МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

СКОТАР ЯНА ЯНІВНА

Допускається до захисту:
заступник завідувача кафедри
прикладної математики, к.ф.-м.н.
________________________О. Д. Трофименко
«_____»___________________ 20_____ р.

# Канонічні системи і їх функції Тітчмарша-Вейля

Спеціальність 111 Математика
Магістерська робота

Науковий керівник:
Деркач В. О., завідувач кафедри
прикладної математики,
д.ф.-м.н., професор

Оцінка:_____/_____/____________________
(бали/за шкалою CKTS/за національною шкалою)
Голова ЕК: ___________________________

Вінниця 2019

# АНОТАЦІЯ

Скотар Я. Я. Канонічні системи і їх функції Тітчмарша-Вейля. Спеціальність 111 Математика, освітня програма Математика. Донецький національний університет імені Василя Стуса, 2019 — 50 с.

Ключові слова: Симетричні оператори, лінійні відношення, граничні трійки, канонічні системи, функції Вейля.

Бібліограф.: 36 найм.

Skotar Ya. Canonical systems and their Titchmarsh-Weyl functions. Specialty 111 Mathematics, Education program Mathematics. Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2019.

Keywords: Symmetric operators, Linear relations, Boundary triples, Canonycal systems, Weyl functions.

Bibliography: 36 items.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Канонічною системою називається диференціальне рівняння у вигляді

$$Ju'(x) = -zH(x)u(x), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця система зі спектральним параметром $z$ розглядатиметься на відкритому, можливо нескінченному, інтервалі $x \in (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ в якій $H$ — дійснозначна $2 \times 2$ матриця-функція, яка належить $L^1_{loc}(a, b)$ і не дорівнює тотожньо нулю. Канонічні системи представляють великий математичний інтерес, оскільки вони в точному розумінні є найбільш загальним класом симетричних операторів другого порядку.[23]

Теорія канонічних систем включає в собі всі види диференціальних операторів другого порядку такі як оператор Штурма-Ліувілля, струна Крейна-Феллера, різницеві оператори, пов'язані з матрицею Якобі, та інші. Основи спектральної теорії канонічних систем було закладено в роботах М. Г. Крейна (див. також монографії [9; 30]). Повний опис спектральних функцій канонічних систем другого порядку було отримано Л. де Бранжем [4]. Сучасна теорія канонічних систем представлена в монографіях [2; 23; 26].

Іншій важливий об'єкт, який розглядається в роботі — це функції Вейля-Тітчмарша. Для оператора Штурма-Ліувілля цю функцію було введено Германом Вейлем у звязку з класифікацією сингулярних точок оператора методом теорії вкладених кругів Вейля. У подальшому цю функцію було використано Тітчмаршем для обчислення спектральної функції оператора Штурма-Ліувілля. В роботах В. Деркача і М. Маламуда було введено абстрактний варіант функції Вейля-Тітчмарша і досліджено спектри довільних розширень симетричного оператора у просторі Гільберта. Важливість функції Вейля для спектральної теорії канонічних систем випливає з того, що їх інтегральні представлення дозволяють обчислити спектральні функції самоспряжених операторів, що відповідають канонічній системі.

В магістерській роботі застосовано теорію граничних трійок, що було розвинено в роботах [10; 15] до канонічних систем. Зокрема, побудовано теорію вкладених кругів Вейля для канонічних систем, знайдено формули для граничних трійок для канонічних систем як в регулярному, так і в сингулярному випадку граничного кола у нескінченності. Наведено формулу про факторизацію фундаментальних матриц для зчеплення двох канонічних систем. Це дозволило обчислювати функції Вейля для граничних трійок і функцій Вейля багатьох канонічних систем у явному вигляді. В роботі розглянуто три приклади канонічних систем, для яких знайдено граничні трійки і їх функції Вейля.

# РОЗДІЛ 1

# ТЕОРІЯ РОЗШИРЕНЬ СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ. ФУНКЦІЇ КЛАСІВ $R$ ТА $S$

## 1.1 Розширення симетричних операторів

В цьому розділі наведено огляд класичної теорії розширень симетричних операторів. Ця теорія була побудована в роботах Дж. фон Неймана [19; 20] й детально викладена в [31]. Тут нагадується означення симетричного і самоспряженого операторів в гільбертовому просторі, визначення їх дефектних чисел і наведено дві останні формули Дж. фон Неймана.

Нехай $\mathfrak{H}$ — гільбертів простір над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ — лінеал в $\mathfrak{H}$ і $T : \mathcal{D} \mapsto \mathfrak{H}$ — лінійне відображення, тобто

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T f_1 + \lambda_2 T f_2, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{D},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Лінеал $\mathcal{D}$ називають областю визначення оператора $T$ і позначають $\operatorname{dom} T$. Область значень оператора $T$ позначають $\operatorname{ran} T$.

**Означення 1.1.** Нехай $T$ — лінійний оператор в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, $\overline{\operatorname{dom}} T = \mathfrak{H}$. Елемент $g \in \mathfrak{H}$ належить області визначення $\operatorname{dom} T^*$ спряженого з $T$ оператора $T^*$, якщо існує $h \in \mathfrak{H}$ такий, що

$$(Tf, g) = (f, h) \quad \forall f \in \operatorname{dom} T. \tag{1.1}$$

В цьому випадку $T^* g = h$.

*Зауваження.* Якщо $\overline{\operatorname{dom}} T \neq \mathfrak{H}$, то $T^*$ є лінійним відношенням (див. у Розділі 2.1).

**Означення 1.2.** Лінійний оператор $A$ називається симетричним, якщо $\overline{\operatorname{dom}} A = \mathfrak{H}$ і виконується рівність

$$(Af, g) = (f, Ag), \quad \forall f, g \in \operatorname{dom} A$$

З означень 1.1 і 1.2 випливає, що для симетричного оператора $A$ виконується включення $A \subset A^*$.

**Означення 1.3.** Оператор $A$ називається самоспряженим, якщо $A = A^*$.

**Означення 1.4.** Графіком лінійного оператора $T$ називається множина

$$\operatorname{gr} T = \{(f, Tf) : f \in \operatorname{dom} T\} \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}.$$

**Означення 1.5.** Оператор $T$ (не обов'язково лінійний) називається замкненим, якщо з одночасного виконання умов

$$f_n \in \operatorname{dom} T, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = g$$

випливає, що

$$f \in \operatorname{dom} T, \quad g = Tf.$$

*Зауваження.* Лінійний оператор $T$ є замкненим, якщо його графік замкнений в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$.

**Означення 1.6.** Оператор $\widetilde{A}$ називається розширенням $A$, якщо

$$\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} \widetilde{A} \quad \text{і} \quad \widetilde{A}f = Af, \ f \in A.$$

При цьому, якщо $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} \widetilde{A}$, то $A = \widetilde{A}$.

**Означення 1.7.** Розширення $\widetilde{A}$ симетричного оператора $A$ називають власним розширенням, якщо $A \subsetneq \widetilde{A} \subsetneq A^*$.

Якщо $\widetilde{A}$ — симетричне розширення оператора $A$ ($A \subset \widetilde{A}$), то $(\widetilde{A})^* = \widetilde{A^*} \subset A^*$ і, отже,

$$A \subset \widetilde{A} \subset \widetilde{A^*} \subset A^*.$$

А з останнього випливає, що симетричне розширення $\widetilde{A}$ оператора $A$ обов'язково є його власним розширенням.

Позначимо $\ker A = \{f \in \operatorname{dom} A : Af = 0\}$ ядро оператора $A$.

**Означення 1.8.** Оператор $V : \mathfrak{H}_1 \mapsto \mathfrak{H}_2$ ($\mathfrak{H}_1$ і $\mathfrak{H}_2$ можуть бути підпросторами одного простору) називають ізометричним, якщо для всіх $f, g \in \mathfrak{H}_1$ виконується

$$(Vf, Vg)_2 = (f, g)_1$$

**Означення 1.9.** Нехай $T$ — довільний лінійний оператор. Число $\lambda$ називається точкою регулярного типу оператора $T$, якщо існує $k(\lambda) > 0$ така, що $\forall f \in \operatorname{dom} T$ виконується

$$||(T - \lambda I)f|| \geq k||f||.$$

При цьому множину всіх точок регулярного типу оператора $T$ називають полем регулярності цього оператора і позначають $\widehat{\rho}(T)$.

Зрозуміло, що власні значення оператора $T$ не є його точками регулярного типу.

*Зауваження.* Число $\lambda$ є точкою регулярного типу оператора $T$ тоді і тільки тоді, коли оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ існує і є обмеженим на множині $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ значень оператора $(T - \lambda I)$.

*Зауваження.* Множина точок регулярного типу завжди є відкритою множиною.

Для симетричного оператора $A$ і $z = x + iy$ $(y \neq 0)$ $\forall f \in \operatorname{dom} A$:

$$||(A - zI)f||^2 = ||(A - xI)f||^2 + y^2||f||^2 \geq y^2||f||^2.$$

Тобто верхня і нижня комплексні півплощини є зв'язними компонентами поля регулярності оператора $A$.

Для ізометричного оператора $V$ і $\xi \in \mathbb{C}$ зв'язними компонентами поля регулярності є внутрішня частина одиничного кола $(|\xi| < 1)$ і його зовнішня частина $(|\xi| > 1)$, оскільки

$$||(V - \xi I)f|| \geq ||Vf|| - |\xi| \cdot ||f|| = (1 - |\xi|) \cdot ||f||, \ |\xi| < 1;$$
$$||(V - \xi I)f|| \geq |\xi| \cdot ||f|| - ||Vf|| = (|\xi| - 1) \cdot ||f||, \ |\xi| > 1.$$

**Теорема** 1.10. [31] Якщо $\Omega$ є зв'язна компонента поля регулярності лінійного оператора $T$, то розмірність підпростору $\mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(T - \lambda I)$ однакова для всіх $\lambda \in \Omega$.

**Означення 1.11.** Нехай оператор $T$ є замкненим в $\mathfrak{H}$.

1. Якщо $z \in \widehat{\rho}(T)$ і $\operatorname{ran}(T - zI) = \mathfrak{H}$, то $z$ називають регулярною точкою оператора $T$.
2. Сукупність регулярних точок оператора $T$ називають його резольвентною множиною і позначають $\rho(T)$.
3. Множина $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ називають спектром оператора $T$.
4. Множина $\widehat{\sigma}(T) = \mathbb{C} \setminus \widehat{\rho}(T)$ називають ядром спектра оператора $T$.

**Означення 1.12.** Нехай оператор $T$ є замкненим в $\mathfrak{H}$.

1. Точковим спектром оператора $T$ називають множину
$$\sigma_p(T) = \{z \in \mathbb{C} : \ker(T - zI) \neq \{0\}\}. \tag{1.2}$$
2. Неперервним спектром оператора $T$ називають множину
$$\sigma_c(T) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \operatorname{ran}(T - zI) \neq \overline{\operatorname{ran}(T - zI)}\}. \tag{1.3}$$
3. Залишковим спектром оператора $T$ називають множину
$$\sigma_r(T) = \sigma(T) \setminus \widehat{\sigma}(T). \tag{1.4}$$

**Означення 1.13.** Дефектним числом лінійного многовиду $\mathfrak{M}$ називають розмірність його ортогонального доповнення $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ $(\operatorname{def} \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{N})$.

**Означення 1.14.** Дефектне число лінійного многовиду $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ точок $\lambda \in \Omega$ поля регулярності оператора $T$ називають дефектним числом оператора $T$ в компоненті зв'язності $\Omega$ поля регулярності $T$. При цьому $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(T - \bar{\lambda} I)$ називають дефектним підпростором оператора $T$ для точки $\lambda$, а будь-який ненульовий елемент $\mathfrak{N}_\lambda$ називають дефектним елементом.

Для симетричного оператора $A$:

$$\operatorname{def}\operatorname{ran}(A - \bar{z}I) = \begin{cases} m, & \operatorname{Im} z > 0, \\ n, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Для ізометричного оператора $V$:

$$\operatorname{def}\operatorname{ran}(I - \bar{\xi}I) = \begin{cases} m, & |\xi| > 1, \\ n, & |\xi| < 1. \end{cases}$$

**Означення 1.15.** Дефектні числа симетричного (ізометричного) оператора утворюють впорядковану пару $(n_+, n_-) := (m, n)$, яку називають індексами дефекту оператора.

**Наслідок 1.16.**

1. *Для симетричного оператора $A$: $n_+ = n_-$, якщо $A$ має дійсну точку регулярного типу.*

   *Для ізометричного оператора $V$: $n_+ = n_-$, якщо $V$ має точку регулярного типу, що належить одиничному колу.*

2. *Якщо $A$ — симетричний оператор, то будь-яке $z \notin \mathbb{R}$ є для спряженого оператора $A^*$ власним значенням:*

   - *кратності $m$, якщо $\operatorname{Im} z < 0$,*
   - *кратності $n$, якщо $\operatorname{Im} z > 0$.*

3. *Дефектні числа ізометричного оператора $V$ можуть бути визначені за допомогою рівностей:*

$$\begin{cases} n_+ = \operatorname{def}\operatorname{dom} V, \\ n_- = \operatorname{def}\operatorname{ran} V. \end{cases}$$

4. *Якщо $A$ — симетричний оператор в $\mathfrak{H}$, а $B$ — обмежений самоспряжений оператор, то індекси дефекту $A$ і $A + B$ є однаковими.*

**Означення 1.17.** Наступне перетворення $V$ замкненого симетричного оператора $A$ називається перетворенням Келі:

$$\begin{cases} (A - \bar{z}I)h = f; \\ (A - zI)h = Vf, \end{cases} \tag{1.5}$$

якщо $z \notin \mathbb{R}$, $h \in \operatorname{dom} A$.

Беручи до уваги теорему 1.10, побачимо, що

$$\begin{cases} m = \operatorname{def} \operatorname{ran} A(\bar{z}) = \operatorname{def} \operatorname{dom} V, \\ n = \operatorname{def} \operatorname{dom} A(z) = \operatorname{def} \operatorname{ran} V, \end{cases} \tag{1.6}$$

тобто індекси дефекту $(m, n)$ оператора $A$ співпадає з індексом дефекту оператора $V$.

**Теорема** 1.18. [31] Якщо $V$ — ізометричний оператор і якщо многовид $\operatorname{ran}(I - V)$ є щільним в $\mathfrak{H}$, то оператор $A$ є симетричним оператором, а $V$ — його перетворення Келі.

**Теорема** 1.19. [31] Нехай $A$ і $\widetilde{A}$ — симетричні оператори, а $V$ і $\widetilde{V}$ — їх перетворення Келі. Тоді $\widetilde{A}$ є розширенням $A$ тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{V}$ є розширенням $V$.

Таким чином, щоб знайти деяке симетричне розширення $\widetilde{A}$ симетричного оператора $A$, необхідно спочатку перейти до його перетворення Келі $V$, а після його розширення до $\widetilde{V}$ — назад.

Ізометричне розширення $\widetilde{V}$ оператора $V$ можна визначити наступним чином:

$$\widetilde{V} = \begin{cases} Vf, \ \ f \in \operatorname{dom} V, \\ V_1 f, \ \ f \in \mathcal{F}, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ — підпростори однакової розмірності дефектних підпросторів $\mathfrak{H} \ominus \operatorname{dom} V$ і $\mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran} V$ оператора $V$, а $V_1 : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{G}$ — довільний ізометричний оператор.

**Теорема** 1.20. [31]

1. Для того, щоб симетричний оператор був максимальним, необхідно і достатньо, щоб одне з його дефектних чисел дорівнювало нулю.

2. Для того, щоб симетричний оператор був самоспряженим, необхідно і достатньо, щоб обидва його дефектних числа дорівнювали нулю.

**Теорема** 1.21. [31] Нехай $A$ — довільний симетричний оператор з індексами дефекту $n_\pm$. Оператор $A$ завжди можна розширити до максимального, але:

- якщо $n_+ \neq n_-$, то серед розширень немає самоспряжених;

- якщо $n_+ = n_- < \infty$, то будь-яке максимальне розширення оператора $A$ є самоспряженим;

- якщо $n_+ = n_- = \infty$, то серед розширень є як самоспряжені, так і ні.

**Теорема** 1.22. [31] Нехай $A$ — довільний симетричний оператор з областю визначення $\operatorname{dom} A$, а $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ і $\mathfrak{N}_z$ $(\operatorname{Im} z > 0)$ — деяка пара його дефектних підпросторів. Тоді область визначення $\operatorname{dom} A^*$ оператора $A^*$ може бути подана у наступному вигляді:

$$\operatorname{dom} A^* = \operatorname{dom} A \oplus \mathfrak{N}_{\bar{z}} \oplus \mathfrak{N}_z. \tag{1.8}$$

Формула (1.8) називається першою формулою Неймана і дає представлення області визначення спряженого до $A$ оператора.

З неї випливає, що симетричний оператор $A$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли він має індекси дефекту $n_+ = n_- = 0$.

Знайдемо область визначення $\operatorname{dom} \widetilde{A}$ симетричного розширення $\widetilde{A}$ оператора $A$. Оберемо $\mathcal{F}_z \subseteq \mathfrak{N}_{\bar{z}} = \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran} A(\bar{z})$ і $\mathcal{G}_z \subseteq \mathfrak{N}_z = \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran} A(z)$. Тоді з (1.7) випливає:

$$\operatorname{dom} \widetilde{A} = (\widetilde{V} - I) \operatorname{dom} \widetilde{V} = (\widetilde{V} - I)(\operatorname{dom} V \oplus \mathcal{F}_z) = (V - I) \operatorname{dom} V \oplus (V_1 - I)\mathcal{F}_z = \operatorname{dom} A \oplus (V_1 - I)\mathcal{F}_z.$$

**Теорема** 1.23. [31] Формула

$$\operatorname{dom} \widetilde{A} = \operatorname{dom} A \oplus (I - V_1)\mathcal{F}_z. \tag{1.9}$$

встановлює взаємно-однозначну відповідність між множиною замкнених симетричних розширень $\widetilde{A}$ оператора $A$ і множиною частково ізометричних операторів $V_1 : \mathfrak{N}_{\bar{z}} \mapsto \mathfrak{N}_z$. При цьому розширення $\widetilde{A}$ оператора $A$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли $V_1$ — унітарне відображення з $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$ на $\mathfrak{N}_z$.

## 1.2 Клас Піка-Неванлінни-Герглотца

В цьому розділі наводяться необхідні відомості з теорії функцій, зокрема теорії $R$-функцій, тобто аналітичних в верхній півплощині функцій зі значеннями в $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Термін $R$-функції був запропонований в літературі по теорії електричних ланцюгів [18]. Інтегральні представлення таких функцій було отримано паралельно в роботах Р. Неванлінуи [21], Ф. Ріса [25], Г. Піка [22] та Г. Герглотца [12].

**Означення 1.24.** Будемо казати, що функція $f$ належить класу Піка-Неванлінни-Герглотца $(R)$, якщо $f$ голоморфна в $\mathbb{C}_+$ і $\operatorname{Im} f(\lambda) \geq 0$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

**Теорема** 1.25. [34] Для того, щоб $f$ належала класу $R$ необхідно і достатньо, щоб вона допускала інтегральне представлення

$$f(\lambda) = A + B\lambda + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{t - \lambda} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t), \tag{1.10}$$

де $A = \bar{A}$, $B \geq 0$, а $\sigma(t)$ — неперервна справа неспадна функція така, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty.$$

**Означення 1.26.** Нехай $\mathcal{H}$ — допоміжний гільбертів простір. Будемо говорити, що оператор-функція $F(\lambda)$ належить до класу $R[\mathcal{H}]$, якщо

1. $F(\cdot)$ голоморфна в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$;
2. $\operatorname{Im} F(\lambda) \geq 0$ для $\lambda \in \mathbb{C}_-$;
3. $F(\bar{\lambda}) = F(\lambda)^*$ для $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Оператор-функції $F(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$ допускають інтегральне представлення (1.10), в якому $A$ і $B$ є операторами, а $\sigma(t)$ — неспадна оператор-функція, така що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-1}\, d(\sigma(t)h, h) < \infty \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

**Наслідок 1.27.** *Якщо $u$ — невід'ємна гармонійна функція в $\mathbb{C}_+$, то існують $B \geq 0$ і неперервна справа неспадна функція $\sigma(t)$ така, що*

$$u(\lambda) = By + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\, d\sigma(t). \tag{1.11}$$

*Зауваження* 1.28. В умовах Теореми 1.25 $A, B$ — єдині і визначаються рівностями:

$$A := \operatorname{Re} f(i), \quad B := \lim_{y \to \infty} \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y}.$$

**Теорема** 1.29 (Формула обертання Стілт'єса). *В умовах Теореми 1.25 функція $\sigma(t)$ у своїх точках неперервності визначаєтьcя рівністю*

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \int_a^b \operatorname{Im} f(x+iy)\, dx. \tag{1.12}$$

*Зауваження* 1.30. Якщо $a$ і $b$ — довільні точки, то функція розподілу приймає вигляд:

$$\frac{\sigma(b+0)+\sigma(b-0)}{2} - \frac{\sigma(a+0)+\sigma(a-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \int_a^b \operatorname{Im} f(x+iy)\, dx.$$

**Означення 1.31.** Функція $f \in R$ відноситься до класу $R_0$, якщо вона має інтегральне представлення

$$f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}, \tag{1.13}$$

де $\sigma(\lambda)$ — обмежена неспадна функція, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) < \infty. \tag{1.14}$$

**Означення 1.32.** Будемо казати, що $f \in R$ належить класу $R_1$, якщо вона допускає інтегральне представлення

$$f(\lambda) = \gamma + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}, \tag{1.15}$$

де

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+|t|} < \infty. \tag{1.16}$$

**Теорема** 1.33. [34] Нехай $f \in R$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:

1. $f \in R_0$;
2. $\sup\limits_{y>0} |yf(iy)| < \infty$;
3. $\sup\limits_{y>0} |y \operatorname{Im} f(iy)| < \infty$, $\lim\limits_{y\uparrow\infty} f(iy) = 0$.

**Теорема** 1.34. [34] Для того, щоб $R$-функція $f(\lambda)$ належала класу $R_1$ необхідно і достатньо, щоб збігався інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(i\eta)}{\eta}\, d\eta. \tag{1.17}$$

## 1.3 Класи Стілт'єса. Клас функцій $S^+$

Класи Стілт'єса було введено і досліджено М. Г. Крейном в його роботах [16; 17; 35]. Позначення цих класів було дано на честь Т. Стілт'єса.

**Означення 1.35.** Кажуть, що функція $f$ належить класу $S^+$, якщо

1. $f \in R$;
2. $f$ — голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$;
3. $f(x) \geq 0$, для всіх $x < 0$.

**Теорема** 1.36. [34] Для того, щоб $f \in S^+$, необхідно і достатньо, щоб функція $f$ допускала наступне інтегральне представлення

$$f(\lambda) = \gamma + \int\limits_{-0}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda}, \tag{1.18}$$

де $\gamma \geq 0$, $\sigma(t)$ — неспадна функція така, що

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t + 1} < \infty. \tag{1.19}$$

**Теорема** 1.37. [34] Нехай $f \in R$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. $f \in S^+$;
2. $\lambda f(\lambda) \in R$;

## 1.4 Перетворення розгортання

Для довільної функції $f$ мероморфної в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ визначено її перетворення $\widetilde{f}$, що визначається формулою

$$\widetilde{f}(z) := zf(z^2), \quad (z \in \mathbb{C}_+). \tag{1.20}$$

Це перетворення називають перетворенням розгортання функції $f(z)$ [8; 13].

Як відомо, для функції $f$ з класу Стілт'єса її перетворення розгортання $\widetilde{f}$ належить до класу $S$.

**Теорема** 1.38. [34] Нехай $f \in S$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. $zf(z) \in R$,
2. $zf(z^2) \in R$.

Таким чином, з Теореми 1.38 випливає, що перетворення розгортання відображає клас $S$ в частину класу $R$.

Наступна теорема відповідає на питання які додаткові умови характеризують функції з класу $R$, що утворені перетворенням розгортання для деякої функції $f \in S$.

**Означення 1.39.** Будемо казати, що функція $f \in R$ є симетричною і писати $\widetilde{f} \in R^{SYM}$, якщо

$$\widetilde{f}(-z) = -\widetilde{f}(z). \tag{1.21}$$

**Теорема** 1.40. *Перетворення розгортання встановлює взаємно-однозначну відповідність між класами $S$ і $R^{SYM}$.*

# РОЗДІЛ 2

# ГРАНИЧНІ ТРІЙКИ ТА ФУНКЦІЇ ВЕЙЛЯ

## 2.1 Лінійні відношення

В цьому розділі розглядаються деякі відомості про лінійні відношення в гільбертовому просторі. Поняття лінійного відношення в банаховому просторі було введено і вивчалося Р. Аренсом [1], хоча в іншому вигляді воно зустрічалося в більш ранніх роботах, наприклад, в [5].

Нехай $\mathfrak{H}$ — гільбертів простір і $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ — декартовий добуток двох екземплярів простору $\mathfrak{H}$. Елементи простору $\mathfrak{H}^2$ будемо позначати $\widehat{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $(f_1, f_2 \in \mathfrak{H})$. Для $\widehat{f} \in \mathfrak{H}^2$ та $\widehat{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}^2$ покладемо

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{\mathfrak{H}^2} = (f_1, g_1)_{\mathfrak{H}} + (f_2, g_2)_{\mathfrak{H}}. \tag{2.1}$$

Позначимо через $\pi_1$ та $\pi_2$ проектори на першу та другу компоненту в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ відповідно.

**Означення 2.1.** Лінійний підпростір $\Theta \in \mathfrak{H}^2$ називається лінійним відношенням в $\mathfrak{H}$. Лінійне відношення називається замкненим, якщо підпростір $\Theta$ є замкненим в $\mathfrak{H}^2$. Сукупність замкнених лінійних відношень в $\mathfrak{H}$ позначимо $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

Множини

$$\operatorname{dom} \Theta = \left\{ f_1 \in \mathfrak{H} : \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \Theta \text{ для деякого } f_2 \in \mathfrak{H} \right\} = \pi_1 \Theta,$$
$$\operatorname{ran} \Theta = \left\{ f_2 \in \mathfrak{H} : \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \Theta \text{ для деякого } f_1 \in \mathfrak{H} \right\} = \pi_2 \Theta$$

називаються областю визначень та областю значення лінійного відношення, а множини

$$\ker \Theta = \left\{ \pi_1 \widehat{f} : \widehat{f} \in \Theta, \pi_2 \widehat{f} = 0 \right\}, \quad \operatorname{mul} \Theta = \left\{ \pi_2 \widehat{f} : \widehat{f} \in \Theta, \pi_1 \widehat{f} = 0 \right\}$$

називаються відповідно ядром і багатозначною частиною лінійного відношення $\Theta$. Обернене до $\Theta$ лінійне відношення $\Theta^{-1}$ в $\mathfrak{H}$ визначається співвідношенням

$$\Theta^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \in \Theta \right\}.$$

Спряжене лінійне відношення $\Theta^*$ визначається рівністю [3; 6]

$$\Theta^* = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}' \oplus \mathfrak{H} : (k, f)_{\mathfrak{H}} = (h, g)_{\mathfrak{H}'}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \Theta \right\}.$$

На відміну від оператора, лінійне відношення завжди можна замкнути. Більше того, в класі $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ замкнених лінійних відношень завжди існують спряжене і обернене до $\Theta$ лінійні відношення. Ці переваги дозволяють після ототожнення оператора $T$ з його графіком $\Theta_T = \operatorname{gr} T$, розглядати $\bar{\Theta}_T$, $\Theta_T^*$, $\Theta_T^{-1}$ і роблять лінійні відношення незамінними при роботі з операторами.

Сума $\Theta_1 + \Theta_2$ і покомпонентна сума $\Theta_1 \widehat{+} \Theta_2$ двох лінійних відношень $\Theta_1$ і $\Theta_2$ визначаються рівностями

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \Theta_1, \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in \Theta_2 \right\}, \tag{2.2}$$

$$\Theta_1 \widehat{+} \Theta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} f + h \\ g + k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \Theta_1, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \Theta_2 \right\}.$$

Якщо покомпонентна сума є прямою (ортогональною), то вона позначається відповідно $\Theta_1 \dot{+} \Theta_2$ ($\Theta_1 \oplus \Theta_2$).

Зрозуміло, що

$$\operatorname{dom} \Theta^{-1} = \operatorname{ran} \Theta, \qquad \operatorname{ran} \Theta^{-1} = \operatorname{dom} \Theta,$$
$$\ker \Theta^{-1} = \operatorname{mul} \Theta, \qquad \operatorname{mul} \Theta^{-1} = \ker \Theta.$$

Ототожнюючи оператор $\lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) з його графіком, отримаємо у відповідності з (2.2)

$$\Theta - \lambda I = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - \lambda f_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \Theta \right\} \tag{2.3}$$

**Означення 2.2.** Нехай $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Точку $\lambda \in \mathbb{C}$ називають регулярною точкою лінійного відношення $\Theta$ і пишуть $\lambda \in \rho(\Theta)$, якщо $\ker(\Theta - \lambda I) = \{0\}$ і $\operatorname{ran}(\Theta - \lambda I) = \mathfrak{H}$. Спектр лінійного відношення позначають $\sigma(\Theta) := \mathbb{C} \setminus \rho(\Theta)$. Точковий та неперервний спектри лінійного відношення $\Theta$ визначається рівностями

$$\sigma_p(\Theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\Theta - \lambda I) \neq \{0\}\},$$

$$\sigma_c(\Theta) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(\Theta - \lambda I) = \{0\},\ \operatorname{ran}(\Theta - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{ran}(\Theta - \lambda I)} = \mathfrak{H} \right\}.$$

## 2.2 Граничні трійки для симетричних операторів

Підхід до теорії розширень симетричних операторів і формули Дж. фон Неймана виявився не зручним у застосуванні до граничних задач. У зв'язку з цим Дж. Калкіним було запропоновано інший підхід, який базується на понятті "абстрактної граничної умови". Надалі цей підхід застосовувався в роботах М. І. Вішіка [27] з теорії розширень диференціальних операторів в частинних похідних, М. Л. Горбачука [32] з теорії операторів Штурма-Ліувілля з необмеженим операторним коефіцієнтом. В роботах А. Н. Кочубея [15] і В. І. Горбачук та М. Л. Горбачука [10] цей підхід трансформувався в теорію "абстрактних граничних просторів". Надалі використовується термінологія робіт В. Деркача і М. Маламуда, де ці об'єкти називаються граничними трійками.

Нехай $\mathfrak{H}$ — гільбертів простір, $A$ — замкнений симетричний оператор в $\mathfrak{H}$ із щільною областю визначення $\operatorname{dom} A$ і рівними індексами дефекту.

**Означення 2.3.** Сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, де $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, $\Gamma_j : \operatorname{dom} A^* \mapsto \mathcal{H}$ $(j \in \{0, 1\})$ — лінійні відображення, називається граничною трійкою для оператора $A^*$, якщо:

1. виконується формула Гріна

$$(A^* f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^* g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*; \tag{2.4}$$

2. відображення $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \operatorname{dom} A^* \mapsto \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ є сюр'єктивним.

**Означення 2.4.** Два розширення $\widetilde{A_1}$ і $\widetilde{A_2}$ оператора $A$ називаються диз'юнктними, якщо $\operatorname{dom} \widetilde{A_1} \cap \operatorname{dom} \widetilde{A_2} = \operatorname{dom} A$, і трансверсальними, якщо вони є диз'юнктними і $\operatorname{dom} \widetilde{A_1} + \operatorname{dom} \widetilde{A_2} = \operatorname{dom} A^*$.

З кожною граничною трійкою пов'язані два розширення оператора $A$:

$$A_j = A^* \upharpoonright \operatorname{dom} A_j, \qquad \operatorname{dom} A_j = \ker \Gamma_j,\ j \in \{0, 1\}. \tag{2.5}$$

**Пропозиція 2.5.** *Нехай розширення $A_j$ $(j \in \{0, 1\})$ визначено рівностями* (2.5). *Тоді:*

1. $A_j = A_j^*$, $j \in \{0, 1\}$;

2. *розширення $A_0$ і $A_1$ трансверсальні.*

**Пропозиція 2.6.** *Нехай $A$ симетричний оператор в $\mathfrak{H}$ з рівними дефектними числами, $\overline{\operatorname{dom} A} = \mathfrak{H}$ і $A'$ — деяке самоспряжене розширення оператора $A$. Тоді існує гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ оператора $A^*$ така, що $\operatorname{dom} A' = \ker \Gamma_0$, тобто $A' = A_0$.*

**Означення 2.7.** Сукупність всіх власних розширень оператора $A$, поповнену операторами $A$ і $A^*$, позначають через $\mathrm{Ext}_A$.

**Пропозиція 2.8.** *Відображення* $\Gamma : \mathrm{dom}\, A^* \mapsto \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *задає бієктивну відповідність між сукупністю* $\mathrm{Ext}_A$ *і сукупністю* $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *замкнених лінійних відображень в* $\mathcal{H}$.

$$\mathrm{Ext}_A \ni \widetilde{A} \mapsto \Theta := \Gamma(\mathrm{dom}\, \widetilde{A}) = \{\begin{pmatrix}\Gamma_0 f & \Gamma_1 f\end{pmatrix}^T : f \in \mathrm{dom}\, \widetilde{A}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}), \tag{2.6}$$

*(писатимемо* $A_\Theta := \widetilde{A}$*). При цьому виконуються наступні співвідношення:*

1. $(A_\Theta)^* = A_{\Theta^*}$;
2. $A_{\Theta_1} \subseteq A_{\Theta_2} \Leftrightarrow \Theta_1 \subseteq \Theta_2$;
3. $A_\Theta \subseteq (A_\Theta)^* \Leftrightarrow \Theta \subseteq \Theta^*$, *зокрема* $A_\Theta = (A_\Theta)^* \Leftrightarrow \Theta = \Theta^*$;
4. $A_{\Theta_1}$ *і* $A_{\Theta_2}$ *диз'юнктні* $\Leftrightarrow \Theta_1 \cap \Theta_2 = \{0\}$;
5. $A_{\Theta_1}$ *і* $A_{\Theta_2}$ *трансверсальні* $\Leftrightarrow \Theta_1 + \Theta_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

## 2.3 Функція Вейля

Введемо поняття $\gamma$-поля і функції Вейля симетричного оператора з [33], що дозволяють досліджувати спектральні питання теорії розширень.

**Означення 2.9.** Нехай $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — гільбертові простори над полем $\mathbb{C}$. Позначимо через $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ множину лінійних обмежених операторів з $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ з областю визначення $\mathfrak{H}_1$. Зокрема, якщо $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, покладемо $\mathcal{B}(\mathfrak{H}) = \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$.

**Означення 2.10.** Нехай $A$ — симетричний оператор в $\mathfrak{H}$, $\widetilde{A} = \widetilde{A^*} \in \mathrm{Ext}_A$ і $\mathcal{H}$ — деякий гільбертів простір, для якого $\dim \mathcal{H} = n_\pm(A)$. Оператор-функцію $\gamma : \rho(\widetilde{A}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ називають $\gamma$-полем оператора $A$, що відповідає розширенню $\widetilde{A}$, якщо:

1. $\gamma(\lambda)$ ізоморфно відображає $\mathcal{H}$ на $\mathfrak{N}_\lambda$ при всіх $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$;
2. справджується тотожність:

$$\gamma(\lambda) = U_{\zeta,\lambda}(\zeta) := [I + (\lambda - \zeta)(\widetilde{A} - \lambda)^{-1}]\gamma(\zeta), \qquad \lambda, \zeta \in \rho(\widetilde{A}).$$

**Лема 2.11.** *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *— гранична трійка для оператора* $A^*$, $A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0$. *Тоді:*

1. *при кожному* $\lambda \in \rho(A_0)$ *справедливим є розкладення*

$$\mathrm{dom}\, A^* = \mathrm{dom}\, A_0 \dotplus \mathfrak{N}_\lambda, \qquad \lambda \in \rho(A_0);$$

2. *оператор-функція*

$$\gamma(\lambda) := (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(A_0)$$

*визначена коректно і голоморфна в $\rho(A_0)$ із значеннями в $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{N}_\lambda)$;*

3. *$\gamma(\lambda)$ є $\gamma$-полем оператора $A$, що відповідає розширенню $A_0$;*

4. *справеджується тотожність*

$$\gamma(\bar{\lambda})^* = \Gamma_1(A_0 - \lambda)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(A_0).$$

**Пропозиція 2.12.** *Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — гранична трійка для оператора $A^*$ і $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тоді сукупність $\Pi_0^B = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^B, \Gamma_1^B\}$, де*

$$\Gamma_0^B = B\Gamma_0 - \Gamma_1, \qquad \Gamma_1^B = \Gamma_0,$$

*також є граничною трійкою для оператора $A^*$.*

**Означення 2.13.** Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — гранична трійка для оператора $A^*$. Оператор-функція $M(\cdot)$, що визначена рівністю

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \qquad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \quad \lambda \in \rho(A_0),$$

називається функцією Вейля оператора $A$, що відповідає граничній трійці $\Pi$.

**Теорема** 2.14. *Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — гранична трійка для оператора $A^*$, $M(\cdot)$ — відповідна функція Вейля. Тоді:*

1. *$M(\cdot)$ коректно визначена та голоморфна в $\rho(A_0)$ як оператор-функція із значеннями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$;*

2. *для всіх $\lambda, \zeta \in \rho(A_0)$ справджується тотожність*

$$M(\lambda) - M(\zeta)^* = (\lambda - \bar{\zeta})\gamma(\zeta)^*\gamma(\lambda), \qquad \lambda, \zeta \in \rho(A_0);$$

3. *$M(\cdot)$ є $R[\mathcal{H}]$-функцією та задовольняє умові*

$$0 \in \rho(\operatorname{Im} M(\lambda)), \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-; \tag{2.7}$$

4. *в кожній точці $\lambda \in \rho(A_0)$ існує (в рівномірній топології) похідна $M'(\lambda) := dM/d\lambda$ і*

$$M'(\lambda) = \gamma^*(\bar{\lambda})\gamma(\lambda).$$

*Якщо при цьому $\lambda \in \rho(A_0) \cap \mathbb{R}$, то $0 \in \rho(M'(\lambda))$, тобто оператор $M'(\lambda)$ є додатно визначеним.*

**Теорема** 2.15. *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *— гранична трійка для оператора* $A^*$, $M(\cdot)$ *— відповідна функція Вейля. Тоді справедливими є співвідношення:*

$$\lim_{y\uparrow\infty} y \cdot \mathrm{Im}(M(iy)h, h) = \infty, \qquad h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \tag{2.8}$$

$$s - \lim_{y\uparrow\infty} \frac{M(iy)}{y} = 0. \tag{2.9}$$

**Означення 2.16.** Нехай $A^{(1)}$ і $A^{(2)}$ — симетричні оператори в $\mathfrak{H}^{(1)}$ і $\mathfrak{H}^{(2)}$ відповідно, $\Pi^{(j)} = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^{(j)}, \Gamma_1^{(j)}\}$ — гранична трійка для $A^{(j)*}$, $j \in \{1, 2\}$. Граничні трійки $\Pi^{(1)}$ і $\Pi^{(2)}$ називають унітарно еквівалентними, якщо існує ізометричне відображення $U$ простору $\mathfrak{H}^{(1)}$ на $\mathfrak{H}^{(2)}$ таке, що

$$UA^{(1)*} = A^{(2)*}U, \qquad U \operatorname{dom} A^{(1)*} = \operatorname{dom} A^{(2)*}, \tag{2.10}$$

$$\Gamma_k^{(1)} = \Gamma_k^{(2)}U, \qquad k \in \{0, 1\}. \tag{2.11}$$

**Теорема** 2.17. *Нехай* $\mathcal{H}$ *— сепарабельний гільбертів простір,* $n := \dim \mathcal{H} \leq \infty$, $M \in R[\mathcal{H}]$ *і виконуються умови* (2.8), (2.9) *і* (2.7). *Тоді існує гільбертів простір* $\mathfrak{H}$, *простий щільно заданий оператор* $A$ *в* $\mathfrak{H}$ *з рівними індексами дефекту* $(n, n)$ *і гранична трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *такі, що* $M(z)$ *є функцією Вейля оператора* $A$, *що відповідає граничній трійці* $\Pi$.

*Гранична трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *відновлюється за оператор-функцією* $M(z)$ *однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.*

Таким чином, Теорема 2.17, з урахуванням Теореми 2.14 (3) і Теореми 2.15, дає повний опис всіх функцій Вейля щільно заданих симетричних операторів в гільбертовому просторі.

**Теорема** 2.18. *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *— гранична трійка для* $A^*$, $M(\cdot)$ *— відповідна функція Вейля,* $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *і* $\lambda \in \rho(A_0)$. *Тоді правильними є наступні еквівалентності:*

$$\lambda \in \rho(A_\Theta) \Longleftrightarrow 0 \in \rho(\Theta - M(\lambda));$$

$$\lambda \in \sigma_i(A_\Theta) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_i(\Theta - M(\lambda)),\ i \in \{p, c, r\}.$$

*При цьому мають місце рівності*

$$\ker(A_\Theta - \lambda) = \gamma(\lambda) \ker(\Theta - M(\lambda)).$$

**Теорема** 2.19. *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *— гранична трійка для* $A^*$, $M(\cdot)$ *— відповідна функція Вейля,* $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, $A_\Theta$ *— відповідне власне розширення оператора* $A$. *Тоді:*

1. *формули*

$$\operatorname{dom}(A_\Theta) = \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma f \in \Theta\}, \qquad \Theta := \Gamma(\operatorname{dom} A_\Theta) \tag{2.12}$$

*встановлюють бієктивну відповідність між сукупністю всіх власних розширень $A_\Theta$ оператора $A$ і сукупністю замкнених лінійних відношень $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$;*

2. *якщо $\rho(A_\Theta) \neq \varnothing$, то для $z \in \rho(A_0) \cap \rho(A_\Theta)$ справедливою є рівність*

$$(A_\Theta - z)^{-1} = (A_0 - z)^{-1} + \gamma(z)(\Theta - M(z))^{-1}\gamma(\bar{z})^*; \tag{2.13}$$

3. *рівність (2.13) встановлює бієктивну відповідність між сукупністю резольвент власних розширень $A_\Theta$ оператора $A$, для яких $\rho(A_\Theta) \neq \varnothing$, і сукупністю замкнених лінійних відношень $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, для яких $\{z : 0 \in \rho(\Theta - M(z))\} \neq \varnothing$, при цьому для кожного $g \in \mathfrak{H}$ вектор-функція $u_z = (A_\Theta - z)^{-1}g$, $z \in \rho(A_\Theta)$ є розв'язком граничної задачі*

$$(A^* - z)f = g, \qquad \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta.$$

# РОЗДІЛ 3

# КАНОНІЧНІ СИСТЕМИ

## 3.1 Основні поняття

Канонічні системи представляють великий математичний інтерес, оскільки вони в точному розумінні є найбільш загальним класом симетричних операторів другого порядку.[23]

Канонічною системою називається диференціальне рівняння у формі

$$Ju'(x) = -zH(x)u(x), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Ця система розглядатиметься на відкритому, можливо нескінченному, інтервалі $x \in (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, в якій для матриці коефіцієнтів $H$ виконуються наступні умови:

1. $H(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;
2. $H \in L^1_{loc}(a,b)$;
3. $H(x) \geq 0$ майже для всіх $x \in (a,b)$;
4. $H(x) \neq 0$ майже для всіх $x \in (a,b)$.

Умова (2) означає, що елементи $H$ є локально інтегровними функціями, а умова (3) означає, що майже для всіх $x$ матриця $H(x)$ є симетричною і $v^*H(x)v \geq 0$ для всіх $v \in \mathbb{C}^2$.

Умова (4) також є влучною, оскільки якби існував би інтервал $(c,d)$, на якому $H = 0$ майже скрізь, то розв'язки просто залишалися б постійними на $(c,d)$, а вилучення інтервалу не впливало б на доповнення.

Параметр $z \in \mathbb{C}$ з (3.1) іноді називають спектральним параметром.

Диференціальне рівняння (3.1) має загальну структуру задачі про власне значення. А саме, якщо диференціальний оператор $\tau$ діє у $\mathbb{C}^2$ за правилом

$$(\tau u)(x) = -H^{-1}(x)Ju'(x),$$

тоді (3.1) потребує, щоб виконувалось $\tau u = zu$. Звичайно, щоб стверджувати це, необхідно визначити які умови роблять такий оператор самоспряженим, в яких гільбертових просторах діє такий оператор та що робити, якщо $H(x)$ не має оберненої матриці.

Оскільки $H(x)$ може бути нерегулярною, то потрібна деяка інтерпретація (3.1).

**Означення 3.1.** Функція $u : (a,b) \to \mathbb{C}^2$ називається локально (абсолютно) неперервною, якщо

$$u(x) = u(c) + \int_c^x f(t)\,dt \tag{3.2}$$

для деякої локально інтегровної функції $f : (a,b) \to \mathbb{C}^2$ і $c \in (a,b)$. Клас таких функцій позначається $AC(a,b)$.

Якщо рівність (3.2) виконується для деякого $c$, то вона виконується і для всіх $c \in (a,b)$.

Функція $u : (a,b) \to \mathbb{C}^2$ буде називатися розв'язком (3.1), якщо $u \in AC$ і (3.1) справджується майже всюди. Також, якщо $H_1(x) = H_2(x)$ майже всюди, то два рівняння будуть мати однакові у тому ж сенсі розв'язки.

Існування та єдиність такого розв'язку системи (3.1) показує наступна теорема, сформульована для загального, неоднорідного, випадку.

**Теорема** 3.2. *Нехай $c \in (a,b)$ і $f : (a,b) \to \mathbb{C}^2$ є локально інтегровною. Тоді для будь-якого $v \in \mathbb{C}^2$ задача*

$$Ju' = -zHu + f, \quad u(c) = v \tag{3.3}$$

*має єдиний розв'язок $u = u(x,z)$ на $x \in (a,b)$.*

*Більше того, $u(x,z)$ є спільно неперервними на $(x,z) \in (a,b) \times \mathbb{C}$. Для кожного фіксованого $x \in (a,b)$ компоненти $u(x,z)$ є цілими функціями $z \in \mathbb{C}$. Похідні $u_n(x,z) := \partial^n u(x,z)/\partial z^n$ самі по собі є абсолютно неперервними функціями на $x \in (a,b)$, і вони формально рзв'язують початкові задачі, що виникають в результаті диференціювання* (3.3) *відносно $z$, як*

$$\begin{aligned}
Ju_1' &= -zHu_1 - Hu_0,\ u_1(c) = 0,\\
Ju_2' &= -zHu_2 - 2Hu_1,\ u_2(c) = 0,\\
&\dots\\
Ju_n' &= -zHu_n - nHu_{n-1},\ u_n(c) = 0.
\end{aligned}$$

Якщо ж $f = 0$, то твердження про єдиність передбачає, що множина розв'язків $u$ рівняння (3.1) є двовимірним векторним простором.

Матрицею переходу $T$ називається матричний розв'язок, що приймає значення в $\mathbb{C}^{2\times 2}$ однорідного рівняння

$$JT' = -zHT \tag{3.4}$$

з початковою умовою $T(c) = I$. Таким чином, $T$ залежить від $x, c \in (a,b)$ і $z \in \mathbb{C}$ і позначається $T(x,c;z)$. При цьому, якщо другий аргумент відсутній, то вважається, що

$c = 0$.

**Теорема** 3.3. *Зафіксуємо $x, c \in (a, b)$, $x \geq c$. Тоді матриця переходу $T(z) = T(x, c; z)$ має наступні властивості як функція від $z \in \mathbb{C}$:*

1. *$T(z)$ — ціла;*
2. *$T(0) = I$ і $\det T(x, z) = 1$*
3. *$T(x, z) = T(x, c; z)T(c, z)$, де $T(x, z) = T(x, 0; z)$;*
4. *Якщо $\operatorname{Im} z \geq 0$, то*

$$i(T^*(z)JT(z) - J) \geq 0. \tag{3.5}$$

*Доведення.* За другою частиною Теореми 3.2, $T$ є цілим в $z$ для фіксованих $x$ і $c$. Стовпці $T$ розв'язують (3.1) як функції від $x$. Загалом, якщо $v \in \mathbb{C}^2$, то унікальний розв'язок з початковою умовою $u(c) = v$ задається як $u(x) = T(x, c; z)v$. Отже, як випливає з назви, матриця переходу оновлює значення розв'язків, а точніше, $T(x, c; z)$ пробігає значення аргументу від $c$ до $x$. Ця властивість характеризує матрицю переходу $T(x, c; z)$.

Оскільки $J^{-1} = -J$, маємо, що $T' = zJHT$, а матриця $JH$ має нульовий слід. Ця властивість еквівалентна тому, що $H$ симетрична. Звідси випливає, що $\det T(x)$ є постійним і, як початкова умова, $\det T = 1$, тому це справедливо для всіх $x \in (a, b)$. Зокрема, $T$ має обернену, а $T^{-1}$ нейтралізує дію $T$ і, оскільки $T$ приймає значення, пробігаючи від $c$ до $x$, то $T(x, c; z)^{-1} = T(c, x; z)$. Отже, $T$ є абсолютно неперервною функцією свого другого аргументу.

Зрозуміло, що $T(0) = I$, оскільки рівняння стає $T' = 0$ для $z = 0$. Якщо $z = t$ є дійсними, то $T(x, c; t)$ є розв'язком задачі Коші з дійсними коефіцієнтами та дійсними початковими умовами, тому приймає дійсні значення.

Залишилося встановити (3.5). Насамперед, оскільки $J^* = -J$, то спряжене від $JT' = -zHT$ дає $-T^{*\prime}J = -\bar{z}T^*H$. Позначимо $z = t + iy$, $y \geq 0$, і розглянемо

$$\frac{d}{dx}(T^*(x, c; z)JT(x, c; z)) = (\bar{z} - z)T^*HT = -2iyT^*HT.$$

Інтегрування цього рівняння показує, що ліва частина (3.5) дорівнює $2y\int_c^x T^*HT\,ds$ і є додатно визначена матриця, як було заявлено. □

Якщо задана матрична функція $T(z)$ має властивості, зазначені в теоремі, то на інтервалі $(c, x)$ буде канонічна система. Іншими словами, на такому проміжку буде функція коефіцієнтів $H$ така, що $T(z) = T(x, c; z)$. Більше того, після відповідної нормалізації, канонічна система однозначно визначається $T(z)$. Варіант розрахунку, що був використаний в останньому доведенні, дає ще одну корисну тотожність.

**Теорема** 3.4 (Сталість Вронскіану).

$$T^T(x)JT(x) = J, \quad T(x) \equiv T(x, c; z).$$

*Як наслідок, вронскіан* $W(v, w) \equiv v^T(x)Jw(x)$ *є сталим для будь-яких двох розв'язків* $v$, $w$ *рівняння* $Ju' = -zHu$.

*Доведення.* Перша тотожність випливає з

$$(T^T JT)' = -(JT')^T T + T^T JT' = z(HT)^T T - zT^T HT = 0.$$

Аналогічно для останнього виразу:

$$(v^T(x)Jw(x))' = -(Jv'(x))^T + v^T(x)Jw'(x) = zv^T(x)Hw(x) - zv^T(x)Hw(x) = 0.$$

□

## 3.2 Сингулярні інтервали

**Означення 3.5.** Точка $x \in (a, b)$ називається сингулярною, якщо знайдуться $\delta > 0$ і вектор $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ такі, що $H(t)v = 0$ майже для всіх $|t - x| < \delta$. В іншому випадку точка $x \in (a, b)$ називається регулярною.

Множина $S$ сингулярних точок є відкритою, а її компоненти зв'язності $(c, d)$ називаються сингулярними інтервалами.

Відкритість множини $S$ одразу випливає з означення. Можна записати $S = \bigcup(c_j, d_j)$ як зліченне об'єднання відкритих інтервалів, що не перетинаються, які є сингулярними інтервалами, визначеними у 3.5.

Нехай тепер $x \in (a, b)$ — сингулярна точка. Оскільки $H \geq 0$ і $H \neq 0$ майже скрізь на $(x - \delta, x + \delta)$, ця функція може бути представлена у вигляді $H(t) = h(t)P_\alpha$ на цьому інтервалі майже скрізь для деякого $\alpha \in [0, \pi)$ та деякої функції $h \in L^1(x - \delta, x + \delta)$, $h > 0$, де

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} = e_\alpha e_\alpha^*, \quad e_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

позначає проекцію на $e_\alpha$. Ті ж зауваження стосуються всього сингулярного інтервалу, якому належить $x$.

**Означення 3.6.** Кут $\alpha$ називається типом сингулярного інтервалу $(c, d)$.

Розв'язання (3.1) через сингулярний інтервал $(c, d)$ типу $\alpha$ дає більше розуміння сенсу Означення 3.5. Тож нехай $H(x) = h(x)P_\alpha \equiv h(x)P$ на $(c, d)$. Оскільки лише скалярна $h$ залежить від $x$, то будь-які дві матриці $JH(x)$, $JH(x')$ є комутативними, тому рівняння $u' = zJHu$ має розв'язок

$$u(x) = e^{z\left(\int\limits_c^x h(t)\,dt\right)JP} u(c).$$

Розкладемо останнє за степенями. Отримаємо, що $(JP)^2 = JPJP = 0$, оскільки $J$ діє як обертання на 90 градусів, що дає $PJP = 0$. Таким чином, експоненціальний ряд для $u(x)$ закінчується після перших двох доданків:

$$u(x) = \left(1 + z\left(\int\limits_c^x h(t)\,dt\right) JP\right) u(c).$$

Зокрема, $u(d) = (1 + zJH)u(c)$ з $H = \int_c^d H(x)\,dx$, але це теж саме, що і зробити один крок рекурсії в у різницевому рівнянні

$$J(u_{n+1} - u_n) = -zH_n u_n, \tag{3.7}$$

аналогічному (3.1), якщо $H_n = H$.

З більш абстрактної точки зору, властивістю матриці переходу $T = I + zJH$ через сингулярний інтервал є її поліноміальна залежність від $z$, причому ступеня 1. Це випливає з (3.7) тоді, як диференціальні рівняння зазвичай призводять до складніших функцій $z$.

Отже, канонічна система через сингулярний інтервал імітує різницеве рівняння. Здатність канонічної системи робити це має вирішальне значення. Вже було згадано результат, що будь-які спектральні дані можуть бути реалізовані канонічною системою, і ці спектральні дані можуть виходити з різницевого рівняння, тому є необхідність варіанту їх моделювання.

Сингулярні інтервали також використовуються для реалізації граничних умов, і вони відповідають за багатозначну частину відношень, які асоціюються з канонічними системами.

## 3.3 Гільбертів простір $L^2$

У наступному розділі буде розглянуто самоспряжені реалізації (3.1) та їх спектральну теорію і з'явиться необхідність у гільбертовому просторі, в якому вони діють, і відповідним простором для цього є $L^2_H(a, b)$, визначений наступним чином. Припустимо, що $H(x)$

задовольняє умови для матриці коефіцієнтів канонічної системи. Нехай

$$\mathcal{L} = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C}^2 : f \text{ є вимірною }, \int\limits_a^b f^*(x)H(x)f(x)\,dx < \infty \right\},$$

тоді

$$||f|| = \left( \int\limits_a^b f^* H f \, dx \right)^{1/2}, \quad f \in \mathcal{L}, \tag{3.8}$$

і $L^2_H(a,b)$ визначається як $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, де $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L} : ||f|| = 0\}$.

Це є звичайною процедурою визначення просторів $L^p$, за винятком, того, що функції приймають значення в $\mathbb{C}^2$, а не в $\mathbb{C}$. $L^2_H$ — сепарабельний, нескінченновимірний простір Гільберта. Насправді, відображення

$$V : L^2_H(a,b) \to L^2_I(a,b), \quad (Vf)(x) = H^{1/2}(x)f(x),$$

де $H^{1/2}(x)$ визначено як єдиний додатний квадратний корінь з $H(x)$, що забезпечує вкладання $L^2_H$ в $L^2_I$, де $I$ — одинична матриця $2 \times 2$. А, оскільки $L^2_I(a,b) \cong L^2(a,b) \oplus L^2(a,b)$, то всі питання можна звести до класичного простору $L^2$.

Оскільки $f^*Hf = (H^{1/2}f)^* H^{1/2} f$, то функції $f, g$ будуть являти собою один і той самий елемент в $L^2_H$ тоді і тільки тоді, коли $H(x)f(x) = H(x)g(x)$ майже для всіх $x$, але якщо $H(x)$ має ядро для деякого $x$ таке, що $H(x)v(x) = 0$, $v(x) \neq 0$, то це просто означає, що $f(x) - g(x) = c(x)v(x)$ для цього $x$. Зокрема, цілком можливо, що $f \in L^2_H$ має декілька неперервних представників, не рівних як функції.

Корисним є наступний факт.

**Лема 3.7.** *Якщо $f \in L^2_H(a,b)$, то $Hf \in L^1_{loc}(a,b)$.*

*Доведення.* Це випливає з нерівності Гельдера, якщо взяти додатний квадратний корінь $H^{1/2}(x)$ і записати $Hf = H^{1/2}(H^{1/2}f)$. Тоді обидва $H^{1/2}$ і $H^{1/2}f$ належать $L^2_{loc}(a,b)$ і їх добуток $Hf \in L^1_{loc}(a,b)$. □

## 3.4 Мінімальні і максимальні відношення канонічних систем

В цьому розділі буде розглянуто питання як канонічна система

$$Ju'(x) = -zH(x)u(x), \quad x \in (a,b)$$

генерує самоспряжені оператори у гільбертовому просторі $L^2_H(a,b)$. Ці оператори мають діяти як $-H^{-1}Jf'$ на функції $f$ з їх областей визначення і необхідно, щоб $H(x)$ мала обернену. Цієї проблеми можна уникнути, перемістивши $H$ назад. Припустимо, є пара $f, g \in L^2_H$ і $g = \tau f$ як результат застосування оператора над $f$, який необхідно побудувати. Формально це можна записати як

$$Jf'(x) = -H(x)g(x). \tag{3.9}$$

Загалом ця умова визначатиме лінійні відношення, а не оператор.

Лінійні оператори $T$ стають особливими відношеннями після ототожнення їх зі своїми графіками $\{(x, Tx)\}$. І навпаки, відношення можна вважати операторами, за винятком того, що $f \in \mathcal{H}$ може мати кілька зображень. Відношення $\mathcal{T}$ є оператором, якщо $(f, g_1), (f, g_2) \in \mathcal{T}$ означає, що $g_1 = g_2$. За лінійністю це еквівалентно умові, що $(0, g) \in \mathcal{T}$ тоді і тільки тоді, коли $g = 0$.

Визначимо максимальне відношення $\mathcal{T}$ канонічної системи як сукупність усіх пар $(f, g)$, для яких виконується (3.9):

$$\mathcal{T} = \{(f, g) : f, g \in L^2_H(a, b), f \text{ має представника } f_0 \in AC \text{ такого, що}$$
$$Jf_0'(x) = -H(x)g(x) \text{ майже для всіх } x \in (a, b)\}. \tag{3.10}$$

Останнє чітко визначає лінійний підпростір, або відношення.

Як вже було показано, $f \in L^2_H$ може мати декілька неперервних представників, тому не можна реально очікувати, що $f_0$ однозначно визначається $f$. Тому особлива увага буде приділятися розрізненню елементів простору Гільберта (класів еквівалентності функцій) та функцій.

Хоча $f_0$ з (3.10) не має визначатися функцією $f$, але $f_0$ визначається парою $(f, g)$, якщо не розглядається тривіальний сценарій, де $(a, b)$ є лише одиничним сингулярним інтервалом. Отже, необхідне припущення: інтервал $(a, b)$ містить щонайменше одну регулярну точку. Це діятиме відтепер, якщо прямо не зазначено інше. Якщо $(a, b)$ — єдиний сингулярний інтервал, то все можна опрацювати явно. Більше того, багато результатів потребують модифікації в цьому випадку, тому набагато зручніше просто виключати цей тривіальний сценарій з розвитку загальної теорії.

Повернемося до твердження, що якщо $(f, g) \in \mathcal{T}$, то $f_0$ з (3.10) однозначно визначається. Дійсно, це показує інтегрування $Jf_0' = -Hg$:

$$f_0(x) = f_0(c) + J \int_c^x H(t)g(t)\, dt. \tag{3.11}$$

Слід зауважити, що тут $H(t)g(t)$ може змінюватися лише на нульовому наборі, якщо обрати іншого представника $g$, тому інтеграл визначається елементом гільбертового простору

$g \in L^2_H$. Звідси випливає, що два таких представники $f$ могли б відрізнятись лише постійною функцією $v$, але тоді матимемо $H(x)v = 0$ майже для кожного $x$, інакше вони б не представляли б один і той самий елемент гільбертового простору. Якщо ж $v \neq 0$, тоді це означає, що $(a, b)$ — сингулярний інтервал, який був виключений з розгляду.

**Лема 3.8.** *Елемент $(f, g) \in \mathcal{T}$ максимального відношення однозначно визначає абсолютно неперервну функцію $f_0 : (a, b) \to \mathbb{C}^2$ з наступними двома додатковими властивостями:*

1. *$f_0 \in L^2_H(a, b)$, і він є представником елемента $f$;*
2. *$Jf_0' = -Hg$.*

Індекс у $f_0$ означає, що він є представником $f$, який визначається не лише самим $f$, але й парою $(f, g) \in \mathcal{T}$.

Приклад, коли $f_0$ дійсно не визначається просто $f$, можна побачити, розглянувши випадок, де $(a, b)$ — сингулярний інтервал. Покладемо $a = 0$, $b = 1$, $H(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді $(f, g) \in \mathcal{T}$ тоді і тільки тоді, коли $f_{0,2}' = g_1$, $f_{0,1}' = 0$. З точки зору простору Гільберта, важливий лише перший компонент функції. Таким чином, ми можемо прийняти будь-яку абсолютно неперервну функцію як $f_{0,2}$, і з цього випливає, що $g \in L^2_H(0, 1)$ є довільною. Зрозуміло, що $f_{0,1}$ має бути постійною. Отже, позначаючи $e_1$ перший одиничний вектор, знаходиться наступне

$$\mathcal{T} = L(e_1) \oplus L^2_H(0, 1) = \{(f, g) : f(x) = ce_1, g \in L^2_H(0, 1)\}. \tag{3.12}$$

Далі наведені необхідні визначення для відношень.

**Означення 3.9.** Нехай $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ є відношенням. $\mathcal{T}$ називається замкненим, якщо $\mathcal{T}$ є замкненим підпростором $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Замиканням $\overline{\mathcal{T}}$ відношення $\mathcal{T}$ називається замикання підпростору $\mathcal{T}$.

Області визначення та значень, ядро і багатозначна частина відношення $\mathcal{T}$ визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \mathcal{T} &= \{f \in \mathcal{H} : (f, g) \in \mathcal{T} \text{ для деякого } g\} & \ker \mathcal{T} &= \{f \in \mathcal{H} : (f, 0) \in \mathcal{T}\} \\ \operatorname{ran} \mathcal{T} &= \{g \in \mathcal{H} : (f, g) \in \mathcal{T} \text{ для деякого } f\} & \operatorname{mul} \mathcal{T} &= \{g \in \mathcal{H} : (0, g) \in \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

Оберненим до $\mathcal{T}$ є відношення

$$\mathcal{T}^{-1} = \{(g, f) : (f, g) \in \mathcal{T}\},$$

а спряжене відношення до $\mathcal{T}$ визначається як

$$\mathcal{T}^* = \{(h,k) : \langle h, g\rangle = \langle k, f\rangle \ \text{ для всіх } (f,g) \in \mathcal{T}\}.$$

Відношення $\mathcal{T}$ називається симетричним $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$, якщо, і самоспряженим, якщо $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

Тож, на відміну від операторів, відношення завжди мають замикання, обернені до них та унікальні спряження.

Для того, щоб знайти спряження $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}^*$ максимального відношення $\mathcal{T}$ канонічної системи, необхідно визначити предмінімальне відношення:

$$\mathcal{T}_{00} = \{(f,g) \in \mathcal{T} : f_0(x) \text{ має компактний носій на } (a,b)\}.$$

**Означення 3.10.** Замикання $\mathcal{T}_0 = \overline{\mathcal{T}_{00}}$ лінійного відношення $\mathcal{T}_{00}$ називають мінімальним.

Неважко помітити, що $\mathcal{T}_{00} \subseteq \mathcal{T}^*$. Дійсно, для фіксованого $(f,k) \in \mathcal{T}_{00}$ і довільного $(h,k) \in \mathcal{T}$ покажемо, що $\langle f, k\rangle = \langle g, h\rangle$, або

$$\int\limits_a^b f^*(x)H(x)k(x)\,dx = \int\limits_a^b g^*(x)H(x)h(x)\,dx.$$

Підключаючи до цього $Hk = -Jh_0'$, $Hg = -Jf_0'$, отримаємо

$$\int\limits_a^b \left(f_0^*(x)Jh_0'(x) + f^{*\prime}{}_0(x)Jh_0(x)\right)\,dx = 0,$$

що є очевидним, оскільки $f_0$ є нулем близько до $a$ і $b$.

**Пропозиція 3.11.** $\mathcal{T}_{00}^* \subseteq \mathcal{T}$

*Доведення.* Нехай $(f,g) \in \mathcal{T}_{00}^*$ і функція $f_1$ визначається як

$$f_1(x) = J\int\limits_c^x H(t)g(t)\,dt,$$

для деякого фіксованого $c \in (a,b)$. Тоді $f_1$ є абсолютно неперервною і $Jf_1' = -Hg$, але її квадрат не обов'язково є інтегрованим, тобто $f_1$ може не бути елементом гільбертового простору.

Нехай $(h,k) \in \mathcal{T}_{00}$ є довільним. Інтегрування за частинами показує, що

$$\langle h, g\rangle = \int\limits_a^b h_0^*(x)H(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b h_0^*(x)Jf_1'(x)\,dx = \int\limits_a^b k^*(x)H(x)f_1(x)\,dx.$$

Функції $h_0$ і $Hk$ мають компактний носій, тому факт, що $f_1$ може не лежати в $L^2_H$, не може зробить останній інтеграл розбіжним. З цієї ж причини інтегрування частинами не вносить граничні умови.

З іншого боку, $\langle h, g\rangle = \langle k, f\rangle = \int_a^b k^* H f$, тому

$$\int\limits_a^b k^*(x)H(x)(f_1(x) - f(x))\,dx = 0 \quad \forall k \in \operatorname{ran}(\mathcal{T}_{00}). \tag{3.13}$$

Потрібно звернути увагу, що $k \in L^2_H(a,b)$ буде точно в $\operatorname{ran}\mathcal{T}_{00}$, якщо він задовольняє наступним двом умовам: (1) $Hk$ має компактний носій; (2) $\int_a^b HK = 0$. Оскільки $Hk$ локально інтегрується та має компактний носій, останній інтеграл є визначеним. Позначимо через $X$ лінійний підпростір $L^2_H$, визначений умовою (1), і розглянемо на $X$ функціонали

$$F_j(k) = e_j^* \int\limits_a^b H(x)k(x)\,dx, \quad F(k) = \int\limits_a^b (f_1(x) - f(x))^* H(x)k(x)\,dx.$$

Тепер 3.13 можна перефразувати як твердження, що якщо $F_1(k) = F_2(k) = 0$ для $k \in X$, то $F(k) = 0$. Тоді $F$ має бути лінійною комбінацією $F_1$ і $F_2$. Отже, існує вектор $v \in \mathbb{C}$ такий, що

$$\int\limits_a^b (f_1(x) - f(x) - v)^* H(x)K(x)\,dx = 0$$

для всіх $k \in X$. Оскільки $f_1(x) - f(x) - v$ локально в $L^2_H$, це можливо лише в тому випадку, коли $H(x)(f_1(x) - f(x) - v) = 0$ майже скрізь. Отже, $f$ має абсолютно неперервного представника $f_1(x) - v$, а $J(f_1 - v)' = -Hg$ за побудовою $f_1$. Це говорить про те, що $(f,g) \in \mathcal{T}$, що доводить пропозицію. $\square$

**Пропозиція 3.12.** *Нехай $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ є відношенням. Тоді:*

1. *$\mathcal{T}^*$ є замкненим;*

2. *$\mathcal{T}^{**} = \overline{\mathcal{T}}$;*

3. *$\overline{\mathcal{T}}^* = \mathcal{T}^*$*

   **Теорема** 3.13.

1. *Максимальне відношення $\mathcal{T}$ є замкненим;*

*2. Мінімальне відношення $\mathcal{T}_0^* = \mathcal{T}$ є замкненим і симетричним, і $\mathcal{T}_0^* = \mathcal{T}$.*

*Доведення.* 1. Припустимо, що $(f_n, g_n) \in \mathcal{T}$, $(f_n, g_n) \to (f, g) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Необхідно довести, що $(f, g) \in \mathcal{T}$.

Переходячи до підпослідовності, можна припустити, що $H(x)f_{n,0}(x) \to H(x)f(x)$ поточково майже скрізь для представників із Леми 3.8. Також для кожного фіксованого $x \in (a, b)$ послідовність $f_{n,0}(x)$ повинна бути обмежена. Це випливає з того, що похідні $f'_{n,0} = JHg_n$ обмежені в $L^1(c, d)$ для будь-якої компактної підмножини $[c, d] \subseteq (a, b)$, тому, якщо б $|e \cdot f_{n,0}(x)|$ були великими для деякого напрямку $e \in \mathbb{C}^2$, $||e|| = 1$, то те саме було б справедливим для будь-якої компактної підмножини $(a, b)$, але це зробило б норму $f_n$ великою, оскільки $(a, b)$ не є а сингулярним інтервалом і, таким чином, $H(x)$ не може занулити $e$ скрізь.

Тож можна обрати підпослідовність таку, що в додаток $f_{n,0}(c) \to v$ для фіксованого $c \in (a, b)$, що був обраний заздалегідь. Тепер можна просто перейти до поточкової границі в

$$f_{n,0}(x) = f_{n,0}(c) + J \int_c^x H(t)g_n(t)\, dt.$$

Видно, що $f_{n,0}(x)$ сам збігається (не тільки після застосування $H(x)$), і його границя буде представляти f. Отже, був знайдений абсолютно неперервний представник $f$, який задовольняє $Jf' = -Hg$, отже $(f, g) \in \mathcal{T}$.

2. Зрозуміло, що спряжений оператор $\mathcal{T}_0$ є замкненим, а симетрія випливатиме з двох заявлених рівностей, тому їх достатньо довести. Раніше було показано, що $\mathcal{T}_{00} \subseteq \mathcal{T}^*$ і $\mathcal{T}_{00}^* \subseteq \mathcal{T}$ (Пропозиція 3.11), а спряження другого включення дає це $\mathcal{T}_{00}^{**} \supseteq \mathcal{T}^*$. А якщо взяти замикання першого включення і використати Пропозицію 3.12, то отримаємо $\overline{\mathcal{T}_{00}} = \mathcal{T}^* = \mathcal{T}_0$. Ще одне спряження дає останню рівність. □

Можна дати точніший опис мінімального відношення $\mathcal{T}_0$. Принаймні, як частина результату: $\mathcal{T}_0$ можна отримати, взявши замикання $\mathcal{T}_{00}$, яке було визначене як ті елементи максимального відношення, для яких $f_0$ має компактний носій.

**Означення 3.14.** Кінцеву точку $a$ називають регулярною, якщо $H \in L^1(a, c)$ для деяких (і тоді всіх) $c \in (a, b)$, і аналогічно для $b$.

Тут точки $a = -\infty$ і $b = \infty$ можуть бути звичайними кінцевими точками.

Визначення 3.14 дає Лему 3.15.

**Лема 3.15.** *Якщо $a$ є регулярною, то для будь-яких $(f, g) \in \mathcal{T}$ представлення $f_0$ має неперервне продовження на $[a, b)$, і $f_0 \in AC[a, b)$. Більше того, розв'язки однорідного рівняння $Ju' = -zHu$ мають ті ж самі властивості.*

*Для регулярної точки $b$ результати аналогічні.*

Вже відомо, що $f_0 \in AC(a,b)$ і це означає, що $f_0(x) = f_0(c) + \int_c^x h(t)\,dt$ для деякої $h \in L^1_{loc}(a,b)$. Твердження, що $f_0 \in AC[a,b)$, створює додаткове твердження, що $h \in L^1(a,c)$ для $c \in (a,b)$. Це означає, що $f_0$ має неперервне продовження до $x = a$, але не випливає з цієї властивості.

Ніякі зміни цих тверджень не потрібні у випадку $a = -\infty$, якщо дати розширеному інтервалу $[a,c) = [-\infty, c)$ його очевидну топологію.

*Доведення.* Нерівність Коші-Шварца показує, що для будь-якого $g \in L^2_H(a,c)$, маємо, що $Hg = H^{1/2}H^{1/2}g \in L^1(a,c)$, тож твердження для $f_0$ випливають з

$$f_0(x) = f_0(c) + J\int\limits_c^x H(t)g(t)\,dt.$$

Як і для розв'язків $u$ рівняння $Ju' = -zHu$, застосуємо теорію звичайних диференціальних рівнянь, узагальнену в Теоремі 3.2, до початкової задачі значення $u(a) = v$ для загального $v \in \mathbb{C}^2$, щоб підтвердити, що $u$ є абсолютно неперервними на $[a,b)$.

Початкова задача $Ju' = -zHu$, $u(-\infty) = v$ може бути записана як інтегральне рівняння $u(x) = v + zJ\int_{-\infty}^x H(t)u(t)\,dt$, і, якщо $H \in L^1(-\infty, c)$, то це можна розв'язати так само, як на обмеженому проміжку, за допомогою ітерації Пікарда. Або, можна провести перетворення, щоб зробити $a$ кінцевою точкою $A \in \mathbb{R}$, щоб взагалі уникнути цих питань. $\square$

**Лема 3.16.** *Нехай $(c,d) \subseteq (a,b)$, і жоден з $(a,c)$, $(d,b)$ не є порожнім інтервалом, що міститься в одному сингулярному інтервалі. Нехай $(h,k) \in \mathcal{T}_{(c,d)}$. Тоді існує $(f,g) \in \mathcal{T}$ з $f_0 = h_0$ на $(c,d)$, $f_0(x) = 0$ для $x \in (a,c)$ близько до $a$ і $x \in (d,b)$ близько до $b$.*

*Доведення.* Нехай $d < b$. Оскільки $d$ є регулярною кінцевою точкою $(c,d)$, застосовується Лема 3.15, тоді $h_0$ абсолютно неперервна на $(c,d]$. Потрібно знайти абсолютно неперервну функцію $f_0$ на $[d,b)$ таку, що $Jf_0' = -Hg$ для деяких $g \in L^2_H(d,b)$ і $f_0(d) = h_0(d)$, щоб зробити функцію абсолютно неперервною при з'єднанні двох частин. Також бажано, щоб $f_0(x) = 0$ для всіх великих $x$, і достатньо одного разу досягти цього значення, адже з цього моменту можна застосувати нульову функцію. Отже, щоб $f_0(d) = h_0(d)$ і $f_0(t) = 0$, оберемо $t \in (d,b)$ настільки великим, щоб $(d,t)$ не міститься в сингулярному інтервалі. Якщо все це сказати для $g$, то тепер потрібно знайти $g \in L^2_H(d,t)$ таке, що функція $f_0$ визначається як

$$f_0 = h_0(d) + J\int\limits_d^x H(s)g(s)\,ds$$

і задовольняє умові $f_0(t) = 0$. Це працює, якщо лінійне відображення

$$F : L^2_H(d,t) \to \mathbb{C}^2, \quad F(g) = \int\limits_d^t H(s)g(s)\,ds$$

є сюр'єктивним і легко зрозуміти, що це буде в тому випадку, якщо $(d,t)$ не міститься в сингулярному інтервалі, тому що діапазон $H(x)$ не може бути однаково рівним фіксованому одновимірному підпростору $\mathbb{C}^2$.

Нарешті, якщо також $c > a$, то застосовуємо ту саму процедуру зліва від $(c,d)$. □

**Теорема** 3.17. *Нехай* $(f,g),(h,k) \in \mathcal{T}$. *Тоді для* $f_0^*(x)Jh_0(x)$ *існують границі при* $x \to a+$ *і* $x \to b-$. *Більше того,*

$$\langle g,h\rangle - \langle f,k\rangle = f_0^* J h_0 \Big|_a^b. \tag{3.14}$$

Для цих меж будуть використані позначення $(f_0^*Jh_0)(a)$ і $(f_0^*Jh_0)(b)$. Якщо кінцева точка (скажімо, $a$) є регулярною, то існування їх стає безпосереднім наслідком Леми 3.15, і в цьому випадку $(f_0^*Jh_0)(a) = f_0^*(a)Jh_0(a)$. Тут використовуються наводить позначення $f_0(a)$, $h_0(a)$ для неперервних продовжень цих функцій до $x = a$.

*Доведення.* Обидва твердження випливають із наступного розрахунку:

$$\begin{aligned}
\langle g,h\rangle - \langle f,k\rangle &= \lim_{\substack{\alpha\to a+\\ \beta\to b-}} \int\limits_\alpha^\beta \left(g^*(x)H(x)h_0(x) - f_0^*(x)H(x)k(x)\right)dx \\
&= \lim_{\substack{\alpha\to a+\\ \beta\to b-}} \int\limits_\alpha^\beta \left(f_0^{*\prime}(x)Jh_0(x) - f_0^*(x)Jh_0'(x)\right)dx \\
&= \lim_{\substack{\alpha\to a+\\ \beta\to b-}} f_0^* J h_0 \Big|_\alpha^\beta.
\end{aligned}$$

□

# РОЗДІЛ 4

# ГРАНИЧНІ ТРІЙКИ ДЛЯ КАНОНІЧНИХ СИСТЕМ

## 4.1 Граничні трійки для канонічних систем в регулярному випадку

Нехай гамільтоніан $H$ задовольняє умові

$$H \in L^1(a, b). \tag{4.1}$$

Тоді за Теоремою 3.17 для будь-якої пари $\{f, g\} \in \mathcal{T}$ і представника $f_0 \in AC$ існують границі

$$f_0(a+) = \lim_{x \downarrow a} f_0(x), \quad f_0(b-) = \lim_{x \uparrow a} f_0(x) \tag{4.2}$$

**Теорема** 4.1. *Нехай виконано умову* (4.1) *і відображення* $\Gamma_0, \Gamma_1 : \mathcal{T} \to \mathbb{C}^2$ *задано рівностями*

$$\Gamma_0 f = \begin{pmatrix} f_{01}(a) \\ f_{01}(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} -f_{02}(a) \\ f_{02}(b) \end{pmatrix} \quad (f, g) \in \mathcal{T}, \; f_0 \in f. \tag{4.3}$$

*Тоді сукупність* $(\mathbb{C}^2, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *утворює граничну трійку для* $\mathcal{T}$.

*Доведення.* В силу Теореми 3.2 існують функції $\widetilde{u}, \; \widetilde{v} \in \operatorname{dom} \mathcal{T}$ такі, що

$$\widetilde{u}_{01}(a) = 1 \qquad \widetilde{v}_{01}(a) = 0 \tag{4.4}$$

$$\widetilde{u}_{02}(a) = 0 \qquad \widetilde{v}_{02}(a) = 1. \tag{4.5}$$

В силу Леми 3.16 функції $\widetilde{u}, \; \widetilde{v}$ можна змінити на інтервалі $(c, d)$ так, що $u_0$ і $v_0$ перетворюються на нуль на інтервалі $(c, d)$.

Аналогічно, в силу Теореми 3.2 існують функції $h, \; k \in \operatorname{dom} \mathcal{T}$ такі, що

$$h_{01}(b) = 1 \qquad k_{01}(a) = 0 \tag{4.6}$$

$$h_{02}(b) = 0 \qquad k_{02}(a) = 1. \tag{4.7}$$

Користуючись Лемою 3.16, змінимо функції $h_0, \; k_0$ біля точки $a$ так, що $h_0$ і $k_0$ перетворюються на нуль в околі точки $a$. З (4.4) і (4.6) випливає, що відображення $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}$ : $\mathcal{T} \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ є сюр'єктивним.

Тотожність (2.4) випливає з (3.14). $\square$

У подальшому ми вводимо до розгляду матрицю $W(x,\lambda) = T(x,\lambda)^T$ і її блочной вигляд

$$W(x,\lambda) = \begin{pmatrix} w_{11}(x,\lambda) & w_{12}(x,\lambda) \\ w_{21}(x,\lambda) & w_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

**Теорема** 4.2. *Функція Вейля, що відповідає граничній трійці* (4.3) *має вигляд*

$$M(b,\lambda) = \begin{pmatrix} -w_{11}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1} & w_{12}(b,\lambda)^{-1} \\ w_{21}(b,\lambda) - w_{22}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1}w_{11}(b,\lambda) & w_{22}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

*а відповідне $\gamma$-поле має вигляд*

$$\gamma(\lambda) = W(\cdot,\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w_{11}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1} & w_{12}(b,\lambda)^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

*Доведення.* Дефектний простір $\mathfrak{N}_\lambda(T_0)$ складається з функцій

$$f(\cdot,\lambda) = W(\cdot,\lambda) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \text{де } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}. \tag{4.11}$$

Застосовуючи оператори $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ до $f(\cdot,\lambda)$, отримаємо

$$\Gamma_0 \widehat{f}(\cdot,\lambda) = \Phi_0(\lambda) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_{11}(b,\lambda) & w_{12}(b,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 f(\cdot,\lambda) = \Phi_1(\lambda) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ w_{21}(b,\lambda) & w_{22}(b,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо

$$\gamma(\lambda) = W(\lambda)\Phi_0(\lambda)^{-1} = W(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w_{11}(b,\lambda)w_{12}(b,\lambda)^{-1} & w_{12}(b,\lambda)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$M(b,\lambda) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda)^{-1},$$

що призводить до (4.9), (4.10). □

## 4.2 Теорія Вейля для канонічних систем

В роботі [28] досліджувалась поведінка коефіцієнта Вейля для оператора Штурма-Ліувілля на відрізку $[0,b]$, якщо $b \to \infty$. Зокрема, це дозволило показати, що спектральна задача для оператора Штурма-Ліувілля на прямій завжди має розв'язки в просторі $L^2(0,\infty)$.

В цьому розділі буде проведено аналогічне дослідження для системи (3.9) на півосі.

Розглянемо лінійне відношення $A(b,h)$, що продовжується в $L^2_H(0,b)$ системою (3.1) і граничними умовами

$$f_1(0) = f_2(0) = f_2(b) + hf_1(b) = 0. \tag{4.12}$$

З формули випливає, що спряжене лінійне відношення $A(b,h)^*$ задається системою і граничною умовою

$$f_2(b) + hf_1(b) = 0. \tag{4.13}$$

Гранична трійка для $A(b,h)^*$ задається рівностями

$$\Gamma_0^{b,h} f = f_1(0), \quad \Gamma_1^{b,h} f = f_2(0). \tag{4.14}$$

Дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda(A(b,h))$ складається з вектор-функцій, пропорційних

$$\Psi(x,\lambda) = W^T(x,\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ -m(\lambda,b,h)\end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

де коефіцієнт $m(\lambda,b,h)$ знаходиться з умови $\Psi_2(b,\lambda) + h\Psi_1(b,\lambda) = 0$, тобто

$$w_{12}(b,\lambda) - w_{22}(b,\lambda)m(\lambda,b,h) + h\{w_{11}(b,\lambda) - w_{21}(b,\lambda)m(\lambda,b,h)\} = 0.$$

Звідси знаходимо

$$m(\lambda,b,h) = \frac{w_{11}(b,\lambda)h + w_{12}(b,\lambda)}{w_{21}(b,\lambda)h + w_{22}(b,\lambda)}. \tag{4.16}$$

**Теорема** 4.3. *Нехай гранична трійка для* $A(b,h)^*$ *задана формулою* (4.14). *Тоді:*

1. *Відповідна функція Вейля співпадає з* $m(\lambda,b,h)$*, а* $\gamma$*-поле має вигляд*

$$\gamma(\lambda,b,h) = W(\cdot,\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ -m(\lambda,b,h)\end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

2. *При фіксованому* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *множина значень* $m(\lambda,b,h)$ *заповнює коло* $C_b(\lambda)$ *в* $\mathbb{C}$ *з центром*

$$\widetilde{m}_b(\lambda) = \frac{w_2(b,\lambda)^* J w_1(b,\lambda)}{w_2(b,\lambda)^* J w_2(b,\lambda)} \tag{4.18}$$

*і радіусом*

$$r_b(\lambda) = \left(2\operatorname{Im}\lambda \int_0^b w_2(x,\lambda)^* H(x) w_2(x,\lambda)\,dx\right)^{-1}. \tag{4.19}$$

3. *Круг* $K_b(\lambda)$*, обмежений колом* $C_b(\lambda)$ *характеризується нерівністю*

$$\int_0^b \gamma(x,\lambda,b,h)^* H(x)\gamma(x,\lambda,b,h) \le \frac{\operatorname{Im} m(\lambda,b,h)}{\operatorname{Im}\lambda}. \tag{4.20}$$

*Доведення.* (1) випливає з (4.14) і (4.15), оскільки

$$\Gamma_0\Psi(\cdot,\lambda) = 1, \quad \Gamma_1\Psi(\cdot,\lambda) = m(\lambda,b,h).$$

Зауважимо, що відповідне $\gamma$-поле співпадає з $\Psi(\cdot,\lambda)$, тобто в силу (4.15) виконується (4.17).

З рівності отримуємо, що $m(\lambda,b,h)$ належить до кола

$$\int_0^b \begin{pmatrix} 1 & -m(\lambda,b,h)^* \end{pmatrix} H(x)W(x,\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -m(\lambda,b,h) \end{pmatrix} dx = \frac{\operatorname{Im} m(\lambda,b,h)}{\operatorname{Im}\lambda}. \tag{4.21}$$

Оскільки дробово-лінійне перетворення (4.16) переводить $h = -\dfrac{w_{22}(b,\lambda)}{w_{21}(b,\lambda)}$ в $\infty$, то $h = -\overline{\dfrac{w_{22}(b,\lambda)}{w_{21}(b,\lambda)}}$ переходить у центр кола $C_b(\lambda)$

$$\widetilde{m}_b(\lambda) = \frac{w_{12}(b,\lambda)w_{21}(b,\lambda)^* - w_{22}(b,\lambda)^* w_{11}(b,\lambda)}{w_{21}(b,\lambda)^* w_{22}(b,\lambda) - w_{22}(b,\lambda)^* w_{21}(b,\lambda)},$$

що співпадає з (4.18).

Радіус кола $C_b(\lambda)$ може бути знайдений з рівності

$$r_b(\lambda) = \left| \frac{w_2(b,\lambda)^* J w_1(b,\lambda)}{w_2(b,\lambda)^* J w_2(b,\lambda)} - \frac{w_{21}(b,\lambda)}{w_{22}(b,\lambda)} \right|. \tag{4.22}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &(w_{21}(b,\lambda)^* w_{12}(b,\lambda) - w_{22}(b,\lambda)^* w_{11}(b,\lambda))\, w_{22}(b,\lambda) \\ &\qquad - (w_{21}(b,\lambda)^* w_{22}(b,\lambda) - w_{22}(b,\lambda)^* w_{21}(b,\lambda))\, w_{21}(b,\lambda) \\ &\qquad\quad = -w_{22}(b,\lambda)^* (w_{11}(b,\lambda) w_{22}(b,\lambda) - w_{21}(b,\lambda) w_{12}(b,\lambda)) = -w_{22}(b,\lambda)^*, \end{aligned}$$

то

$$r_b(\lambda)^{-1} = \left| w_2(b,\lambda)^* J w_2(b,\lambda) \right|. \tag{4.23}$$

З тотожності (3.14) отримаємо

$$w_2(b,\lambda)^* J w_2(b,\lambda) = w_2(b,\lambda)^* J w_2(b,\lambda) - w_2(0,\lambda)^* J w_2(0,\lambda) = (\bar\lambda - \lambda) \int_0^b w_2(x,\lambda)^* J w_2(x,\lambda)\, dx. \tag{4.24}$$

Рівність (4.19) випливає з (4.23) і (4.24). □

**Наслідок 4.4.** *Круги $K_b(\lambda)$ вкладені одне в одне $K_{b_2}(\lambda) \subset K_{b_1}(\lambda)$ при $b_1 < b_2$. При цьому можливо наступне:*

1. *або* $\bigcap\limits_{b>0} K_b(\lambda)$ *містить одну точку і тоді існує єдиний розв'язок* $\Psi(\cdot, \lambda)$ *системи* (3.9)*, який належить* $L^2_H(0, \infty)$

2. *або* $\bigcap\limits_{b>0} K_b(\lambda)$ *є граничний круг* $K_\infty(\lambda)$ *і тоді кожний розв'язок системи* (3.9) *належить до* $l^2_H(0, \infty)$.

Зрозуміло, що в першому випадку маємо $\dim \mathfrak{N}_\lambda = 1$, а в другому — $\mathfrak{N}_\lambda = 2$.

З загальної теорії розширень симетричних операторів випливає, що для всіх $\lambda \in \mathbb{C}_+$ одночасно має місце випадок граничної точки, якщо це трапляється для однієї точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$.

**Означення 4.5.** Будемо говорити, що для системи (3.9) має місце

1. випадок граничної точки, якщо $K_\infty(\lambda)$ складається з однієї точки для всіх $\lambda \in \mathbb{C}_+$;

2. випадок граничного круга, якщо $K_\infty(\lambda)$ — це круг для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$.

В першому випадку $n_\pm(T_0) = 1$, а в другому $n_\pm(T_0) = 2$.

**Наслідок 4.6** (Аналог теореми Вейля)**.** *Нехай* $H \in L^1_{loc}[0, \infty)$. *Тоді існує принаймні один розв'язок системи*

$$Jy' = \lambda H y,$$

*який належить до* $L^2_H(0, \infty)$.

## 4.3 Граничні трійки для канонічної системи у випадку граничної точки в $\infty$

**Теорема** 4.7. *Система* (3.9) *має випадок граничної точки в* $b$ *тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{trace} H \notin L^1(c, b)$ *для* $c < b$.

*Доведення.* Якщо $H \in L^1[c, b)$ для деякої точки $c \in [0, b)$, то система (3.9) є регулярною в точці $b$, тобто оператор $T_0$ має індекси дефекту $(2, 2)$. Це означає, що для системи (3.9) має місце випадок граничної точки в $b$.

Навпаки, припустимо, що для системи (3.9) має місце випадок граничного круга в $b$. Тоді всі точки з $\mathbb{C}$ є точками регулярного типу і індекси дефектного підпростору оператора $T_0$ дорівнюють $(2, 2)$. Для точки $\lambda = 0$ маємо 2 лінійно незалежних розв'язки системи (3.9)

$$Jy' = 0$$

$y_1 \equiv e_1$ і $y_2 \equiv e_2$, які належать до $L^2_H(c,b)$. Тоді

$$\int_0^b \operatorname{trace} H(x)\,dx = \int_0^b (H(x)e_1, e_1) + (H(x)e_2, e_2)\,dx = ||y_1||^2_{L^2_H(c,b)} + ||y_2||^2_{L^2_H(c,b)} < \infty,$$

тобто $\operatorname{trace} H \in L^1(c,b)$. $\square$

**Означення 4.8.** Якщо для системи (3.9) має місце випадок граничної точки в $b$, то з Означення 4.5 випливає, що існує єдине значення $m_\infty(\lambda)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ таке, що $\Psi(\cdot,\lambda) = W^T(\cdot,\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ -m_\infty(\lambda) \end{pmatrix}$ належить до $L^2_H(0,b)$. Коефіцієнт $m_\infty(\lambda)$ називають коефіцієнтом Вейля-Тітчмарша системи (3.9), а відповідний розв'язок системи $\phi(\lambda)$ називають розв'язком Вейля.

Функція Вейля $m_\infty(\lambda)$ знаходиться за формулою

$$m_\infty(z) = \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(x,z)h + w_{12}(x,z)}{w_{21}(x,z)h + w_{22}(x,z)}, \tag{4.25}$$

причому границя в (4.25) не залежить від вибору $h \in \mathbb{R}$.

**Лема 4.9.** *Якщо $H \notin L^1(0,b)$, то для всіх $(f,g) \in \mathcal{T}$ має місце*

$$\lim_{x\to b} f_0^* J f_0 = 0 \tag{4.26}$$

*і область визначення мінімального лінійного відношення $\mathcal{T}_0$ задається рівністю*

$$\operatorname{dom} \mathcal{T}_0 = \{f_0 \in \operatorname{dom} \mathcal{T} : f_{01}(0) = f_{02}(0) = 0\} \tag{4.27}$$

*Доведення.* Нехай $u$, $v$ — функції, визначені в (4.4), які є фінітними в околі точки $b$. Оскільки $n_\pm(T_0) = 1$, то

$$\dim(\operatorname{dom} \mathcal{T} / \operatorname{dom} \mathcal{T}_0) = n_+(\mathcal{T}_0) + n_-(\mathcal{T}_0) = 2$$

і тому кожна функція з $\operatorname{dom} \mathcal{T}$ допускає представлення

$$f_0 = h_0 + c_1 u + c_2 v. \tag{4.28}$$

Оскільки $u$, $v$ є фінітними в точці $b$, то

$$\lim_{x\to b} f^* J u = \lim_{x\to b} f^* J v, \quad \forall f \in \operatorname{dom} T. \tag{4.29}$$

Далі з Теореми 3.17 випливає, що для $(f,g) \in T$, $(h,k) \in T_0$

$$0 = \langle g, h\rangle - \langle f, k\rangle = \lim f_0^* J h_0.$$

Тому має місце (4.26). Рівність (4.27) випливає з (4.28) і (3.14). $\square$

**Теорема** 4.10. *Нехай $H \notin L^1(0,b)$. Тоді для системи (3.9) має місце випадок граничної точки в $b$. При цьому:*

1. *Сукупність $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в якій*

$$\Gamma_0 \widehat{f} = f_{01}(0), \quad \Gamma_1 \widehat{f} = -f_{02}(0), \tag{4.30}$$

*утворює граничну трійку для $\mathcal{T}$.*

2. *Відповідна функція Вейля співпадає з коефіцієнтом Вейля-Тітчмарша $m_\infty(\lambda)$.*

*Доведення.* Я було показано в Лемі 4.9

$$\lim_{x\to\infty} f_0^* J h_0 = 0 \quad \forall (f,g),(h,k) \in T.$$

Тому рівність (3.14) приймає вигляд

$$(h,g)_{L^2_H} - (k,f)_{L^2_H} = -f_0^* J h_0 \Big|_0 = f_{01}^*(0) h_{02}(0) - f_{02}^*(0) h_{01}(0). \tag{4.31}$$

Це доводить формулу (2.4). Сюр'єктивність відображення випливає з представлення (4.28).

Твердження (2) випливає з рівностей

$$\Gamma_0 \Psi = \Gamma_0 \begin{pmatrix} w_{11} - w_{21} & m_\infty(\lambda) \\ w_{21} - w_{22} & m_\infty(\lambda) \end{pmatrix} = w_{11}(0,\lambda) - w_{21}(0,\lambda) m_\infty(\lambda) = 1,$$

$$\Gamma_1 \Psi = -(w_{21}(0,\lambda) - w_{22}(0,\lambda) m_\infty(\lambda)) = m_\infty(\lambda).$$

$\square$

**Лема 4.11.** [29] Нехай дані дві канонічні системи з гамільтоніанами $H(x)$ і $\widetilde{H}(x) = H(l+x)$ для деякого $l > 0$ і $x \in [0,\infty)$. Якщо $W$ — фундаментальна матриця системи, що відповідає $H$, а $m$ і $\widetilde{m}$ — коефіцієнти Вейля, відповідні до $H(x)$ і $\widetilde{H}$. Тоді

$$m(z) = \frac{w_{11}(l,z)\widetilde{m}(z) + w_{12}(l,z)}{w_{21}(l,z)\widetilde{m}(z) + w_{22}(l,z)}. \tag{4.32}$$

Зокрема, якщо $(0,l)$ — сингулярний інтервал типу $\phi$ для $H$, тоді

$$Q(z) = \mathrm{ctg}\,(\phi) + \cfrac{1}{-zl\sin^2\phi + \cfrac{1}{\widetilde{Q}(z) - \mathrm{ctg}\,(\phi)}}, \text{ якщо } \phi \neq 0 \tag{4.33}$$

і

$$Q(z) = lz + \widetilde{Q}(z), \text{ якщо } \phi = 0. \tag{4.34}$$

*Доведення.* Матричні функції $W(l+x,z)$ і $W(l,z)\widetilde{W}(x,z)$ є фундаментальними матрицями для канонічної системи (3.1), отже $W(l+x,z) = W(l,z)\widetilde{W}(x,z)$ за Теоремою 3.3. Тоді з рівності

$$m(z) = \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(l+x,z)}{w_{12}(l+x,z)} = \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(l,z)\widetilde{w}_{11}(x,z) + w_{12}(l,z)\widetilde{w}_{21}(x,z)}{w_{21}(l,z)\widetilde{w}_{11}(x,z) + w_{22}(l,z)\widetilde{w}_{21}(x,z)}$$

отримаємо (4.32). Якщо інтервал $(0,l)$ — сингулярний інтервал типу $\phi$ для $H$, то

$$W(l,z) = I - zlHJ = \begin{pmatrix} 1 - zl\sin\phi\cos\phi & zl\cos^2\phi \\ -zl\sin^2\phi & 1 + zl\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Підставивши останнє у (4.32), отримаємо (4.33) і (4.34) в якості першого кроку неперервного розвинення $m(z)$ у неперервний дріб. $\square$

# РОЗДІЛ 5

# ПРИКЛАДИ КАНОНІЧНИХ СИСТЕМ

*Приклад* 5.1. Розглянемо лінійну систему

$$Jy' = -zy \text{ на інтервалі } [0, b]. \tag{5.1}$$

Тут $H(x) \equiv I$ і $\mathcal{H} = L^2_{I_2}(0, b) = L^2(0, b) \oplus L^2(0, b)$.

Фундаментальна матриця $W(x, z)$ приймає вигляд

$$W(x, z) = \begin{pmatrix} \cos zx & \sin zx \\ -\sin zx & \cos zx \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Дійсно,

$$W'(x, z)J = z \begin{pmatrix} -\sin zx & \cos zx \\ -\cos zx & -\sin zx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\cos zx & \sin zx \\ -\sin zx & \cos zx \end{pmatrix} = zW(x, z)$$

і $W(0, z) = I_2$.

Знайдемо функцію Вейля, що відповідає граничній трійці (4.3):

$$\Gamma_0 W(z, x)^T c = \Gamma_0 \begin{pmatrix} c_1 \cos zx - c_2 \sin zx \\ c_1 \sin zx + c_2 \cos zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \sin zb - c_2 \sin zb \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_1 W(x, z)^T c = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \sin zb + c_2 \cos zb \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} M(z) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin zb & \cos zb \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos zb & -\sin zb \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin zb & \cos zb \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\cos zb}{\sin zb} & -\frac{1}{\sin zb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos zb}{\sin zb} & \frac{1}{\sin zb} \\ \frac{1}{\sin zb} & -\frac{\cos zb}{\sin zb} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.3}$$

*Приклад* 5.2. Розглянемо систему

$$Jy' = -zy \text{ на інтервалі } (0, \infty). \tag{5.4}$$

Тут $H(x) = I_2 \in L^1_{loc}[0, \infty)$, але $H \notin L^1(0, \infty)$.

Тому за Теоремою 4.10 для системи (5.4) має місце випадок граничної точки. Фундаментальна матриця системи (5.4) має вигляд (5.2), а відповідна функція Вейля знаходиться за формулою

$$m_\infty(z) = \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(x,z)}{w_{21}(x,z)}.$$

Тому для $z \in \mathbb{C}_+$ отримаємо

$$m_\infty(z) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos zx}{-\sin zx} = \lim_{x\to\infty} i\frac{e^{-ixz}+e^{ixz}}{e^{-ixz}-e^{ixz}} = i.$$

Таким чином відповідна функція Вейля має вигляд

$$m_\infty(z) = \begin{cases} i, & z \in \mathbb{C}_+ \\ -i, & z \in \mathbb{C}_- \end{cases}$$

*Приклад* 5.3. Розглянемо систему (3.1) на інтервалі $(0,\infty)$ з гамільтоніаном $H(x)$, який задається наступним чином:

$$\begin{gathered} H(x) = H_j = c_{\alpha_j} c_{\alpha_j}^*,\ x \in [x_{j-1}, x_j],\ j = 1,\dots,n \\ H(x) \equiv I,\ x \in [x_n, \infty). \end{gathered} \tag{5.5}$$

Тут $c_{\alpha_j}$ мають вигляд $c_{\alpha_j} = \begin{pmatrix} \cos\alpha j \\ \sin\alpha j \end{pmatrix}$, див. (3.6), а $x_j$ — точки на півосі $[0,\infty)$:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Матрицант на кожному інтервалі $[x_{j-1}, x_j]$ має вигляд

$$W_j(x,z) = I - zH_jJx, \tag{5.6}$$

оскільки $W_j' = -zH_jJ$, тобто $W_j'J = zH_j$.

Зауважимо, що $H_jJH_j = 0$ і тому

$$W_jH_j = (1 - zH_jJx)H_j = H_j,$$

тобто $W_j'J =$ задовольняє системі

$$W_j'J = zH_j = zW_jH.$$

За теоремою матрицант системи (3.1) має вигляд

$$W(x,z) = (I - zl_1H_1J)(I - zl_2H_2J)\dots(I - zl_nH_nJ)i,\ z \in \mathbb{C}_+, \tag{5.7}$$

де $l_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1,\dots,n$.

Оскільки $H \notin L^1(0,\infty)$, то для системи (3.1) має місце випадок граничної точки в $\infty$ і відповідна функція Вейля знаходиться за формулою (4.25).

За теоремою функція Вейля канонічної системи з гамільтоніаном (5.5) приймає вигляд неперервного дробу

$$Q(z) = \operatorname{ctg}\alpha_1 + \cfrac{1}{-zb_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{-zb_2 + \dots \cfrac{1}{-zb_n + \cfrac{1}{i - \operatorname{ctg}\alpha_n}}}}} \tag{5.8}$$

де $b_j = l_j \sin^2\alpha_j$, $a_j = \operatorname{ctg}\alpha_j - \operatorname{ctg}\alpha_{j-1}$, $j = 1,\dots,n$.

# ВИСНОВКИ

1. Знайдено вигляд граничної трійки канонічної системи у регулярному випадку.
2. Наведено класифікацію сингулярних точок канонічних систем, аналогічну класифікації Вейля для операторів Штурма-Ліувілля.
3. Знайдено вигляд граничної трійки канонічної системи у сингулярному випадку.
4. Знайдено вигляд фундаментальної матриці і функцій Вейля для зчеплення двох канонічних систем.
5. Розглянуто приклади канонічних систем як у регулярному, так і у сингулярному випадку.
6. Знайдено функцію Вейля для зчеплення кількох канонічних систем, що відповідають сингулярним інтервалам.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ПОСИЛАНЬ


1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacific J. Math. — 1961. — No. 11. — P. 9–23.
2. *Arov D.*, *Dym H.* Bitangential Direct and Inverse Problems for Systems of Integral and Differential Equations. — Cambridge : Cambridge University Press, 2012.
3. *Bennewitz C.* Symmetric relations on Hilbert space // Lect. Notes Math. — 1972. — P. 212–218.
4. *de Branges, L.* Hilbert spaces of entire functions. — Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, Inc., 1968.
5. *Calkin J. W.* Abstract symmetric boundary conditions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1939. — No. 45. — P. 369–442.
6. *Coddington E. A.* Extension theory of formally normal and symmetric subspaces // Mem. Amer. Math. Soc. — 1973. — No. 134. — P. 1–80.
7. *Derkach V. A.*, *Malamud M. M.* Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. — 1991. — T. 95. — C. 1—95. — ISSN 1.
8. *Derkach V.*, *Kovalyov I.* On a class of generalized Stieltjes continued fractions // Methods of Funct. Anal. and Topology. — 2015. — 21(4). — P. 315–335.
9. *Gohberg I. C.*, *Kreĭn M. G.* Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space. Vol. 24 / trans. from the Russian by A. Feinstein. — Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1970. — x+430. — (Translations of Mathematical Monographs).
10. *Gorbachuk V. I.*, *Gorbachuk M. L.* Boundary problems for differential operator equations. — Dordrecht : Kluwer Academic publisher, 1991. — xii+347.
11. *Herglotz G.* Uber potenzreichen mit positiven reelen Teil im Einheitskreise // Ber. Verh. Sä. Acad. Wiss. Leipzig. — 1911. — Nr. 63. — S. 501–511.
12. *Herglotz G.* Über Potenzreihen mit positiven reellen Teil im Einheitskreis // Leipziger Berichte. — 1911. — Nr. 63. — S. 501–511.
13. *Kaltenback M.*, *Winkler H.*, *Woracek H.* Generalized Nevanlinna functions with Essentially positive spectrum // J. Operator Theory. — 2006. — Vol. 55, issue 1. — P. 17–48.
14. *Kaltenbäck M.*, *Winkler H.*, *Woracek H.* Strings, dual strings, and related canonical systems // Mathemachine Nachrichten. — 2010. — Vol. 280, issue 13/14. — P. 1518–1536.
15. *Kochuei A. N.* On extentions of symmetric operators and symmetric binary relations // Matem. Zametki. — 1975. — No. 17. — P. 41–48.

16. *Krein M. G.* On resolvents of Hermitian operator with deficiency index (m,m) // Dokl. Acad. Nauk SSSR. — 1946. — No. 52. — P. 657–660.

17. *Krein M. G.* On a geeralizaton of Stieltjes investigations // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1952. — No. 86. — P. 881–884.

18. *Lane A. M.*, *Tomas R. G.* R-matrix Theory of Nuclear Reaction // Rev. Mod. Phys. — 1958. — Apr. — No. 3. — P. 257–353.

19. *von Neumann J.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Math. Ann. — 1930. — Nr. 102. — S. 49–131.

20. *von Neumann J.* Uber adjungierte Operatoren // Annals of Mathematics. — 1932. — Nr. 33. — S. 294–310.

21. *Nevanlinna R.* Über beschränkte Funktionen, die in gegebene Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. Vol. XV. — Ann. Akad. Scient. Fenn, 1919.

22. *Pick G.* Uber die beschrankungen analytischer Funktionen welche durch vorgegebene Funktionswerte hewirkt sind // Math. Ann. — 1916. — Nr. 77. — S. 7–23.

23. *Remling K.* Spectral theory of canonical systems. — Berlin ; Boston : De Gruyter, 2018. — X+196. — (De Gruyter studies in mathematics ; 70).

24. *Riesz F.* Sur certains systemes singuliers d'équations integrales // Ann. de l'Ec. norm. — 1911. — No. 28. — P. 33–62.

25. *Riesz F.* Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. — Paris, 1913.

26. *Sakhnovich L. A.* Spectral theory of canonical differential systems. Method of operator identities. — Basel : Birkhäuser Verlag, 1999. — VI+202. — (Operator Theory: Advances and Applications ; 107).

27. *Visik M. I.* On generally boundary problems for elliptic defferential equations // Trudy Moskov. Mat. Obsc. — 1952. — No. 1. — P. 187–246.

28. *Weyl H.* Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. — 2010. — T. 68, вип. 2. — C. 220—269.

29. *Winkler H.* The inverse spectral problem for canonical systems // Integr equ oper theory. — 1995. — Vol. 22, issue 3. — P. 360–374. — DOI: `https://doi.org/10.1007/BF01378784`.

30. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / под ред. И. С. Кац, М. Г. Крейн. — Москва : Мир, 1968. — 749 с.

31. *Ахиезер Н. И.*, *Глазман И. М.* Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве. Т. 2. — 3-е изд. — Харьков : Вища Школа, 1978. — 288 с.

32. *Горбачук В. И.*, *Горбачук М. Л.* О самосопряженных граничных задачах с дискретным спектром для уравнения Штурма–Лиувилля с неограниченным операторным коэффициентом // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Вып. 4. — С. 67—68.

33. *Деркач В. О.*, *Маламуд М. М.* Теорія розширень симетричних операторів і граничні задачі. Т. 104. — Київ : Інститут математики НАН України, 2017. — 573 с. — (Праці Інституту математики НАН України).

34. *Кац И. С.*, *Крейн М. Г.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — Москва : Мир, 1968. — С. 629—647.

35. *Крейн М. Г.* Определение плотности неоднородной симметричной струны поспектру ее частот // ДАН СССР. — 1951. — № 76. — С. 345—348.

36. *Крейн М. Г.*, *Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — Москва : Наука, 1973.

# ДЕКЛАРАЦІЯ ЩОДО УНІКАЛЬНОСТІ ТЕКСТІВ РОБОТИ ТА НЕВИКОРИСТАННЯ МАТЕРІАЛІВ ІНШИХ АВТОРІВ БЕЗ ПОСИЛАНЬ

______________________________________________

Прізвище, ім'я, по батькові

______________________________________________

Факультет

______________________________________________

Шифр і назва спеціальності

______________________________________________

Освітня програма

## ДЕКЛАРАЦІЯ

Усвідомлюючи свою відповідальність за надання неправдивої інформації, стверджую, що подана магістерська робота на тему: «______________________________________________ ______________________________________________» є написаною мною особисто.

Одночасно заявляю, що ця робота:

– не передавалась іншим особам і подається до захисту вперше;

– не порушує авторських та суміжних прав, закріплених статтями 21–25 Закону України «Про авторське право та суміжні права»;

– не отримувались іншими особами, а також дані та інформація не отримувались у недозволений спосіб.

Я усвідомлюю, що у разі порушення цього порядку моя магістерська робота буде відхилена без права її захисту, або під час захисту за неї буде поставлена оцінка «незадовільно».

______________________________________________

Дата і підпис студента