中国科学技术大学数学科学学院

2022～2023 学年第 1 学期期末考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称 线性代数 (B1)　　课程编号 MATH1009

考试时间 2023 年 2 月 28 日下午　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

【30 分】填空题.

(1) 若 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}=4$, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}=3$,
则 $\operatorname{rank}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}=$ ________

(2) 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 4 阶正交阵，且 $a_{11}=-1$. 则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=(1,0,0,0)^T$ 的解为 ________

(3) 设若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$ ________

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)^T$ 是可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 2 的特征向量，且 $\boldsymbol{b}=(-1,2,-2)^T$. 则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=$ ________

(5) 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中某个内积在基 $\boldsymbol{a}_1=x$. $\boldsymbol{a}_2=-1$, $\boldsymbol{a}_3=x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
则该内积在另外一组基 $\boldsymbol{b}_1=x-1$, $\boldsymbol{b}_2=x+1$. $\boldsymbol{b}_3=x^2-2x-1$ 下的度量矩阵为

____

(6) 实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3$ 的正惯性指数为 ________

【20 分】判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，则对任意 m 维非零实列向量 $\boldsymbol{b}$，线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ 一定有解。

(2) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$。

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵，且 $\det(\boldsymbol{A}) < 0$，则 A 必有特征值为负实数。

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵，则 $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) > 0$。

三、【12 分】考虑线性空间 $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$，即由 2 阶实方阵构成的实线性空间。对于 V 中任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，定义

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$$

(1) 证明：如上定义的法则给出了 V 的一个内积。(6 分))

(2) 通过 Schmidt 正交化方法将 V 的向量组 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 改造成相对于（1）中所定义内积的标准正交向量组 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$。(6 分))

四、【14 分】设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换，且

$$\mathscr{A}(a_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathscr{A}(a_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathscr{A}(a_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 求出线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部特征值和对应的特征子空间。(8 分)

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。(6 分)

五、【14 分】

设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + \mathrm{t}x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 t 的值。(3 分))

(2) 利用正交替换化该二次型为标准形，并给出具体的正交替换。(9 分)

(3) 判断方程 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 代表的二次曲面的类型。(2 分))

六、【10 分】设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵

证明：

$$\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}\le\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\right)^n$$