

中国科学技术大学 2021年秋季学期
(数学分析(B1) 期末考试试卷参考解答, 及评分标准)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分

一、(10 分) 判断下面的函数在 $[0, 1]$ 上是否黎曼可积, 并说明理由.

$$(1). \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (2). \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(1). \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt}{\int_0^x \left(\int_0^u \arctan t dt \right) du}; \quad (2). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

三、(20 分) 求下面的定积分或不定积分(每小题5分):

$$(1). \quad \int_{-2}^2 (x+1) \sqrt{4-x^2} dx; \quad (2). \quad \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx;$$
$$(3). \quad \int_0^2 x \cdot |\sin(\pi x)| dx; \quad (4). \quad \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx.$$

四、(10 分) 求方程 $y'' + 3y' + 2y = 2x$ 的通解.

五、(10 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + \frac{1}{n})}{n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

解

六、(10 分) 设 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{2(n+1)a_n - na_{n-1}}{n+2}, n = 1, 2, \dots$. 求幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 收敛域以及和函数.

解

/

七、(10 分) 设 $\varphi(x)$ 是 \mathbb{R} 上周期为 1 的连续函数, 且 $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数. 试证:

(1) 令 $G(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$, 则 $G(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界;

(2) 令 $a_n = \int_0^1 f(x)\varphi(nx) dx$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

八、(10 分) 设 $\{a_n\}$ 是单调增加的正数列, 函数 $f(x)$ 在 $[a_1, +\infty)$ 大于零且单调增加, 又 $\int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{xf(x)} dx < +\infty$.

(1) 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}$ 收敛. (2) 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}f(a_n)}$ 收敛.

九、(10 分) 设 $\{a_n\}$ 是实数列, $a_1 = 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

(1) 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛;

(2) 设上面的函数项级数的和函数为 $f(x)$. 求证: 存在实数 x , 使得 $|f(x)| > \frac{\pi}{4}$.