座位号:

考场:

所在院系:

姓名:

学号:

密封线　答题时不要超过此线

中国科学技术大学 2021年秋季学期

(数学分析(B1) 期中考试试卷, 2021 年 11 月 20 日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 120 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅人										

一、(5 分) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0$.

证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)^n+e^{2n}}{n^{n+1}}=$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}=-$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3\sin x}=$ —

三、(12 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解

(6 分)

..........(12 分)

四、(12 分) 设 $y(x) = x^2 e^{-x}$, $f(x) = xy^{(n+1)}(x) + (n+x-2)y^{(n)}(x) + ny^{(n-1)}(x)$.

(1) 求 $y^{(n)}(x)$; (2) 求证 $f(x) = 0$.

解

(.........8 分)

(.........12 分)

学号:________ 姓名:________ 所在院系:________ 考场:________ 座位号:________

密封线 答题时不要超过此线

五、(12 分) 求函数 $f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极大值和极小值.

解 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$- \qquad \frac{1}{\ }$$

六、(10 分) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1+xe^{y}$ 确定的隐函数. 求该函数曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解

七、(10 分) 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 且 $f(x)\in[a,b]$, 又 $[a,b]$ 中任意不同的 x,y 满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 令 $x_1\in[a,b]$, 并归纳定义 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\big(x_n+f(x_n)\big)$. 求证:

(1) $\{x_n\}$ 是单调数列; (2) $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中一点 c, 且 $f(c)=c$; (3) 满足 $f(x)=x$ 的 x 是唯一的.

$-$

$n\to\infty$

由

在

$-$

.... (7 分)

$/$

八、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在二阶导数, $f(0)=0$, $f'(0)>0$, $f''(x)\leqslant \alpha<0$, 其中 α 是常数. 证明:

(1) 存在 $x_0>0$ 使得 $f'(x_0)=0$; (2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

证明 (1)

2

$2\ '$

..............(4分)

九、(7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n=0,1,2\cdots$ 满足 $|f^{(n)}(x)|\leqslant n!|x|$. 求证: $f(x)=0$.

证明

$\underline{\qquad\qquad}$ $\underline{\qquad\qquad}$ $\underline{\qquad\qquad}$ (1 分)

因此

(4 分)

$\underline{\qquad\qquad}$ $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$\underline{\qquad\qquad}$

因此

(7 分)