Сем
лек. 4

27/10/22

контролни
17.12.2022
21.1.2023

Д-во: $A = \{ \xi_1 + \xi_2 < 6 \} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{ \xi_1 < q, \xi_2 < 6 - q \}$

$= B \subseteq \Omega$

"$\Leftarrow$" $\omega \in B$, то $\exists q_0 : \omega \in \{ \xi_1 < q, \xi_2 < 6 - q \}$

$\Rightarrow \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) < q + 6 - q = 6$

$\Rightarrow \omega \in A \Rightarrow B \subseteq A$

"$\Rightarrow$" $\omega \in A$, то имаме, че $\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) < 6$, то $\exists \rho \in \mathbb{Q}$,

такова, че $q - \rho + \xi_2(\omega) < \boxed{\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) < 6 - 2\rho}$

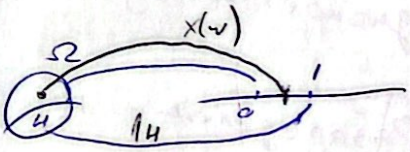
$\exists q \in \mathbb{Q}$, т.ч. $|\xi_1(\omega) - q| < \rho \Rightarrow q - \rho < \xi(\omega) < q + \rho$

$\xi_2 < 6 - (q + \rho)$
$\xi_1 < q + \rho$ и $q + \rho \in \mathbb{Q} \Rightarrow A \subseteq B = A = B$

30/10/23

-> Дискретни случайни величини

Деф Ω и $H \subseteq \Omega$. Тогава



$1_H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in H \\ 0, & \omega \in H^c \end{cases}$ наричаме ~~индикаторна~~ индикаторна функция

H, V $\quad 1_H 1_V(\omega) = 1_{H \cap V}(\omega)$; $1_{H \cup V} = 1_H + 1_V - 1_{H \cap V}$

$= 1_H + 1_V - 1_H 1_V$

$1_{(A \cup B)^c} = 1_{A^c} 1_{B^c}$

Д-во $X^{-1}((-\infty, 6))$
$\overset{\text{"}}{\{}\omega \in \Omega ; X(\omega) < 6\} \overset{?}{\in} \mathcal{A}$
$6 \leq 0 \Rightarrow \emptyset = \omega$
$6 \in [0, 1] \Rightarrow H^c$
$6 > 1 \Rightarrow \Omega$

Лема ... $A \in \mathcal{A}$. Тогава $X = 1_A$ е сл. вел.

$I \subseteq \mathbb{R}$
$\shortparallel$
$(a, 6)$

$= \begin{cases} 0, & 0 \notin (a,6) \text{ и } 1 \notin (a,6) \\ A, & 1 \in (a,6) \text{ и } 0 \notin (a,6) \\ A^c, & 1 \notin (a,6) \text{ и } 0 \in (a,6) \\ \Omega, & a < 0 < 1 < 6 \end{cases}$

$X = 1_A / 1_H$ то това е прототип на бинарен експеримент успех/неуспех

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p \qquad \{X=1\} = A$

$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1-p$

$(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ A^*, $1_{A^*} = X^*$

$\mathbb{P}(X^* = 1) = p$

X и X^* са вероят. неотличими

$\mathbb{P}(X=1) = p$

$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$U^* = (\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ $H^* \in \mathcal{A}^*$

$X^* = 1_{H^*} \Rightarrow \mathbb{P}^*(X^* = 1) = p^*$

$p = p^*$: от вероятностна гледна точка моделите са неразличими

Означаваме:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} H_1, \dots, H_n & \bigcup_{j=1}^{n} H_j = \Omega,\ H_j \in \mathcal{A},\ 1 \le j \le n \\ H_1, \dots & \text{— " —} \end{cases}$$

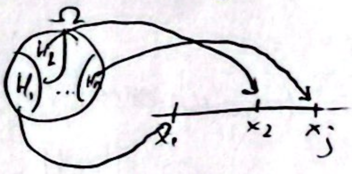
$$\bar{x} = \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \\ (x_1, \dots) \end{cases}$$ - редица от изброимо много числа

константа по сл. вел. е сл. величина от $1^{во}$ свойство

и

~~сб~~ сума от сл. вел. е сл. вел.

Деф. Нека U е вер. пр-во, $\mathcal{H}$ е пълна група от събития и $\bar{x}$ (е редицата от числа съот. на елементи в $\mathcal{H}$). Тогава $X(\omega) = \sum_{j=1} x_j 1_{H_j}(\omega)$ $\left(X = \sum_{j=1} x_j 1_{H_j}\right)$ е дискретна случайна величина.



• само 1 индикатор на числата може да е 1, защото са непресичащи се

$1 = \sum_j 1_{H_j}(\omega)$

Деф. Таблица на Разпределение на дис. случ. вел. (държавен изпит)

$H_k = \{X = x_k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}$

$\mathbb{P}(H_k) = \mathbb{P}(X = x_k) = p_k$

$X = \sum x_k 1_{H_k}$

$\mathbb{P}(X = x_k) = p_k \geq 0$

$\sum_k p_k = 1$

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Деф. Две ~~рз~~ дис. сл. вел. X и Y се наричат равни по разпределение $X \overset{d}{=} Y$ ако двете таблици на разпределение съвпадат или $\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(Y = x_k) = p_k \ \forall k$

Пр. $X : \Omega \to \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

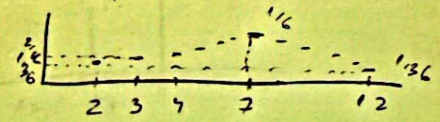
$Y : \Omega \to \{0, 1, \dots, 1500\}$

време за ниво на процесор

Пр. 2 зарчета, сума $= X$

X	2	3	4	$\dots$	7	$\dots$	11	12
$\mathbb{P}$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$\dots$	$1/6$	$\dots$	$2/36$	$1/36$

хистограма:



→ Смяна на променливите

X дис. сл. вел. и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y = g(X)$. Ако X е дис. сл. вел, то

X	x_1	x_2	...	x_j	...
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	p_j	...

$$Y = \sum_j g(x_j) 1_{H_j} \quad (X = \sum_j x_j 1_{H_j})$$

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	...	y_m	...	~~y_k~~	...
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	...	$p_m + p_k$	...	~~p_k~~	...

• обединяване на повтарящи се стойности (y_m и y_k)

⊕ $X: \Omega \to \mathbb{N}_+$ — дефектени процесори, не е

процесор от предиш. пример

$$Y = g(X) \in \{0, 1\} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \cdot 1\{x = 0\} + 1 \cdot 1\{x \geq 1\}$$

X	0	1	2	3	...	j
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	p_3	...	p_j

Y	0	1
$\mathbb{P}$	p_0	$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1 - p_0$

⊕ честни монети

X	0	1
$\mathbb{P}$	1/2	1/2

Y	0	1
$\mathbb{P}$	1/2	1/2

пример за сл. вел. равни по разпределение

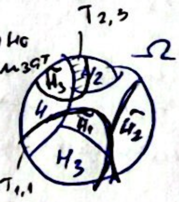
едно вер. пространство

Деф (смяна на променливи на 2 сл. вел.) Ако X, Y са 2 дис. случ. вел. върху и $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2 координати: на X и на Y), тогава $Z = g(X, Y)$ е смяна на променливите на X и Y.

$$X = \sum_j x_j 1_{H_j}$$

$$Y = \sum_k y_k 1_{\tilde{H}_k}$$

не е нужно дте да пойизлизат от една и съща пълна група на събития



! $Z(\omega) = g(X(\omega); Y(\omega))$

$T_{j,i} = H_j \cap \tilde{H}_i$

$$Z = \sum_{j,k} g(x_j, y_k) \underbrace{1_{H_j} 1_{\tilde{H}_k}}_{1_{T_{j,i}}} = \sum_c z_c 1_{H_c}$$

← става излишна операция

Деф (независимост на дис. сл. вел.) X и Y са 2 дис. случ. вел. върху ($X = \sum x_j 1_{H_j}$, $Y = \sum_k y_k 1_{\tilde{H}_k}$). Тогава $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_k \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = y_j)$ $\forall j$ и k

$\mathbb{P}(X = x_k \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_k; Y = y_j)$

$\{X = x_k\} \cap \{Y = y_j\} = \{X = x_k, Y = y_j\}$

→ условна

$$\mathbb{P}(X = x_k \mid Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_k, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \mathbb{P}(X = x_k)$$

⊕ $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\Omega_i = \{0, 1\}$, $i = 1, 2$

$= \{(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)\}$

$= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = 1/4$, $1 \leq j \leq 4$ — $\mathbb{P}$ е равномерна

$X(\omega_j) = \omega(1)$ - 1. коорд. на ω_j $X = 1^{ва}$ монета

$Y(\omega_j) = \omega(2)$ - 2. коор. на ω_j $Y = 2^{ра}$ монета

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(X=0; Y=0) \overset{?}{=} \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) = \frac{1}{2}$

Деф. (независимост в съвкупност) Ако $X_1, \dots, X_n$ са ДСВ във $V(X_j = \sum_k x_k(j) 1_{H_{kj}})$. Тогава $(X_1, \dots, X_n)$ са независими в съвкупност ако за $\forall$ набор $j_1, \dots, j_n$ от възможни стойности $X_1 \dots X_n$

$$\mathbb{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \dots, X_n = j_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = \cancel{j_j}\ x_i(j_i))$$

$j_1 \to x_1(j_1)$, $j_2 \to x_2(j_2)$, $j_n \to x_n(j_n)$

само за дискретна

* X_i има възможни стойности $x_j(j)$

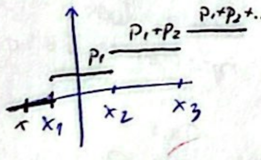
Деф. (ф-я на раз.) Нека X е произволна сл.вел. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ се нарича ф-я на разпределение.

⊕

X	x_1	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	$\dots$	p_k	$\dots$

$x_1 < x_2 < \dots < x_n \dots$

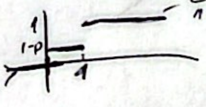
X - дсв



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1 = \mathbb{P}(X < x_2) & x \in [x_1, x_2) \\ p_1 + p_2 = \mathbb{P}(X < x_3), & x \in [x_2, x_3) \\ \vdots \\ p_1 + \dots + p_k & x \in [x_k, x_{k+1}) \end{cases}$$

Ако имаме X_n най-гол. стойност, то $\mathbb{P}(X < x) = 1$, ако $x > x_n$

⊕ $X = 1_A$ става и остава 1-ца



* случайна вел. не може да е $< -\infty$

* X е ненамаляваща ф-я

Математическо очакване

Деф. Нека X е ДСВ във V. Тогава очакването по деф. представлява

$$\mathbb{E}X := \sum_j x_j p_j, \text{ ако } \sum_j |x_j| p_j < \infty \text{ (е добре дефинирано)}$$

⊕ Ако X приема краен брой стойности $\Downarrow$ $\mathbb{E}X$ е винаги добре деф.

⊕ $\mathbb{P}(X = j) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{j^2}, j \geq 1 \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j^2} = \underbrace{\frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}}_{\text{хармоничен ред}} = \infty$

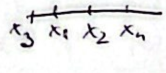
⊕ X $\inf_{a \in \mathbb{R}} \sum_j (x_j - a)^2 p_j \to a = \mathbb{E}X$

⊕ $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{1}{n}$ $x_1, \dots, x_n$

$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$

очакването е средно аритметично за равномерна вер.

⊕ $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j$, $1 \leq j \leq n$



$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$

център на тежест

Scanned with CamScanner