2月26日

8.1.6. $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\vec{c}$
$=0$. 由$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是单位向量即得 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$

8.1.7 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7|\vec{a}|^2-15|\vec{b}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ①

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ②

15①+8②得. $161|\vec{a}|^2-161|\vec{b}|^2$. 即$|\vec{a}|=|\vec{b}|$. 代入①可得

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$. 即$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

8.1.14: $\vec{a}-\vec{b}=(4,-6,12)$ $|\vec{a}-\vec{b}|=14$.

方向余弦为: $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$

8.1.16: 设 $\vec{a}=(x,y,z)$, 则 $\dfrac{\vec{a}\cdot(1,0,0)}{|\vec{a}|\times|(1,0,0)|}=\cos 60°$. 即 $x=1$.

同理 $y=-1$. 又因为$|\vec{a}|=2$. 故 $\sqrt{1^2+(-1)^2+z^2}=2$. 得 $z=\pm\sqrt{2}$

故$\vec{a}=(1,-1,\sqrt{2})$ 或 $(1,-1,-\sqrt{2})$

8.1.17. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}=\overrightarrow{AB}$

故 A、B、C 共线

8.1.18 (2)

$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{b}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times3^2-4\times4^2+4\times3\times4\times\cos\frac{2\pi}{3}$
$=-61$

8.1.21: $\vec{a}\cdot\vec{e}_b=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{5\times2+2\times(-1)+5\times2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{18}{3}=6$

2月28日

8.1.8. $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}|=2|\vec{b}\times\vec{a}|$
$=2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3}=24$

$|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|=|3\vec{a}\times\vec{a}-6\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{b}|=5|\vec{a}\times\vec{b}|$

$=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{6}=60$

8.1.10 $\vec{0}=\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}$

故 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$.

同理 $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. 故 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

8.1.23 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-3)$ $\overrightarrow{BC}=(2,2,9)$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|(-12,-24,8)|=14$

8.1.24. $V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{6}|(3,6,3)\times(1,3,-2)\cdot(2,2,2)|$

$=\frac{1}{6}|(-21,9,3)\cdot(2,2,2)|=3$

8.1.26 $\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\1&0&1&5\\1&-1&2&1\\1&2&1&3\end{vmatrix}=0$. 故A.B.C.D共面.

8.1.29. 设 $P=(0,y,z)$

则 $9^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2$

消去二次项可得 $\begin{cases}-2y-4z+14=4y+4z+24\\-2y-4z+14=-10y-2z+26\end{cases}$

解得 $\begin{cases}y=1\\z=-2\end{cases}$ 也即 $P=(0,1,-2)$

8.2.2 法向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{v}=(7,-7,-7)$

平面方程为 $(x-2)-(y+1)-(z-3)=0$ 也即 $x-y-z=0$

8.2.3. 若截距为0. 则过 $(5,-7,4)$ 与 $(0,0,0)$ 的平面束均符合条件

若截距 $d\neq 0$. 设 $\frac{x}{d}+\frac{y}{d}+\frac{z}{d}=1$. 代入点 $(5,-7,4)$ 可得 $d=2$

即平面方程为 $x+y+z-2=0$

8.2.5. 法向量为 $(2,0,-1)\times(0,1,0)=(1,0,2)$

方程为 $(x-3)+2(z-1)=0$ 即 $x+2z-5=0$

3月1日

8.2.7(2). 两平面的法向量分别是 $\vec{u}=(4,2,4)$ 与 $\vec{v}=(3,-4,0)$

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\frac{2}{15}$. $\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 于是两平面的夹角

为 $\arccos\frac{2}{15}$

8.2.8(1) $d=\frac{|16\times 2-12\times(-1)+15\times(-1)-4|}{\sqrt{16^2+12^2+15^2}}=1$

8.2.10(1) $5\times 2+3\times(-1)+1\times 1-18=-10$ 同侧

$5\times 0+3\times 0+1\times 0-18=-18$

8.2.12 设 $(x,y,z)$ 是平分面上任意一点

则 $\frac{|2x-y+z-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|x+y+2z-11|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$

即 $|2x-y+z-7|=|x+y+2z-11|$

也即 $x-2y-z+4=0$ 或 $x+z-6=0$

8.2.13. 设该点坐标为 $(x,y,z)$. 则 $x,y,z>0$, $1-x-y-z>0$

且 $\frac{1-x-y-z}{\sqrt{3}}=x=y=z \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ y=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ z=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$ 即该点为 $(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6})$

8.2.15 (1) 该直线的方向向量为 $(1,0,2)\times(0,1,-3)=(-2,3,1)$

方程为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$

(4) 两直线的方向向量分别为 $(2,-4,1)\times(1,3,0)=(-3,1,10)$ 和 $(4,-1,2)$

于是所求直线的方向向量为 $(-3,1,10)\times(4,-1,2)=(12,46,-1)$.

方程为 $\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{y+4}{46}=\dfrac{z-3}{-1}$

8.2.16 方向向量为 $(2,3,-1)\times(3,-5,2)=(1,-7,-19)$.

取直线上一点 $(1,0,-2)$. 参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\ y=-7t\\ z=-2-19t\end{cases}$

8.2.19 (1)

直线1的方向向量为 $(-2,3,1)$

直线2的方向向量为 $(1,1,-1)\times(1,-1,5)=(4,-6,2)=-2(-2,3,1)$.

取 $l_1$ 上一点 $P=(-2,1,0)$; $l_2$ 上一点 $Q=(4,-4,0)$

距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times(-2,3,1)|}{|(-2,3,1)|}=\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{14}}=\dfrac{5}{14}\sqrt{70}$

8.2.22 (2) 直线的方向向量 $\vec{n}=(1,1,-1)\times(2,0,1)=(1,-3,-2)$

取直线上一点 $P=(0,4,3)$.

$d=\dfrac{|\overrightarrow{PM_0}\times\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

8.2.24 直线的方向向量为 $(3,2,-1)\times(2,-3,2)=(1,-8,-13)$.

平面法向量为 $(1,-8,-13)\times(1,2,3)=(2,-16,10)$

取直线上一点 $(0,0,-1)$. 平面方程为 $x-8y+5(z+1)=0$

也即 $x-8y+5z+5=0$

8.2.28. 设投影点为$(t-7, 2t-2, 3t-2)$

则 $(t-7-2, 2t-2-3, 3t-2-1) \perp (1,2,3)$

解得 $t=2$. 也即投影点为$(-5,2,4)$.

8.2.33 直线方向向量为$(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$

取直线上一点$(0,0,-1)$. 可知参数方程为 $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t-1 \end{cases}$

联立直线与平面方程. 解得交点为$(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

过$(0,0,-1)$垂直于该平面的直线为 $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t-1 \end{cases}$

代入 $x+y+z=0$ 得 $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{cases}$. 也即$(0,0,-1)$的投影为$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

所求直线的方向向量为 $(\frac{1}{3}-0, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}+\frac{1}{2})=(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$.

方程为 $\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{-1}$

8.2.35 设原点到该直线的投影点为$(5+4t, 2+3t, -1-2t)$

于是$(5+4t, 2+3t, -1-2t) \perp (4,3,-2)$

解得 $t=\frac{-28}{29}$ 也即投影点为$(\frac{33}{29}, \frac{-26}{29}, \frac{27}{29})$.

直线方程为 $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$