中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十章　　多元函数的重积分

- 二重积分
- **二重积分的换元**
- 三重积分
- n 重积分

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

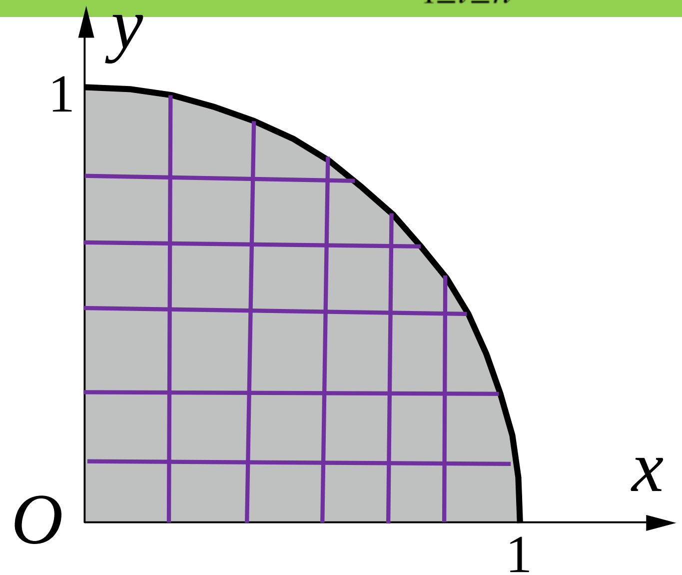
例：$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$.

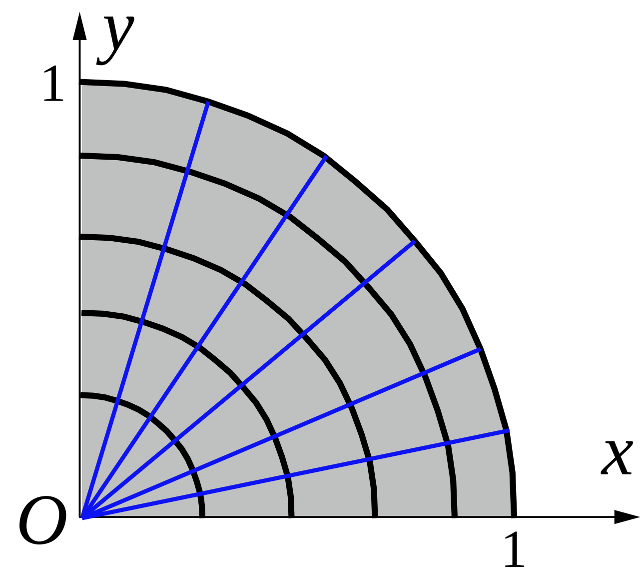
解：$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

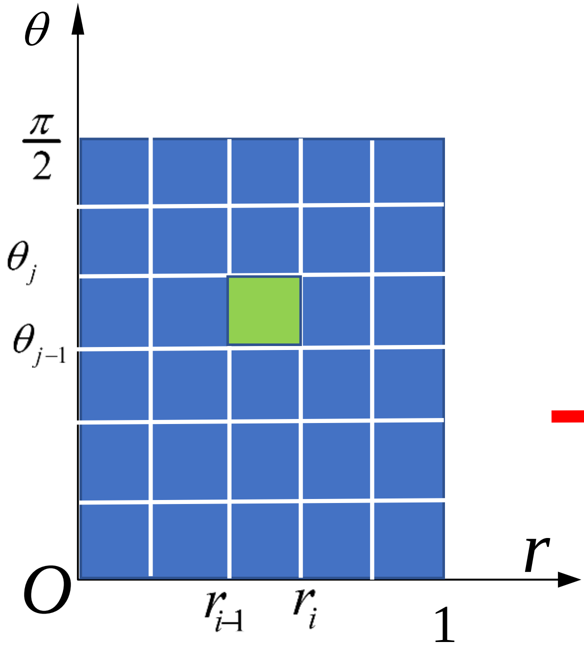
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y\sqrt{x^2+y^2}+x^2\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\Bigg|_0^{1-x^2}\mathrm{d}x = \cdots\cdots$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)$$

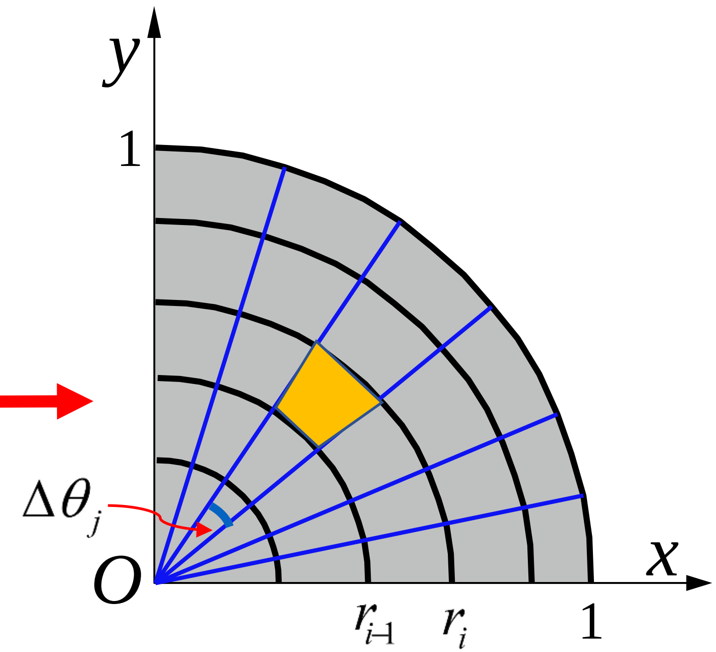
矩形分割 VS 曲边分割：



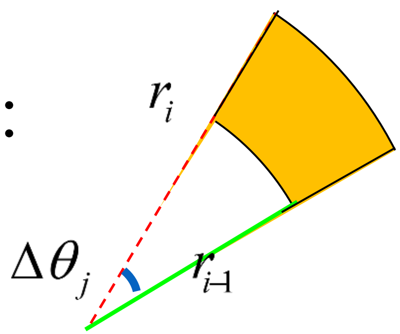




$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



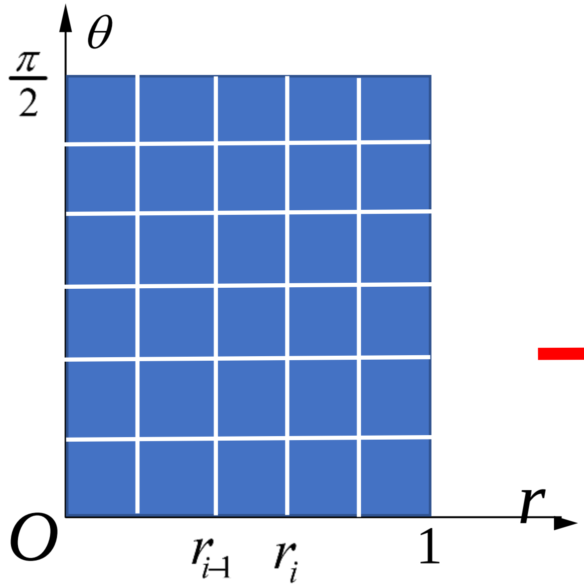
面积微元：



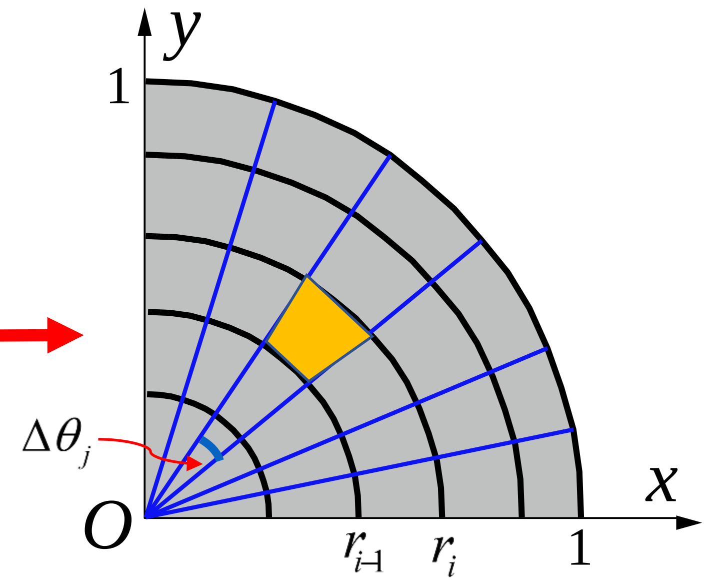
$$\sigma(D_{ij}) = \frac{1}{2}r_i^{\ 2}\cdot\Delta\theta_j - \frac{1}{2}r_{i-1}^{\ 2}\cdot\Delta\theta_j$$

$$\approx r_i\Delta r_i\Delta\theta_j$$

例： $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

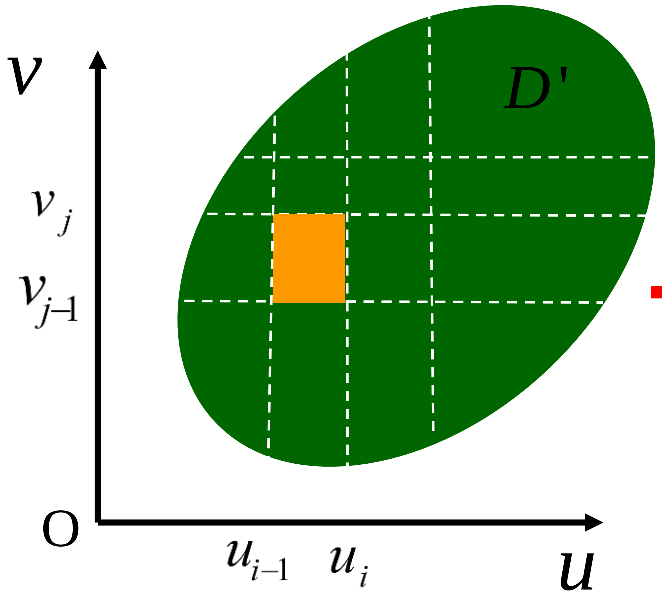


$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} f(\xi_i,\eta_j)\sigma(D_{ij})$$

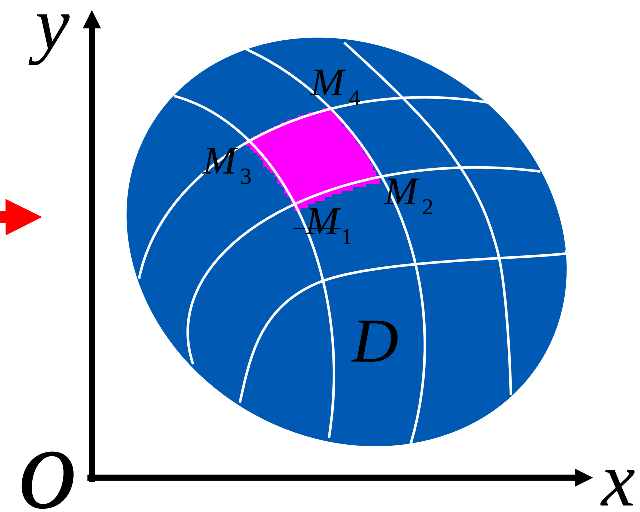
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} f(r_i\cos\theta_j, r_i\sin\theta_j) r_i\Delta r_i\Delta\theta_j = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1 r^2\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.$$

一般情形下，设 $\Phi(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ 将 D' 映为 D.



$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$



当 $\Delta u_i,\Delta v_j$ 充分小时，曲边四边形近似于平行四边形，其面积近似为

$$\Delta\sigma_{ij}\approx\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|\approx\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u_i & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta v_j \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta u_i & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v_j\end{matrix}\right\|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i,v_j)\right|\Delta u_i\Delta v_j.$$

定理：设 $f(x,y)$ 在可测的有界闭区域 D 上连续，变换 $\Phi: D' \to D$

$$\Phi(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big),\quad (u,v)\in D'$$

为 C^1 的一一映射并满足 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. 则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

此即**二重积分的换元公式.**

变换前后面积微元之间的关系 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

特别地，对极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$

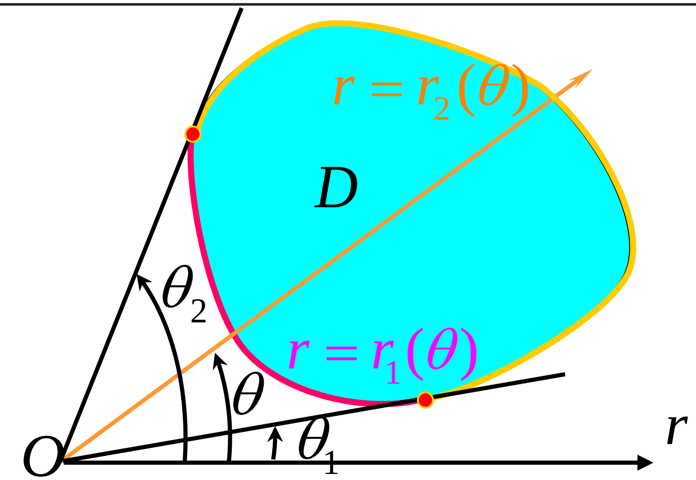
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

注：积分区域或被积函数有以下特点时，可考虑用极坐标变换.

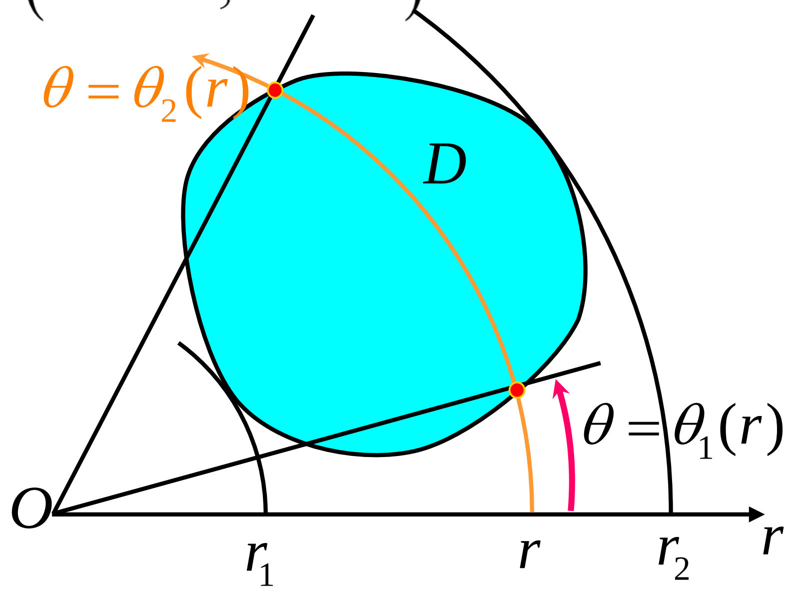
(1) 积分区域为圆域、环形域、扇形环域或者它们的部分

(2) 被积函数形如 $x^n y^m f\left(x^2 + y^2\right)$ 等形式时.



I) $D:\begin{cases} r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r.$$



II) $D:\begin{cases} \theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r) \\ r_1 \le r \le r_2 \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}\theta.$$

1. 求椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积.

2. 求球 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 所截下的体积 V.

3. 求球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$ 相交部分体积.

4. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围成的面积.

5. 求 $\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与坐标轴围成.

6. 求积分 $\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由四条抛物线

$$y^2=px, y^2=qx, x^2=ay, x^2=by\ (0<p<q, 0<a<b)$$

围成.

7. 求 $\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

8. 求 $\iint_D \dfrac{|xy|\left(x^{\frac{2}{7}}+1\right)}{x^{\frac{2}{7}}+y^{\frac{2}{7}}+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^4+y^4\le a^2$.

9. 已知函数 $f(x,y)\in C^2(D), f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = A,$

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $\iint_D xy\, f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

本小节作业：

P166: 1(1,3,5)，2(2,4,6,8)，3(1,2)，5，6，7