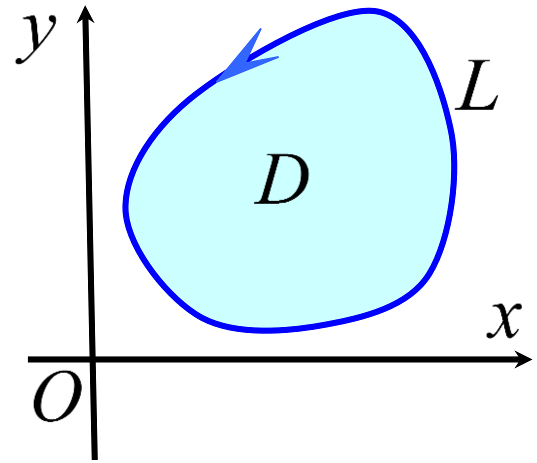
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十一章 曲线积分与曲面积分

- 数量场在曲线上的积分
- 数量场在曲面上的积分
- 向量场在曲线上的积分
- 向量场在曲面上的积分
- **Gauss定理和Stokes定理**
- 保守场
- 微分形式的积分

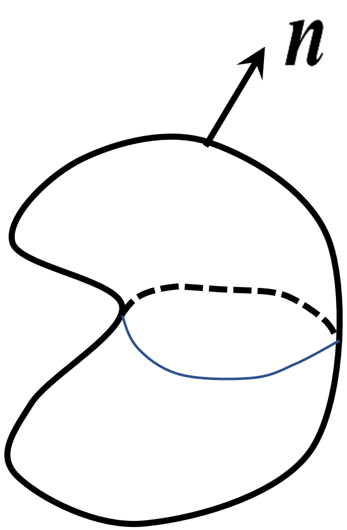
回忆：Green公式

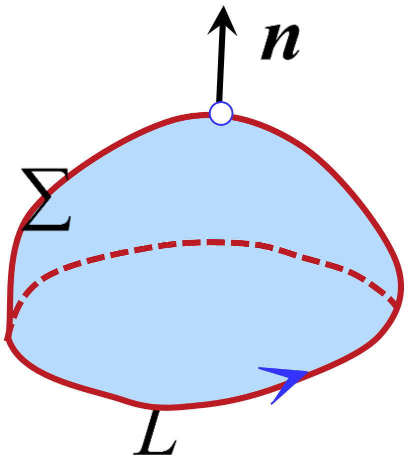
$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



向量场沿封闭曲面的积分？

向量场沿空间环线的积分？

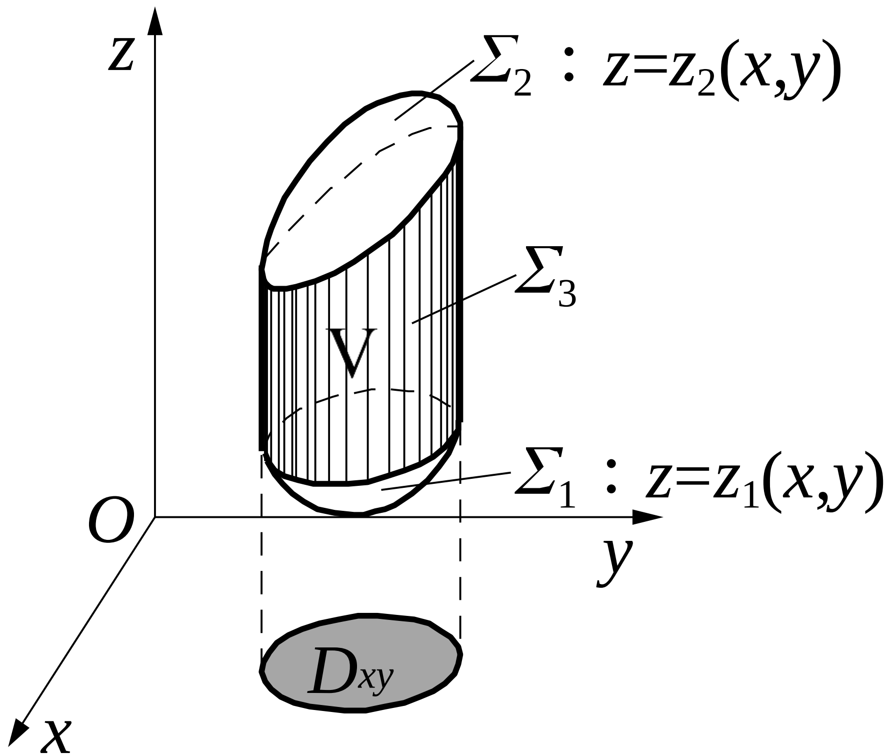




定理：设 $R(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数，$\mathbf{v}_3 = R(x,y,z)\mathbf{k}$，V 是 **Z 型区域**，则

$$\iint_S \mathbf{v}_3 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $S = \partial V$，定向指向 V 的**外侧**.



Gauss公式 (散度定理)

定理：设 V 是空间中分片光滑曲面围成的**闭区域**，$S=\partial V$ 为其表面，定向指向外侧. $\mathbf{v}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$是 V 上的光滑向量场 (即$P,Q,R$ 具有连续偏导数). 如果V 可以分解成有限个互不重叠的同时是 X 型、Y型和Z型子区域的并，那么有**Gauss公式**

$$\oiint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或写为：

$$\oiint_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}V=\iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}V$$

推论： 设空间区域V 由分片光滑的封闭曲面 S 围成，则V 的体积

$$\mathrm{V} = \oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \oiint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例： 计算半径为 R 的球体的体积.

解： 设球体为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$, 则体积为

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\iint_S (x,y,z)\cdot\frac{(x,y,z)}{R}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{R}{3}\iint_S \mathrm{d}S = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

注记：

Gauss公式把沿着空间有界闭区域外侧边界 ∂V 的第二型曲面积分，转化成在V上的三重积分.

Gauss公式有三个条件：封闭曲面、定向外侧、向量场偏导连续.

(1) 曲面 S 必须是封闭的. 若不封闭，可考虑**补面法：**

添加辅助面使其封闭，定向与 S 的方向协调，且这部分的曲面积分易计算.

(2) 曲面 S 的方向为外侧. 否则加负号.

(3) 向量场 $\mathbf{v}=(P,Q,R)$ 在V中一阶偏导连续. 否则可考虑**挖洞法.**

若在V内存在无定义点、不连续点、不可导点，可考虑用封闭曲面挖去这些点.

1. 计算曲面积分 $\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(y^2+xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是长方体 $\mathrm{V}: 0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$ 的外侧表面.

2. 计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$, 其法向与 Z 轴正向夹角为锐角.

3. 计算曲面积分 $I=\iint_S \dfrac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}}$，其中 S 是有向曲面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2(a>0,a\neq 1)$，定向指向外侧.

4. 设函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数，证明：$\iiint_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S u\dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S-\iiint_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

其中 $S=\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ 为 S 的外法向量.

Stokes公式

定理： 设 $\mathbf{v}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ 是 V 上光滑向量场，如果 S 是分片具有二阶连续偏导数的光滑曲面，L=∂S. 则：

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或写为：

$$\oint_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_S \mathrm{rot}(\mathbf{v})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_S \nabla\times\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

其中 L 的定向与 S 的定向相协调，即 L 的方向与 S 的法向量构成右手系.

Stokes公式： $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

它把向量场沿一空间环线的第二型曲线积分同以此曲线为边界的曲面上的第二型曲面积分联系起来.

注记：

1. 当曲面 S 是平面XOY上的区域 D 时，Stokes公式就变成了Green公式. 可视Stokes公式是Green公式在空间的推广.

2. 运用Stokes公式须注意以下三点：

   I. 曲线 L 必须是封闭的. 由于以 L为边界的曲面很多，应选择一张使得计算简便的曲面为宜.

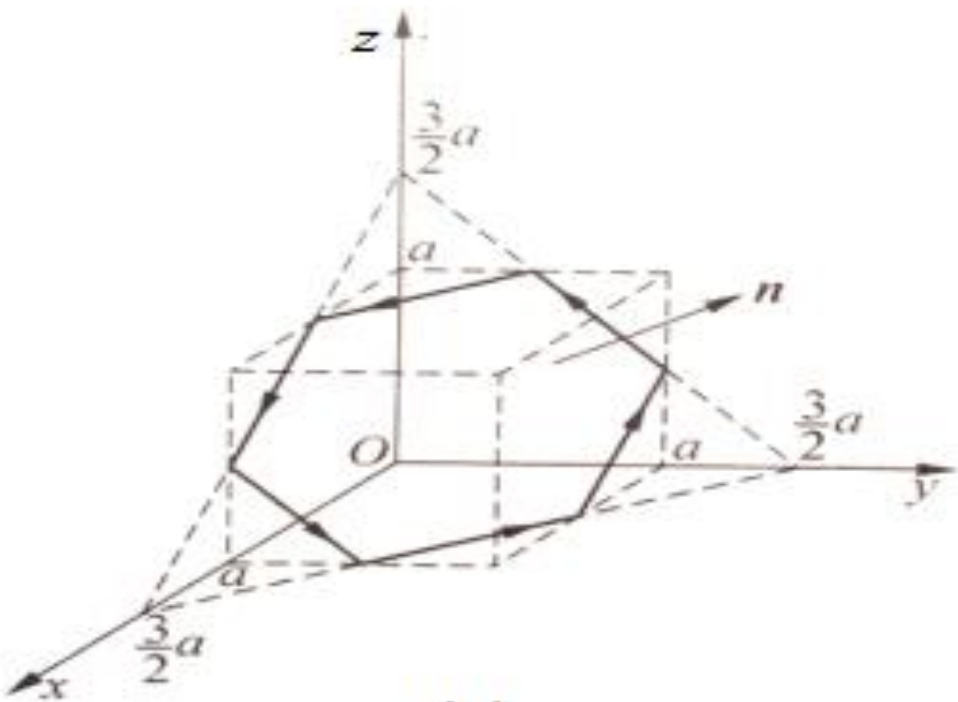
   II. L与 S 的定向协调：符合右手法则.

   III. 函数 P,Q,R 在包含曲面 S 在内的某个空间区域上具有一阶连续偏导数.

1. 设曲面 S 为 $S=\{(x,y,z):\ \ x+y+z=1,\ \ x,y,z\geq 0\}$, 定向与 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 相同，求力场 $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$ 绕 S 的正向边界 ∂S 一周所做的功.

2. 设曲线 L 是椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2$ 与椭圆柱面 $4x^2+y^2=4y$ 的交线，从 Z 轴的正方向看，L 的方向是顺时针方向，求向量场 $\mathbf{v}=y(z+1)\mathbf{i}+zx\mathbf{j}+(xy-z)\mathbf{k}$ 沿 L 的环量.

3. 计算曲线积分 $\oint_L \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ 与立方体 $V=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a\right\}$ 表面的交线，从 Z 轴的正向看来，L 沿逆时针方向.



(a)