中国科学技术大学

2022–2023 学年第 2 学期期末考试试卷（A）

课程名称：线性代数（B1）　　课程编号：MATH1009

考试时间：2023 年 7 月 13 号　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　学院：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题：本题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分。

1. 求 $\begin{pmatrix}30 & 20\\ 11 & 4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 在基 $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 下的坐标 ________.

2. 若方阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. 则 A^2+A+I 的行列式为 ________.

3. $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{2023} =$ ________.

4. 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的规范形为 ________.

5. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 将单位圆 C 变成椭圆 E, 则椭圆的面积为 ________.

6. 若线性变换在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}-1 & -1 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, 在另一组基下矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & y\end{pmatrix}$, 则 x 与 y 分别为 ________.

二、判断题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例。

1. 欧氏空间上的正交变换在任一组基下的矩阵为正交矩阵.

2. 实数域上的 n 阶对称矩阵一定有 n 个线性无关的特征向量.

3. 设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上正交变换. 若 $\mathcal{A}$ 为第二类正交变换则它的迹为零.

4. 若 A, B 是 n 阶实对称正定矩阵, 则 $A+B$ 也是正定矩阵.

三、(10 分) 设 α_1，α_2，α_3 为线性无关的 3 维列向量，$\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上线性变换，满足

$$\mathcal{A}(\alpha_1) = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\mathcal{A}(\alpha_3) = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量。

四. (16 分) 设二次型

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3 + tx_1x_3.$$

(1) 求参数 t 满足什么条件时，该二次型正定？

(2) 当 $t = 2$ 时，请用正交变换将二次曲面 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 化为标准方程，并判断二次曲面类型.

五. (14 分) 考虑实线性空间 $V=\mathbb{R}^3$，对于任意的 $x,y\in V$，定义

$$(x,y)=x^T\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}y$$

(1) 证明上述定义给出了 V 上的一个内积.

(2) 利用 Schmidt 正交化从基向量组 $(1,0,0)^T,(1,0,1)^T,(0,1,1)^T$ 构造一组标准正交基.

六. (10 分) 设 $L = nI_n - J_n$, 这里 I_n 表示 n 阶单位阵，J_n 表示所有元素全为 1 的 n 阶方阵.

(1) 证明：0 是 L 的一个特征值，并求其对应的特征向量.

(2) 证明：L 是半正定矩阵.