



# 第九章 多元函数微分学

- 多变量函数的连续性
- 多变量函数的微分
- 隐函数定理和逆映射定理
- 空间曲线与曲面
- Taylor公式与极值
- 向量场的微商
- 微分形式

創寰宇學府  
育天下英才  
嚴濟慈題  
一九八八年五月

$\mathbb{R}^3$  中区域  $\Omega$  上的微分形式：

**0次微分形式：**  $\Omega$  上的可微函数，常记为  $\omega_\varphi^0 = \varphi$ .

**1次微分形式：**  $A dx + B dy + C dz = \omega_v^1$ ,  $\mathbf{v} = (A, B, C)$ .

**2次微分形式：**  $D dy \wedge dz + E dz \wedge dx + F dx \wedge dy = \omega_v^2$ ,  $\mathbf{v} = (D, E, F)$ .

**3次微分形式：**  $h dx \wedge dy \wedge dz = \omega_h^3$ .

同次的微分形式的全体按照自然的加法和数乘构成线性空间.

微分形式的外积  $\wedge$  :

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz.$$

规定：外积满足结合律、分配律和拟交换律： $\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda$

0次形式和任何形式的外积：系数相乘。 例如： $\omega_\phi^0 = \phi(x, y, z),$

$$\omega_v^1 = A dx + B dy + C dz, \quad \omega_u^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

则： $\omega_\phi^0 \wedge \omega_v^1 = \phi A dx + \phi B dy + \phi C dz = \omega_{\phi v}^1.$

$$\omega_\phi^0 \wedge \omega_u^2 = \phi P dy \wedge dz + \phi Q dz \wedge dx + \phi R dx \wedge dy = \omega_{\phi u}^2.$$

两个1次形式的外积：设  $\omega_{v_j}^1 = A_j dx + B_j dy + C_j dz, j = 1, 2$ .

$$\begin{aligned}\omega_{v_1}^1 \wedge \omega_{v_2}^1 &= (A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz) \wedge (A_2 dx + B_2 dy + C_2 dz) \\ &= (B_1 C_2 - B_2 C_1) dy \wedge dz + (C_1 A_2 - C_2 A_1) dz \wedge dx + (A_1 B_2 - A_2 B_1) dx \wedge dy \\ &= \omega_{v_1 \times v_2}^2.\end{aligned}$$

1次形式和2次形式的外积：设

$$\begin{aligned}\omega_v^1 &= A dx + B dy + C dz, \quad \omega_u^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy, \\ \omega_v^1 \wedge \omega_u^2 &= (A dx + B dy + C dz) \wedge (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &= (AP + BQ + CR) dx \wedge dy \wedge dz. \\ &= \omega_{v \cdot u}^3.\end{aligned}$$

3个1次形式的外积：设

$$\omega_{v_j}^1 = A_j dx + B_j dy + C_j dz, j = 1, 2, 3.$$

则：  $\omega_{v_1}^1 \wedge \omega_{v_2}^1 \wedge \omega_{v_3}^1 = \omega_{v_1 \times v_2 \cdot v_3}^3.$

除此以外，**3维空间中**微分形式的外积再没有其它非平凡的情形.

**外微分**  $d: p$  次形式  $\rightarrow p+1$  次形式.

**0.** 对于0次形式  $\omega_\varphi^0 = \varphi(x, y, z)$ , 其外微分定义为:

$$d\omega_\varphi^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \omega_{\text{grad} \varphi}^1 = \omega_{\nabla \varphi}^1.$$

**1.** 对于1次形式  $\omega_v^1 = Pdx + Qdy + Rdz$ , 其外微分定义为:

$$\begin{aligned} d\omega_v^1 &= d(Pdx + Qdy + Rdz) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \omega_{\text{rot } \mathbf{v}}^2 = \omega_{\nabla \times \mathbf{v}}^2. \end{aligned}$$

2. 对于2次形式 $\omega_v^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ , 其外微分定义为:

$$\begin{aligned} d\omega_v^2 &= d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) \\ &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \\ &= \omega_{\text{div } \mathbf{v}}^3 = \omega_{\nabla \cdot \mathbf{v}}^3. \end{aligned}$$

显然, 在三维空间, 三次形式的外微分总是零.

对于外微分运算, 有如下重要的 Poincaré 引理.

**引理 (Poincaré) :** 设  $\omega$  是一个微分形式, 其系数具有二阶连续的偏微商, 则  $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ .

**定义 :** 对给定的微分形式  $\omega$ , 若存在低一次的微分形式  $\theta$  使得  $d\theta = \omega$ , 则称  $\omega$  是恰当的.

**定理 (Poincaré引理之逆) :** 若  $\omega$  满足  $d\omega = 0$ , 且其定义域为单连通区域时,  $\omega$  是恰当的.

例 :  $\omega = yzdx + zxdy + xydz$  是恰当的. 事实上,  $\omega = d(xyz)$ .

$\omega = ydx + zdy + xdz$  不是恰当的, 或者说, 不是全微分.

$$d\omega_{\varphi}^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \omega_{\text{grad } \varphi}^1.$$

$$\varphi \longleftrightarrow \text{grad } \varphi$$

$$d\omega_{\mathbf{v}}^1 = d(Pdx + Qdy + Rdz)$$

$$\mathbf{v} \longleftrightarrow \text{rot } \mathbf{v}$$

$$= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \omega_{\text{rot } \mathbf{v}}^2.$$

$$d\omega_{\mathbf{v}}^2 = d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy)$$

$$\mathbf{v} \longleftrightarrow \text{div } \mathbf{v}$$

$$= \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \omega_{\text{div } \mathbf{v}}^3.$$

梯度、旋度、散度都是  $d$  的体现；3维空间中再没有其它的“度”。

**Poincaré引理**：设 $\omega$ 是一个微分形式，则  $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ .

$$\longleftrightarrow \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\varphi)) = 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) = 0$$

即：梯度场(有势场)一定是无旋场；有向量势的场一定是无源场.

**Poincaré引理之逆**：若 $\omega$ 满足  $d\omega = 0$  (区域单连通)，则存在 $\theta$ 使得  $\omega = d\theta$ .

$\longleftrightarrow$  在区域满足一定条件时：

无旋场一定是梯度场；无源场一定是有向量势的场.

**微积分基本定理：**  $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$

$\omega$ 的次数	空间 $\Omega$	公式
0	直线段	Newton-Leibniz公式
1	平面区域	Green公式
2	空间曲面	Stokes公式
3	空间中区域	Gauss公式