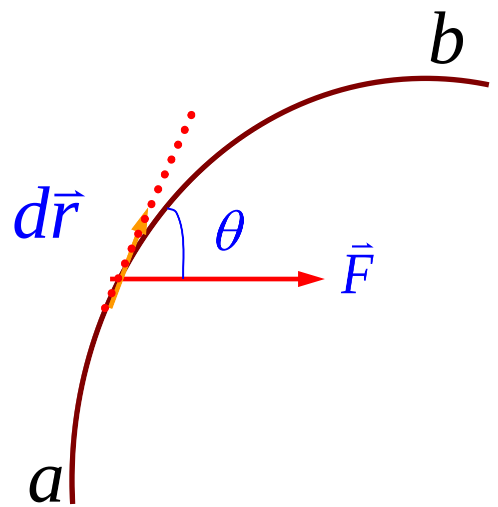
第五章　动能定理

§5.1 功和功率

1、功

功：力和力所作用的质点（或质元）的位移的标量积。

元功：$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\theta \cdot |d\vec{r}|$



质点从***a***到***b***的运动过程中，力F 所作的功

$$W = \int_a^b dW = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

单位： 1焦耳(J)＝1牛顿（N）·米（m）

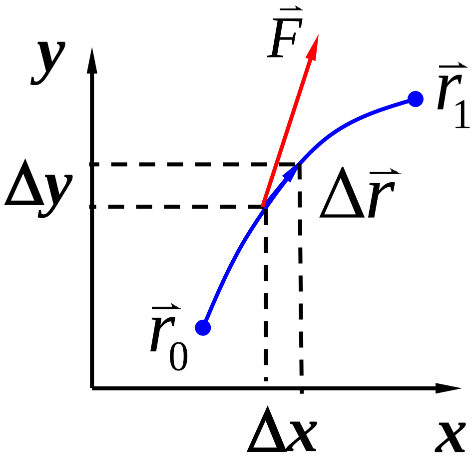
量纲： $\mathbf{ML^2T^{-2}}$

功是力对空间的累积作用，总是与一个过程相联系。

2、利用不同坐标系表示元功

●直角坐标系

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \\ d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \end{cases}$$



$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= \left(F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z\right)\bullet\left(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z\right) \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

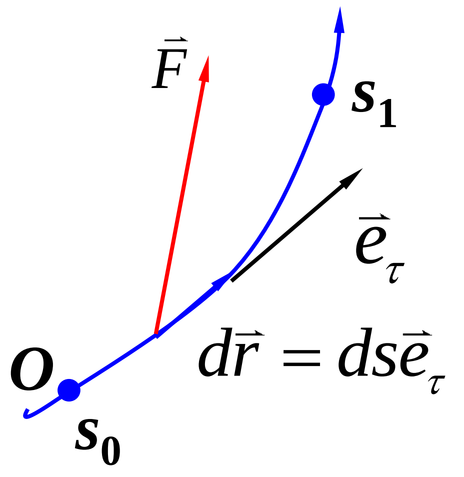
若力沿直线位移做功，令x轴与位移重合，则有

$$\mathrm{d}W = F_x dx$$

●自然坐标系

$$\begin{cases} \vec{F} = F_\tau \vec{e}_\tau + F_n \vec{e}_n \\ d\vec{r} = \vec{v}dt = vdt\vec{e}_\tau = ds\vec{e}_\tau \end{cases}$$

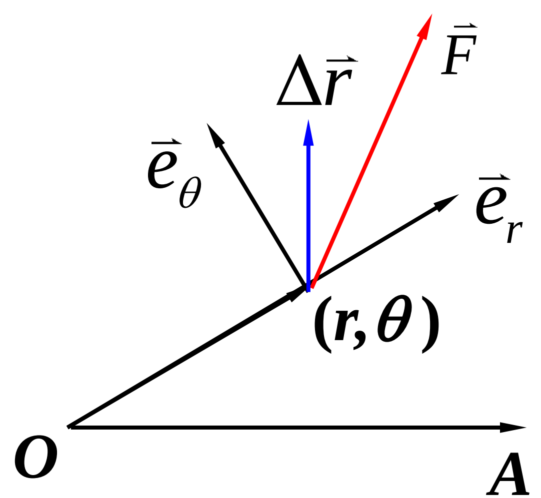
$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= (F_\tau \vec{e}_\tau + F_n \vec{e}_n) \cdot ds\vec{e}_\tau \\ &= F_\tau ds \end{aligned}$$



●平面极坐标系

$$\begin{cases} \vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta \\ d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= (F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta) \cdot (dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta) \\ &= F_r dr + F_\theta rd\theta \end{aligned}$$



几点说明：

①功是标量，但有正负，与力和位移的夹角有关。

②功是力对空间的积累，是过程量，与路径有关。

③几个力同时作用在物体上时，所作的功：

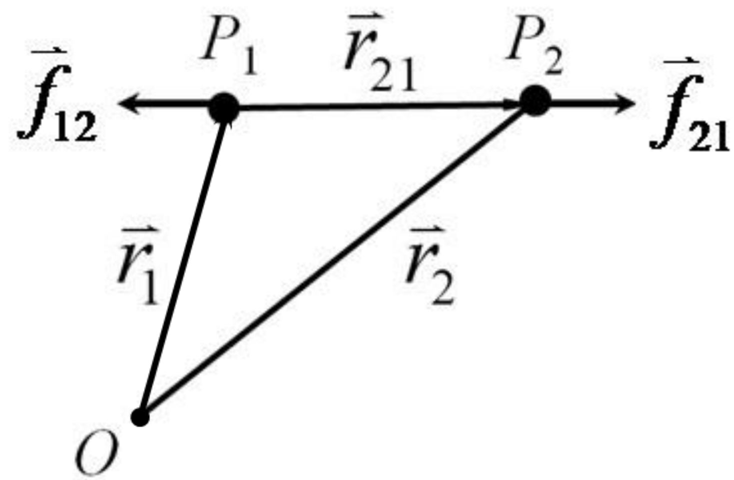
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_i + \ldots$$

$$\therefore W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots)$$
$$= W_1 + W_2 + \ldots$$

合力对质点所作的功，等于每个分力所作的功的代数和。

④一对作用力与反作用力做功

$$dW = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$
$$= (-\vec{f}_{21}) \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2$$
$$= \vec{f}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$
$$= \vec{f}_{21} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_{21}$$



$d\vec{r}_{21}$ 为第 2个质点相对第1个质点的位移，它与参照系选取无关。

两个质点之间的一对作用力与反作用力作功之和在任意参考系中都是相同的！

3、功率

功率——力在单位时间内所做的功。

平均功率：$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

瞬时功率：$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

额定功率——最大输出功率。

在SI单位中，功率的单位为瓦特（W）：1W=1J/s

量纲：　$\mathrm{ML^2T^{-3}}$

例题1： 马拉雪橇水平前进，自起点 A 沿某一长为 L 的曲线路径拉至终点 B。雪橇与雪地间的正压力为 N，摩擦因数为 μ，求摩擦力的功。

解： 沿雪橇轨迹取自然坐标，雪橇前进方向为自然坐标增加的方向

$$W=\int_{s_0}^{s_1} F_{\tau} ds$$

摩擦力的功

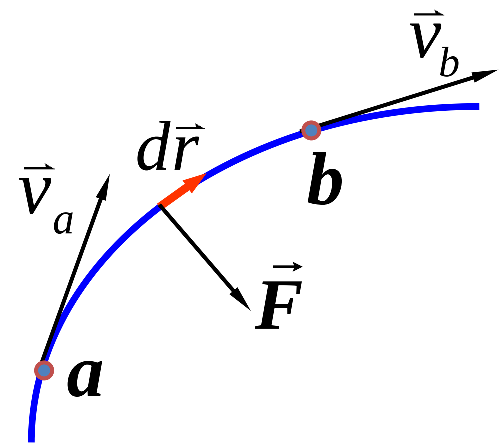
$$W=-\int_{A}^{B} \mu N ds=-\mu N s\Big|_{0}^{L}=-\mu N L$$

摩擦力的功与路径有关。

§5.2 质点和质点组动能定理

1、单质点的动能定理

物体在合力F作用下，由$a \to b$，则力F做功



$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=m\int \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$=m\int d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$=m\int \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$=m\frac{1}{2}\int d(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$=\frac{1}{2}m\int d(v^2)$$

$$=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

定义物体的动能： $E_k=\frac{1}{2}mv^2$

则有：

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=E_k-E_{k0}$$ ——动能定理

即：合力$\vec{F}$ 对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

几点说明：

①质点动能定理的微分形式： $dW = dE_k$

②功与动能之间的区别和联系：

区别： 功与物体的状态变化过程相联系，为过程量；动能决定于质点的运动状态，动能是状态量。

联系： 外力做的功是动能变化的量度： $W > 0 \to \Delta E_k \uparrow$; $W < 0 \to \Delta E_k \downarrow$

③动能定理只适用于惯性系。非惯性系中引入惯性力作功，它与真实力作功之和也等于质点在非惯性系中动能的增量。

$$dW_{惯} + dW = dE_k$$

④动能定理对于物体运动所能提供的信息比牛顿运动定律少。

2、质点组的动能定理

n个质点组成的系统，对第i个质点用动能定理

$$W_{i外}+W_{i内}=E_{ki}-E_{ki0}$$

对n个质点的动能定理求和

$$\sum_i W_{i外}+\sum_i W_{i内}=\sum_i E_{ki}-\sum_i E_{ki0}$$

定义：

$$W_{外}=\sum_{i=1}^{n} W_{i外} \mapsto 外力做的功$$

$$W_{内}=\sum_{i=1}^{n} W_{i内}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} W_{ij}=\sum_{i<j}\left(W_{ij}+W_{ji}\right) \mapsto 内力做的功$$

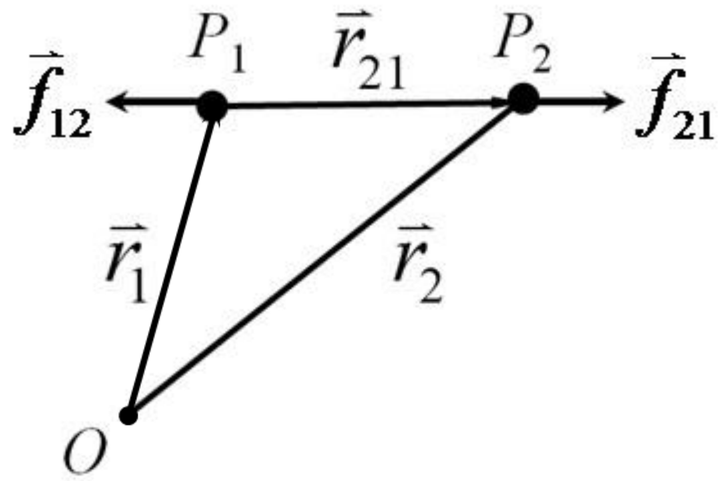
$$E_k=\sum_{i=1}^{n} E_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 \mapsto 质点组的总动能$$

$$\boxed{W_{外}+W_{内}=E_k-E_{k0}}$$ ——质点系动 能定理

即：作用于质点系的所有外力所作之功与所有内力所作之功的总和等于质点系动能的增量！

●一对作用力与反作用力做功之和

$$dW_{12}+dW_{21}=\vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2$$
$$=(-\vec{f}_{21})\cdot d\vec{r}_1+\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2$$
$$=\vec{f}_{21}\cdot(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)$$
$$=\vec{f}_{21}\cdot d(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_{21}$$



➢**说明**

①内力的总冲量虽然为零，但内力的总功一般不为零;

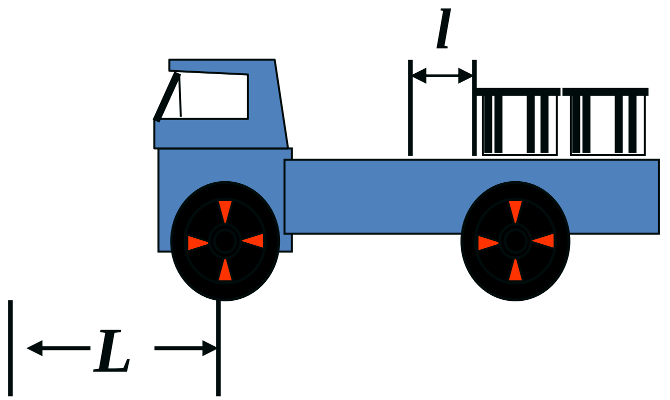
②内力的总功与参考系无关;

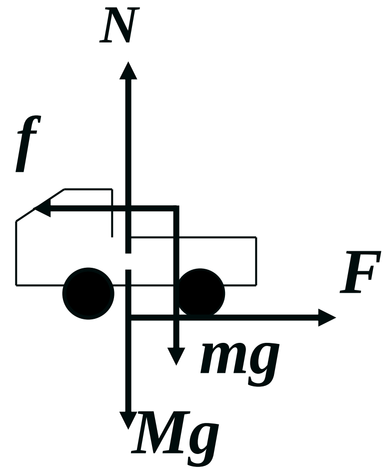
内力所做的总功只与1、2质点之间相对距离变化有关，而二质点相对距离变化与参考系的选择无关。

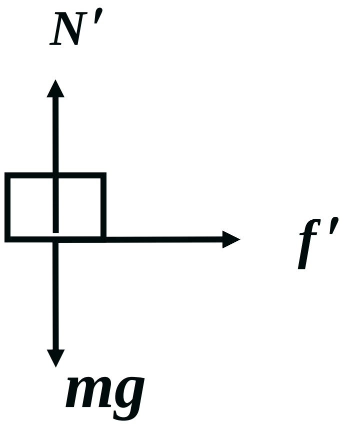
③一对内力所做的功, 只决定于两质点的相对路径，对非惯性系同样成立。

【思考题】摩擦力总是做负功或者不做功?

例题2： 如图，质量为M的卡车载一质量为m的木箱，以速率v沿平直路面行驶。因故突然紧急刹车，车轮立即停止转动，卡车滑行一定距离后静止，木箱在卡车上相对于卡车滑行了l 距离,卡车滑行了L 距离。求 L 和 l 。已知木箱与卡车间的滑动摩擦系数为 μ_1，卡车轮与地面的滑动摩擦系数为μ_2。





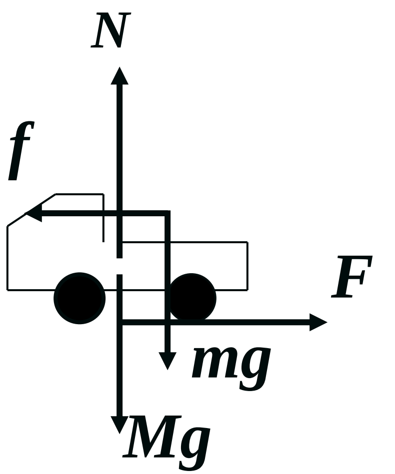


解： **解法一**（用质点动能定理求解）

卡车和木箱受力如图。只有二者间摩擦力 f、f' 和地面对车的摩擦力 F 做功，三力之受力质点位移各为 L、$L+l$、L。

根据质点动能定理得

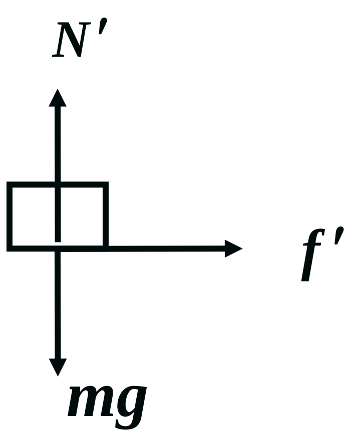
卡车：



$$[f-F]L=0-\frac{1}{2}Mv^2,\quad (1)$$

$$f=\mu_1 mg,\quad F=\mu_2(m+M)g$$

木箱：



$$-f(L+l)=0-\frac{1}{2}mv^2,\quad (2)$$

解得

$$L=\frac{Mv^2}{2[\mu_2(M+m)-\mu_1 m]g},\quad l=\frac{v^2}{2\mu_1 g}-L$$

解法二（用质点系动能定理求解）

视卡车与木箱为一质点系，外力F 做功 $-\mu_2(M+m)gL$ ，

内力做功等于力与相对位移的标积，即 $-\mu_1 mgl$

根据质点系动能定理，有

$$-\mu_1 mgl-\mu_2(M+m)gL=0-\frac{1}{2}(M+m)v^2,\text{（3）}$$

又视木箱为质点，应用动能定理可得

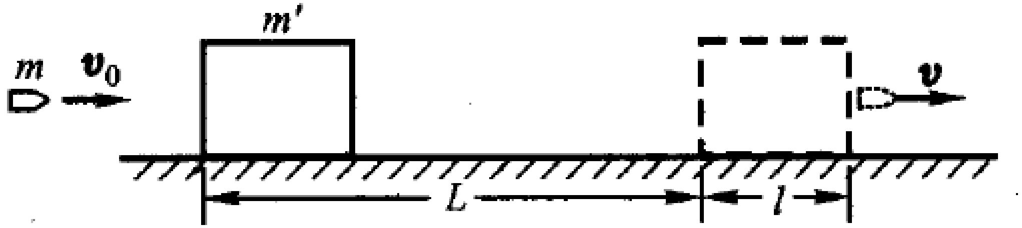
$$-\mu_1 mg(L+l)=0-\frac{1}{2}mv^2,\quad (2)$$

联立以上两式可解得:

$$L=\frac{Mv^2}{2\left[\mu_2(M+m)-\mu_1 m\right]g},\quad l=\frac{v^2}{2\mu_1 g}-L$$

得到与质点法相同的结果。

例题3： 质量为m'、宽度为l的木块至于光滑水平面上，质量为m的子弹以速度v_0水平射入木块，以速度v自木块穿出，求从子弹进入木块到离开木块的整个过程中木块前进的距离L。设子弹在木块中受到的摩擦阻力为常量。



解： 子弹和木块体系水平方向动量守恒，因而有

$$mv_0 = m'v' + mv, \quad v' \text{ 为木块的末速度}$$

由此可得木块的末速度

$$v' = \frac{m}{m'}(v_0 - v) \qquad (1)$$

设摩擦力为 f, 此力对木块作用的距离为L，由动能定理

$$fL = \frac{1}{2}m'v'^2 \qquad (2)$$

对于子弹和木块组成的系统，外力不做功，只有子弹和木块之间的摩擦内力做功，其大小等于摩擦力与相对位移的标积，即为**-*fl***，根据动能定理，

$$-fl=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m'v'^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (3)$$

可得

$$f=\frac{1}{l}\left[\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m'v'^2\right]=\frac{m}{2l}\left[v_0^2-v^2-\frac{m}{m'}(v_0-v)^2\right] \qquad (4)$$

将（4）式带入（2）式可得

$$L=\frac{m'v'^2}{2f}=\frac{l(m^2/m')(v_0-v)^2}{m\left[v_0^2-v^2-\frac{m}{m'}(v_0-v)^2\right]}=\frac{lm(v_0-v)}{m'(v_0+v)-m(v_0-v)}$$

§5.3 保守力与势能

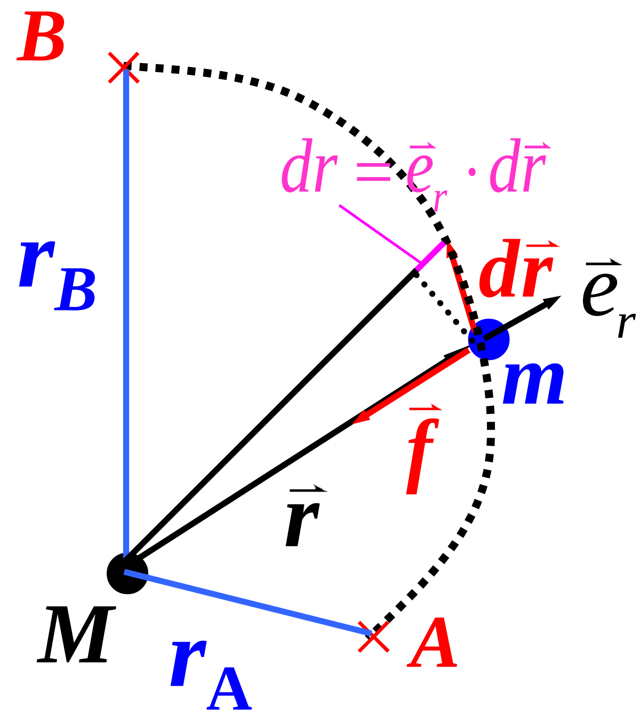
1、常见的力做功

①万有引力作功

以 M 为参考系，m 的位置矢量为 $\vec{r}$。

M 对 m 的万有引力为

$$\boxed{\vec{f} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}}$$



m 由A点移动到B点时 $\vec{f}$ 作功为

$$W_{12} + W_{21} = \int \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

引力作功只取决于质点的初终位置，与路径具体路迹无关。

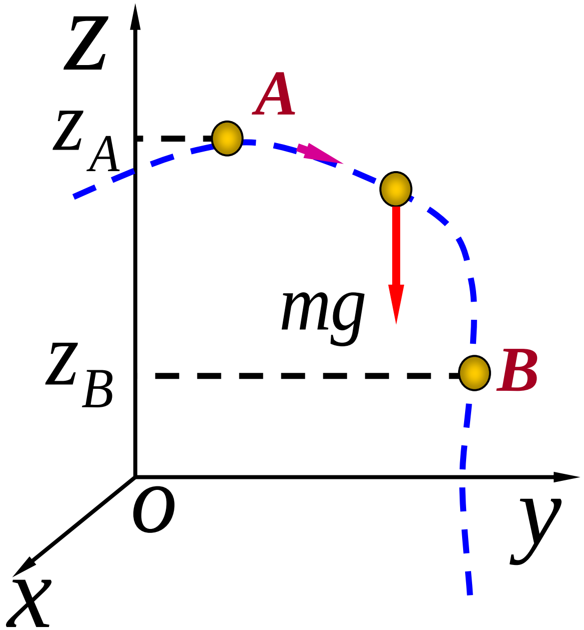
$$\oint \vec{f}(r)\cdot d\vec{r} = 0$$

②重力作功

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{z_A}^{z_B} -mgdz$$

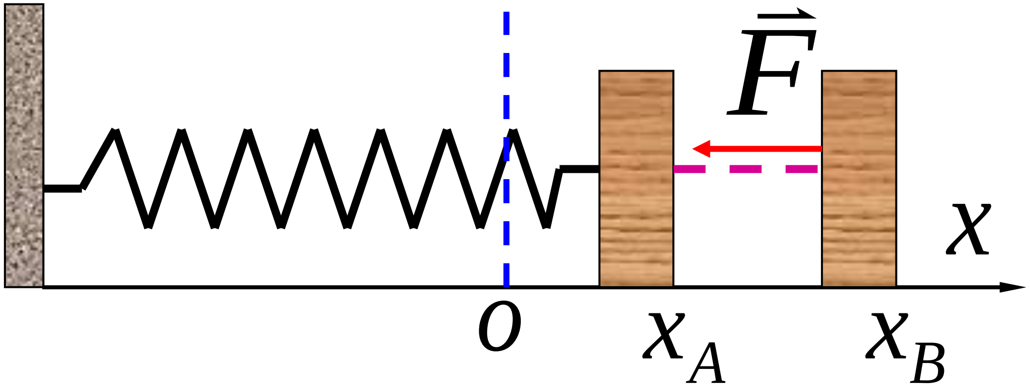
$$= mgz_A - mgz_B$$



重力对物体所作的功只与物体初始位置和终止位置有关，与经过的路径无关。

$$\Rightarrow \quad W = \oint \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \oint -mgdz = 0$$

③弹性力作功



$$F = -kx\vec{e}_x$$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$W = \oint -kx dx = 0$$

在弹性限度内，弹性力所作的功只由弹簧的起始和终了位置决定，而与形变的过程无关。

④摩擦力作功

$$\vec{F} = -f\,\vec{e}_{\tau} = -\mu N\vec{e}_{\tau}$$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int -f ds = \int -\mu N ds = -\mu N s$$

摩擦力对物体所作的功不仅与物体初始位置和终止位置有关，还与其间经过的路径有关。

2. 保守力与非保守力

引力做功：$W = G\dfrac{Mm}{r_B} - G\dfrac{Mm}{r_A}$

重力做功：$W = mgz_A - mgz_B$

弹力做功：$W = \dfrac{1}{2}kx_A^2 - \dfrac{1}{2}kx_B^2$

摩擦力作功：$W = -\mu N s$

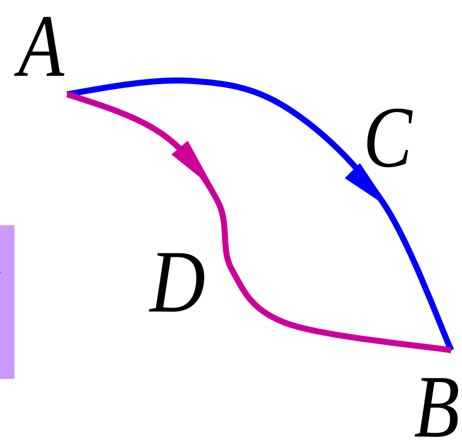
➢ **保守力**——力所作的功与路径无关（沿闭合路径做功为零），仅决定于相互作用质点的**始末**相对位置的力，例如：万有引力、库仑力、重力和弹力等。

从概念上来讲，保守力是针对一对内力来说的，单独说一个力是保守力，还是非保守力是没有意义的。

● 反映保守力作功特点的数学表达式：

物体沿不同路径从 A 到 B，保守力作功

$$W_{ACB}=W_{ADB} \Rightarrow \boxed{\int_{ACB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

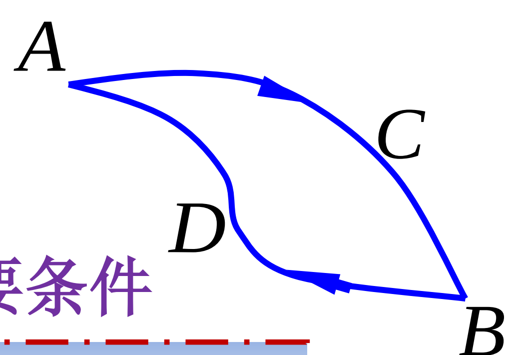


沿闭合路径运动一周，保守力作功：

$$\therefore \oint_l \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{ACB}\cancel{\vec{F}\cdot d\vec{r}}+\int_{BDA}\cancel{\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{r}=0} \rightarrow \text{保守力的充分必要条件}$$

保守力沿任意闭合路径作功为零。



➢保守力的一些判据：

①一维运动，凡是位置x单值函数的力都是保守力，如弹性力 $f = f(x) = -k(x - x_0)$ 是 x 的单值函数，故它是保守力；

②对于一维以上的运动，大小和方向都与位置无关的力，如重力 $f = mg$, 是保守力;

③有心力是保守力，例如万有引力、库仑力都是保守力。

➢非保守力——力所做的功不仅与始、末位置有关，而且与具体路径有关，或沿任一闭合路径一周作功不为零的力。

⇨ $\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0}$ ⟶ 非保守力的充分必要条件

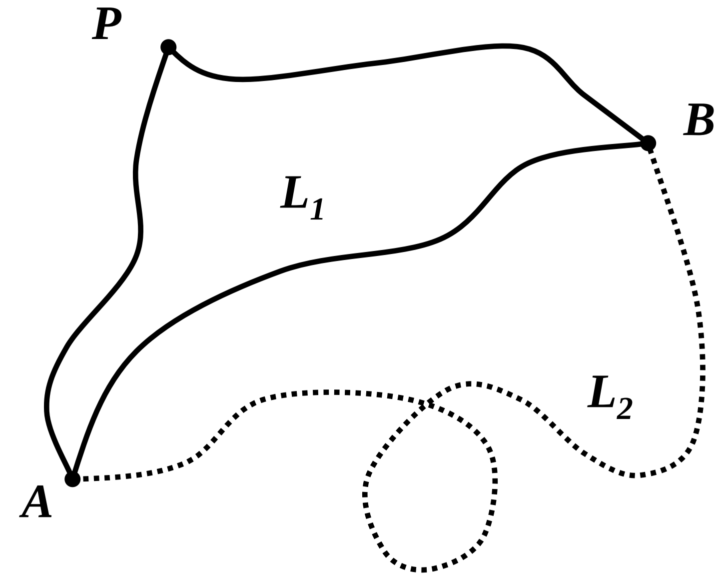
若$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$，称 $\vec{F}$ 为耗散力，如滑动摩檫力，将机械能转化为热能；

若$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$，如爆炸力，将其他形式的能（如化学能、电磁能）转化为机械能；

3. 势能

➢ 计算保守力所作的功:

任意选择一条两点之间的可能路径，在任意位置上取一个“标准点”（或称为“参考点”）P，则从A到B保守力作的功为:



$$W_{AB}=W_{AP}+W_{PB}=W_{AP}-W_{BP}$$
$$=-\left(W_{BP}-W_{AP}\right)$$

显然参考点处势能为零，因此参考点也称为势能零点。

定义质点在S系的每一个位置的势能:

$$E_p(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{参考点}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}}^{势能零点}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

即某一点的势能等于将质点从该点移动到参考点保守力作的功。

$$\Rightarrow W_{AB}=-\left(W_{BP}-W_{AP}\right)=-\left(E_p(\vec{r}_B)-E_p(\vec{r}_A)\right)=-\Delta E_p$$

即势能的减少等于保守力的功，或势能的增加等于保守力的负功。

●几点说明

①势能是状态（位置坐标）的函数，即：

$$E_p = E_p(\vec{r}) = E_p(x, y, z)$$

②势能是相对性的。为确定质点系在任一给定位置的势能值，必须选定某一位置为参考位置（势能零点），规定该点的势能为零。而势能零点可根据问题的需要任意选择；

③势能差有绝对意义，与参考零点选取无关，且在所有参考系中都是相同的。

④势能是属于系统的。势能既然与质点系各质点间相互作用的保守力相联系，所以势能是属于保守力相互作用着的整个系统，是一种相互作用能，不为单个物体所具有。

⑤从现代物理学的观点来看，势能是比力更为基本的概念，可认为它表示质点间的相互作用，或更一般意义上的粒子之间的相互作用。

4. 常见的势能

➢引力势能

万有引力场中，以两物体相距无穷远时的引力势能为零，则相距为r时的引力势能为

$$E_p(r)=\int_r^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}dr=-G\frac{Mm}{r}$$

➢重力势能

以地面为势能零点，离地面高为z的物体的重力势能为

$$E_p(z)=\int_z^{0}-mgdz=mgz$$

➢弹性势能

以弹簧原长处的势能为零，则弹簧伸长为x时的势能为

$$E_p(x)=-\int_x^{0}kxdx=\frac{1}{2}kx^2$$

5. 保守力与势能的关系

根据势能的定义，保守力所做的功等于势能的减少

$$W_{保} = -\Delta E_p$$

对一个无穷小的过程

$$dE_p = -dW_{保} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

势能的全微分公式

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

比较以上两式可得

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

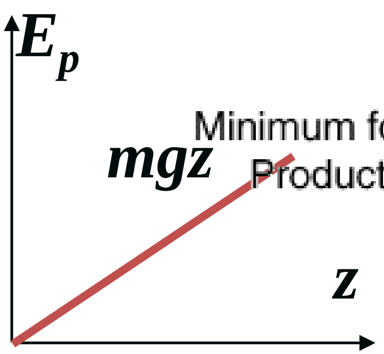
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z\right)}$$

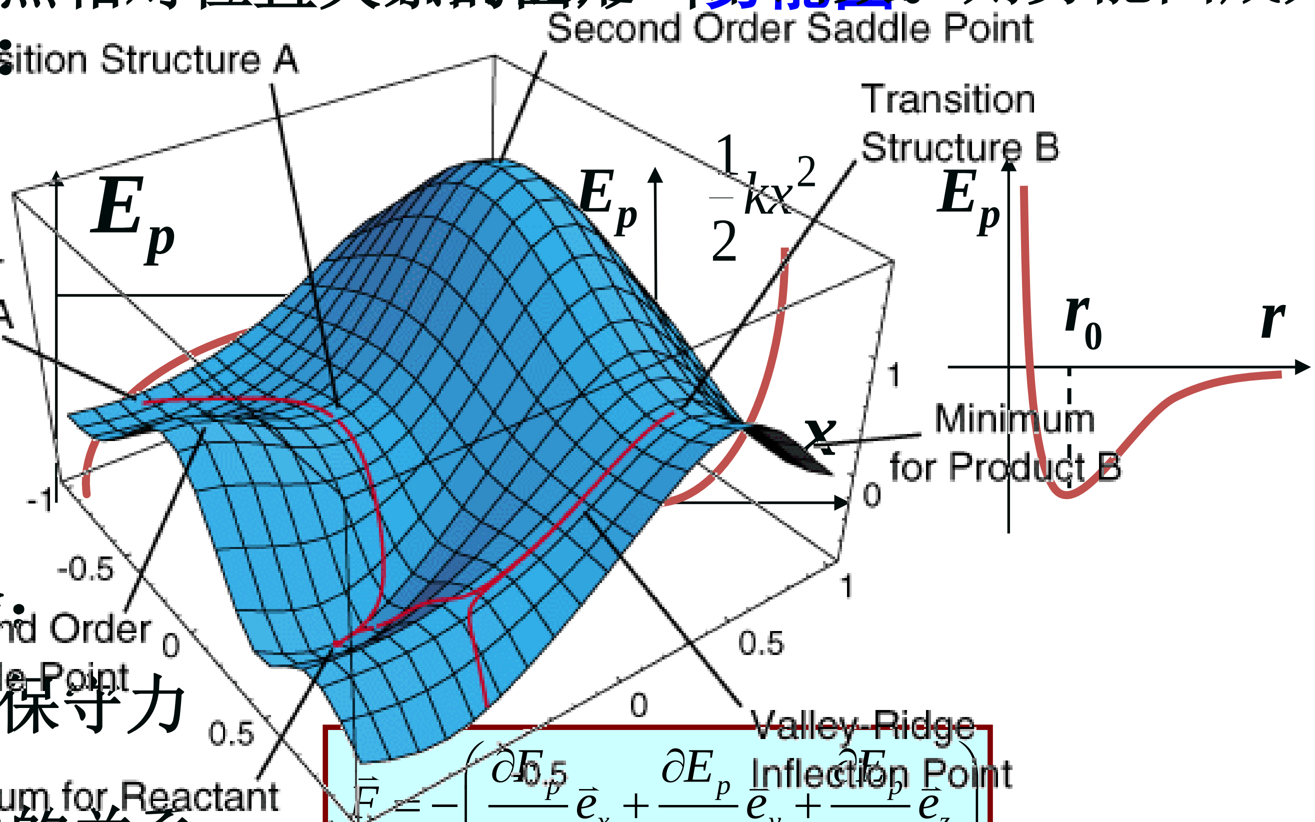
6. 势能曲线

当坐标系和势能零点一经确定，势能仅是坐标的函数

$$E_p(\vec{r}) = E_p(x, y, z)$$

表示势能与两质点相对位置关系的图形叫势能图。若势能是一维函数，则势能图成为**势能曲线**。如图：





● 势能曲线的用途：

①由势能曲线求保守力

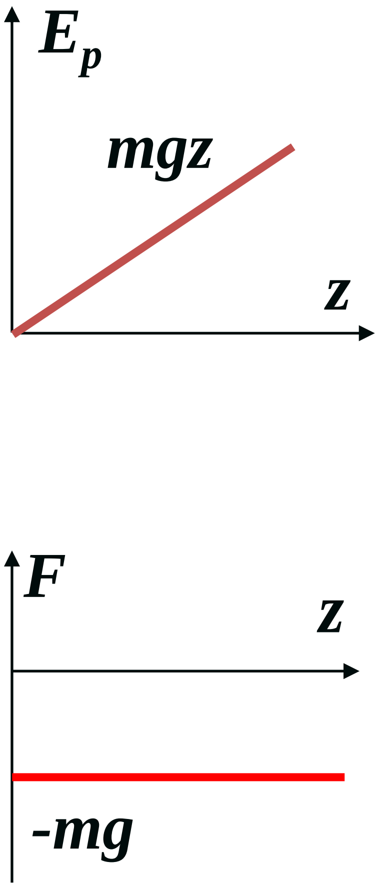
保守力与势能的关系：

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

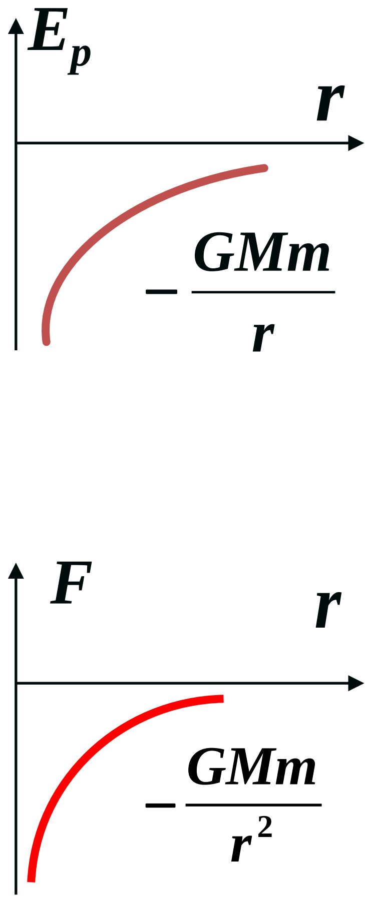
对一维的保守力*F*(*x*)而言：

$$F(x) = -\frac{dE_P(x)}{dx}$$

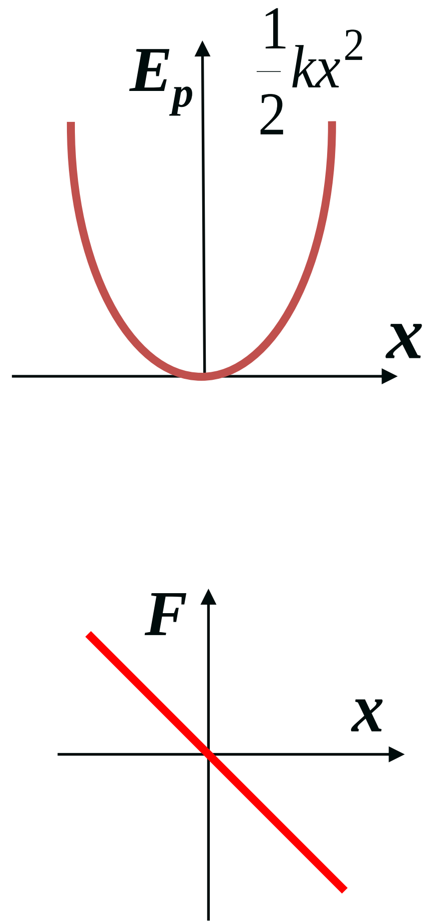
重力及其势能



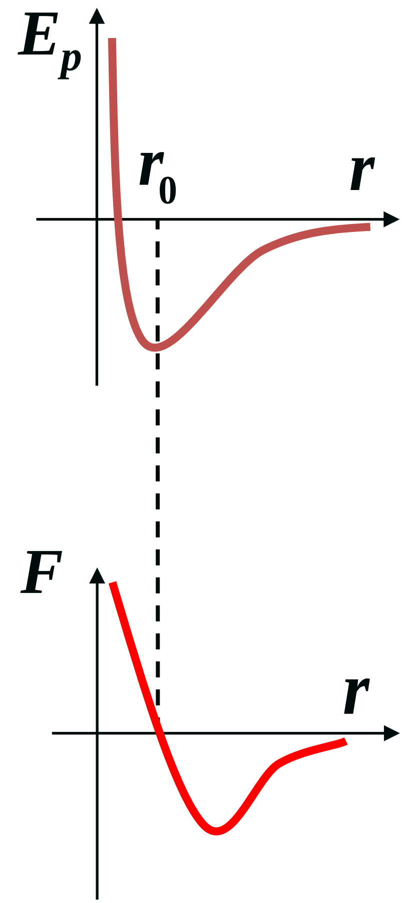
万有引力及其势能



弹性力及其势能



双原子分子及其势能



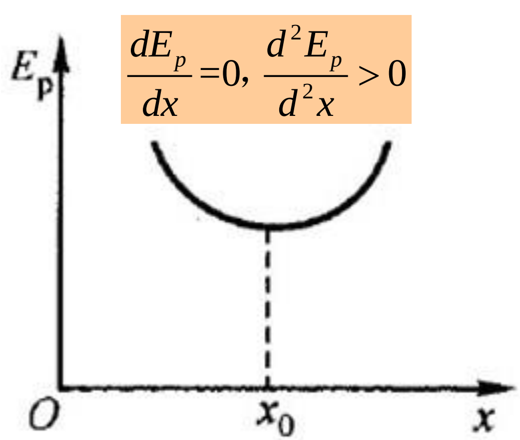
②求平衡位置及判断平衡的稳定性;

- 平衡位置：就是物体所受作用力为零的位置。平衡位置位于势能曲线的极值处。
- 平衡的稳定性：取决于偏离平衡位置时，物体所受力方向：

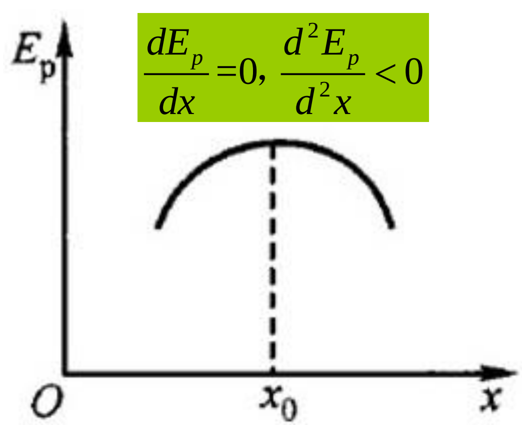
(a)稳定平衡($\frac{d^2E_p}{d^2x}>0$)，力始终指向平衡位置;

(b)不稳定平衡($\frac{d^2E_p}{d^2x}<0$)，离开平衡位置，力背离平衡位置方向;

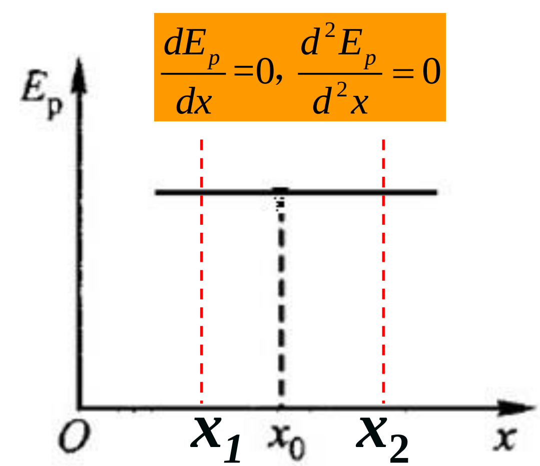
(c)随遇平衡（$x_1 \sim x_2$，$\vec{F}=0$ ）。



(a) 稳定平衡

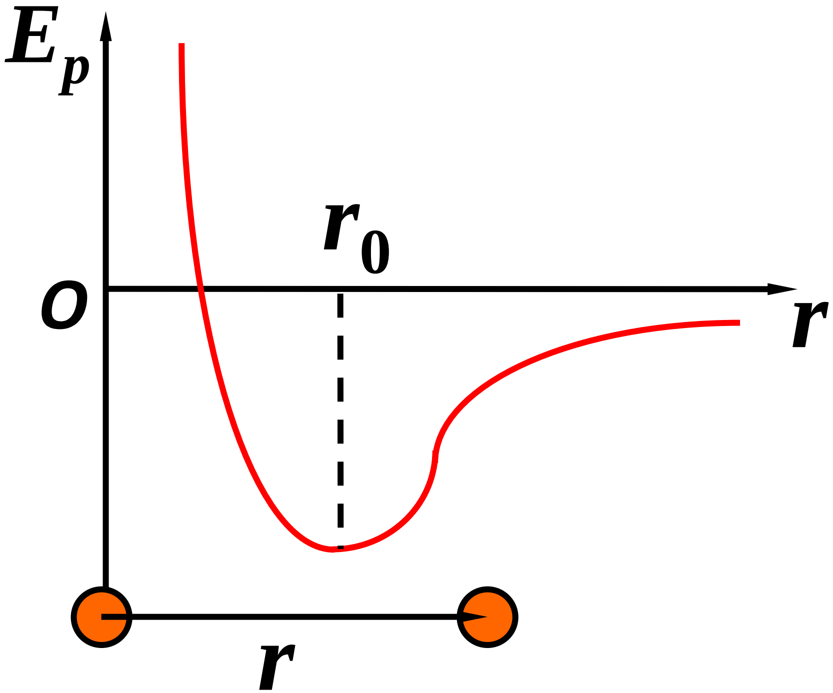


(b) 不稳定平衡



(c) 随遇平衡

例题4： 由双原子分子势能曲线定性讨论分子间相互作用力



$r = r_0$： 斜率 = 0， $f_r = 0$。

$r > r_0$： 斜率 > 0， $f_r < 0$，是引力。

$r < r_0$： 斜率 < 0， $f_r > 0$，是斥力。

§ 5. 4 功能原理和机械能守恒定律

1. 质点系功能原理

根据质点系的动能定理

$$W_{外} + W_{内} = E_k - E_{k0}$$

一般地

$$W_{内} = W_{保内} + W_{非保内}$$

$$\Rightarrow \quad W_{外} + W_{保内} + W_{非保内} = E_k - E_{k0}$$

进一步根据势能的定义

$$W_{保内} = -\left(E_p - E_{p0}\right)$$

机械能：

$\boldsymbol{E \equiv E_k + E_p}$

所以有

$$W_{外} + W_{非保内} = \left(E_k - E_{k0}\right) + \left(E_p - E_{p0}\right) = \left(E_k + E_p\right) - \left(E_{k0} + E_{p0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W_{外} + W_{非保内} = E - E_0$$

功能原理—— 质点系机械能的增量，等于外力与非保守内力对质点系做功之和。

2. 机械能守恒定律

功能原理：
$$W_{外} + W_{非保内} = E - E_0$$

（1）当$W_{外}$=0 时，若$W_{内非保} > 0$，则机械能E 增加，例如爆炸，是其它形式的能量（化学能、生物能）向机械能的转化。

（2）当$W_{外}$=0 时，若$W_{内非保} < 0$ ，则机械能E 减少, 力为耗散力，机械能向其它形式能量转换。

（3）若 $W_{外}+W_{内非保} = 0$, 即体系只有保守力作功, 此时系统机械能守恒。

$$E - E_0 = 0 \Rightarrow E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$$ ——机械能守恒定律

或可写为：$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

- 动能的增量等于势能的减少量;
- 动能与势能可以相互转换;
- 传递和转换是通过保守内力做功来完成的。

几点说明：

①功能原理和 机械能守恒定律只在惯性系中成立；非惯性系中要引入惯性力；

②在不同的参考系中，力所做的功，体系的动能和体系的机械能可能不同；

a.功与参考系有关:

- 内力做功与参考系无关；
- 外力做功与参考系有关.

b.体系的动能与参考系有关；

c. 体系的势能与参考系无关。

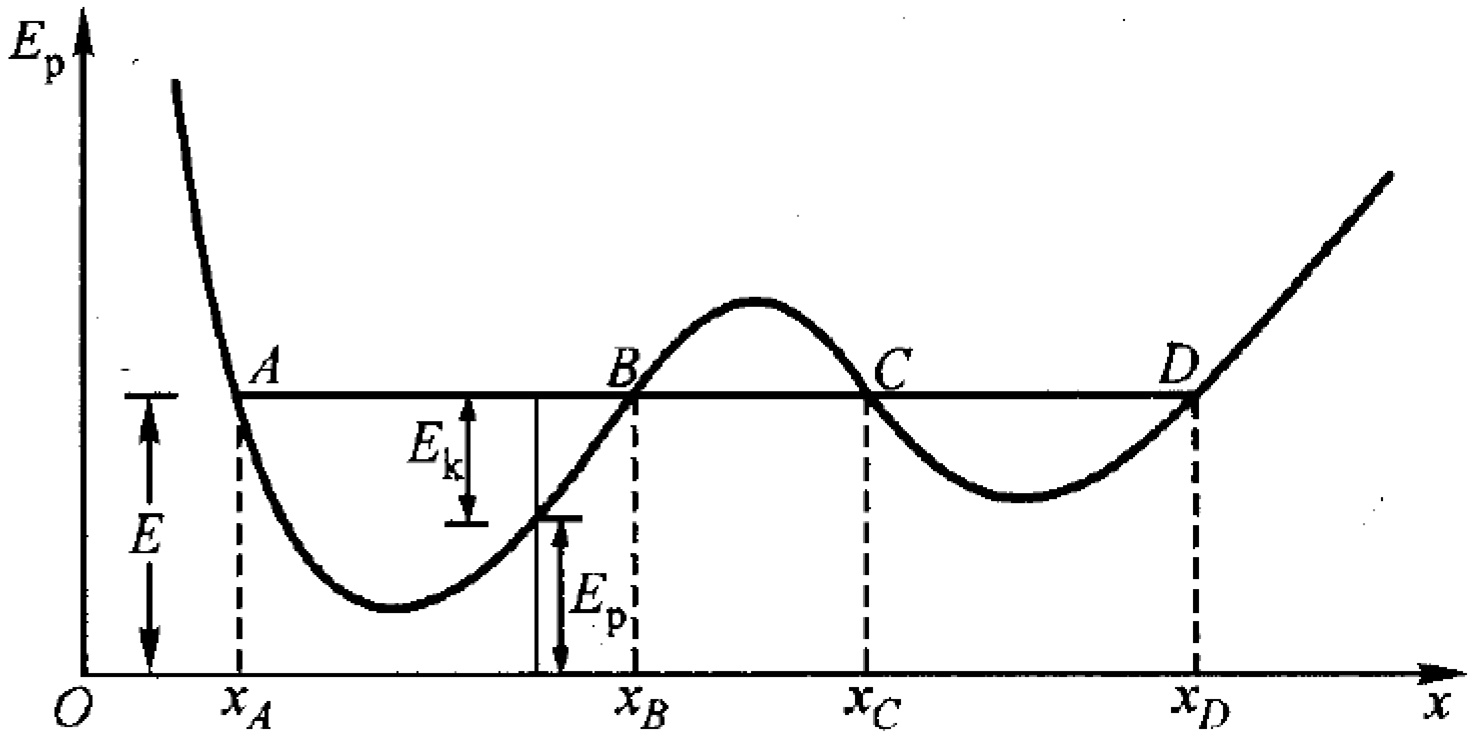
③一个体系在一个参考系中机械能守恒，但在另一个参考系中并不一定成立；

④功是过程量，能量是状态量。在力学范围内，做功的过程总是与体系能量的改变相联系。

⑤当物体的总机械能E为某一定值时，它的动能 E_k 为总能量E与势能之差：

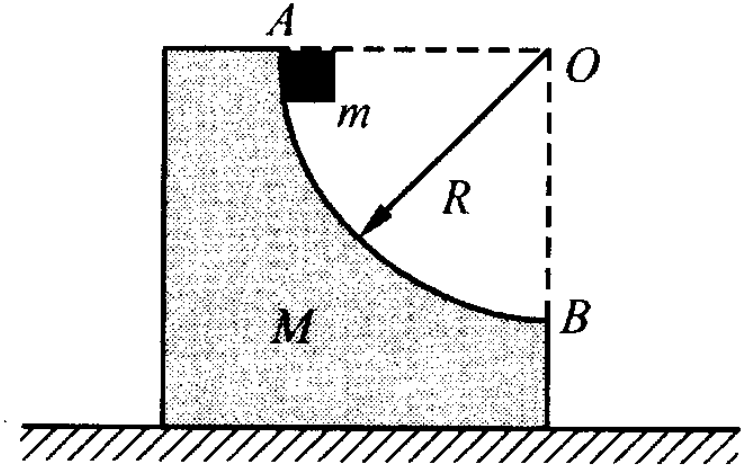
$$E_k = E - E_p$$

由于动能$E_k>0$，所以质点不可能在 $E_p>E$ 的区域内运动。

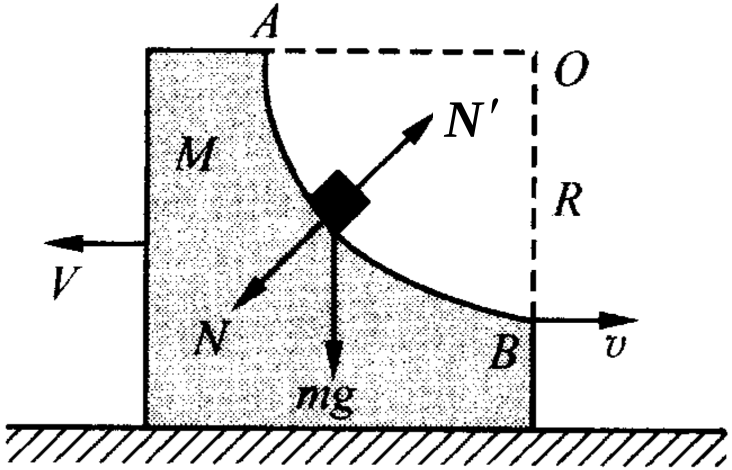


质点只能在 $x_A \le x \le x_B$ 或者 $x_C \le x \le x_D$ 范围内运动，不可能在 $x < x_A$，$x_B < x < x_C$，$x > x_D$ 等区域内运动。

例题5： 一质量为m的物体，从质量为 的园弧形槽顶由静止滑下，设园弧形槽的半径为R、张角为$\pi/2$，如忽略所有摩擦，求：(1)物体刚离开槽底端时，物体和槽的速度各为多少？(2)在物体从A滑到B的过程中，物体对滑槽做的功；(3)物体到达B时对槽的压力。



(a)



(b)

解：(1)将物体、槽、地球视为系统，仅有保守内力重力做功，系统机械能守恒。以v和V分别表示物体刚离开槽时物体和槽的速度，则有

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

对物体和槽，水平方向动量守恒

$$mv - MV = 0$$

联解可得

$$v = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}, \qquad V = m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

(2) 对槽，只有物体对它的压力N对它做功，依据动能定理，物体对槽做的功应等于槽动能的增量，即

$$W_N = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m^2 gR}{M+m}$$

(3)物体到达B的瞬间，槽在水平方向不受外力，加速度为0，视为惯性参照系。此时，物体的水平速度为

$$v' = v + V = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} + m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}} = \sqrt{\frac{2gR(m+M)}{M}}$$

根据牛顿定律

$$N' - mg = m\frac{v'^2}{R}$$

将式(1)代入，得

$$N' = mg + m\frac{v'^2}{R} = (3 + \frac{2m}{M})mg$$

§5.5 质心系中的功能原理和机械能守恒定律

1. 柯尼希定理

相对一定惯性参照系，质点系的动能为所有质点的动能之和

$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i\right)$$

设$\vec{v}_c$ 为质点系的质心速度，$\vec{v}_i'$ 为第$\boldsymbol{i}$ 个质点相对质心系的速度，则有

$$\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i'$$

代入上式得

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{v}_c+\vec{v}_i'\right)\cdot\left(\vec{v}_c+\vec{v}_i'\right)$$

$$=\sum\frac{1}{2}m_i v_c^2+\sum\frac{1}{2}m_i v_i'^2+\vec{v}_c\cdot\sum m_i\vec{v}_i'$$

质心系是“零动量系”满足 $\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$, 所以有

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

质心动能　　质点系相对质心动能

柯尼希定理——体系动能等于质心动能和体系相对质心系的动能之和。

➢注意：质点系的动量等于质心的动量，但是质点系的动能，在一般情况下并不等于质心的动能。

●两质点系统

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$\vec{v} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \mapsto$ 两质点的相对速度

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_C = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$

质心系中系统的动能

$$E_{kC} \equiv \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\vec{v}^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2$$

$\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 称为约化质量

2.质心系功能原理和机械能守恒定律

如果质点组所受合外力非零，则质点组的质心系是非惯性系，需要考虑惯性力的贡献：

$$W'_{外} + W'_{非保内} + W'_{惯} = E_C - E_{C0}$$

$$E_C = E_{kC} + E_p \mapsto 质心系中质点组的总机械能$$

作用于第*i*个质点的惯性力为 $-m_i\vec{a}_C$，这个力对质点 *i* 所做的功为 $\int_{t_0}^{t} -m_i\vec{a}_C \cdot d\vec{r}_i'$， 所以对系统做得总功为

$$W'_{惯} = \sum_i \int_{t_0}^{t} -m_i\vec{a}_C \cdot d\vec{r}_i' = -\int_{t_0}^{t} \vec{a}_C \cdot \sum_i m_i d\vec{r}_i' = -\int_{t_0}^{t} \vec{a}_C \cdot d\left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) = 0$$

于是我们有

$$W'_{外} + W'_{非保内} = E_C - E_{C0}$$ → 质心系中的功能原理

即在质心系中，外力的功与非保守内力的功之和等于体系机械能的增量，与惯性力无关。功能原理形式上与惯性系中的相同。

若在质心系中外力做功与非保守内力做功之和等于零，则可得质心系中的机械能守恒定律：

$$E_{kC}+E_{p}\equiv E_{C}=\text{常量}$$

两质点系统质心系的机械能守恒定律为

$$E_{kC}+E_{p}=\frac{1}{2}\mu\vec{v}^{2}+E_{p}\equiv E_{C}=\text{常量}$$

若一个质点的质量远大于另一个质点的质量，即**m_2>>m_1**, 则有

$$\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\simeq m_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{2}+E_{p}\simeq\frac{1}{2}m_1\vec{v}^{2}+E_{p}=\text{常量}$$

即体系的质心近似在大质量的质点**m_2**上，所以它的动能没有出现。

例如：物体在地球重力场中运动的机械能守恒定律（在质心系中）

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^{2}+mgh=\text{常量}$$

例题6：在地面上将质量为 $m = 1$千克的物体以 $v' = 4$米/秒的速率掷出，物体的速率从 0 变为 4米/秒，动能的增长 =(1/2)•1•4^2焦耳 = 8焦耳。由动能定理，需对它作功8焦耳。

①现在又在速率为 $v_0 = 2$米/秒的轮船上将同一物体以同一速率v'向前掷出。如选用“静止”参考系，物体的速率从 2 米/秒变为 6 米/秒，动能的增长 = (1/2)•1•6^2 - (1/2)•1•2^2焦耳 = 16焦耳。据动能定理，需对它作功 16 焦耳。

②现在又在那只轮船上将同一物体以同一速率向后掷出，即$v' = -4$米 / 秒，选用“静止”参考系，物体的速率$v= v' +v_0$从 +2米/秒变为-2米/秒，动能的增长 = 0。据动能定理，不需对它作功。

③由此可以得出结论：在轮船上抛掷物体所需的功与在岸上抛掷物体所需的功完全不同，向前掷与向后掷又是大不相同。在轮船进行任何球类比赛都几乎是不可能的，因为两方都是在完全不同的条件下向对方掷球的。经验表明，以上结论与事实完全不符合。

解法一：问题在于：由于作用与反作用定律，物体被抛掷出去，轮船相对于“静止”参考系统的速率也随之而变，轮船的速率将从 $\boldsymbol{v}_0$ 变为 $\boldsymbol{u}$。设轮船的质量为M，则由水平方向动量守恒可得

$$(m+M)v_0 = m(u+v')+Mu \quad \Rightarrow u = v_0 - \frac{m}{m+M}v'$$

所以在物体抛出前后体系的动能变化为

$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}m\left(u+v'\right)^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\
&= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}m\left(u+v'\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\
&= \frac{1}{2}M\left(v_0 - \frac{m}{m+M}v'\right)^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{m}{m+M}v' + v'\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\
&= -\frac{mM}{m+M}v_0v' + \frac{m^2M}{2\left(m+M\right)^2}v'^2 + \frac{mM}{m+M}v_0v' + \frac{mM^2}{2\left(m+M\right)^2}v'^2 \\
&= \frac{mM}{2\left(m+M\right)}v'^2 \simeq \frac{1}{2}mv'^2
\end{aligned}$$

所以不管向前还是向后抛掷物体，需做的功均是8J。

注意：在“静止”参考系中，物体被掷出做引起的船的速率变化很小，但是船的质量很大，因此船的动能改变颇为可观，可与物体的动能改变相比拟，不能忽略。

解法二：选取“轮船—抛掷体”系统的质心系则比较方便。

①因为轮船质量远远超过物体的质量，“轮船—抛掷体”系统的质心实际上也就是轮船的质心；

②轮船相对于它自己的质心，当然是始终静止的。在质心坐标系中，轮船的动量始终是零，无需特别计及轮船动能；

③在质心系中，物体的速率也就是它相对于轮船的速率，不论向前掷或向后掷，物体的速率都是从 0 变为 4米/秒，动能的增长都是 8 J。据动能定理，应对它作功 8 焦耳，与在岸上抛掷物体的情况相同。

回顾：

$$E_p(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\text{势能零点}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{A\to B} = -\left(E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)\right) \equiv -\Delta E_p$$

●常见的势能

➢引力势能

$$E_p(r) = \int_r^{\infty} -G\frac{Mm}{r^2} = -G\frac{Mm}{r}$$

➢静电势能

$$E_p(r) = \int_r^{\infty} k\frac{q_1q_2}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{kq_1q_2}{r}$$

➢重力势能

$$E_p(z) = \int_z^{0} -mgdz = mgz$$

➢弹性势能

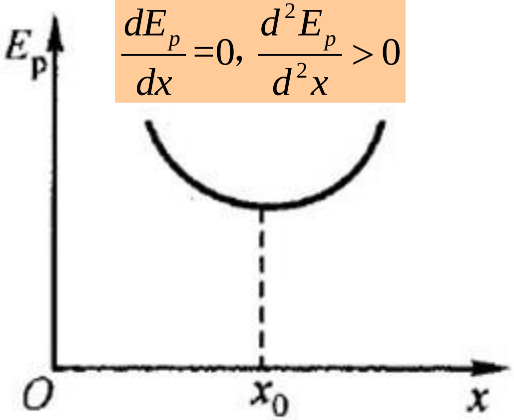
$$E_p(x) = -\int_x^{0} kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

●保守力与势能的关系

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

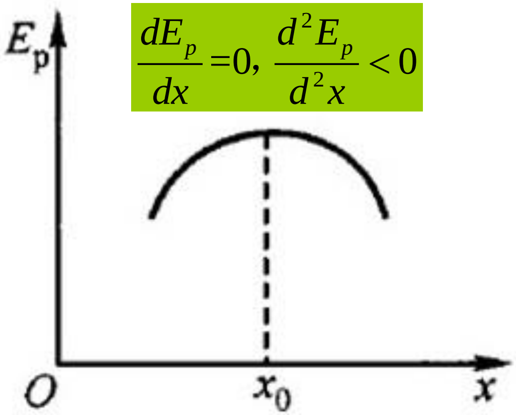
●势能曲线：势能随坐标变化的曲线

$$\frac{dE_p}{dx}=0, \ \frac{d^2E_p}{d^2x}>0$$



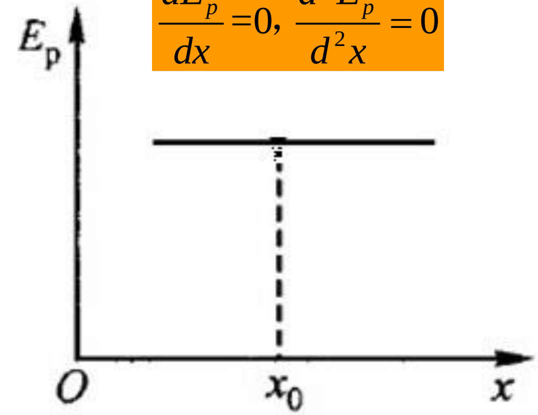
(a) 稳定平衡

$$\frac{dE_p}{dx}=0, \ \frac{d^2E_p}{d^2x}<0$$



(b) 不稳定平衡

$$\frac{dE_p}{dx}=0, \ \frac{d^2E_p}{d^2x}=0$$



(c) 随遇平衡

●功能原理

$$W_{外} + W_{非保内} = E - E_0, \qquad E \equiv E_k + E_p$$

机械能守恒定律

$$若 W_{外} + W_{非保内} = 0, \qquad E - E_0 = 0 \Rightarrow E_k - E_{k0} = -(E_p - E_{p0})$$

●柯尼希定理：体系动能等于质心动能和体系相对质心系的动能之和。

$$E_{\mathrm{k}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_c^2}_{\text{质心动能}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2}_{\text{质点系相对质心动能}}$$

●质心系中的功能原理。

$$W'_{\text{外}} + W'_{\text{非保内}} = E_C - E_{C0}$$

●两质点系统在质心系中的动能

$\vec{v} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \mapsto$ 两质点的相对速度

$$E_{kC} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ 称为约化质量

§5.6 两体碰撞——守恒律的一个应用

碰撞——两个或两个以上物体相遇(相互接近), 在极短的时间内发生较强的相互作用。

§5.6 两体碰撞——守恒律的一个应用

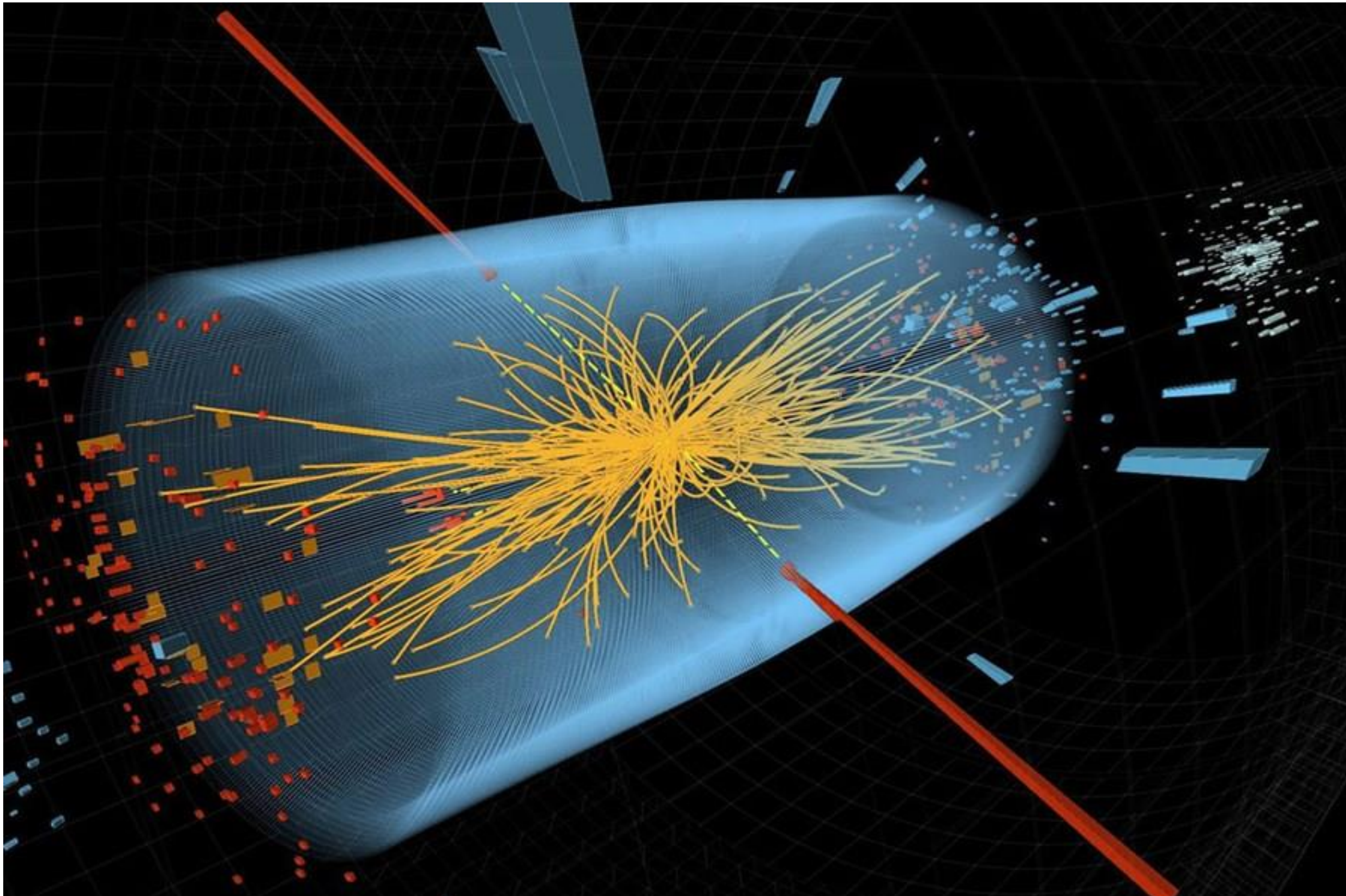
碰撞——两个或两个以上物体相遇(相互接近), 在极短的时间内发生较强的相互作用。

§5.6 两体碰撞——守恒律的一个应用

碰撞——两个或两个以上物体相遇(相互接近), 在极短的时间内发生较强的相互作用。

§5.6 两体碰撞——守恒律的一个应用

碰撞——两个或两个以上物体相遇(相互接近), 在极短的时间内发生较强的相互作用。



●碰撞的两个基本特征：

①作用时间极短；②相互作用极强。

因为碰撞过程中的内力远大于外力，而且作用时间极短，因此外力的冲量可以忽略，体系的动量守恒。

●碰撞的分类

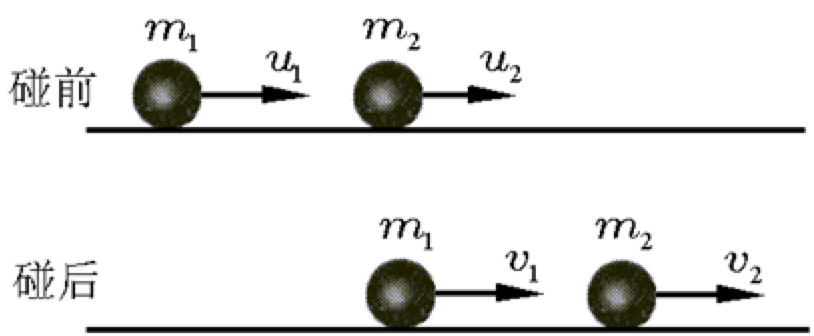
弹性碰撞：碰撞过程中没有机械能的损失。

非弹性碰撞：碰撞后物体的形变不能完全消失，这时机械能不守恒。

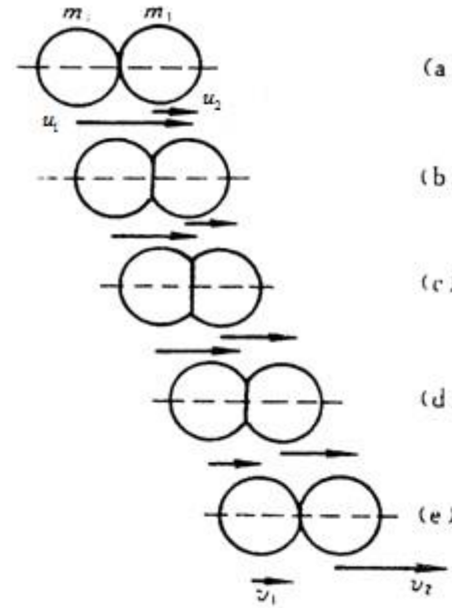
正碰（对心碰撞）：如果碰前两小球速度 u_1, u_2沿两球中心的连线的碰撞

斜碰：碰撞前两球的速度u_1, u_2不在两球中心连线上的碰撞。

1. 正碰——对心碰撞



两球的正碰



设两球碰前速度u_1 和 u_2 , 碰后v_1 和 v_2 ,以球心连线为坐标轴,以u_1 的正方向为轴的正方向。则碰撞过程满足动量守恒定律

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

（1）**完全弹性碰撞：**碰撞前后机械能没有损失

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \\ v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 \end{cases}$$

① $\boldsymbol{m_1 = m_2}$

$v_1 = u_2,\ v_2 = u_1$ 两球碰后交换速度

② $\boldsymbol{m_1 << m_2}$，且 $\boldsymbol{u_2 = 0}$ (**$\boldsymbol{m_2}$静止**)

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1, \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

则$v_1 \approx -u_1$，$v_2 \approx 0$，即：小球以相等的速率返回，而大球仍静止

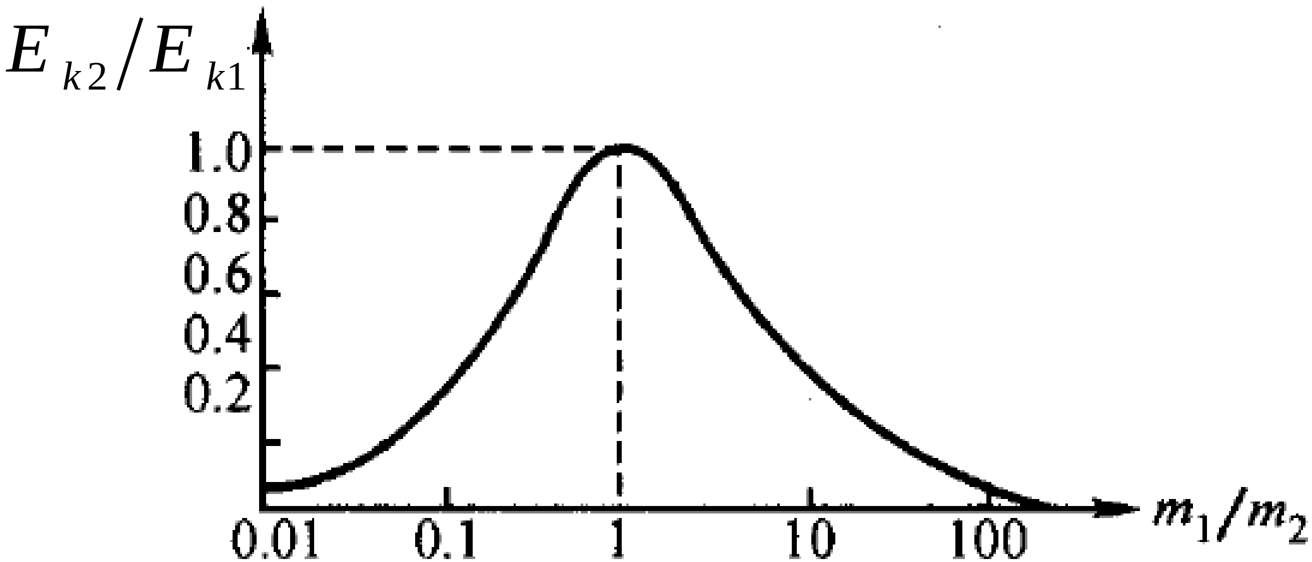
③ $\boldsymbol{m_1 >> m_2}$，且 $\boldsymbol{u_2 = 0}$ (**$\boldsymbol{m_2}$静止**)

$$v_1 \approx u_1,\quad v_2 \approx 2u_1$$

即大球几乎以原速继续前进,而小球以两倍于大球的速率前进。

④$u_2 = 0$ (m_2静止)， m_2 所得到的动能E_{k2}与碰前m_1 的动能 E_{k1} 之比为：

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4m_1/m_2}{(1+m_1/m_2)^2}$$



当 $m_1/ m_2 = 1$ 时，该式取到最大值。这说明，在 $u_2 = 0$ ， m_2 越接近 m_1 时，m_1 丢失的动能越多。此结论，提供了核反应堆中快中子减速剂选择的原则之一。通常选择重水（含氘）和石墨作为中子减速剂。

(2) 完全非弹性碰撞——两物体碰后不再分开。

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = v \\ m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\ v \end{cases} \Rightarrow v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = v_C$$

两球碰撞后粘在一起。此时 $E'_{kC} = 0$ ，动能损失最多，为：

$$\Delta E_k = E'_{kC} - E_{kC} = -\frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2$$

在实验室参考系内质心的动能是不参与粒子之间反应的，真正有用的能量，即资用能，只是高能粒子与靶粒子之间的相对运动动能。

所以现代 … 能粒子沿相

反方向运 … 便统一起来，

全部能量

有效 … 撞）
1
1
1

(3) 一般非弹性碰撞

定义恢复系数：

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}$$

恢复系数*e*由实验测得, 只与两物体质料有关。

碰撞过程满足中，动量守恒依旧满足

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$$

由以上两方程可解得：

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{m_1-em_2}{m_1+m_2}u_1+\dfrac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}u_2 \\ v_2=\dfrac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}u_1-\dfrac{em_1-m_2}{m_1+m_2}u_2 \end{cases}$$

●碰撞过程中的动能损失

由于碰撞过程中动量守恒，质心动能不变，由柯尼希定理可知，只需计算在质心系中相对运动动能的改变。

碰撞前：$E_{kC} = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu (u_1 - u_2)^2$

碰撞后：$E'_{kC} = \frac{1}{2}\mu (v_2 - v_1)^2 = \frac{1}{2}\mu e^2 (u_1 - u_2)^2$

动能损失：$\Delta E_k = E'_{kC} - E_{kC} = \frac{1}{2}\mu (e^2 - 1)(u_1 - u_2)^2$

由此可知：

① $e=1$　完全弹性碰撞；

② $e=0$　完全非弹性碰，动能损失最大；

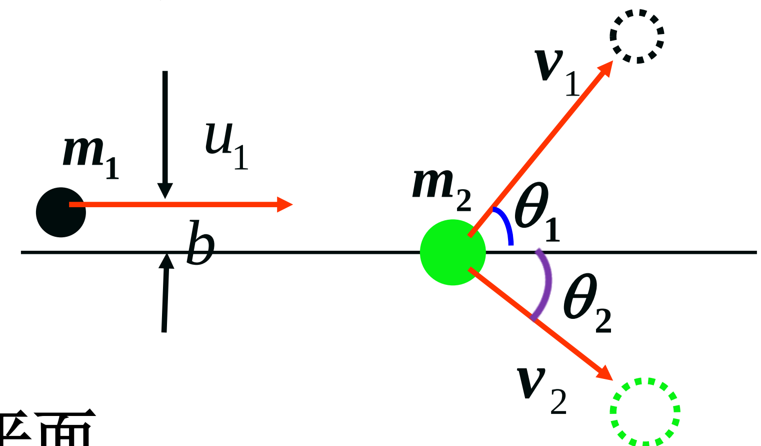
③ $0<e<1$　非弹性碰撞。

2. 斜碰

在一般情况下，斜碰为三维问题，碰撞后的速度 v_1, v_2 不一定在 u_1, u_2 所组成的平面上。若碰撞前一个小球处在静止状态，即 $u_2=0$，则这种碰撞是二维问题。

若该斜碰是完全弹性碰撞，则有动量和能量都守恒：

$$\begin{cases} m_1\vec{u}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 = \dfrac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 \end{cases}$$



取 u_1 方向为 x 轴，碰撞所在面为 $x-y$ 平面，上面的方程化为

$$m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$

$$0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

通常，应用实验方法测出四个未知数中的一个，才能求出其余三个。如果碰撞是非弹性的，那么只有前两个方程，未知量有四个，所以必须用实验方法测出四个未知数中的两个，才能求出其余两个。

3. 质心坐标系中讨论碰撞

因为在质心系中，体系的动量永远为零。质心系中描写碰撞，表达形式简单，物理意义清晰。

设在实验室系中，碰撞前、后两质点的速度分别为 $\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$ 和 $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，则质心速度为：

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2}$$

在质心系中，碰撞前、后两质点的速度分别为 $\vec{u}_1', \vec{u}_2'$ 和 $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$，则：

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_1' + \vec{v}_C, \quad \vec{u}_2 = \vec{u}_2' + \vec{v}_C \\ \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_C, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_C \end{cases}$$

● 正碰

$$\begin{cases} m_1u_1' + m_2u_2' = m_1v_1' + m_2v_2' = 0 \\ v_2' - v_1' = e\,(u_1' - u_2') \end{cases}$$

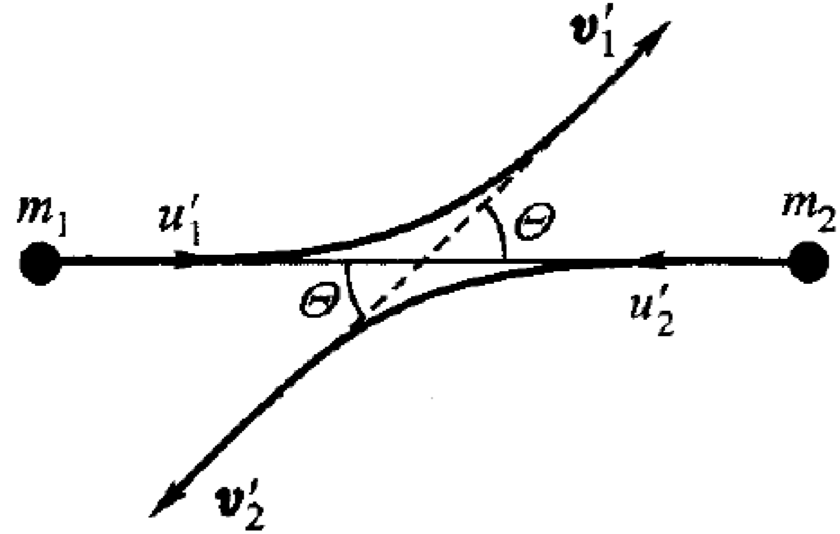
$$\Rightarrow \boxed{v_1' = -eu_1', \quad v_2' = -eu_2'}$$

即在质心系中每个质点碰后的速度为其碰前速度的$-e$倍。

●弹性斜碰

由动量守恒和能量守恒可得：

$$\begin{cases} m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0 \\ \dfrac{1}{2}m_1\vec{u}_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2\vec{u}_2'^2 = \dfrac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2' = -\dfrac{m_1}{m_2}\vec{u}_1', \qquad \vec{v}_2' = -\dfrac{m_1}{m_2}\vec{v}_1' \\ |\vec{v}_1'| = |\vec{u}_1'|, \qquad |\vec{v}_2'| = |\vec{u}_2'| \end{cases}$$

即在质心系中，两球碰撞后，它们的速度都只改变方向，而不改变大小。偏离原方向的角度Θ称为**散射角**。

若靶粒子m_2静止，即 $\vec{u}_2 = 0$，则质心速度为

$$\vec{v}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{u}_1$$

在质心系中，两质点的碰前速度为：

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v}_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{u}_1$$

$$\vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{v}_C = -\vec{v}_C = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{u}_1$$

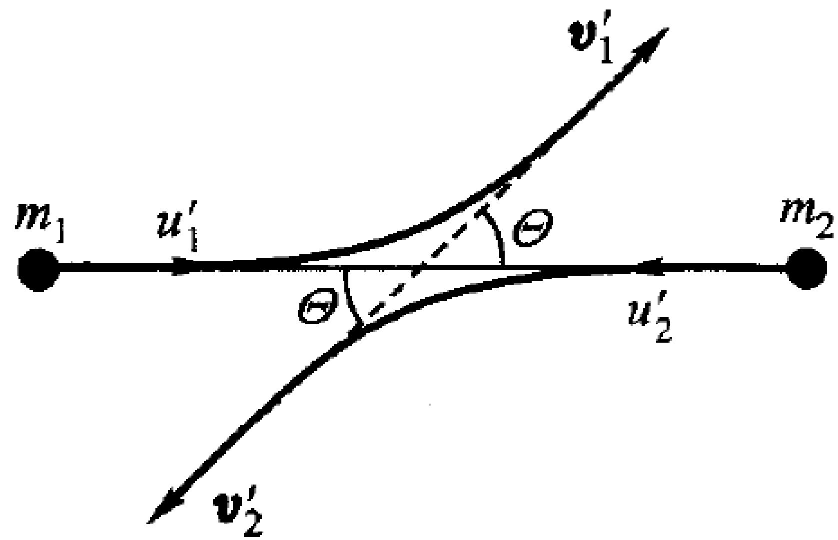
可得

$$m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = 0$$

即碰前，在质心系中体系的动量为零。因为是弹性碰撞，碰撞后，它们的速度都只改变方向，而不改变大小，即有

$$|\vec{v}_1'| = |\vec{u}_1'| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}u_1$$

$$|\vec{v}_2'| = |\vec{u}_2'| = \frac{m_1}{m_1 + m_2}u_1$$

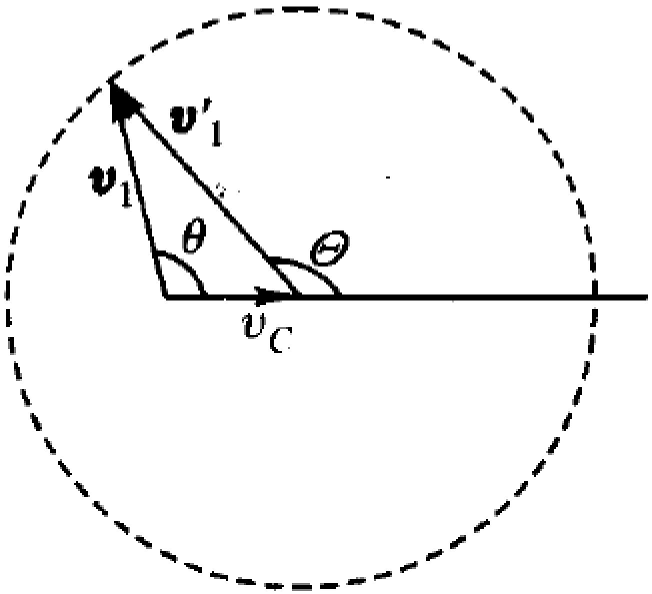


化回到实验室坐标系，有

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_C, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_C$$

● 当$m_1 < m_2$时

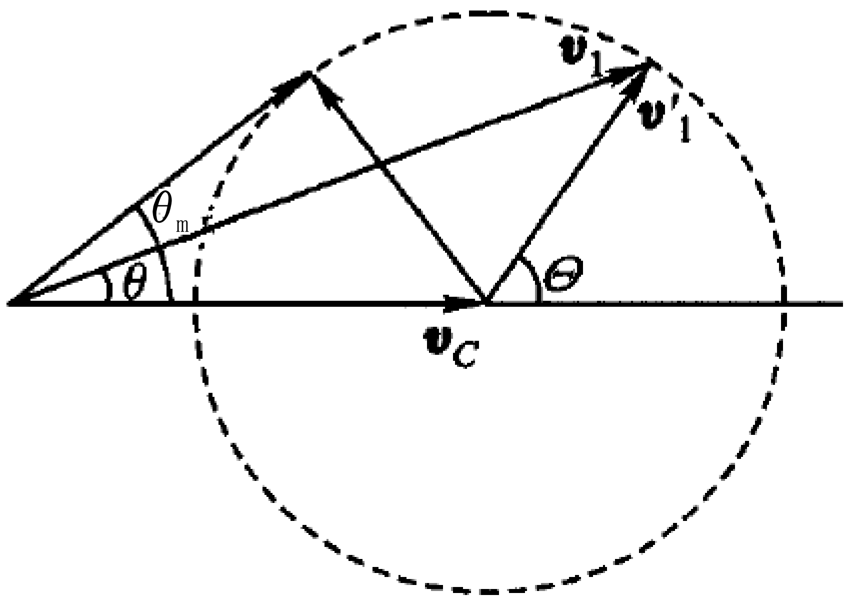
$$|\vec{v}_C| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 < |\vec{v}_1'| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1$$



实验室系m_1的散射角θ可取0～π之间的任意值： $\boxed{0 \le \theta \le \pi}$

●当$\boldsymbol{m_1 > m_2}$时

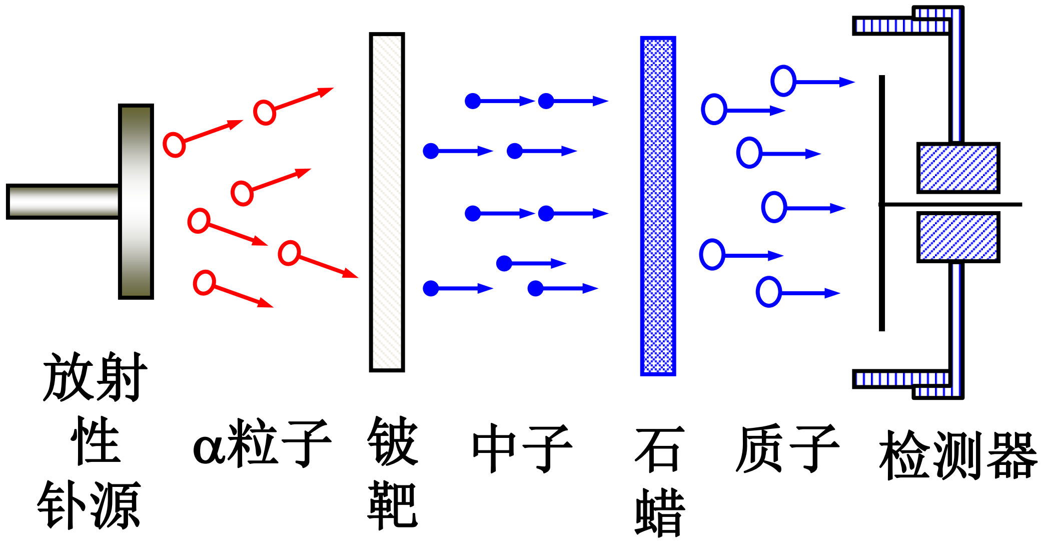
$$|\vec{v}_C| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 > |\vec{v}_1'| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1$$



实验室系$\boldsymbol{m_1}$的散射角θ的取值范围：$\boxed{0 \le \theta \le \arcsin\frac{m_2}{m_1}}$

【思考题】①求实验室系散射角θ和质心系散射角Θ之间的关系；②根据①的结果求实验室系散射角θ的取值范围。

例题7：（查德威克发现中子）令中子以速率v_0分别与质子和氮核碰撞，碰前质子和氮核静止，测得碰后质子和氮核的速率分别为 $v_p = 3.3\times10^9$ cm/s 和 $v_N = 4.7\times10^8$ cm/s，求中子质量m。



解： 对中子质子质点系

$$\begin{cases} mv_1 + m_p v_p = mv_0 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m_p v_p^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \end{cases}$$

对中子氮原子质点系

$$\begin{cases} mv_2 + m_N v_N = mv_0 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m_N v_N^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_p = \frac{2m}{m+m_p}v_0, \quad v_N = \frac{2m}{m+m_N}v_0$$

已知$m_N = 14m_p$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{v_N m_N - v_p m_p}{v_p - v_N} = 1.16m_p$$

现代精确测量表明, m=1.01 m_p。

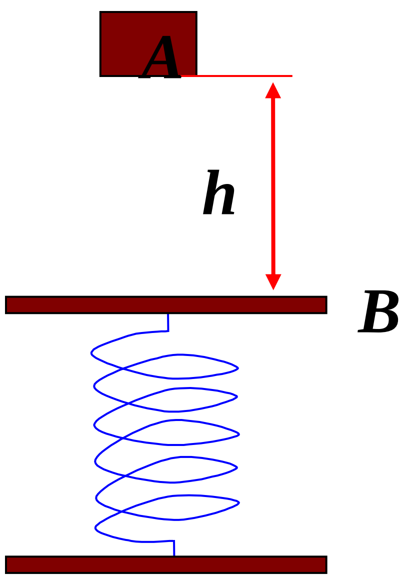
例题8：如图，质量为M的物块A在离平板为h的高度处自由下落。落在质量也为M的平板B上。已知轻质弹簧的倔强系数为k，物体与平板作完全非弹性碰撞，求碰撞后弹簧的最大压缩量。

解：本题可分为三个物理过程

①物块A下落

$$v_1^2 = 2gh \qquad (1)$$

②物块A与平板B发生碰撞



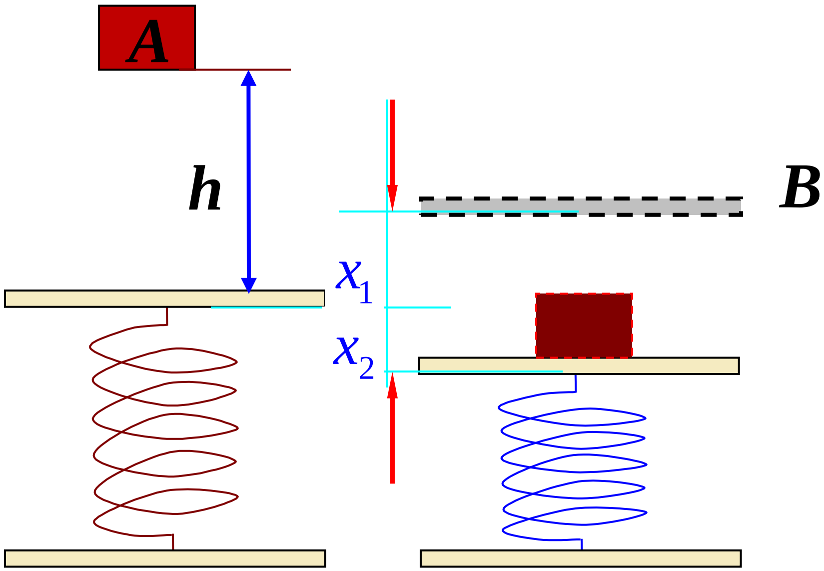
$$Mv_1 = (M + M)v_2 \qquad (2)$$

③碰撞后弹簧被压缩

机械能守恒： $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$

弹簧被最大压缩时

$$\Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}(M + M)v_2^2$$



如图，取弹簧不承载平板的平衡位置为坐标原点*O*。平板*B*放上后位移为x_1，物块*A*碰撞后位移为 x_2，则

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 - (M + M)gx_2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

根据机械能守恒式，得

$$-\frac{1}{2}(M + M)v_2^2 + \frac{1}{2}k\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1^2\right] - (M + M)gx_2 = 0 \qquad (3)$$

而 $kx_1 = Mg \qquad (4)$

将(1)、(2)、(4)式代入(3)式，整理后得

$$x_2^2 - \frac{2Mg}{k}x_2 - \frac{Mgh}{k} = 0$$

解之得

$$x_2 = \frac{Mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + \frac{Mg}{k}h}$$

因 $x_2 > 0$ ，故应将负根舍去。得碰撞后弹簧最大压缩量为

$$x_{\max} = x_1 + x_2 = \frac{2Mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 + \frac{Mg}{k}h}$$