**线性代数习题课**

中国科学技术大学

2024 春　申屠钧超

陈鉴 & 曾亦铭

---

# 期中考试部分解答

**5/26　第十三周/星期日**

三、　当 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+ax_2+x_3+x_4=a \\ x_1+x_2+ax_3+x_4=a^2 \\ x_1+x_2+x_3+ax_4=a^3 \end{cases}$ 有解？当有解时，求出它的所有解。

答：此时方阵组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & a & a^3 \end{pmatrix}$，经过初等行变换可以得到 $\begin{pmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 & 1+a+a^2+a^3 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & a & a^3 \end{pmatrix}$. 此时，若 $a=-3$，则对应 $1+a+a^2+a^3=-20\neq 0$，故方程组无解。(所以不能之间说 a=-3 时方程组显然无解，以及理由不仅仅是 $a+3\neq 0$)

下设 $a\neq -3$，此时矩阵通过初等变换得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1+a+a^2+a^3}{a+3} \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & a & a^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1+a+a^2+a^3}{a+3} \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & a-\frac{1+a+a^2+a^3}{a+3} \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & a^2-\frac{1+a+a^2+a^3}{a+3} \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a^3-\frac{1+a+a^2+a^3}{a+3} \end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时，$\frac{1+a+a^2+a^3}{a+3}=1$，原方程组有无穷多组解为 $x_1=t_1, x_2=t_2, x_3=t_3, x_4=1-t_1-t_2-t_3$.

当 $a\neq 1,-3$ 时，原方程组仅有一组解：$x_1=\frac{-a^2-2a-2}{a+3}, x_2=\frac{-a^2-a+1}{a+3}, x_3=\frac{2a+1}{a+3}, x_4=\frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3}$.（最好化简成这个形式）

四、 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

答：原式 $=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4$（所以为什么有人会用 $\begin{vmatrix} A & B \\ c & D \end{vmatrix} = |AD-BC|$）

五、 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求伴随矩阵 $A^*$.

答：由 $|A|=2$ 可知 $A$ 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，从而 $A^*=2A^{-1}$.

下面用初等变换求 $A^{-1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

从而，$A^*=2A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Rmk：注意一定要有过程，没有过程只有答案对的也要扣很多分数。

Rmk：部分同学之间计算伴随矩阵的话，写出每个 $A_{ij}$ 的值，把计算过程都写上来（比如说 $A_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$），最后不要忘了转置。

七、（1）设矩阵 $A,B,C$ 依次为 $m\times n, n\times s, s\times t$ 矩阵，证明下列关于矩阵的秩不等式：$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$.

（2）设 A 是 n 阶方阵，证明：$r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$.

答：（1）即证 $rank(AB)+rank(BC)\le rank\begin{pmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$.

事实上，我们有 $\begin{pmatrix}I_m & A\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_t & 0\\ -C & I_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & AB\\ -BC & B\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}0 & AB\\ -BC & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -I_t\\ I_s & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{pmatrix}$.

从而 $rank\begin{pmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{pmatrix}\ge rank\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & BC\end{pmatrix}$.

综上结论成立，

（2）法一： 我们先证明一个引理，引理：若存在正整数 m 使得 $rank(A^m)=rank(A^{m+1})$，则对任意正整数 k 都有 $rank(A^m)=rank(A^{m+k})$.

引理的证明：我们仅需证明对任意正整数 k 都有 $rank(A^{m+k-1})=rank(A^{m+k})$，我们采用归纳法。当 k=1 时，即为条件本身，自然成立。设 $k=l$ 时结论成立，即有 $rank(A^{m+l-1})=rank(A^{m+l})$. 此时由 frobenius 秩不等式，我们有 $rank(A^{m+l+1})+rank(A^{m+l-1})=rank(AA^{m+l-1}A)+rank(A^{m+l-1})\ge 2rank(A^{m+l})$. 由归纳假设知，由 $rank(A^{m+l+1})\ge rank(A^{m+l})$. 而 $rank(A^{m+l})\ge rank(A^{m+l+1})$ 自然成立，从而在 $k=l+1$ 时结论也成立，证明结束。

回到原题，由引理我们仅需证明 $r(A^n)=r(A^{n+1})$，若存在 $1\le m\le n$ 使得 $rank(A^m)=rank(A^{m+1})$ 则结论自然成立。故我们假设对任意 $1\le m\le n$，我们都有 $ranK(A^m)>rank(A^{m+1})\Rightarrow rank(A^m)-1\ge rank(A^{m-1})\Rightarrow rank(A^n)\le rank(A)-n\le 0$. 故 $A^n=0$，从而 $A^{n+1}=0$，此时结论显然成立。

法二： 由 frobenius 不等式，我们得到 $r(A^{k+2})\ge 2r(A^{k+1})-r(A^k)\Longleftrightarrow r(A^k)-r(A^{k+1})\ge r(A^{k+1})-r(A^{k+2})$. 若结论不成立，则存在 $l\ge 0$ 使得 $r(A^{n+l})>r(A^{n+l-1})\Longrightarrow r(A^{n+l})-r(A^{n+l-1})\ge 1$，而由上面不等式 $r(A^k)-r(A^{k+1})$ 关于 k 单调递降，故 $r(A^k)-r(A^{k+1})\ge 1$ 对任意 $1\le k\le n$ 都成立，从而 $n\ge r(A)=\sum_{i=1}^{n}(r(A^i)-r(A^{i+1}))+r(A)\ge n+r(A^{n+1})\Longrightarrow r(A^{n+1})=0\Longrightarrow r(A^n+l)$ 对任意正整数 l 都成立（因为此时 $A=0$），但与反证矛盾. 若 $r(A^n)=0$ 则结论成立，若否则有 $r(A^i)=n+1-i$ 特别地 $r(A)=n$ 但如果 A 可逆，$A^l$ 都是可逆的 $r(A^l)=n$，矛盾。综上，结论成立。

法三： 我们可以利用 Jordan 标准型，取 A 的 Jordan 标准型 J，可知对任意 k 都有 $r(A^k)=r(J^k)$，故我们只需证明该命题对 Jordan 块 $J(\lambda)$ 成立即可。令 $N=J(\lambda)-\lambda I$，N 为主对角线全为 0，右上第二条对角线为 1 的矩阵. 我们可以归纳证明，$N^k$ 为右上第 $k+1$ 调对角线为 1 其他元素都为 0 的矩阵，而 $(J(\lambda))^k=(\lambda I+N)^k=\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}C_N^iN^i$，可以看到当 $\lambda\ne 0$ 时 $J(\lambda)^k$rank 保持不变，当 $\lambda=0$ 时 $J(0)^n=0$rank 也保持不变，综上原命题成立。