中 国 科 学 技 术 大 学
2022 - 2023学年第一学期期中考试试卷

考试科目：　　线性代数（B1）　　　得分：________

所在院、系：________　姓名：________　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

装订线　答题时不要超过此线

一、【5+5+5+5+5+6=31分】填空题:

1. 写出向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\8\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-9\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\8\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$ 的

一个极大线性无关组________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix}-3 & x & 7 & x\\ 1 & x & 5 & -1\\ 4 & 3 & -x & 1\\ 2x & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 的完全展开式中, x^4 项的系数为________.

3. 已知 $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 则 $A=$________.

4. 设 B,C,D 均为 n 阶方阵, 且 B,C 可逆. 则 $M=\begin{pmatrix}O & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 也可逆, 且

$M^{-1}=$________.

扫描全能王 创建

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 则集合 $V = \{B \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid AB = O\}$ 是 $\mathbb{R}^{4\times 4}$ 的子空间、子空间的维数 $\dim V =$ ____________.

6. 将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 分解成矩阵乘积 $A = LU$, 其中 L 为下三角方阵, U 为

U

上三角方阵, 且主对角线上的元素为1或0. 则 $L =$ ____________________,

$U =$ ____________________.

二、【每小题5分, 共20分】判断题: 判断下列命题是否正确, 正确的简单说明理由, 错误的举出反例.

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则 $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3$, $4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$ 也是该方程组的基础解系.

扫描全能王 创建

2. 设 A, B 都是 n 阶方阵. 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

3. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 若线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 与 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 同解, 则 A 与 B 的列向量组等价.

4. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $AA^{\mathrm{T}} = A^2$. 则 A 为对称矩阵.

扫描全能王 创建

三、【6+6=12分】考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 &= 2 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4 &= 1 \\ x_1+4x_2-3x_3+16x_4 &= a \end{cases}$.

(1) 根据 a 的取值, 讨论方程组解的情况.

(2) 有解时, 求出方程组的通解.

扫描全能王 创建

四、【8分】计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}, \quad (\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n \neq 0).$$

扫描全能王 创建

五、　【8+4+4=16分】考虑 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的两组基

$$\Gamma_1 : A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_2 : B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 Γ_1 到 Γ_2 的过渡矩阵.

(2) 已知 $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 在 Γ_2 下的坐标是 $(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 求 C 在 Γ_1 下的坐标.

(3) 求所有的 $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, 使得 D 在 Γ_1 和 Γ_2 下的坐标相同.

扫描全能王 创建

六、【6+7=13分】已知 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, $m \le n$

(1) 证明: $\exists\, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 满足$AB = O$, $BA = O$, 且 $\mathrm{rank}(B) = m - r$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 求一个满足 (1) 中条件的 B.

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1) 写出A相抵标准形 1'

写出 $m=r$ 情况 $B=0$ 1'

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) 求出 rank 1'

对A作了行列变换 2' 求出P, Q逆 3'

$\begin{pmatrix} 11 & -\frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -7 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

扫描全能王 创建