СЕМ

Лек 2 13/10/22

Теорема| Нека $\mathcal{A}$ е σ-алгебра над Ω и $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вер. ф-я.

Тогава а) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

б) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$

в) $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ако $A \subseteq B$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$

г) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ монотонност, $A, B \in \mathcal{A}$

д) $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

($\bigcup_n$ или $\bigcup_{n=1}^{n}$ или $\bigcup_{k=1}^{\infty}$; $\sum_n$ е $\sum_{n=1}^{n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}$)

$A_n \in \mathcal{A}$ за $\forall n \geq 1$

е) Ако $A_j \in \mathcal{A}$ за $j \geq 1$ $A_j \supseteq A_{j+1}$, $\forall j \geq 1$

то $\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j)$ → непрекъснатост

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ то $\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$

ако $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$, то това се нарича непрекъснатост с $\emptyset$

Док| а) $\underbrace{\mathbb{P}(\emptyset)}_{\mathbb{P}(\Omega^c)} = 0 = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$ $\quad \Omega^c = \emptyset$

б) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$

$B = A \cap B \cup A^c \cap B \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$

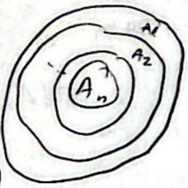
от б)

в) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \geq \mathbb{P}(A)$

г) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

е) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$



искаме $\mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$

$A_1 = A_2 \cup (A_1 \cap A_2^c)$

$A_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap A_{j+1}^c$

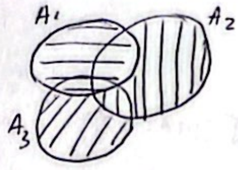
$\mathbb{P}(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \cap A_{j+1}^c)$ - образуват сходящ ред

$A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \cap A_{j+1}^c$ остатък на с. ред

$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \cap A_{j+1}^c) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

д) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)$

$\overset{3^{\text{та}}\text{ акс.}}{=} \sum_{k} \mathbb{P}(B_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$



$B_1(\equiv) = A_1$

$B_2(|||) = A_2 \setminus A_1$

$B_3(///) = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$

и $B_1, \ldots, B_n$ са непресичащи се

е) $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\emptyset)$

$= 0 = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$

От сходимост на реда

$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \mathbb{P}(B_l)}_{\text{и}} = 0$

$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$

А) Дискретна вероятност

⊕ $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\}$

$\mathbb{P}(\{0\}) \overset{def}{=} q \in [0,1]$ $\qquad \mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\{1\}) \overset{def}{=} p = 1 - q \in [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{0,1\}) = 1 = p + q$

Дискретна вероятност:

$p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{k \in \{i\}} p_k = p_i$

и $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$

Равномерна вероятност:

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in A} p_i = \frac{|A|}{N}$

⊕ $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\} \cong \{1, 2, \ldots, N\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$; $p_i \ge 0$ за $1 \le i \le N$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

$\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}(A) := \sum_{i\in A} p_i$, $\cancel{\sum_{i=1}^{N} p_i = 1}$, $p_1, p_2, \ldots, p_N$ са неотрицателни числа, т.ч. $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Тогава $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вероятност

$A \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, $|A| = N$

$p_i = \mathbb{P}(\{i\})$, пр. $A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = p_1 + p_3 + p_5$

а) $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i\in\Omega} p_i = \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

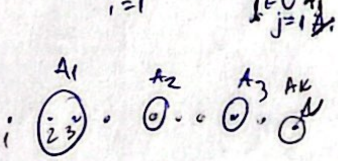
б) $A^c = \Omega \setminus A$, то $\mathbb{P}(A^c) = \sum_{i\in A^c} p_i - 1 + 1 = \sum_{i\in A^c} p_i - \sum_{i\in\Omega} p_i + 1$

$= 1 - \sum_{i\in A} p_i = 1 - \mathbb{P}(A)$

$\cancel{= 1 - \mathbb{P}(A)}$

в) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ са непресичащи се

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \overset{def}{=} \sum_{j \in \bigcup_{j=1}^{k} A_j} p_j = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j\in A_i} p_j}_{\mathbb{P}(A_i)} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$



⊕ $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, $p_i = \frac{1}{N}$ $1 \le i \le N$

$A \subseteq \Omega$ $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in A} p_i = \frac{|A|}{N}$ равномерна вероятност!

$N = 13\,983\,816$ $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{13983816}\}$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}}$$

⊕ $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$; $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ и равн. вероятност

$A = \{$пада се четно$\}$ $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N} := p$

$B = \{$пада се нечетно$\}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{N-|A|}{N} = 1-p$

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{N-|A|}{N}$

$\Omega = \{0, 1\}$ $\mathbb{P}(\{0\}) = \cancel{\frac{|A|}{N} = q} := \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{N-|A|}{N}$

свежда се до елементарен бинарен избор: true/false $\mathbb{P}(\{1\}) = \cancel{1-q} = \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N}$

⊕ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \simeq \{1, 2, 3, \dots\}$, $p_i \geq 0 \quad \forall i \geq 1$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ $\{\Omega\} = \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$\mathbb{P}(A) = 4 + 5 + 6$

$A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in A} p_i$

⊕ $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ а) $p_i = \frac{c}{i^2}$ $i \geq 1$; $c = \frac{6}{\pi^2}$ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$p_i = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{i^2}, i \geq 1$ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ $\frac{6}{\pi^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} = 1$

⊕ $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ б) $p_i = p \cdot q^i$, $i \geq 0$ $p \in (0, 1)$

$= \cancel{(1-p)p^i}$ $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} p q^i = \frac{p}{1-q} = 1}_{\text{геом. прогресия}}$

! за изпит

- не можем да дефинираме равномерна вероятност в/у Ω, т.е. на числа до ∞

$p_i = \frac{1}{\infty} = 0$

лек 3

Б) Геометрична вероятност

$\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$\mathbb{P}(\{x\}) \stackrel{?}{=} 0$ площ на 1 точка е 0 $\frac{1}{\infty}$

$\mathrm{Vol}(\Omega) = |\Omega| = \int_{x \in \Omega} dx < \infty$ $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$

обем

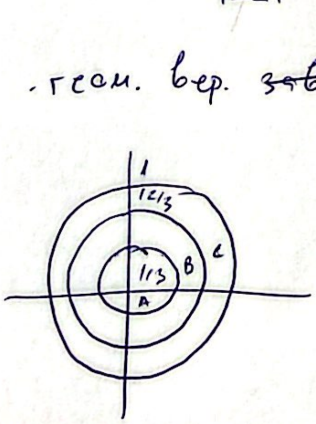
$A \subseteq \Omega$ $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{лицето на } A}{\text{лицето на } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$ → вероятността да се падне точката x

$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$

→ Геом. вероятност зависи само от обема / лицето си, не от положението
↳ подобно на равномерна вероятност
‼ геом. вероятност е равномерна спрямо лице/обем/дължина

- геом. вер. ~~зависи~~ задава равномерна вероятност

⊕



$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1/9$ $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\mathbb{P}(B) = 4/9 - 1/9 = 1/3$ $A = \{x^2 + y^2 \leq (1/3)^2\}$

$\mathbb{P}(C) = 1 - 1/3 - 1/9$ $B = \{1/9 < x^2 + y^2 \leq 4/9\}$

$C = \{4/9 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

Scanned with CamScanner

В) Вероятностно пространство

Деф: (вер. пр-во) Нека Ω е м-во от елемент. събития, $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ е вер. ф-я. Тогава $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ се нарича вер. пространство

⊕ $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$\mathbb{P}$ равн. в-ст

⊕ $\Omega =$  $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, A, B, C, A\cup B, A\cup C, B\cup C\}$

$A = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1/9\}$ $\quad \mathbb{P} \to$ геометр

$B = \{(x,y) : 1/9 \le x^2+y^2 \le 4/9\}$

$C = \Omega \setminus A\cup B$

⊕ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\Omega| < \infty$

$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) := \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \approx \dfrac{\text{брой точки в } A}{\text{общ брой точки}}$ геом. в-ст

 Ω

$|\Omega| < \infty$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{1} = \dfrac{\text{обем на } A}{\text{вътре}}$

Монте Карло

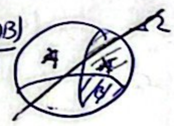
$\boxed{|A| \approx \dfrac{\text{вътре в } A}{N}}$

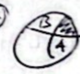
Монте Карло метод

Г) Условна вероятност

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) > 0$. Знаем, че A е настъпило

$B = \{x$ е в B при знание, че е в $A\}$

$\dfrac{|A\cap B|}{|A|} \overset{?}{=} \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$  Ω

⊕  $\dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{|A\cap B|}{|A|}$

$\Downarrow$

$\cancel{\mathbb{P}(B|A)}$ $\mathbb{P}(B|A)$

Деф) (усл. в-ст) Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вер. п-во и $A \in \mathcal{A}$ е такова, че $\mathbb{P}(A) > 0$, то

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \xrightarrow[\text{инф.}]{\text{настъпва}} (A, \mathcal{A} \cap A, \mathbb{P}_A)$$

$\cancel{\mathcal{A} \cap A = \{}$ $A \subset \Omega$

① $\omega_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$

знаете, че 1 и 2 са се паднали в тиража

$A = \{\omega \in \Omega : 1 \in \omega \text{ и } 2 \in \omega\}$

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\} \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{\omega_1\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega_1\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\cancel{\frac{1}{\binom{49}{6}}}}{\cancel{\frac{\binom{47}{4}}{\binom{49}{6}}}} = \cancel{\frac{1}{47}} \; \frac{1}{\binom{47}{4}} = \frac{1}{178365}$$

① Избори

партия 1	N_1	m_1	млади
партия 2	N_2	m_2	млади

A -> избирател е млад

B -> гласувал за партия 1

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{m_1}{N_1+N_2}}{\frac{m_1+m_2}{N_1+N_2}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{N_1}{N_1+N_2}$$

<u>Деф.</u> (независимост) Ако $A, B \in \mathcal{A}$, тогава A е независимо от B, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$, $A \perp\!\!\!\perp B$

! $\mathbb{P}(A) > 0$, то $\mathbb{P}(B \mid A) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$

A не носи никаква информация

<u>Деф.</u> Нека $A_1, \ldots, A_n$ са събития във вер. пр-во. Тогава $A_1, \ldots, A_n$ са взаимно независими ако $\forall M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ и $|M| \geq 2$: $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in M} A_i) = \prod_{i \in M} \mathbb{P}(A_i)$ -> произведение от индивидуални вероятности

① $n = 3$

$M_1 = \{1, 2\}$ $\quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$

$M_2 = \{1, 3\}$ $\quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$M_3 = \{2, 3\}$ $\quad \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

$M_4 = \{1, 2, 3\}$ $\quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \prod_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)$