

Задача 1. Да се симулира хвърляне на зар и да се намери приближение на вероятността за падане на шестица.

Задача 2. В отдел на фирма работят 20 човека. За Коледа те решават да си разменят подаръци. В кутия слагат 20 листчета, на всяко от които има едно име. Всеки тегли листче (без да го връща) и подарява на този, чието име е изтеглил. Каква е вероятността поне един да изтегли своето име?

Задача 3. Каква е вероятността в група от 25 човека поне двама да имат рожден ден на един и същи ден от годината?

Задача 4. Студент се явява на изпит с конспект от 20 въпроса. От тях не знае само 3 въпроса. На изпита си тегли 2 въпроса от конспекта. Каква е вероятността да знае само един от изтеглените въпроси?

Задача 5. Иван има 5 ключа, но не знае кой е за неговата стая. Той пробва последователно с всеки от тях, като помни кой ключ е пробвал. Каква е вероятността да отключи с петия ключ?

Задача 6. На всеки от върховете на равностранен триъгълник има една мравка. Всяка мравка избира произволно един от другите два върха и тръгва към него. За единица време всяка мравка изминава разстоянието от един връх до друг. Две мравки могат да се разминат ако тръгнат една срещу друга. Каква е вероятността след единица време да има по една мравка на всеки връх?

Задача 7. Имаме 3 карти: първата е бяла от двете страни, втората е черна от двете страни, а третата е бяла от едната и черна от другата страна. Всяка карта е поставена в затворена кутия. Избираме произволна кутия, отваряме я и виждаме, че горната страна на картата в нея е бяла. Каква е вероятността другата страна на картата също да е бяла?

Задача 8. В кутия има 5 топки, номерирани от 1 до 5. Вадим произволна топка и я връщаме в кутията. Отново вадим произволна топка. Каква е вероятността да извадим два пъти една и съща топка?

Задача 9. В кутия има 3 различни чифта чорапи. Вадим в тъмното 2 чорапа. Каква е вероятността да са чифт?

Задача 10. Група от 20 човека, измежду които са Иван и Георги, е подредена по случаен начин в редица. Каква е вероятността Иван и Георги да са един до друг?

Задача 11. Тесте от 52 карти е разбъркано и е раздадено на 4 играчи. Каква е вероятността всеки играч да има едно асо?

Задача 12. Парола, състояща се от 5 малки букви, е генерирана по случаен начин (буквата на всяка позиция е избрана равновероятно измежду буквите a, b, \dots, z). Каква е вероятността всички букви в паролата да са различни?

Задача 13. На първия етаж на административна сграда 7 души чакат асансьора. Всеки от тях отива в някой от офисите в сградата. Сградата има 16 етажа и на всеки етаж има равен брой офиси (на първия етаж няма офиси).

а) Каква е вероятността поне двама от чакащите да отиват на един и същи етаж?

б) Ако Вие сте един от седемте, каква е вероятността поне един от останалите 6 да отива на Вашия етаж?

* * *

Задача 14. Хвърляме зар 10 пъти. Каква е вероятността да се паднат само 2 шестници? Каква е вероятността да се паднат не повече от 2 шестници? Каква е вероятността да се паднат 2 или повече шестници?

Задача 15. Хвърляме зар докато се падне шестика. Каква е вероятността да хвърляме не повече от 10 пъти? Каква е вероятността да хвърляме поне 6 пъти?

Задача 16. Хвърляме зар докато се паднат три шестници. Каква е вероятността да хвърляме не повече от 20 пъти?

Задача 17. Фенерче работи с 2 батерии. Иван има 8 батерии, от които 5 са нови и 3 са изтощени, но не знае кои точно. Ако пробва с 2 случайно избрани батерии, каква е вероятността фенерчето да проработи?

Задача 18. Машинописка прави средно по една грешка на всеки 500 думи. На една страница има 300 думи. Каква е вероятността машинописката да направи не повече от 2 грешки на 5 страници? Каква е вероятността да направи между 1 и 3 грешки (включително) на 5 страници?

Задача 19. На студенти е даден тест от 10 въпроса, всеки с по 4 възможни отговора, един от които е верен. Иван се явява на теста без да е учил и огражда произволно отговори. Каква е вероятността да е отговорил вярно на поне 5 от въпросите?

Задача 20. За клинично проучване са необходими доброволци имачи определен ген, който се среща с вероятност 0.1. Каква е вероятността да се тестват 5 или повече доброволци до намиране на първия доброволец с въпросния ген? Каква е вероятността да се тестват 50 или повече доброволци до намиране на 10 доброволци с въпросния ген?

Задача 21. Средно веднъж на 90 дни в софийското метро възниква технически проблем, който води до спиране на движението на влаковете за поне 20 минути. Каква е вероятността за 360 дни да възникне такъв проблем повече от 3 пъти?

Задача 22. Теглим 10 случайно избрани карти от тесте с 52 карти (без връщане). Каква е вероятността да изтеглим поне 2 купи?

Задача 23. Теглим 10 пъти по една случайно избрана карта от тесте с 52 карти (с връщане). Каква е вероятността да изтеглим поне 2 купи?

Задача 24. Пациент в болница се нуждае от кръводарител с кръвна група АВ. Известно е, че 7% от населението е с кръвна група АВ. Потенциални кръводарители се тестват в болницата за определяне на кръвната им група.

а) Каква е вероятността да се тестват не повече от 10 души до откриване на кръводарител с кръвна група АВ?

б) Каква е вероятността измежду първите 50 тествани да има поне двама с кръвна група АВ?

Задача 25. Броят клиенти, които посещават офис на банка за един ден, е Пуасоново разпределен с параметър $\lambda = 18$.

а) Каква е вероятността офиса на банката да бъде посетен от поне 20 клиенти за един ден?

б) Каква е вероятността между 15 и 25 клиенти (включително) да посетят офиса на банката за един ден?

* * *

Задача 26. Генерирайте 500 случайни числа от равномерно разпределение в интервала $(2, 3)$. Начертайте хистограма на генерираните числа и на същата картинка добавете графика на плътността $f(x)$. Повторете същото с 5000 случайни числа.

Задача 27. Генерирайте 500 случайни числа от експоненциално разпределение с параметър $\lambda = 1/7$. Начертайте хистограма на генерираните числа и на същата картинка добавете графика на плътността $f(x)$. Повторете същото с 5000 случайни числа.

Задача 28. Генерирайте 500 случайни числа от нормално разпределение с параметри $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Начертайте хистограма на генерираните числа и на същата картинка добавете графика на плътността $f(x)$. Повторете същото с 5000 случайни числа.

Задача 29. Количеството (в милилитри) на душ гел в опаковка е равномерно разпределено в интервала $(248, 255)$. Каква е вероятността произволно избрана опаковка да съдържа по-малко от 250 мл душ гел? Намерете v , такова че произволно избрана опаковка съдържа поне v мл душ гел с вероятност 0.95.

Задача 30. Времето на живот (в хиляди часове) на лазерен диод е експоненциално разпределено с параметър $\lambda = 1/10$. Каква е вероятността времето на живот на произволно избран лазерен диод да надвишава 10 хиляди часа? Каква е вероятността времето на живот на произволно избран лазерен диод да е между 7 и 11 хиляди часа? Намерете t , такова че времето на живот на лазерен диод е поне t с вероятност 0.97.

Задача 31. Времето от зареждане до изтощаване на батерия на лаптоп при обичайна работа е нормално разпределено със средно 260 минути и стандартно отклонение 50 минути. Каква е вероятността батерия да се изтощи след повече от 4 часа работа? Каква е вероятността батерия да се изтощи след между 3 и 5 часа работа? Намерете t , такова че батерия се изтощава след повече от t минути с вероятност 0.9.

Задача 32. Количеството кашкавал, което се изразходва в дадена пицария за една седмица, е нормално разпределено със средно 41 кг и стандартно отклонение 5 кг. Каква е вероятността в произволно избрана седмица пицарията да изразходи над 51 кг кашкавал? Колко кашкавал трябва да има в запас в дадена седмица, така че да е достатъчно с вероятност 0.99?

Задача 33. Количеството бира (в литри), което Иван изпива за една седмица, е експоненциално разпределено с параметър $1/3$. Каква е вероятността Иван да изпие повече от 10 литра бира за една седмица? Каква е вероятността в най-много 3 от следващите 5 седмици Иван да изпие повече от 10 литра бира? Предполагаме, че количеството изпита бира в дадена седмица е независимо от това в предишните седмици.

Задача 34. Обемът течност, който автомат за безалкохолни напитки налива в една чаша, е нормално разпределен със средно 205 мл и стандартно отклонение 2 мл. Каква е вероятността автоматът да налее в една чаша по-малко от 200 мл? Каква е вероятността автоматът да налее в една чаша между 200 и 205 мл?

Задача 35. Времето, през което потребител разглежда интернет страница преди да премине на друга страница, е експоненциално разпределено със средно 5 секунди. Каква е вероятността страница да бъде разглеждана от потребител повече от 10 секунди? След колко време 50% от потребителите са преминали на друга страница?

* * *

Задача 36. Разгледайте данните [survey](#) от пакета [MASS](#). Представете таблично и графично данните за физическите упражнения ([Exer](#)).

Задача 37. (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Представете таблично и графично данните за пушенето ([Smoke](#)).

Задача 38. (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).)

- а) Какъв процент от студентите са непушачи?
- б) Колко от студентите са непушачи и правят физически упражнения често?
- в) Какъв процент от студентите са непушачи и правят физически упражнения често?
- г) Какъв процент от непушачите правят физически упражнения често?
- д) Какъв процент от студентите, правещи физически упражнения често, са непушачи?

Задача 39. (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Чрез подходящи графики илюстрирайте честотата на пушене в зависимост от честотата на физически упражнения.

Задача 40. (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Чрез подходящи графики илюстрирайте честотата на физически упражнения в зависимост от честотата на пушене.

Задача 41. (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Представете чрез подходящи таблици и графики данните за пулса на студентите ([Pulse](#)).

Задача 42. (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Представете чрез подходящи таблици и графики данните за възрастта на студентите (`Age`).

* * *

Задача 43. (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Намерете медианата, средната стойност и стандартното отклонение на:

- а) пулса на студентите;
- б) пулса на жените;
- в) пулса на студентите на възраст не повече от 25 години;
- г) пулса на студентите, правещи физически упражнения често;
- д) пулса на студентите, които са непушачи и правят физически упражнения често.

Задача 44. (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Чрез подходящи числови характеристики и графики покажете как пулсът се различава в зависимост от честотата на физически упражнения (`Exer`).

Задача 45. Във файла `exam_grades.txt` има данни за оценките на студенти от курс по статистика.

- а) Чрез графики и числови характеристики изследвайте зависимостта между:
 - `test1` и `course.grade`;
 - `test2` и `course.grade`;
 - `test3` и `course.grade`.
- б) Чрез графики и числови характеристики покажете как крайната оценка (`course.grade`) се различава в зависимост от пола.
- в) Покажете как крайната оценка варира в зависимост от семестъра.

Задача 46. Генерирайте вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{500})$ с 500 случайни числа от:

- а) $U(3, 7)$;
- б) $\text{Exp}(1/5)$;
- в) $\mathcal{N}(5, 1)$.

За всеки от векторите постройте кутия с мустаци, ориентирана хоризонтално. Добавете на графиката \bar{x} и границите на интервала $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$ като използвате функцията `points`.

Задача 47. (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Намерете медианата, средната стойност и стандартното отклонение на:

- а) възрастта на студентите;
- б) възрастта на пушачите;
- в) възрастта на пишещите с дясната ръка;
- г) възрастта на студентите с измерен пулс 70 и повече;
- д) възрастта на студентите, които не правят физически упражнение.

Задача 48. (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Представете графично височината на студентите. Чрез подходящи числови характеристики и графики сравнете височината на мъжете и жените.

* * *

Задача 49. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат нормално разпределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Намерете оценка на вероятността $\theta_a = \mathbb{P}(X_i \leq a)$, като

- (1) използвате, че x_1, x_2, \dots, x_n са генерирани от нормално разпределение;
- (2) не използвате, че x_1, x_2, \dots, x_n са генерирани от нормално разпределение.

За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $\mu = 5, \sigma = 1$ и пресметнете двете оценки на вероятността θ_a за $a = 3.4$ и $a = 4.5$. Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

Задача 50. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат равномерно разпределение $U(0, b)$. Оценка на параметъра b може да се намери по метода на максималното правдоподобие и тази оценка е $\hat{b} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Нека M е медианата на X_i , т.е. $\mathbb{P}(X_i \leq M) = 1/2$. Не е трудно да се види, че $M = b/2$. Ако използваме оценката $\hat{b} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, ще получим оценка на медианата $\hat{b}/2 = \max\{x_1, \dots, x_n\}/2$. Друга оценка на медианата M е извадъчната медиана.

За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $b = 8$ и пресметнете двете оценки на медианата. Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

Задача 51. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат експоненциално разпределение $\text{Exp}(\lambda)$. Оценка на параметъра λ може да се намери по метода на максималното правдоподобие и тази оценка е $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$. Нека M е медианата на X_i , т.е. $\mathbb{P}(X_i \leq M) = 1/2$. Не е трудно да се види, че $M = (1/\lambda) \log(2)$. Ако използваме оценката $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$, ще получим оценка на медианата $(1/\hat{\lambda}) \log(2) = \bar{x} \log(2)$. Друга оценка на медианата M е извадъчната медиана.

За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $\lambda = 1/5$ и пресметнете двете оценки на медианата. Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

Задача 52. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат нормално разпределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Разглеждаме следните оценки на σ :

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

а) За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $\mu = 3, \sigma = 2$ и пресметнете двете оценки на σ . Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

б) Може да разглеждаме $\hat{\sigma}_1^2$ и $\hat{\sigma}_2^2$ като оценки на σ^2 . За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на σ^2 на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

Задача 53. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат експоненциално разпределение $\text{Exp}(\lambda)$. Оценка на дисперсията $\text{Var}(X_i) = 1/\lambda^2$ може да се намери като се използва оценката $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$. Друга оценка на дисперсията $\text{Var}(X_i)$ е s^2 .

За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $\lambda = 1/5$ и пресметнете двете оценки на дисперсията. Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

Задача 54. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат експоненциално разпределение $\text{Exp}(\lambda)$. Намерете оценка на вероятността $\theta_a = P(X_i \leq a)$, като

- (1) използвате, че x_1, x_2, \dots, x_n са генерирани от експоненциално разпределение;
- (2) не използвате, че x_1, x_2, \dots, x_n са генерирани от експоненциално разпределение.

За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $\lambda = 1/5$ и пресметнете двете оценки на вероятността θ_a за $a = 0.3$ и $a = 1.8$. Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

Задача 55. Нека x_1, x_2, \dots, x_n са наблюдения над случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n , които са независими и имат Поасоново разпределение $\text{Po}(\lambda)$. Намерете оценка на дисперсията $\text{Var}(X_i)$, като

- (1) използвате, че x_1, x_2, \dots, x_n са генерирани от Поасоново разпределение;
- (2) не използвате, че x_1, x_2, \dots, x_n са генерирани от Поасоново разпределение.

За $n = 20, 50, 100, 500, 1000$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n като вземете $\lambda = 3$ и пресметнете двете оценки на дисперсията. Повторете 30000 пъти. За всяко n пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

* * *

Задача 56. За $n = 3, 7, 10, 30, 90, 200$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n от експоненциално разпределение с параметър $\lambda = 1/5$ и пресметнете $\Sigma = x_1 + \dots + x_n$. Повторете 10000 пъти.

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(10000)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(10000)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(10000)} \\ \Sigma^{(1)} & \Sigma^{(2)} & \dots & \Sigma^{(10000)} \end{array}$$

За всяко n начертайте хистограма на $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots, \Sigma^{(10000)}$.

Задача 57. За $n = 3, 7, 10, 30, 90, 200$ генерирайте данни x_1, x_2, \dots, x_n от експоненциално разпределение с параметър $\lambda = 1/5$ и пресметнете $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$. Повторете 10000 пъти.

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(10000)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(10000)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(10000)} \\ \bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)} & \dots & \bar{x}^{(10000)} \end{array}$$

За всяко n начертайте хистограма на $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(10000)}$.

Задача 58. Решете предходната задача като генерирайте данни от равномерно разпределение в интервала $(2, 8)$.

Задача 59. Измерена е дължината на дясното ухо на 66 случайно избрани жени на възраст между 18 и 30 години. Резултатите показват средна дължина 61.9 мм и стандартно отклонение 4.1 мм. Нека предположим, че популационната дисперсия е известна и $\sigma^2 = (4.1)^2$.

а) Намерете 95-процентен доверителен интервал за средната дължина на дясното ухо на жените на възраст между 18 и 30 години.

б) Ако са направени измервания на 88 жени и са получени същите резултати за средната дължина и стандартното отклонение, намерете 95-процентен доверителен интервал за средната дължина на дясното ухо на жените на възраст между 18 и 30 години.

Задача 60. Кадмийт е тежък метал, който може да се натрупа до високи нива в гъбите. Измерена е концентрацията на кадмий в случайна извадка от 10 горски гъби събрани в дадена местност. Резултатите са следните (в мг/кг):

3.1 3.0 3.7 2.6 4.2 3.8 3.6 2.7 3.8 4.4

Може да предположим, че концентрацията на кадмий е нормално разпределена.

а) Намерете 95-процентен доверителен интервал за средната концентрация на кадмий в горските гъбите в дадената местност.

б) Намерете 90-процентен доверителен интервал за средната концентрация на кадмий в горските гъбите в дадената местност.

Задача 61. Проведен е експеримент, при който 38 домашни гълъба са пуснати на свобода от непознато място, което е на разстояние 106 км от дома им. От тях 22 намерили пътя към дома си. Намерете 95-процентен доверителен интервал за вероятността гълъб от дадения вид да намери пътя към дома си от непознато място на 106 км.

Задача 62. Направено е проучване с цел да се изследва ефектът на звука от сърдечния ритъм на майката върху новороденото. Бебетата в родилно отделение са разделени на две групи. Първата група е непрекъснато изложена на звука от сърдечния ритъм на възрастен, а втората група не е изложена на такъв звук. Измерена е промяната в теглото на бебетата от раждането до четвъртия ден. Данните са във файла [salk.txt](#). Намерете 95-процентен доверителен интервал за медианата на промяната в теглото на бебетата (за първата и за втората група).

Задача 63. С данните от задача 62 намерете 95-процентен доверителен интервал за разликата на медианите на първата и втората група.

* * *