第十一章　曲线积分与曲面积分

- 数量场在曲线上的积分
- 数量场在曲面上的积分
- 向量场在曲线上的积分
- 向量场在曲面上的积分
- Gauss定理和Stokes定理
- 保守场
- **微分形式的积分**

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

$\mathbb{R}^3$ 中区域 Ω 上的**微分形式：**

0次微分形式： Ω 上的可微函数，常记为 $\omega_\varphi^0=\varphi$.

1次微分形式： $A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z=\omega_v^1,\ v=(A,B,C)$.

2次微分形式： $D\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+E\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+F\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\omega_v^2,\ v=(D,E,F)$.

3次微分形式： $h\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\omega_h^3$.

积分学中的积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S,\ \int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,\ \iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Stokes定理： 设 n 维定向流形 M 的紧致子集 Ω 是个 $k(1 \le k \le n)$ 维带边流形，ω 是 Ω 上的 $k-1$ 次微分形式，则 $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$.

ω 的次数	空间 Ω	公式
0	直线段	Newton-Leibniz公式
1	平面区域	Green公式
1	空间曲面	Stokes公式
2	空间中区域	Gauss公式

Stokes定理： 设 n 维定向流形 M 的紧致子集 Ω 是个 $k(1\le k\le n)$ 维带边流形，ω 是 Ω 上的 $k-1$ 次微分形式，则 $\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$.

1. $n=1, k=1$ $\Longrightarrow$ $\int_{\partial[a,b]}F=\int_{[a,b]}\mathrm{d}F=F(b)-F(a)$

此即Newton-Leibniz公式

2.1 $n=2, k=1$ $\Longrightarrow$ $\int_{\partial L_{AB}}\varphi=\int_{L_{AB}}\mathrm{d}\varphi=\varphi(B)-\varphi(A)$

L_{AB} 为平面定向曲线，φ 为平面保守场 $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ 的势函数.

Stokes定理： 设 n 维定向流形 M 的紧致子集 Ω 是个 $k(1\le k\le n)$ 维带边流形，ω 是 Ω 上的 $k-1$ 次微分形式，则 $\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$.

$$2.2\quad n=2,k=2 \longrightarrow \int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{d}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此即Green公式

$$3.1\quad n=3,k=1 \longrightarrow \int_{\partial L_{AB}}\varphi=\int_{L_{AB}}\mathrm{d}\varphi=\varphi(B)-\varphi(A)$$

L_{AB} 为空间定向曲线，φ 为空间保守场 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ 的势函数.

Stokes定理： 设 n 维定向流形 M 的紧致子集 Ω 是个 $k(1\le k\le n)$ 维带边流形，ω 是 Ω 上的 $k-1$ 次微分形式，则 $\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$.

3.1 $n=3, k=2$ $\Longrightarrow$ $\int_{\partial S} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S \mathrm{d}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right)$

此即Stokes公式 $$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3.1 $n=3, k=3$

$$\Longrightarrow \iint_{\partial V} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V \mathrm{d}\left(P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ 此即Gauss公式