中国科学技术大学数学科学学院

2023 ~ 2024 学年第 2 学期期中考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称 线性代数 (B1)　　课程编号 MATH1009

考试时间 2024 年 5 月 18 日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

装 …… 订 …… 线

一、【30 分】填空题.

(1) 在关于 x 的多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ 中, 一次项的系数是________.

(2) 方程 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的解为 $\boldsymbol{X} =$ ________.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n =$ ________.

(4) 对于行列式 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & y \end{vmatrix}$, 若其代数余子式的和 $A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________.

(5) 对于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & a \end{pmatrix}$, 若存在列向量 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ 使得线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解, 则 $a =$ ________.

(6) 线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中向量组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩是________.

二、【20 分】判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 方阵，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量. 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 只有唯一解，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 也只有唯一解.

(2) 对于任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{BA})$.

(3) 设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_n$.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

也是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

三、【12 分】当 a 为何值时, 如下的线性方程组有解? 当有解时, 求出它的所有解.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = a^3. \end{cases}$$

装 订 线

四、【8 分】计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

五、【10 分】设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求它的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

六、【12 分】设 $n \geq 2$ 为正整数, $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ 表示次数小于 n 的所有实系数多项式构成的线性空间. 对于正整数 k, 用 V_k 表示 $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ 中满足 $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 的多项式的集合.

(1) 证明: V_k 是 $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ 的线性子空间.

(2) 对于 $j = 1, \ldots, n-1$, 设 $f_j(x) = 1 - \dfrac{j+1}{k^j} x^j$. 证明: $f_1, \ldots, f_{n-1}$ 是 V_k 的一组基.

(3) 设多项式 $f(x)$ 满足 $f(x) \in \bigcap_{k=1}^{n} V_k$. 证明: $f(x) = 0$.

线

订

装

七、【8 分】

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 依次为 $m \times n, n \times s, s \times t$ 矩阵. 证明下列关于矩阵的秩的不等式:

$$r(\boldsymbol{ABC}) \geq r(\boldsymbol{AB}) + r(\boldsymbol{BC}) - r(\boldsymbol{B}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 证明:

$$r(\boldsymbol{A}^n) = r(\boldsymbol{A}^{n+1}) = r(\boldsymbol{A}^{n+2}) = \cdots.$$