

## 2022数分B1 考试简答

### 一、简单计算题.

1. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ , 其中  $p > 0$ .

2. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx$ .

3. 由曲线  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 与  $x$  轴及直线  $x = \frac{\pi}{2}$  围成的图形, 在绕  $x$  轴旋转一周后所得旋转体体积是多少? .

4. 求  $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ .

解

— — —

二、计算不定积分.

1. 求  $\int \frac{3 \cos x + 4 \sin x}{2 \cos x + \sin x}$

2. 求  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ , 其中常数  $a > 0$ . (本题解法不唯一)

---

三、证明  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$ .

四、设连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f(t) dt$ , 求  $f(x)$ .

五、设  $f(x)$ ,  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续.  $g(x)$  在  $[a, b]$  上非负. 证明: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ .

六、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 证明  $e^{f(x)}$  在  $[a, b]$  上也是 Riemann 可积的.

七、设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上连续函数, 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx.$

解