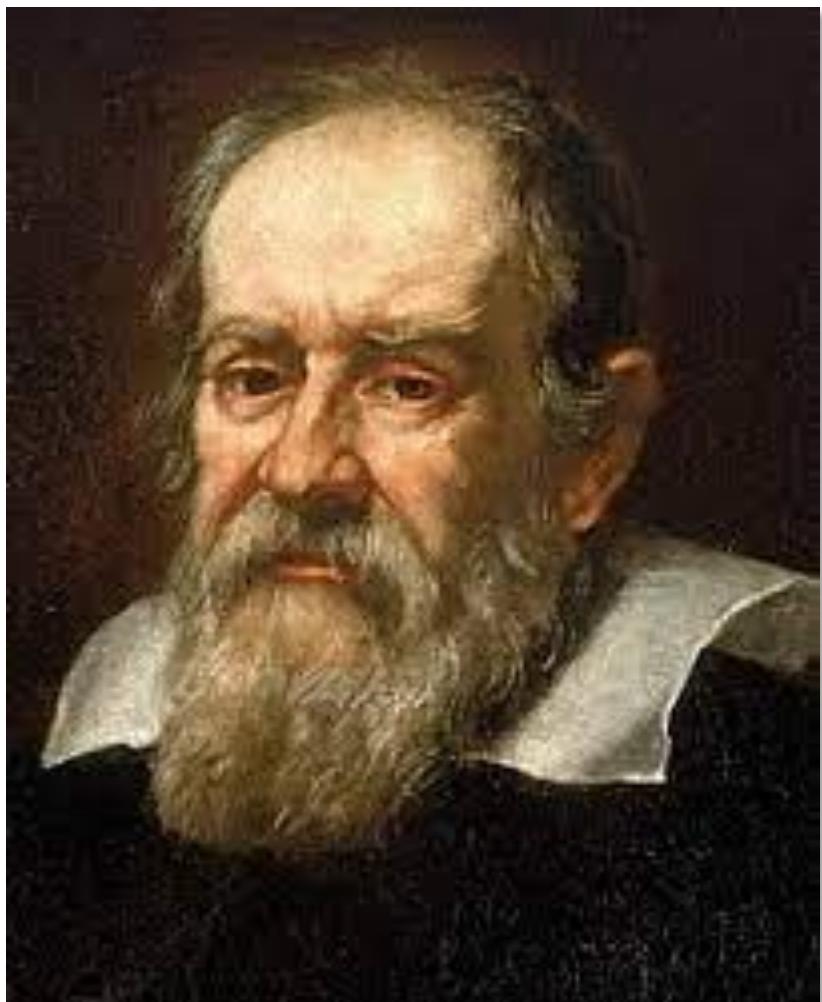
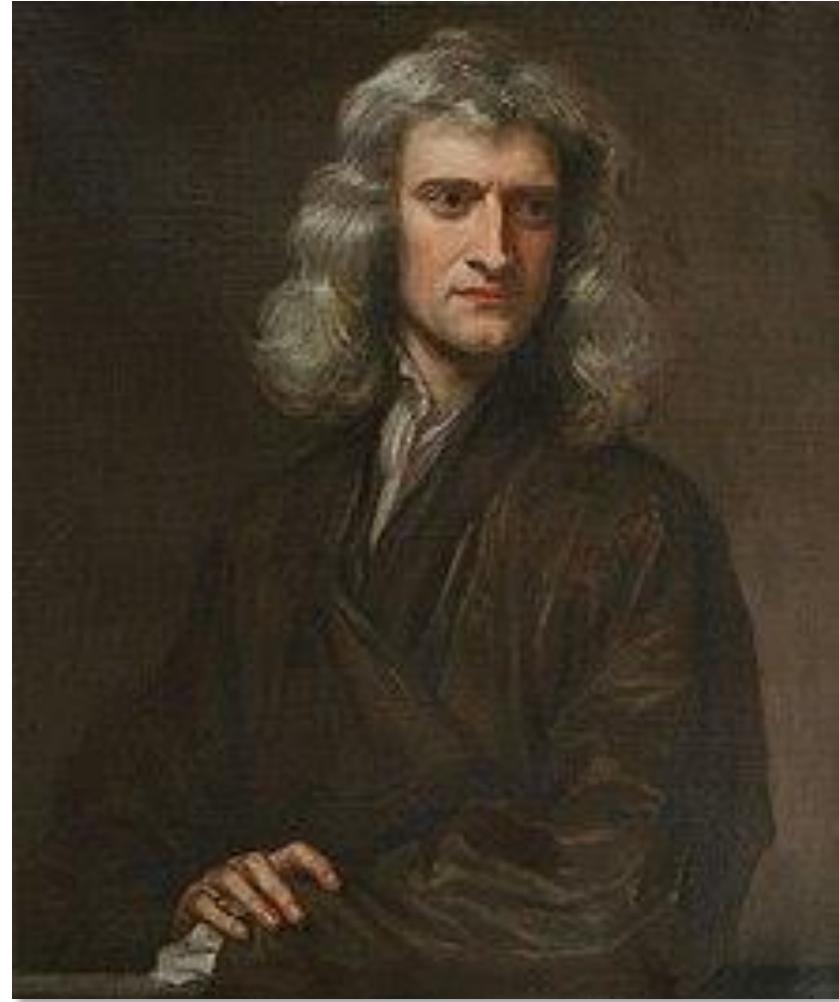


# 第二章 质点动力学



**Galileo Galilei (1564-1642)**



**Isaac Newton (1642-1727)**

PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA.

---

Auctore J S. NEWTON, Tri. Coll. Cantab. Soc. Matheficos  
Professorum Lucasianum, & Societatis Regalis sodali.

---

IMPRIMATUR.  
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.  
July 5. 1686.

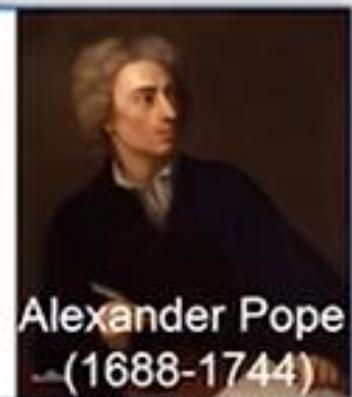
---

LONDINI,

Julia Societas Regie ac Typis Josephi Streater. Proflat apud  
phores Bibliopolie. Anno MDCLXXXVII.

**"Nature and nature's laws lay hid in the night  
God said "Let Newton be!"—and all was light."**

---Pope



Alexander Pope  
(1688-1744)

## Isaac Newton

1642年12月25日，艾萨克·牛顿出生于英格兰林肯郡乡下的一个小村落。（被记为1642年圣诞节）

1661年进入了剑桥大学的三一学院。  
1665年发现了广义二项式定理。同年获得学位。

1669年被授予卢卡斯数学教授席位。

1703年成为皇家学会会长（长达24年）

1705年牛顿被安妮女王封为爵士。

1727年3月31日去世。



## § 2.1 牛顿定律与惯性参考系

### 1、牛顿第一定律（惯性定律）

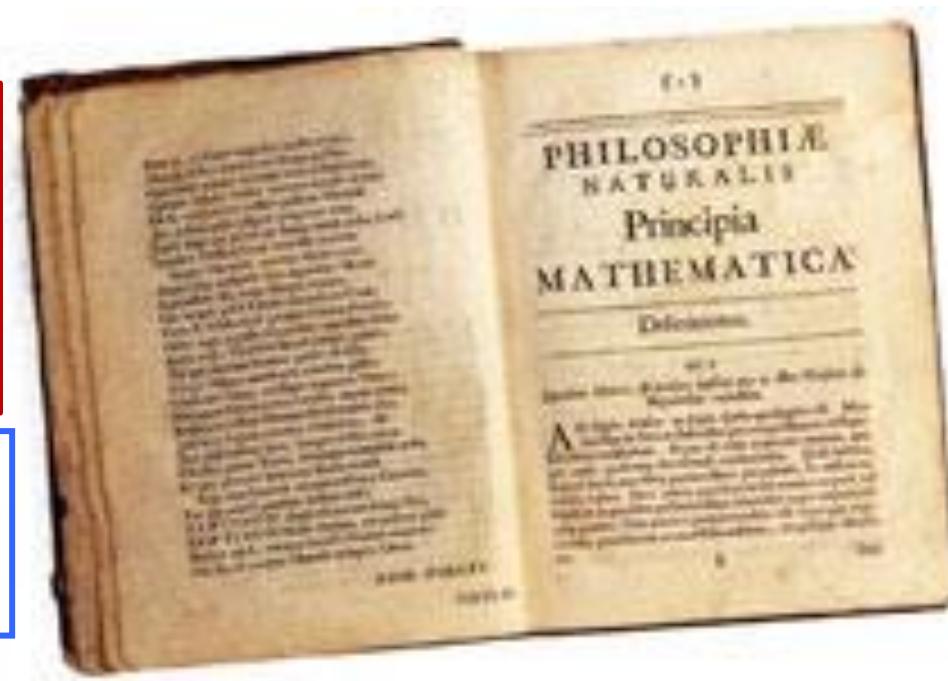
任何物体都保持静止状态或匀速直线运动状态，直到其它物体的作用迫使它改变这种状态为止。

现代语言：自由粒子永远保持静止或匀速直线运动状态。

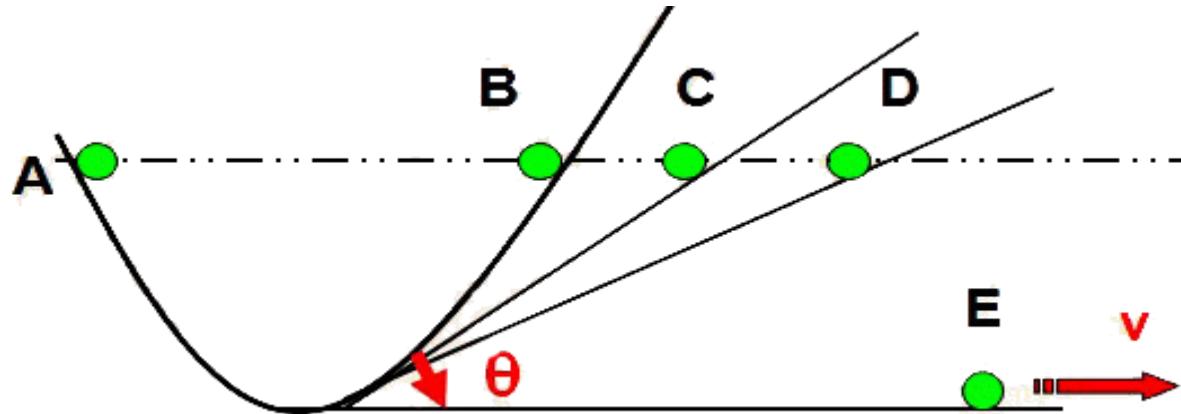
几点说明：

(1) 第一定律是大量观察与实验事实的抽象与概括，不能用实验直接验证。不可能不受其他物体作用。

该定律最初是伽利略（近代科学之父）提出的，他设计了一个理想实验。



## 伽利略斜面对接理想实验



当球沿斜面的顶端向下滚后，即沿对面的斜面向上滚，达到与原来差不多的高度。他推论：

- ①若无摩擦力，减少后一斜面的斜率，球仍达到同一高度，但这时球要滚得远些；
- ②斜率愈小，球滚得愈远；
- ③若将后一斜面放平，球要永远滚下去。

(2) 第一定律定性提出了“**力**”和“**惯性**”两个重要概念

- 任何物体都有惯性即**保持原有状态不变**的特性（一种基本属性）；
- 力是一个物体对另一物体的相互作用。力是**改变物体运动状态**的原因，而**不是维持运动状态**的原因。

### (3) 第一定律定义了一类重要的参考系——**惯性系**

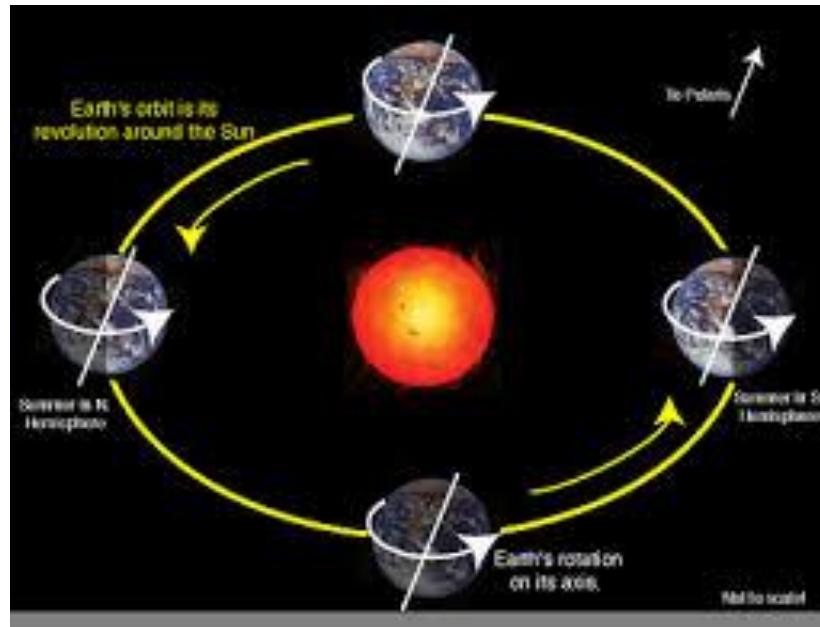
“运动”描述需要参照系，牛顿第一定律并不适用于任何参考系。

**惯性系：**牛顿第一定律成立的参考系为惯性参考系。

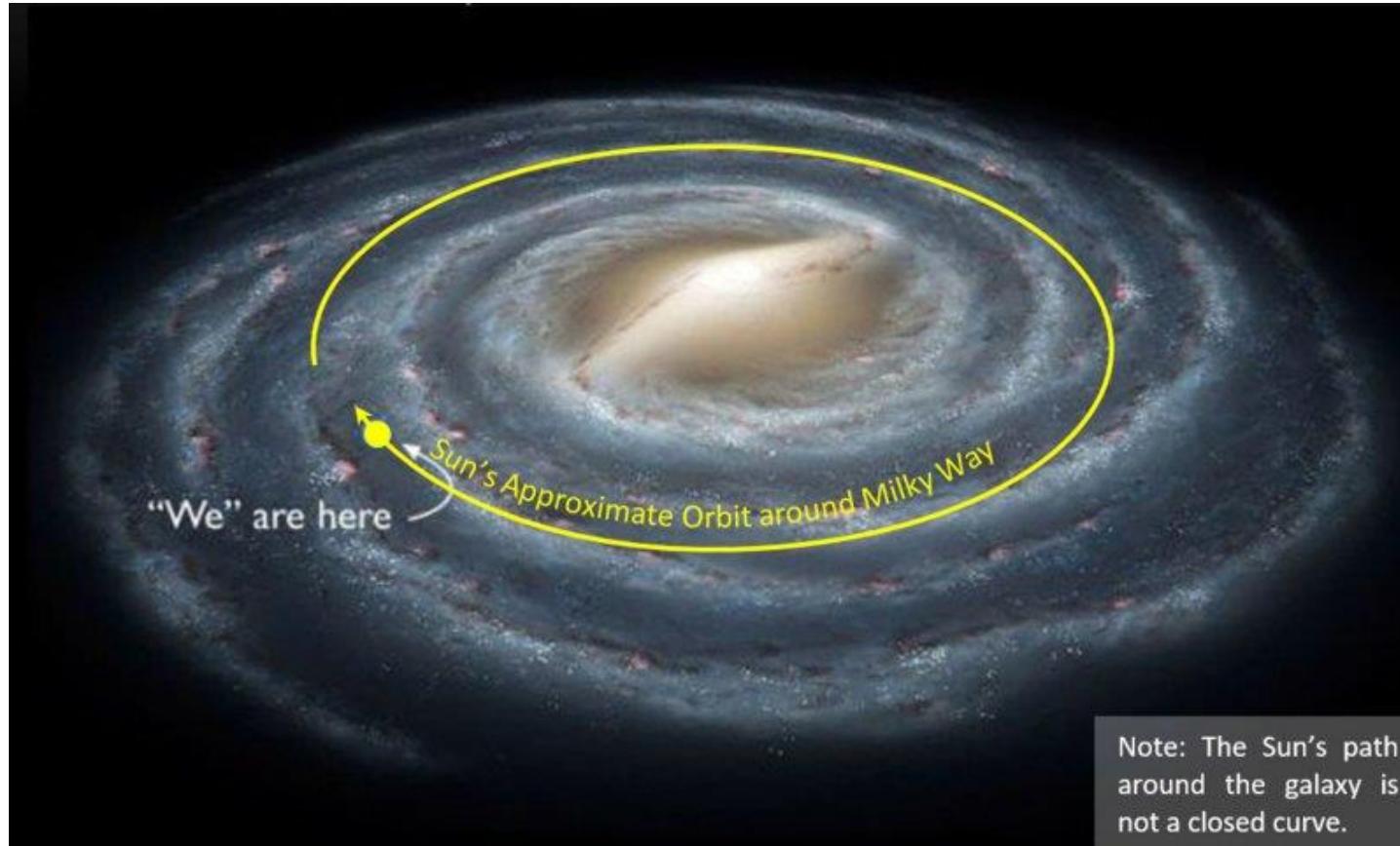
存在一惯性参考系，则可建立一系列相对它匀速直线运动的其他惯性系

➤ 常用的惯性参考系：

①**地球系：**以地球为中心建立起的参考系。地球不是一个严格的惯性系，地球绕太阳公转的加速度 $5.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ ，自转的加速度为 $3.4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ 。



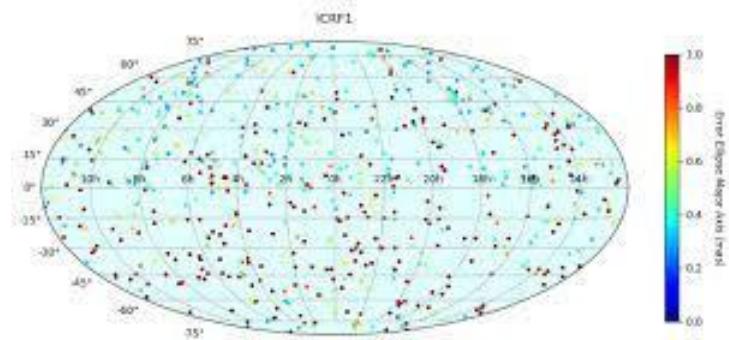
②太阳系：在以太阳中心为坐标原点、以指向任一恒星的直线为坐标轴建立的坐标系。太阳与银河系的其他星体一起绕银河中心旋转的加速度约为 $3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ 。



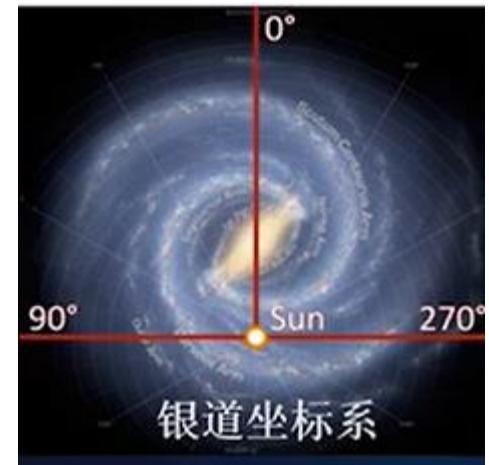
**③基准参考系(FK<sub>4</sub>系):**是以相对于选定的1535颗恒星的平均静止位形作为基准的参考系。

1961年国际天文学联合会决议，目前采用1963年发表的第四基本星系表(FK4)的星位和自行的基本系统作为实际使用的惯性系。

该参考系基于纽康姆理论中的黄道、岁差和伍德拉章动来定义，包括1535颗均匀分布在天空中的星等亮于7.5等的恒星。1989年改成FK5系。

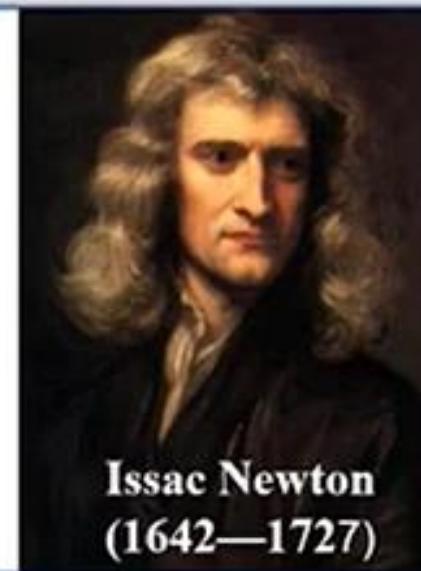


- ✓ ICRS系（国际天球参考系），由银河外射电源构成的无旋转的准惯性系，由ICRS分析全球观察所得到的一组射电源的坐标来实现。原点是太阳系的质心，轴的指向在太空中是固定的。



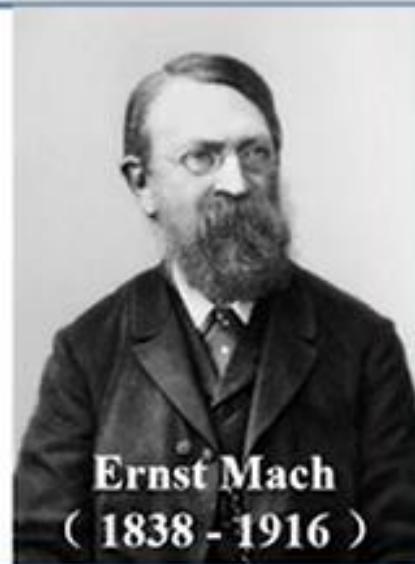
## (4) 惯性的起源

牛顿认为存在着绝对空间和绝对运动，物体的惯性是它自身的属性；如果撤掉了一个物体周围的所有其他物质，那么这个物体将由于它自身的惯性作惯性运动。



Issac Newton  
(1642—1727)

惯性系是相对于整个宇宙平均加速度为零的参考系。



Ernst Mach  
( 1838 - 1916 )

马赫认为物体的惯性不是物体自身的属性，而是宇宙中其他物质作用的结果。

## (5) 第一定律具有公理性

### 逻辑循环

✓ 当力 $F=0$ 时，速度 $v=$ 常数

如何知道 $F=0$ ？

只要知道 $v=$ 常数，则 $F=0$ 。

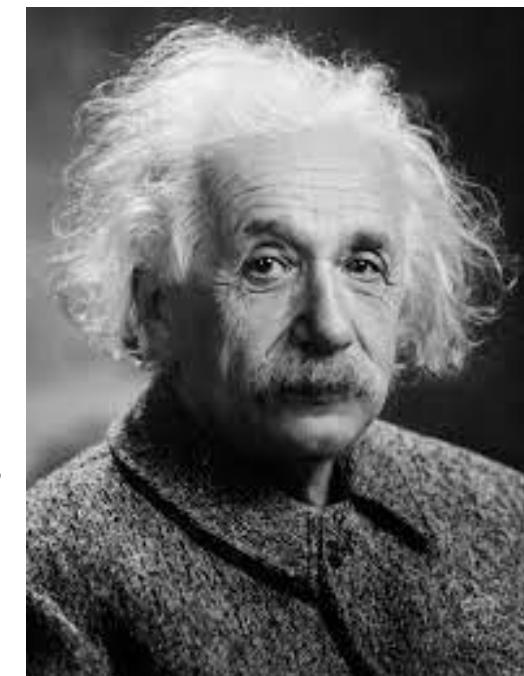
✓ 什么是惯性系？ $v=$ 常数的参考系

如何知道 $v=$ 常数？

只要知道 $F=0$ ，则 $v=$ 常数。

正如爱因斯坦所说：“惯性定律的弱点在于它含有这样一种循环论证：如果有一物体离开别的物体都足够远，那么它运动起来就没有加速度；而只是由于它运动起来没有加速度这一事实，我们才知道它离开别的物体是足够远的。”

➤ 虽然由于“循环论证”使得第一定律不可能直接用实验来证明。但是，以它为基础而得出的所有推论和结论都被实验证实从而证明其正确性。



## 2、牛顿第二定律

牛顿表述：在受到外力作用时，物体所获得的加速度的大小与外力成正比，与物体的质量成反比；加速度的方向与外力的矢量和的方向相同。

确切的表述应为：**动量的变化率与（动）力成正比。**

即

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

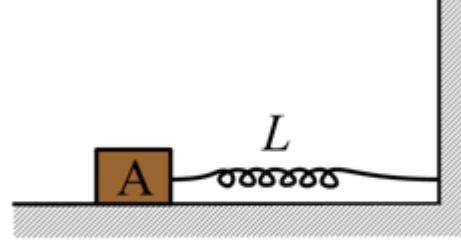
若物体的质量不随时间变化：

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

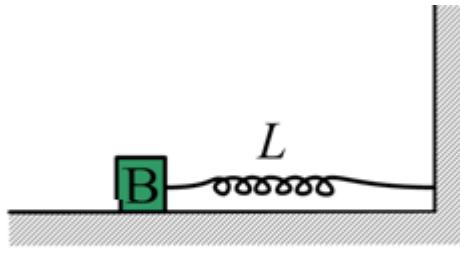
- ✓ 牛顿第二定律只在惯性系中成立。

●牛顿第二定律既是动力学的基本规律；同时又可作为质量和力的定义，据此可对质量和力进行测量，并且有实际理论预言能力和可验证性。

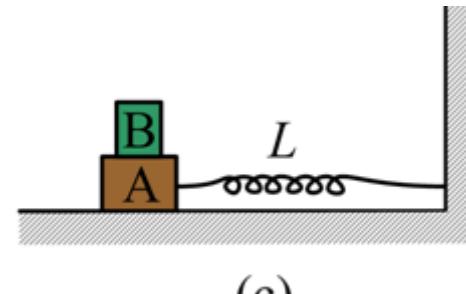
在一足够光滑的固定桌面上，我们做三个实验：



(a)



(b)



(c)

- ① 物体A与一弹簧相连，把弹簧拉长到 $L$ ，然后释放物体A，在弹簧的牵动下，A作加速运动，测量出开始时刻的加速度；
- ② 用同一弹簧与物体B相连，仍拉长到 $L$ ，测出释放时刻的加速度；
- ③ 仍用同一弹簧，拉长到 $L$ ，和捆在一起的A、B相连，测出释放时刻的加速度。

✓取物体A的质量作为质量单位的标准，可任意定其数值为 $m_A$ ，**作为力的定义**，再由实验①测得的 $a_A$ 即可算出弹簧对A的牵动力

$$F = m_A a_A$$

✓在实验②中，设弹簧对B的牵动力与牵动A时一样，仍为 $F$ ，则作为质量的定义，可算出B的质量

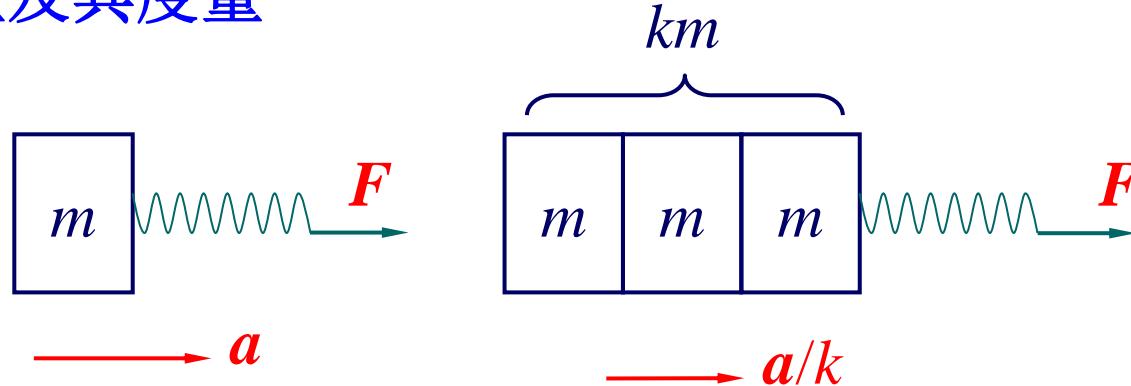
$$m_B = \frac{F}{a_B}$$

✓在实验③中，如果假设A与B在一起的质量是分别质量之和（即质量是可加的）： $m_{AB} = m_A + m_B$ ；再假定牵动力依然是 $F$ ，就可以作为定律，来预言此时的加速度为

$$a_{AB} = \frac{F}{m_{AB}} = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{a_A a_B}{a_B + a_A}$$

式中只含有实验直接可测的量（与我们任意取定无关），亦即牛顿第二定律给出了一组实验①,②的数据计算另一实验③结果的规则。如果这样计算出来的结果与观测值符合，就为牛顿第二定律的正确性提供了一个实验验证。

## □惯性质量及其度量



一般地：

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} \rightarrow m_1 : \quad \vec{a}_1 \\ \vec{F} \rightarrow m_2 : \quad \vec{a}_2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow a \propto \frac{1}{m}$$

$m$ 大者较难改变运动状态或速度， $m$ 小者则较易，所以 $m$ 应是物体惯性的反映，即惯性的大小。量度惯性的质量 $m$ 称惯性质量，简称质量。

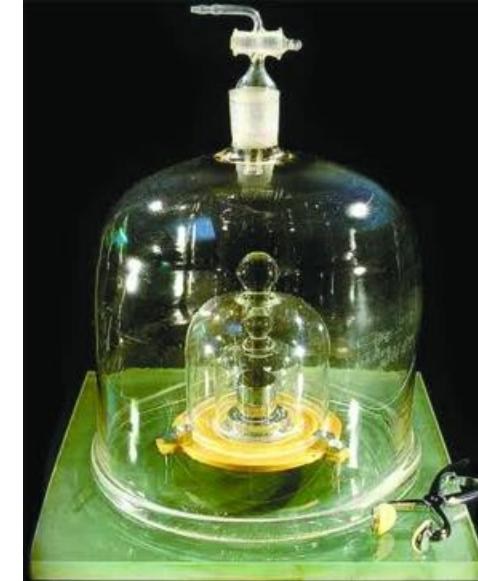
$$\bullet m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2},$$

如果取 $m_1$ 的质量为标准质量， $a_1$ 和 $a_2$ 可以测量，于是 $m_2$ 的质量便可以确定。

## □质量的单位：千克

➤4°C时1L纯水的质量规定为1千克；

➤千克原器：取巴黎国际计量局中铂铱合金国际千克原器为标准物体，规定其质量为  $m_0=1\text{kg}$ (千克)；



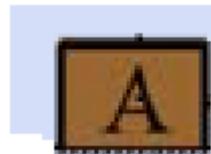
➤原子质量：一个原子质量单位(u)为碳的同位素<sup>12</sup>C原子质量的1/12

$$1\text{u} = 1.660\,565 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

## □质量的基本性质

➤质量是绝对量：物体质量的度量值与物体的运动状态无关，在不同的参考系中质量m的度量值相同。

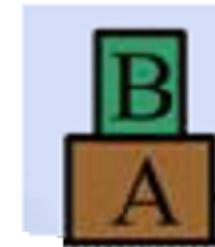
➤质量具有可加性：两个物体组合成大物体的质量等于两个物体质量的和。



$$m_A$$

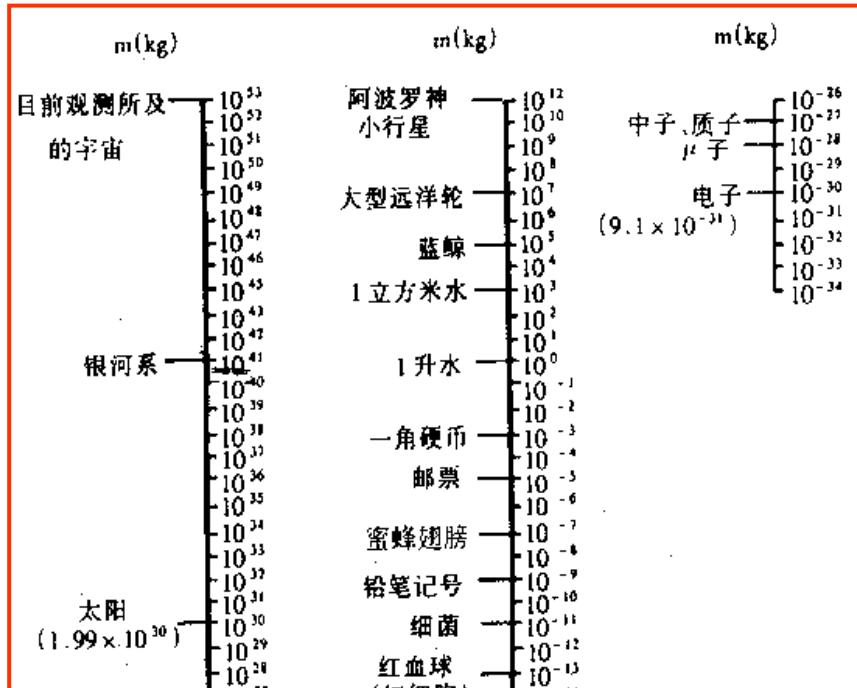


$$m_B$$



$$m_{AB} = m_A + m_B$$

# 物质世界的质量尺度



目前所测宇宙:  $10^{53}$  kg

银河系:  $10^{41}$  kg

太阳:  $10^{30}$  kg

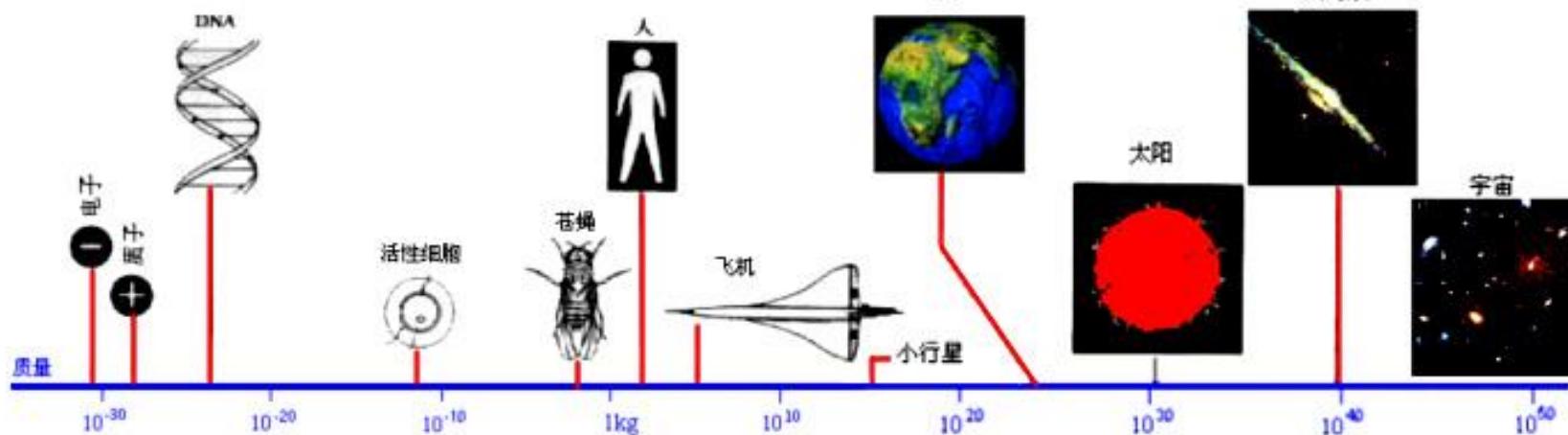
地球:  $10^{25}$  kg

月球:  $10^{22}$  kg

细菌:  $10^{-11}$  kg

红血球:  $10^{-13}$  kg

宇宙中物体的质量量级跨跃了约80个数量级!



## □ 力的单位：牛顿

在国际单位之中，力是导出量。**力的单位**是牛顿(N)，1N的力使质量为1kg的物体产生 $1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 的加速度。



## □ 关于第二定律的几点说明

① 第二定律适用的参考系是**惯性系**；

② 定律中的外力是合外力

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

③ 第二定律是**瞬时关系式**：当有力作用时，物体即产生加速度。一旦力消失，加速度也随之消失，二者是同步的。

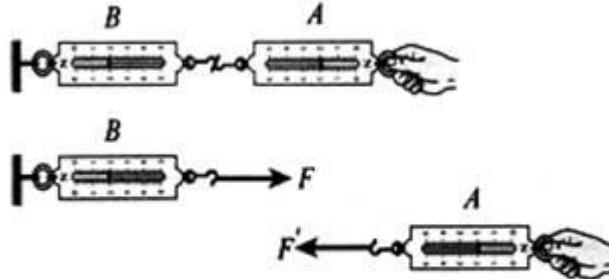
④ 公式  $\vec{F} = m\vec{a}$  是**矢量式**，不能用其直接求解，应将其写成代数式

**直角坐标系：**  $F_x = ma_x = m\ddot{x}$ ,  $F_y = ma_y = m\ddot{y}$ ,  $F_z = ma_z = m\ddot{z}$

**自然坐标系：**  $F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$ ,  $F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$

**平面极坐标系：**  $F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ ,  $F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

### 3、牛顿第三定律



两个弹簧测力计的读数有什么  
关系？它们受力的方向有什么关系？



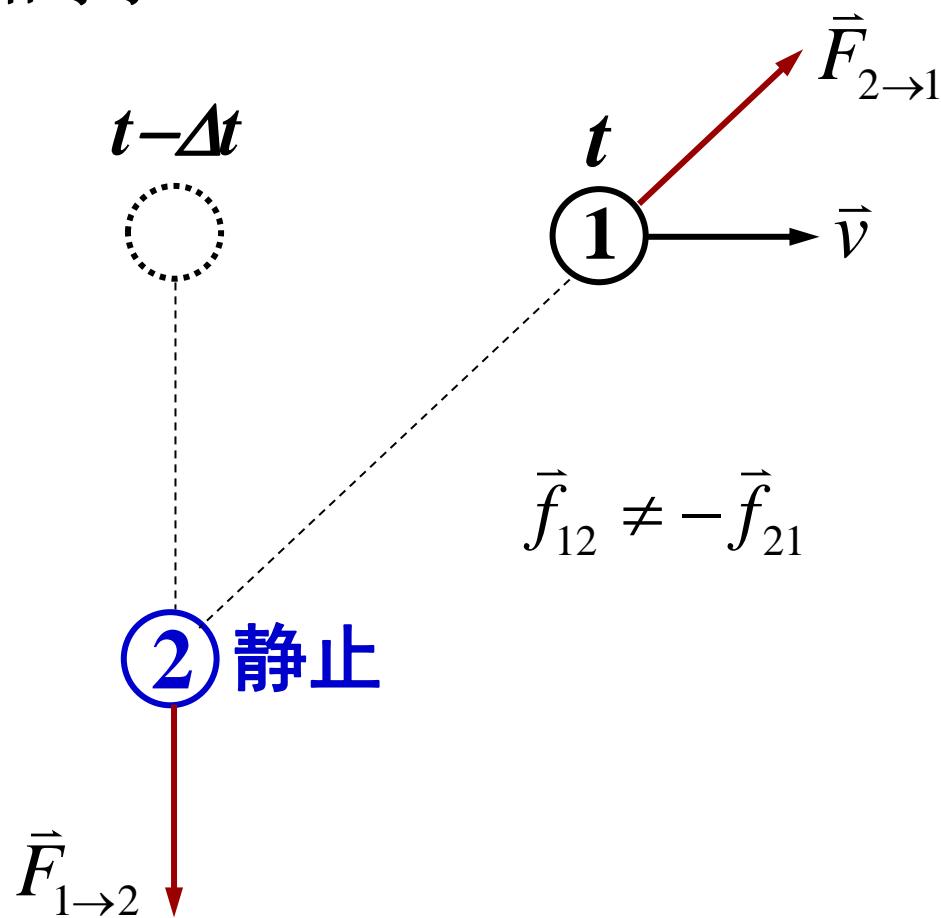
物体间作用力总是成对出现的,如果质点A对质点B的作用力为  $\bar{F}_{A \rightarrow B}$  ,那么, 质点B对质点A也有作用力  $\bar{F}_{B \rightarrow A}$  , 而且**两个力的大小相等,方向相反, 并位于两质点的连线上**, 即

数学表达:  $\bar{F}_{A \rightarrow B} = -\bar{F}_{B \rightarrow A}$

说明:

- ①作用力和反作用力总是成对地产生, 并且同时存在、同时消失。
- ②作用力和反作用力是具有**相同性质**的力。
- ③有别于一对平衡力, 作用力和反作用力分别作用于**两个物体上**, **不能抵消**。
- ④第三定律是关于力的性质的定律, 不要求参考系是**惯性系**。

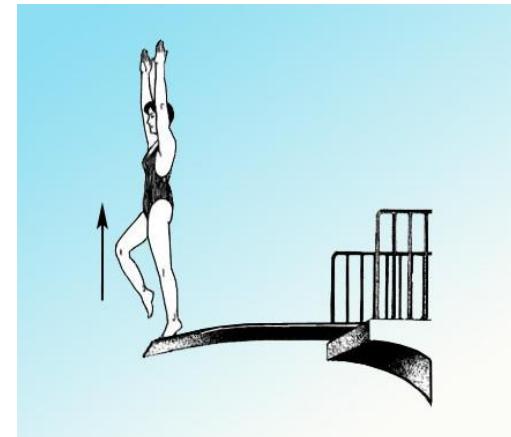
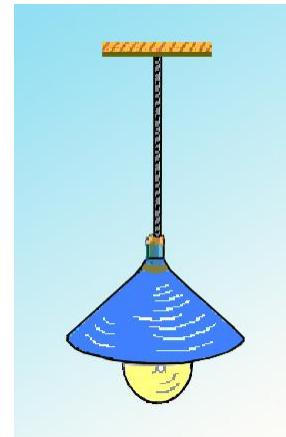
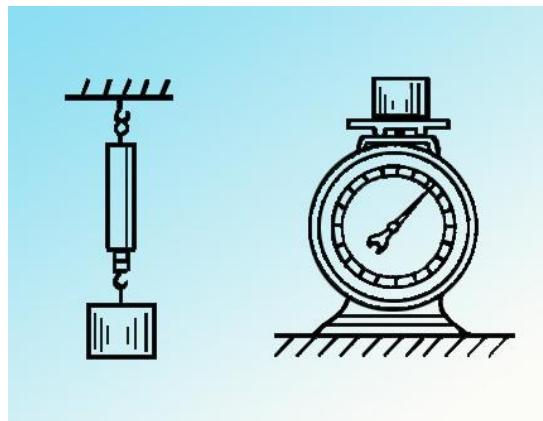
⑤作用力与反作用力相等而反向是以力的传递不需要时间即传递速度无穷大为前提的。如果力以有限的速度传递，作用力和反作用力就不一定相等了。



➤相互作用的传递速度一般较大（例如引力和电磁力都以光速传递），而牛顿力学中物体运动速度远低于光速，可忽略延迟效应，因此在牛顿力学中，作用力等于和反作用力。

## § 2.2 常见的力

1. 弹性力: 物体发生弹性变形后, 内部产生欲恢复形变的力。

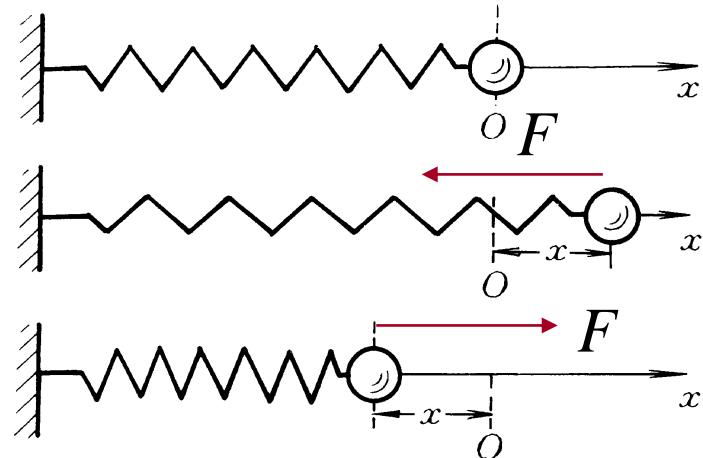


常见的有: 弹簧的弹力、绳索间的张力、压力、支持力等。

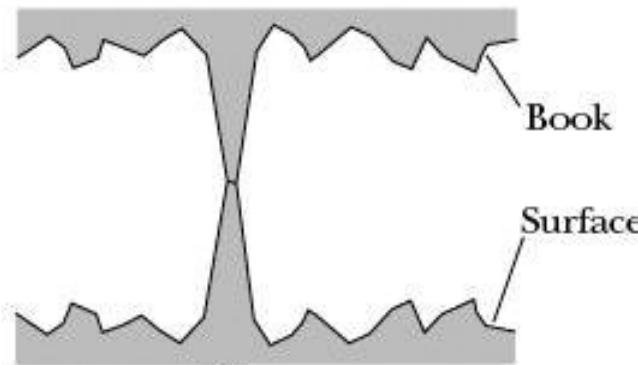
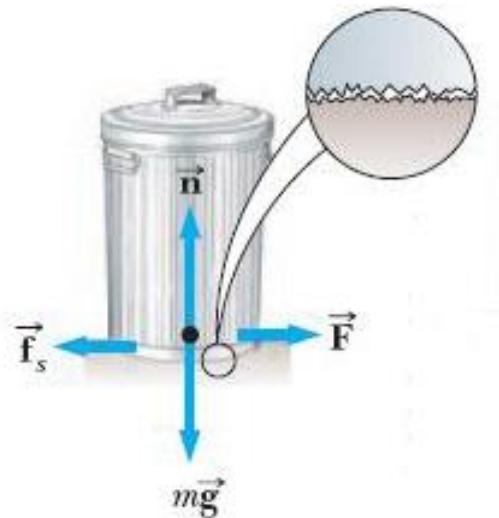
弹簧被拉伸或压缩时的弹力遵守  
胡克定律

$$\vec{F} = -k \vec{x}$$

这里 $k$ 叫做弹性系数, 由弹簧本身性质决定。负号表示弹性力与形变方向相反。



## 2. 摩擦力



物体与物体相互接触时，沿接触面两物体相互施以阻止相对滑动的作用力。分子力是产生摩擦的根本原因。

{ 静摩擦力:  $0 \leq f_s \leq \mu_s N$   $\mu_s$  为静摩擦因数  
方向: 与物体相对滑动趋势的方向相反。

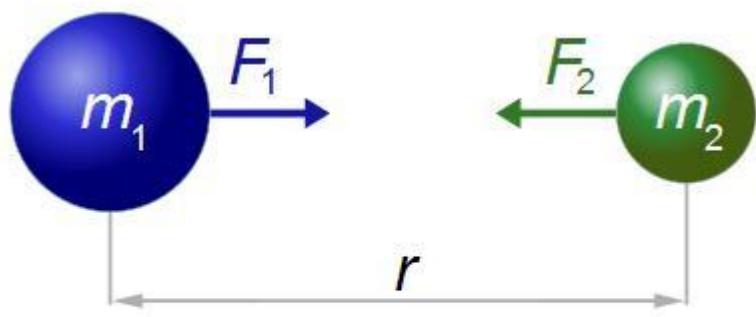
滑动摩擦力:  $f_k = \mu_k N$   $\mu_k$  为动摩擦系数  
方向: 与物体相对运动的方向相反。

3. 粘滞力: 固体与液体或者气体接触面发生相对运动时产生的阻力。

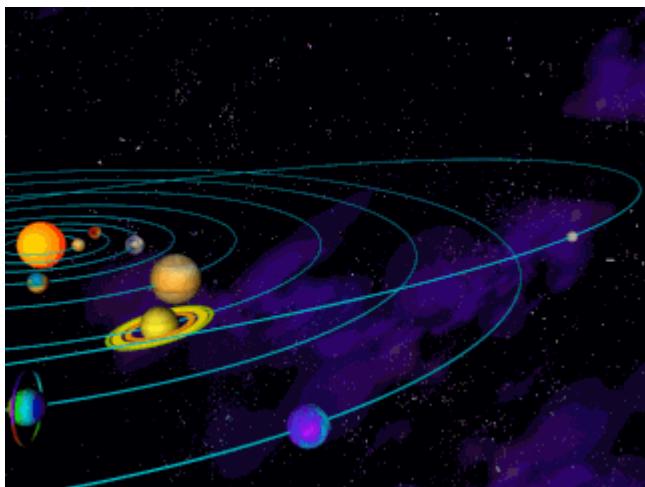
$$\begin{cases} f = -bv, & \text{低速} \\ f = -cv^2, & \text{速度较大} \end{cases}$$

#### 4. 万有引力:

自然界任何两物体之间都存在着相互吸引力，叫做万有引力。两质点间万有引力大小与两质点的质量乘积成正比，与两质点间的距离平方成反比，力的方向沿着两质点的连线



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$



$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  称为万有引力常数。公式中的质量称为  
**引力质量**，它是物体与其他物体相互吸引性质的量度。

虽然引力质量和惯性质量代表了物体的两种不同的属性,然而精确的实验研究和理论分析表明,对于任一物体来说,这两个质量都是相等的。这一重要结论正是爱因斯坦创立广义相对论的实验基础。

## 5. 重力: 地球对表面物体的万有引力。

重力可表示成

$$W = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \equiv mg$$

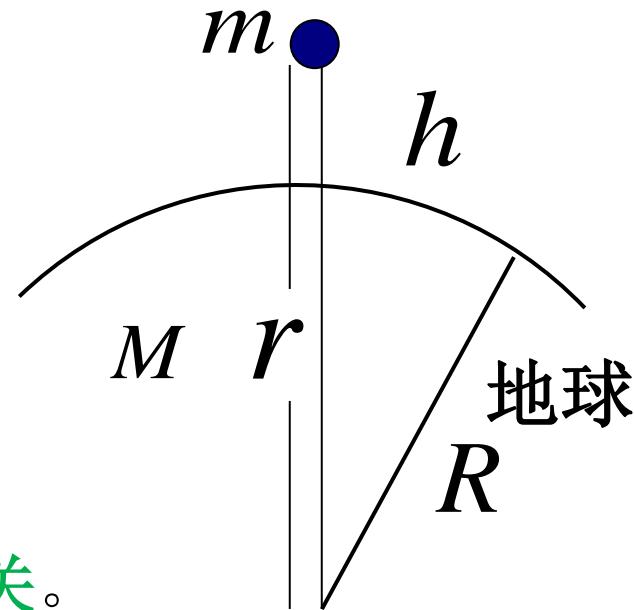
重力加速度  $g$ :

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

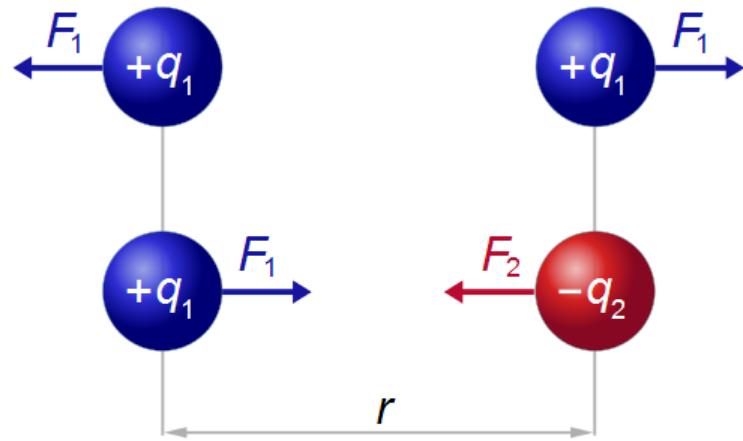
可见, 重力加速度与物体离地面的高度有关。

$\because h \ll R$ , 重力加速度近似为

$$g = G \frac{M}{R^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2$$



## 6. 库仑力:

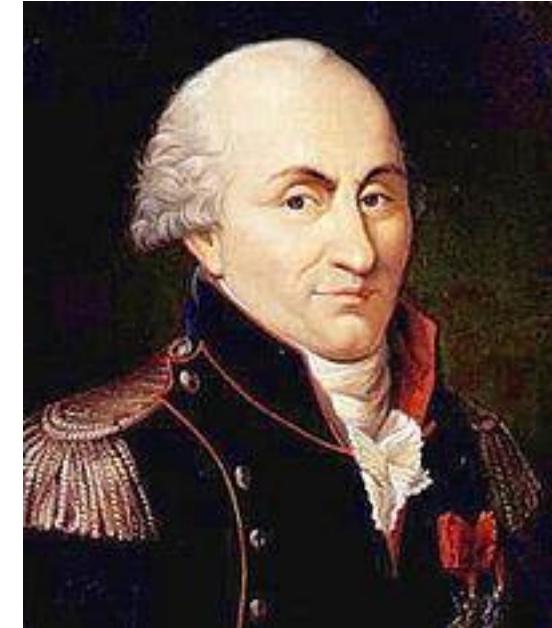


$$F_1 = F_2 = k_c \frac{q_1 \times q_2}{r^2}$$

$k_c = 8.987 \times 10^9$ 牛顿·米<sup>2</sup> / 库仑<sup>2</sup> ( $N \cdot m^2 / C^2$ )

1库仑(C)=1安培·秒(A.s)

一个电子所带负电荷量  $e = 1.6021892 \times 10^{-19}$  库仑

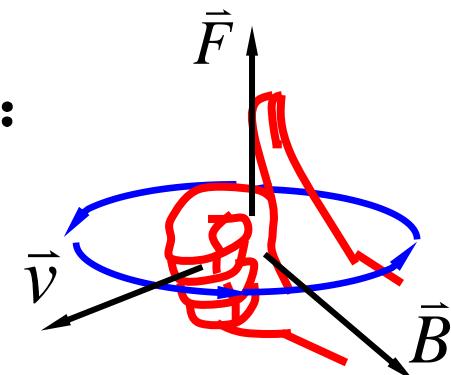


查尔斯·库仑 (1736-1806)

## 7. 洛伦兹力

带电质点在电磁场中所受力由洛伦兹公式给出:

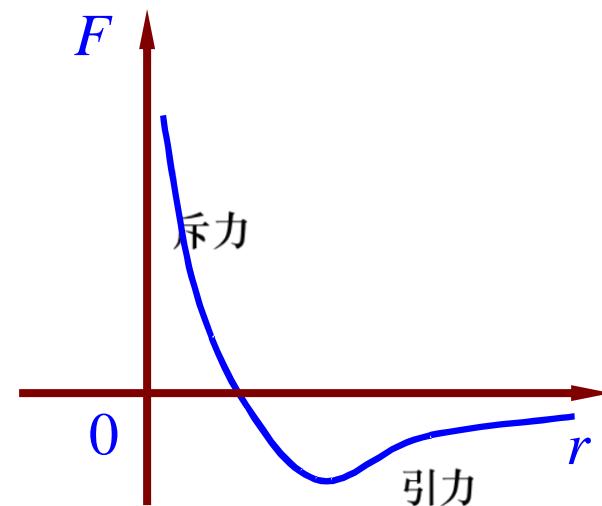
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



## 8. 分子力

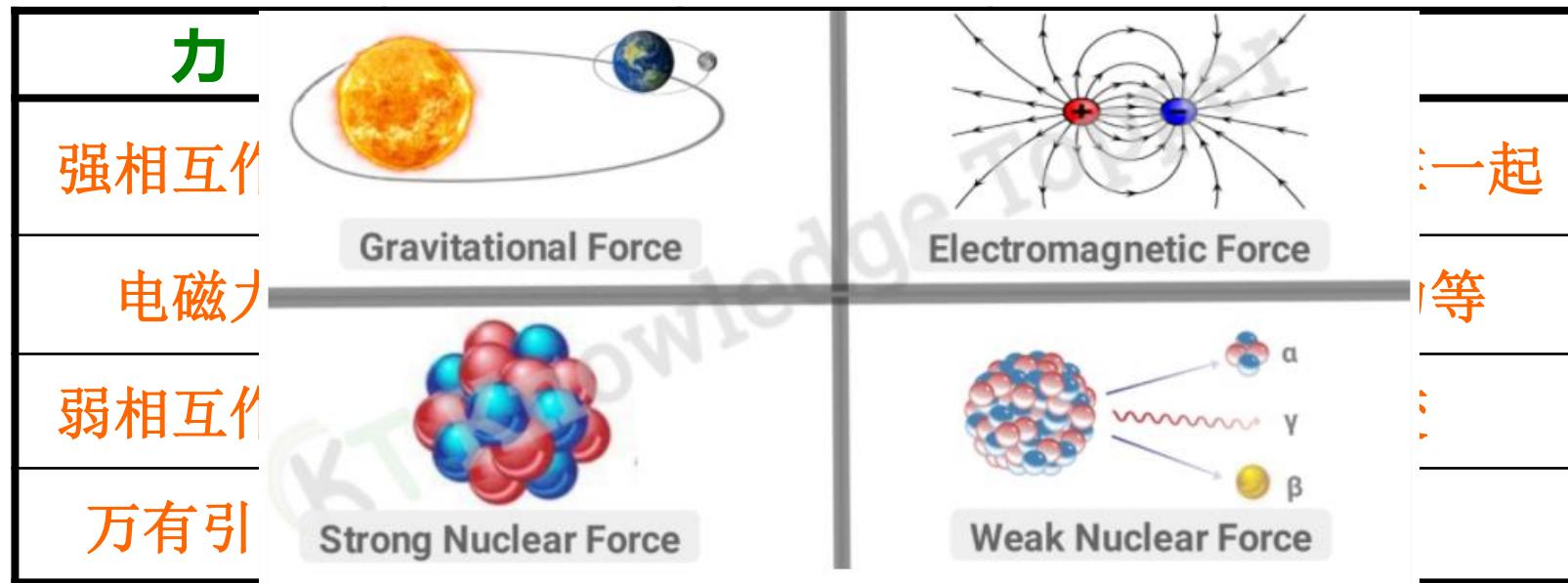
分子力即分子间的相互作用，可用半经验公式表示

$$F = \frac{\lambda}{r^s} - \frac{\mu}{r^t} \quad (s > t)$$



### 口力的分类

在目前的宇宙中，存在着**四类基本**的相互作用，所有的运动现象的原因都逃不出这四类基本的力，各式各样的力只不过是这四类基本力在不同情况下的不同表现。



## §2.3 牛顿运动定律的应用

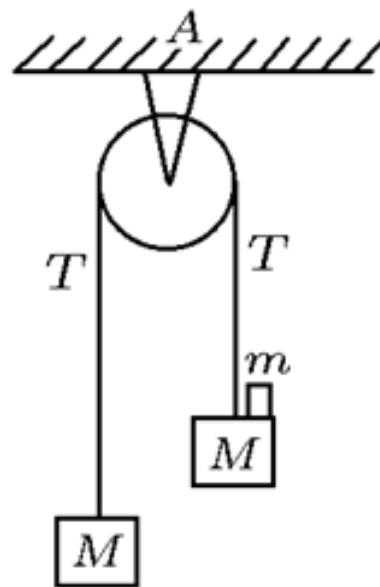
### 1. 质点动力学的三类问题:

- 第一类, 已知力求运动;
- 第二类, 已知加速度或运动求力;
- 第三类, 已知某些力和运动条件求另一些力及运动。

### 2. 求解质点动力学问题的基本步骤:

- ① 隔离物体, 确定研究对象: 如果所讨论的问题多于一个质点, 可以把几个物体分别隔离出来, 对每个物体分别加以讨论;
- ② 分析受力 (画受力图);
- ③ 分析运动状态 (分析所认定的物体的运动状态, 包括它的轨迹、速度和加速度。问题涉及几个物体时, 还要找出它们的运动之间的联系, 即它们的速度或加速度之间的关系。);
- ④ 选择适当的坐标系, 写出动力学方程  $\bar{F} = m\bar{a}$  的分量形式;
- ⑤ 方程求解、讨论。

**例题1：**英国剑桥大学物理教师阿特伍德(George Atwood, 1746—1807), 善于设计机巧的演示实验, 他为验证牛顿第二定律而设计的滑轮装置, 称作“阿特伍德机”, 该机是最早出现验证牛顿定律的最好设备, 于1784年发表于“关于物体的直线运动和转动”一文中(下页如图所示). 物理学进行研究需要建立理想模型. 在理论模型中, 重物 $M$  和 $m$  可视作质点; 滑轮是“理想的”, 即绳和滑轮的质量不计, 轴承摩擦不计, 绳不伸长. 求重物释放后物体加速度及物体对绳的拉力.



解：选地球为惯性参考系。把右物块  $M$  与小物块  $m$  看成一个物体，设绳中张力为  $T$ ，画出左右两物块的受力分析左图所示，取向上为正的竖直坐标，可列出下列方程：

$$T - Mg = Ma_1, \quad (1)$$

$$T - (M + m)g = (M + m)a_2, \quad (2)$$

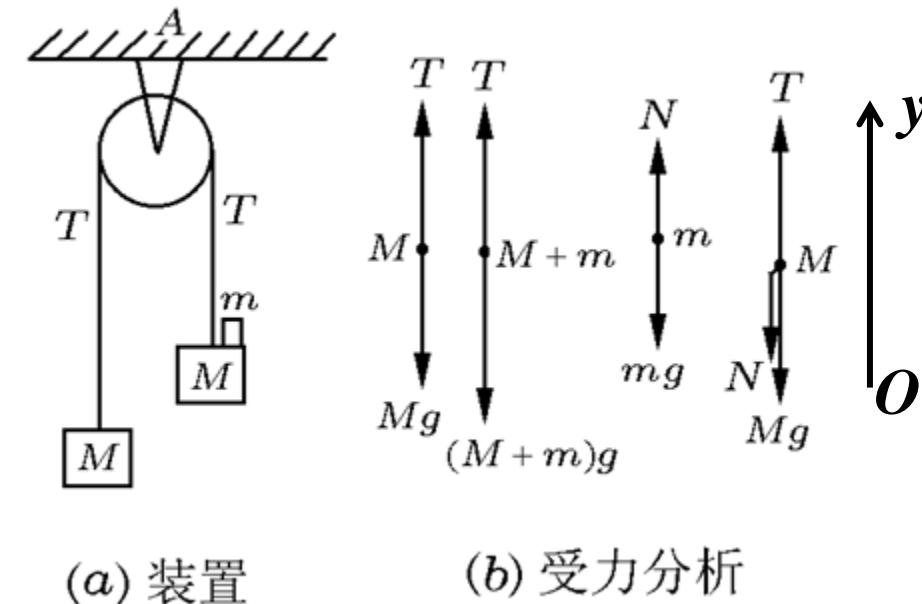
考虑约束关系

$$y_1 + y_2 + \pi R = l = \text{常量}$$

对时间求两次导数，得

$$a_1 = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -a_2, \quad (3)$$

联立以上方程 (1), (2), (3) 可解得：



$$a_1 = \frac{m}{2M + m} g$$

$$T = M(g + a_1) = Mg\left(1 + \frac{m}{2M + m}\right) = \frac{2(M + m)}{2M + m} Mg$$

所以A点所受的支承力：

$$F = 2T = \frac{4(M + m)}{2M + m} Mg$$

为了求得 $m$ 与 $M$ 之间的作用力，把 $m$ 隔离出来，对它列运动方程：

$$N - mg = ma_2 = -ma_1$$

于是

$$N = mg - ma_1 = \frac{2Mm}{2M + m} g$$

**例题2(收尾速度):** 已知一质点从静止自高空下落，设重力加速度始终保持一常量，质点所受空气阻力与其速率成正比。求质点速度并与自由下落相比。

**解：**建立以开始下落处为坐标原点且铅直向下的坐标系 $Oy$ ,又选开始下落时为计时起点。

重力  $\vec{W} = m\vec{g}$

阻力  $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$

$\vec{v}$ —质点速度

$\gamma$ 为常量

动力学方程为：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{W} + (-\gamma\vec{v})$$

它在 $Oy$  轴的投影为

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v_y$$

该式可写作

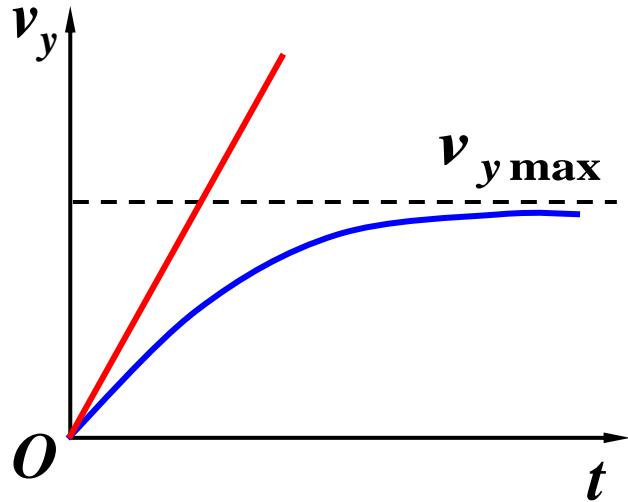
$$-\frac{m}{\gamma} \frac{d\left(v_y - \frac{mg}{\gamma}\right)}{v_y - \frac{mg}{\gamma}} = dt$$

作不定积分，得

$$v_y - \frac{mg}{\gamma} = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

因  $t=0, v_y=0$  故  $C=-mg/\gamma$ ，于是

$$v_y = \frac{mg}{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right)$$



红色直线表示自由下落  
蓝色曲线表示有阻力时，  
最后可达一极限——终  
极速度

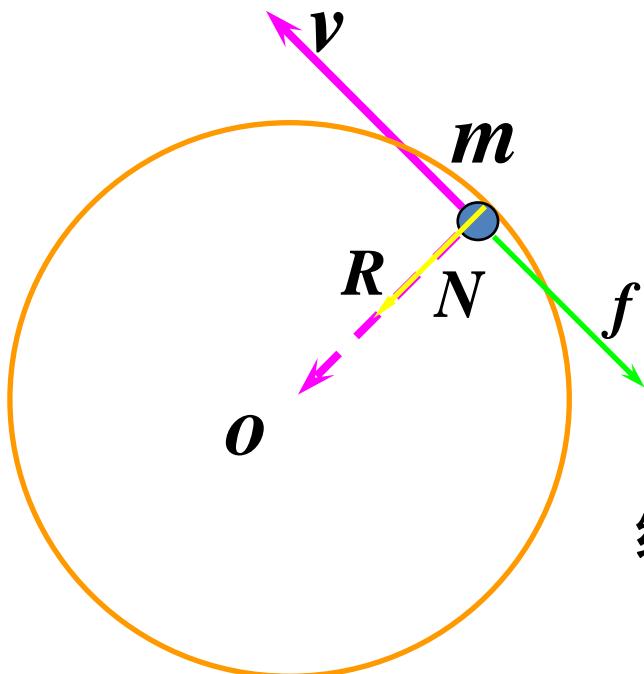
终极速度  $v_{y \max} = mg / \gamma$  与高度无关

自由落体  $v_{y \max} = \sqrt{2gh}$  与高度有关

**例题3：**质量为 $m$ 质点沿半径为 $R$ 的圆环的内壁运动，整个圆环水平地固定在光滑的桌面上。已知质点与环壁间的摩擦系数为 $\mu$  和质点开始运动的速率 $v_0$ ，试求：

- (1) 质点在任一时刻的速率；
- (2) 经过多长时间质点速度是原来的一半。

**解：**以地面为参考系，并选用自然坐标系，分析受力，列牛顿第二定律方程



$$\begin{cases} N = m \frac{v^2}{R} \\ -f = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

$$f = \mu N \quad (2)$$

综合 (1) (2) 两式有：

$$-\mu \frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt}$$

分离变量进行积分，并注意初值条件，有

$$\frac{\mu}{R} \int_0^t dt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$



$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \mu}{R} t}$$

当质点速度是原来的一半时， $v = v_0/2$ ，可得

$$t = R / \mu v_0$$

**例题4:** 一质量为 $m$ 的物块拴在穿过小孔的轻绳的一端，在光滑水平面上以角速度 $\omega_0$ 作半径为 $r_0$ 的圆周运动自 $t=0$ 时刻起，手拉着绳子的另一端以匀速 $v$ 向下运动，使半径逐渐减少，试求：  
 (1) 角速度与时间的关系；  
 (2) 绳中的拉力与时间的关系。

解：在平面极坐标中，运动方程为

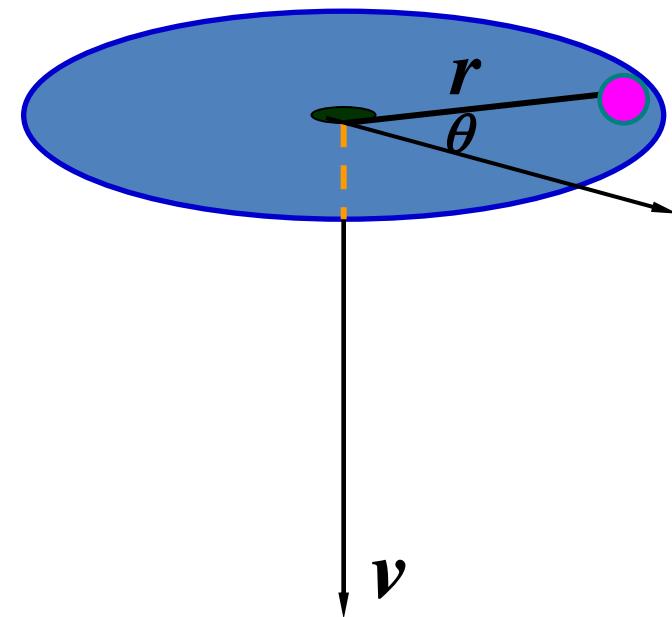
$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (2)$$

(1) 根据题意  $\dot{r} = -v$ ,  $\ddot{r} = 0$ ,  $\dot{\theta} = \omega$

由方程 (2)

$$r \frac{d\omega}{dt} = 2v\omega \rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2v}{r} dt$$



$$\because \dot{r} = -v \Rightarrow r = r_0 - vt$$

$$\therefore \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2v}{r_0 - vt} dt$$

两边积分

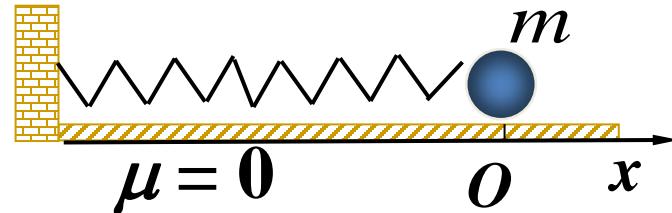
$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t \frac{2v}{r_0 - vt} dt, \Rightarrow \ln \frac{\omega}{\omega_0} = -2 \ln \frac{r_0 - vt}{r_0}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{\omega_0 r_0^2}{(r_0 - vt)^2}$$

(2)代入方程 (1) , 得

$$F = mr\dot{\theta}^2 = m(r_0 - vt) \frac{\omega_0^2 r_0^4}{(r_0 - vt)^4} = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{(r_0 - vt)^3}$$

**例题5（胡克定律与简谐振动）：**一质量为 $m$ 的小球连接在弹簧的一端，弹簧的另一端固定在墙上，小球放在光滑的水平地面上，把小球拉开 $A_0$ 的距离、然后放手，考虑小球的运动。已知弹簧的弹性系数为 $k$ 。



## 物体只受弹力作用

$$F_x = -kx$$

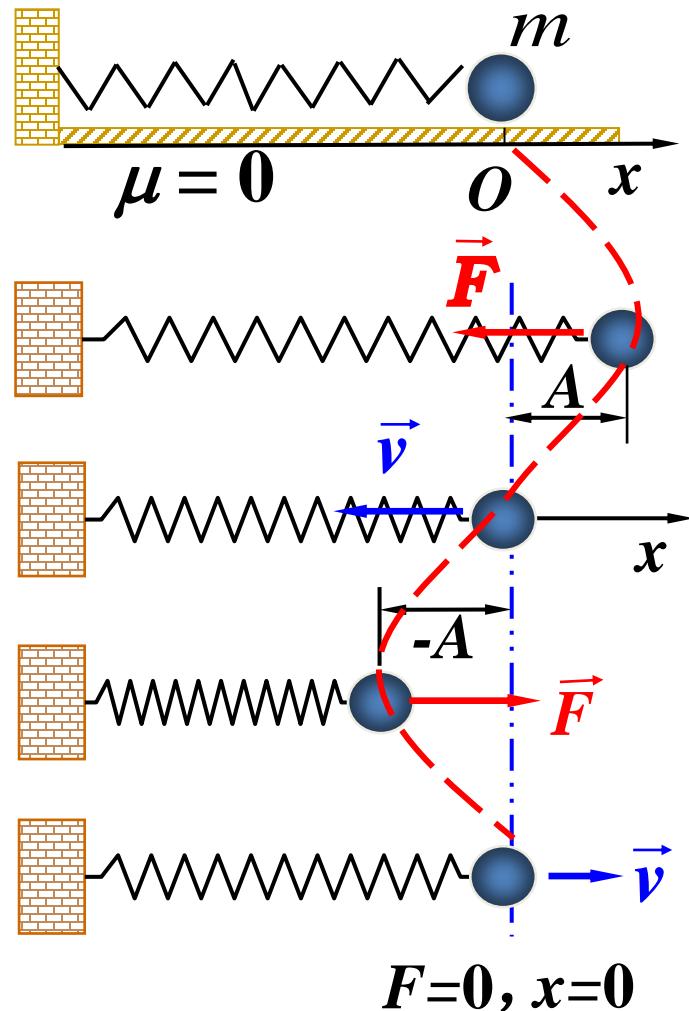
其中  $k$  弹性系数

弹力的两个特点：

① 弹力的指向总是与位移  $x$  的方向反向，**总是指向平衡位置**。

② 弹力的**大小正比于位移  $x$  的大小**。

在弹性力作用下的质点，其基本的运动形式是在平衡点附近来回振荡，它是一种被“束缚”在平衡点附近的运动。



解：物体只受弹力作用

$$F_x = -kx$$

取平衡位置作为坐标原点建立一维直角坐标系，由牛顿第二定律有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

方程的解为：

$$z = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

这里A和B是常数，方程的解也可写成等价的形式：

$$x = C \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

——简谐振动

有初始条件可确定

$$C = A_0, \varphi_0 = 0$$



$$x = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

## § 2. 4 力学相对性原理

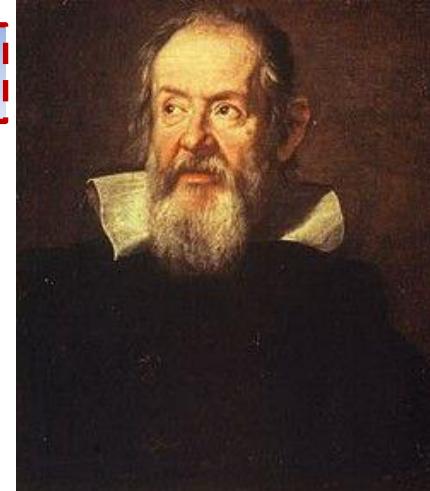
### 1. 力学相对性原理

对于描述力学规律来说，所有的惯性参考系都是等效的。或者说：相对某惯性系作匀速直线运动的参考系，其内部发生的力学过程，不受系统整体的匀速直线运动的影响。

上述结论，是伽利略在1632年，通过分析一个匀速直线运动的封闭船舱里发生的力学现象而总结出的，它也称作力学相对性原理，或伽利略相对性原理。

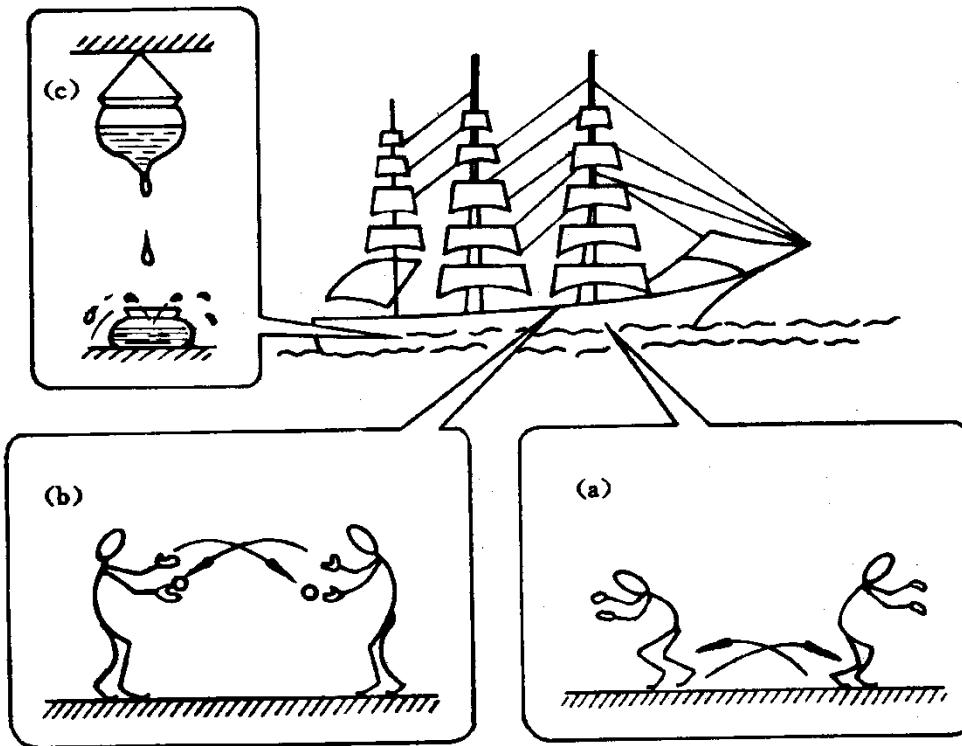
一切推理都必须从观察与实验中得来。

伽利略在1632年出版的著作  
《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》



“把你和几个朋友关在一条大船甲板下的主舱里，再让你们带几只苍蝇、蝴蝶和其它小飞虫。舱内放一只大水碗，里面放几条鱼。然后挂上一个水瓶，让水一滴一滴地滴到下面的一个宽口罐儿里。船停着不动时，你留神观察，小虫都以等速向舱内各方向飞行，鱼向各个方向随便游动，水滴滴进下面的罐子中。你把任何东西扔给你的朋友时，只要距离相等，向这一方向不必比另一方向用更多的力，你双脚齐跳，无论向哪个方向跳过的距离都相等。当你仔细地观察这些事情后，再使船以任何速度前进。只要运动是匀速的，也不互左忽右地摆动，**你将发现，所有上述现象丝毫没有变化，你也无法从其中任何一个现象来确定，船是在运动还是停着不动。”**

舟行而不觉



## 2. 伽利略变换与力学相对性原理

设  $S$  为静参考系，  $S'$  为动参考系

设  $S'$  相对  $S$  以速度  $\bar{u}$  作匀速直线运动

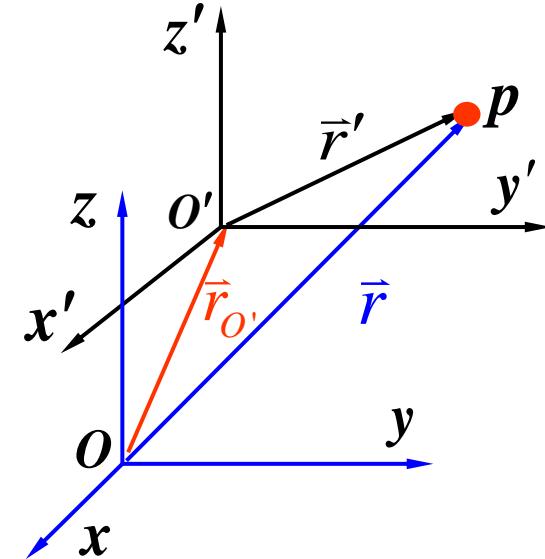
$t = t' = 0$  时  $O$  与  $O'$  重合

质点在空间运动，某时刻位于  $P$  点

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}, \quad \vec{r}_{O'} = \bar{u}t = \bar{u}t'$$

于是可得伽利略坐标变换

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \bar{u}t \end{cases}$$



不妨设  $S'$  相对  $S$  以速度  $\bar{u}$  沿  $x$  方向作匀速直线运动，则有

正变换  $S \rightarrow S'$      $x' = x - ut$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

逆变换  $S' \rightarrow S$      $x = x' + ut'$

$$y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

对伽利略坐标变换两边同时求导，可得伽利略速度变换

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

或者

$$\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

继续求导，可得伽利略加速度变换

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

或者

$$\begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases}$$

➤速度是相对的，即同一质点对于不同参考系有不同的位置和速度。从相对作匀速直线运动的所有参照系观测同一质点的加速度必相同，因此加速度具有伽利略变换的不变性！或者说加速度是绝对的。

➤伽利略变换只适用于低速情况，高速情况 ( $u \sim c$ ) 必须用洛伦兹变换。

●从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系，物理定律如何变化？

在牛顿的经典力学中：

- 物体质量与其运动状态无关，是绝对的，即  $m = m'$ ；
- 物体间的相互作用（力）只与物体相对位置或相对运动有关，因此力也与参考系无关，即  $\vec{F}' = \vec{F}$ 。

如果在惯性系  $S$  中有：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

则在惯性系  $S'$  中也必然有：

$$\vec{F}' = m\vec{a}'$$

牛顿运动定律在不同惯性系中具有完全相同的形式。即：牛顿运动定律具有伽利略变换的不变性。

对于不同的惯性系，力学的基本规律——牛顿方程的形式相同。或者说：牛顿方程具有伽利略变换协变对称性。

# 本章小结

## ●应用牛顿定律解题的基本方法

### 1、受力分析是关键

牛顿第一、第三定律为受力分析提供依据

### 2、第二定律是核心

力与加速度的瞬时关系:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

选对象

分析力

分析运动

先用符号求解，后代入  
数据计算结果

(画受力图)

一般用分量式，用文字  
符号列方程式

解方程

列方程

选坐标系