Канонічні системи і їх функції Тітчмарша-Вейля

Скотар Яна

Кафедра прикладної математики
Донецький національний університет імені Василя Стуса

Канонічні системи

Канонічною системою називається диференціальне рівняння у формі

$$Ju'(x) = -zH(x)u(x), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(CS)}$$

$x \in (a,b),\ -\infty \leq a < b \leq +\infty$

з гамільтоніаном $H(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) & h_3(x) \\ h_3(x) & h_2(x) \end{pmatrix}$:

1. $H(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
2. $H \in L^1_{loc}(a,b)$
3. $H(x) \geq 0$ майже для всіх $x \in (a,b)$
4. $H(x) \neq 0$ майже для всіх $x \in (a,b)$

Канонічні системи

Розв'язком канонічної системи буде називатися функція $u : (a,b) \to \mathbb{C}^2$, якщо $u \in AC(a,b)$ і (CS) справджується майже всюди.

Матрицею переходу T називається матричний розв'язок, що приймає значення в $\mathbb{C}^{2\times 2}$ однорідного рівняння

$$JT' = -zHT$$

з початковою умовою $T(c) = I$.

Фундаментальна матриця визначається як $W(x,\lambda) = T(x,\lambda)^T$ і має блочной вигляд

$$W(x,\lambda) = \begin{bmatrix} w_{11}(x,\lambda) & w_{12}(x,\lambda) \\ w_{21}(x,\lambda) & w_{22}(x,\lambda) \end{bmatrix} \tag{FM}$$

Канонічні системи: Простір L^2_H

Нехай

$$\mathcal{L} = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C}^2 : f \text{ є вимірною }, \int_a^b f^*(x)H(x)f(x)\,dx < \infty \right\},$$

тоді

$$||f|| = \left(\int_a^b f^* H f \, dx \right)^{1/2}, \quad f \in \mathcal{L},$$

і $L^2_H(a,b)$ визначається як $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, де $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L} : ||f|| = 0\}$ зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_H} = \int_a^b g^*(x)H(x)f(x)\,dx \tag{SP}$$

Лінійні відношення

Графіком лінійного оператора T називається множина

$$\operatorname{gr} T = \{(f, Tf) : f \in \operatorname{dom} T\} \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}. \tag{Graph}$$

Лінійним відношенням називається лінійний підпростір в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$.

Максимальне відношення $\mathcal{T}$ канонічної системи (CS) визначається як

$$\mathcal{T} = \{(f, g) : f, g \in L^2_H(a, b), f \in AC(a, b) \text{ і } Jf'(x) = -H(x)g(x) \\ \text{виконується майже для всіх } x \in (a, b)\}. \tag{MAX}$$

Предмінімальне відношення $\mathcal{T}_{00}$ визначається

$$\mathcal{T}_{00} = \{(f, g) \in \mathcal{T} : f(x) \text{ є фінітними в околах } a \text{ і } b\}. \tag{pre-MIN}$$

Мінімальним відношенням називається замикання $\mathcal{T}_0 = \overline{\mathcal{T}_{00}}$ відношення $\mathcal{T}_{00}$.

Лінійні відношення

Спряжене лінійне відношення $\mathcal{T}^*$ визначається рівністю

$$\mathcal{T}^* = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}' \times \mathfrak{H} : (k, f)_{\mathfrak{H}} = (h, g)_{\mathfrak{H}'}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \right\}.$$

Симетричним лінійне відношення $\mathcal{T} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ називають, якщо $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

Теорема 1 [Remling2018]

1. Максимальне відношення $\mathcal{T}$ є замкненим;
2. Мінімальне відношення $\mathcal{T}_0$ є замкненим і симетричним, і $\mathcal{T}_0^* = \mathcal{T}$.

Граничні трійки

Сукупність

$$\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}, \tag{BT}$$

де $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, $\Gamma_j : \operatorname{dom} A^* \mapsto \mathcal{H}$ $(j \in \{0, 1\})$ — лінійні відображення, називається **граничною трійкою** для оператора A^*, якщо:

1. виконується формула Гріна

$$(A^* f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^* g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*; \tag{GF}$$

2. відображення $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \operatorname{dom} A^* \mapsto \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ є сюр'єктивним.

Граничні трійки: Функція Вейля

λ — **точка регулярного типу** оператора A, якщо $\exists k > 0 : \forall f \in \operatorname{dom} A$ виконується

$$||(A - \lambda I)f|| \geq k||f||.$$

λ — **регулярна точка** оператора A, якщо λ є точкою регулярного типу і $\operatorname{ran}(T - \lambda) = \mathfrak{H}$.

Множина всіх регулярних точок позначається $\rho(A)$.

Функцією Вейля, що відповідає граничній трійці $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для оператора A^* називається оператор-функція $M(\cdot)$, що визначена рівністю

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \tag{WF}$$

де $\lambda \in \rho(A_0)$, $A_0 = A^* \restriction \operatorname{dom} A_0$, $\operatorname{dom} A_0 = \ker \Gamma_0$,
$f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda(A^*) = \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(A^* - \bar{\lambda} I)$.

Функції Вейля для канонічних систем

Теорема 2 [Winkler95]

Нехай дані дві канонічні системи з гамільтоніанами $H(x)$ і $\widetilde{H}(x) = H(l + x)$ для деякого $l > 0$ і $x \in [0, \infty)$. Якщо W — фундаментальна матриця системи, що відповідає H, а m і $\widetilde{m}$ — коефіцієнти Вейля, відповідні до $H(x)$ і $\widetilde{H}$, то

$$m(z) = \frac{w_{11}(l, z)\widetilde{m}(z) + w_{12}(l, z)}{w_{21}(l, z)\widetilde{m}(z) + w_{22}(l, z)}.$$

Теорема 3 [Winkler95]

Якщо в умовах Теореми 2 для всіх $x \in (0, l)$ виконується

$$H(x) = e_\phi e_\phi^T, \quad e_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

то

$$M(z) = \operatorname{ctg}(\phi) + \frac{1}{-zl\sin^2\phi + \dfrac{1}{\widetilde{M}(z) - \operatorname{ctg}(\phi)}}, \text{ якщо } \phi \neq 0$$

і

$$M(z) = lz + \widetilde{M}(z), \text{ якщо } \phi = 0.$$

Функції Вейля для канонічних систем: Регулярний випадок

Теорема 4

Нехай гамільтоніан $H \in L^1(a,b)$ і відображення $\Gamma_0, \Gamma_1 : \mathcal{T} \to \mathbb{C}^2$ задано рівностями

$$\Gamma_0 f = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ f_1(b) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{bmatrix} -f_2(a) \\ f_2(b) \end{bmatrix} \quad (f,g) \in \mathcal{T}. \tag{4.1}$$

Тоді сукупність $\{\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ утворює граничну трійку для $\mathcal{T}$ таку, що для всіх $(f,f^1),(g,g^1) \in \mathcal{T}$ виконується формула Гріна

$$(f^1, g)_{L^2_H} - (f, g^1)_{L^2_H} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathbb{C}^2}.$$

Функції Вейля для канонічних систем: Регулярний випадок

Теорема 5

Функція Вейля, що відповідає граничній трійці (4.1) має вигляд

$$M(b,\lambda) = \begin{pmatrix} -w_{11}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1} & w_{12}(b,\lambda)^{-1} \\ w_{21}(b,\lambda) - w_{22}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1}w_{11}(b,\lambda) & w_{22}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

де $W(x,\lambda)$ — фундаментальна матриця, що має блочний вигляд

$$W(x,\lambda) = \begin{bmatrix} w_{11}(x,\lambda) & w_{12}(x,\lambda) \\ w_{21}(x,\lambda) & w_{22}(x,\lambda) \end{bmatrix}$$

Функції Вейля для канонічних систем: Сингулярний випадок

Теорема 6

Нехай $H \notin L^1(0, b)$ і для системи (CS) має місце випадок граничної точки в b. При цьому:

1. Сукупність $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в якій
$$\Gamma_0 f = f_1(0), \quad \Gamma_1 f = -f_2(0), \tag{6.1}$$
утворює граничну трійку для $\mathcal{T}$.
2. Відповідна функція Вейля співпадає з коефіцієнтом Вейля-Тітчмарша
$$M(x, \lambda) = m_\infty(\lambda) = \lim_{x \to \infty} \frac{w_{11}(x, \lambda)h + w_{12}(x, \lambda)}{w_{21}(x, \lambda)h + w_{22}(x, \lambda)} \quad \text{для всіх } h \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Приклади

Приклад 1

Розглянемо систему $Ju'(x) = -zH(x)u(x)$ на інтервалі $(0, \infty)$ з гамільтоніаном

$$H(x) = H_j = c_{\alpha_j} c^*_{\alpha_j},\ x \in [x_{j-1}, x_j],\ j = 1, \dots, n$$
$$H(x) \equiv I,\ x \in [x_n, \infty).$$

Тут $c_{\alpha_j} = \begin{pmatrix} \cos \alpha j \\ \sin \alpha j \end{pmatrix}$, а $x_j \in [0, \infty)$: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$.

$$M(z) = \operatorname{ctg} \alpha_1 + \cfrac{1}{-zb_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{-zb_2 + \ldots \cfrac{1}{-zb_n + \cfrac{1}{i - \operatorname{ctg} \alpha_n}}}}}$$

де $b_j = l_j \sin^2 \alpha_j$, $a_j = \operatorname{ctg} \alpha_j - \operatorname{ctg} \alpha_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

Приклад 2

Розглянемо лінійну систему на інтервалі $(0, b)$:

$$Jy' = -zy.$$

Тут $H(x) \equiv I$ і $\mathcal{H} = L^2_{I_2}(0, b) = L^2(0, b) \oplus L^2(0, b)$,

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos zb}{\sin zb} & \dfrac{1}{\sin zb} \\ \dfrac{1}{\sin zb} & -\dfrac{\cos zb}{\sin zb} \end{pmatrix}$$

Приклади: Сингулярний випадок

Приклад 3

Розглянемо систему на інтервалі $(0, \infty)$:

$$Jy' = -zy.$$

Тут $H(x) = I_2 \in L^1_{loc}[0, \infty)$, але $H \notin L^1(0, \infty)$.

$$m_\infty(z) = \begin{cases} i, & z \in \mathbb{C}_+ \\ -i, & z \in \mathbb{C}_- \end{cases}$$

Список використаних посилань

1. Derkach V. A., Malamud M. M. J. Funct. Anal. 1991. Vol. 95, No 1. P. 1–95.
2. Деркач В. О., Маламуд М. М. Праці Інституту математики НАН України, 2017.
3. Winkler H. Integr equ oper theory. 1995. Vol. 22, No 3. P. 360–374.
4. Remling K. De Gruyter studies in mathematics. 2018. X+196 p.
5. Kaltenbäck M., Winkler H., Woracek H. Mathemachine Nachrichten. 2010. Vol. 280, No 13-14. P. 1518–1536.
6. de Branges L. Prentice-Hall, Inc. 1968. 326 p.

\end{talk}

Дякую за увагу!