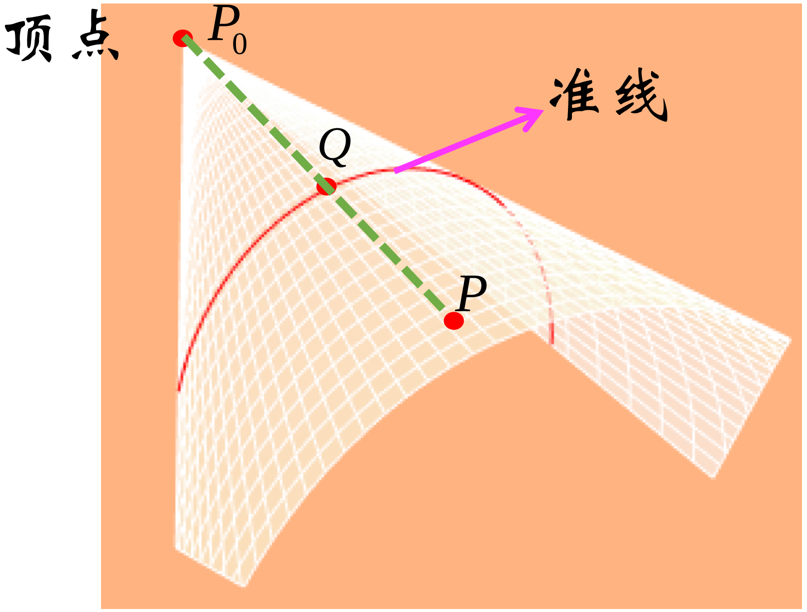
设准线C为$\begin{cases} x = q_1(t) \\ y = q_2(t), \\ z = q_3(t) \end{cases}$ 母线方向为 $s = (s_1, s_2, s_3)$.

则 $P(x,y,z) \in S \;\Leftrightarrow \exists Q(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \in C, s.t. QP \parallel s.$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, s.t.\, P - Q = \lambda s.$

故柱面方程为：$\begin{cases} x = q_1(t) + \lambda s_1 \\ y = q_2(t) + \lambda s_2 \quad (\lambda, t \text{ 为参数}) \\ z = q_3(t) + \lambda s_3 \end{cases}$

2. 锥面 ：过定点的直线族形成的曲面.



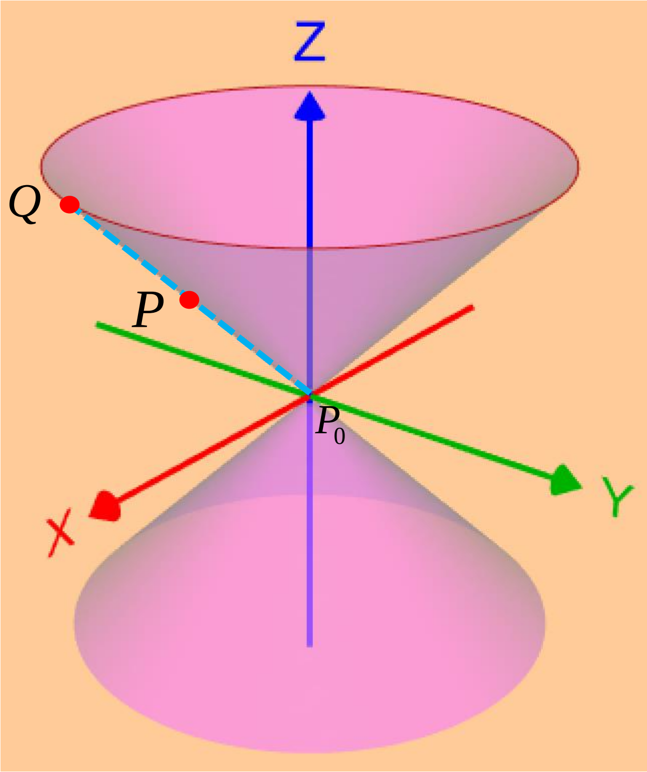
设准线C为 $\begin{cases} x = q_1(t) \\ y = q_2(t) \\ z = q_3(t) \end{cases}$，顶点为 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

则 $P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \exists Q(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \in C, s.t. P, P_0, Q$ 三点共线

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, s.t. P - P_0 = \lambda(Q - P_0).$$

故锥面参数方程为: $\begin{cases} x = \lambda q_1(t) + (1-\lambda)x_0 \\ y = \lambda q_2(t) + (1-\lambda)y_0 \\ z = \lambda q_3(t) + (1-\lambda)z_0 \end{cases}$ $(\lambda, t$ 为参数$)$

例: 求顶点在原点，准线为 $C:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c(c\neq 0)\end{cases}$ 的锥面方程.



解: C有参数方程 $x=a\cos t, y=b\sin t, z=c.$

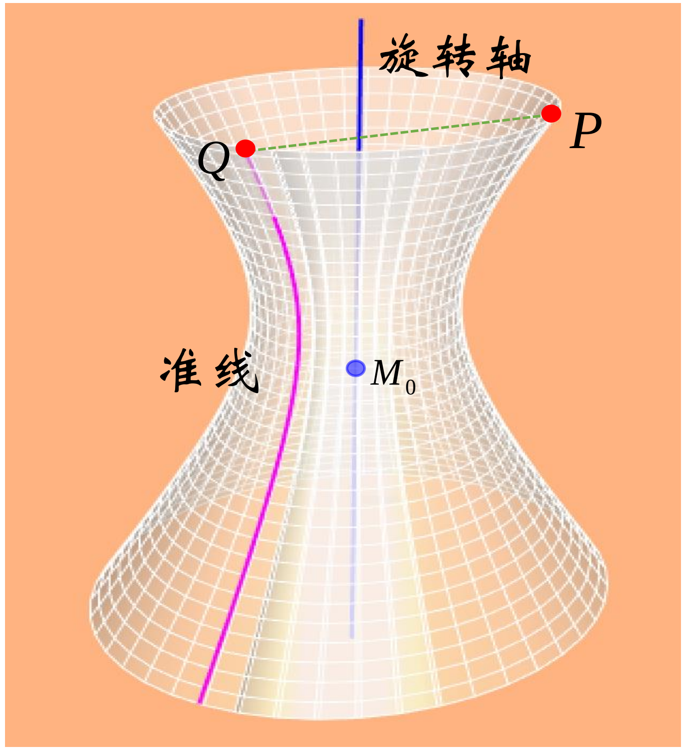
$P(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \exists Q\in C \ and \ \lambda\in\mathbb{R}, s.t.$

$P-P_0=\lambda(Q-P_0),$ 其中 $P_0=(0,0,0).$

故所求锥面参数方程为:

$\begin{cases}x=a\lambda\cos t\\ y=b\lambda\sin t\\ z=\lambda c\end{cases}$ $(\lambda,t$ 为参数$)$，消去参数可得: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

3. 旋转面：一条曲线绕给定直线旋转形成的曲面.



设准线C为$\begin{cases} x = q_1(t) \\ y = q_2(t), \\ z = q_3(t) \end{cases}$ 旋转轴为 $L: \dfrac{x - x_0}{l_1} = \dfrac{y - y_0}{l_2} = \dfrac{z - z_0}{l_3}$

则 $P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \exists Q\left(q_1(t), q_2(t), q_3(t)\right) \in C, s.t. \begin{cases} PM_0 = QM_0 \\ PQ \perp L \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (q_1(t) - x_0)^2 + (q_2(t) - y_0)^2 + (q_3(t) - z_0)^2 \\ \left(x - q_1(t), y - q_2(t), z - q_3(t)\right) \cdot (l_1, l_2, l_3) = 0 \end{cases}.$$

理论上，消去 t 即得到旋转面的隐式方程.

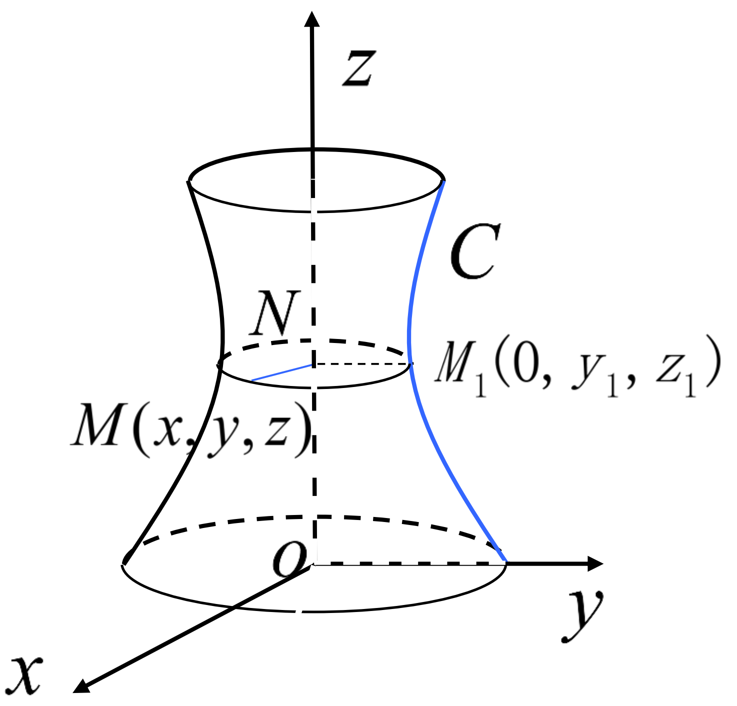
例： 建立YOZ平面上曲线C：$f(y,z)=0$ 绕Z轴旋转所成曲面的方程.

解： 设曲线C有参数化：$\begin{cases} x=0 \\ y=q_2(t) \\ z=q_3(t) \end{cases}$，同时选旋转轴上点 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$, 方向为 $(l_1,l_2,l_3)=(0,0,1)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\left(q_2(t)\right)^2+\left(q_3(t)\right)^2 \\ \left(x-0,y-q_2(t),z-q_3(t)\right)\cdot(0,0,1)=z-q_3(t)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_2(t)=\pm\sqrt{x^2+y^2},\ q_3(t)=z.$$

$$\Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$ 即为旋转曲面方程.



例： 将YOZ面上的椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕Z轴和Y轴旋转一周所得旋转曲面的方程.

坐标平面内曲线绕
坐标轴旋转所得曲面？

解： 绕Z轴旋转所成曲面方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

绕Y轴旋转所成曲面方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2+z^2}{c^2}=1$.

练习： 下列方程所表示的曲面哪些是旋转曲面？说明这些旋转曲面是怎样产生的？

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$;　　(2) $x^2+y^2+z^2=9z$;

(3) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;　　(4) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2$;

(5) $z=\left(x^2+y^2\right)^2$;　　(6) $x^2-y^2=4z$.

第八章 空间解析几何

坐标变换

设 $F[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 和 $F'[O'; \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}']$ 是空间两个**右手单位直角坐标系**.

一、平移

此时两坐标系的关系为 $O \neq O', \mathbf{i}=\mathbf{i}', \mathbf{j}=\mathbf{j}', \mathbf{k}=\mathbf{k}'$.

设点P在两个坐标系的坐标分别为 (x, y, z) 和 (x', y', z')，则

$$\mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{O'P} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

由 $\mathbf{O'P} = \mathbf{OP} - \mathbf{OO'}$, $\mathbf{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 得平移时的坐标变换公式：$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c \end{cases}$

例： $4x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 16x - 50y - 16z - 43 = 0$ 刻画的是什么图形?

解： 原方程 $\Leftrightarrow 4(x-2)^2 + 25(y-1)^2 + 4(z-2)^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x'^2}{25} + \dfrac{y'^2}{4} + \dfrac{z'^2}{25} = 1$

其中 $x' = x - 2, y' = y - 1, z' = z - 2$. 故为椭球面.

坐标变换

设 $F[O; i, j, k]$ 和 $F'[O'; i', j', k']$ 是空间两个**右手单位直角坐标系**.

二、旋转

此时两坐标系的关系为 $O = O'$, i, j, k 与 i', j', k' 关系如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + \cos\beta_1 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_1 \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}' = \cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + \cos\beta_2 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_2 \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}' = \cos\alpha_3 \boldsymbol{i} + \cos\beta_3 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_3 \boldsymbol{k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{i}', \quad \boldsymbol{j}', \quad \boldsymbol{k}') = (\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k}) Q$$

设点P在两个坐标系的坐标分别为(x, y, z)和(x', y', z')，则

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

得到旋转时的坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

例： 利用坐标变换化简 $45x^2 + 45y^2 - 8z^2 - 54xy + 36\sqrt{2}x - 108\sqrt{2}y + 32z + 184 = 0$

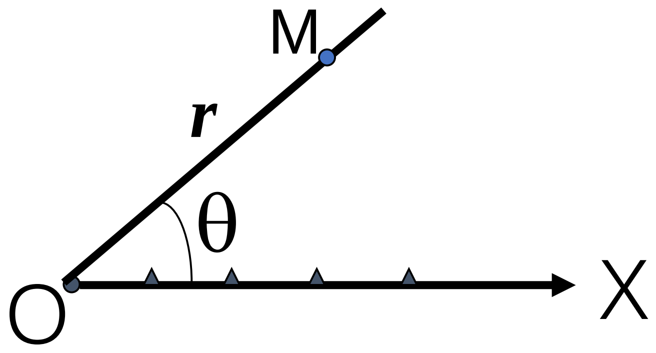
并指出是什么曲面.

常用坐标系

1. 平面的极坐标系

在平面内取一个定点O，称为极点；　自极点O引一条射线OX，称为极轴；

再选定一个长度单位、一个角度单位及其正方向(通常取逆时针方向)，这样就建立了一个极坐标系.



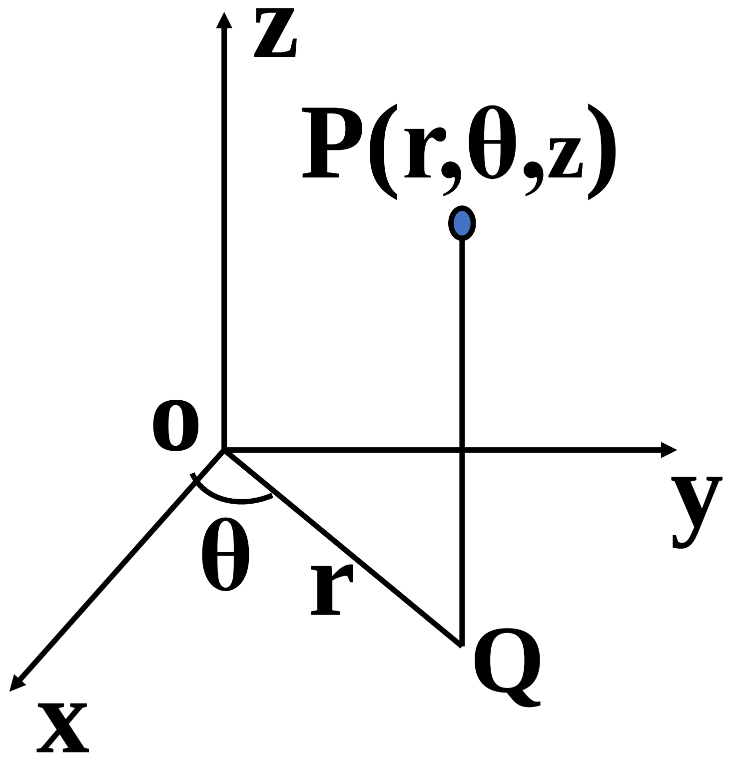
与直角坐标系的坐标变换关系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

2. 柱坐标系

空间任意一点P的位置可用有序数组 (r,θ,z) 表示，称之为点P的柱坐标.

$$r \ge 0, 0 \le \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty$$



与直角坐标系的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

问题：在柱坐标系中，$r = c, \theta = \theta_0, z = z_0$表示的曲面是?

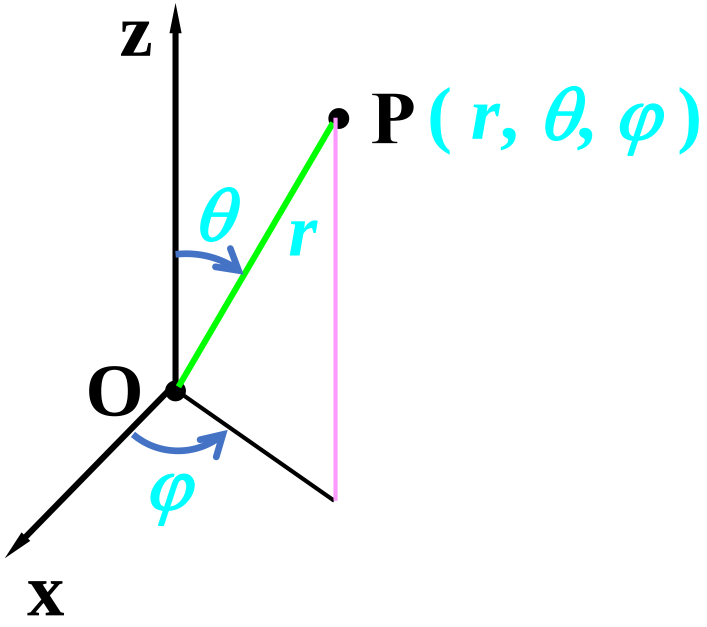
3. 球坐标系

空间任意一点P的位置可用有序数组 (r,θ,φ) 表示，称之为点P的球坐标.

$$r\geq 0,\ 0\leq\varphi<2\pi,\ 0\leq\theta\leq\pi.$$

与直角坐标系的坐标变换公式:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



问题：在柱坐标系中，$r=c,\theta=\theta_0,\varphi=\varphi_0$ 表示的曲面是?