

中国科学技术大学 2021年秋季学期  
(数学分析(B1) 期中考试试卷, 2021 年 11 月 20 日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅人										

一、(5 分) 用  $\varepsilon - \delta$  语言证明:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$ .

证明

— — —

—

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+n)^n + e^{2n}}{n^{n+1}} = ;$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} =$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} = -;$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^3 \sin x} = \_$

三、(12 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

解 /

(6 分)

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

.....(12 分)

四、(12 分) 设  $y(x) = x^2 e^{-x}$ ,  $f(x) = xy^{(n+1)}(x) + (n+x-2)y^{(n)}(x) + ny^{(n-1)}(x)$ .

(1) 求  $y^{(n)}(x)$ ; (2) 求证  $f(x) = 0$ .

解

(.....8 分)

(.....12 分)

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 所在院系: \_\_\_\_\_ 考场: \_\_\_\_\_ 座位号: \_\_\_\_\_

密封线 答题时不要超过此线

五、(12 分) 求函数  $f(x) = (x - \frac{5}{2})x^{\frac{2}{3}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的极大值和极小值.

解 当  $x \neq 0$  时, 有

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x - \frac{5}{2} + 3x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(4x - \frac{5}{2})$$

六、(10 分) 设函数  $y = y(x)$  是由方程  $y = 1 + xe^y$  确定的隐函数. 求该函数曲线上点  $(0, 1)$  处的切线方程.

解

七、(10 分) 设函数  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  且  $f(x) \in [a, b]$ , 又  $[a, b]$  中任意不同的  $x, y$  满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ . 令  $x_1 \in [a, b]$ , 并归纳定义  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ . 求证:

(1)  $\{x_n\}$  是单调数列; (2)  $\{x_n\}$  收敛于  $[a, b]$  中一点  $c$ , 且  $f(c) = c$ ; (3) 满足  $f(x) = x$  的  $x$  是唯一的.

—

由

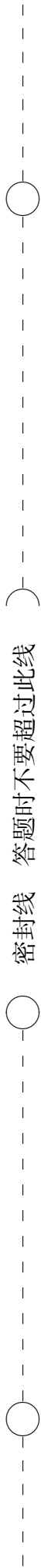
$n \rightarrow \infty$

在

—

..... (7 分)

/



密封线 答题时不要超过此线

八、(8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上存在二阶导数,  $f(0) = 0, f'(0) > 0,$   
 $f''(x) \leq \alpha < 0$ , 其中  $\alpha$  是常数. 证明:

(1) 存在  $x_0 > 0$  使得  $f'(x_0) = 0$ ;    (2) 方程  $f(x) = 0$  在  $(0, +\infty)$  内有唯一实根.

证明    (1)

\_\_\_\_\_

— 2

2 ' \_\_\_\_\_

.....(4分)

九、(7 分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有任意阶导数, 且对任意实数  $x$  及  $n = 0, 1, 2, \dots$  满足  $|f^{(n)}(x)| \leq n!|x|$ . 求证:  $f(x) = 0$ .

证明

\_\_\_\_\_ (1 分)

因此

(4 分)

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

因此

(7 分)