第九章　多元函数微分学

- 多变量函数的连续性
- 多变量函数的微分
- 隐函数定理和逆映射定理
- 空间曲线与曲面
- **Taylor公式与极值**
- 向量场的微商
- 微分形式

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈
一九八八年五月 題

● 二元函数的微分中值定理

设 $f(x,y)$ 在区域 D 中可微，连接 D 内两点 (x_0,y_0) 和 (x_0+h,y_0+k) 的线段仍在 D 中，则存在 $0<\theta<1$ 使得

$$f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f_x'\left(x_0+\theta h,y_0+\theta k\right)h+f_y'\left(x_0+\theta h,y_0+\theta k\right)k.$$

● 多元函数的微分中值定理

设 $f:D\to\mathbb{R}$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 中可微，连接 D 内两点 a 和 b 的线段仍在 D 中，则必存在连线上一点 c 使得

$$f(b)-f(a)=Jf(c)\cdot(b-a).$$

证明： 令 $b-a=h$， $\varphi(t)=f(a+th)\,(0\le t\le 1)$，则

$$f(b)-f(a)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)(1-0)=\sum_i h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\xi h)=Jf(c)\cdot(b-a).$$

推论：

- 设 $f(x,y)$ 在区域 D 中可微，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$, 则 $f(x,y)\equiv c$.
- 设 $f:D\to\mathbb{R}$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 中可微，且 $\nabla f\equiv 0$, 则 $f(x,y)\equiv c$.

注： 1. **向量值函数**没有微分中值定理. 例如

$$r(t)=(\cos t,\sin t)\ (0\le t\le\pi),$$

满足 $(-2,0)=r(\pi)-r(0)=r'(\xi)\pi=(-\sin\xi,\cos\xi)\pi$ 的 ξ 是不存在的.

但是，若 $f:D\to\mathbb{R}^m$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 中可微，且 $Jf\equiv 0$, 则仍有 $f(x)\equiv c$. (利用推论中第2条)

2. 为了对区域中任意两点应用中值定理，通常要求区域 D 是**凸**的.

二元函数带Lagrange余项的Taylor公式:

设区域 $D\subset\mathbb{R}^2$, $f\in C^{n+1}(D)$. 连接 D 内两点 (x_0,y_0) 和 (x_0+h,y_0+k) 的线段也在 D 中，则存在 $0<\theta<1$ 使得

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+R_n$$

其中 $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ 称为**Lagrange余项**.

在(0,0)处展开的**Taylor**公式也称为**Maclaurin**公式.

二元Taylor公式的证明：

令 $\varphi(t)=f\left((x_0,y_0)+t(h,k)\right)\ (0\le t\le 1)$，则 $\varphi(t)\in C^{n+1}\left([0,1]\right)$. 由一元函数的**Taylor**公式知，存在 $0<\theta<1$ 使得

$$\varphi(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}\qquad(\Delta)$$

由复合函数的求导法则，

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(M(t)\right)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}\left(M(t)\right)\cdot k\Rightarrow\varphi'(0)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{M_0}$$

定义算子：$\mathcal{D}=h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}$，归纳可证：

$$\varphi^{(m)}(t)=\mathcal{D}^m\left(f\left(M(t)\right)\right)\Rightarrow\varphi^{(m)}(0)=\mathcal{D}^m f\big|_{M_0}.$$

将之代入到(Δ)式，并令 $t=1$ 即得二元函数的**Taylor**公式.

1. Peano余项： $$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+R_n$$

其中，$R_n=o(\rho^n)\quad\left(\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0\right)$

2. 展开的前几项: $$f(x,y)=\boxed{f(x_0,y_0)}+\boxed{(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}}$$

$$+\boxed{\frac{1}{2}\left((x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)}+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}\right)}+\cdots\cdots$$

3. n元函数的Taylor展开:

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\mathcal{D}^m f\big|_{(x_1,\cdots,x_n)}}{m!}+R_n$$

其中，$\mathcal{D}=h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}$，$D^m=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m}\frac{m!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\cdots h_n^{i_n}\frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}$.

例： 求 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 的带**Peano**余项的二阶**Maclaurin**公式.

解： $f(x,y)$在(0,0)处无穷阶可微，且

$$f(0,0)=1,\quad f_x'(0,0)=0,\quad f_y'(0,0)=0$$

$$f_{xx}''(0,0)=-1,\quad f_{xy}''(0,0)=0,\quad f_{yy}''(0,0)=1.$$

因而有二阶**Taylor**展开式

$$\frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o\left(x^2+y^2\right)\ \left(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right)$$

例： 求 $f(x,y)$ 在(0,0)的4阶Taylor展开式，并求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x\left(x^2+y^2\right)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

解： 由 $e^{x\left(x^2+y^2\right)}=1+x\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}x^2\left(x^2+y^2\right)^2+o\left(\rho^6\right)\ \left(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right)$,

知 $f(x,y)$ 在(0,0)处的4阶Taylor展开式为

$$\frac{1-e^{x\left(x^2+y^2\right)}}{x^2+y^2}=-x-\frac{1}{2}x^2\left(x^2+y^2\right)+o\left(\rho^4\right).$$

由此得：$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)=-\frac{1}{2}\cdot 4!=-12$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(0,0)=-\frac{1}{2}\times 2!\times 2!=-2$.

注： $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的Taylor展开式中，$\left(x-x_0\right)^m\left(y-y_0\right)^n$ 的系数为 a，则

$$\frac{\partial^{m+n}f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^m\partial y^n}=m!\cdot n!\cdot a\quad (m,n=0,1,2,\cdots).$$

前面的例子中，用到了“**Taylor公式的唯一性**”：

若我们用某种方法找到了多项式 $T_n(x,y)$ 使得 $f(x,y)=T_n+o(\rho^n)\,(\rho\to 0)$,

则 $T_n(x,y)$ 即为 $f(x,y)$ 的n次Taylor多项式.

$\Leftrightarrow$ $\alpha(x,y)=o(\rho^n)\,(\rho\to 0)$且n+1阶偏导连续，则其n次Taylor多项式为0.

证明： 否则设其Taylor多项式最低次部分为 $\sum\limits_{0\le i\le m} a_i x^i y^{m-i}\,(m\le n)$.

在 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha(x,y)}{\rho^n}=0$ 中令 $(x,y)=(\gamma t,t)$ 可得

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sum\limits_{0\le i\le m} a_i\gamma^i\right)t^m+t\text{的高次项}}{t^n}=0.$$

只需取 γ 使得 $\sum\limits_{0\le i\le m} a_i\gamma^i\ne 0$即得矛盾. 多元情形类似可证.

定义(极值)：$f(x,y)$为区域 $D\subset\mathbb{R}^2$上的二元函数，$M_0(x_0,y_0)\in D$.

若存在M_0 的某邻域 $B(M_0,r)$使得

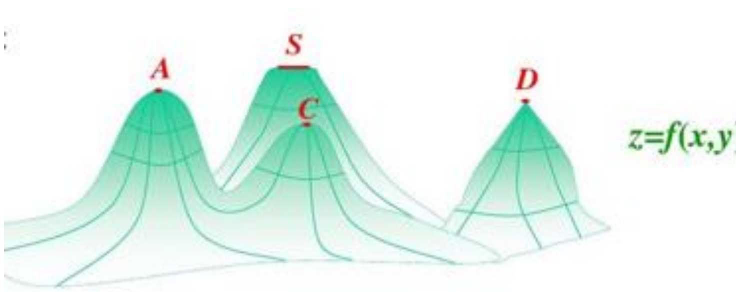
$$f(x,y)\le f(M_0),\forall(x,y)\in B(M_0,r)$$

则称M_0为f 的一个**极大值点**，$f(x_0,y_0)$ 称为 f 的一个**极大值**.

类似可定义**极小值点**与**极小值**.

{**极值点**}$\triangleq$ {极大值点}$\bigcup$ {极小值点}

{**极值**} $\triangleq$ {极大值} $\bigcup$ {极小值}



极值的必要条件：

若 $f(x,y)$ 在区域 D 中有偏导数，$M_0(x_0,y_0)\in D$ 是 $f(x,y)$ 的极值点，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$

几何意义：如果曲面在极值点处有切平面，则切平面水平.

定义(驻点)： 函数所有一阶偏导为零的点，称为**驻点**.

注：偏导数都存在的极值点为驻点，但驻点未必是极值点. 例如：

$(0,0)$ 是 $f(x,y)=x\cdot y$ 的驻点，但不是它的极值点.

定理： 设 $f(x,y)\in C^2(D)$, (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的一个**驻点**. 记$\Delta=AC-B^2$,

其中 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$. 那么:

(1). $\Delta>0$ 且 $A>0$ 时, (x_0,y_0) 是 f 的极小值点.

(2). $\Delta>0$ 且 $A<0$ 时, (x_0,y_0) 是 f 的极大值点.

(3). $\Delta<0$ 时, (x_0,y_0) 不是 f 的极值点.

注： $\Delta=0$ 时，暂时无法判断 (x_0,y_0) 是否是 f 的极值点.

注：多元函数求最值的步骤

① 求出区域内部的极值（考察驻点与不可偏导点）；

② 求出函数在边界上的最值；

③ 对内部的极值和边界上的最值进行比较，最大者为最大值，最小者为最小值.

例1: 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的所有极值点.

例2: 求函数$z=\sin x\sin y\sin(x+y)$在区域$D=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq \pi\}$上的最大值与最小值.

例: 求保持固定体积 V_0 但表面积最小的圆柱体.

设圆柱体底面半径为 r,高为 h, 则圆柱体的表面积 $S(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh$.
同时 r,h 满足约束条件: $\varphi(r,h)=\pi r^2 h-V_0=0$.

于是所求问题化为: 求 $S(r,h)$ 在条件 $\varphi(r,h)=0$ 下的最小值问题.

解法: 本题可以从 $\varphi(r,h)=0$ 解出 $h=\dfrac{V_0}{\pi r^2}$, 然后代入 $S(r,h)$ 得

$$\bar{S}(r)=S(r,\frac{V_0}{\pi r^2})=2\pi r^2+\frac{2V_0}{r}.$$

可由求解单变元函数最值问题方法或均值不等式求得, 当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$ 时, 表面积最小.

问题: 如果从 $\varphi(r,h)=0$ 难以解出 $h=h(r)$ 呢?

条件极值： 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下，求 $z=f(x,y)$ 的极值.

称 $z=f(x,y)$ 为目标函数，$\varphi(x,y)=0$ 为约束条件，x,y 为决策变量.

设曲线 $\varphi(x,y)=0$ 光滑，(x_0,y_0) 是极值点，$\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

①由隐函数定理知，在 (x_0,y_0) 附近，$\varphi(x,y)=0\Rightarrow y=y(x)$.

②x_0 是 $f\big(x,y(x)\big)$ 的极值点

$$\Rightarrow f'\big(x_0,y(x_0)\big)=f_x'\big(x_0,y_0\big)+f_y'\big(x_0,y_0\big)y'\big(x_0\big)=0.$$

$\longrightarrow$ 取 $\lambda=-\dfrac{f_y'\big(x_0,y_0\big)}{\varphi_y'\big(x_0,y_0\big)}$， 则有：

$$\left(f_x'+\lambda\varphi_x'\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0,\quad \left(f_y'+\lambda\varphi_y'\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0.$$

条件极值：在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下，求 $z=f(x,y)$ 的极值.

$$\longrightarrow \left(f_x'+\lambda\varphi_x'\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0,\quad \left(f_y'+\lambda\varphi_y'\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0.$$

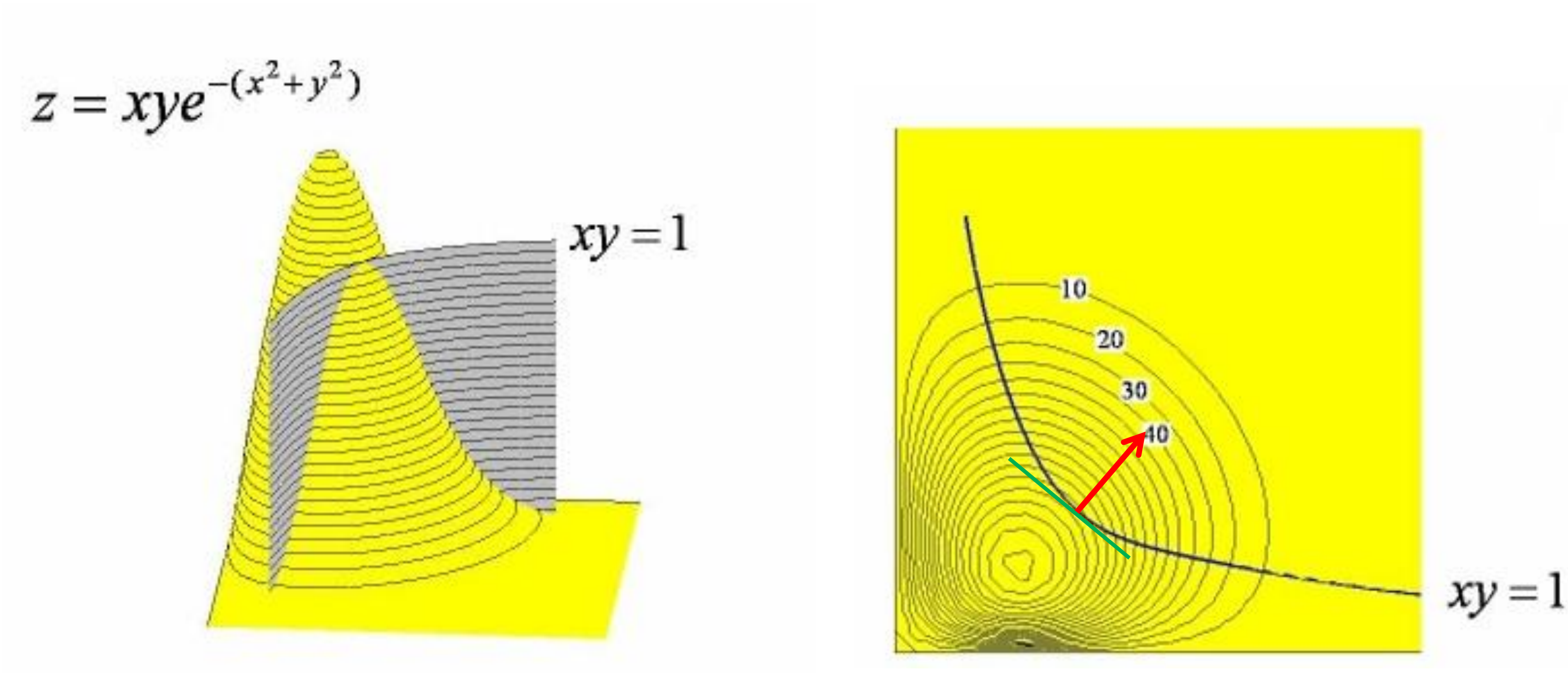
引进辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y)$, 则条件极值点应满足:

$$\begin{cases} F_x'(x,y)=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ F_y'(x,y)=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ F_\lambda'(x,y)=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

Lagrange(拉格朗日)乘子法：从此方程组中解出可能的极值点，再根据题意判别哪些是极值点. λ 称为**Lagrange乘子**，不必求出.

注： Lagrange乘子法实质是通过引进 λ 构造辅助函数后，将目标函数在等式约束下的极值问题，化为辅助函数无约束的极值问题.

条件极值的几何解释



$$f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)y'(x_0)=0.$$

Lagrange乘子法可以推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

问题： 求目标函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $m(<n)$ 个约束条件 $\varphi_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0\,(1\le i\le m)$ 下的极值问题.

作辅助函数 $F\left(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1\cdots,\lambda_m\right)=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_m\varphi_m$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 m 个待定常数.

由此构造方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}=0 \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}=0 \\ \varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0 \\ \qquad\vdots \\ \varphi_m\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0 \end{cases} \qquad (\triangle)$$

设 $f,\varphi_i(i=1,2,\cdots,m)$ 具有连续偏导数，且Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

在满足约束条件的点处是**满秩**的, 即 $\operatorname{rank}(J)=m$, 则

定理1：条件极值点就在方程组(△) 的所有解 $(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 所对应的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中.

定理2：设 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 满足方程组(△)，则当方阵 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(x_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\right)$ 正定 (负定)时，x_0 为条件极小(大)值点.

1. 求在约束条件 $(x-1)^2+y^2-1=0$ 下 $z=xy$ 的极值.

2. 求由原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

3. 将正数 a 分成 n 个正数之和，使这 n 个正数的乘积最大.

4. 求 $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 在条件 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{a^2}(a>0)$ 下的极值，并判断是哪种极值.

5. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有直到二阶的所有连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$，证明：$f(x,y)$ 不可能在 D 内取得极大值.

6. 求 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 的最大值，其中

$$x^2+y^2+z^2=6r^2(r>0),\ x>0,y>0,z>0.$$

并证明对 $\forall a,b,c>0$ 有 $ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$.