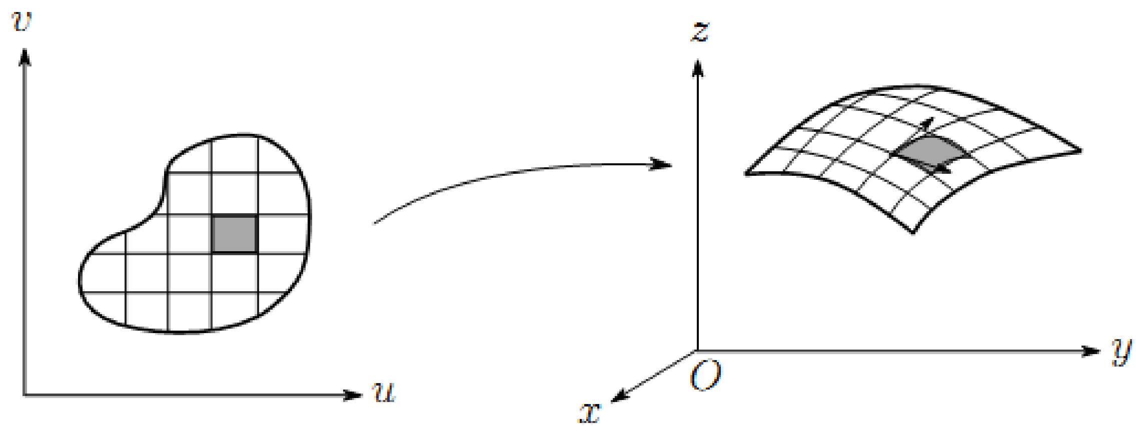
第十一章 曲线积分与曲面积分

- 数量场在曲线上的积分
- **数量场在曲面上的积分**
- 向量场在曲线上的积分
- 向量场在曲面上的积分
- Gauss定理和Stokes定理
- 保守场
- 微分形式的积分

参数曲面的面积

$\mathbb{R}^3$ 中有参数曲面 S: $\mathbf{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$, $(u,v)\in D$.



$$\mathbf{r}\left(u_{i+1},v_j\right)-\mathbf{r}\left(u_i,v_j\right)=\mathbf{r}_u'\left(u_i,v_j\right)\Delta u_i+o\left(\Delta u_i\right),$$

$$\mathbf{r}\left(u_i,v_{j+1}\right)-\mathbf{r}\left(u_i,v_j\right)=\mathbf{r}_v'\left(u_i,v_j\right)\Delta v_j+o\left(\Delta v_j\right),$$

所以, S_{ij} 的面积 $\Delta S_{ij}\approx\left|\mathbf{r}_u'\left(u_i,v_j\right)\times\mathbf{r}_v'\left(u_i,v_j\right)\right|\Delta u_i\Delta v_j$.

则曲面 S 的面积为 $\sigma(S)=\iint_D\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

记 $\begin{cases} E=\mathbf{r}_u'\cdot\mathbf{r}_u'=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2 \\ G=\mathbf{r}_v'\cdot\mathbf{r}_v'=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2 \\ F=\mathbf{r}_u'\cdot\mathbf{r}_v'=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v' \end{cases}$，由 $\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|^2=\mathbf{r}_u'^2\mathbf{r}_v'^2-\left(\mathbf{r}_u'\cdot\mathbf{r}_v'\right)^2$，

则曲面 S 的面积为

$$\sigma(S)=\iint_D\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

注：面积与参数化无关.

几种特例:

(1) 当曲面 S 是**平面区域**时，S 的参数方程为

$$\mathbf{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),0\big)\quad (u,v)\in\overline{D}.$$

$$\Rightarrow\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.$$

于是此平面区域的面积为 $\sigma(S)=\iint_{\overline{D}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

这与二重积分 $\sigma(S)=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 通过变元代换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 求得结果一致.

(2) 当曲面 S 为**显示曲面** $z=z(x,y),(x,y)\in D$ 时，有自然参数化：

$$\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,z(x,y)\big)\quad (u,v)\in D.$$

$$\Rightarrow\left|\mathbf{r}_x'\times\mathbf{r}_y'\right|=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}.$$

于是曲面 S 的面积为 $\sigma(S)=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(3) 对**隐式曲面** $F(x,y,z)=0$, 设其有显函数表示 $z=z(x,y),(x,y)\in D$

则 $z_x'=-\dfrac{F_x'}{F_z'},\ z_y'=-\dfrac{F_y'}{F_z'}.$ 曲面 S 的面积为

$$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left|\frac{\mathrm{grad}(F)}{F_z'}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注：对隐式曲面上的积分，通常先找其参数化或显示化方程表示。

1. 求半径为 R 的球的表面积.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=Rx$ 截下曲面的面积.

3. 求圆锥面 $y^2+z^2=x^2$ 被柱面 $y^2+z^2=R^2$ 截下曲面的面积.

设 S 是一张有界的光滑曲面，$\varphi(x,y,z)$ 是定义在 S 上的数量场.

把 S 分成 n 块曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, 每一小块的面积记为 $\sigma(S_i)$. 在 S_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma(S_i),$$

存在有限，而且与 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 的选择无关, 其中 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\mathrm{diam}(S_i)\}$,

那么称 $\varphi(x,y,z)$ 在曲面 S 上**可积**， 极限值称之为 $\varphi(x,y,z)$ 在 S 上对面积的曲面积分或**第一型曲面积分**. 记为：

$$\iint_S \varphi(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma(S_i)$$

物理背景：曲面片的质量.

第一型曲面积分的基本性质

第一型曲面积分也有类似于定积分的一些性质.

设 f, g 都在 S 上可积. 则：

1. (有界性) 若 f 在 S 上可积，则 f 在 S 上有界.

2. (线性性) 对任意常数 c_1, c_2, $c_1 f + c_2 g$ 也在 S 上可积，且

$$\iint_S (c_1 f + c_2 g)\,\mathrm{d}S = c_1 \iint_S f\,\mathrm{d}S + c_2 \iint_S g\,\mathrm{d}S.$$

3. (保序性) 若 $f \geq 0$, 则 $\iint_S f\,\mathrm{d}S \geq 0.$

进而 $f \geq g \Rightarrow \iint_S f\,\mathrm{d}S \geq \iint_S g\,\mathrm{d}S.$

4. (绝对可积性) $|f|$ 在 S 上也可积，且 $\iint_S |f|\,\mathrm{d}S \geq \left|\iint_S f\,\mathrm{d}S\right|$.

5. (曲面积分的分片可加性) 若 f 在两光滑曲面 S_1 和 S_2 上都可积，则 f 在由 S_1, S_2 拼接而成的曲面 S 上可积，且

$$\iint_S f\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} f\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} f\,\mathrm{d}S.$$

6. (积分中值定理) f 在 S 上连续，则 $\exists P \in S,\ \text{s.t.} \iint_S f\,\mathrm{d}S = f(P)\sigma(S)$

对称性： 第一型曲面积分同样具有与重积分类似的“偶倍奇零”和“轮换对称性“的计算性质.

第一型曲面积分的计算

定理： 设 $\mathbb{R}^3$ 中光滑曲面 S 的参数方程为

$$S:\ \mathbf{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),\ (u,v)\in D.$$

其中 D 是平面 $O'uv$ 上的有界闭区域. 设函数 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则它在曲面 S 上的第一型曲面积分存在，且有

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

重点： 1. 找曲面的参数化；　2. 注意坐标满足曲面方程.

特别地，对显式曲面 $z=z(x,y),(x,y)\in D$

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1. 设S为第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$. 计算曲面积分 $\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$.

2. 设S是锥面 $z^2=k^2\left(x^2+y^2\right)(z\ge 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截得的曲面，计算曲面积分 $\iint_S \left(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right)\mathrm{d}S$.

3. 计算曲面积分 $\iint_S x^2\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$.

4. 计算曲面积分 $\iint_S \left(x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1\right)\mathrm{d}S$, 其中 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分.

5. 求曲面积分 $\iint_S \dfrac{\sqrt{|x|+y}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

6. 求曲面积分 $\iint_S \left(ax+by+cy^2+|xyz|\right)\mathrm{d}S$, 其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 截下的部分.