第八章　刚体力学

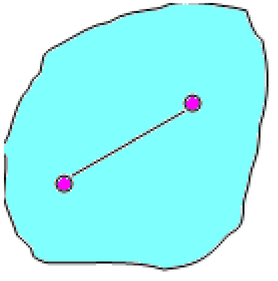
§8.1 刚体运动学

如果需要研究物体的转动甚至更复杂的运动，就不能忽略它的形状和大小而把它简化为质点来处理。在实际问题中，物体受力时形状将改变。如果形状体积改变很小时，形变可以忽略。我们就得到实际物体的另外一个抽象模型——刚体。

刚体——在任何外力作用下，形状大小均不发生改变的物体（特殊的质点系）。

➢若把刚体分为许多质元每个质元都小到可看作质点，那么刚体就是各质元间相对位置不发生变化的特殊质点系，即：任意两点之间的距离始终保持不变。

●说明:



①刚体是一种理想模型。

②在外力的作用下，任意两点均不发生相对位移;

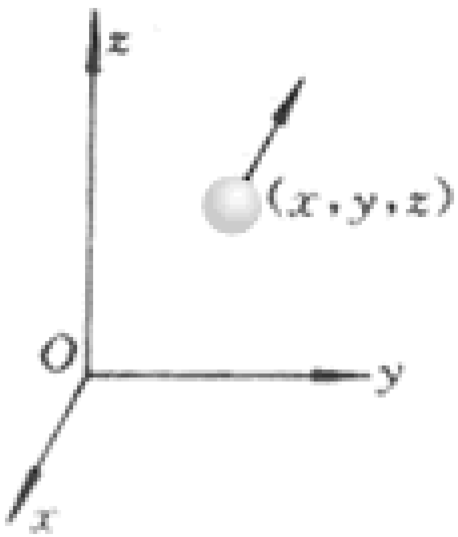
③刚体是弹性系数很大的一类物体的抽象;

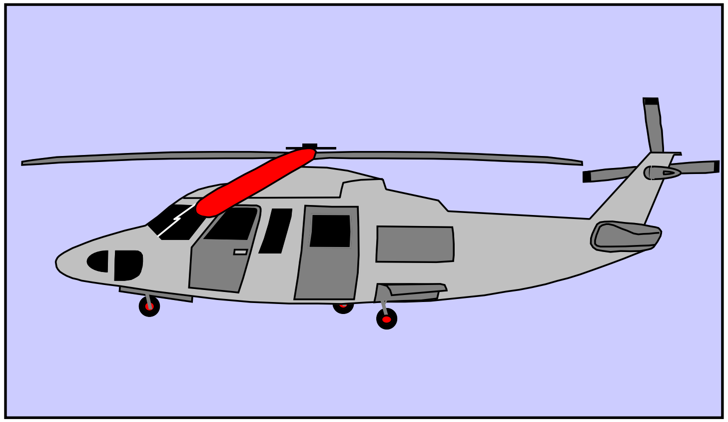
研究刚体力学的基本思路和方法：把质点系的一般概念、规律应到刚体这个特殊质点系上，就可得到刚体运动的特殊规律。

1.刚体运动的自由度

自由度:确定力学体系在空间几何位形所需独立变量个数。

①单质点：需用三个独立坐标（x，y，z）确定其位置。所以自由质点有3个平动自由度。



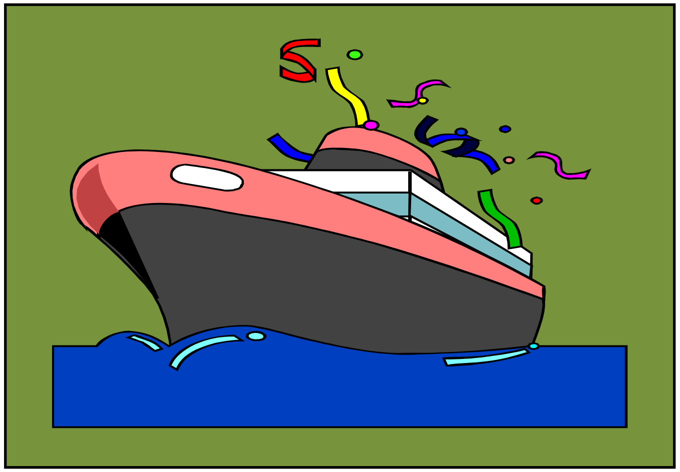


飞机：自由度为 3（经度、纬度、高度）

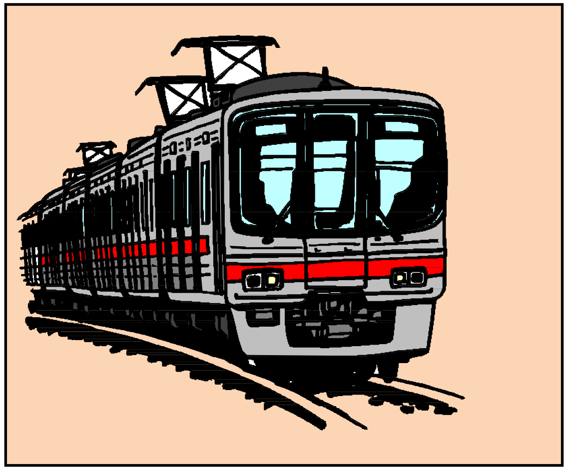
●如果对质点的运动加以限制（约束），自由度将减少。

如质点被限制在平面或曲面上运动，则 $n = 2$；

如果质点被限制在一条曲线曲线上运动时，则其自由度 $n=1$。



轮船：被限制在一曲面上运动，自由度为2，（经度、纬度）

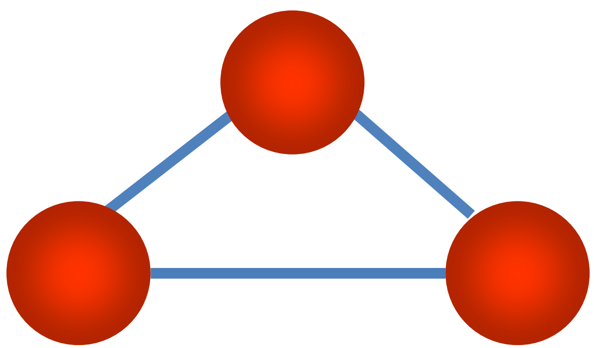


火车：被限制在一曲线上运动，自由度为1。

②距离保持不变的两质点体系： n=3+3−1=5个自由度。

确定其质心C 的空间位置，需3个独立坐标（x，y，z）。确定质点连线的空间方位，需两个独立坐标（如α，β），而两质点绕连线的转动没有意义。所以距离保持不变的两质点系统既有3个平动自由度，又有2个转动自由度，总共有5个自由度。

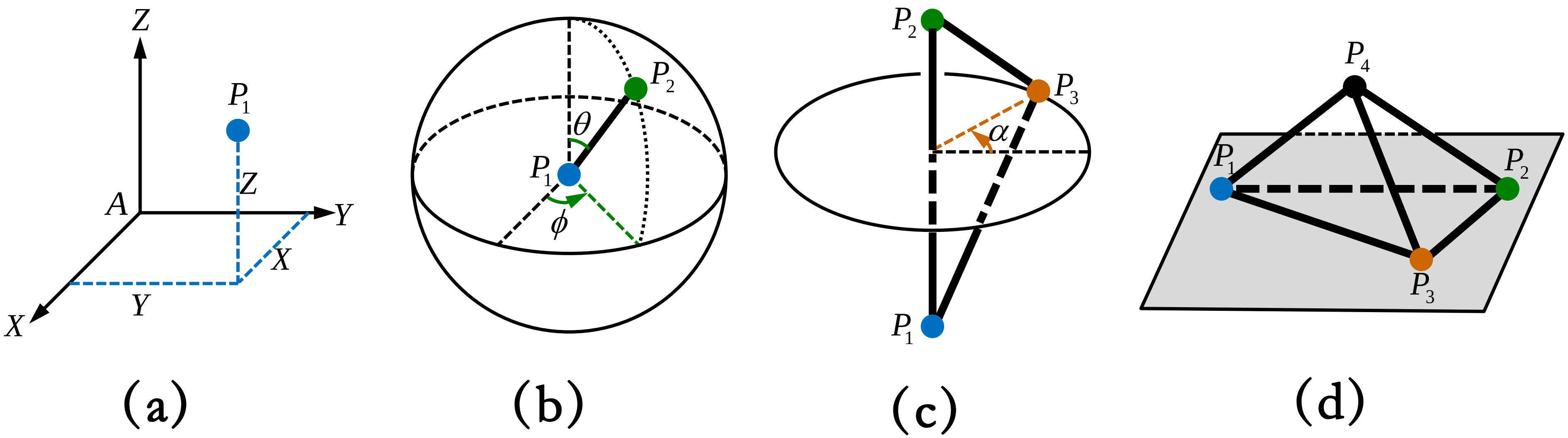
③相对距离和方向保持不变的三质点体系：n=3+3+3−3=6个自由度。



④相对距离和方向保持不变的四质点体系：

n=3+3+3+3−3−3=6个自由度

⑤刚体：相对距离和方向保持不变的N质点体系：n=6个自由度。



根据刚体的特殊性，只要确定了刚体上不共线的3个点的位置，刚体的位置就完全确定了，因此刚体的自由度是6。

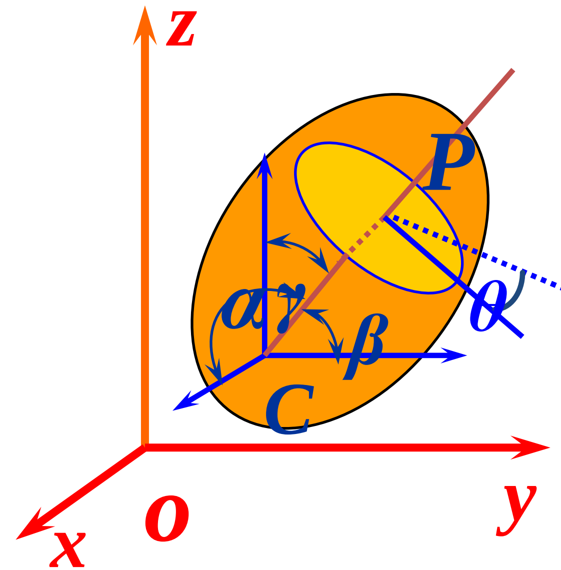
●若刚体运动被限制或被约束，其自由度将减少，多一个约束条件，就减少一个自由度。

➢确定刚体质心C的位置，需三个独立坐标（x，y，z），因此自由刚体有三个平动自由度；

➢确定刚体通过质心轴的空间方位需三个方位角（α，β，γ中只有其中两个是独立的），需2个转动自由度；另外还要确定刚体绕通过质心轴转过的角度θ，即还需1个转动自由度。所以自由刚体共有3个转动自由度。

C： x, y, z;　　CP :α, β, γ;　绕 CP 转角:θ;

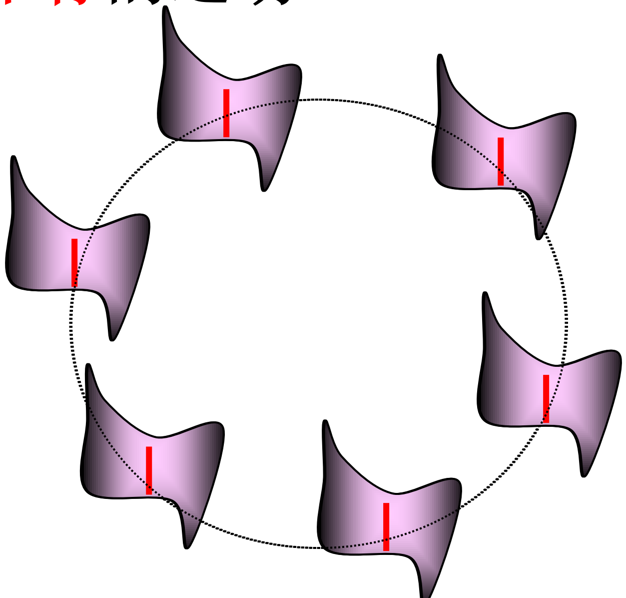
约束条件：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

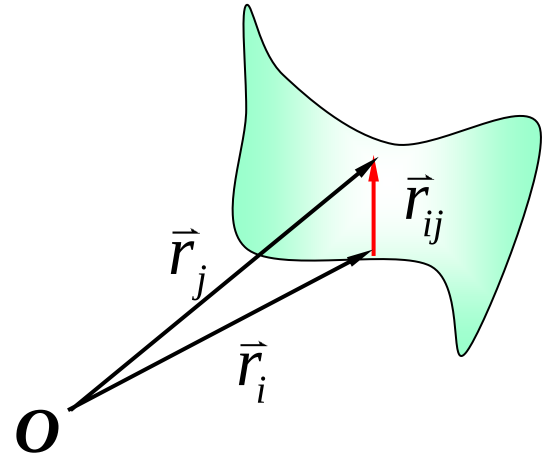


$$\text{刚体自由度数 } 6\begin{cases}\text{平动自由度} & 3\text{个}\\ \text{转动自由度} & 3\text{个}\end{cases}$$

2.刚体运动——平动

刚体平动：刚体运动时，连接刚体内**任意两点**的直线在**任意时刻**都保持**平行**的运动。





取参考点O，图中 $\vec{r}_{ij}$ 表示质元 ***i*** 指向质元 ***j*** 的矢量

$$\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{r}_{ij}$$

平动的自由度为3

由平动定义可知 $\vec{r}_{ij}$ 为恒矢量，所以

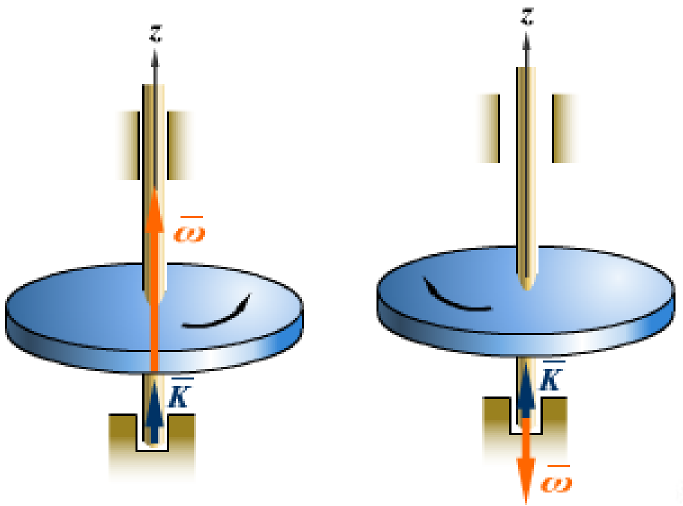
$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Rightarrow \vec{v}_j = \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_j = \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{a}_i$$

结论：刚体平动时,其上各点具有相同的速度、加速度及相同的轨迹(不一定是直线)。可用一个质点的运动代替刚体的运动。

3.刚体运动——定轴转动

刚体运动时，刚体上的两点固定不动，根据刚体的定义可知，这两点连线上的所有点也静止不动，过这两点的直线称为转轴，这种运动称为定轴转动。



(a) (b)

●定轴转动特征

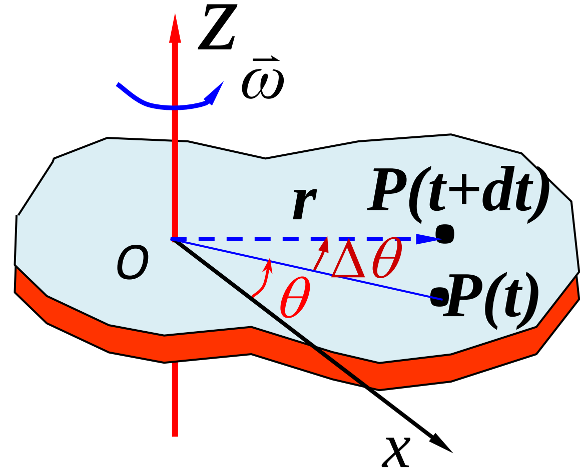
➢刚体上各点都在垂直于固定轴的平面内(转动平面)做半径不同的圆周运动，其圆心都在这条固定不动的直线(转轴)上；

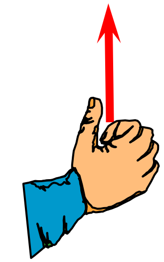
➢刚体上各点到转轴的垂直线在同样的时间内所转过的角度都相同，因而用角量描述刚体的运动。

定轴转动的独立变量只有一个（自由度为1）

§ 8.2 定轴转动

1. 刚体定轴转动的描述





由于各个质点在相同时间内都转过了相同的角度，引入角量描述将非常方便

①角坐标θ

一般规定：面对z轴，　逆时针转动为正，顺时针转动为负。

$$\theta=\theta(t)$$

定轴转动的运动学方程

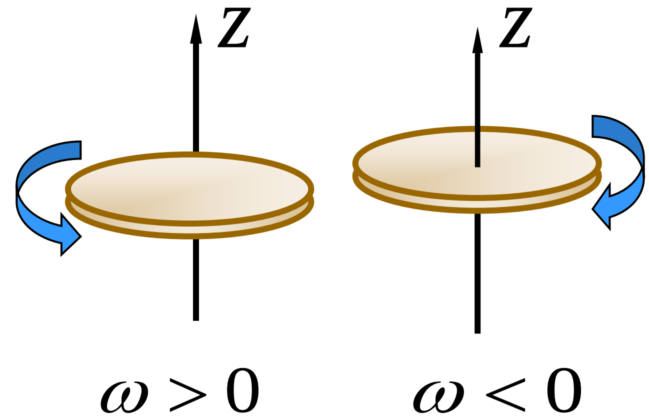
②角位移$\Delta\theta$

$\Delta\theta$为Δt时间内刚体所转过的角度.

③角速度（单位：弧度.秒$^{-1}$）

角速度：

$$\boxed{\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}}$$



④角加速度（单位：弧度.秒$^{-2}$）

角加速度: $\boxed{\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$

β可正可负，当ω与β同号时，转动加快，异号时减慢。

●刚体定轴转动运动方程

$x(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} v(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} a(t)$　　$\theta(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \omega(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \beta(t)$

初始条件: $t=t_0$时，$r=r_0$，$v=v_0$　　初始条件: $t=t_0$时，$\theta=\theta_0$，$\omega=\omega_0$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega(t)dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \int_0^t \omega(t')dt'$$

$$\beta(t) = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta(t)dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \int_0^t \beta(t')dt'$$

$$\boxed{\therefore\ \theta - \theta_0 = \int_0^t \omega(t')dt' = \int_0^t \left(\omega_0 + \int_0^{t'} \beta(t'')dt''\right)dt'}$$

●角量与线量的关系

线量——质点做圆周运动的位移 $\vec{r}$ 、速度 $\vec{v}$ 、加速度 $\vec{a}$

角量——描述刚体转动整体运动的 θ, ω, β

参考点O选在转轴上

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{z}_i$$

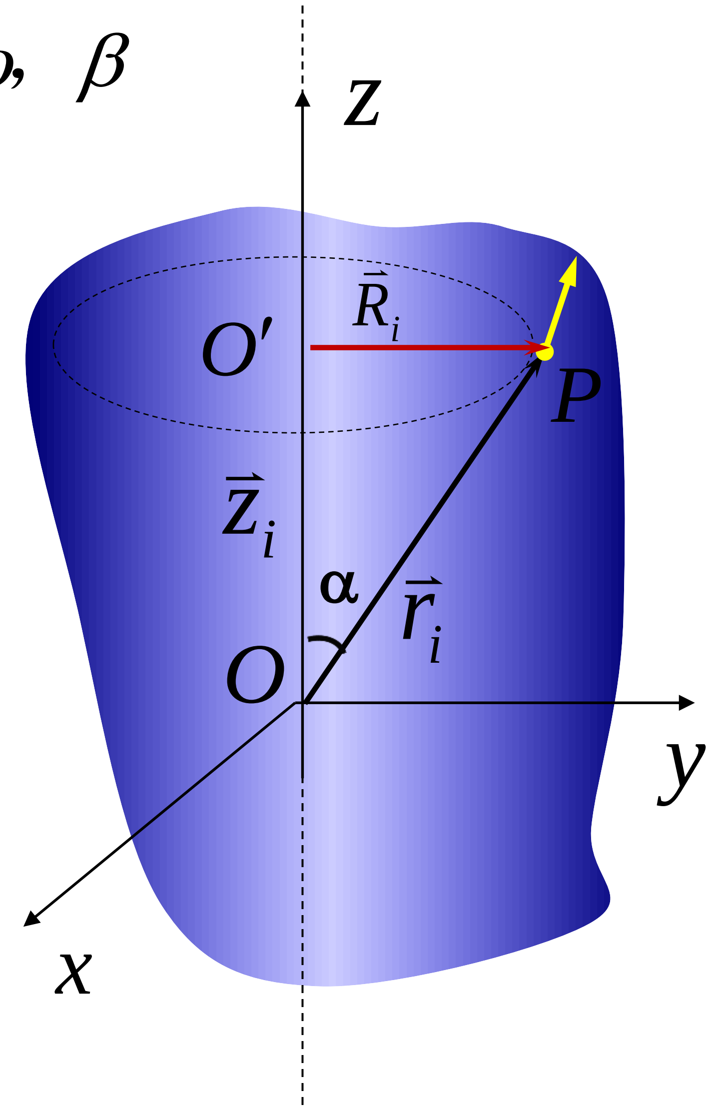
每一个质元做圆周运动的角速度和角加速度是相同的，它们是整个刚体的运动状态量。第*i*个质元

路程: $\Delta s_i = \Delta\theta R_i$

线速率: $v_i = \omega R_i$

切向加速度: $a_{i,\tau} = \beta R_i$

法向加速度： $a_{i,n} = \dfrac{v_i^2}{R_i} = \omega^2 R_i$



2. 角速度矢量

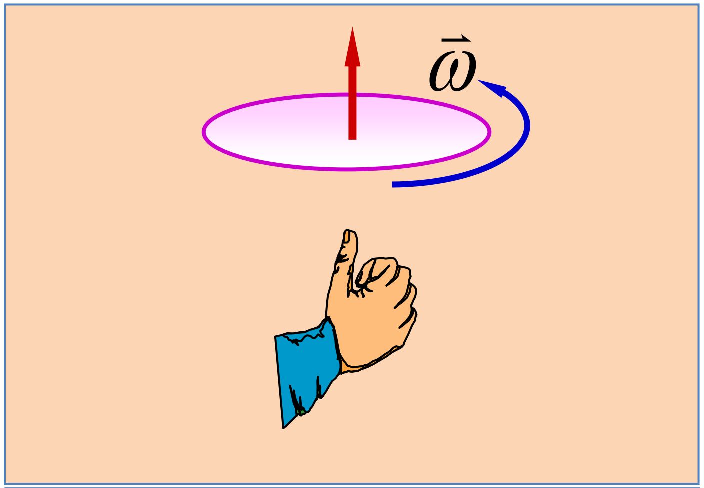
角速度矢量：规定角速度的方向沿转轴且与刚体转动方向成**右手螺旋**系统。

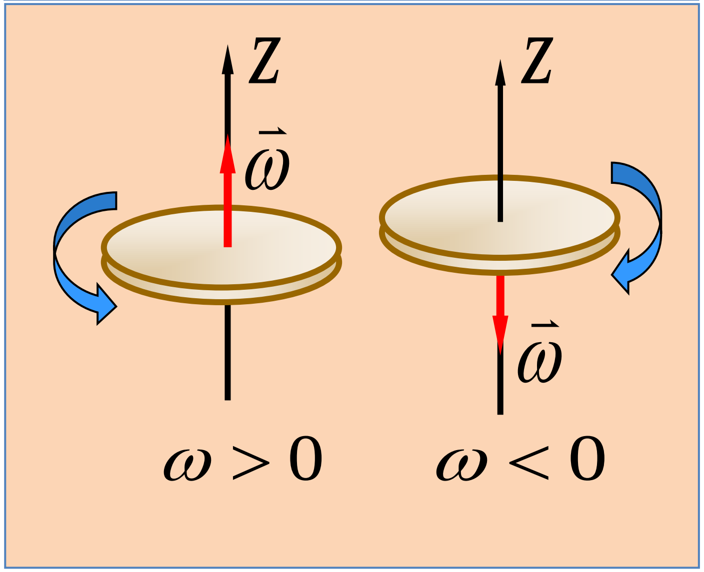
角加速度： $\vec{\beta}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

刚体作定轴转动，令转轴与 z 轴重合，则有

$$\vec{\omega}=\omega\vec{e}_z=\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$$

$$\vec{\beta}=\beta\vec{e}_z=\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_z$$





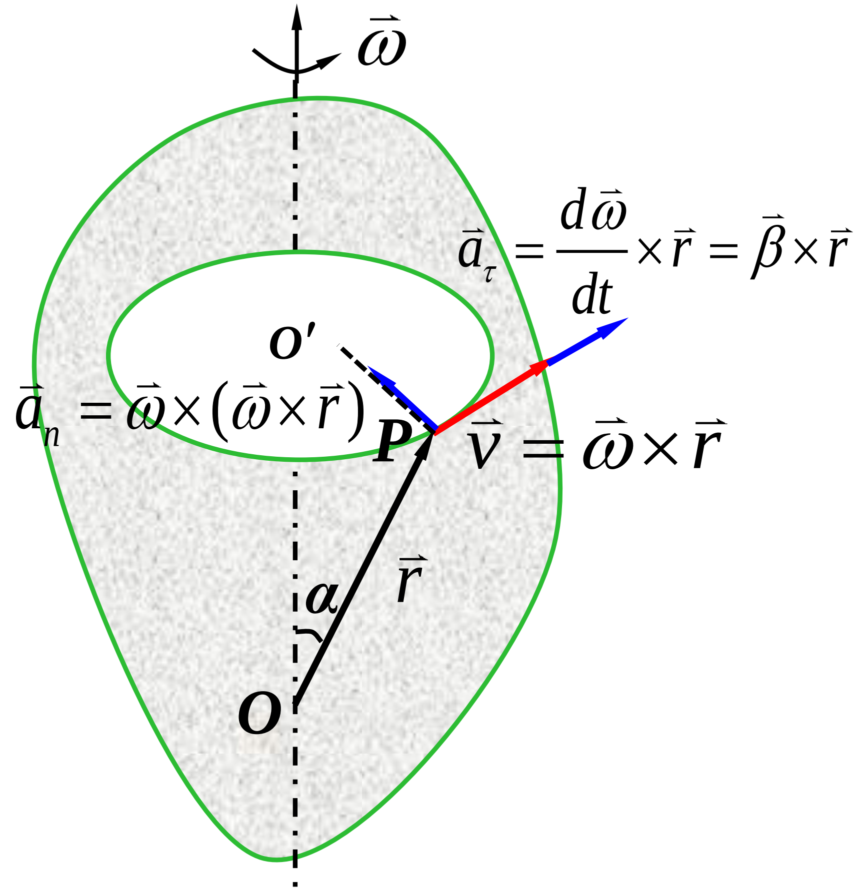
➢角量与线量的矢量关系式为:

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

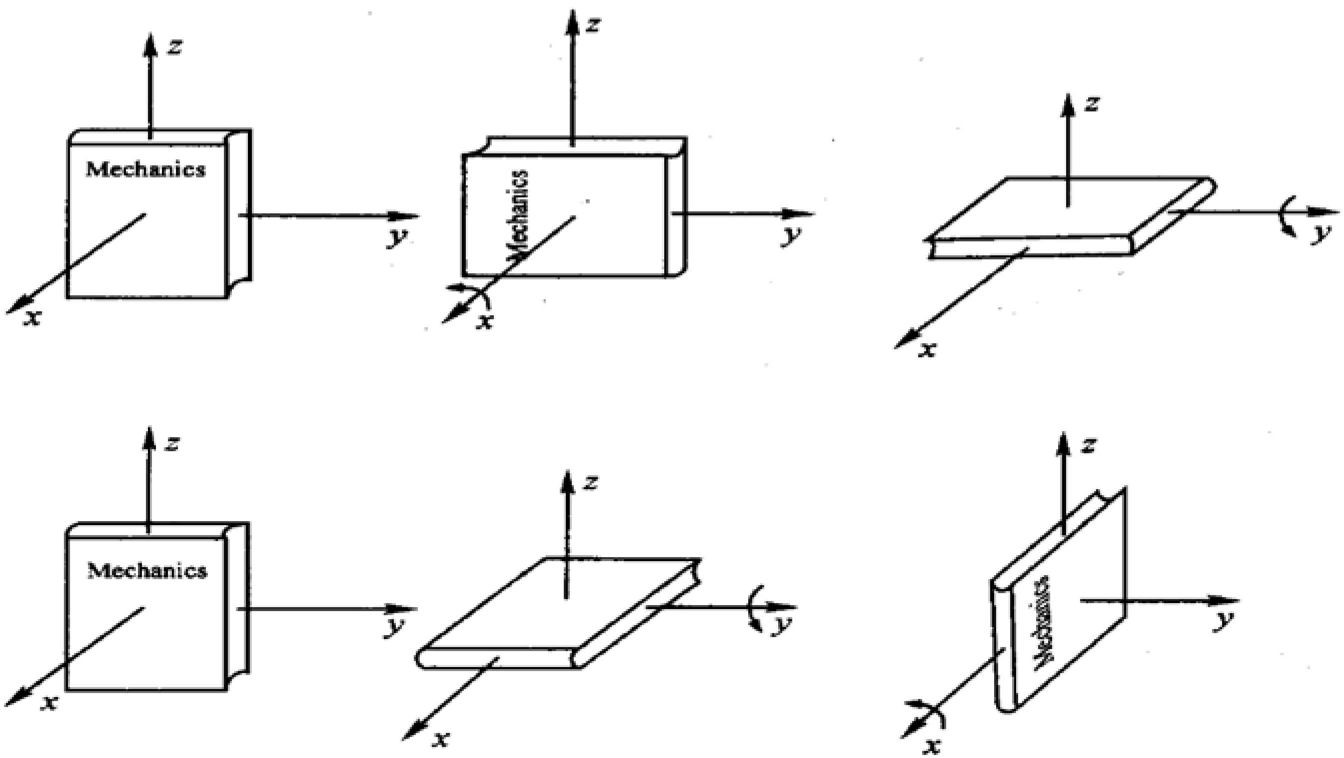


$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_\tau=\vec{\beta}\times\vec{r},\quad \vec{a}_n=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

3. 角速度矢量的矢量性

●有限转动不是矢量

矢量是有大小有方向的量，矢量必须满足矢量相加的平行四边形（或者三角形）法则和加法交换律。**但并不是所有既有大小又有方向的量都是矢量**。

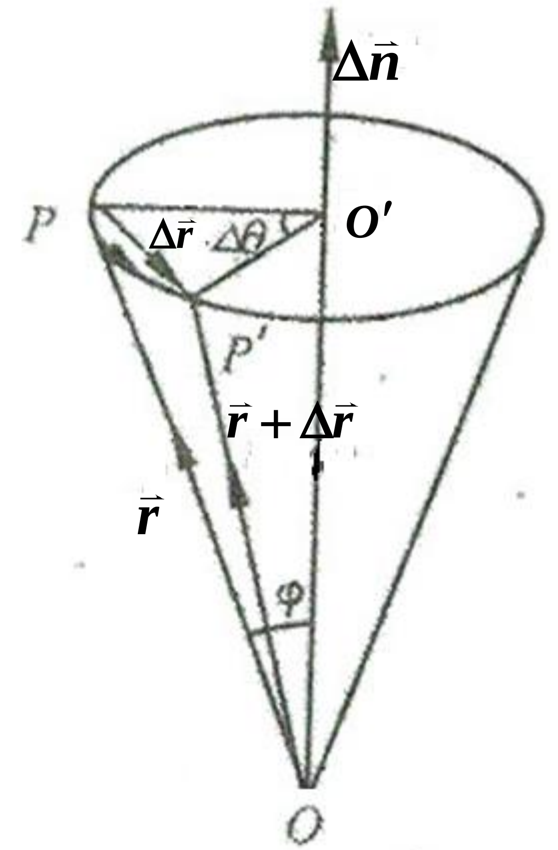


有限角位移不满足矢量加法交换律，因而有限角位移不是一个矢量。

●无限小角位移是矢量

设刚体绕通过定点*O*的某轴线转动了一微小角度 $\Delta\theta$ ，我们可在转动轴上截取一有方向的线段 $\Delta\vec{n}$ 来代表 $\Delta\theta$ 的量值和方向，故 $|\Delta\vec{n}|=\Delta\theta$ ，其指向由右手螺旋法则决定，如图所示。我们通常把 $\Delta\vec{n}$ 叫做角位移。

如果 $\vec{r}$ 为刚体内任一质点*P*在转动前的位矢，$\vec{r}+\Delta\vec{r}$ 为转动后 P 点（即为 P' 点）的位矢，因为 $\Delta\vec{r}$ 是无限小量，故 $\Delta\vec{r}$ 必与包含 $\vec{r}$ 及 $\Delta\vec{n}$ 的平面垂直，并且有



$$|\Delta\vec{r}|=\overline{PO'}\Delta\theta, \qquad \overline{PO'}=r\sin\varphi$$

因此

$$|\Delta\vec{r}|=r\Delta\theta\sin\varphi=|\vec{r}||\Delta\vec{n}|\sin\varphi$$

$$\Delta\vec{r}=\Delta\vec{n}\times\vec{r}$$

现在来看两个微小转动（都是绕通过O点的轴线转的）$\Delta\vec{n}$ 及 $\Delta\vec{n}'$ 的合成是不是遵守交换律？

①转动前：$\vec{r}$

②转动 $\Delta\vec{n}$ 后：$\vec{r}+\Delta\vec{n}\times\vec{r}$

③再转动 $\Delta\vec{n}'$ 后：$\vec{r}+\Delta\vec{n}\times\vec{r}+\Delta\vec{n}'\times(\vec{r}+\Delta\vec{n}\times\vec{r})$

如果略去二阶小量，则得合成线位移为

$$\Delta\vec{r}+\Delta\vec{r}'=\Delta\vec{n}\times\vec{r}+\Delta\vec{n}'\times\vec{r}$$

如果交换转动次序，则得合成线位移为

$$\Delta\vec{r}'+\Delta\vec{r}=\Delta\vec{n}'\times\vec{r}+\Delta\vec{n}\times\vec{r}$$

我们已知线位移是可以对易的，故得

$$\Delta\vec{r}+\Delta\vec{r}'=\Delta\vec{r}'+\Delta\vec{r}$$

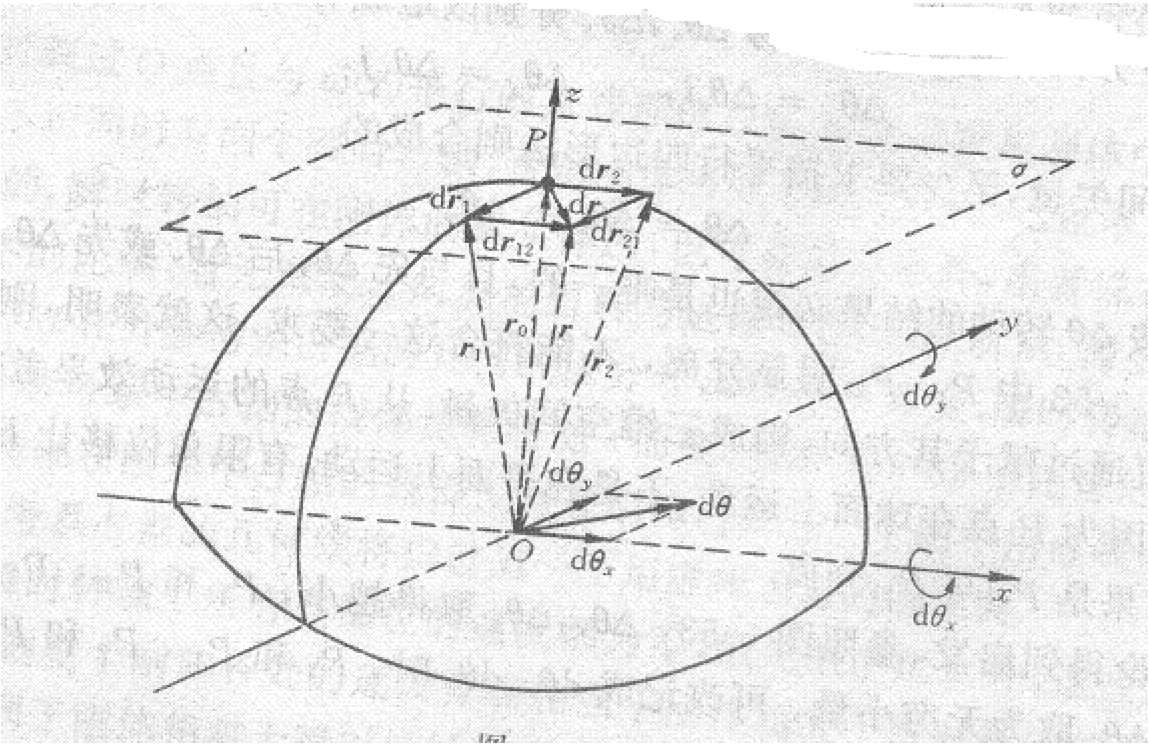
$$\Rightarrow\quad \Delta\vec{n}\times\vec{r}+\Delta\vec{n}'\times\vec{r}=\Delta\vec{n}'\times\vec{r}+\Delta\vec{n}\times\vec{r}$$

$$(\Delta\vec{n}+\Delta\vec{n}')\times\vec{r}=(\Delta\vec{n}'+\Delta\vec{n})\times\vec{r}$$

因对任意 $\vec{r}$, 此矢积式恒成立，故

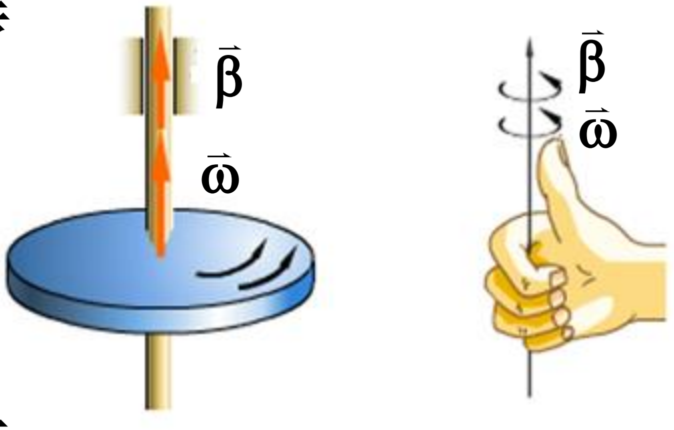
$$\Delta\vec{n}+\Delta\vec{n}'=\Delta\vec{n}'+\Delta\vec{n}$$

所以微小转动的合成也是可以对易的。既然微小转动的合成，遵从平行四边形加法的交换律，所以无限小角位移 $\Delta\vec{n}$ 是一个矢量。



因为 $\Delta\vec{n}$ 是矢量, 所以刚体在瞬时t 绕O点转动的角速度

$$\vec{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{n}}{\Delta t}=\frac{d\vec{n}}{dt}$$

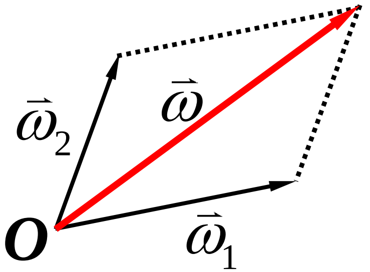


(a) (b)

也是矢量。则刚体内一点相对O点的线速度 $\vec{v}$ 与角速度 $\vec{\omega}$ 之间的关系

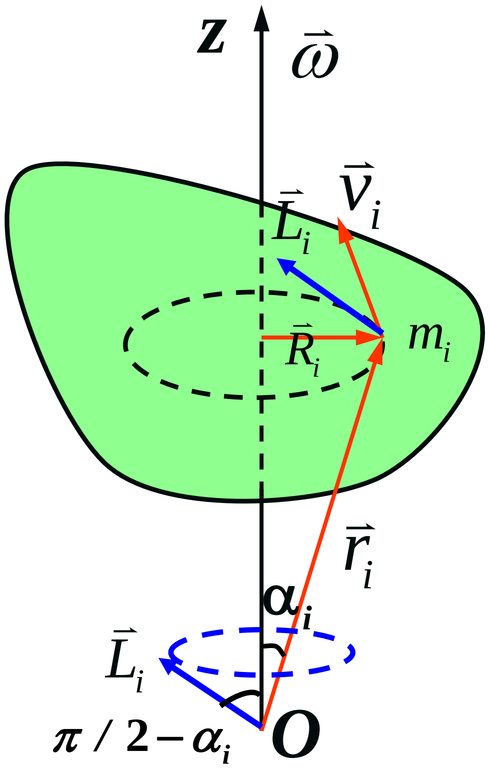
$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{n}\times\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{n}}{dt}\times\vec{r}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

若刚体同时参与两个轴的转动,则合成角速度按平行四边形法则进行合成



4. 刚体定轴转动的角动量

如图所示，考虑以角速度 $\vec{\omega}$ 绕z轴转动的一个刚体，其上任一质元 $\boldsymbol{m_i}$ 相对于原点O的角动量为



$$\vec{L}_i=\vec{r}_i\times(m_i\vec{v}_i)=m_i\vec{r}_i\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)$$

由质点组角动量的定义

$$\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)$$

$$=\sum_i m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right)\vec{r}_i\right]$$

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}$$

故角动量 $\vec{L}$ 与角速度 $\vec{\omega}$ 成线性关系，但一般说来它们**不在同一方向上**。在直角坐标系下

$$\vec{r}_i=x_i\vec{e}_x+y_i\vec{e}_y+z_i\vec{e}_z,\qquad \vec{\omega}=\omega\vec{e}_z$$

所以有

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\vec{r}_i\right]$$

$$=\sum_i m_i\left[(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega\vec{e}_z-\omega z_i(x_i\vec{e}_x+y_i\vec{e}_y+z_i\vec{e}_z)\right]$$

$$=\left(\sum_i -m_i x_i z_i\right)\omega\vec{e}_x+\left(\sum_i -m_i y_i z_i\right)\omega\vec{e}_y+\left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega\vec{e}_z$$

若z 轴是刚体的对称轴，前两项的贡献为零，则刚体的角动量就与其角速度的方向相同。刚体角动量沿着角速度方向的分量为

$$\boxed{L_z=\left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega\equiv I_z\omega}$$

$$\boxed{I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_i m_i R_i^2}$$

刚体绕转轴z的转动惯量

5. 转动定律

由质点系的角动量定理

$$\vec{M}_{ex}=\frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow M_z=\frac{dL_z}{dt}$$

考虑到刚体角动量 $L_z=I_z\omega$ ，可得

$$M_z=\frac{d(I_z\omega)}{dt}$$

当 $\frac{dI_z}{dt}=0$ 时，有

$$M_z=\frac{d(I_z\omega)}{dt}=I_z\frac{d\omega}{dt}=I_z\beta$$

刚体定轴转动定律

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

注意

转动定律中，M_z， L_z， I_z， ω 等量要对同一参考点或同一轴计算。

讨论1

比较：
$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} & \text{—矢量式} \\ M_z = I_z\beta & \text{—标量式} \end{cases}$$

$\vec{F}$ **改变物体平动状态的原因**

m **是物体平动惯性的量度。**

M_z **改变物体绕轴转动状态的原因**

I_z **是物体转动惯性的量度。**

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} & \text{平动问题} \\ M_z = I_z\beta & \text{刚体定轴转动问题} \end{cases}$$

地位相同

讨论2

●力对转轴的力矩

力对转轴上任一参考点的力矩矢量沿转轴方向的分量为力对转轴的力矩：

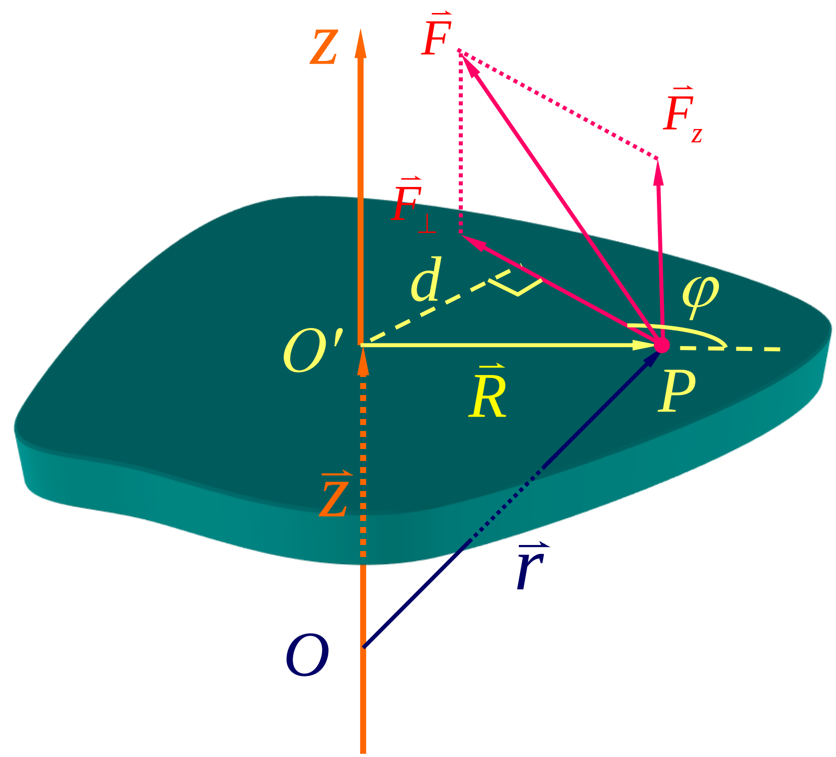
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$=(\vec{R}+\vec{z})\times(\vec{F}_{\perp}+\vec{F}_{z})$$
$$=\vec{R}\times\vec{F}_{\perp}+\vec{R}\times\vec{F}_{z}$$
$$+\vec{z}\times\vec{F}_{\perp}+\vec{z}\times\vec{F}_{z}$$

$\vec{R}\times\vec{F}_{\perp}$: 沿***Oz***轴

$\vec{R}\times\vec{F}_{z}$: 垂直于***Oz***轴

$\vec{z}\times\vec{F}_{\perp}$: 垂直于***Oz***轴

$\vec{z}\times\vec{F}_{z}=0$

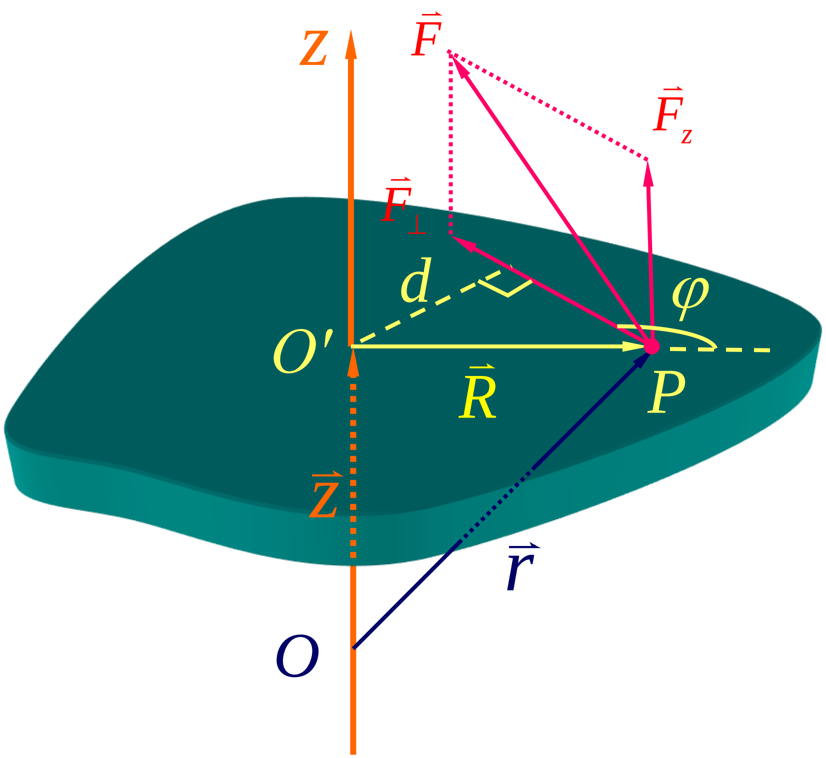


结论： 力矩沿着z 轴的分量为

$$M_z \vec{e}_z = \vec{R} \times \vec{F}_\perp$$

大小：　$F_\perp R \sin\varphi = F_\perp d$

方向：沿 $\vec{R} \times \vec{F}_\perp$ 方向，即沿转动轴的方向



6. 刚体角动量守恒定律

当合外力矩$M_z=0$ 时，刚体沿着角速度方向的角动量守恒，即

$$\boxed{L_z = I_z\omega = const}$$

刚体角动量守恒定律

刚体角动量守恒定律：当作用在刚体（或刚体组系统）上的外力对固定转轴的合力矩为零时，这刚体（或刚体组系统）对该轴的角动量守恒。

说明：

➢角动量保持不变是转动惯量与角速度的乘积不变。如果转动惯量不变，则角速度也不变；如转动惯量改变，则角速度也改变。

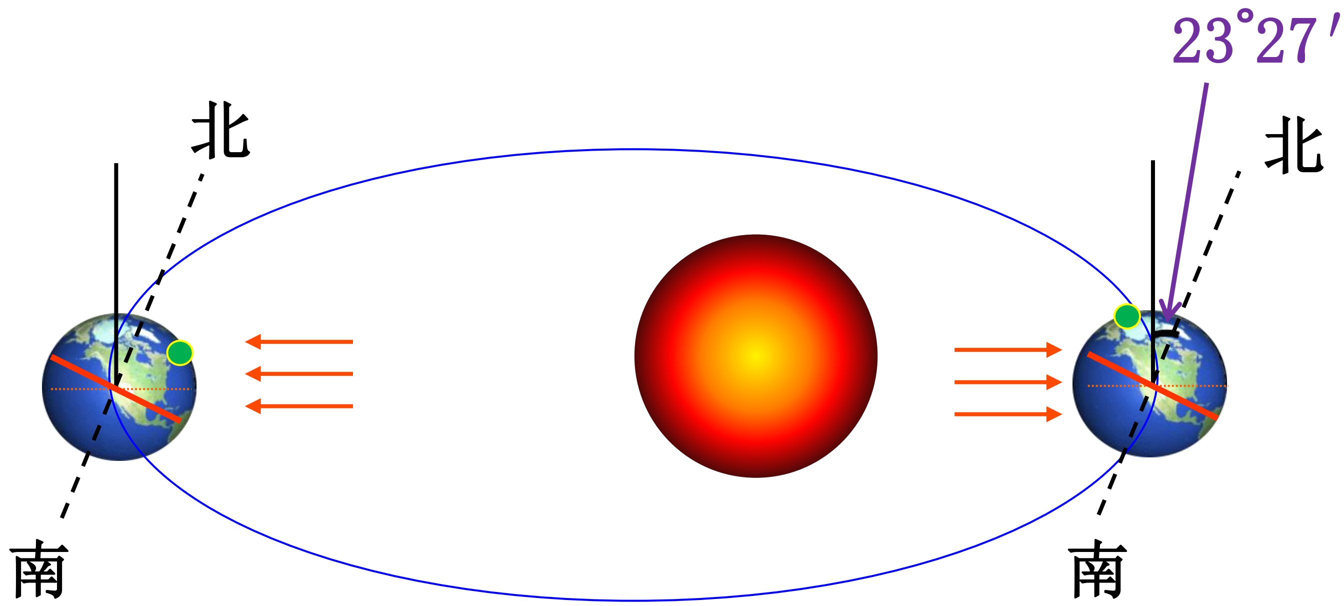
➢如果转动系统有多个物体(刚体或质点)组成，角动量守恒定律的形式为

$$\boxed{\sum_i I_{iz}\omega_i = \sum_i I_{iz,0}\omega_{i,0}}$$

系统内各物体的角动量必须是对同一固定轴而言。

常见的角动量守恒的物理现象:

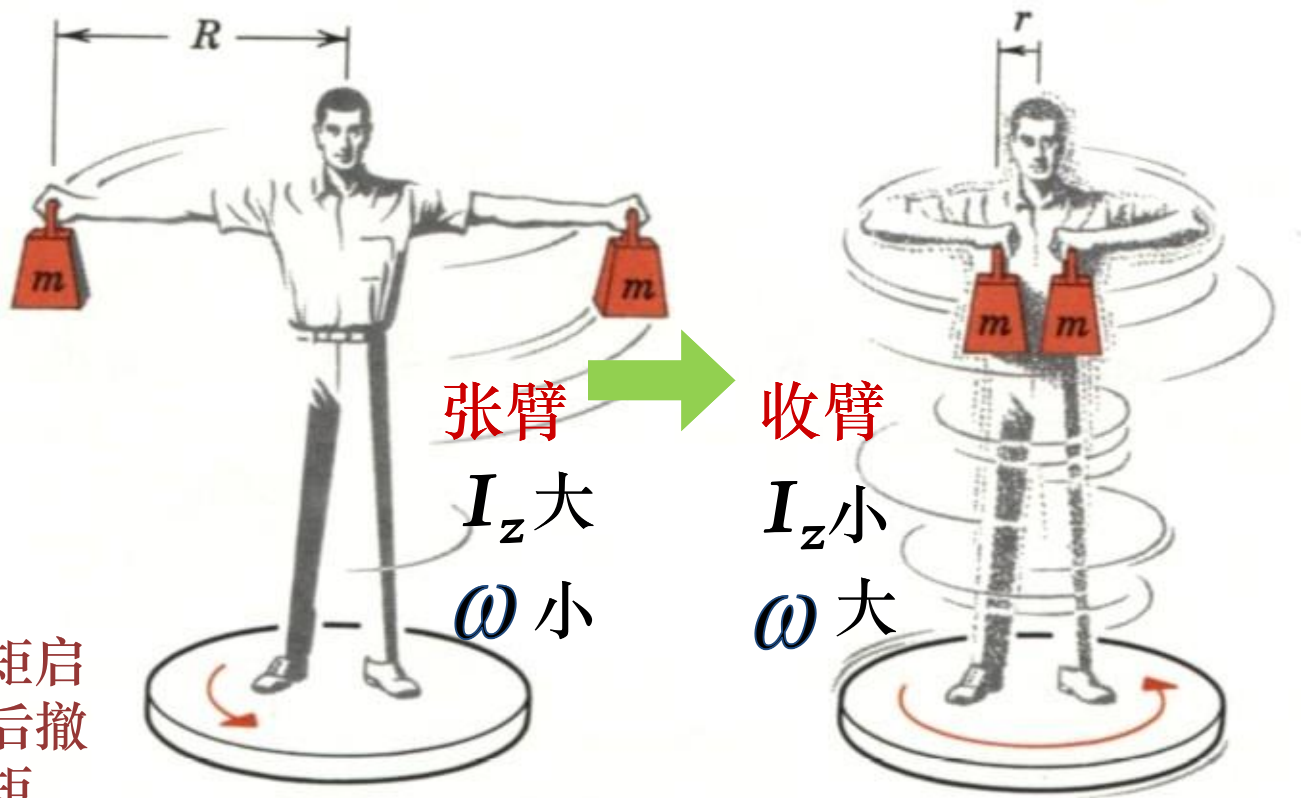
① I_z不变，角速度ω的大小和方向均不变



例如:地球所受的力矩近似为零，地球自转角速度的大小方向均不变。地球赤道平面与黄道平面（公转轨道）的夹角23°27′保持不变。地球在轨道上不同位置，形成春、夏、秋、冬四季的变化。

② I_z可变, ω亦可变，但$I_z\omega$乘积不变

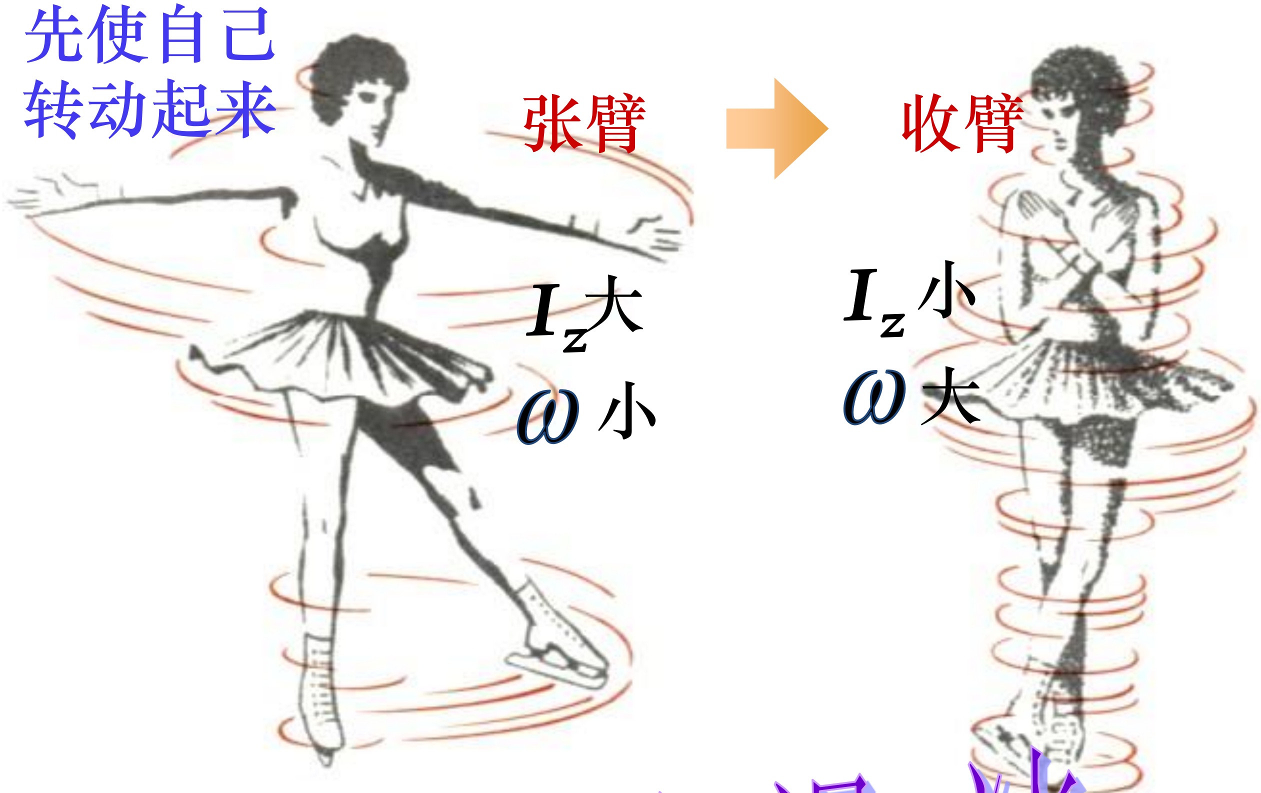
例如：茹可夫斯基凳



用外力矩启动转盘后撤除外力矩

滑冰过程中忽略脚底摩擦力矩的作用，角动量守恒

$$I_{z1}\omega_1 = I_{z2}\omega_2 \Longrightarrow \omega_2 = \frac{I_{z1}}{I_{z2}}\omega_1$$

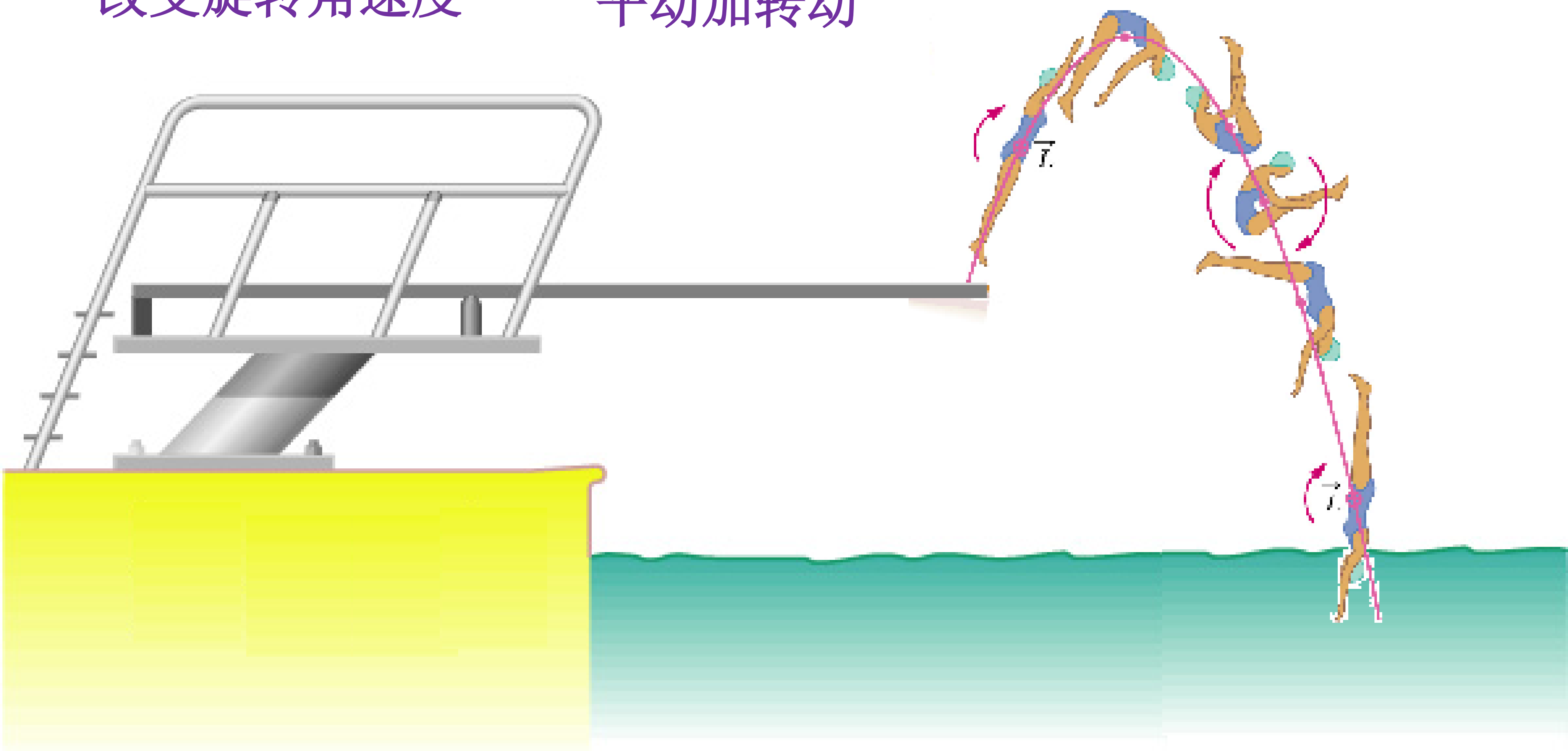


花样滑冰

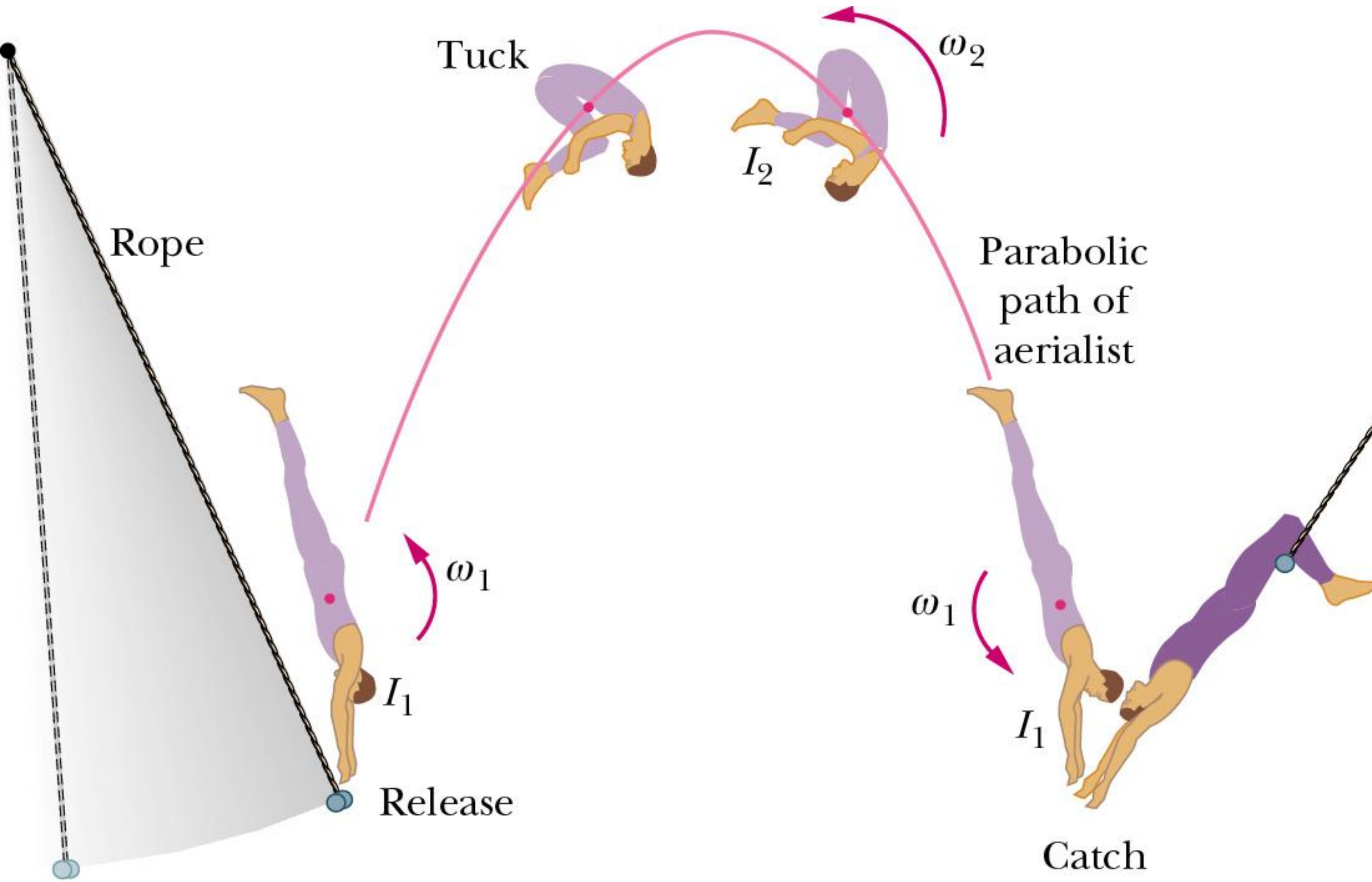
例：跳水、体操运动员（单杠、吊环）完成器械上的操作后落地之前，在空中作空翻动作的基础是，他们在器械上已有绕自身转轴的转动，离开器械以后，若不计空气阻力矩，这个绕自身转轴的角动量守恒（重力矩通过身体的质心不能改变身体的转动状态）。

通过改变转动惯量，
改变旋转角速度

$I_z \downarrow \omega \uparrow$
平动加转动



例：杂技（空中飞人）



Tuck
ω_2
I_2
Rope
Parabolic path of aerialist
ω_1
I_1
Release
ω_1
I_1
Catch

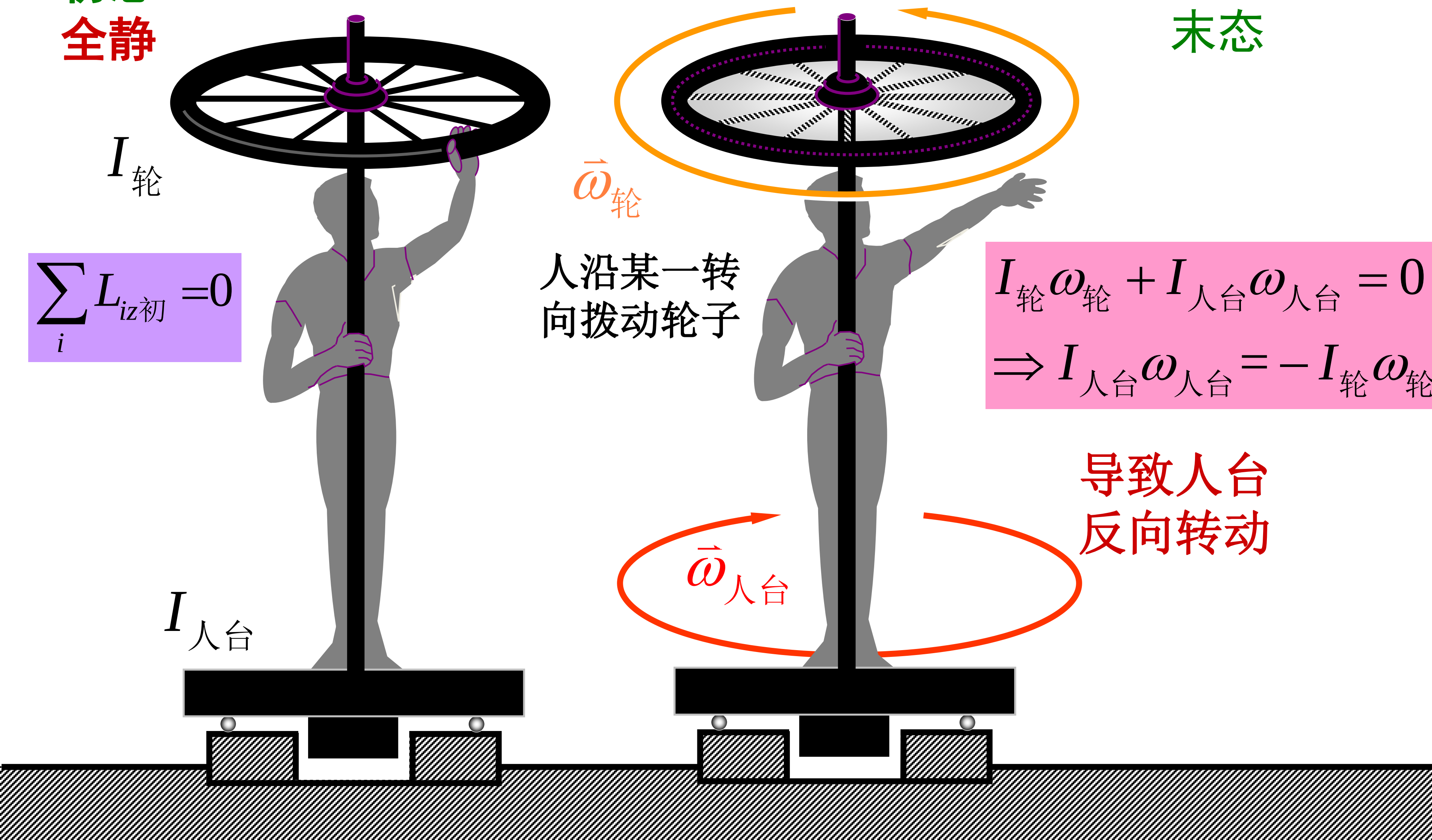
③刚体组角动量守恒

若$M_{ex,z}=0$，则$\sum_i L_{iz}=\sum_i I_{iz}\omega_i=const$

初态

全静

轮、转台与人系统

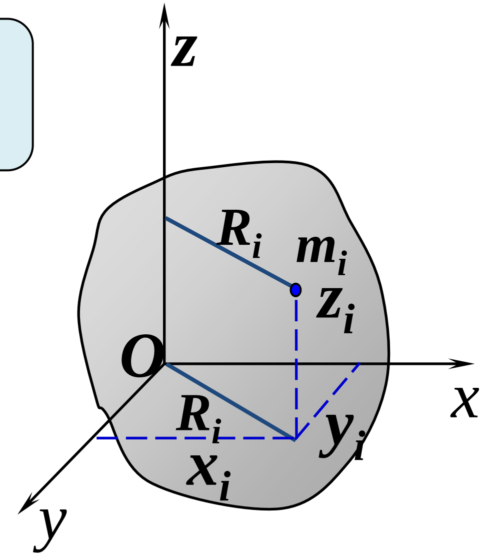


5. 刚体的转动惯量

刚体绕定轴Oz的**转动惯量**

其中R_i为质元m_i到转轴的垂直距离

$$I_z=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)=\sum_i m_iR_i^2,\qquad R_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2}$$



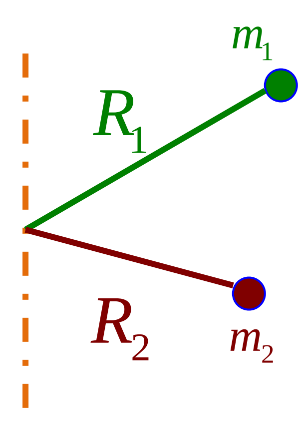
单位： $\mathbf{kg\cdot m^2}$　　**量纲：** $\mathbf{ML^2}$

物理意义：转动惯量是对刚体转动惯性大小的量度，其大小反映了改变刚体转动状态的难易程度。

● 影响转动惯量大小的因素：

①刚体各部分的质量分布；

②转轴的位置。



● 转动惯量的计算

✱质量离散分布的刚体

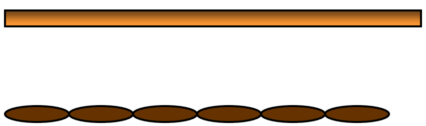
$$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$$

✱若质量连续分布：$\boxed{I_z = \int R^2 dm}$

质量为线分布

$$dm = \lambda dl$$

λ为质量的线密度

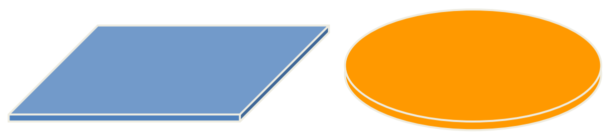


线分布

质量为面分布

$$dm = \sigma ds$$

σ为质量的面密度

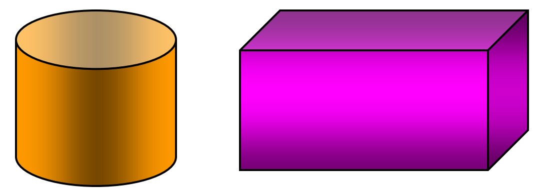


面分布

质量为体分布

$$dm = \rho dV$$

ρ为质量的体密度



体分布

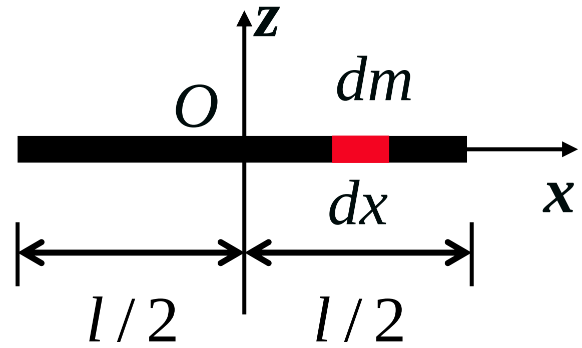
注意

只有几何形状规则、质量连续且均匀分布的刚体，才用积分计算其转动惯量，一般刚体则用实验求其转动惯量。

●几种典型形状刚体的转动惯量计算

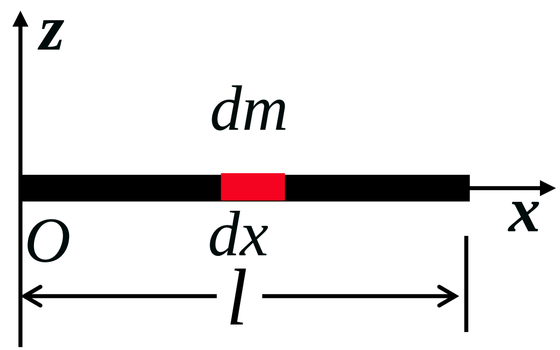
（1）均匀细棒

a）转轴过中心与杆垂直



$$I=\int R^2 dm=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx=\left.\frac{mx^3}{3l}\right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{12}ml^2$$

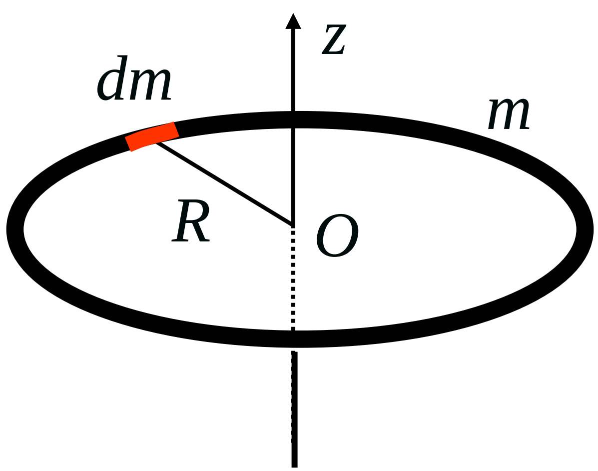
b）转轴过棒一端与棒垂直



$$I=\int R^2 dm=\int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx=\frac{1}{3}ml^2$$

可见转动惯量与刚体质量、质量分布、轴的位置有关。

（2）均匀细圆环

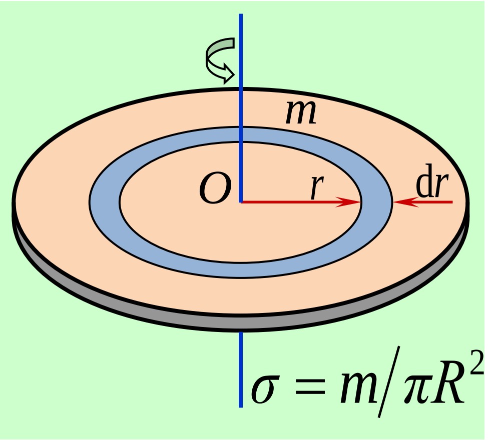


转轴过圆心与环面垂直，取

$$dm=\lambda\cdot dl,\quad \lambda=\frac{m}{2\pi R}$$

$$I=\int R^2 dm \;=\lambda R^2\int_0^{2\pi R} dl \;= mR^2$$

（3）均匀圆盘绕中心轴的转动惯量



在盘上取半径为r，宽为dr的圆环

圆环质量：

$$dm=\sigma 2\pi r dr$$

圆环绕轴的转动惯量：

$$dI = r^2 dm = 2\pi\sigma r^3 \mathrm{d}r$$

圆盘绕轴的转动惯量为：

$$I=\int dI \;=\int_0^R 2\pi\sigma r^3 \mathrm{d}r \;=\frac{\sigma}{2}\pi R^4=\frac{1}{2}mR^2$$

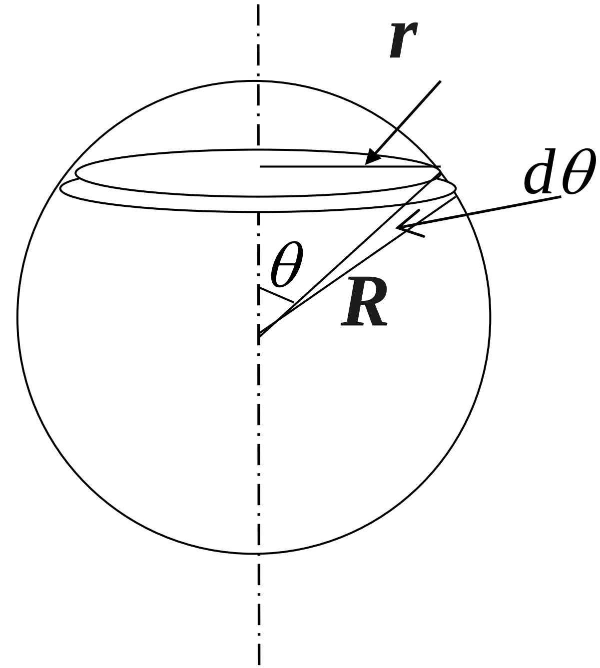
（4）均匀薄球壳(半径R、质量m)绕直径的转动惯量

该球壳的质量面密度为

$$\sigma=\frac{m}{4\pi R^2}$$

将球壳划分为许多小圆环，环面积为:

$$dS = 2\pi r \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$



圆环质量:

$$dm = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

圆环绕轴的转动惯量:

$$dI = r^2 dm$$
$$= (R\sin\theta)^2 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$$
$$= 2\pi\sigma R^4 \sin^3\theta d\theta$$

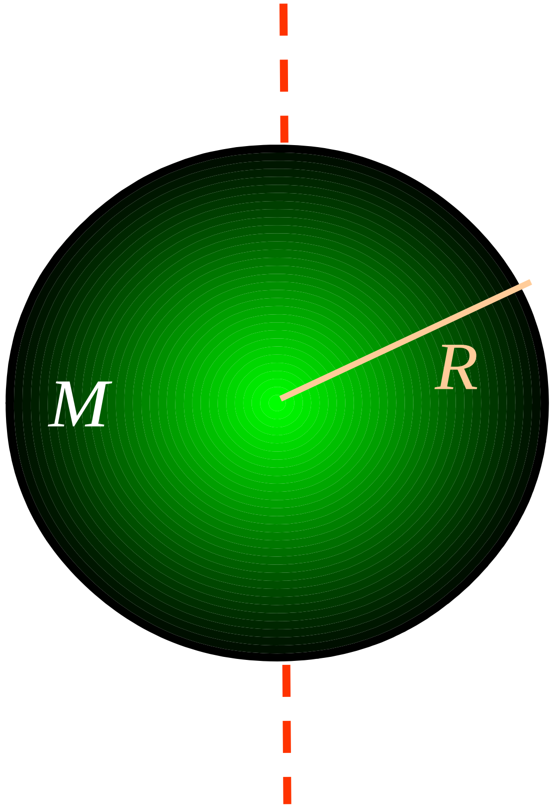
所以球壳的转动惯量为

$$I = \int dI = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} (-\sin^2\theta) d\cos\theta$$

$$= 2\pi\sigma R^4 \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4 = \frac{2}{3} m R^2$$

（5）均匀球体(半径*R*、质量*m*)绕直径的转动惯量

把球体看作无数个同心薄球壳的组合。在球体上取半径为**r**，厚度为**dr**的球壳，该球壳的质量为



$$dm = \rho dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3m}{R^3} r^2 dr$$

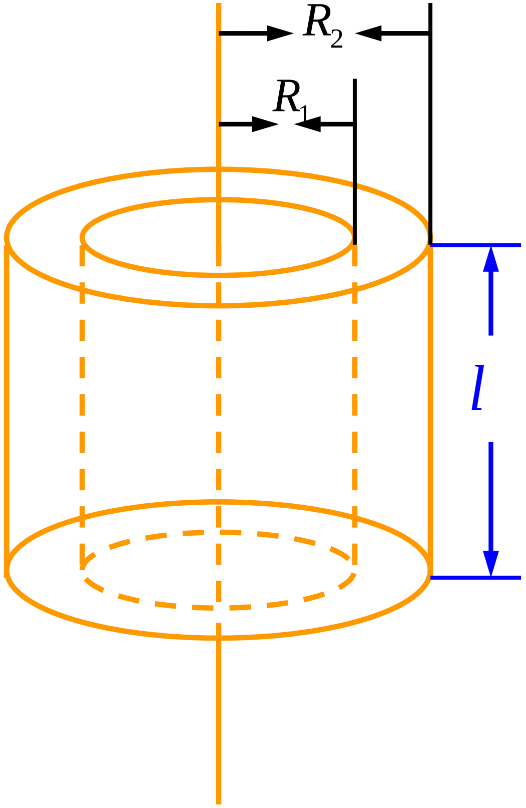
该球壳的转动惯量为

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2m}{R^3} r^4 dr$$

该球体的转动惯量是

$$I = \int dI = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} mR^2$$

（6） 绕中心轴的空心圆柱体的转动惯量



实心圆柱体的转动惯量:

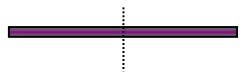
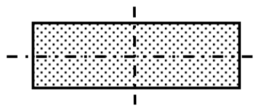
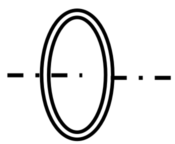
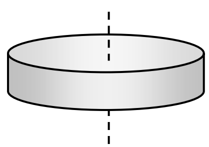
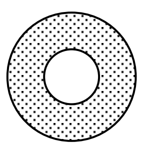
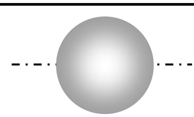
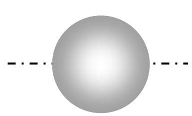
$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

质量: $m_1 = \pi \rho l R_1^2, \qquad m_2 = \pi \rho l R_2^2$

密度: $\rho = \dfrac{m}{\pi (R_2^2 - R_1^2) l}$

$$\Rightarrow I = I_2 - I_1 = \frac{1}{2} \pi \rho l (R_2^4 - R_1^4) = \frac{m(R_2^4 - R_1^4)}{2(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$$

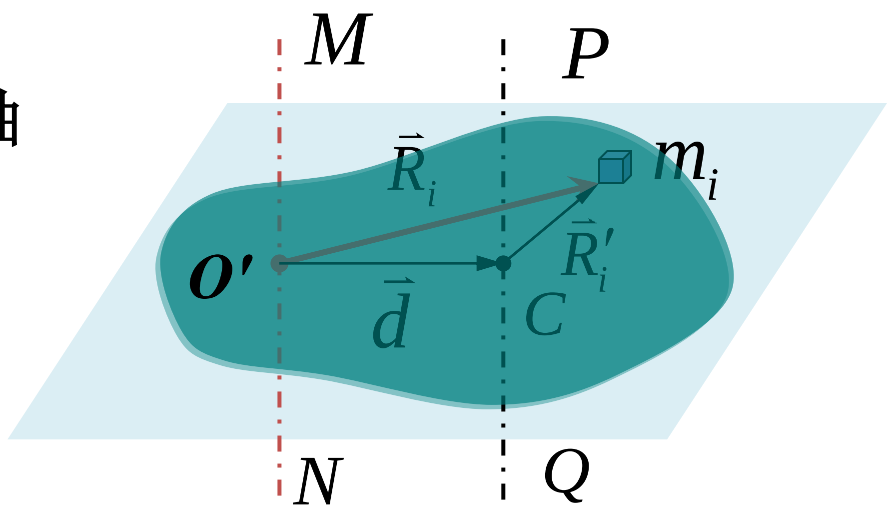
常见匀质刚体的转动惯量

刚体名称	刚 体 图 形	转轴位置	转动惯量
细　杆 矩形薄板	 m,l  m,a,b	过中心且与杆垂直	$\frac{1}{12}mb^2$
细圆环 薄圆筒	 m,R	过中心与端面垂直	mR^2
圆　盘 圆　柱	 m,R	过中心与端面垂直	$\frac{1}{2}mR^2$
空心圆盘 空心圆柱	 m,R_1R_2	过中心与端面垂直	$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
实心球体	 m,R	任一直径	$\frac{2}{5}mR^2$
薄球壳	 m,R	任一直径	$\frac{2}{3}mR^2$

6. 有关转动惯量的定理

(1)平行轴定理

取两个互相平行、间距为 **d** 的转轴其中一个转轴通过刚体质心***C***



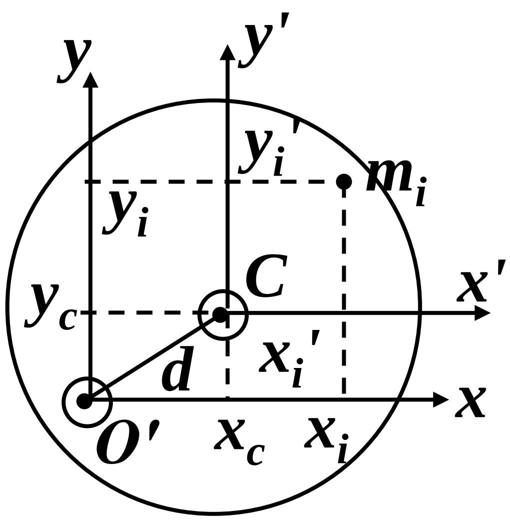
$$\vec{R}_i = \vec{R}_i' + \vec{d}$$

$$I_{MN} = \sum_i m_i \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i = \sum_i m_i \left(\vec{R}_i' + \vec{d}\right) \cdot \left(\vec{R}_i' + \vec{d}\right)$$

$$= \sum_i m_i \vec{R}_i' \cdot \vec{R}_i' + 2\sum_i m_i \vec{R}_i' \cdot \vec{d} + \sum_i m_i \vec{d} \cdot \vec{d}$$

$$= \sum_i m_i R_i'^2 + 2\left[\sum_i m_i \vec{R}_i'\right] \cdot \vec{d} + md^2$$

$$= I_C + md^2$$



$$I_C = \sum_i m_i R_i'^2$$

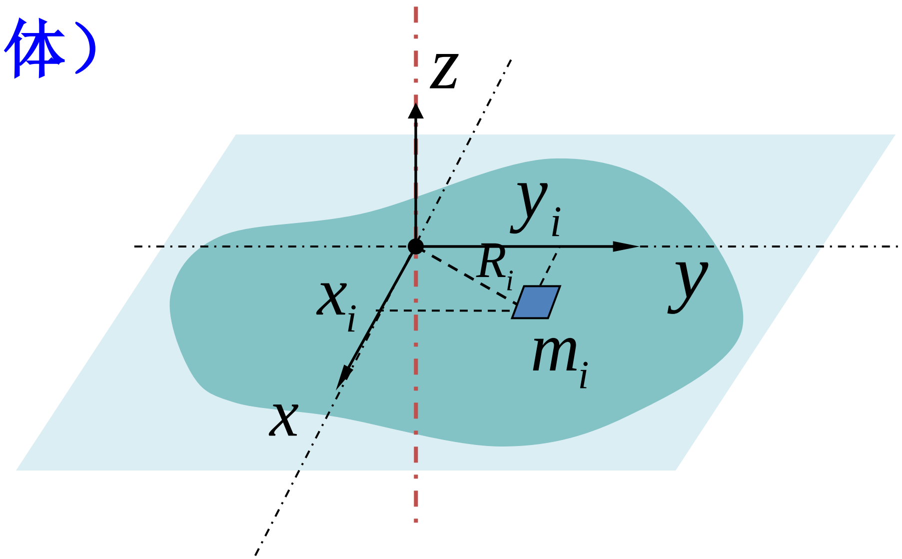
对质心轴的转动惯量

平行轴定理: $\boxed{I_{MN} = I_C + md^2}$

推论：刚体沿任何方向转动，绕通过质心的转轴的转动惯量最小。

(2)垂直轴定理（适用于二维平面刚体）

对于如图所示的薄板状刚体，**取*z*轴垂直此平面，*x*、*y*轴取在平面。**



薄板绕***Ox***轴的转动惯量：

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

薄板绕***Oy***轴的转动惯量：

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

薄板绕***Oz***轴的转动惯量：

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 + \sum_i m_i x_i^2 = I_x + I_y$$

垂直轴定理：$\boxed{I_x + I_y = I_z}$

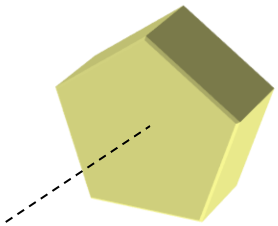
(3) 组合定理

由几个部分组成的刚体对某轴的转动惯量，等于刚体各部分对该轴的转动惯量之和——转动惯量的组合定理。

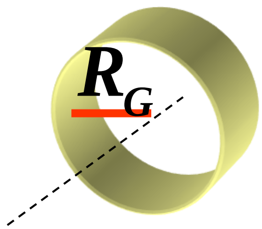
● 回转半径 R_G

刚体的质量为m，转动惯量为 I

$$m=\sum m_i \qquad I=\sum m_i R_i^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I=mR_G{}^2}$$



$\Rightarrow$

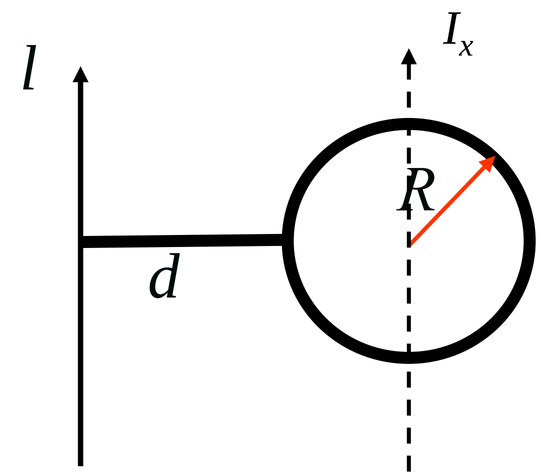


• 均匀圆柱体的回旋半径：$R_G=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

• 均匀球体回旋半径： $R_G=\sqrt{\dfrac{2}{5}}\,R$

质量相同的刚体，回转半径越大，转动惯量越大

例题1：如图, 圆环质量m_1，半径R，短棒质量m_2，长度d，求对l轴的转动惯量。



解：圆环转轴通过直径的转动惯量，
根据正交轴定理有

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

根据平行轴定理，圆环对转轴l的转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 (R+d)^2$$

因此，整个元件对l轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{3} m_2 d^2 + \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 (R+d)^2$$

7. 转动定律应用举例

当系统中既有转动物体，又有平动物体时，用隔离法解题。对转动物体用转动定律建立方程，对平动物体则用牛顿定律建立方程。

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad M_z = I_z\beta$$

●应用转动定理和牛顿第二定律解题的思路

①明确已知条件和待求量，确定研究对象；

②取隔离体，受力分析；

③选坐标系，应用转动定理或牛顿第二定律列方程；

④计算力矩和转动惯量；

⑤由约束关系补充运动学方程；

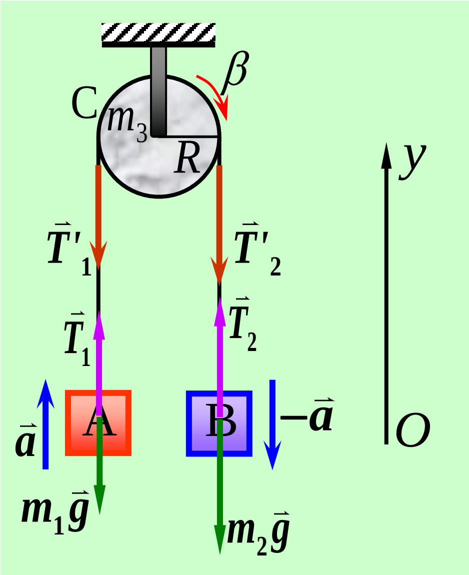
⑥求解，讨论。

注意:

- 选定转动的正方向，注意力矩、角速度、角加速度的正负；
- 同一方程式中的力矩和转动惯量必须相对同一转轴

例题2： 如图，一轻绳跨过一定滑轮C，滑轮视为匀质圆盘，绳的两端分别悬有质量为m_1和m_2的物体A和物体B，$m_1<m_2$。设滑轮的质量为m_3，半径为R，滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计，绳与滑轮之间无相对滑动。**试求：**（1）物体的加速度和绳的张力；（2）若不计滑轮质量，结果如何？

解：(1) 分别取A、B为质点，取图示Oy坐标系，受力分析如图。



由牛顿第二定律得

$$\begin{cases} \mathrm{A}: T_1 - m_1 g = m_1 a \\ \mathrm{B}: T_2 - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

C为刚体，受力分析如图。

C绕定轴转动，由转动定理得

$$T_2' R - T_1' R = I\beta$$

由角加速度和切向加速度的关系得

$$a = R\beta$$

$$\because \quad I = \frac{1}{2} m_3 R^2, \quad T_1' = T_1, \quad T_2' = T_2$$

联立以上各式得

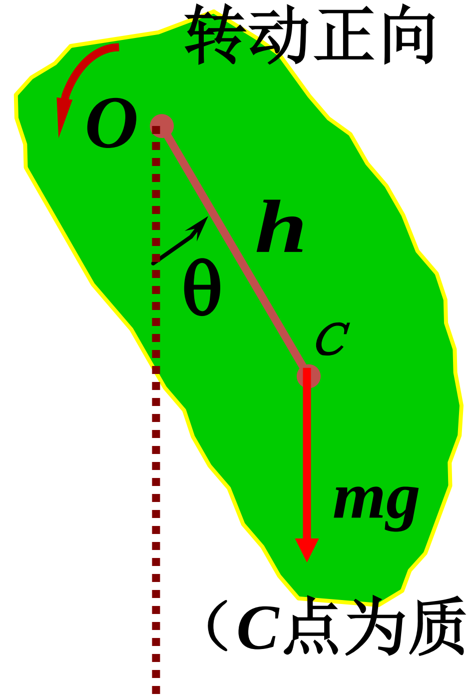
$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \\ T_1 &= \frac{2m_1 m_2 + m_3 m_1/2}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \\ T_2 &= \frac{2m_1 m_2 + m_3 m_2/2}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{T_1 \neq T_2}$$

(2) 当$\boldsymbol{m_3}$=0时有

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

例题3：复摆是绕一固定的水平轴，在重力作用下，作微小摆动的刚体。

解：复摆绕***O***点的轴做定轴转动，***C***表示复摆的质心。***OC***与铅直方向的夹角为θ，它是描述刚体位置的变量。当***OC***在铅直线上时，$\theta=0$ 为平衡位置。刚体绕***O***轴转动的力矩是由重力***mg***提供的



（C点为质心）

$$M=-mgh\sin\theta$$

由转动定律

$$M=I\beta=I\frac{d^2\theta}{dt^2}\Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgh\sin\theta$$

小角度时 $\sin\theta\approx\theta$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgh}{I}\theta$$

令 $\omega^2\equiv\dfrac{mgh}{I}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

可见:(1)此刚体的自由摆动是简谐振动;

(2)角频率: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgh}{I}}$

周期: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgh}}$

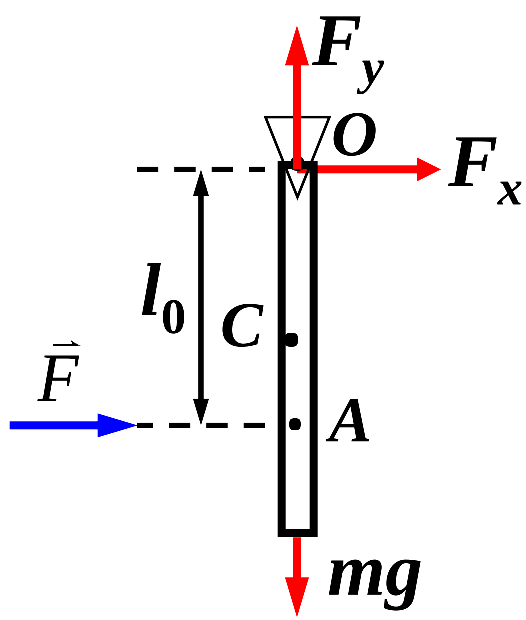
与单摆周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 相比，可知复摆相当于一个摆长为:

$$\boldsymbol{l = \frac{I}{mh} = \frac{I_C + mh^2}{mh} = h + \frac{I_C}{mh}}$$

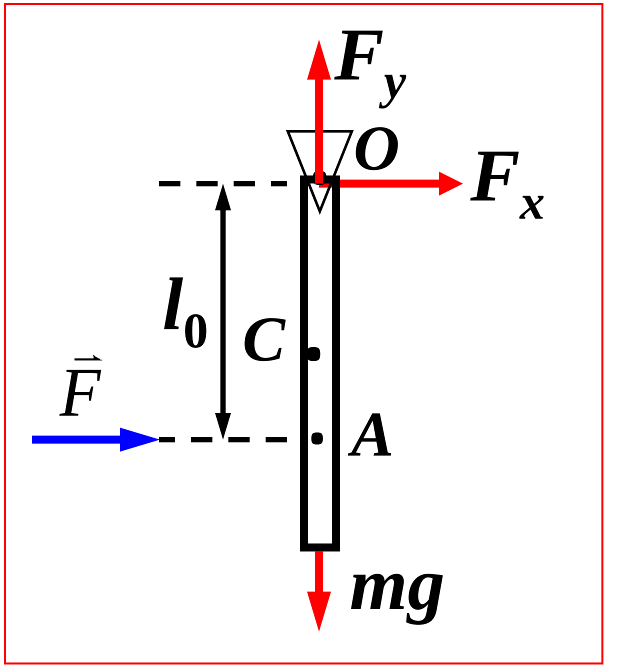
的单摆， $\boldsymbol{l}$ 称为复摆的等值摆长。

例题4：“打击中心”问题

细杆：质量为m，长度为l，轴O，在竖直位置静止。若在某时刻有力F作用在A处，求轴对杆的作用力。



解： 如图示，除力F外，系统还受重力、轴的支持力等。在这几个力的作用下，刚体做定轴转动。重力和轴的支持力对轴的力矩为零。只有力F 对细杆的转动有贡献，它对转轴O的力矩为：



$$M = l_0 F$$

应用转动定律

$$M = I\beta, \quad I = \frac{1}{3}ml^2 \Rightarrow \beta = \frac{M}{I} = \frac{l_0 F}{I} = \frac{3Fl_0}{ml^2}$$

进一步应用质心运动定律可得

$$\vec{F} + m\vec{g} + (F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y) = m\vec{a}_c$$

注意：求力需要利用质心运动定理。

写出以上质心运动定律的分量式：

$$\begin{cases} F_\tau = F + F_x = ma_{c\tau} = m\dfrac{l}{2}\beta = \dfrac{3l_0}{2l}F \\ F_n = F_y - mg = ma_{cn} = m\dfrac{l}{2}\omega^2 \approx 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = \frac{3Fl_0}{ml^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_y \approx mg \\ F_x = \left(\dfrac{3l_0}{2l} - 1\right)F \end{cases}$$

所以有

$$F_x < 0, \quad l_0 < \frac{2}{3}l$$

$$F_x = 0, \quad l_0 = \frac{2}{3}l$$

$$F_x > 0, \quad l_0 > \frac{2}{3}l$$

- 网球拍

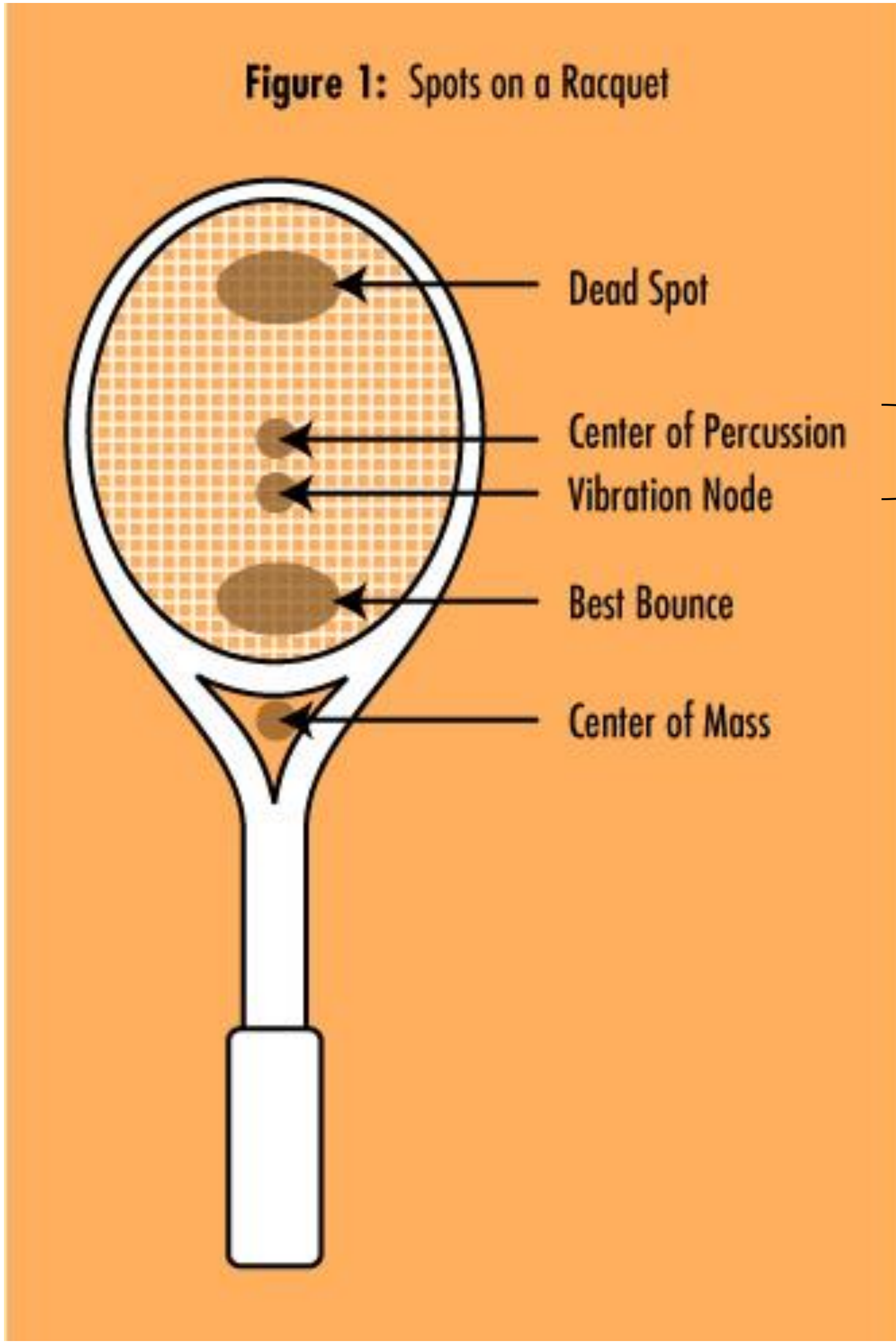


Figure 1: Spots on a Racquet

the sweet spot

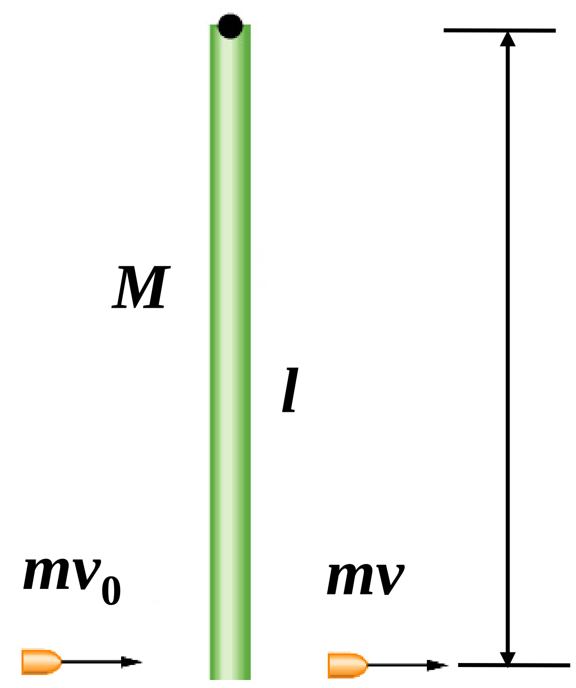
例题5： 一粒子弹以初速度v_0水平射入一静止悬杆的下端，穿出后速度损失 3/4，求子弹穿出后棒的角速度ω 。已知子弹的质量为m，杆子的质量为M。

解： 取子弹与杆组成的系统作为研究对象。系统角动量守恒

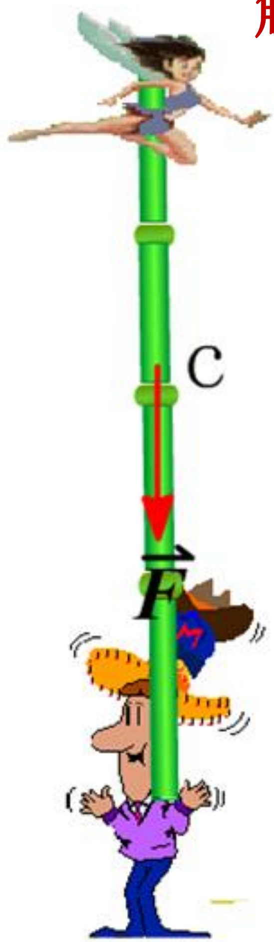
$$mv_0 l = mvl + I\omega, \quad I = \frac{1}{3}Ml^2, \quad v = \frac{1}{4}v_0$$

故可得

$$\omega = \frac{9mv_0}{4Ml}$$

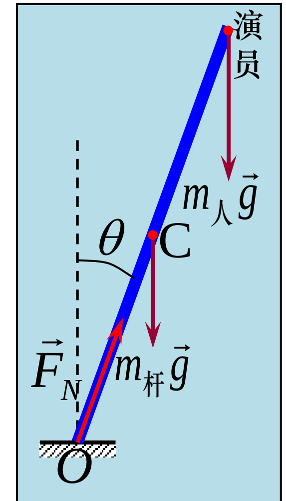


例题6：竿子长些还是短些较安全?



解： 细竿对过支点O的轴：$I_{竿} = \dfrac{1}{3} m_{竿} L^2$

演员对过支点O的轴：$I_{人} = m_{人} L^2$



总转动惯量： $I = I_{人} + I_{竿}$

细竿的重力矩：$M_{竿} = \dfrac{1}{2} m_{竿} g L \sin\theta$ (向里)

演员的重力矩：$M_{人} = m_{人} g L \sin\theta$ (向里)

总力矩： $M = M_{人} + M_{竿}$

应用刚体定轴转动定理：$M = I\beta$

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{(m_{人} + m_{竿}/2) g \sin\theta}{(m_{人} + m_{竿}/3) L}$$

L越大β越小，系统越稳定．即竿越长越安全!

走钢丝的演员总是伸开双臂或横握一根长竿，也是同样的道理．

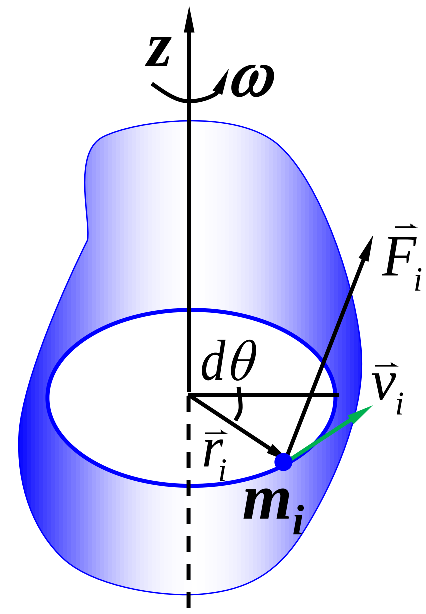
§ 8.3 刚体定轴转动的动能定理

1.力矩的功

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

刚体中质元 m_i 上的外力 $\vec{F}_i$ 的作用下位移 $d\vec{r}_i$，则元功为

$$\begin{aligned} dW_i &= \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i\cdot\vec{v}_i dt = \vec{F}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)dt \\ &= \vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)dt = \vec{\omega}\cdot\vec{M}_i dt \\ &= M_{i,z}\omega dt = M_{i,z}d\theta \end{aligned}$$



$$\Rightarrow\quad dW=\sum_i dW_i=\sum_i M_{i,z}d\theta_i=M_z d\theta$$

对有限角位移

$$W=\int_{\theta_0}^{\theta}dW=\int_{\theta_0}^{\theta}M_z\mathrm{d}\theta'$$

作用于刚体的外力所做的功，等于外力对该轴的合力矩与转角的乘积。

力矩的功率：
$$P=\frac{dW}{dt}=M_z\frac{d\theta}{dt}=M_z\omega$$

注：力矩的功实际上是力的功在转动中的特殊形式！

● **刚体的内力作功**

考察刚体的第i个质点与第 j个质点相互作用的 $\vec{f}_{ij}$ 与 $\vec{f}_{ji}$ 这一对内力。如刚体稍微改变其位置，第i个质点与第 j 个质点的位移各为 $d\vec{r}_i$ 与 $d\vec{r}_j$，则这一对内力所作功的和为：

$$W_{ij}+W_{ji}=\vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_i+\vec{f}_{ji}\cdot d\vec{r}_j=\vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_i-\vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_j$$

$$=\vec{f}_{ij}\cdot\left(d\vec{r}_i-d\vec{r}_j\right)=\vec{f}_{ij}\cdot d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)$$

由于刚体内任意两质点间的距离保持不变，故有：

$$\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=\text{常量}$$

微分一次，得：

$$2\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\cdot d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=0$$

因 $\vec{f}_{ij}//\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)$，所以有

$$W_{ij}+W_{ji}=\vec{f}_{ij}\cdot d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\propto\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\cdot d\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)=0$$

于是可知刚体的内力作功为零。

2. 定轴转动刚体的动能

当刚体绕定轴转动时，其动能为所有质点作圆周运动动能的总和。任意质元m_i的动能为：

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_i v_i^2$$

则刚体的动能为

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i\frac{1}{2}m_i v_i^{\,2}=\sum_i\frac{1}{2}m_i R_i^{\,2}\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}I_z\omega^2$$

$$\Rightarrow\ \boxed{E_k=\frac{1}{2}I_z\omega^2}$$

刚体定轴转动动能

3. 定轴转动刚体的动能定理

$$W_{外}+W_{内}=E_k-E_{k0}\ \Rightarrow\ \boxed{\int_{\theta_0}^{\theta}M_z d\theta=\frac{1}{2}I_z\omega^2-\frac{1}{2}I_z\omega_0^2}$$

与刚体定轴转动定律相容：

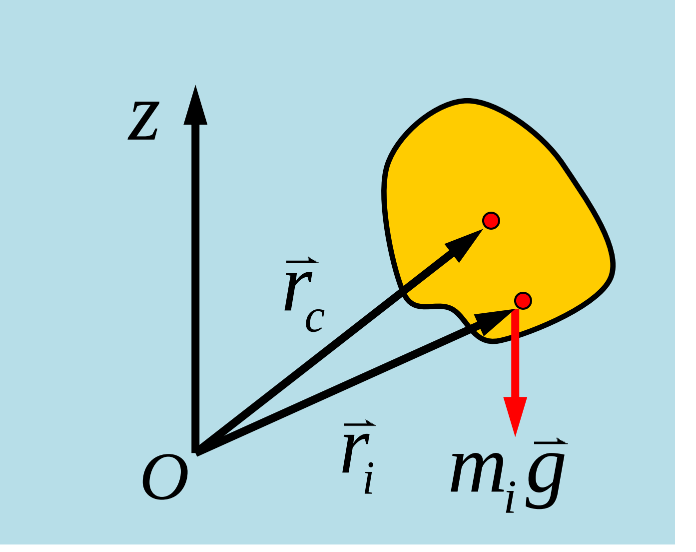
$$W_{外}=\int_{\theta_0}^{\theta}M_z d\theta=\int I_z\beta d\theta=I_z\int\frac{d\omega}{dt}\cdot d\theta=I_z\int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega=\frac{1}{2}I_z\omega^2-\frac{1}{2}I_z\omega_0^2$$

刚体定轴转动的动能定理： 作用于刚体的外力对固定轴的力矩所做的功等于刚体绕定轴转动动能的改变量。

4. 刚体的重力势能

刚体和地球系统的重力势能：

以地面为零势能点，质元 m_i的重力势能为



$$E_p = \sum m_i g z_i$$

$$= mg\left(\frac{\sum_i m_i z_i}{m}\right) = mgz_c$$

刚体的重力势能与质量集中在质心上的一个质点的重力势能相同。

若刚体在转动过程中，只有重力矩做功，则刚体系统机械能守恒：

$$\boxed{\frac{1}{2}I_z\omega^2 + mgz_c = \text{const.}}$$

刚体定轴转动的机械能守恒定律

5. 刚体定轴转动的功能原理与机械能守恒

若刚体置于重力场中，其机械能包含动能和重力势能：

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + mgz_{\mathrm{c}}$$

利用功能原理

$$W_{外} + W_{非保内} = E - E_0$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_z \mathrm{d}\theta = (mgz_{\mathrm{c}} + \frac{1}{2} I_z \omega^2) - (mgz_{\mathrm{c}0} + \frac{1}{2} I_z \omega_0^2),\quad 注意 W_{内} = 0$$

式中M_z为外力矩（不包含重力的力矩）。

若M_z=0

$$mgz_{\mathrm{c}} + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \mathrm{const.}$$

刚体的机械能守恒定律

质点的运动规律和刚体定轴转动规律的对比(一)

质点的平动	刚体的定轴转动
速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{dt}}$
加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$	角加速度 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{dt}}$
质量 $\boldsymbol{m}$, 力 $\vec{F}$	转动惯量 $\boldsymbol{I_z}$, 力矩$\boldsymbol{M_z}$
力的功 $W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$	力矩的功 $W=\int_{\theta_a}^{\theta_b} M_z d\theta$
动能 $\boldsymbol{E_k=\frac{1}{2}mv^2}$	转动动能 $E_k=\dfrac{1}{2}I_z\omega^2$
重力势能 $E_p=mgz$	重力势能 $E_p=mgz_C$

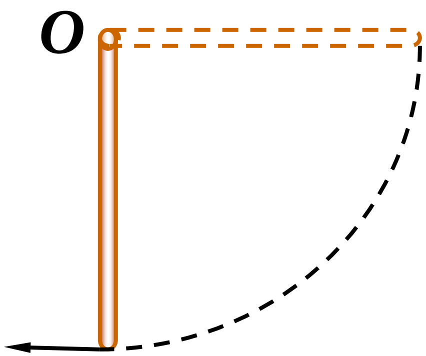
质点的运动规律和刚体定轴转动规律的对比(二)

质点的平动	刚体的定轴转动
运动定律 $\vec{F} = m\vec{a}$	转动定律 $M_z = I_z \beta$
动量定理 $\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$	角动量定理 $M_z = \dfrac{d(I_z \omega)}{dt}$
动量守恒 $\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.}$	角动量守恒 $\sum I_z \omega = \text{const.}$
动能定理 $W_{外} + W_{内} = \Delta E_k$	动能定理 $W_{外} = \Delta E_k$
机械能守恒 $E_k + E_p = \text{const.}$	机械能守恒 $E_k + E_p = \text{const.}$

例题7: 均质杆的质量为m，长为l,一端为光滑的支点。最初处于水平位置，释放后杆向下摆动，如图所示。

（1）求杆在图示的竖直位置时，其下端点的线速度v;

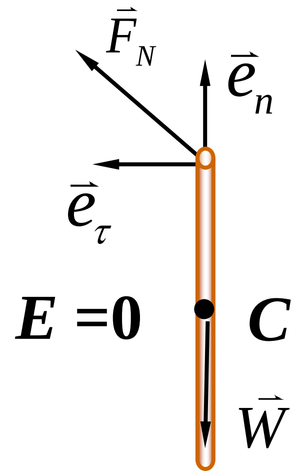
（2）求杆在图示的竖直位置时，杆对支点的作用力。



解: (1)由机械能守恒得

$$mgz_c + \frac{1}{2}I\omega^2 = 0$$

$$z_c = -\frac{1}{2}l\,,\quad I = \frac{1}{3}ml^2$$



联立解得 $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}\,,\quad v = \omega l = \sqrt{3gl}$

(2)根据质心运动定理 $\vec{F}_{\mathrm{N}} + \vec{W} = m\vec{a}_c$

分量式

$$\begin{cases} F_{Nn} - mg = m\omega^2 r_c \\ F_{N\tau} = ma_{c\tau} \end{cases}$$

杆处于铅直位置时不受力矩作用，由转动定理，角加速度为零, 所以

$$a_{c\tau} = \beta r_c = 0 \;\Rightarrow F_{N\tau} = 0$$

另外，杆子的质心在它的中点

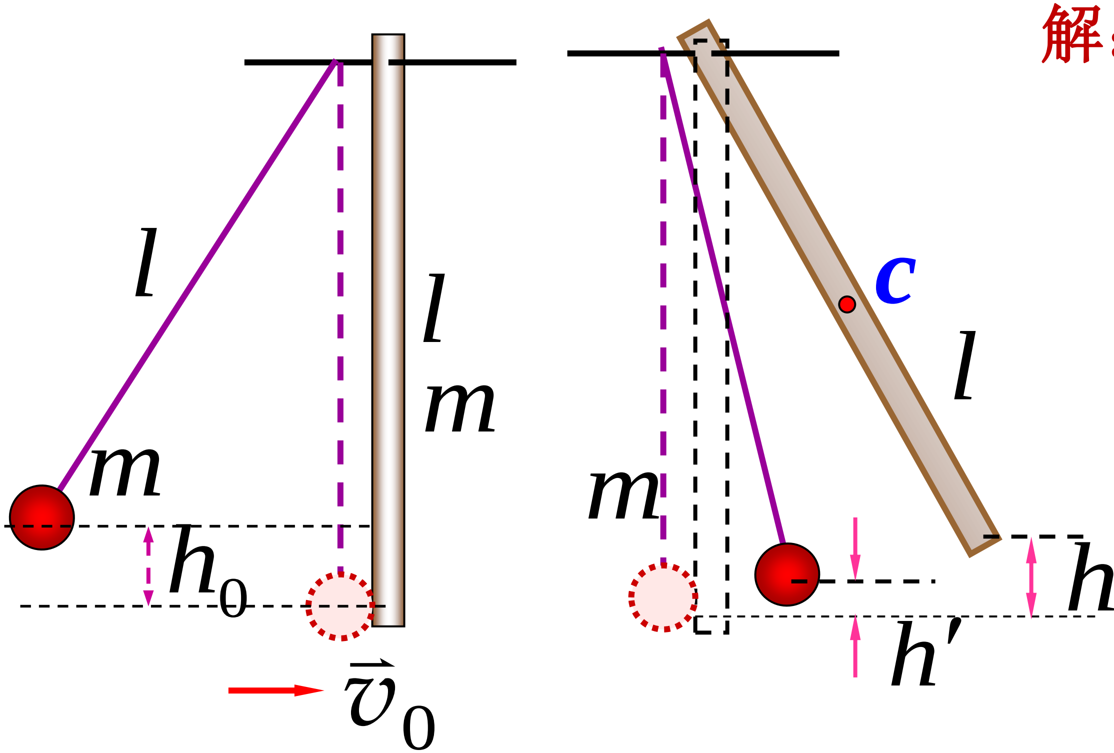
$$r_c = \frac{1}{2} l$$

所以

$$F_N = F_{Nn} = mg + m\omega^2 r_c = mg + m\frac{3g}{l}\frac{l}{2} = \frac{5}{2}mg$$ 方向向上。

【思考题】杆子在任意位置时的角速度、角加速度以及对支点处的作用力。

例题8： 把单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点，杆与单摆的摆锤质量均为 m 。开始时直杆自然下垂，将单摆摆锤拉到高度 h_0，令它自静止状态下摆，在垂直位置和直杆作弹性碰撞。求 碰后直杆下端达到的高度 h 。

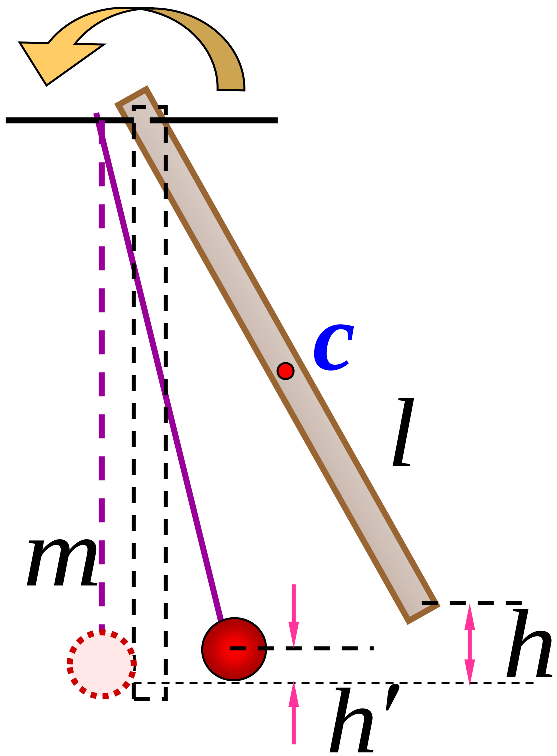


解： 此问题分为三个阶段

1） 单摆自由下摆（机械能守恒），与杆碰前速度

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$



2）摆与杆弹性碰撞（摆，杆）

角动量守恒 $$mlv_0 = I\omega + mlv$$

机械能守恒 $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

解得 $$v = \frac{1}{2}v_0, \qquad \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

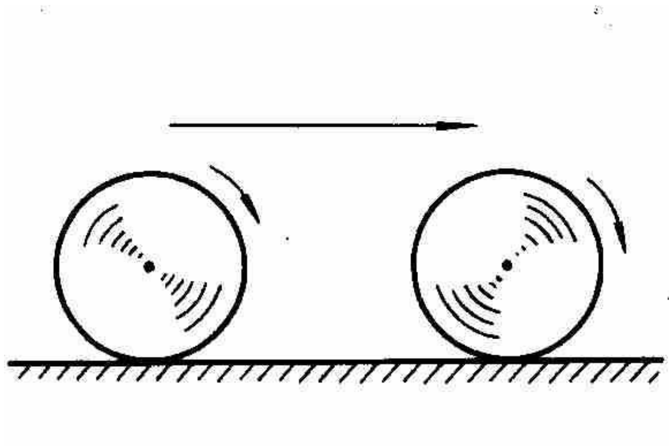
3）碰后杆上摆，机械能守恒（杆，地球）

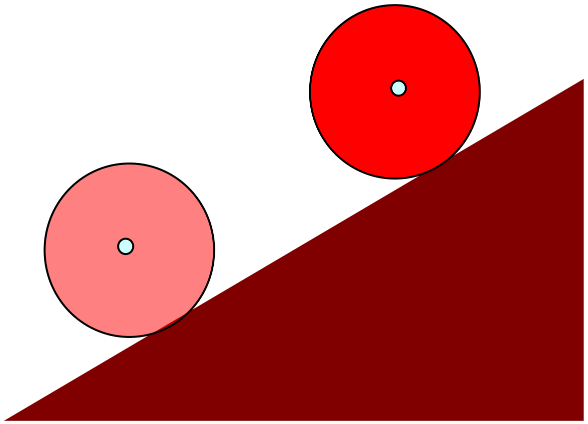
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mgh_c$$

$$h_c = \frac{I\omega^2}{2mg} = \frac{3}{4}h_0 \qquad \therefore h = 2h_c = \frac{3}{2}h_0$$

§8.4 平面平行运动

刚体作平面平行运动时，各点始终和某一固定平面保持一定的距离，或者说刚体中各点都平行于某一固定平面而运动。





1.刚体的平面运动特点：

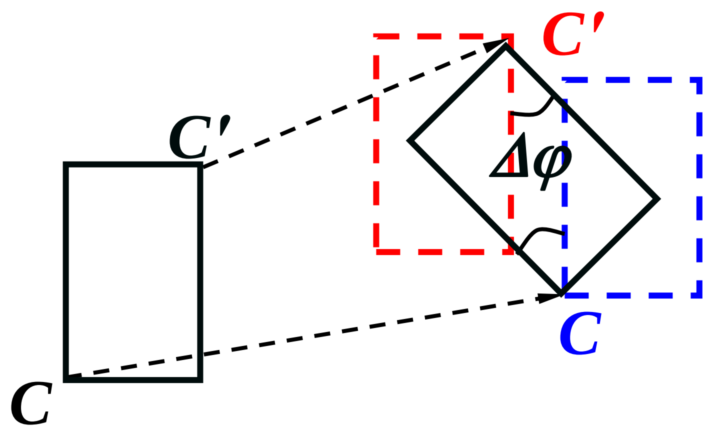
①每一质元轨迹都是一条平面曲线；

②刚体内垂直于固定平面的直线上的各点，运动状况都相同；

③可用与固定平面平行的平面在刚体内截出一平面图形来代表刚体。

平面平行运动可视为以下两种基本运动的叠加：

- 随基点*C*（可任选）的平动
- 绕基点*C*与固定平面垂直的定轴转动

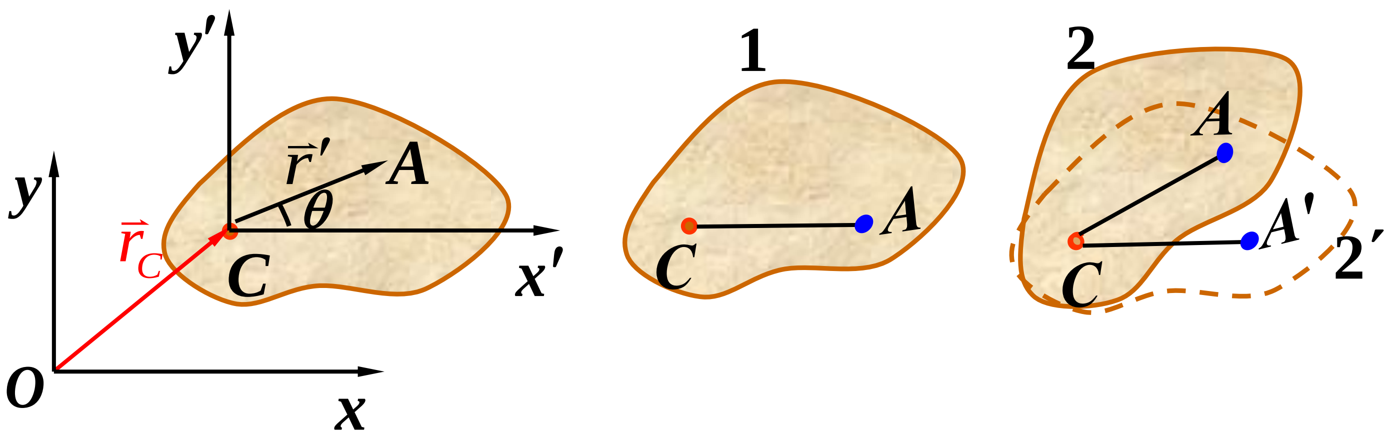


平面平行运动刚体的自由度： $n=2+1=3$

注意：基点（*C*和*C'*）选取不同，平动不同，与基点的选取有关；但是转动相同，与基点的选取无关。

2. 平面平行运动的运动方程

建立坐标系*Oxyz*，使*Oxy*坐标平面与固定平面平行。在平面图形上任取一点*C*，称为**基点**，通常我们选择质心为基点，以基点*C*为坐标原点建立各坐标轴平行于*Oxyz*的平动坐标系$Cx'y'z'$



刚体平面运动 = *C*点平动 + 绕*C*点的定轴转动

$$\begin{cases} \vec{r}_C(t) = x_C(t)\vec{e}_x + y_C(t)\vec{e}_y \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

平面平行运动的运动方程

刚体上任意一点A点相对于Oxyz系的位置矢量

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}'$$

$\vec{r}'$ 是A点相对于C点的位矢，由平动参考系的速度合成率可得

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_C + \vec{v}'$$

刚体绕过基点的定轴转动角速度为 $\vec{\omega}$,所以有

$$\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}' \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

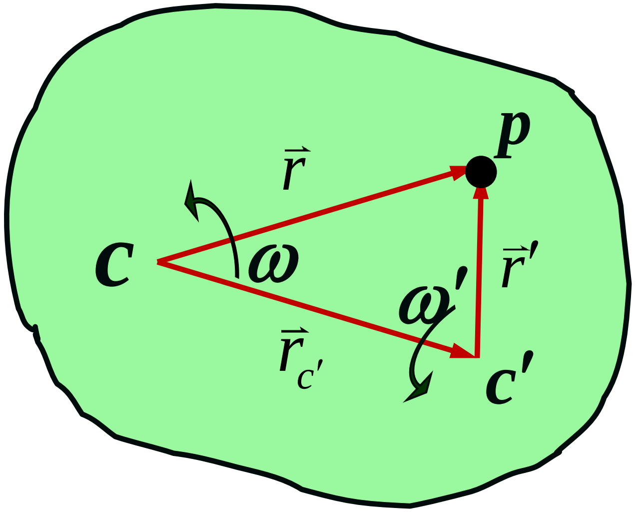
刚体上任意一点的加速度为：

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}' = \vec{a}_C + \vec{\beta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

4. 刚体角速度矢量的绝对性

一般来说，刚体的任何运动都可分解为基点的平动和绕该点的定点转动的合成。选择不同的基点，平动速度就不同；而转动角速度就与基点的选择无关。即刚体上的角速度矢量的大小和方向都相同，这即是刚体角速度的绝对性。

证明：如图, 选c为基点，则p点的速度



$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

若选c'为基点，则p点绕 c'点有一角速度ω'，则

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{c'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$$

注意到 $\vec{v}_{c'} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{c'}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_{c'} + \vec{r}'$

代入前一式有 $\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}') + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$

$$\vec{\omega}' \times \vec{r}' - \vec{\omega} \times \vec{r}' = 0 \Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

故刚体上角速度矢量的大小和方向都相同，与基点无关。

5. 刚体平面平行运动的基本动力学方程

刚体平面平行运动 = C点平动 + 绕C点的定轴转动

●质心的运动

利用质心运动定理，可求得质心的运动规律

$$\vec{F}_{ex} = m\vec{a}_c \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_c = F_{ex,x} \\ m\ddot{y}_c = F_{ex,y} \end{cases}$$

●刚体绕质心的转动

选质心坐标系 $Cx'y'z'$,设z'为过质心而垂直于固定平面的轴， 在质心系中，角动量定理的形式和惯性系中相同

$$M'_z = \frac{dL'_z}{dt} = \frac{d(I_{cz}\omega)}{dt} = I_{cz}\beta \Rightarrow M'_z = I_{cz}\beta$$

平面平行运动有3个自由度，利用上述三个方程完全描述运动，称为刚体平面平行运动的基本动力学方程。

6. 刚体平面运动的动能和功能原理

由质点系动能的柯尼希定理知，刚体平面平行运动中动能可以表为质心的平动动能与绕质心的转动动能之和，即

$$E_k = \frac{1}{2} m\vec{v}_C^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m\vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} I_{cz}\omega^2$$

由质心运动定理

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}_{ex} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_c^2(t_2) - \frac{1}{2}mv_c^2(t_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{ex}\cdot d\vec{r}_c$$

由质心系角动量定理

$$I_{cz}\frac{d\omega}{dt} = M_z' \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2(t_2) - \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2(t_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z' d\theta$$

因此，刚体平面平行运动的功能原理为

$$E_k(t_2) - E_k(t_1) = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{ex}\cdot d\vec{r}_c + \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z' d\theta$$

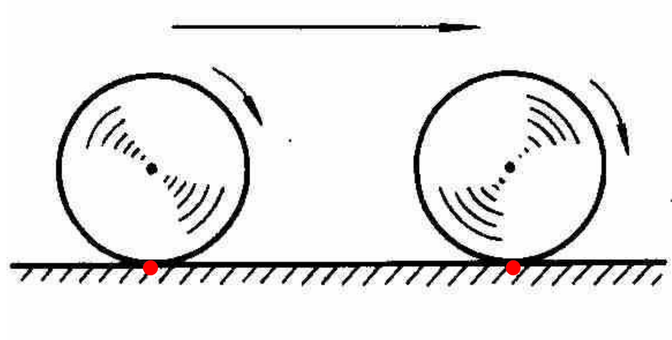
如果作用在刚体上的力仅为保守力，必然导致机械能守恒，即

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2 + E_p = \text{const}$$

7. 瞬时转动中心（瞬心）

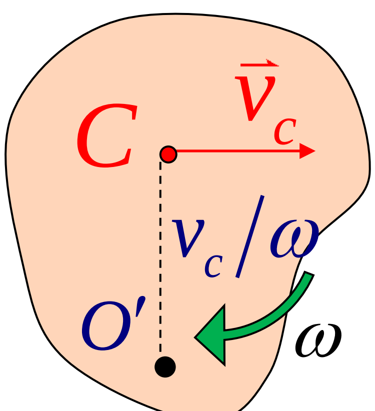
在任何瞬时，作平面平行运动的刚体（或它的延伸体）上必定存在一个特殊点O' ，其瞬时速度为零$v_{O'}=0$，该点被称作**瞬心**。过该点且垂直于固定平面的转轴称为**瞬时转轴**。瞬心的位矢 $\vec{R}_0$ 决定于方程

$$\boxed{\vec{v}_c+\vec{\omega}\times\vec{R}_0=0}$$

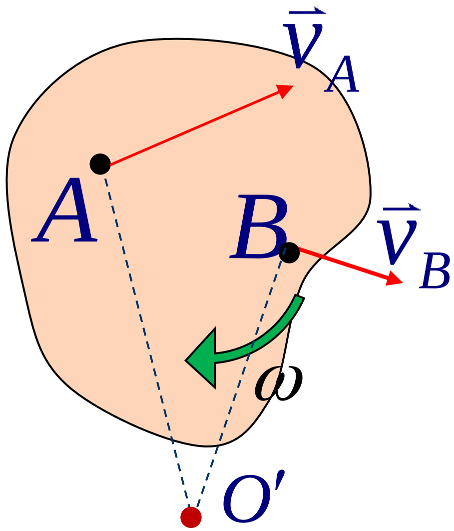


几点说明:

①若已知 $\vec{v}_c$ 和 $\vec{\omega}$ ，瞬心O在与$\vec{v}_c$ 垂直且相距 v_c/ω 的地方



② 在任一瞬时，截面上任一点的速度方向均与该点相对于瞬心的位置垂直。故只要过截面上任意两点引两条与速度方向垂直的直线，两直线的交点即为瞬心的位置。瞬心可以在刚体上，也可以在刚体外与刚体保持刚性连结的空间点上。



③在平面平行运动问题中，有时可利用瞬时转轴概念，将问题简化为单纯的定轴转动问题。

8. 滚动

有滑滚动——接触面之间有相对滑动的滚动(摩擦力不够大);

无滑滚动——接触面之间无相对滑动的滚动(摩擦力足够 大) 也称纯滚动。

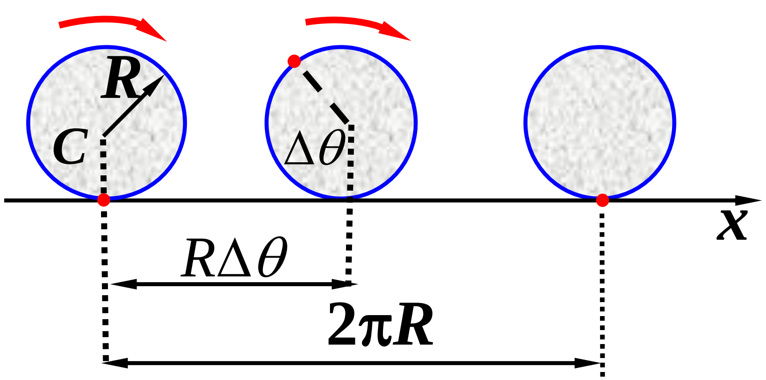
①纯滚动的运动学判据：$\boxed{x_c = R\theta \Rightarrow v_c = R\omega \Rightarrow a_c = R\beta}$

当柱体绕中心转动，其中心轴前进的距离

$$\Delta x_c = R\Delta\theta$$

对时间微分 $\quad v_c = R\omega$

再对时间微分 $\quad a_c = R\beta$

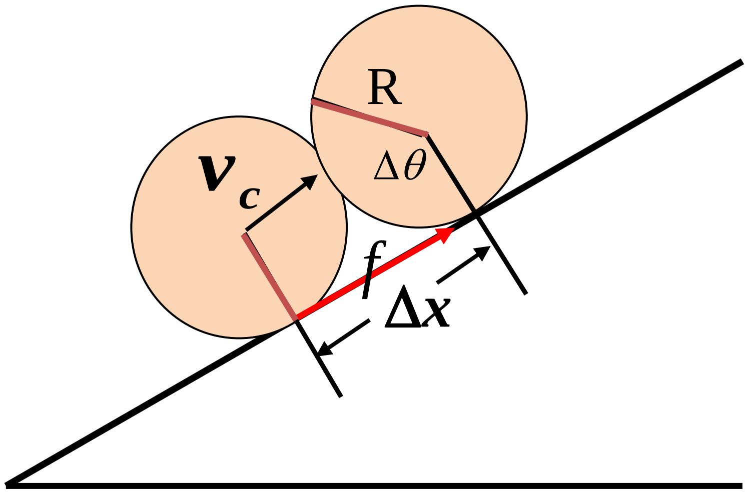


若忽略滚动物体和承滚面的形变，在有滑动滚动中，摩擦力为滑动摩擦力；在纯滚中，摩擦力为静摩擦力。

②静摩擦力不作功

如图，静摩擦力做功可以用刚体平面平行运动的功能原理写为

$$W=\int \vec{f}\cdot d\vec{r}_c+\int M_z'd\theta$$
$$=f\Delta x-fR\Delta\theta$$



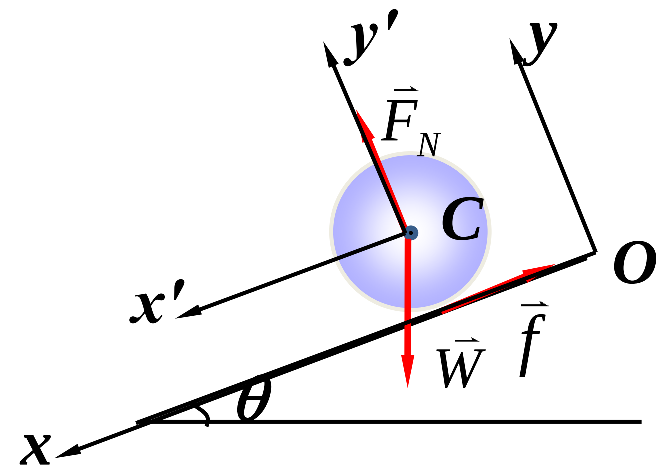
根据运动学判据， 有

$$\Delta x=R\Delta\theta$$

$$\therefore\ W=f\left(\Delta x-R\Delta\theta\right)=0$$

③**确定静摩擦力的方向**：静摩擦力的方向不易判断，必须视具体情况而定。**确定静摩擦力方向的方法是：**假定两刚性表面不存在摩擦，判定刚体与承滚面相接触的那一点将向何方运动，则作用在此刚体的静摩擦力方向必与其反向。

例题10： 如图，固定斜面倾角为θ，质量为 m 半径为 R 的均质圆柱体顺斜面向下作无滑滚动，求圆柱体质心的加速度a_c，斜面作用于柱体的摩擦力f 以及滚到斜面底部时质心的速率。



解： 根据质心运动定理

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} + \vec{W} + \vec{f} = m\vec{a}_c$$

y 轴上投影

$$mg\sin\theta - f = ma_c$$

对质心轴的转动定理：$fR = I\beta,\quad I = \dfrac{1}{2}mR^2$

无滑滚动：$a_c = R\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_c = \dfrac{mR^2}{I+mR^2}g\sin\theta = \dfrac{2}{3}g\sin\theta, \\ f = \dfrac{I}{I+mR^2}mg\sin\theta = \dfrac{1}{3}mg\sin\theta \end{cases}$$

滚到斜面底端时质心的速率?

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin\theta \Longrightarrow v_c = a_c t = \frac{2}{3} g \sin\theta t \Longrightarrow x = \frac{1}{2} a_c t^2 = \frac{1}{3} g \sin\theta t^2$$

当圆柱体滚到斜面底端时

$$x = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{3} g \sin\theta t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{3h}{g\sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{3h/g}}{\sin\theta}$$

所以此时的质心速率为

$$v_c = \frac{2}{3} g \sin\theta t = \frac{2}{3} g \sin\theta \frac{\sqrt{3h/g}}{\sin\theta} = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

解法二：因为是无滑滚动，静摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 不做功，只有重力 $\boldsymbol{W}$ 做功，所以机械能守恒：

$$mgh = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$$

无滑滚动条件：$\boldsymbol{v_c = \omega R}$

$$v_c = \sqrt{\frac{2mR^2 gh}{I + mR^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

讨论：

①根据 $a_c=\dfrac{mR^2}{I+mR^2}g\sin\theta$ ，转动惯量越小加速度越大

薄圆筒： $I=mR^2,\quad a_c=\dfrac{1}{2}g\sin\theta$

实心圆柱体：$I=\dfrac{1}{2}mR^2,\quad a_c=\dfrac{2}{3}g\sin\theta$

均匀球壳： $I=\dfrac{2}{3}mR^2,\quad a_c=\dfrac{3}{5}g\sin\theta$

实心球体： $I=\dfrac{2}{5}mR^2,\quad a_c=\dfrac{5}{7}g\sin\theta$

②纯滚动的动力学判据：$f\le\mu N$ $\quad f=\dfrac{I}{I+mR^2}mg\sin\theta,\quad N=mg\cos\theta$

$\Rightarrow\ \mu\ge\dfrac{\tan\theta}{1+mR^2/I},\qquad \tan\theta_c=\mu(1+mR^2/I)$

临界角

例11： 乒乓球在水平地面上向右运动，并逆时针转动，乒乓球与地面的摩擦因数为μ，试求乒乓球最后达到的稳定运动状态。

解： 规定向右为平动的正方向，逆时针方向为转动的正方向，开始时乒乓球与地面的接触点具有速度$v_0+\omega_0 R$，向右，乒乓球一边滑动一边转动，利用质心运动定理和绕质心的转动定律可得

$$\begin{cases} f=ma \\ fR=I\beta \\ f=-\mu mg \\ I=\dfrac{2}{3}mR^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\mu g \\ \beta=-\dfrac{3\mu g}{2R} \end{cases}$$

经时间t，右行速度和逆时针方向的角速度变成

$$v = v_0 - \mu g t$$

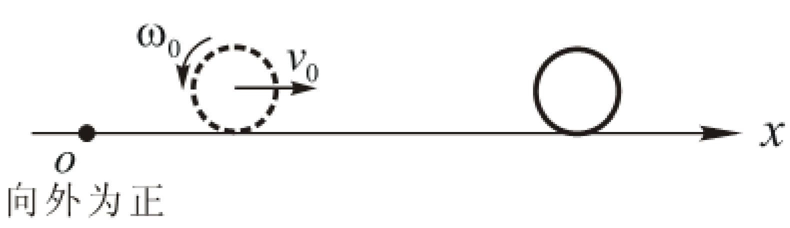
$$\omega = \omega_0 - \frac{3\mu g}{2R} t$$

分三种情况讨论

（1）经某段时间后，速度和角速度同时为零

$$\begin{cases} v = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{3}\omega_0 R$$

此后乒乓球处于静止状态



（2）经某段时间后，有

$$v > 0,\ \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 > \frac{2}{3}\omega_0 R$$

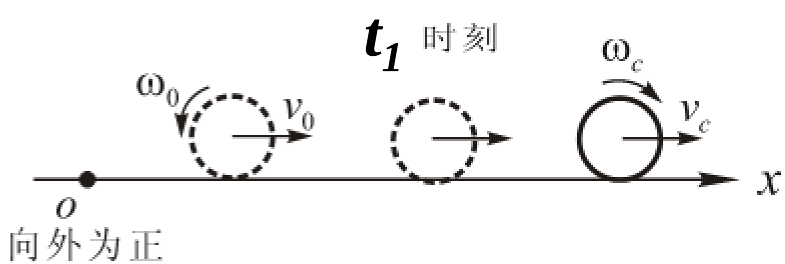
该阶段的末态为 $v_1 = v_0 - \frac{2}{3}\omega_0 R,\ \omega = 0$

此后，摩擦力仍朝左，右行速度减小，顺时针角速度增大

$$v_2 = v_1 - \mu g t', \qquad \omega_2 = \beta t = \frac{3\mu g}{2R} t'$$

当满足条件 $v_2 = \omega_2 R$ 时，摩擦力消失，小球达到右行纯滚状态

$$t' = \frac{2v_1}{5\mu g},\ \ v_2 = \frac{3}{5}\left(v_0 - \frac{2}{3}\omega_0 R\right), \quad \omega_2 = \frac{3}{5R}\left(v_0 - \frac{2}{3}\omega_0 R\right)$$



（3）经某段时间后，有

$$v=0,\ \omega>0 \quad \Rightarrow \quad v_0<\frac{2}{3}\omega_0 R$$

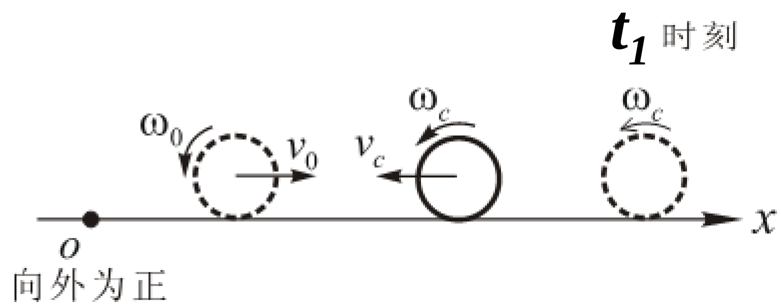
该阶段的末态为: $\omega_1=\omega_0-\dfrac{3v_0}{2R},\ v_1=0$

此后，摩擦力仍朝左，左行速度增大，逆时针角速度减小

$$v_2=\mu g t',\qquad \omega_2=\omega_1-\frac{3\mu g}{2R}t'$$

当满足条件$v_2=\omega_2 R$时，摩擦力消失，小球达到左行纯滚状态

$$t'=\frac{2\omega_1 R}{5\mu g},\ \ v_2=\frac{2}{5}\left(\omega_0 R-\frac{3}{2}v_0\right),\ \ \omega_2=\frac{2}{5R}\left(\omega_0 R-\frac{3}{2}v_0\right)$$



§ 10.5 刚体静力学

1. 刚体的平衡方程

刚体平衡的充要条件

无平动： $\sum_i \vec{F}_i = 0$ （质心C不平动）

无转动： $\sum_i \vec{M}_i = 0$ （绕质心C不转动）

●当两条件都满足时，外力对任何定点的力矩的矢量和也为零。

若对质心C，刚体平衡，则有

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_{iC} = \sum_i \vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i = 0$$

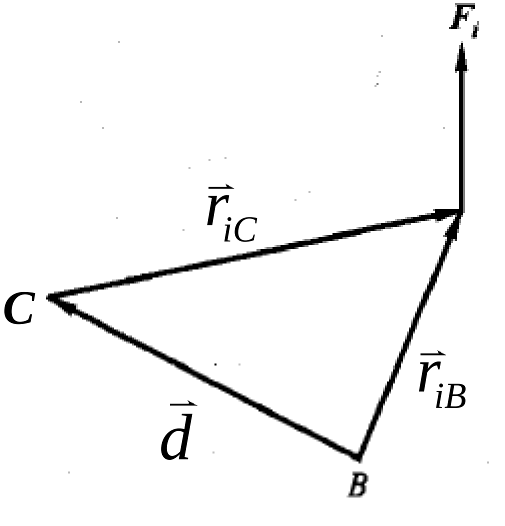
设质心C相对任一定点B的位矢为 $\vec{d}$，则

$$\vec{r}_{iB} = \vec{r}_{iC} + \vec{d}$$

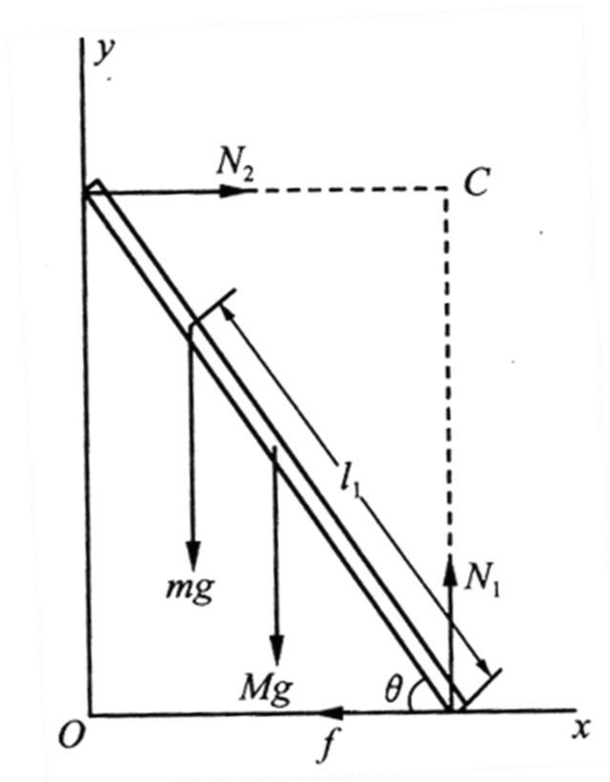
$$\sum_i \vec{M}_{iB} = \sum_i \vec{r}_{iB} \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_{iC} + \vec{d}) \times \vec{F}$$

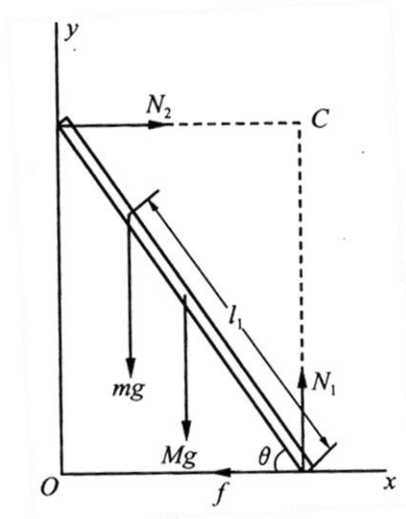
$$= \sum_i \vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i + \vec{d} \times \sum_i \vec{F}_i$$

$$= \sum_i \vec{M}_{iC} + \vec{d} \times \sum_i \vec{F}_i = 0$$



例13：长为$2L$, 质量为M的均匀梯子，上端靠在光滑的墙面上，梯子与地面的摩擦系数为μ，有一质量为m的人攀登到距下端L_1的地方，求梯子不滑动的条件。





解： 如图所示，建立二维的***xy***坐标系，则***x***、***y***方向的力平衡方程为：

$$\begin{cases} N_2 - f = 0 \\ N_1 - mg - Mg = 0 \end{cases}$$

力矩的参考点可以任意选择，为了简单，可选取途中***N₁***和***N₂***延长线的交点，于是力矩平衡方程为

$$2fL\sin\theta - MgL\cos\theta - mgL_1\cos\theta = 0$$

联立以上方程可解得

$$N_1 = (M+m)g, \qquad N_2 = f = \frac{(ML + mL_1)g}{2L}\cot\theta$$

梯子不滑动的条件是 $f < \mu N_1$ ，即

$$\frac{ML + mL_1}{2L}\cot\theta < \mu(M + m)$$

对于一定的倾角θ，人所能攀登的高度为

$$L_1 < \frac{2L\mu\left(M + m\right)}{m}\tan\theta - \frac{ML}{m}$$

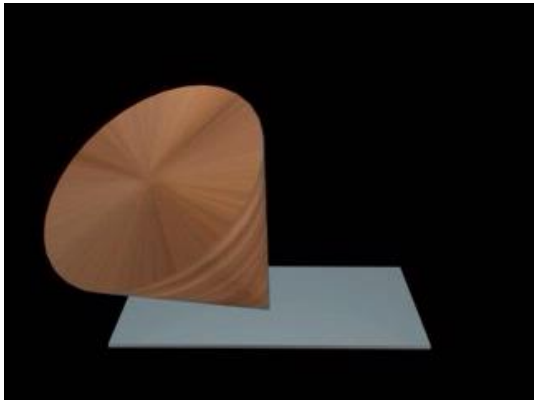
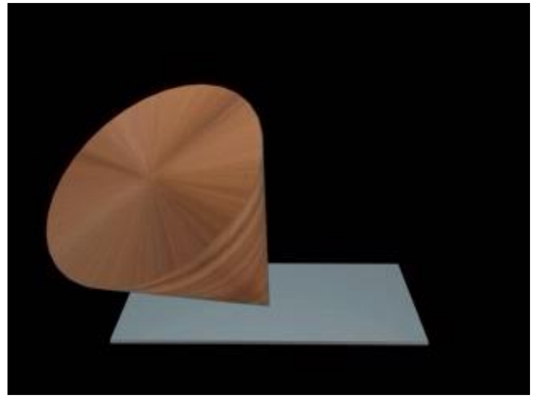
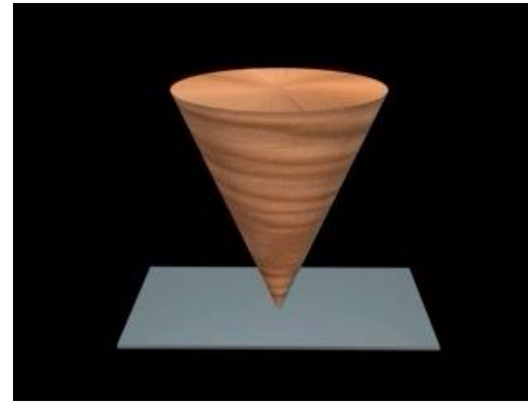
θ角越大，允许人攀登得越高；μ越大，允许人攀登得也越高。如果要求攀到一定的高度L_1，则要求梯子的倾角为

$$\theta > \arctan\left[\frac{ML + mL_1}{2L\mu\left(M + m\right)}\right]$$

L_1越小允许θ角越小， μ越大，允许θ角越小。

若梯子与墙面之间的摩擦不可忽略，则多出一个未知数，但是独立的平衡方程的个数没有增加，因而无法求出确定的解答，这类问题叫做静不定问题。

§8.6 刚体的定点运动

刚体定点转动的动力学方程一般很难求得解析解，只有对外力矩和刚体的形状做某些限制后才可能解析求解。到现在为止，我们只知道下面三种情况严格可解：

①欧拉—潘索情况
②拉格朗日—泊松情况
③C.B.柯凡律夫斯卡雅情况。

陀螺：绕对称轴高速旋转的刚体称为陀螺，或称回转仪

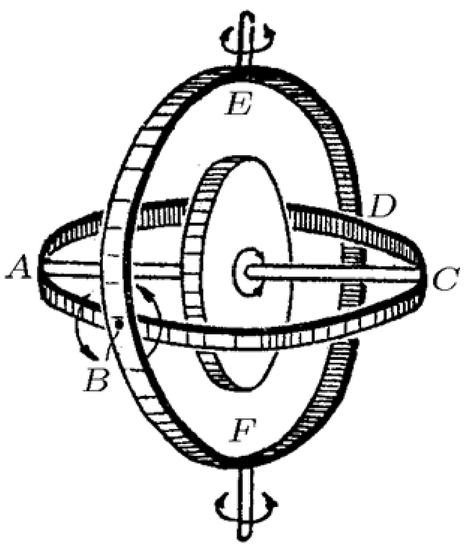
陀螺在运动过程中通常有一点保持固定，故属刚体的定点运动。利用角动量和角速度的矢量性质，可以解释陀螺的运动。

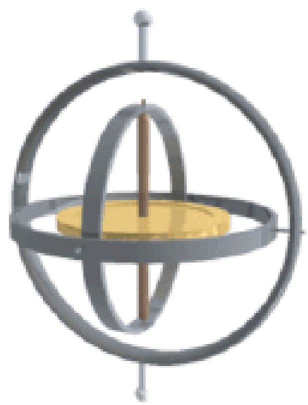
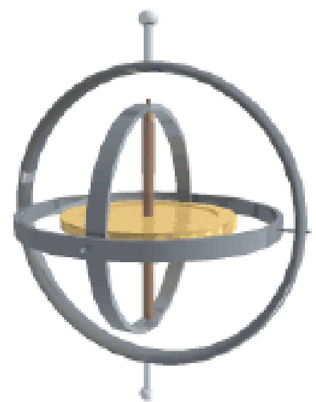
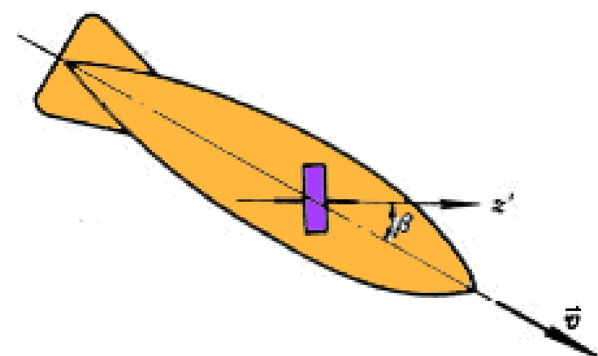
1. 自由陀螺

自由陀螺： $\vec{M}_C = 0$

由角动量定理可得 $\dfrac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C = 0$ $\vec{L}_O =$ 常矢量

当高速旋转着的陀螺不受外力作用时（自由陀螺），其角动量守恒，陀螺将保持其自转轴的方位和自转角速度不变。

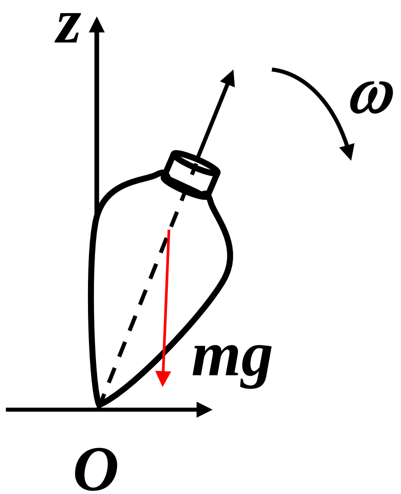


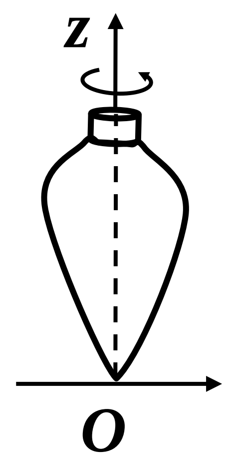
●应用:可用陀螺仪轴线作为标准，安装在导弹、飞机、坦克或舰船中，随时指出它们在空间的方位，以便进行自动调整。

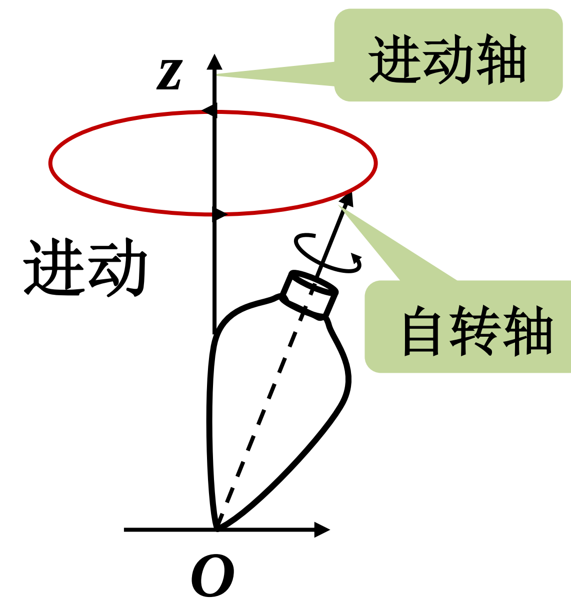
2. 陀螺的进动

若陀螺不在转动，且对称轴不在铅垂方向，则会向一个方向倾倒：



若陀螺高速自转，仍可在原转轴附近回旋，而不会继续倾倒

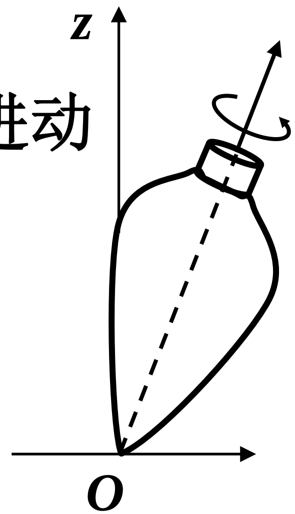


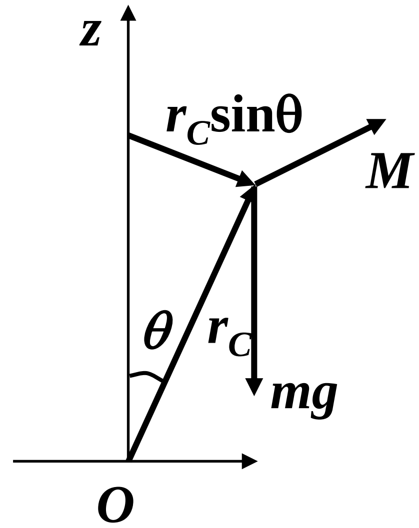


进动： 刚体绕自身对称轴高速旋转时，其自转轴绕另一轴的缓慢转动称为进动（又称旋进）。

说明陀螺运动时能产生一种与外力抗衡的力矩，这种力矩称为回转力矩。

●进动的解释





对固定点O，陀螺只受重力矩的作用，即

$$\vec{M}=\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{g})=\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{g}$$

$$=\frac{1}{m}(\sum_i m_i\vec{r}_i)\times m\vec{g}=\vec{r}_c\times m\vec{g}$$

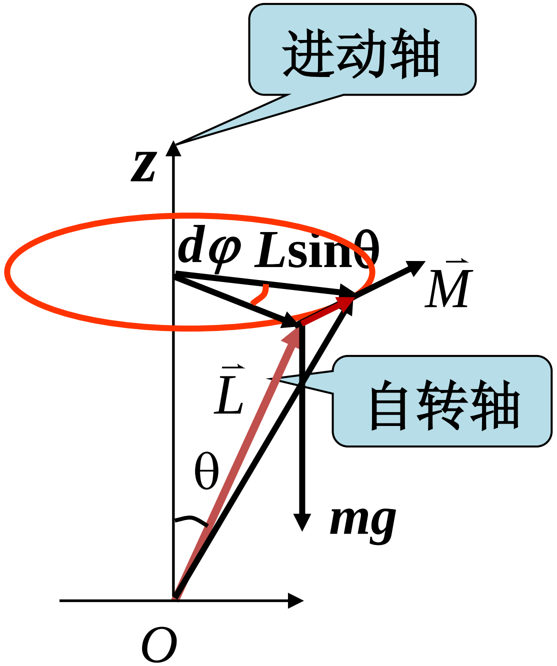
重力矩 $\vec{M}$ 既垂直于重力又垂直于对称轴。

设陀螺绕其对称轴旋转的转动惯量为I, 则陀螺对O 点的角动量为：

$$\vec{L}=I\vec{\omega}$$

根据角动量定理

$$d\vec{L} = \vec{M}dt, \qquad \vec{M} \perp \vec{L}$$



$\vec{L}$ 的顶端绕一水平圆周运动。陀螺自转轴绕竖直轴的转动即为进动。

$$dL = L\sin\theta d\varphi$$

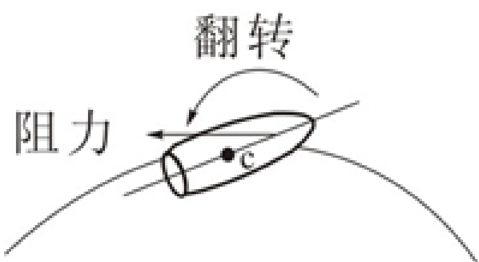
$$d\varphi = \frac{dL}{L\sin\theta} = \frac{Mdt}{L\sin\theta} = \frac{r_c mg\sin\theta dt}{L\sin\theta} = \frac{r_c mg}{L}dt$$

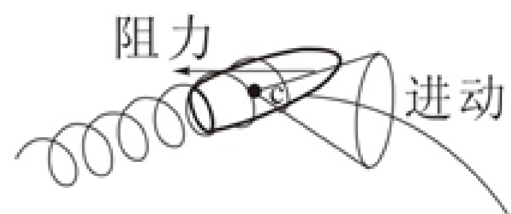
因此，陀螺的进动角速度为

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr_c}{L} = \frac{mgr_c}{I\omega}$$

由此可见，陀螺的进动角速度随着自转角速度 ω 的增大而减少，与角度 θ 无关。

● 应用：炮弹上的来复线



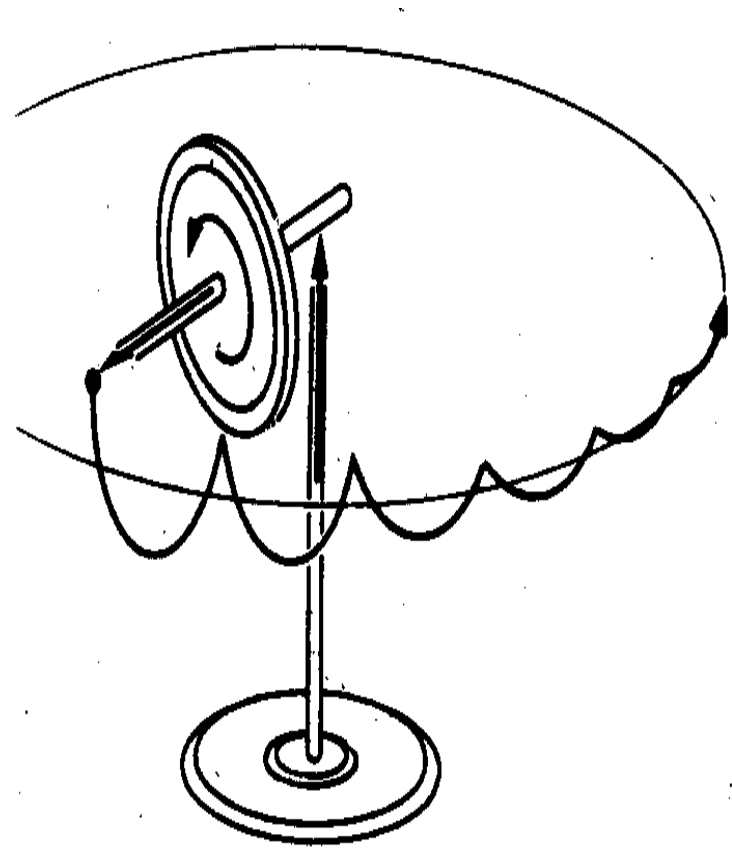


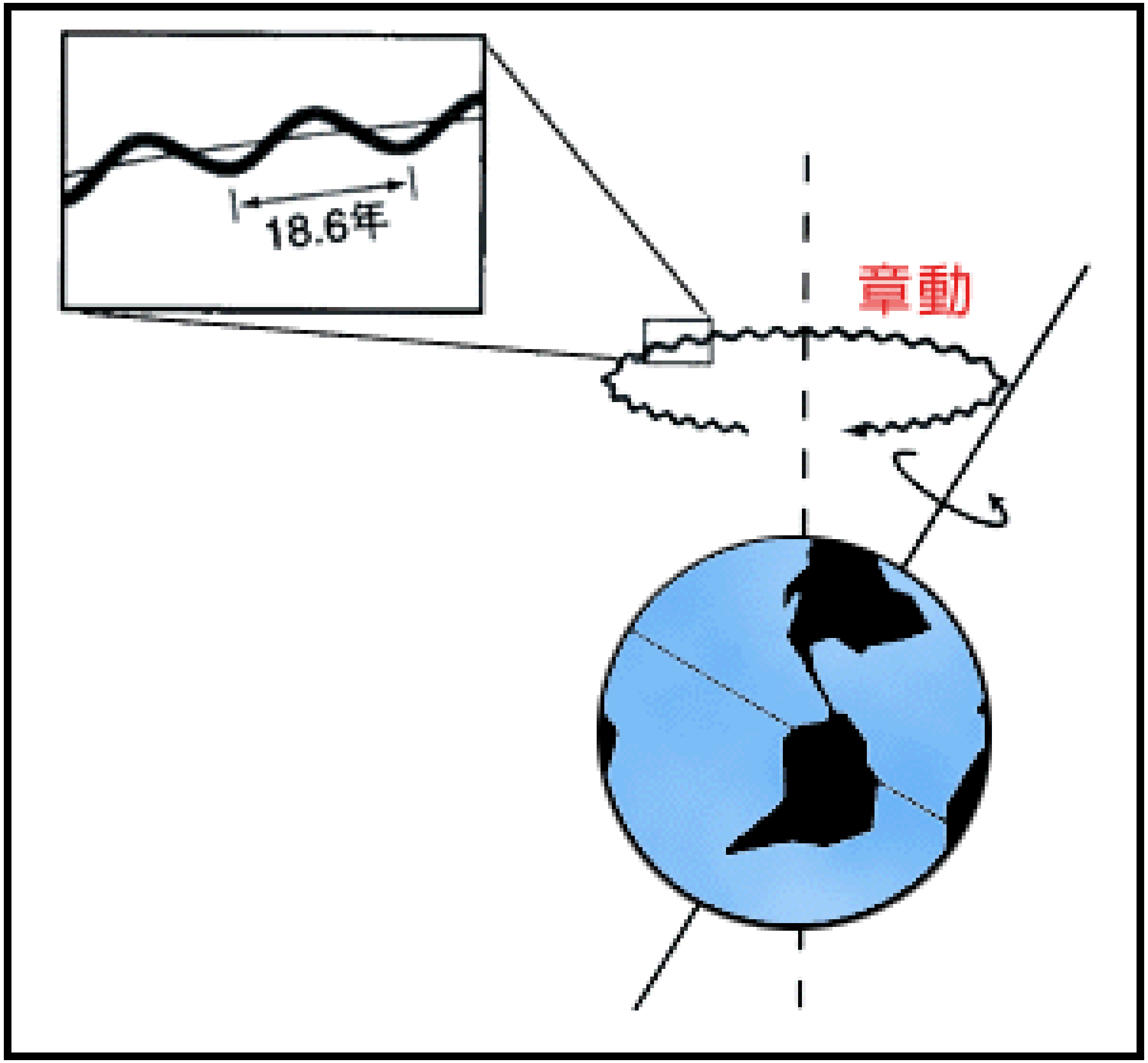
国产94式105毫米坦克炮的膛线

3. 刚体的章动

章动：刚体在进动的过程中还伴有上，下的周期运动，称为章动。

章动，拉丁语中是“点头”的意思。地球除进动外，也有章动。地轴的章动是英国天文学家布拉得雷（**J.Bradley**）于1748年分析了20年的观测资料后发现的。地球章动的周期为18.6年，近似地说，就是19年。在我国古代历法中把19年称为一“章”，这便是中译名“章动”的来源。




18.6年
章動