中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十一章　曲线积分与曲面积分

- **数量场在曲线上的积分**
- 数量场在曲面上的积分
- 向量场在曲线上的积分
- 向量场在曲面上的积分
- Gauss定理和Stokes定理
- 保守场
- 微分形式的积分

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題

第十一章 曲线积分与曲面积分

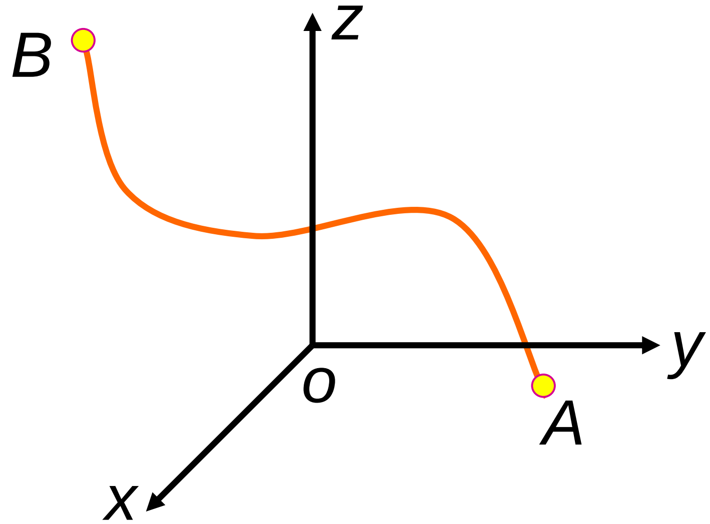
积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区间	平面区域	空间区域	曲线	曲面

曲线积分
- 第一型曲线积分(对弧长的曲线积分)
- 第二型曲线积分(对坐标的曲线积分)

曲面积分
- 第一型曲面积分(对面积的曲面积分)
- 第二型曲面积分(对坐标的曲面积分)

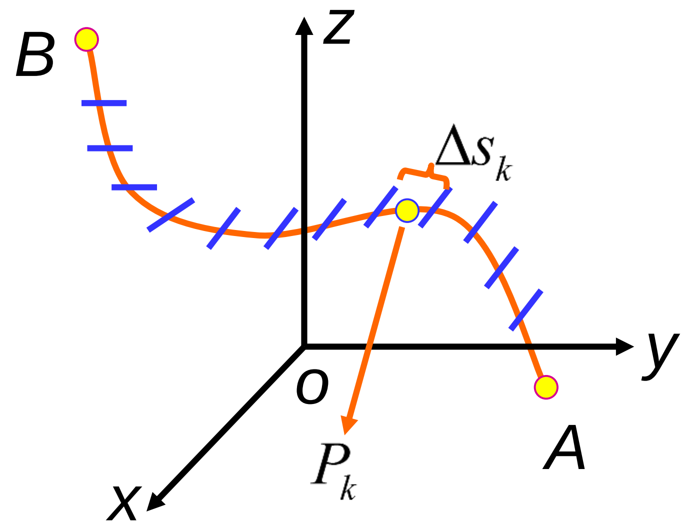
非均匀曲线的质量

设 L是以AB为端点的光滑或分段光滑的曲线. L 上任一点 (x, y, z) 处的线密度为 $\mu(x, y, z)$, 求该曲线的质量 M.



用微元法思想计算质量：

“分割; 近似; 求和；取极限”



1) 分割：

任意划分 L 得 n 个小弧段

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_k, \cdots, \Delta s_n.$$

2) 近似

每个小弧段 Δs_k 上任取一点 P_k，

用该点处的密度作为该弧段的密度，该小段质量近似为：

$$\Delta m_k \approx \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k$$

3) 求和 $M = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k$

4) 取极限

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k, \lambda = \max_{1 \le k \le n}\{\Delta s_k\}$$

定义：设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条光滑 (或逐段光滑) 曲线段，$\varphi(x,y,z)$是定义在曲线 L 上的数量场 (或函数). 作 L 的任意分割: $M_0, M_1, \cdots, M_n$, 并记每段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为Δs_i, 最大长度为 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$. 在每段弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. 如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ 是一有限数，且与点 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 的选择无关，则称函数$\varphi(x,y,z)$ **在曲线上可积**，极限值称为**数量场在曲线上的积分**，或称为**第一型曲线积分**, 记为 $\int_L \varphi(x,y,z)\mathrm{d}s$.

注：若 $\varphi(x,y,z)\equiv 1$, 则 $\int_L \varphi(x,y,z)\mathrm{d}s = \sigma(L)$ 为曲线的弧长.

基本性质

第一型曲线积分有类似于重积分的一些性质.

设 f,g 都在 L 上可积. 则：

1. (有界性) 若 f 在 L 上可积，则 f 在 L 上有界.

2. (线性性) 对任意常数 $c_1, c_2, c_1 f + c_2 g$ 也在 L 上可积，且

$$\int_L (c_1 f + c_2 g)\mathrm{d}s = c_1 \int_L f\mathrm{d}s + c_2 \int_L g\mathrm{d}s.$$

3. (保序性) 若 $f \geq 0$, 则 $\int_L f\,\mathrm{d}s \geq 0.$

进而，$f \geq g \Rightarrow \int_L f\mathrm{d}s \geq \int_L g\mathrm{d}s.$

4. (绝对可积性) $|f|$ 在 L 上也可积，且 $\int_L |f|\,\mathrm{d}s \geq \left|\int_L f\,\mathrm{d}s\right|$.

5. (曲线积分的分段可加性) 若 f 在两条光滑曲线段 L_1 和 L_2 上都可积，则 f 在 $L = L_1 \cup L_2$ 上也可积，且

$$\int_L f\,\mathrm{d}s = \int_{L_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} f\,\mathrm{d}s.$$

6. (积分中值定理) f 在 L 上连续，则 $\exists P \in L,\ \text{s.t.} \int_L f\,\mathrm{d}s = f(P)\sigma(L)$

对称性： 对弧长的曲线积分具有与二重积分、三重积分类似的“偶倍奇零” 和 “轮换对称性” 的计算性质.

第一型曲线积分的计算

定理：设 L 是空间中一条光滑曲线，其参数方程表示为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

$\varphi(x,y,z)$ 在 L 上连续，则 $\varphi(x,y,z)$ 在曲线 L 上可积，且

$$\begin{aligned}\int_L \varphi(x,y,z)\mathrm{d}s &= \int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t),z(t))\left|\mathbf{r}'(t)\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

计算曲线积分的重点方法：**找曲线的参数化.**

注意：**积分表达式中的变元满足曲线方程.**

若**平面曲线** L 由 $y = y(x)\ (a \le x \le b)$ 给出，则可视为参数方程表示为 $x = x,\ y = f(x),\ z = 0$ 的空间曲线，其中变量 x 视为参变量. 因此有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

若**平面曲线** L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$, 看作空间曲线有参数化：$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,\ z = 0.$ 故有：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

Examples：

1. 求曲线积分 $\int_L xy\,\mathrm{d}s$，其中 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的弧段.

2. 求曲线积分 $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中 L 是以平面上 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界.

3. 求 $\int_L \left(x^2 + xy\right) \mathrm{d}s$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, $R>0$.

4. 求 $\int_L x^2 \,\mathrm{d}s$, 其中 L 是球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, $R>0$.

本小节作业：

P193: 1(2,5)，2(3,5,9,11,12)，3