线性代数期中考试卷子

2023 年 5 月 21 日

中国科学技术大学数学科学学院

2022 ~ 2023 学年第 2 学期期中考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称　线性代数 (B1)　课程编号　MATH1009

考试时间　2023 年 5 月 20 日　考试形式　闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

线　　订　　装

一、【30 分】填空题.

(1) 排列 $(3,6,5,4,1,2)$ 的逆序数是 ________.

(2) 齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4+2x_5=0 \\ x_1-x_3+4x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的维数是 ________.

(3) 方程 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{X}=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 而 $\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵, 那么 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=$ ________, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^*)=$ ________.

(5) 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_3$ 都是可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

(6) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 的相抵标准形是 ________.

2023/05/20 18:49

二、【20 分】判断下面的说法是否正确, 并简要说明理由或者举出反例.

(1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 任何 4 个向量都线性相关.

(2) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$ 线性相关, 那么其中的每个向量都可以由其余的向量线性表示.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 4 的矩阵, 那么一定存在秩为 2 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为二阶方阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}$, 那么 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

2023/05/20 18:49

三、【12 分】当 a 为何值时，如下的线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a. \end{cases}$$

四、【8 分】计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 - b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 - b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 - b \end{vmatrix}$.

五、【10 分】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix}$ 为 3 阶方阵, 其中 $a \neq -1$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

2023/05/20 18:49

六、【12 分】设 $n \geq 2$ 为正整数, 而 $a_1, \ldots, a_n$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 内的 n 个互异的数. 用 V 表示次数小于 n 的全体复系数多项式构成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 对于 $j = 1, \ldots, n$, 令 $f_j(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdots (x - a_n)$.

(1) 证明: $f_1, \ldots, f_n$ 构成 V 的一组基.

(2) 对于 $j = 1, \ldots, n$, 设 $a_j = e^{i2\pi j/n} = \cos(2\pi j/n) + i\sin(2\pi j/n)$, 即 $a_1, \ldots, a_n$ 为全体 n 次单位根. 求从基 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 到 $f_1, \ldots, f_n$ 的过渡矩阵.

(3) 在 (2) 的条件下, 求多项式 $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ 在 $f_1, \ldots, f_n$ 下的坐标.

线

订

装

2023/05/20 18:49

七、【8 分】

(1) 若 $C \in F^{m\times n}$ 是一个行满秩的矩阵. 证明一定存在矩阵 $D \in F^{n\times m}$ 使得 $CD = I_m$ 为单位阵.

(2) 若 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$, 证明存在 X 使得 $ABX = A$. (提示: 利用 A 的相抵标准形)