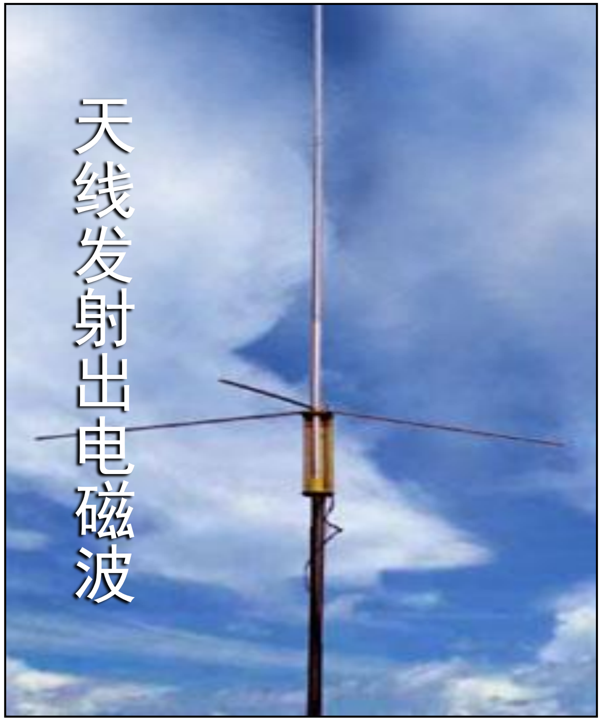
# 第十章　机械波

# §9.1机械播的形成与传播

●波动 —— 振动在空间的传播过程

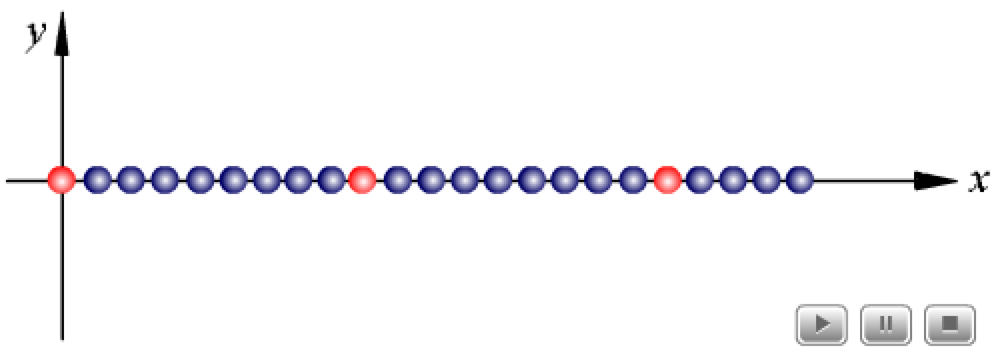
➢常见的波动:

**机械波**：机械振动在弹性介质中的传播过程

**电磁波**：交变电磁场在空间的传播过程

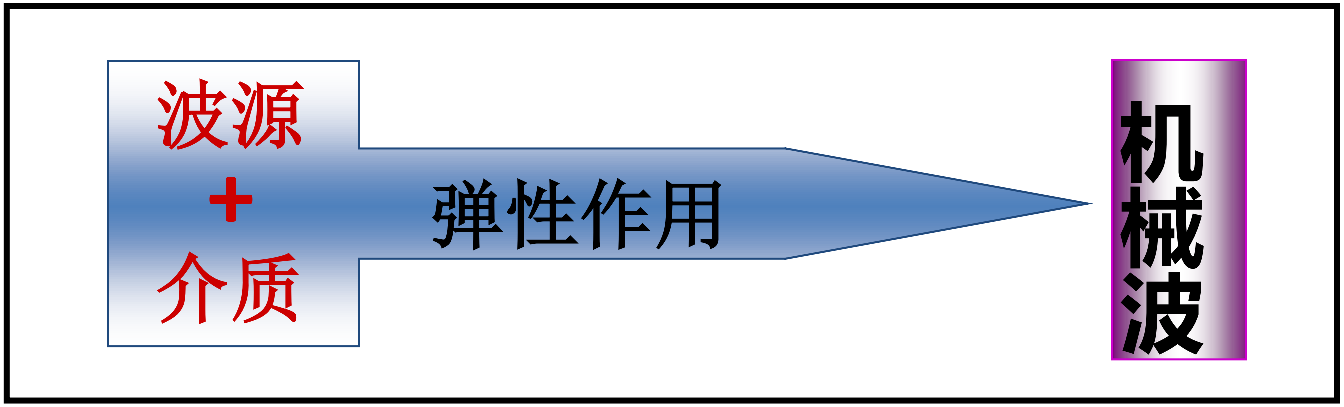
**物质波**：微观粒子的运动，其本身具有的波粒二象性

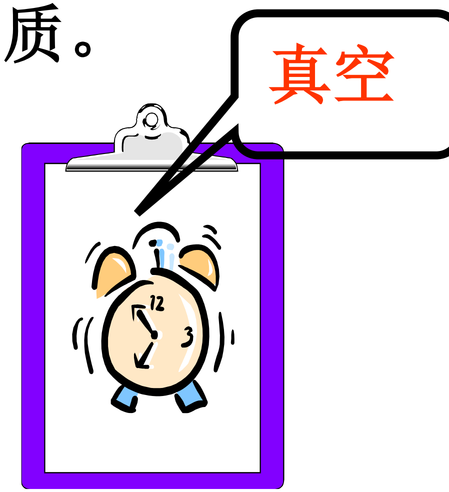
1. 机械波的形成




➢当弹性介质中的一部分发生振动而离开平衡位置时，由于介质各个部分之间的弹性力间的相互作用，再带动其他的质元运动，于是介质将把这一质元的振动由近及远的传播传播下去而形成波。

产生条件：波源：产生机械振动的振源（波源）；
弹性介质：传播机械振动的弹性介质。




机械波的传播

关于介质的两点说明：

①介质可以看成是大量质元的集合，每个质元具有一定的质量，各质元间存在着相互作用（弹性）；

②质元间的相互作用使波得以传播，质元的惯性使波以有限的速度传播。

弹性力：正弹性力（压、张）：液体、气体、固体
切弹性力：固体

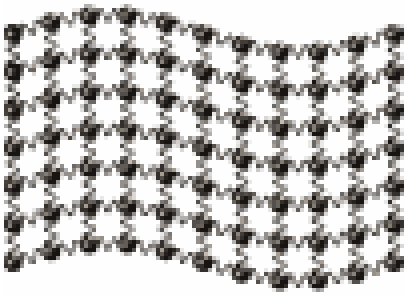
●波的传播特征可归纳为：

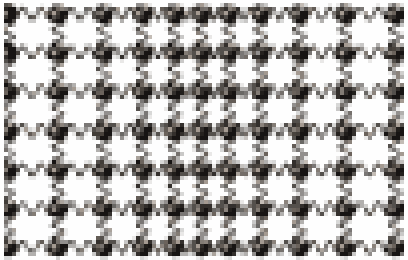
①波的传播不是媒质质元的传播(波动中各质点并不随波前进)，而是振动状态的传播(位相的传播)， 质元某时刻的振动状态将在较晚时刻于“下游”某处出现；

②如果扰动是周期性的，介质中各处也将相继做与波源同方向、同频率的周期性振动；

③各质点振动的相位不同，沿波的传播方向，各质元的相位依次落后；

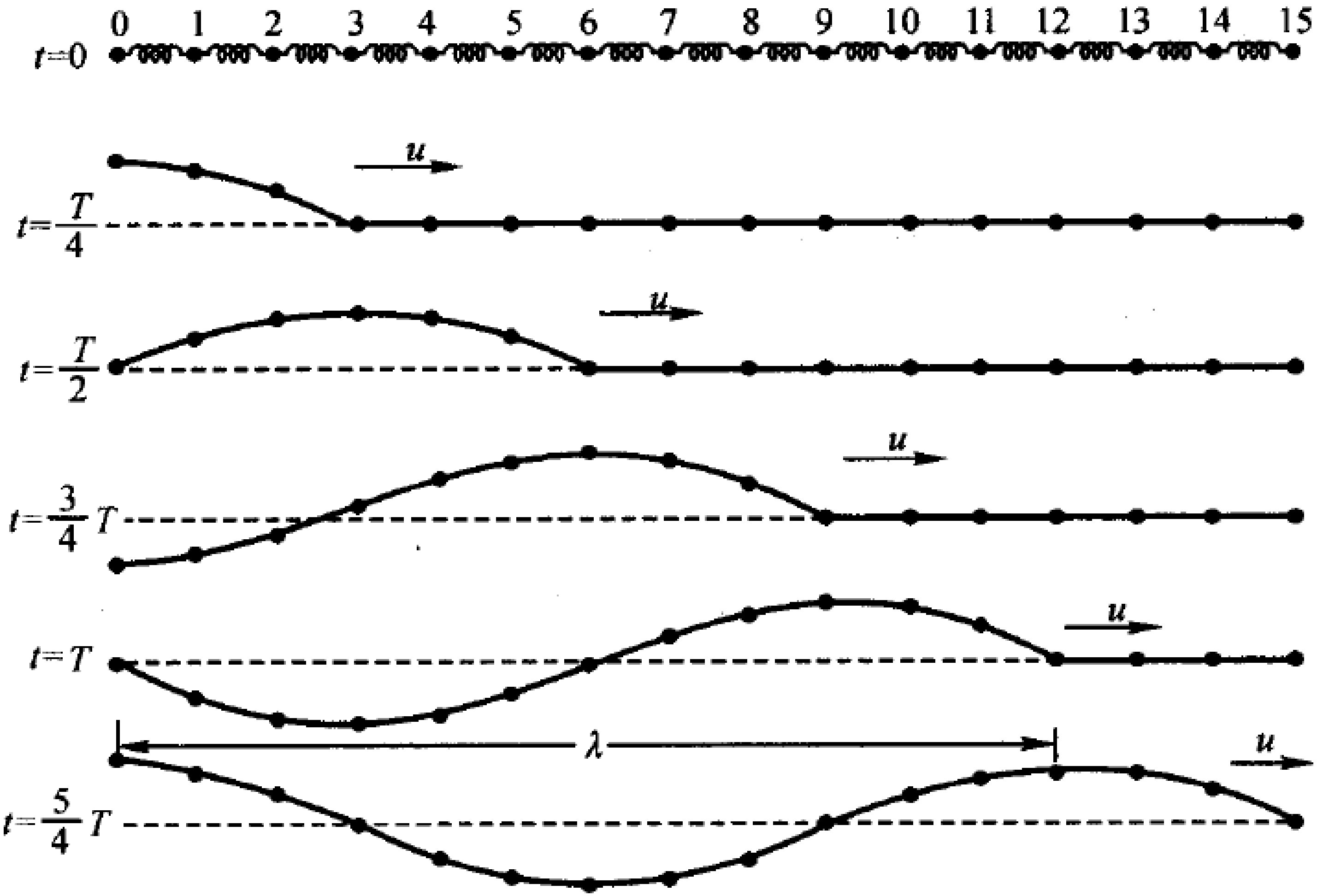
④机械波实质上是介质中大量质元参与的集体振动。





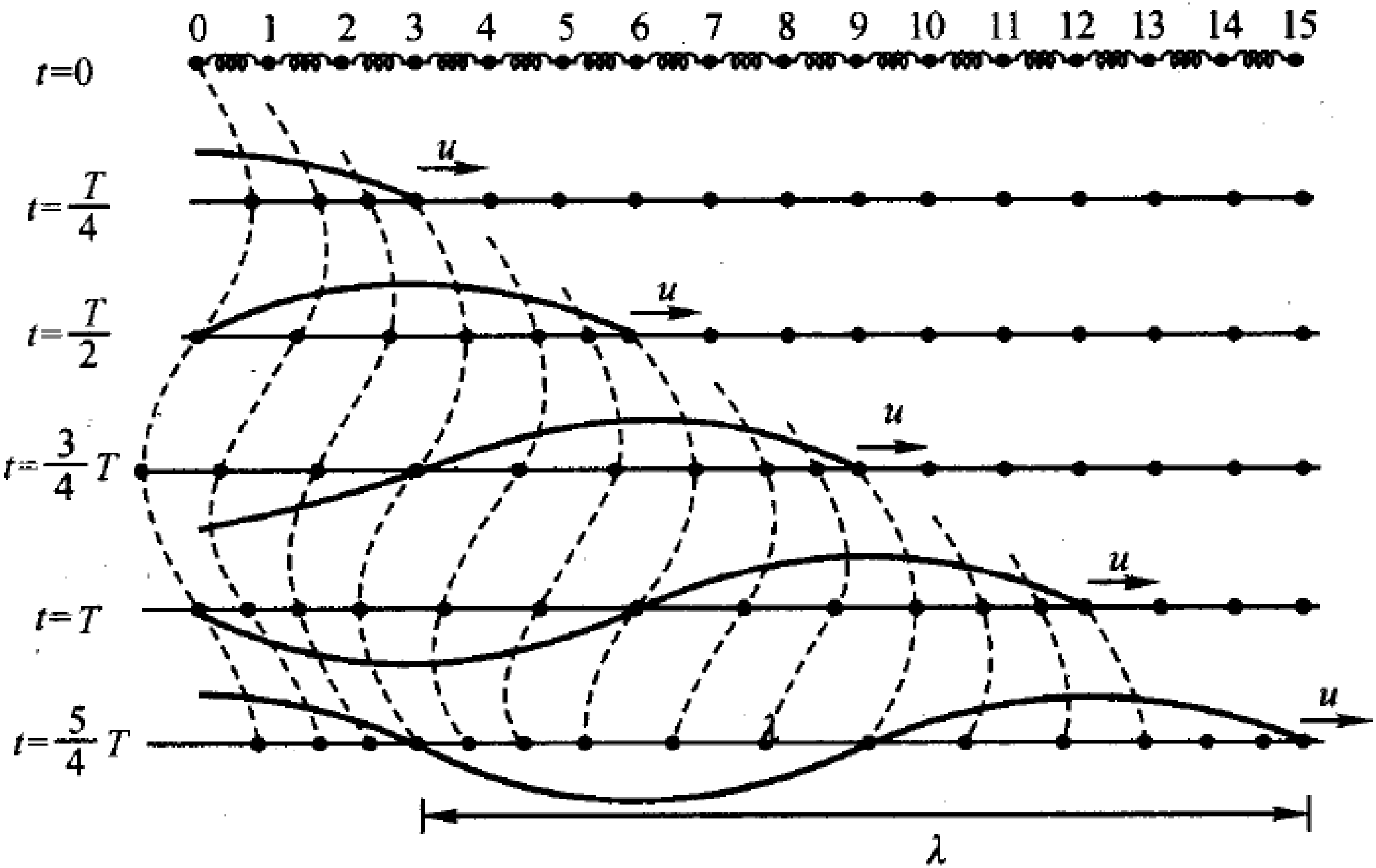
## 2. 横波与纵波

**横波：**介质中质点振动方向与波的传播方向相**垂直**的波，如电磁波。




➢**特征：**①具有交替出现的波峰和波谷；②横波在介质中传播时，介质产生**切变**，只能在**固体**中传播。

纵波：介质中质点振动方向与波的传播方向相平行的波，如声波。



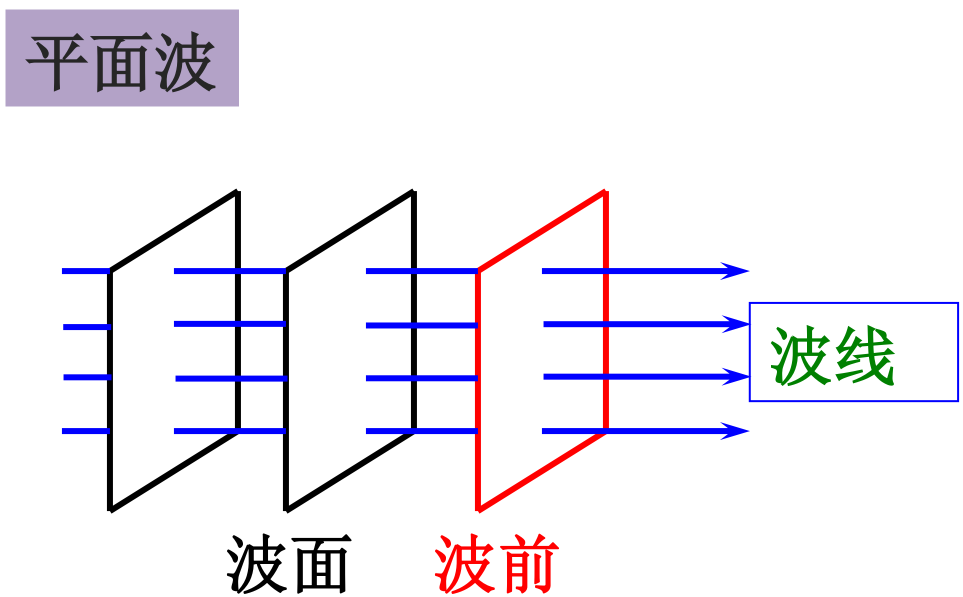

➢特征：①具有交替出现的密部和疏部；②纵波在介质中传播时，介质中产生拉伸挤压形变，能在固体、液体和气体中传播。

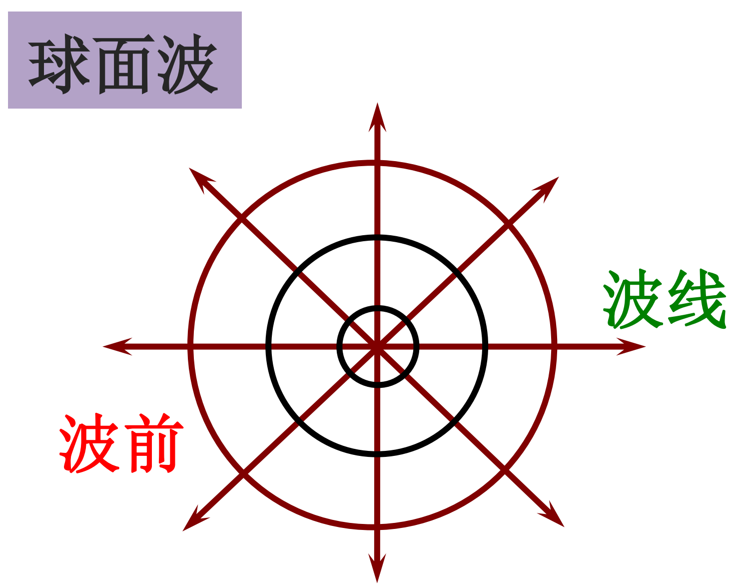
## 3. 机械波的几何描述

①波面：介质中振动状态相同的质元所组成的面。
②波前：最前面的波面，即波源最初振动状态传播到各点所组成的面。
③波线：从波源出发，沿波的传播方向画一些带箭头的线。

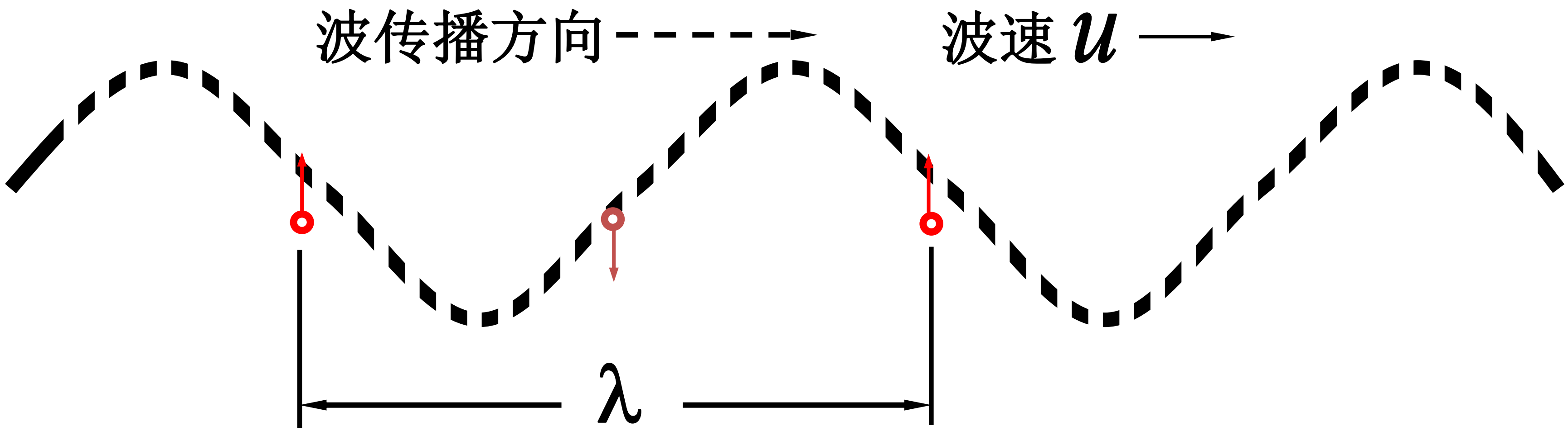
在各向同性介质中波线与波面垂直。

根据波面的形状可以把波分为：平面波、球面波、柱面波等。



## 4. 描述波的几个物理量




①波长 $\lambda$ :在同一波线上，相邻的两个振动状态相同的点之间的距离，即振动位相相差 $2\pi$ 的两点之间的距离，或者说是一个完整波形的长度(以质点的平衡位置为横坐标，以质点的位移为纵坐标所画的曲线称为波形图)，波长反映了波的空间周期性。

- 横波：相邻的波峰或波谷间距离；
- 纵波：相邻的密集或稀疏部分中心间距离。

②周期 $T$：波前进一个波长的距离所需要的时间，周期表征了波的时间周期性。

由于波源作一次完全振动，波就前进一个波长的距离，所以周期等于波源振动的周期。

③频率 $\nu$：周期的倒数，即单位时间内波动所传播的完整波形的数目。

$$\nu = 1/T$$

④波速 $u$ ：波动过程中，振动状态（即振动相位）单位时间内所传播的距离，又称为相速。 波速与波长、周期和频率的关系为:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu, \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$

说明:

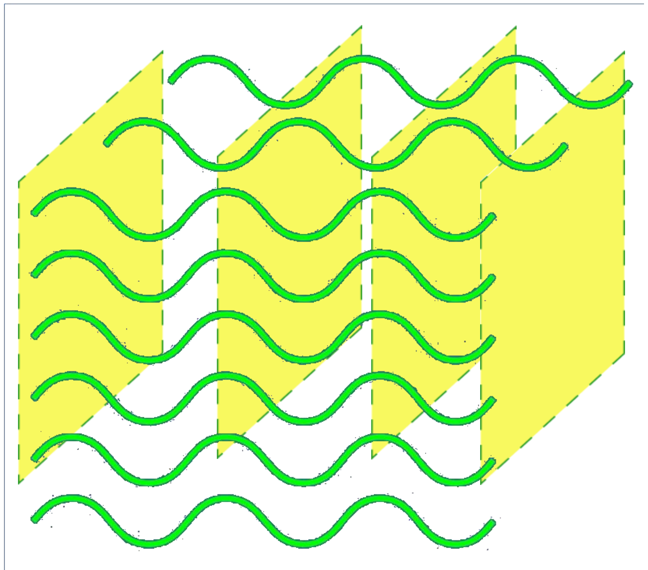
●周期或频率只决定于波源的振动!与媒质的性质无关； 一般情况下，与波源振动的周期和频率相同。

●波速只决定于媒质的性质！ 波速实质上是相位传播的速度，故称为相速度；其大小主要决定于媒质的性质，在没有色散的煤质中，波速与其频率无关。

# §10.2 平面简谐波

**简谐波：** 若波源作简谐振动，介质中各质点也将相继作同频率的简谐振动，这种波称之为简谐波。

**平面简谐波：** 若波面为平面，则该波称为平面简谐波。



## 1. 平面简谐波的波函数（波的运动学方程）

设有一平面简谐波，在无吸收、均匀、无限大的介质中传播。

介质中任一质点（坐标为 $x$）相对其平衡位置的位移（坐标为 $y$）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数.

$$y = y(x,t)$$

各质点相对平衡位置的位移

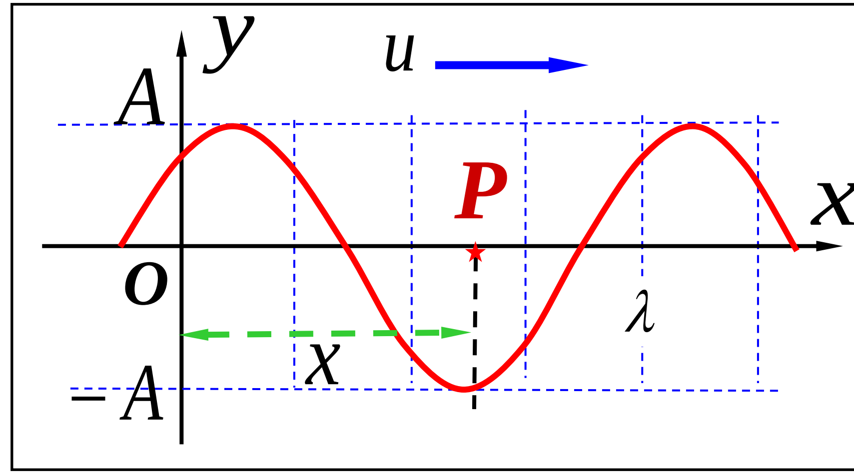
波线上各质点平衡位置

①沿$x$轴正方向传播(右行波)：

设波源$O$的振动方程为

$$y_0 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

时间推迟方法




点$O$ 的振动状态

$$y_0 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$\Delta t = \dfrac{x}{u}$ 点 $P$

$t-\dfrac{x}{u}$ 时刻点$O$ 的运动 = $t$ 时刻点$P$的运动

$P$点在$t$ 时刻的位移为 $$y_p = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

从时间看，$P$点$t$ 时刻的位移是$O$点 $t-x/u$ 时刻的位移。

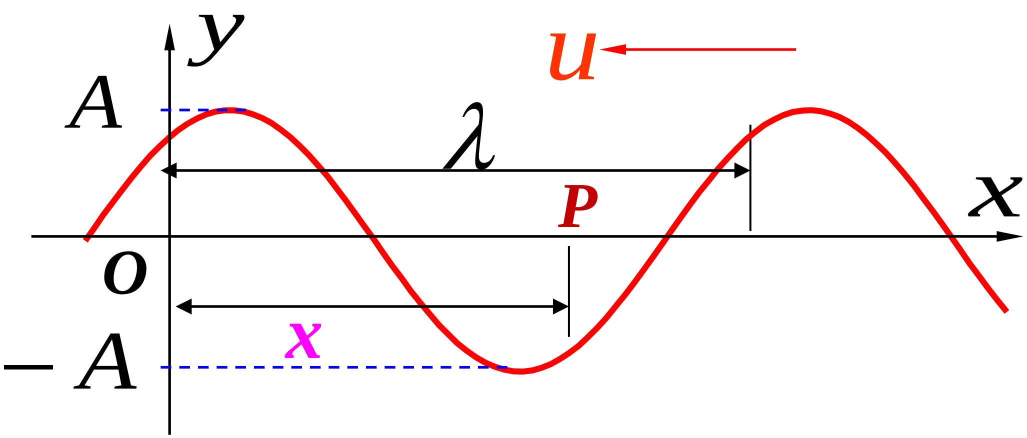
从相位看，$P$ 处质点振动相位较$O$ 点质点相位落后 $\omega\dfrac{x}{u}$

由于$P$点是任意选取的，所以介质中任一点（距离原点为$x$）在任一时刻 $t$ 离开平衡位置的位移为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

平面简谐波波动方程

②沿$x$轴负方向传播(左行波)：




$P$点的振动状态在时间上超前$O$点 $\Delta t = {x}/{u}$

$P$点 $t$ 时刻的位移 $=$ $O$点 $t+x/u$ 时刻的位移

$P$点比$O$点超前的相位 $\omega\dfrac{x}{u}$

所以***P***点处振动位移的表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

综上可知，平面谐波一般表达式

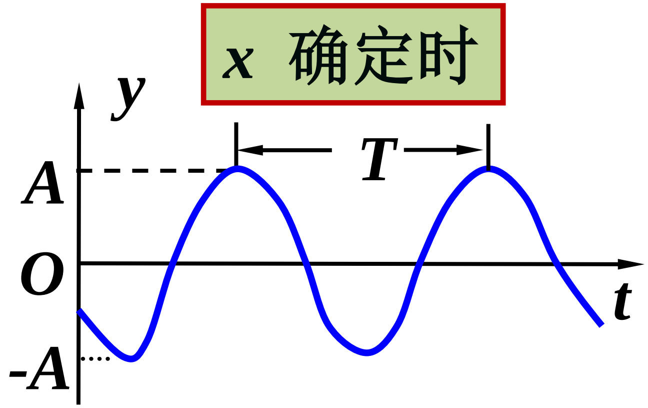
$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

负（正）号代表向 ***x*** 正（负）方向传播的谐波。

## 2. 简谐波运动学方程的物理意义

简谐波函数是一个二元函数。振动位移$y$既是时间$t$又是位置$x$的函数。

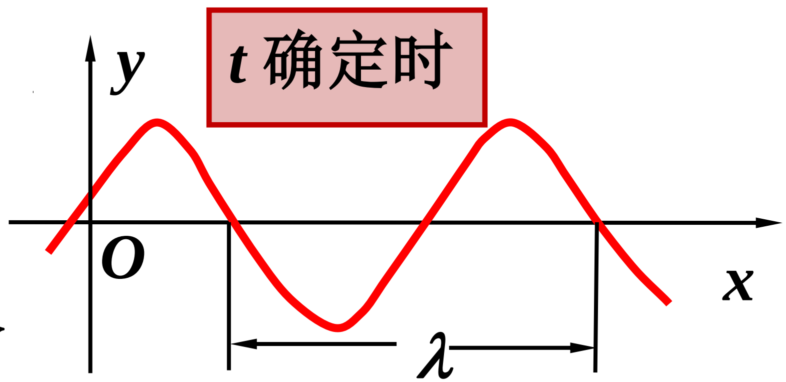
①当 $x$ 一定时，令 $x = x_0$




$$y(x_0,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_0}{u}\right)+\varphi\right]$$

表达式变成 $y$ - $t$ 关系，是 $x_0$ 点的振动方程，对应曲线为该处质点振动曲线。

② 当$t$一定时，令$t = t_0$

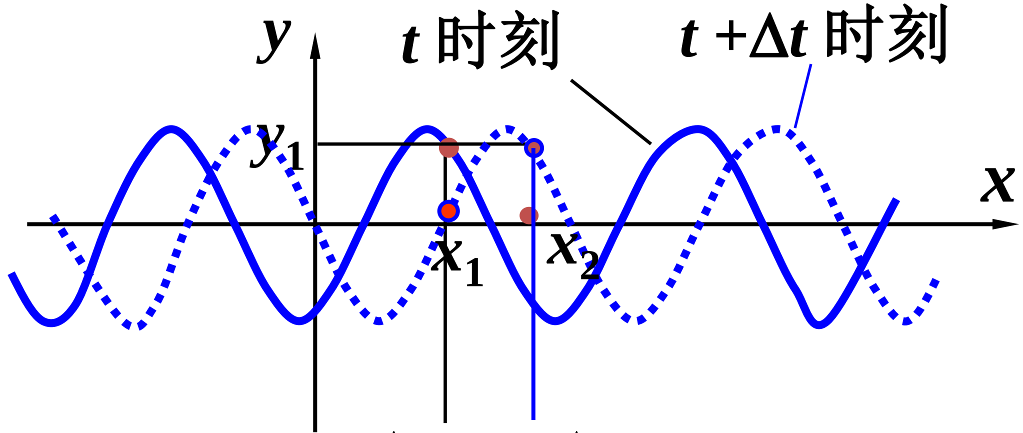



$$y(x,t_0) = A\cos\left[\omega(t_0-\frac{x}{u})+\varphi\right]$$

此式表达了 $t = t_0$ 时刻空间各点的位移分布，对应曲线为该时刻的波形图。不同时刻对应有不同的波形曲线。

③ $x$、$t$ 均变，表示波线上所有质点在各个时刻的位移情况。

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$




$$\Delta x=u\Delta t$$

考察$t$和$t+\Delta t$ 时刻, 以及$x$和$x+u\Delta t$ 两质点的运动

$$y(x+u\Delta t,t+\Delta t)=A\cos\left[\omega\left(t+\Delta t-\frac{x+u\Delta t}{u}\right)+\varphi\right]$$

$$=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]=y(x,t)$$

**波函数的物理意义：描述了波形的传播。**

## 3. 简谐波函数的几种表达形式

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

定义 波数: $k \equiv \dfrac{\omega}{u} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

时间 $t$　　圆频率 $\omega$　　周期 $T$

空间 $x$　　波数 $k$　　波长 $\lambda$

通过波速联系起来 $\boxed{u = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k}}$

## 4. 波动中质点振动的速度和加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

注意：➢ **$u$:** 波形传播速度，对没有色散的介质是常数；

➢ **$v$:** 质点振动速度，是时间的函数。

## 5. 平面波的波动方程

把平面简谐波的波函数分别对$t$和$x$求二阶偏导数，得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2} \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

比较上列两式，可得

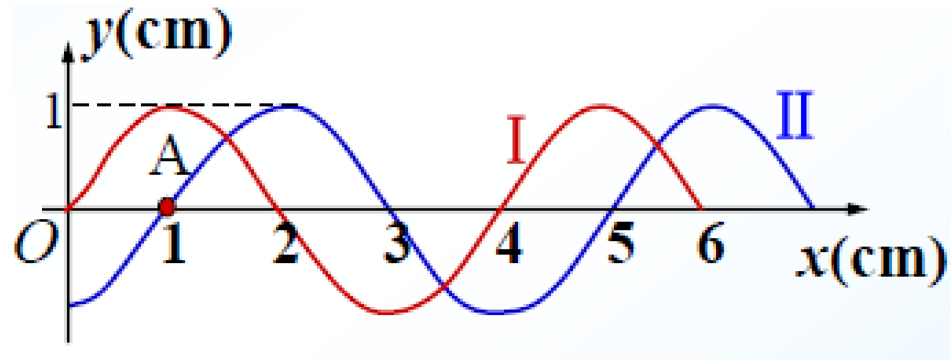
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

普遍意义：在三维空间中传播的一切波动过程，只要介质是无吸收的各向同性均匀介质，都适合下式：

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

**任何物质运动，只要它的运动规律符合上式，就可以肯定它是以 $u$ 为传播速度的波动过程。**

例题1：已知$t$=0时的波形曲线为Ⅰ，波沿$x$方向传播，经$t$=1/2s后波形变为曲线Ⅱ。已知波的周期$T$>1s，试根据图中绘出的条件求出波动表达式，并求$A$点的振动表达式。(已知振幅$A$=0.01m)




解：由图可知:

$$\lambda = 0.04\text{m}$$

波速：

$$u = \frac{x_1 - x_0}{t} = \frac{0.01}{1/2} = 0.02\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.04}{0.02} = 2\text{s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\cdot\text{s}^{-1}$$

设原点振动表达式:

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$t=0$时，$y_O=0 \Rightarrow \cos\varphi=0 \Longrightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{2}$

此时，$v_0<0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow y_O=0.01\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})\ (\mathrm{m})$

利用时间推迟法可得波动表达式为：

$$y=0.01\cos[\pi(t-\frac{x}{0.02})+\frac{\pi}{2}]\ \ (\mathrm{m})$$

***A*点的振动表达式为：**

$$y_A=0.01\cos[\pi(t-\frac{0.01}{0.02})+\frac{\pi}{2}]$$
$$=0.01\cos\pi t\ (\mathrm{m})$$

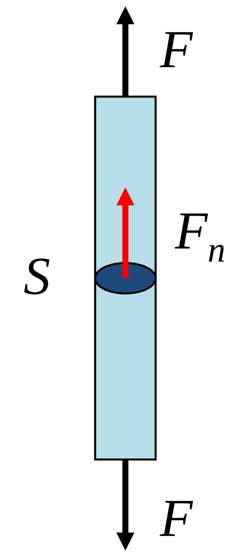
# §10.3 固体的弹性

任何物体，在外力作用下都会发生或多或少的形变，如果撤消外力后，物体的形变能够完全消失，那么这种物体就是**弹性体**，弹性体也是一种理想模型。

**外力不能超过一定限度。**

## 1. 拉伸压缩形变

以一个被拉伸（压缩）的直杆为例，此时杆内各处张力$F_n$ 均与横截面$S$相垂直，定义作用在$S$面上的**正应力**

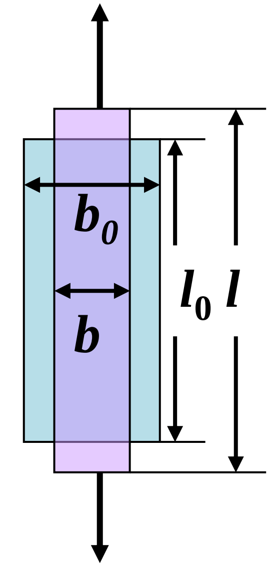



$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

σ＞0时为拉伸应力， σ＜0时为压缩应力。

杆子被拉伸发生弹性形变，定义

纵向应变： $$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$




横向应变： $$\varepsilon_{横} = \frac{b-b_0}{b_0} = \frac{\Delta b}{b_0}$$

泊松系数： $$\mu = \left|\frac{\varepsilon_{横}}{\varepsilon}\right|$$

●**胡克定律**: 物体在弹性限度范围内，应力与相应的应变成正比。

$$\sigma = Y\varepsilon \quad \text{或} \quad \frac{F_n}{S} = Y\frac{\Delta l}{l_0}$$

杨氏模量

●拉伸（压缩）形变的势能

外力迫使弹性体发生形变时，反抗形变的弹性力也是保守力，因而拉伸（压缩）形变的弹性体也有弹性势能。以直杆为例，形变量为$x$ 时，杆中张力为

$$F_n = YS\frac{x}{l_0},$$

在直杆形变的过程中，外力作功：

$$W = \frac{YS}{l_0}\int_0^{\Delta l} x\,dx = \frac{1}{2}YSl_0\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{2}Y\varepsilon^2 V, \quad V \equiv Sl_0$$

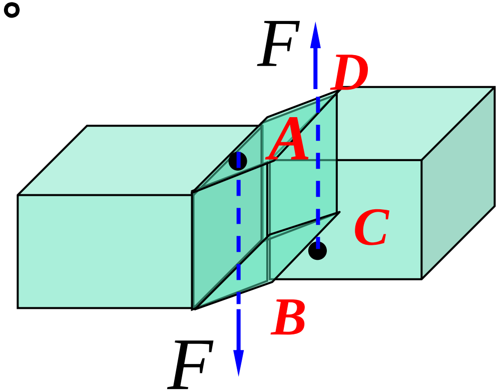
其中$V$为直杆的体积。直杆因被拉伸（压缩）形变而具有的势能密度：

$$E_p^0 = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} Y \varepsilon^2$$

单位体积的形变势能与应变平方成正比。

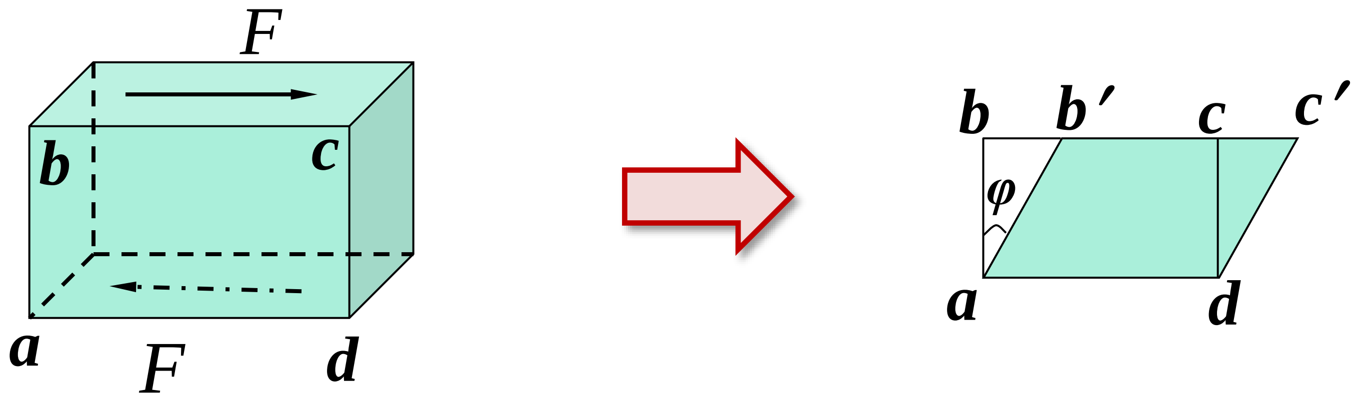
## 2. 剪切形变

当物体受到一对力偶作用使两个平行截面发生相对平移时，这种形变称为剪切形变。




此时受力$F$与横截面相互平行。以$S$表示横截面积，定义剪切应力：

$$\tau = \frac{F}{S}$$




定义**剪切应变**：物体受外力作用后形状变化的相对量

$$tg\varphi = \frac{\overline{bb'}}{\overline{ab}} \approx \varphi$$

φ角也称为切变角。

●剪切形变的**胡克定律**：在弹性限度内，剪切应力与剪切应变成正比：

$$\tau = G\varphi$$

*G*为材料的**剪切模量**

理论上还可推出杨氏模量*Y*、剪切模量*G*和泊松系数 $\mu$ 之间的关系：

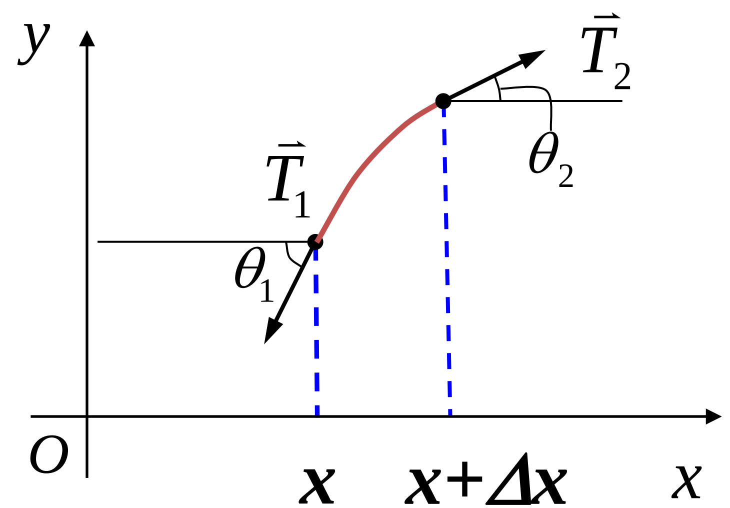
$$G = \frac{Y}{2(1+\mu)}$$

# §10.4波动方程与波速

波动方程——由动力学规律得到的概括振动传播规律的方程。

①柔软弦中弦的波动方程

在以一定张力$T_0$拉紧的柔软弦中施一横向扰动时，该扰动会以一定的速度向前传播，令扰动很小，则张力$T_0$可视为与无扰动时相同。




取坐标为**x**到**x+Δx**的一段弦作为研究对象，偏离平衡位置的位移

$$y = y(x,t)$$

弦沿**x**方向无位移：$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 = T_0$

弦所受合力：$\Delta F_{ex} = T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = T_2\cos\theta_2\tan\theta_2 - T_1\cos\theta_1\tan\theta_1$

$$= T_0\tan\theta_2 - T_0\tan\theta_1 = T_0\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - T_0\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

应用牛顿第二定律

$$\Delta F_{ex} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$ 弦的波动方程

简谐波可以在该柔软弦中传播，简谐波的运动学方程应该满足波动方程，将平面简谐波解 $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$ 带入波动方程，可得

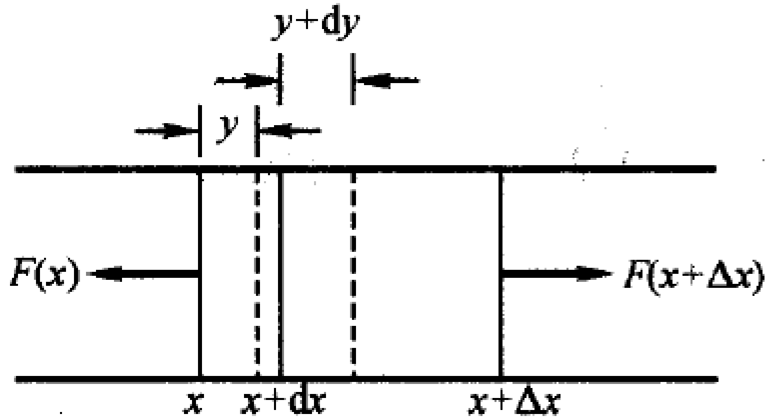
$$-\omega^2 A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi\right] = \frac{T_0}{\rho}\left(-\frac{\omega^2}{u^2}\right)A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi\right]$$

由此可解得波速

$$u = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

$T_0$ 反映介质的弹性，$\rho$反映介质的惯性。

## ②弹性棒中纵波的波动方程和波速




设波在其中传播的介质是质量连续分布的弹性棒。令棒的截面积为$S$、密度为$\rho$。当棒中有纵向扰动传播时，各截面的位移并不相同，棒中发生纵向形变（张变），从而出现应力（弹性力）。

在棒中取横截面坐标为 $x$ 到 $x+\Delta x$ 的一段作为考察对象，则这段棒受到左方介质所施的弹力 $F(x)$ 和右方介质所施弹力 $F(x+\Delta x)$的作用。根据胡克定律，作用在 $x$ 处横截面上的弹性力与该处纵向相对形变（应变）成正比：

$$F(x)=SY\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x}$$

$$F(x+\Delta x)=SY\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x}$$

当时 $dy/dx > 0$ 为伸长形变，应力是张力，相应的 $F(x)$ 应取负号，$F(x+\Delta x)$ 应取正号，根据牛顿第二定律

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = SY \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - SY \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} = SY \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

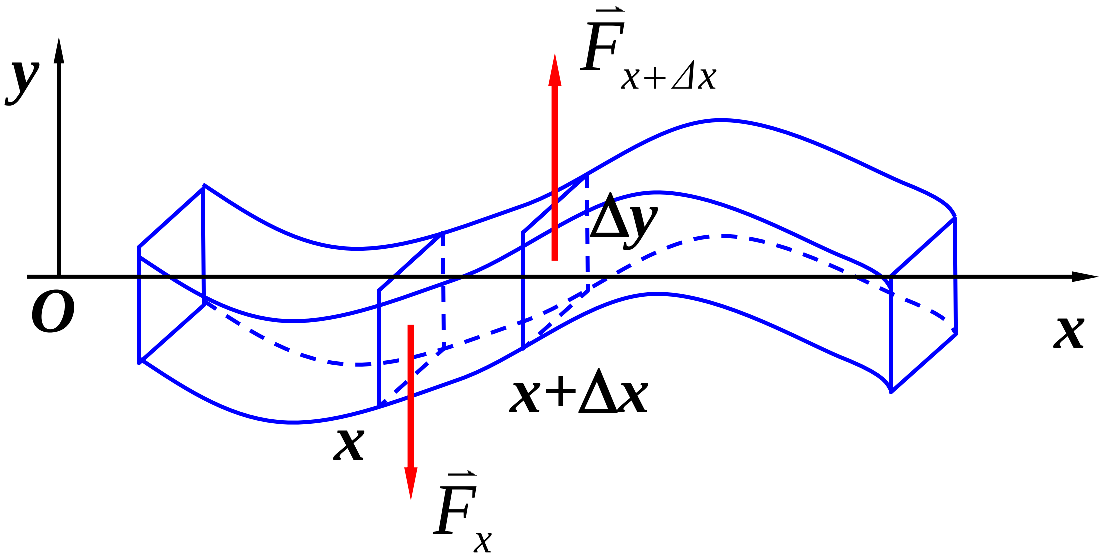
两边消去$S\Delta x$，并将求导符号改为偏导符号，即得弹性棒中纵波的波动方程为

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

故此纵波的波速为

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

## ③弹性棒中横波的波动方程和波速




设横波沿$x$方向传播，体元横截面积$S$、密度$\rho$，切应变$\dfrac{dy}{dx}$

由胡克定律可得 $x$和$x+\Delta x$ 处切向弹性力为

$x$处

$$F_x = GS\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x$$

$x+\Delta x$处

$$F_{x+\Delta x} = GS\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

根据牛顿第二定律，可得

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=F_{x+\Delta x}-F_x=GS\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-GS\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x=GS\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|\Delta x$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\ \Rightarrow$$

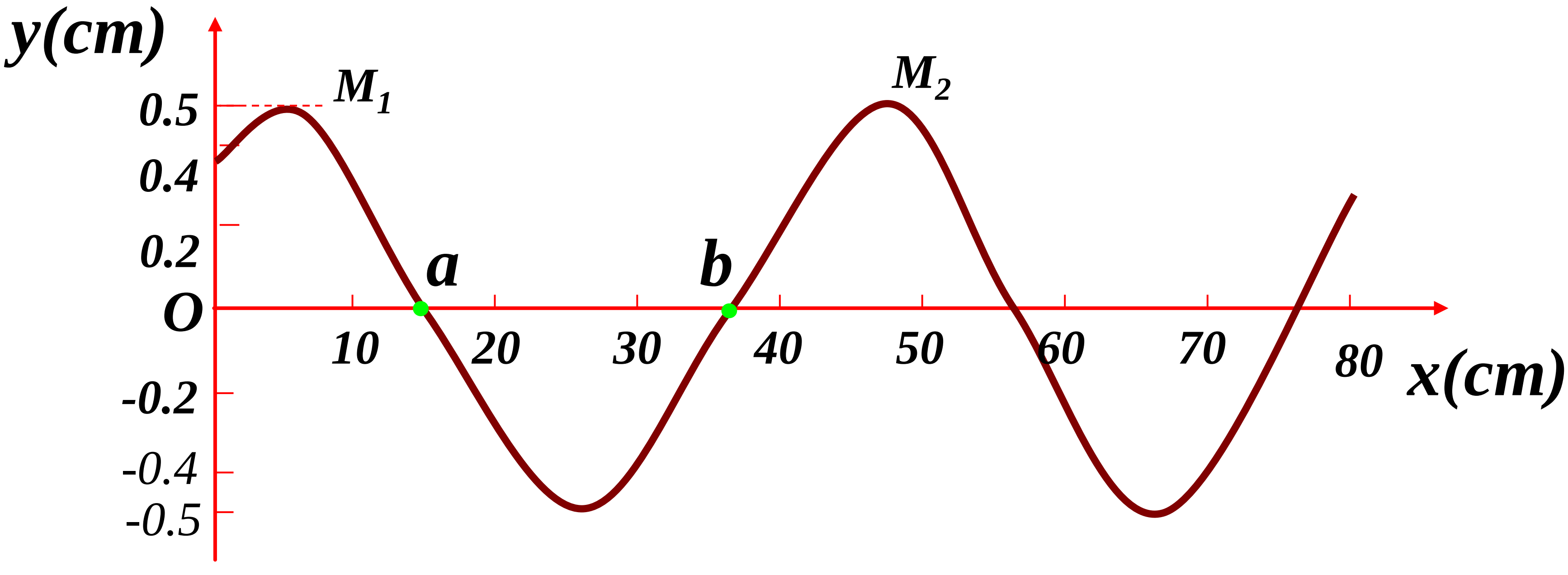
波速：$u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

一维波动方程的一般形式：$\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-u^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0}$

偏微分方程的通解：$y=f_1(t-\dfrac{x}{u})+f_2(t+\dfrac{x}{u})$

不同于二阶常微分方程，通解中出现的是两个待定的函数$f_1$和$f_2$，而不是两个待定的常数。

例题2：一横波沿一弦线传播，设已知$t$=0时的波形曲线如图所示，弦上张力为3.6$N$，线密度为25$g\cdot m^{-1}$。求：（1）振幅；（2）波长；（3）波速；（4）波的周期；（5）弦上任一质点的最大速率；（6）图中$a$，$b$两点的相位差；（7）$3T/4$ 时的波形曲线。



**解：** 由波形曲线可看出

（1）***A*=0.5*cm*;**

（2）***λ*=40*cm***

（3）由波速公式可得

$$u=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}=\sqrt{\frac{3.6}{25\times10^{-3}}}=12(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

(4)波的周期为

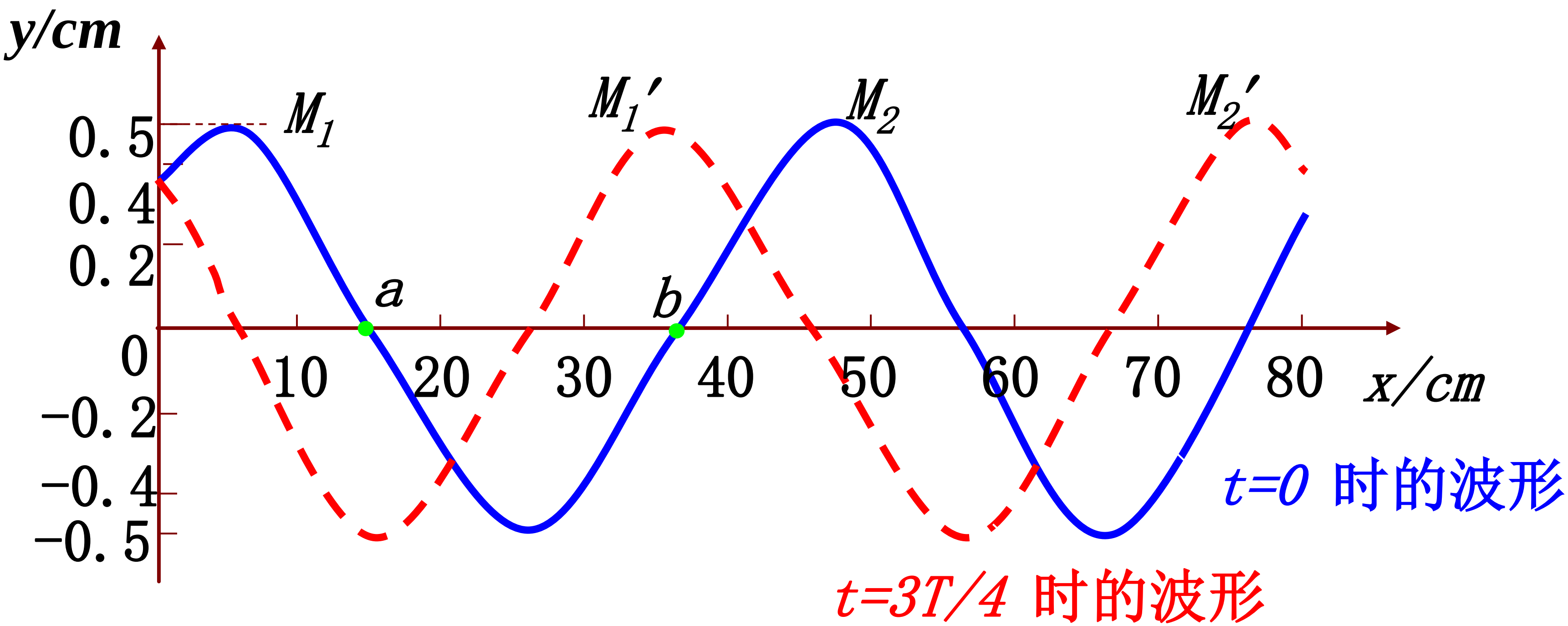
$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{0.4}{12}=\frac{1}{30}\text{（s）}$$

(5)质点的最大速率为

$$v_{\max}=A\omega=A\frac{2\pi}{T}=0.5\times10^{-2}\times\frac{2\pi}{1/30}=0.94(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

(6) $a$，$b$两点相隔半个波长，$b$点处质点比$a$点处质点的相位落后$\pi$;

(7) $3T/4$ 时的波形如图中实线所示，波峰$M_1$和$M_2$已分别右移$3\lambda/4$ 而到达$M_1'$ 和$M_2'$ 处。

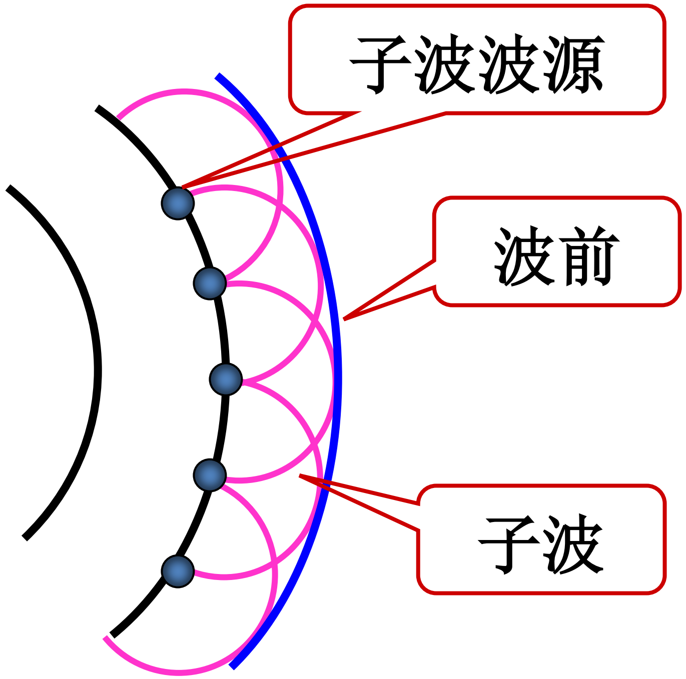


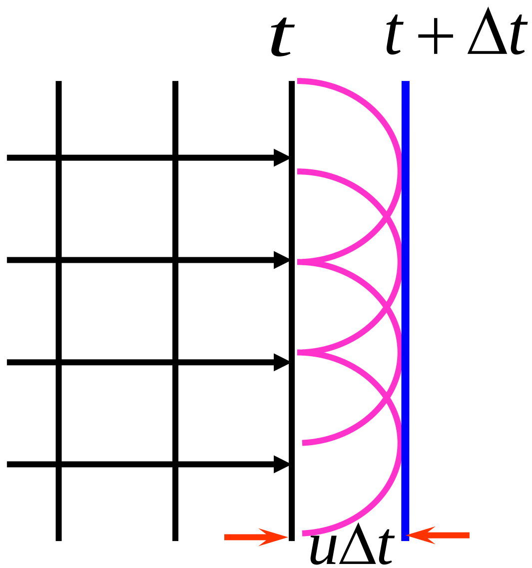
# §10.5惠更斯原理和波的衍射

## 1、惠更斯原理

介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波前。

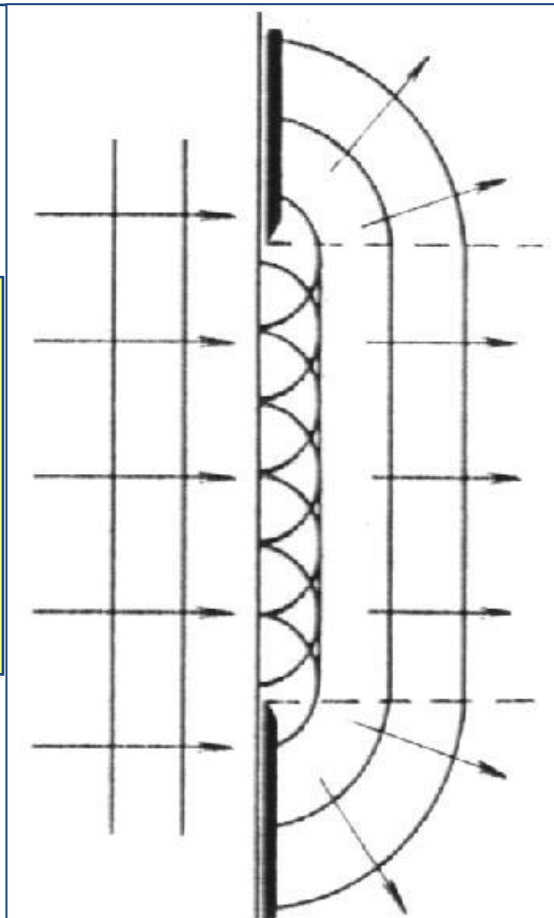
根据惠更斯原理，可用几何作图方法，确定下一时刻的波前。



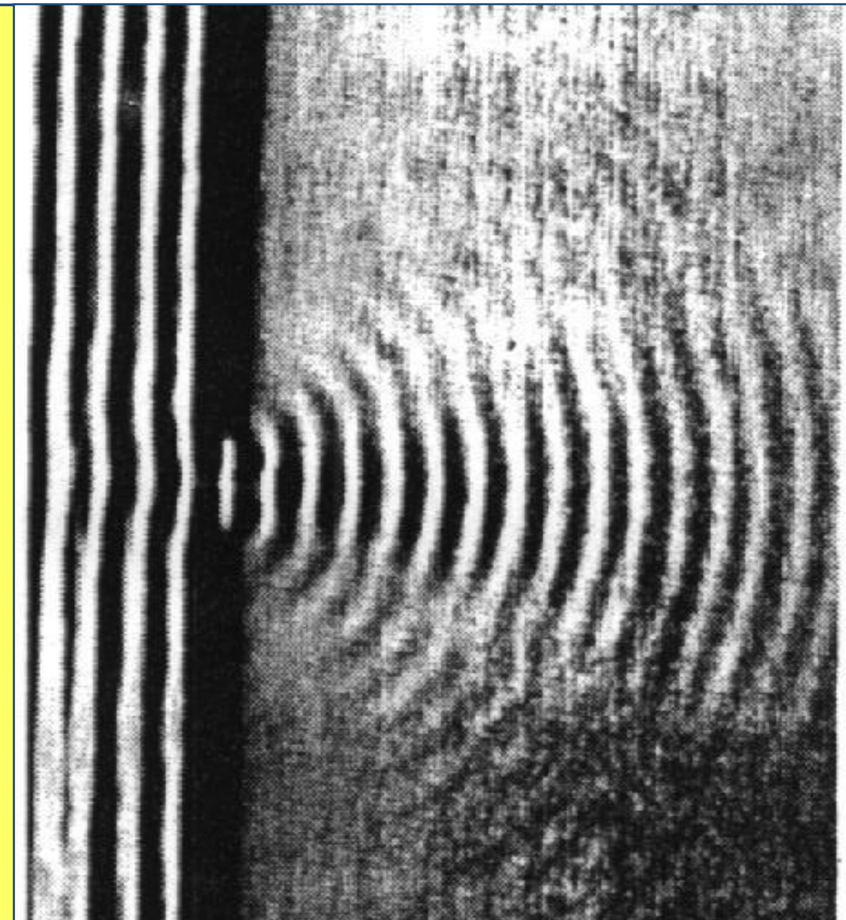



## 2、波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播。



波的衍射



水波通过狭缝后的衍射

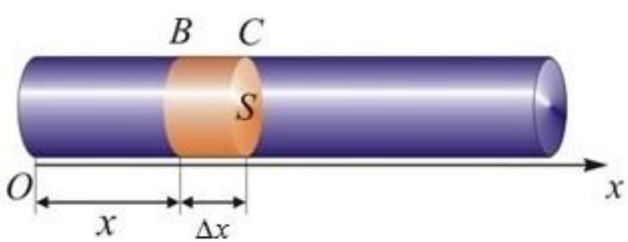
# §10.6波的能量和能流密度

## 1. 波的能量

波动过程 → { 质元由静止开始振动; 质元也发生形变 } → 波动过程是能量的传播过程

当机械波在媒质中传播时，弹性介质中各质点均在其平衡位置附近振动，因而具有振动动能。同时，弹性介质发生弹性形变，因而具有弹性势能。所以振动的传播必然伴随能量的传递。

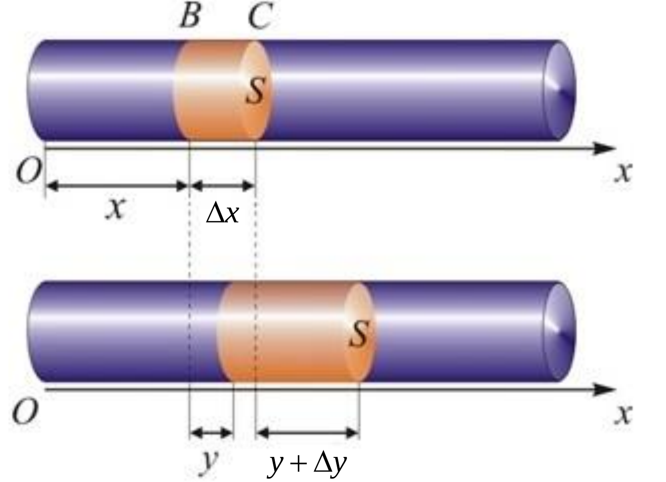
以平面简谐纵波在直棒中的传播为例分析波动能量的传播：




波动表达式： $y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

在棒中取横截面坐标为 **x** 到 **x +Δx** 的一段质元作为研究对象，体积为 $\Delta V = S\Delta x$ ，质量为 $\Delta m = \rho\Delta V = \rho S\Delta x$。在时刻*t*该体积元各量如下：

振动位移：$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$




振动速度：$v = \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$

振动动能：

$$\boxed{\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

利用金属棒的杨氏弹性模量的定义

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow F = SY\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{SY}{\Delta x}\Delta y \equiv k\Delta y, \qquad k = \frac{SY}{\Delta x}$$

所以介质元的弹性势能为：

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\frac{SY}{\Delta x}(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}SY\Delta x\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \frac{1}{2}SY\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

因 $\Delta V = S\Delta x$，$u = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$，

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} Y \Delta V A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

故质元总能量为： $\boxed{\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)}$

**结论：**

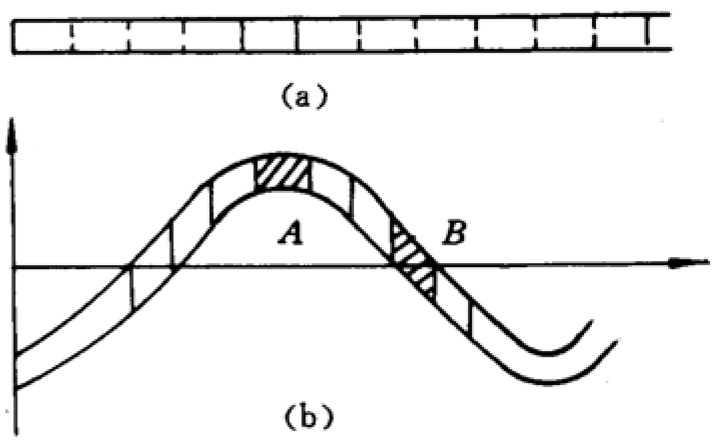
①在波动传播的媒质中，任一介质元的动能、势能、总机械能均随 $x$，$t$ 作周期性变化，随时间变化的周期为波动周期的一半，即为$T/2 = \pi / \omega$。

②任一介质元的机械能不守恒，它的能量从零达到最大，这是能量的输入过程；然后又从最大减到零，这是能量输出的过程。即媒质中并不积累能量，因而波动是一个能量传递的过程。

③波动中介质元的势能和动能大小恒等，两者同相变化。而孤立谐振质点在振动过程中动能、势能此消彼长，相互转化。

➢孤立谐振系统中的势能为振动势能，其大小取决于相对于平衡位置的位移：$E_p = \frac{1}{2}kx^2$

➢而波场中弹性质元的势能为形变势能，其大小取决于弹性媒质元的相对形变：$E_p \propto \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$




介质元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大。

体积元的位移最大时，三者均为零。

## 2. 波的能量密度和能流密度

●能量密度: 单位体积弹性介质中的波动能量

$$\varepsilon=\frac{\Delta E}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi_0)$$

波的能量密度$\varepsilon$随时间作周期性变化, 周期为波动周期的一半。

●平均能量密度：一个周期内的能量密度平均值

单位：$J\cdot m^{-3}$

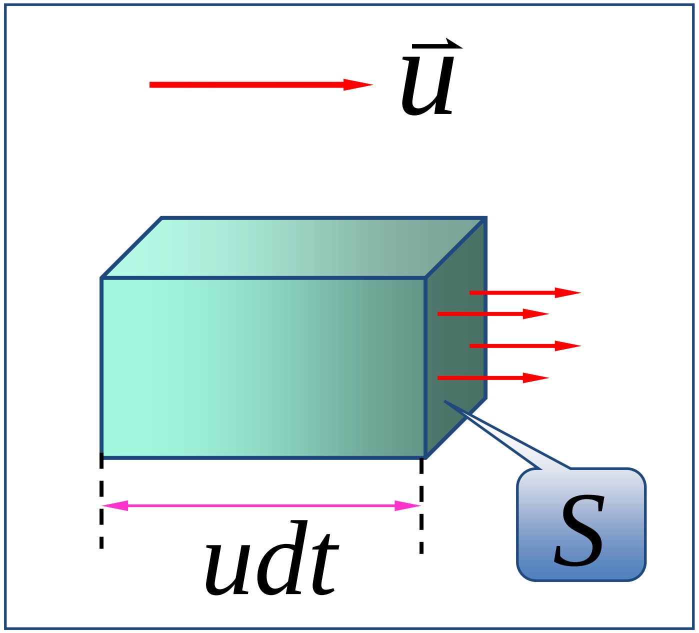
$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{T}\int_0^T\varepsilon dt=\frac{1}{T}\int_0^T\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi_0)dt=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$$

结论：机械波的能量与振幅的平方、频率的平方以及介质的密度成正比。

## ●平均能流密度(又称波强或玻印廷矢量)

单位: $W \cdot m^{-2}$

单位时间内流过垂直于波传播方向的单位面积的波的平均能量:




$$I = \frac{u\Delta t\Delta S}{\Delta t\Delta S}\bar{\varepsilon} = u\bar{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u$$

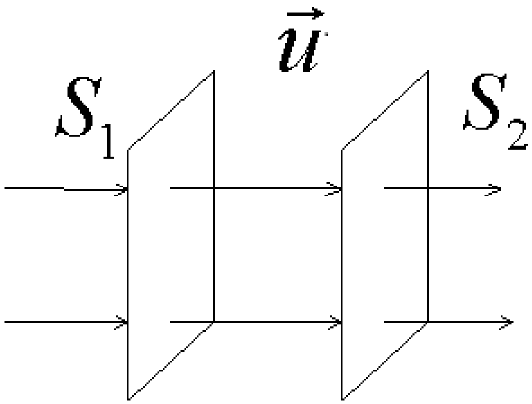
平均能流密度是矢量, 方向沿波的传播方向:

$$\boxed{\vec{I} = \bar{\varepsilon}\vec{u} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \vec{u}}$$

## 3. 平面波和球面波的振幅

①证明在均匀、不吸收能量的媒质中传播的平面波在传播方向上振幅不变。

证明：在垂直于波的传播方向上取两平面 $S_1=S_2=S$, 因为通过 $S_1$ 和 $S_2$ 面的平均能流应该相等



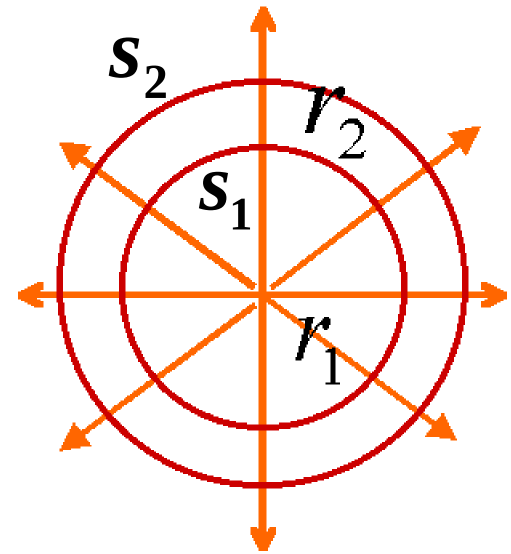

$$\because \quad \bar{I}_1 S_1 = \bar{I}_2 S_2, \quad S_1 = S_2 = S$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 S_1 = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 S_2$$

所以，平面波振幅相等： $\boxed{A_1 = A_2}$

② 证明球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数。

证明:介质无吸收, 则由能量守恒定律, 通过两个球面的平均能流相等。




$$\bar{I}_1 S_1 = \bar{I}_2 S_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S_1 = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S_2$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2，\ S_2 = 4\pi r_2^2 \Rightarrow A_1 r_1 = A_2 r_2$$

因此，振幅与离波源的距离成反比。如果距波源单位距离的振幅为**A**，则距波源***r***处的振幅为

$$A(r) = \frac{A}{r}$$

球面波的强度与半径的平方成反比。

由于球面波振动的相位随距离的增加而落后的关系，与平面波类似，球面简谐波的波函数：

$$y = \frac{A}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u})]$$

## 4.声强与声强级

● 声波——在弹性介质中传播的机械纵波，一般统称为声波.

可闻声波： $16\text{Hz} < \nu < 2\times10^4\ \text{Hz}$

次声波： $1\times10^{-4}\ \text{Hz} < \nu < 16\text{Hz}$

超声波： $2\times10^4\ \text{Hz} < \nu < 5\times10^8\ \text{Hz}$

● 声强——声波平均能流密度的大小 $I = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u \propto \omega^2$

➢ 人的听觉与频率和声强有关

最低声强（闻阈）$I_0 = 10^{-12}\text{W/m}^2$ (约1000Hz)

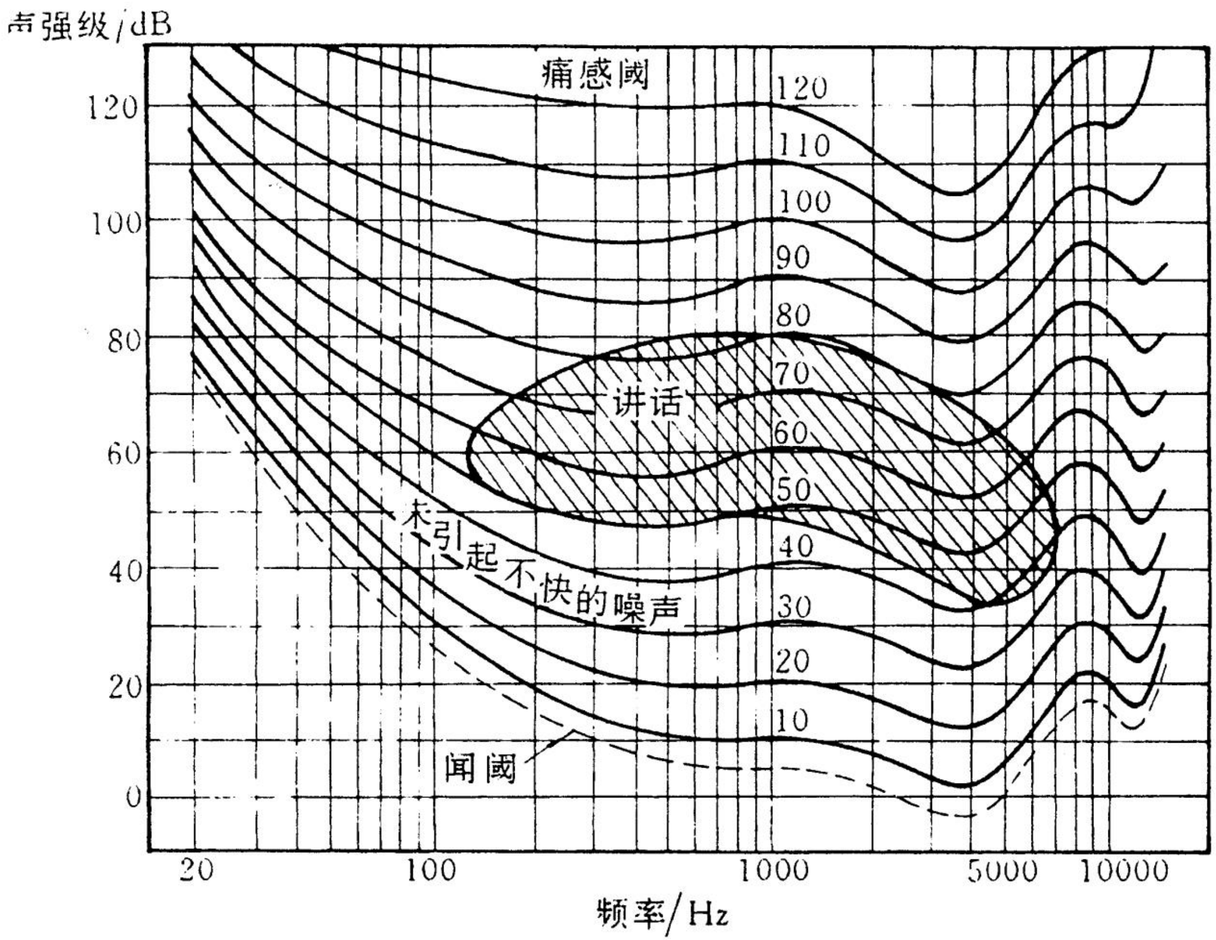
最高声强（痛阈）$I \approx 10\text{W/m}^2$ (约1000Hz)

● 声强级—— 人耳所感受到的声音的响度

声强级定义: 单位：贝尔(*B*) , 分贝(*dB*) ， *1B=10dB*

$$L = \lg\frac{I}{I_0}\ (B) \qquad L = 10\lg\frac{I}{I_0}\ (dB)$$

➢不同频率的声音需要不同的强度听起来才具有同样的音量感觉。图中每条曲线代表的声音听起来有相同的音量。



# 120dB

超声波: $4\times10^{4} \rightarrow 3\times10^{5}\,Hz$

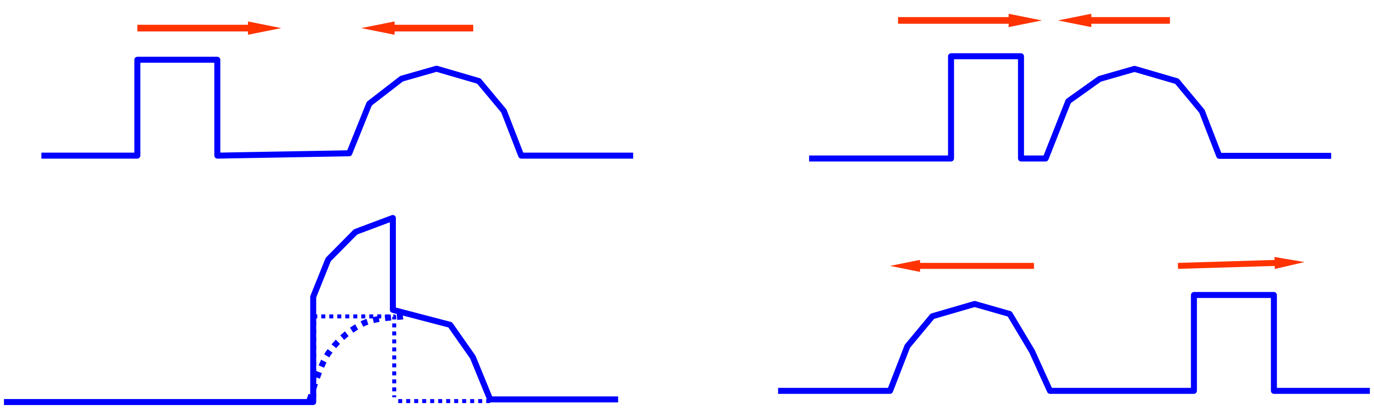
# § 10. 7 波的叠加和干涉

## 1. 波的叠加原理

几列波在同一介质中传播：

①波传播的独立性：无论是否相遇，各列波仍保持原有的特性（频率，波长和振动方向等）不变，按照原来的方向继续前进，就象没有遇到其他的波一样。

②矢量性：在其相遇区域内，任一点的振动为各个波单独存在时在该点引起的振动的矢量和。



●波的叠加原理的基础是波的方程为线性微分方程。

若 $y_1(x,t), y_2(x,t)$ 分别满足波动方程

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

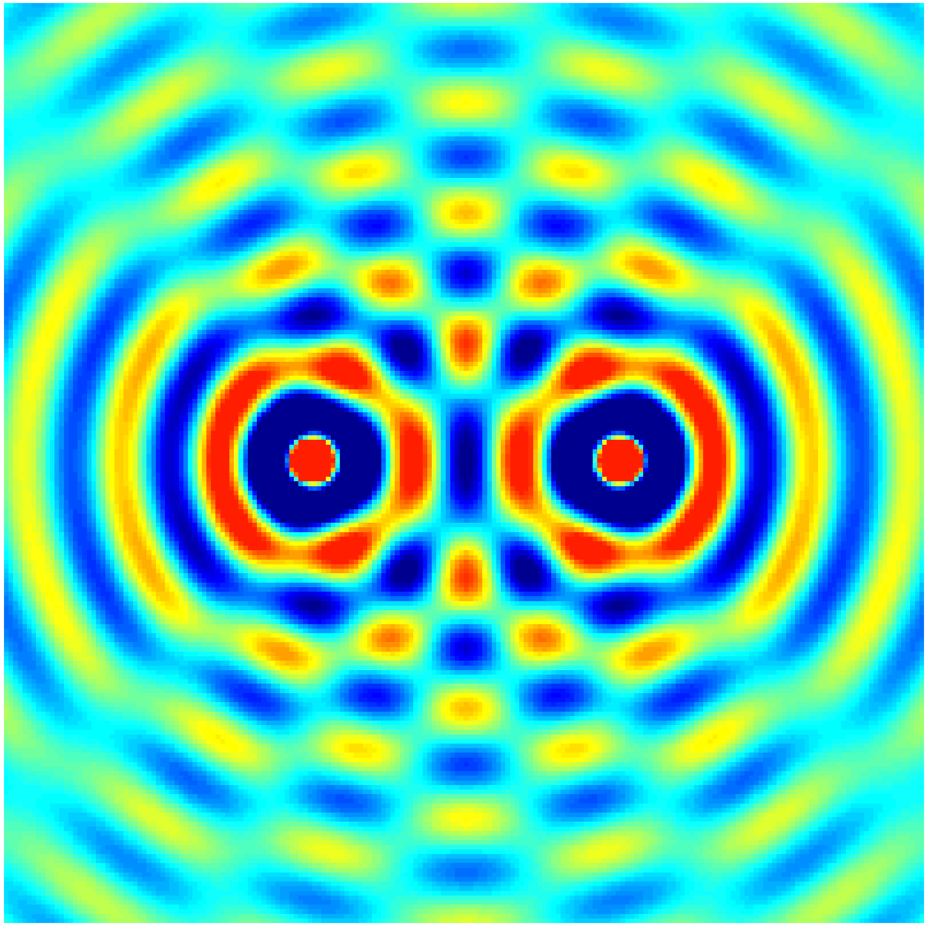
则 $y_1 + y_2$ 显然也满足波动方程

$$\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2}$$

即波动方程遵从叠加原理。

注：波的叠加原理仅在弱波条件时成立，强冲击波(如爆炸)则不适用。

## 2. 波的干涉



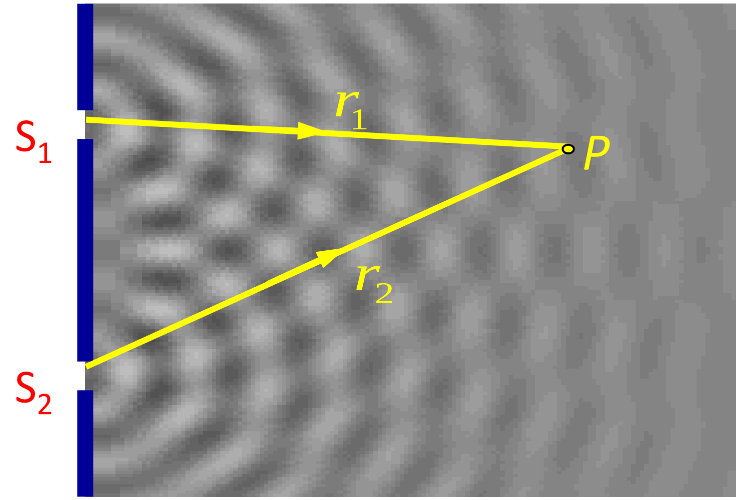
两列叠加的波在交迭区域某些点处振幅始终最大，另一些位置振幅始终最小，而其它位置，振动的强弱介乎二者之间，保持不变。这种稳定的叠加图样为干涉现象。

●**相干条件**——得到干涉所要求的条件

①两波源具有相同的频率;

②振动方向相同;

③具有恒定的相位差。




满足相干条件的波叫相干波,

波源叫相干波源,

叠加叫相干叠加。

设有两个频率相同的波源$S_1$和$S_2$，其振动表达式为

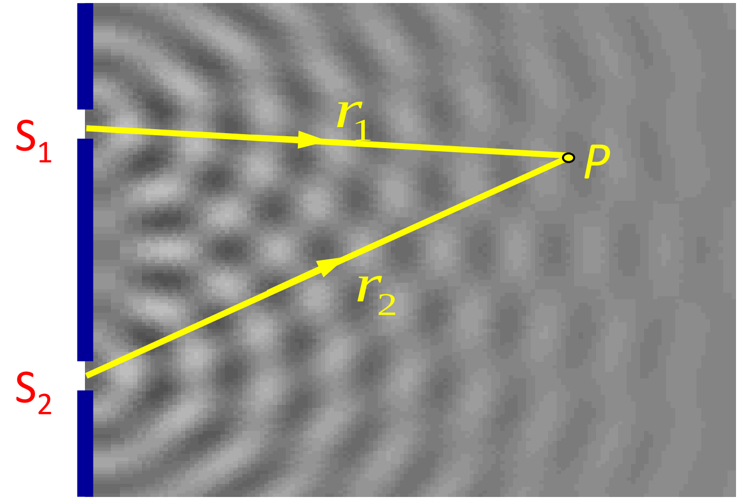
$$\begin{cases} y_{10} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_{20} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

传播到 $P$ 点引起的振动为：

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \cos(\omega t - k r_1 + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \cos(\omega t - k r_2 + \varphi_2) \end{cases}$$

所以在$P$点的合振动为

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$




其中：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi,$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + k(r_2 - r_1)$$

①干涉加强(干涉相长)

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + k(r_2 - r_1) = 2n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

$$\Rightarrow A = A_{\max} = A_1 + A_2$$

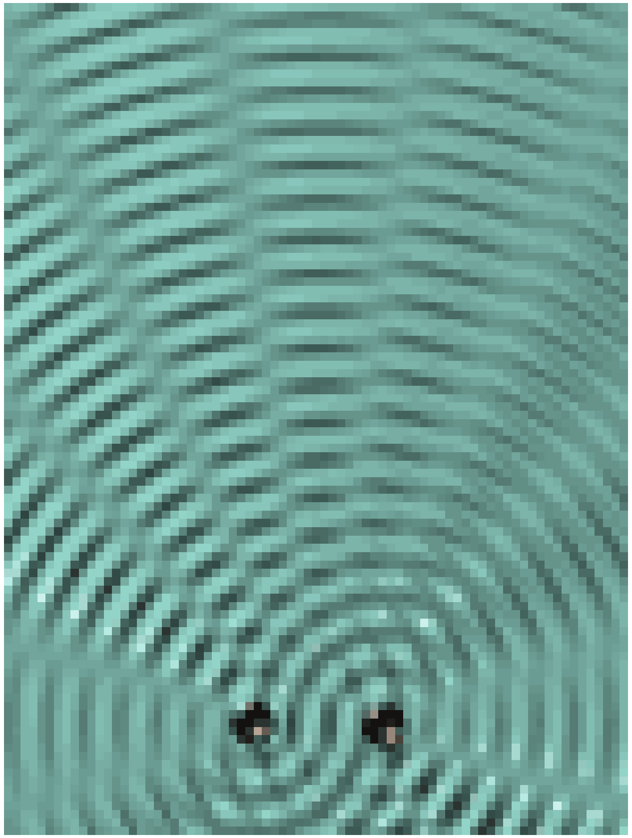
②干涉减弱（干涉相消）

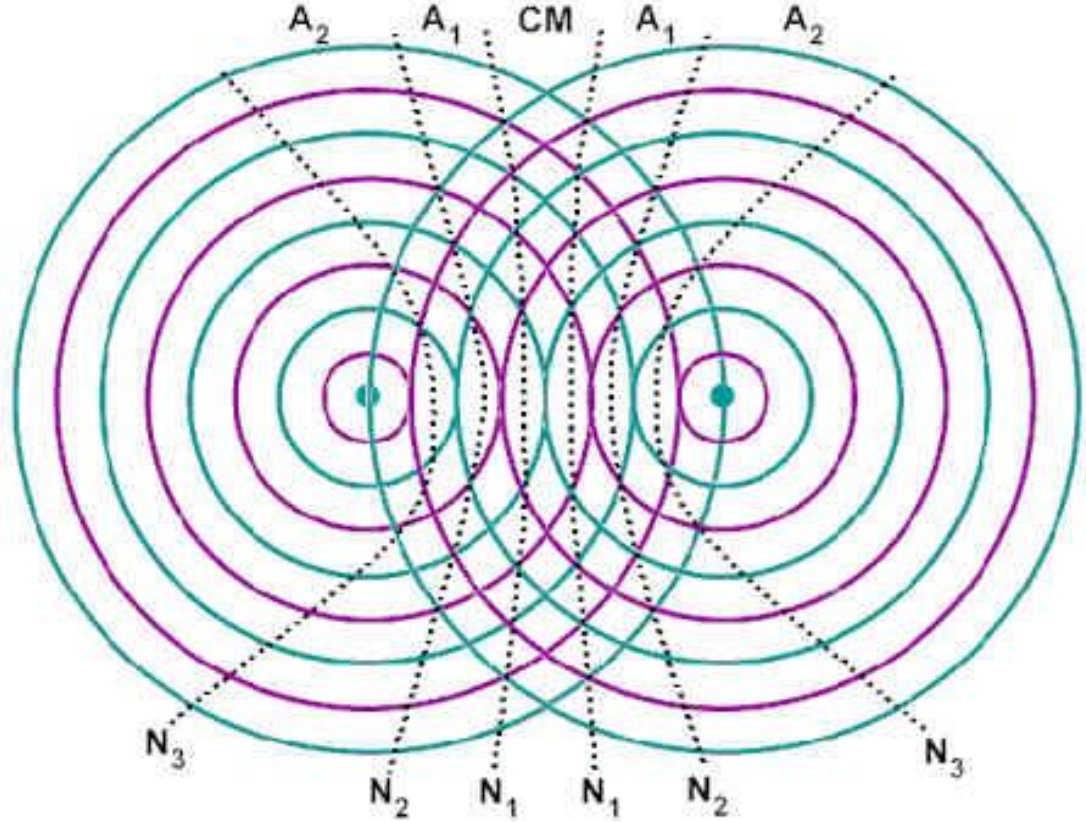
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + k(r_2 - r_1) = (2n+1)\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

$$\Rightarrow A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$$

③其他情况合振幅在最大值与最小值之间

对空间不同的位置，都有恒定的$\Delta\varphi$，因而合强度在空间形成稳定的分布。





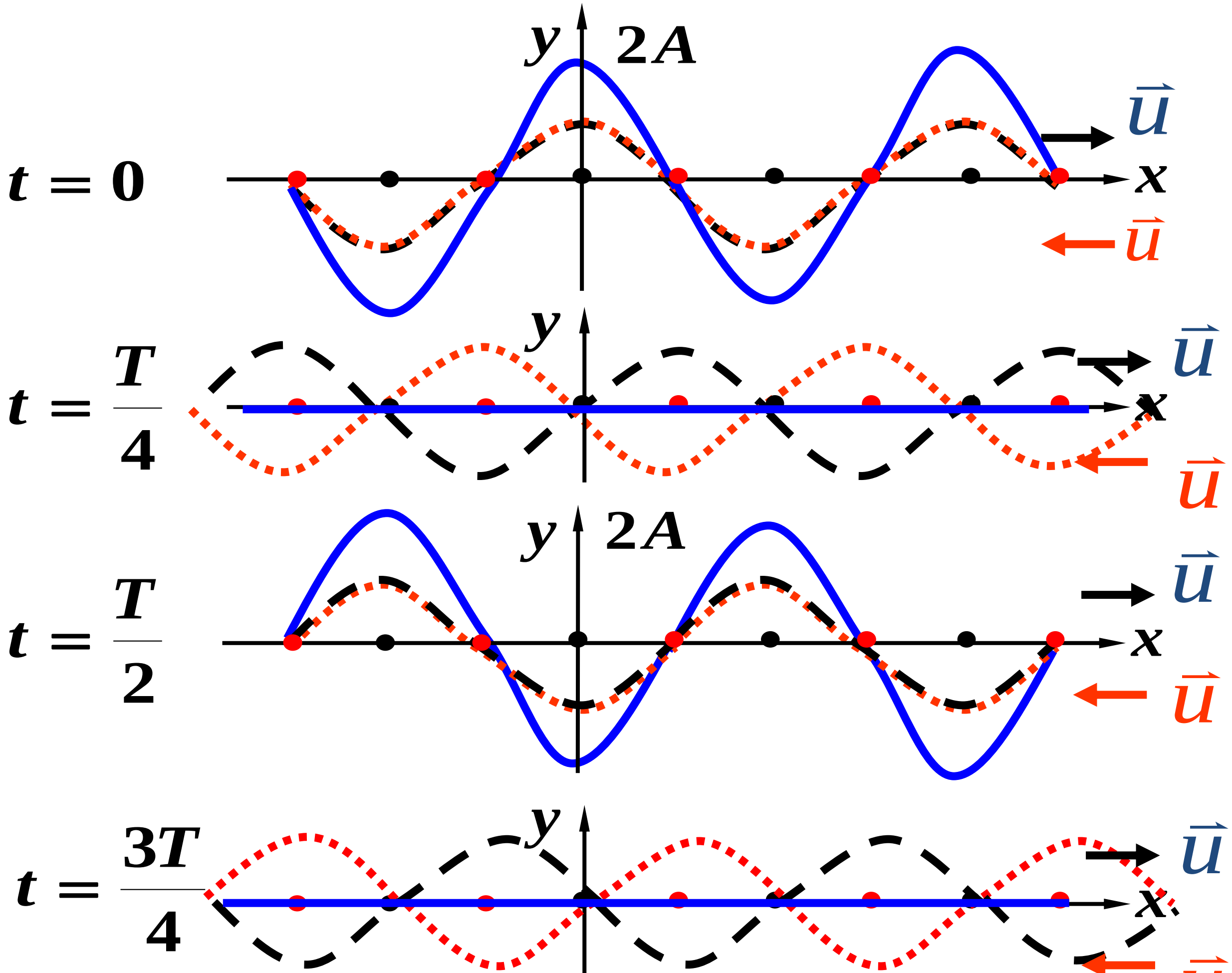

相长和相消干涉都形成双曲线

$$r_2 - r_1 = \text{常量}$$

# § 10.6 驻波

驻波 ——两列振幅相同的相干波在同一条直线上沿相反方向传播时叠加而形成的特殊的干涉现象。

## 1.驻波的形成



## 2. 驻波方程

设弹性弦上传播着具有相同的振幅、相反传播方向的两波，它们的运动方程为

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$ 右行波

$$y_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$ 左行波

合成后，弦上的运动成为

$$y = y_1 + y_2 = \boxed{2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)} \underline{\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)}$$

驻波的振幅,与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

在合成波的表式中，时间和空间分别出现在两个因子之中，因此，合成波实际上是一种振动，不再是振动的传播，故称为**驻波**。

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

## 3. 驻波的特征

驻波实质上是一种特殊的振动！

### (1)波节和波腹

驻波是各点振幅不同的简谐振动的集体

$$A_{驻} = \left|2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right|$$

● 当 $kx_n + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n\pi \Rightarrow x_n = \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2k} = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

振幅达到最大值$2A$ ，这种位置称为波腹。两相邻波腹间的距离

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

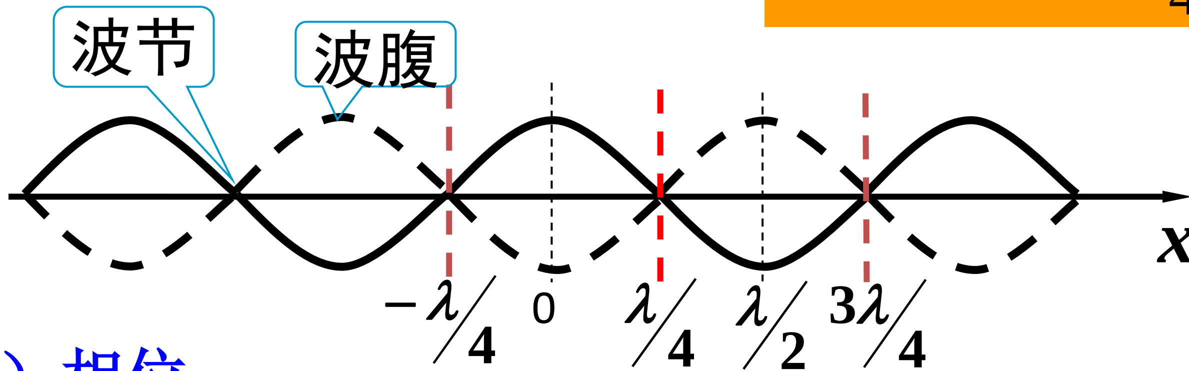
● 当 $kx'_n + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x'_n = \frac{(2n+1)\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

振幅为零，波节处的质元静止不动，这种位置称为波节。两相邻波节间的距离

$$x'_{n+1} - x'_n = [2(n+1)+1]\frac{\lambda}{4} - (2n+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

相邻波腹和波节之间的距离：

$$x'_n - x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$$




（2）相位

$$y = 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

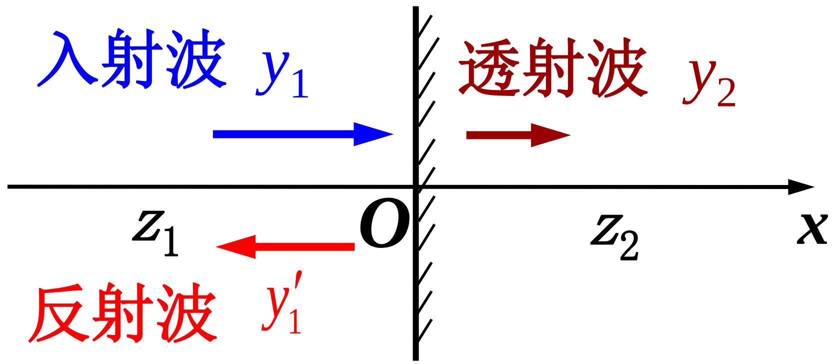
$\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) > 0$ 相位为：$\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$

$\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) < 0$ 相位为：$\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \pi$

$$\because \quad kx'_n + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad kx'_{n+1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n\pi + \frac{3\pi}{2}$$

所以波节之间相位相同，波节两边相位相反。在波节处产生π的相位跃变。

# 4、波的反射、透射和半波损失




$z=\rho u$—— 特性阻抗

特性阻抗只与介质自身的性质有关。

均匀介质中传播的波在遇到两种介质的分界面处，反射波与入射波在界面处的相位差，取决于波的种类和两种介质的性质及入射角的大小。在入射波波线近似垂直于界面时，选取界面处为坐标原点，适当选择时间零点：

入射波： $$y_1 = A_1\cos(\omega t - k_1 x)$$

反射波： $$y_1' = A_1\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\cos(\omega t + k_1 x)$$

透射波： $$y_2 = A_1\frac{2z_1}{z_1 + z_2}\cos(\omega t - k_2 x)$$

$$R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \mapsto \text{反射系数}$$

$$T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \mapsto \text{透射系数}$$

●固定端： $z_2 \to \infty$

入射波： $y_1 = A_1\cos(\omega t - k_1 x)$

反射波： $y_1' = -A_1\cos(\omega t + k_1 x) = A_1\cos(\omega t + k_1 x + \pi)$

透射波： $y_2 \approx 0$

在界面处，反射波相对于入射波发生了π 的相位突变, 相当于出现了半个波长的波程差，称为半波损失。在介质1中，入射波和反射波频率相同，振幅相同，传播方向相反，形成驻波。

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 + y_1' \\
&= A_1\cos(\omega t - k_1 x) + A_1\cos(\omega t + k_1 x + \pi) \\
&= 2A_1\cos(k_1 x + \pi/2)\cos(\omega t + \pi/2) \\
&= 2A_1\sin(k_1 x)\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

在界面$x=0$处，驻波的振幅为零，因此此时界面处为波节。

注意：只要波从波疏媒质到波密媒质（$z_1<z_2$ , $R<0$ ），就会有半波损失!

●柔软端（自由端）：$z_2 \to 0$

入射波：$y_1 = A_1\cos(\omega t - k_1 x)$

反射波：$y_1' = A_1\cos(\omega t + k_1 x)$

透射波：$y_2 \approx 2A_1\cos(\omega t - k_2 x)$

一般地，波从波密媒质到波疏媒质（$z_1 > z_2$，$R > 0$），均无半波损失，发生全波反射。

在界面处，反射波与入射波的振动相位相同，无半波损失，称为全波反射。在介质1中，入射波和反射波频率相同，振幅相同，传播方向相反，形成驻波。

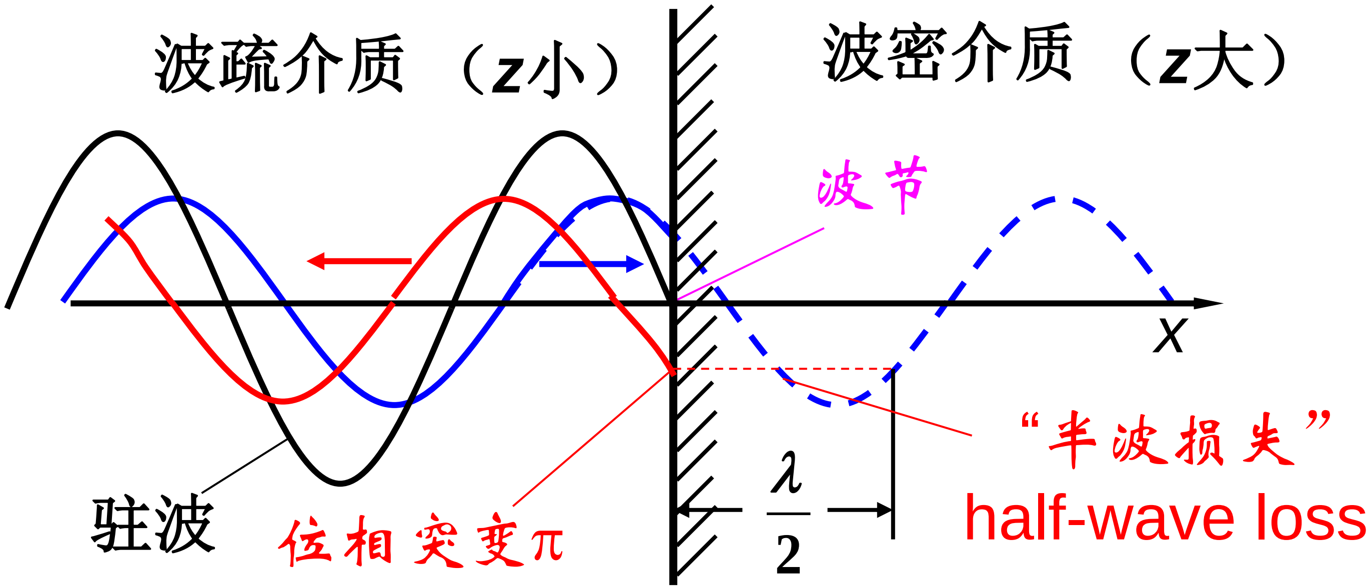
$$y = y_1 + y_1'$$
$$= A_1\cos(\omega t - k_1 x) + A_1\cos(\omega t + k_1 x)$$
$$= 2A_1\cos(k_1 x)\cos(\omega t)$$

在界面$x=0$处，驻波的振幅$2A_1$，因此此时界面处为波腹。

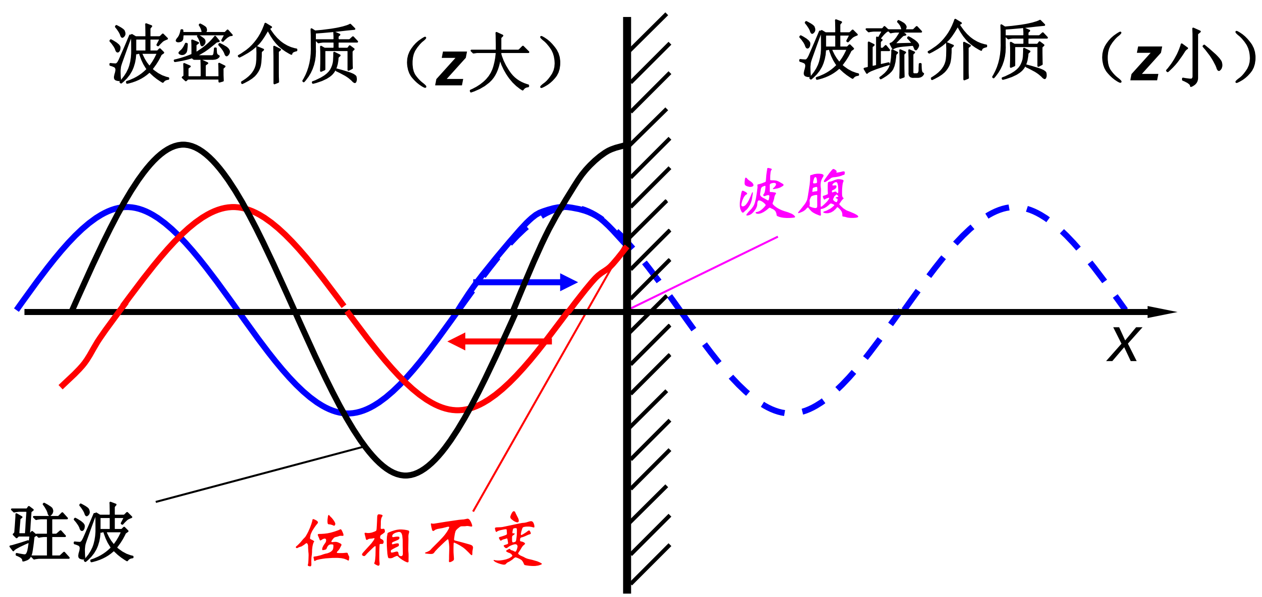
●既非固定端又非柔软端：$z_2 \not\to \infty$，$z_2 \not\to 0$

此时入射波和反射波频率相同，传播方向相反，但是振幅不相同，介质1中看到的是驻波+行波。

# 入射波和反射波的波形

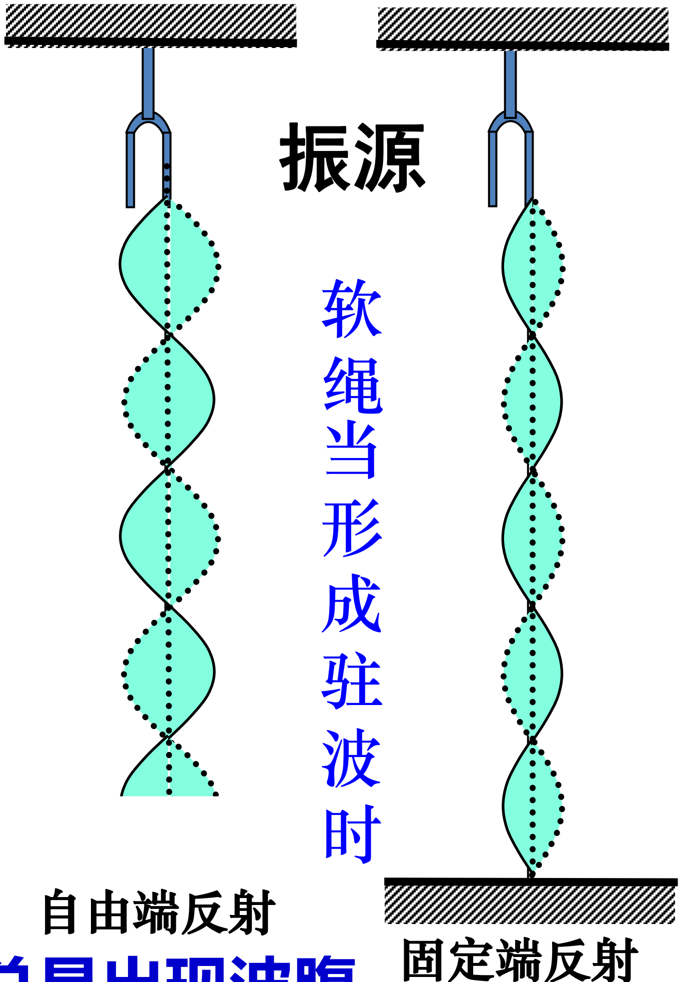


波疏介质（z小）
波密介质（z大）
波节
x
“半波损失”
half-wave loss
$\frac{\lambda}{2}$
驻波
位相突变π

波密介质（z大）
波疏介质（z小）
波腹
x
驻波
位相不变

● 入射波与反射波产生驻波

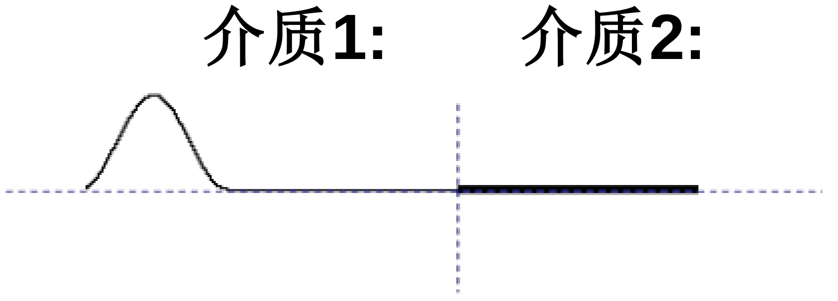



**总是出现波腹**

**总是出现波节**

## □ 利用复数法推导反射和透射系数（选读）

波从一种介质1传播到两种介质（1，2）的界面时，在界面处的扰动将产生两种同频率的波：在介质1中产生反射波， 在介质2中产生透射波。




入射波: $y_i = A_i \cos(\omega t - k_1 x + \varphi_i)$

为了处理方便，改取复数形式：$y_i = \tilde{A}_i e^{i(\omega t - k_1 x)}$， $\tilde{A}_i = A_i e^{i\varphi_i}$

反射波： $\tilde{R}\tilde{A}_i e^{i(\omega t + k_1 x)}$ 透射波： $\tilde{T}\tilde{A}_i e^{i(\omega t - k_2 x)}$

**边界条件**：在介质1，2的界面 $x = 0$处，振动量相同，作用力相同

**边界条件1：在介质1，2的界面 $x = 0$处，振动量相同**

$$\left[\tilde{A}_i e^{i(\omega t - k_1 x)} + \tilde{R}\tilde{A}_i e^{i(\omega t + k_1 x)}\right]\Big|_{x=0} = \left[\tilde{T}\tilde{A}_i e^{i(\omega t - k_2 x)}\right]\Big|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \tilde{R} = \tilde{T}$$

**边界条件2：在介质1，2的界面 $x = 0$处，作用力相同(以纵波为例)**

$$Y_1 S \frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{A}_i e^{i(\omega t - k_1 x)} + \tilde{R}\tilde{A}_i e^{i(\omega t + k_1 x)}\right]\Bigg|_{x=0} = Y_2 S \frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{T}\tilde{A}_i e^{i(\omega t - k_2 x)}\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$\Rightarrow \quad Y_1 k_1 \left(1 - \tilde{R}\right) = Y_2 k_2 \tilde{T}$$

于是可解得：

$$\tilde{R}=\frac{Y_1k_1-Y_2k_2}{Y_1k_1+Y_2k_2} \qquad \tilde{T}=\frac{2Y_1k_1}{Y_1k_1+Y_2k_2}$$

代入关系式：$Y=\rho u^2$，$k=\omega/u$，$Yk=\rho\omega u$

设介质1中的波速$\boldsymbol{u_1}$、密度 $\boldsymbol{\rho_1}$，特性阻抗 $z_1=\rho_1 u_1$

介质2中的波速$\boldsymbol{u_2}$、密度 $\boldsymbol{\rho_2}$，特性阻抗 $z_2=\rho_2 u_2$

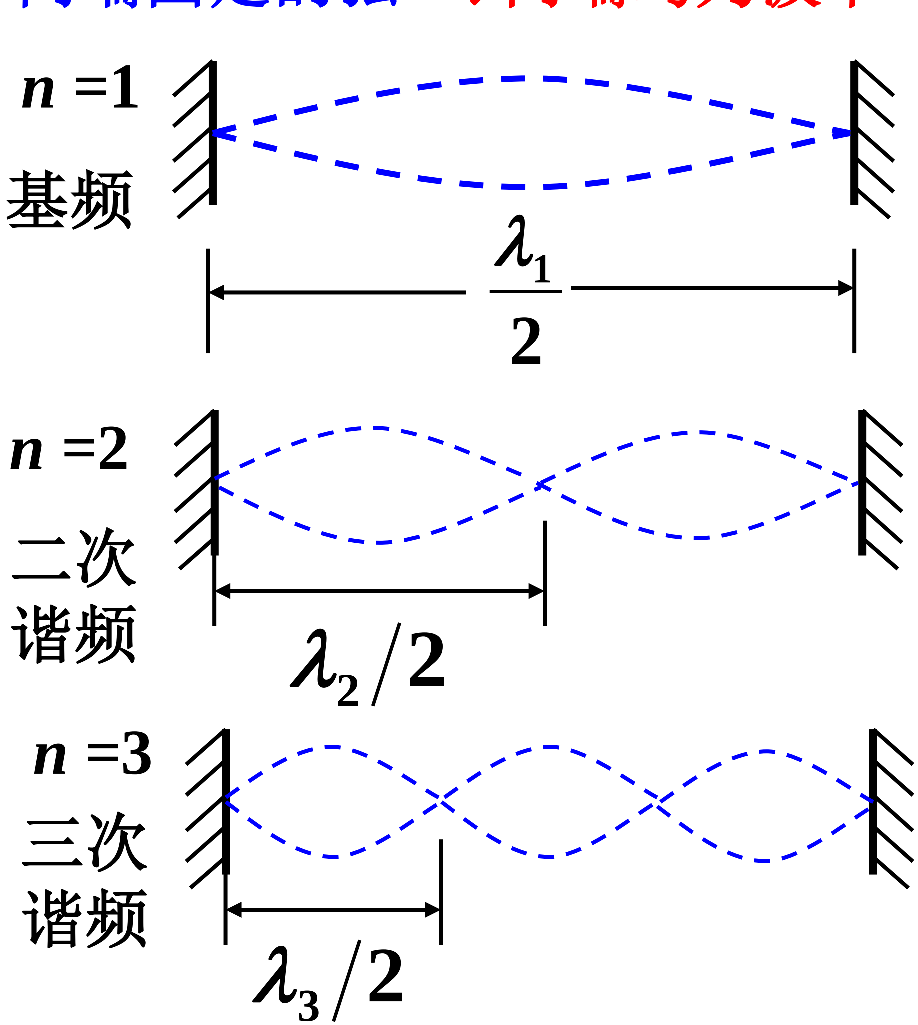
反射系数 $\tilde{R}=\dfrac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$ 同一种介质中无波的反射

透射系数 $\tilde{T}=\dfrac{2z_1}{z_1+z_2}$

## 5. 简正模式

波在一定边界内传播时就可能形成各种驻波，形成驻波必须满足一定条件：

●两端固定的弦 →两端均为波节




$$n\frac{\lambda_n}{2}=L,\quad n=1,2,3\cdots$$

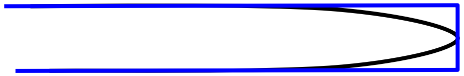
$$\therefore \lambda_n=\frac{2L}{n}\Rightarrow \nu_n=\frac{u}{\lambda_n}=n\frac{u}{2L}$$

➢即弦线上形成的驻波波长、频率均不连续。这些频率称为弦振动的本征频率。对应的振动方式称为简正模式。

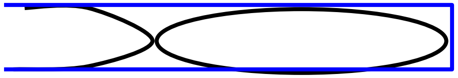
➢最低的频率称为基频，其它整倍数频率为谐频。

● 一端封闭，另一端敞开

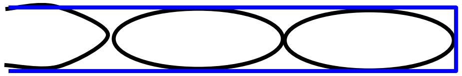
此时开端形成波腹，闭端形成波节。



$$\frac{\lambda_1}{4} = L \Rightarrow \lambda_1 = 4L \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{4L}u$$



$$\frac{3\lambda_1}{4} = L \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{3} \Rightarrow \nu_2 = \frac{3}{4L}u$$



$$\frac{5\lambda_1}{4} = L \Rightarrow \lambda_3 = \frac{4L}{5} \Rightarrow \nu_3 = \frac{5}{4L}u$$

综上可知：

$$\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda_n = L, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

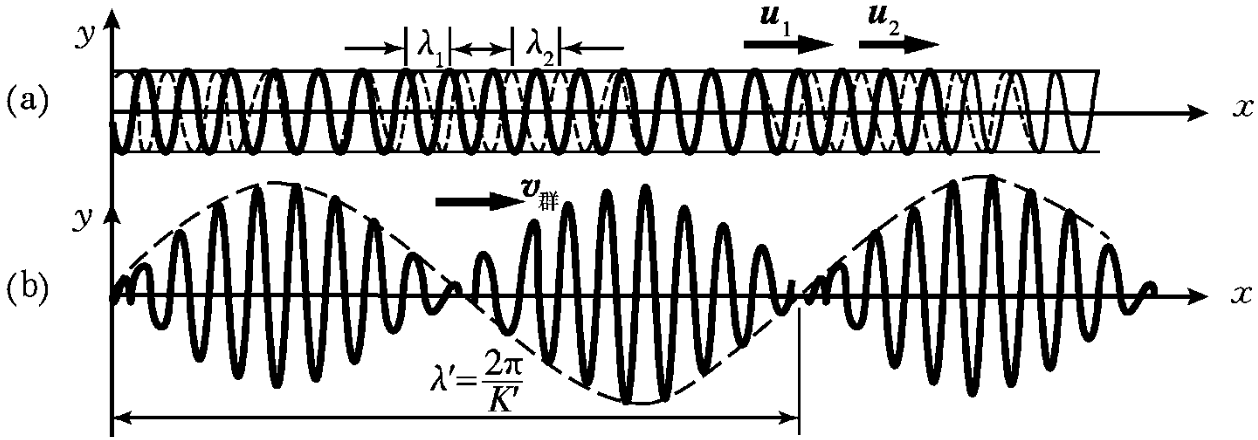
$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}} \Rightarrow \boxed{\nu_n = \frac{2n-1}{4L}u}$$

## 6. 非相干波的叠加、波的群速度

●色散: 凡是波速与频率有关的现象均称为色散

不同频率的波在同一介质中传播时具有不同（相同）的速度，这种介质叫做色散介质（无色散介质）。

●波包: 在色散介质中，不同频率的简谐波叠加，复合波中波列的振幅随质元位置时大时小变化，呈现为一团一团地振动，称之为波群或者波包。




考虑两列频率相近、振幅相等的同向传播的简谐波叠加

$$\begin{cases} y_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1), \\ y_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) \end{cases}$$

$$|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2, \quad |k_1 - k_2| << k_1, k_2$$

根据波的叠加原理可得这两列波的合成波为：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \bullet \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

合成波是沿方向传播的调制波，不再是简谐波。在不长的时间和不大的空间范围内，可以认为合成波的振幅几乎不变，一定的振动状态的传播速度也就是合成波的一定的相位传播的速度，即相速度

$$u_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \frac{2}{k_1 + k_2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \approx \frac{\omega_1}{k_1} \approx \frac{\omega_2}{k_2}$$

合成波的振幅由

$$2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

决定，称为“包络线”。考察振幅取固定值（如最大振幅）的点，即：

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = C$$

随着时间的增加，该一定的振幅将沿着x方向移动，对该式微分得：

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}dt-\frac{k_1-k_2}{2}dx=0$$

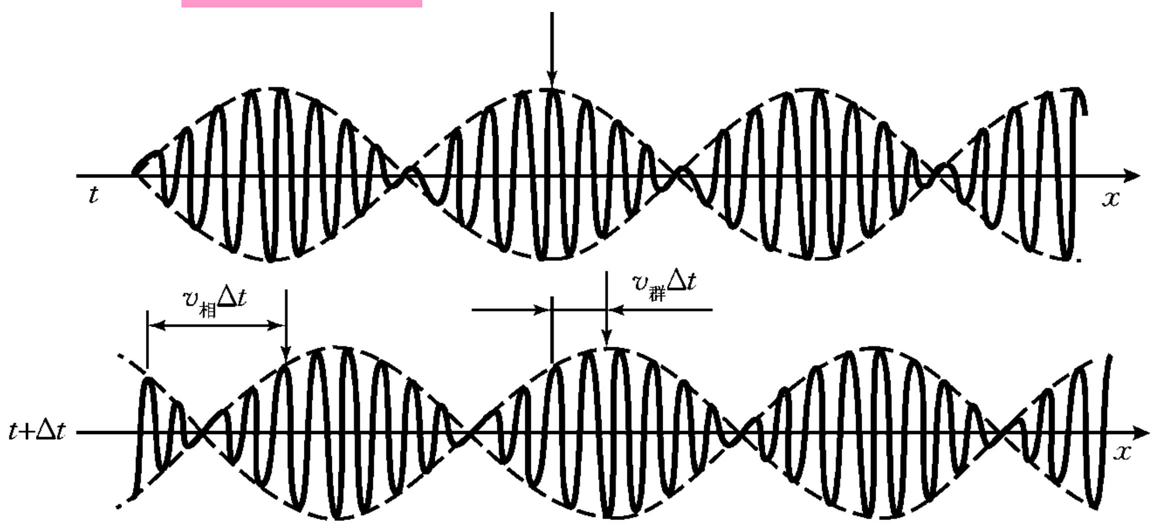
于是一定值的振幅在空间移动的速度为

$$u_g=\frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$$

合成波的任一给定的振幅传播的速度称为**群速度**。

当两列波的频率差无限小时，波数差也无限小，在此极限情况下有

$$u_g=\frac{d\omega}{dk}$$



利用 $\omega = ku_p, \quad k = 2\pi / \lambda$ 可得：

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = u_p + k\frac{du_p}{dk} = u_p - \lambda\frac{du_p}{d\lambda}$$ $\longrightarrow$ 瑞利群速公式

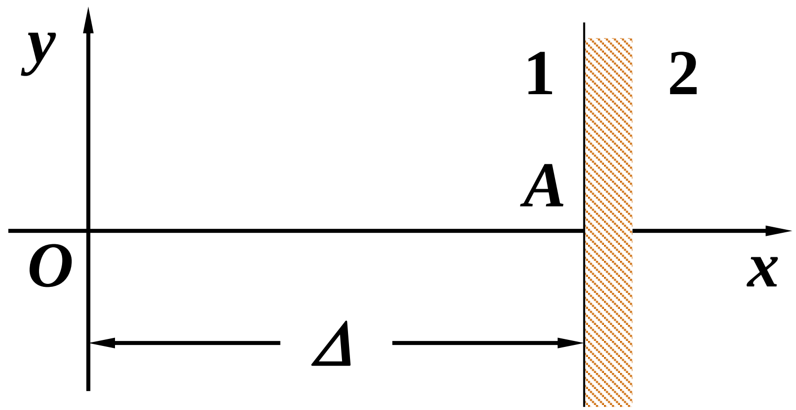
$$\begin{cases} \dfrac{du_p}{d\lambda} = 0, & u_g = u_p \mapsto \text{无色散} \\ \dfrac{du_p}{d\lambda} > 0, & u_g < u_p \mapsto \text{正常色散} \\ \dfrac{du_p}{d\lambda} < 0, & u_g > u_p \mapsto \text{反常色散} \end{cases}$$

群速度 $\neq$ 相速度

**例题3：** 如图,沿 $x$ 轴正方向传播的平面简谐波方程为

$$y = 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{x}{200})] \quad \text{(SI)}$$

隔开两种介质的反射界面$A$ 与坐标原点$O$相距Δ=2.25 m。设反射端两侧波阻相差悬殊且可视为固定端，求反射波方程和左边介质中的驻波方程。



**解:** 因两侧波阻相差悬殊,可认为反射波入射波振幅相同。不妨设反射波的方程为

$$y' = 10^{-3}\cos[200\pi(t + x/200) + \varphi]$$

所以反射波在$A$点引起的振动为:

$$y'_A = 10^{-3}\cos[200\pi(t + \Delta/200) + \varphi]$$

由题意可知入射波在 $A$ 点引起的振动为

$$y_A = y\big|_{x=\Delta} = 10^{-3}\cos[200\pi(t - \frac{\Delta}{200})]$$

由于界面是固定端，发生半波损失，所以反射波在$A$点的相位比入射波在该点的相位落后$\pi$，故可得

$$\varphi = -2\pi\Delta - \pi = -2\pi \times 2.25 - \pi = -5.5\pi$$

所以反射波的方程为

$$y' = 10^{-3}\cos[200\pi(t + x/200) - 5.5\pi]$$

$$= 10^{-3}\cos[200\pi(t + x/200) + \frac{\pi}{2}]$$

入射波和反射波在左边介质中叠加形成驻波：

$$y+y'=10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{x}{200})]+10^{-3}\cos[200\pi(t+x/200)+\frac{\pi}{2}]$$

$$=2\times10^{-3}\cos[\pi x+\frac{\pi}{4}]\cos[200\pi t+\frac{\pi}{4}]$$

在界面处***x=Δ=2.25***，容易得到

$$y+y'\big|_{x=\Delta}=0$$

即界面处为波节。

**例题4：** 对于深水的水面波

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3 \qquad u_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{T}{\rho}k}$$

跟 ***k*** 有关，因而深水的水面波是色散波。群速度为

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + \frac{3T}{\rho}k^2}{2\sqrt{gk + \frac{T}{\rho}k^3}}$$

# § 10.7　多普勒效应

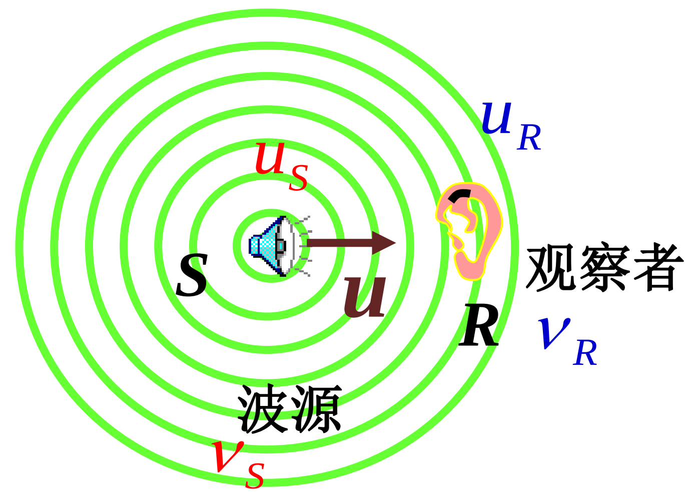
**多普勒效应：**当波源或观察者（或二者）相对传播介质运动时，会导致观察者接受到的波频率不同于波源的频率，这种现象称为多普勒（C. J. Doppier，1803-1853）效应

设波源的频率为$\nu_s$，波长为$\lambda$，在介质中的传播速度为$u$。若波源和观察者相对于介质静止时，测得的频率则为

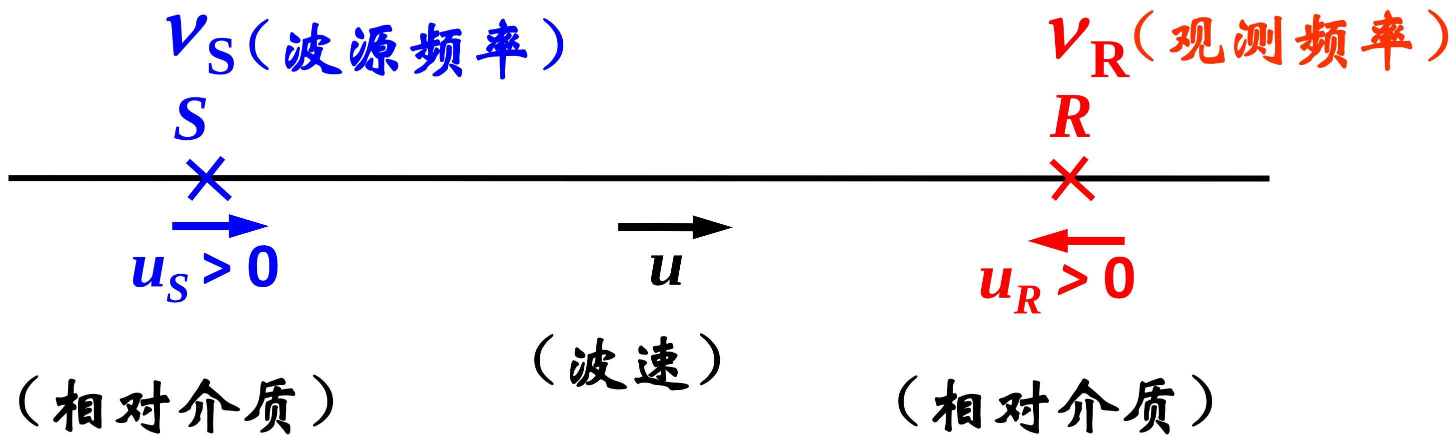
$$\nu_s = \frac{u}{\lambda} = \frac{1}{T}$$

若波源或者观察者相对介质运动时，观察者观测到的波速$u'$与观测到的波长$\lambda'$之比称为观测频率$\nu_R$：

$$\nu_R = \frac{u'}{\lambda'}$$



为简单起见，假定波源和观测者的运动都发生在它们之间的联线上。各速度及其符号约定如下：

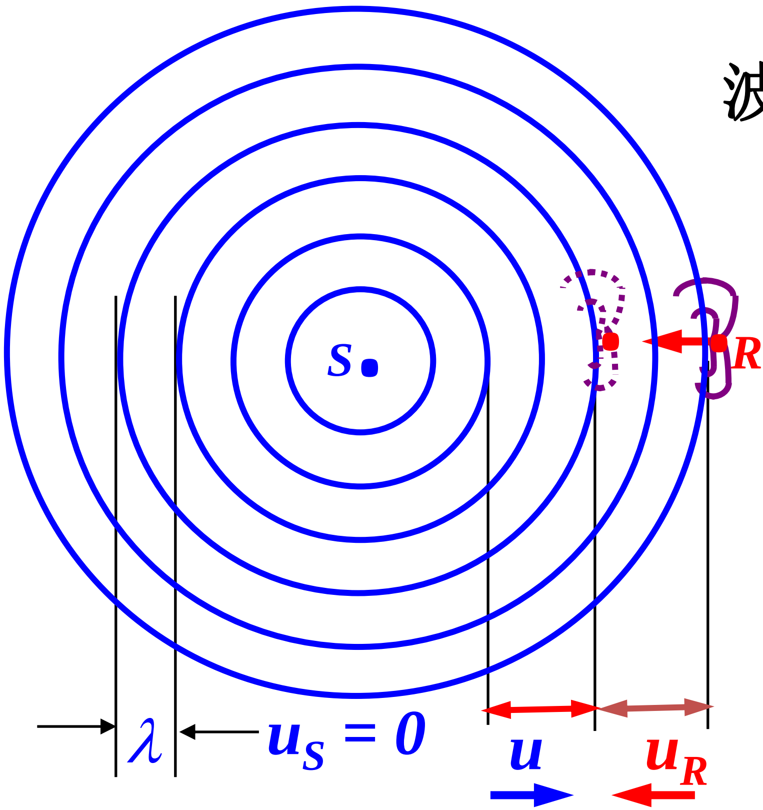



$u_R$——观察者相对介质的速度，趋近波源为正；

$u_S$——波源相对于介质的速度，趋近观察者为正；

$u$——介质中的波速，$\nu_S$——波源发射频率，$\nu_R$——测量频率。

①波源静止而观察者运动：$u_S=0$，$u_R\neq 0$

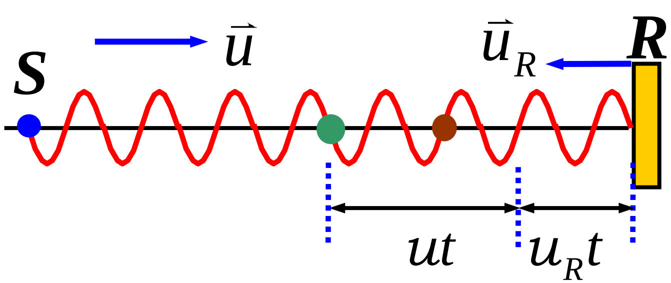



波相对观察者的传播速度：$u' = u + u_R$

波长未变，观察者测得的频率为

$$\nu_R = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u+u_R}{\lambda} = \nu_S \frac{u+u_R}{u}$$

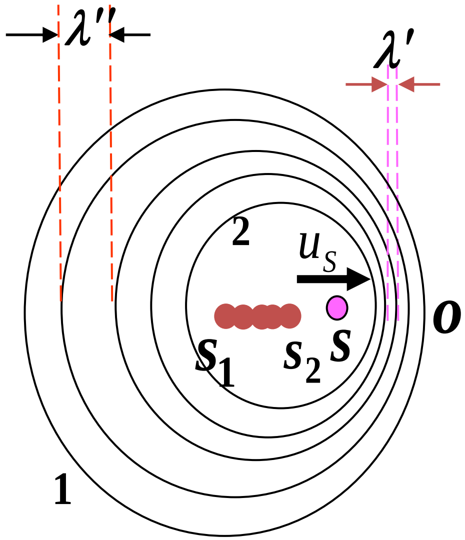
$$\boxed{\nu_R = \frac{u+u_R}{u}\nu_S}$$

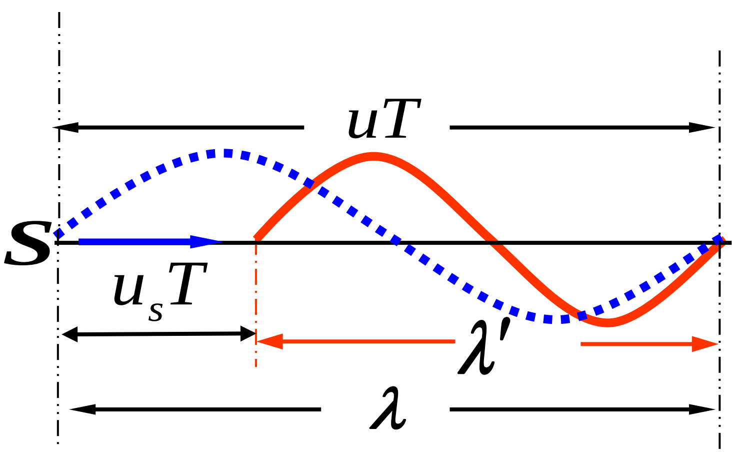



$u_R > 0$(R接近S)，$\nu_R > \nu_S$

$u_R < 0$(R远离S)，$\nu_R < \nu_S$

## ②观察者静止而波源运动：$u_R = 0$，$u_S \neq 0$




波相对观察者的有效波长为

$$\lambda' = \lambda - u_s T$$

波速未变，所以观察者感受到的频率

$$\nu_R = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - u_s T} = \nu_S \frac{u}{u - u_s}$$

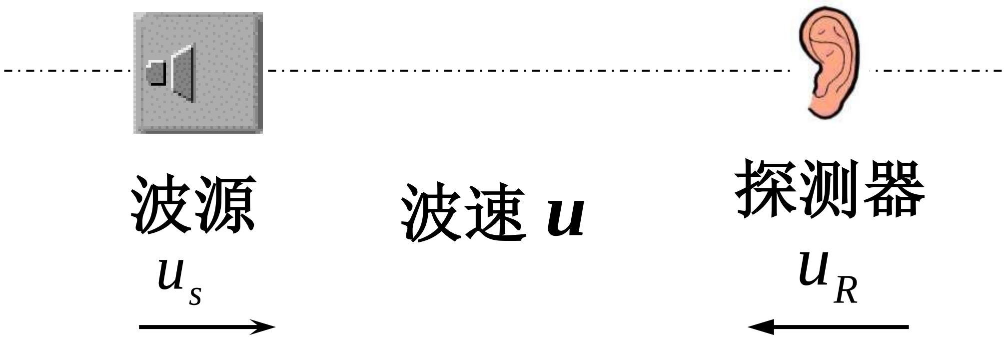
$$\boxed{\nu_R = \frac{u}{u - u_S}\nu_S}$$

◆适用条件：$u_S < u$

$u_S > 0$ (S 接近R)，$\nu_R > \nu_S$

$u_S < 0$ (S 远离R)，$\nu_R < \nu_S$

③观察者和波源在同一直线上运动：$u_R \neq 0$，$u_S \neq 0$




波相对观察者的传播速度：$u' = u + u_R$

波相对观察者的有效波长：$\lambda' = \lambda - u_s T$

观察者测到的频率：$$\nu_R = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + u_R}{\lambda - u_S T} = \frac{u + u_R}{u - u_S} \nu_S$$

$$\boxed{\nu_R = \frac{u + u_R}{u - u_S} \nu_S}$$

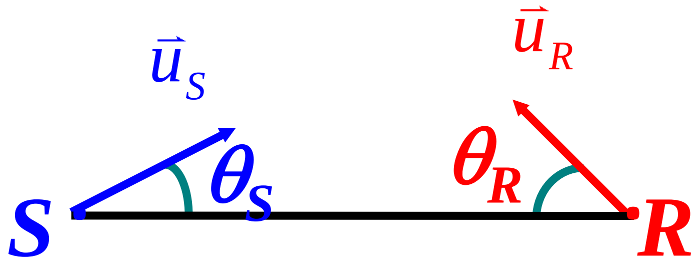
**结论**

波源与观察者相互接近时，感觉到的频率较高；

反之波源与观察者相互远离时，感觉到的频率较低。

④观察者和波源不在同一直线上运动：

分别用$\theta_S$和$\theta_R$表示波源速度和观察者速度与波源与观察者连线的夹角，有



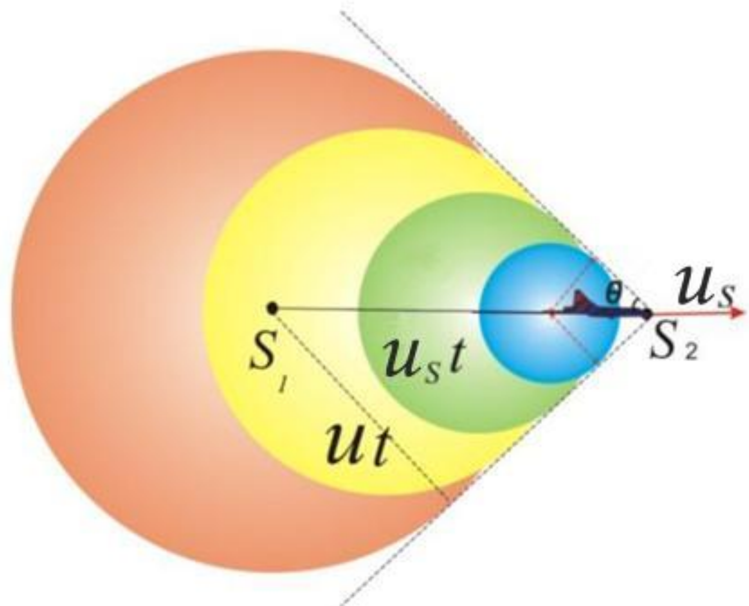

$$\nu_R = \frac{u + u_R \cos\theta_R}{u - u_S \cos\theta_S}\nu_S$$

⑤冲击波和马赫锥：若波源运动速度超过波速$u_s > u$

这时波源将位于波前的前方，各波前的切面形成一个圆锥面，这种波叫冲击波，也叫马赫波，此锥面称为马赫锥，其顶角满足

$$\sin\theta = \frac{ut}{u_S t} = \frac{u}{u_S} \equiv \frac{1}{M}$$

***M*** 为马赫数



快艇在水中形成的马赫锥　　超音速飞机形成的马赫锥

●多普勒效应在科学技术上有着广泛的应用

(1)谱线红移测定星球相对于地球的运动速度；

(2)利用基于反射波多普勒效应原理的雷达系统，测定流体的流动、振动体的振动、车辆导弹等运动目标速度；

(3)医学上的“*D*超”，利用超声波的多普勒效应检查人体内脏、血管的运动和血液（红细胞）的流速和流量。

**例题5:** 利用多普勒效应监测汽车行驶的速度。 一固定波源发出频率为100kHz的超声波，当汽车迎着波源驶来时，与波源安装在一起的接受器接收到从汽车反射回来的超声波的频率为110kHz。已知空气中声速为330m.s$^{-1}$，求汽车行驶的速率。

**解:** 分两步分析

第一步: 波向着汽车传播并被汽车接收，此时波源是静止的。汽车作为观察者迎着波源运动。设汽车的行驶速度为$u_c$，则接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u+u_c}{u}\nu$$

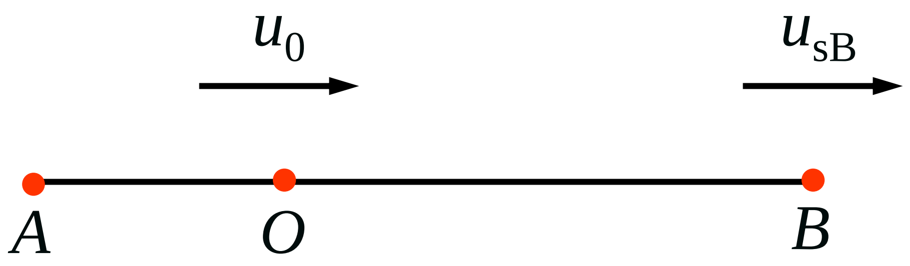
第二步: 波从汽车表面反射回来，此时汽车作为波源向着接受器运动，汽车发出的波的频率即是它接收到的频率$\nu'$,而接受器此时是观察者，它接收到的频率为

$$\nu'' = \frac{u}{u-u_c}\nu' = \frac{u}{u-u_c}\frac{u+u_c}{u}\nu = \frac{u+u_c}{u-u_c}\nu$$

由此解得汽车行驶的速度为

$$u_c = \frac{\nu''-\nu}{\nu''+\nu}u = \frac{110-100}{110+100}\times 330 = 56.8\text{km.h}^{-1}$$

**例题6:** $A$，$B$为两个汽笛，其频率均为500Hz。$A$是静止的，$B$以60m.s$^{-1}$的速率向右运动。在两个汽笛之间有一观察者$O$，以30m.s$^{-1}$的速率也向右运动。已知空气中的声速为330m.s$^{-1}$，求：1）观察者听到来自$A$的频率；2）观察者听到来自$B$的频率；3）观察者听到的拍频。




已知: $u$=330m.s$^{-1}$, $u_{sA}$=0, $u_{sB}$=60m.s$^{-1}$, $u_0$=30m.s$^{-1}$, $\nu$=500Hz

**解:** 利用多普勒效应关系式，有

$$\boxed{\nu' = \frac{u + u_R}{u - u_S}\nu}$$

1）由于观察者远离波源$A$运动，$u_0$应取负号，观察者听到来自$A$的频率为

$$\nu' = \frac{u - u_0}{u}\nu = \frac{330 - 30}{330} \times 500 = 454.5\mathrm{Hz}$$

2）观察者向着波源$B$运动，$u_0$取正号，而波源远离观察者运动，$u_{sB}$应取负号。故观察者听到自$B$的频率为

$$\nu'' = \frac{u + u_0}{u - (-u_{sB})}\nu = \frac{330 + 30}{330 + 60} \times 500 = 461.5\mathrm{Hz}$$

3） 拍频

$$\Delta\nu = \left|\nu' - \nu''\right| = 7\mathrm{Hz}$$