Вероятности и статистика

Факултет по математика и информатика, Софийски университет
h.sariev@math.bas.bg

Легенда. *Основен материал*: с (*) е видяно в клас, но няма пряко отношение към изпита; с (**) – за по-любознателните. *Задачи*: всичко без (*) се приема за решено в клас; с (*) – допълнителна подготовка; с (**) – трудни задачи.

1 Комбинаторика

Комбинаториката е анализ на крайните множества, напр. $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ за $n \in \mathbb{N}$, като в частност служи за намиране на броя на техните елементи (в случая $|M| = n$) или броя на дадени комбинаторни конфигурации, използващи M като опорно множество, без да се извършва непосредствено преброяване.

Пермутация. *Всяко нареждане на елементите на M в n-членна редица наричаме пермутация на елементите на M, като множеството от пермутации обозначаваме с*

$$\boldsymbol{P}_n = \big\{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) : i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}, i_j \neq i_l, j \neq l\big\}.$$

Дефинирайки $P_n = |\boldsymbol{P}_n|$, имаме

$$P_n = n!$$

Д-во.* Равенството се доказва индуктивно по n. Очевидно, $\mathbf{P}_1 = \{(a_1)\}$ и $\mathbf{P}_2 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, от което следват $P_1 = 1$ и $P_2 = 2$. Нека равенството важи за $n-1$. От всяка пермутация на $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ получаваме n на брой пермутации на $\{a_1, \dots, a_n\}$, като поставяме a_n съответно на първа, втора и т.н. до последна позиция; напр. от $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}})$, за кои да е $i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, n-1\}$, получаваме

$$(a_n, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}), (a_{i_1}, a_n, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}), \dots, (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_n).$$

Нека обозначим с B_l множеството от така конструирани пермутации на $\{a_1, \dots, a_n\}$, където индексът $l = 1, \dots, P_{n-1}$ варира измежду всички пермутации на $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. От по-горе следва, че $|B_l| = n$. Нещо повече, множествата $B_1, \dots, B_{P_{n-1}}$ по замисъл са две по две непресичащи се.

От друга страна, всяка пермутация на $\{a_1, \dots, a_n\}$ дефинира една единствена пермутация на $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ след премахване на елемента a_n. Следователно $\mathbf{P}_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{P_{n-1}}$, откъдето

$$P_n = |B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{P_{n-1}}| = \sum_{l=1}^{P_{n-1}} |B_l| = n \cdot P_{n-1} = n!$$

$\square$

Забележка (Интерпретация). Започвайки отляво надясно, първият елемент a_{i_1} можем да изберем по n начина, след което за a_{i_2} остават $(n-1)$ възможности, за a_{i_3} – $(n-2)$ и т.н.

Забележка (Комбинаторно доказателство). За да преброим елементите на дадено множество A, избираме друго подходящо множество B, за което знаем $|B|$, и доказваме съществуването на биективна функция от A в B, от което следва, че $|A| = |B|$.

*Забележка*** (Stirling's Approximation). С нарастването на n числата $n!$ растат много бързо и непосредственото им пресмятане става практически невъзможно. Съществува обаче формула (на Стирлинг), която позволява сравнително лесно да се пресмята *приблизително*

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \qquad (\text{при } n \to \infty).$$

Вариация без повторение. *Всяка наредена k-орка от елементи на M без повторение, за $k = 0, 1 \dots, n$, наричаме вариация на елементите на M от клас k без повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{V}_n^k = \big\{(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}, i_j \neq i_l, j \neq l\big\}.$$

Дефинирайки $V_n^k = |\boldsymbol{V}_n^k|$, имаме

$$V_n^k \equiv (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Д-во.* От всяка наредена k-орка $(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$ без повторение получаваме пермутация на M, като към нея добавим в произволен ред останалите елементи, $M\backslash\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\}$; напр.,

$$(a_{i_1},\dots,a_{i_k},a_{j_1},\dots,a_{j_{n-k}}),$$

където $(a_{j_1},\dots,a_{j_{n-k}})$ е пермутация на елементите на $M\backslash\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\}$. Нека обозначим с B_l множеството от пермутации на M, получени по описания начин от l-тата вариация, където индексът $l=1,\dots,V_n^k$ преминава през всички възможни вариации на M от клас k. Тогава $|B_l|=P_{n-k}$. По замисъл, множествата $B_1,\dots,B_{V_n^k}$ са две по две непресичащи се.

От друга страна, всяка пермутация $(a_{i_1},\dots,a_{i_k},a_{i_{k+1}},\dots,a_{i_n})$ на M дефинира една единствена вариация от клас k след премахване на последните $n-k$ елементи, т.е. $(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$. Следователно $\mathbf{P}_n=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_{V_n^k}$, откъдето получаваме, че

$$P_n=|B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_{V_n^k}|=\sum_{l=1}^{V_n^k}|B_l|=P_{n-k}\cdot V_n^k \qquad\Longrightarrow\qquad V_n^k=\frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

□

Пример 1.1 (Урна с топки). Урна съдържа топки, номерирани с числата $1,2,\dots,n$. Изваждаме последователно k пъти по една топка, като всеки път записваме нейния номер. Полученият резултат наричаме извадка с обем k от n елемента. Ако допуснем, че извадените топки *не* се връщат в урната, а редът на записване на изтеглените номера има значение, тогава броят на всички различни извадки е V_n^k.

Комбинация без повторение. *Всяко k-елементно подмножество на M, за $k=0,1\dots,n$, наричаме комбинация на елементите на M от клас k без повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{C}_n^k=\big\{\{a_{i_1},\dots,a_{i_n}\}:i_1,\dots,i_k\in\{1,\dots,n\},i_j\neq i_l,j\neq l\big\}.$$

Дефинирайки $C_n^k=|\boldsymbol{C}_n^k|$, имаме

$$C_n^k\equiv\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Д-во.* От всяко k-елементно подмножество на M можем да образуваме P_k на брой пермутации. Последните съвпадат с вариациите на M от клас k, откъдето следва, че

$$V_n^k=P_k\cdot C_n^k \qquad\Longrightarrow\qquad C_n^k=\frac{V_n^k}{P_k}.$$

□

Забележка (Интерпретация). За разлика от вариациите от клас k без повторение, подредбата на елементите във всяка комбинация от клас k без повторение е без значение.

Пример 1.2 (Урна с топки - ctd.). Ако допуснем, че в Пример 1.1 извадените топки *не* се връщат и че редът на записване на изтеглените номера *няма* значение, тогава броят на различните извадки е C_n^k.

Твърдение 1.1. *(i)* $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$; *(ii)* $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$; *(iii)* $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$; *(iv)* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$; *(v)* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.

Д-во.* Относно (i), към всяко k-елементно подмножество $A\subseteq M$ съпоставяме неговото допълнение $M-A$, имащо $n-k$ елемента, и обратното, откъдето следва еднозначната обратима връзка между $\mathbf{C}_n^k$ и $\mathbf{C}_n^{n-k}$.

Относно (ii), множеството от комбинации на $\{a_1,\dots,a_n\}$ от клас k се разлага на две непресичащи се множества в зависимост от това дали a_n участва или не. От една страна, това са k-елементните подмножества на $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$, т.е. $\mathbf{C}_{n-1}^k$, а от друга – $(k-1)$-елементните подмножества на $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$, към всяко от които е добавен елементът a_n.

Твърдение (iii) следва от наблюдението, че a_n участва в $\frac{k}{n}$ от комбинациите на M от клас k, което ги превръща в елементи на $\mathbf{C}_{n-1}^{k-1}$ след премахването на a_n.

(iv) и (v) следват от биномната формула, като $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$, а $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$.

Като алтернативен подход, (v) следва от принципа за включване-изключване, приложен върху множествата $A_i = \{a\}$, $i = 1, \ldots, n$. Относно (iv), $\mathbf{C}_n^0, \mathbf{C}_n^1, \ldots, \mathbf{C}_n^n$ са две по две непресичащи се множества, чието обединение $\mathcal{P}(M) := \mathbf{C}_n^0 \cup \mathbf{C}_n^1 \cup \cdots \cup \mathbf{C}_n^n$ е **множеството на всички подмножества**, образувани от елементите на M. От друга страна, на всяко подмножество $A \subseteq M$ можем да съпоставим една и само една n-орка $(e_1, \ldots, e_n) \in \{0,1\}^n$ от нули и единици, такава че $a_i \in A \Longleftrightarrow e_i = 1$ за $i = 1, \ldots, n$, откъдето

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \left|\bigcup_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k\right| = |\mathcal{P}(M)| = |\{0,1\}|^n = 2^n.$$

$\square$

*Забележка** (Триъгълника на Паскал). Установените свойства на числата C_n^k могат да се илюстрират понагледно, ако ги разположим в един безкраен, симетричен относно височината си триъгълник, при който по бедрата на триъгълника се разполагат единици, а всеки вътрешен елемент е сбор на двата си съседа от предния ред.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & \ldots & & C_n^{n-1} & & C_n^n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\underline{1} & & \underline{\underline{4}} & & \underline{6} & & \underline{\underline{4}} & & \underline{1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
2^0 \\ 2^1 \\ 2^2 \\ 2^3 \\ 2^4
\end{array}$$

В n-тия ред сумата на елементите е равна на 2^n, като сумата на елементите на четни позиции е равна на сумата на елементите на нечетни позиции.

Пермутация с повторение. *Всяка k-членна редица, при която елементът a_1 се повтаря k_1 пъти, a_2 – k_2 пъти и т.н., където $k_1 + \cdots + k_n = k$, се нарича пермутация на елементите на M с повторение, дължина k и честоти $(k_1, \ldots, k_n)$, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{P}(k; k_1, \ldots, k_n) = \big\{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) : i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}, \#\{j : a_{i_j} = a_1\} = k_1, \ldots, \#\{j : a_{i_j} = a_n\} = k_n\big\}.$$

Дефинирайки $P(k; k_1, \ldots, k_n) = |\boldsymbol{P}(k; k_1, \ldots, k_n)|$, имаме

$$P(k; k_1, k_2, \ldots, k_n) \equiv \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}.$$

Д-во.* Ако $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ е такава k-орка, да означим с $X_1 = \{j \in \{1, \ldots, k\} : i_j = 1\}$ множеството от индекси j, за които $a_{i_j} = a_1$. Понеже $|X_1| = k_1$, то за X_1 има $C_k^{k_1}$ на брой възможни комбинации. Нека $(a_{i_1^*}, \ldots, a_{i_{k-k_1}^*})$ е редицата, получена след премахване на всичките k_1 елемента a_1 от $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$. Тогава $(a_{i_1^*}, \ldots, a_{i_{k-k_1}^*})$ представлява пермутация на $\{a_2, \ldots, a_n\}$ с повторение, дължина $k - k_1$ и честоти $(k_2, \ldots, k_n)$.

От друга страна, $(a_{i_1^*}, \ldots, a_{i_{k-k_1}^*})$ и X_1 определят еднозначно $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$. Следователно,

$$P(k; k_1, \ldots, k_n) = C_k^{k_1} \cdot P(k - k_1; k_2, \ldots, k_n),$$

откъдето $P(k; k_1, k_2, \ldots, k_n) = C_k^{k_1} C_{k-k_1}^{k_2} \cdots C_{k-k_1-\cdots-k_{n-1}}^{k_n}$, използвайки горната логика още $n-1$ пъти. $\square$

Забележка (Интерпретация). Елемента a_1 можем да поставим по $\binom{k}{k_1}$ различни начина на k_1 от общо k места в редицата. На всеки от тези начини отговарят по $\binom{k-k_1}{k_2}$ различни начина, по които можем да изберем k_2 от останалите $k - k_1$ места, на които да поставим елемента a_2,..., елемента a_n поставяме по $\binom{k-k_1-\cdots-k_{n-1}}{k_n} = 1$ начин на последните $k - k_1 - \cdots - k_{n-1}$ места.

Пример 1.3 (MISSISSIPPI). Броят на отделните анаграми на думата MISSISSIPPI е равен на броят на пермутациите на $\{M, I, S, P\}$ с повторение, дължина 11 и честоти $(1, 4, 4, 2)$; т.е. $P(11; 1, 4, 4, 2)$.

*Забележка*** (Разлагания на множество). Нека E е k-елементно множество. Всяка n-орка $(X_1,\dots,X_n)$ от подмножества $X_i \subseteq E$, такива че $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $E = \bigcup_{i=1}^n X_i$, се нарича **n-разлагане на** E. В частност, полагайки $|X_i| = k_i$, редицата $(X_1,\dots,X_n)$ се нарича n-разлагане на E от тип $(k_1,\dots,k_n)$, като $k_1+\dots+k_n = k$. Тогава броят на n-разлаганията на E от тип $(k_1,\dots,k_n)$ е

$$\binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2}\cdots\binom{k-k_1-\dots-k_{n-1}}{k_n} = \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}.$$

Нека сега $E = \{1,\dots,k\}$. Тогава за фиксирани $(k_1,\dots,k_n)$ съществува еднозначно обратимо съответствие между всички пермутации $(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$ на $M = \{1,\dots,n\}$ с повторение, дължина k и честоти $(k_1,\dots,k_n)$ и всички n-разлагания $(X_1,\dots,X_n)$ на E от тип $(k_1,\dots,k_n)$, дефинирано чрез $a_{i_j} = m \iff i_j \in X_m$, за $m = 1,\dots,n$ и $j = 1,\dots,k$. С други думи, множеството X_m съдържа информация за местата в редицата $(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$, на които стои елементът a_m, като знанието на $(X_1,\dots,X_n)$ е достатъчно, за да възпроизведем $(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$; и обратното.

Вариация с повторение. *Всяка наредена k-орка от елементи на M, за $k \in \mathbb{N}$, наричаме вариация на елементите на M от клас k с повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{V}(n,k) = \big\{(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) : i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}\big\}.$$

Дефинирайки $V(n,k) = |\boldsymbol{V}(n,k)|$, имаме

$$V(n,k) = n^k.$$

Д-во.* Не е трудно да се види, че $\mathbf{V}(n,k) = M \times M \times \dots \times M$ е k-тата декартова степен на M, откъдето следва, че $V(n,k) = |M|^k$. □

Пример 1.4 (Урна с топки - ctd.). Ако допуснем, че в Пример 1.1 извадените топки се връщат обратно и че редът на записване на изтеглените номера има значение, тогава броят на всички различни извадки е $V(n,k)$.

*Забележка*** (Разлагания на множество - ctd.). Нека E е k-елементно множество. Следвайки същите разсъждения като преди, съществува еднозначно обратимо съответствие между вариациите на M с повторение от клас k и n-разлаганията на E, което означава, че броят на n-разлаганията на E е

$$\sum_{k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}_0 : k_1+\dots+k_n = k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} = n^k.$$

Комбинация с повторение. *Всяко k-елементно <u>мулти</u>-подмножество на M, за $k \in \mathbb{N}$, наричаме комбинация на елементите на M от клас k с повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{C}(n,k) = \big\{\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\} : i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}\big\}.$$

Дефинирайки $C(n,k) = |\boldsymbol{C}(n,k)|$, имаме

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Д-во (Техника).* Допълваме множеството M с $k-1$ нови елемента $a_{n+1}, a_{n+2},\dots,a_{n+k-1}$, при което получаваме ново множество $M^* = \{a_1,\dots,a_{n+k-1}\}$. Нека $\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\} \in \mathbf{C}(n,k)$ е k-елементно мулти-подмножество на M, където допускаме, че $i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k$ *без загуба на общност*. Полагаме $i_j^* = i_j + (j-1)$ за $j = 1,\dots,k$. Тогава $\{a_{i_1^*},\dots,a_{i_k^*}\}$ представлява комбинация от елементи на M^* *без повторение* от клас k, т.е. $\{a_{i_1^*},\dots,a_{i_k^*}\} \in \mathbf{C}_{n+k-1}^k$.

От друга страна лесно можем да възстановим $\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\}$ от $\{a_{i_1^*},\dots,a_{i_k^*}\}$, полагайки $i_j = i_j^* - (j-1)$. Следователно съответствието между $\mathbf{C}(n,k)$ и $\mathbf{C}_{n+k-1}^k$ е взаимно еднозначно, откъдето $C(n,k) = C_{n+k-1}^k$. □

Пример 1.5 (Урна с топки - ctd.). Ако допуснем, че в Пример 1.1 извадените топки се връщат обратно и редът на записване на изтеглените номера *няма* значение, тогава броят на всички различни извадки е $C(n,k)$.

Твърдение 1.2.** *$C(n,k) = \sum_{i=0}^k C(n-1,i)$, при което $C(n,k) = C(n,k-1) + C(n-1,k)$.*

*Д-во**.* Нека $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-m}}, a_n, a_n, \ldots, a_n\} \in \mathbf{C}(n, k)$ е k-елементно мулти-подмножество на M, където a_n се среща m пъти, за $m = 0, 1, \ldots, k$. Тогава $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-m}}\} \in \mathbf{C}(n-1, k-m)$ е комбинация на $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ с повторение, чрез която можем да възстановим първоначалната комбинация, като към нея прибавим m пъти елемента a_n. Т.е., съществува еднозначно обратимо съответствие между $\mathbf{C}(n, k)$ и $\bigcup_{i=0}^{k} \mathbf{C}(n-1, i)$. Понеже множествата $\mathbf{C}(n-1, k), \ldots, \mathbf{C}(n-1, 0)$ са две по две непресичащи се, имаме $|\mathbf{C}(n, k)| = \sum_{i=0}^{k} |\mathbf{C}(n-1, i)|$. $\square$

*Забележка*** (Триъгълника на Паскал). По силата на установената рекурентна връзка, числата $C(n, k)$ могат да бъдат разположени в един безкраен триъгълник, при който всеки вътрешен елемент е сбор на двата си съседа от предния ред, а по бедрата на триъгълника са разположени единици. От друга страна, уравнението $C(n, k) = \sum_{i=0}^{k} C(n-1, i)$ се демонстрира от защрихованите елементи.

$$\begin{array}{c}
\cancel{C(1,0)} \\
C(2,0) \quad \cancel{C(1,1)} \\
C(3,0) \quad C(2,1) \quad \cancel{C(1,2)} \\
C(4,0) \quad C(3,1) \quad \cancel{C(2,2)} \quad C(1,3) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C(m,0) \quad C(m-1,1) \quad \ldots \quad C(2,m-2) \quad C(1,m-1) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Принцип за включване-изключване. *Нека $A_1, \ldots, A_n$. са крайни множества. Тогава*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Д-во.* При $n = 2$, нека $A_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $A_2 = \{b_1, \ldots, b_m\}$ удовлетворяват $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, т.е. $a_i \neq b_j$. Да положим $c_k = a_k$, $k = 1, \ldots, n$ и $c_k = b_{n-k}$, $k = n+1, \ldots, n+m$. Тогава $A \cup B = \{c_1, \ldots, c_{n+m}\}$, от което следва, че $|A_1 \cup A_2| = n + m = |A_1| + |A_2|$. Следователно, за произволни A_1, A_2, имаме

$$|A_1 \cup A_2| = \left|(A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)\right| = |A_1 \cap A_2^c| + |A_1^c \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|.$$

Но $|A_1| = \left|(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)\right| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2^c|$ и $|A_2| = |A_2 \cap A_1| + |A_2 \cap A_1^c|$, откъдето

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Нека равенството важи за $n - 1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right| &= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{i<j\leq n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| + |A_n| - \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{i<j\leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

*Комбинаторно д-во**.* Нека $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, като x е общ елемент на $k \in \{1, \ldots, n\}$ от множествата, да кажем $A_1, \ldots, A_k$. Тогава в сумата $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ елементът x е преброен $\binom{k}{1}$ пъти, в $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ – е преброен $\binom{k}{2}$ пъти (виж Задача 2.7),..., в $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ – е преброен $\binom{k}{k} = 1$ път, откъдето

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = 1 - (1-1)^k = 1.$$

$\square$

Задачи

Задача 1.1. Намерете броя на възможните начини за разпределяне на k частици в n различими клетки, ако

(а) частиците са различими/неразличими и всяка клетка може да съдържа най-много една частица;

(б) частиците са различими/неразличими (и клетките могат да съдържат произволен брой частици);

(в) частиците са различими/неразличими и няма празна клетка (за $k \geq n$);

(г) частиците са различими/неразличими, в клетка 1 има точно s частици, а в останалите клетки – най-много по една частица (за $k \geq s \geq k-n+1$);

(д*) частиците са различими/неразличими, клетка 1 побира произволен брой частици, а останалите клетки – най-много по една частица;

(е*) частиците са различими/неразличими, в клетка 1 има не повече от s частици, а в останалите клетки – най-много по една частица;

(ж*) частиците са различими/неразличими, в клетка 1 има поне s частици, а в останалите клетки – най-много по една частица.

Решение (Техника). $M = \{1, \ldots, n\}$.

(а) За *различими*: V_n^k; за *неразличими*: C_n^k.

(б) За *различими*: $V(n,k)$; за *неразличими*: $C(n,k)$.

(в) За *различими*: нека $A = \{$няма празна клетка$\}$. Тогава $A^c = \{$поне една празна клетка$\}$. Всъщност, ако $A_i = \{$клетка i не е празна$\}$, за $i = 1, \ldots, n$, то A_i^c е множеството от всички k-орки на M, които не съдържат елемента i, при което $A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$.

От друга страна $|A_i^c| = V(n-1,k)$, $|A_i^c \cap A_j^c| = V(n-2,k)$ и т.н. Следователно общият брой на разпределенията, при които не остава празна клетка, е равен на общият брой разпределения минус тези с поне една празна клетка, откъдето получаваме, използвайки принципа за включване-изключване,

$$|A| = V(n,k) - \Big|\bigcup_{i=1}^n A_i^c\Big| = n^k - \Big(n \cdot V(n-1,k) - \binom{n}{2} V(n-2,k) + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 0\Big) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k.$$

За *неразличими*: при условие, че във всяка клетка има поне една топка, се търси комбинация от вида $\{1, 2, \ldots, n, i_1, \ldots, i_{k-n}\}$ за $i_1, \ldots, i_{k-n} \in M$; т.е. общият брой е $C(n, k-n) = C_{k-1}^{n-1}$.

(г) За *различими*: търси се редица от вида $(\ldots, i_1, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, i_{k-s}, \ldots)$, имаща s "1"-ци на места $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, k\}$ и $k-s$ елемента $i_1, \ldots, i_{k-s} \in \{2, \ldots, n\}$ без повторение. Тя се разлага еднозначно на редицата $(i_1, \ldots, i_{k-s})$ и комбинацията $\{j_1, \ldots, j_s\}$; т.е. общият брой е $\binom{k}{s} V_{n-1}^{k-s}$.

За *неразличими*: търси се комбинация от вида $\{1, \ldots, 1, i_1, \ldots, i_{k-s}\}$, такава че $i_j \neq i_l$ и $i_1, \ldots, i_{k-s} \in \{2, \ldots, n\}$; т.е. общият брой е C_{n-1}^{k-s}.

(д) За *различими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{k} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$; за *неразличими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{k} C_{n-1}^{k-j}$.

(е) За *различими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{\min(s,k)} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$; за *неразличими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{\min(s,k)} C_{n-1}^{k-j}$.

(ж) За *различими*: $\sum_{j=s}^{k} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 \geq k-s$, и $\sum_{j=k-n+1}^{k} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 < k-s$.

За *неразличими*: $\sum_{j=s}^{k} C_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 \geq k-s$, и $\sum_{j=k-n+1}^{k} C_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 < k-s$.

□

*Забележка** (Stirling numbers of the second kind). Числото на Стирлинг от втори род брои начините за разделяне на множество от k различими обекта (частици) на n *неразличими* непразни подмножества (клетки) и се обозначава с $S(k,n)$. Тогава от подточка в) следва, че

$$S(k,n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k.$$

Задача 1.2. Колко решения има уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, ако

(а) $x_1, \ldots, x_k$ са естествени числа (за $k \leq n$);

(б) $x_1, \ldots, x_k$ са неотрицателни цели числа.

**Колко на брой са решенията, ако редът на записването на x_i няма значение?

Решение (Техника).

(а) *Решение 1*: задачата е еквивалентна на разпределянето на n неразличими частици в k клетки в случая, когато не остава празна клетка (Задача 1.1в); т.е. броят на решенията е $C(k, n-k)$.

Решение 2 (stars & bars): всяко решение на задачата може да се визуализира като наредба от n

звезди “ $*$ ” и $k-1$ черти “ $|$ ”, напр. $**||**|*\cdots|***|$, където $x_1 = \{$брой $*$ преди първата $|\}$, $x_k = \{$брой $*$ след последната $|\}$ и $x_i = \{$брой $*$ между $(i-1)$-тата и i-тата $|\}$, $i = 2, \dots, k-1$. Т.е., проблемът се свежда до избор на $k-1$ места, на които да поставим “ $|$ ”, избрани от $n+1$ възможни места в редицата от звезди $**\cdots**$. Понеже $x_i > 0$ в (а), не можем да имаме две последователни черти, нито да започваме или завършваме с “ $|$ ”. С други думи, търсим $\{j_1, \dots, j_{k-1}\}$ за $j_1, \dots, j_{k-1} \in \{1, \dots, n-1\} : j_m \neq j_l$, откъдето намираме броя на решенията: C_{n-1}^{k-1}.

(б) *Решение 1*: задачата е еквивалентна на разпределянето на n неразличими частици в k клетки (Задача 1.1б); т.е. броят на решенията е $C(k, n)$.

Решение 2: съществува еднозначна обратимост между решенията на $x_1 + \cdots + x_k = n$ и тези на $(x_1 + 1) + \cdots + (x_k + 1) = n + k$; т.е. C_{n+k-1}^{k-1} от (а).

□

*Задача** 1.3. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако

(а) не се допуска повторение на цифри;
(б) допуска се повторение на цифри;
(в) не се допускат повторения и числото е нечетно.

Отговори. (а) V_5^4; (б) $V(5, 4)$; (в) $3 \cdot V_4^3$ или $\frac{3}{5} V_5^4$. □

*Задача** 1.4. По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако

(а) няма ограничение за участие в нея;
(б) A и B не трябва да участват заедно;
(в) C и D могат да участват само заедно.

Отговори. (а) C_{12}^4; (б) $C_{10}^4 + 2 \cdot C_{10}^3$; (в) $C_{10}^2 + C_{10}^4$. □

*Задача** 1.5. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A, B и C. Да се намери броят на всички различни разпределения, за които:

(а) кутия A е празна;
(б) само кутия A е празна;
(в) точно една кутия е празна;
(г) поне една кутия е празна;
(д) няма празна кутия.

Отговори. (а) 2^5; (б) $2^5 - 2$; (в) $3(2^5 - 2)$; (г) $3(2^5 - 2) + 3$; (д) $3^5 - (3(2^5 - 2) + 3)$. □

Задача 1.6. Нека $M = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$. Обозначаваме с A_i (респ. B_i) множеството от всички k-елементни подмножества на M, съдържащи точно i обекта от типа a (или b), за $i = 0, 1, \dots, k$ и $k \leq \min\{m, n\}$.

(а) Да се пресметнат $|A_i|$ и $|B_i|$.
(б) Да се докаже комбинатортно, че $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ (*формула на Вандермонд*).
(в) Колко са на брой k-елементните подмножества на M, които съдържат поне един обект от типа a и поне един обект от типа b?
(г) Колко са на брой подмножествата на M, които съдържат поне един обект от типа a и поне един обект от типа b?

Решение. Нека $M^a = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $M^b = \{b_1, \dots, b_n\}$. (а) $|A_i| = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ и $|B_i| = |A_{k-i}|$; (б) множествата $A_0, \dots, A_k$ са две по две непресичащи се и изброяват всички възможни комбинации на M от клас k, т.е. $\bigcup_{i=0}^k A_i = \mathbf{C}_{m+n}^k$, откъдето следва, че $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^k |A_i|$; (в) $C_{m+n}^k - |A_0| - |B_0| = \sum_{i=1}^{k-1} |A_i|$; (г) това са всички подмножества на M, с изключение на тези, състоящи се изцяло от елементи от един и същи тип,

$$|\mathcal{P}(M)| - |\mathcal{P}(M^a)| - |\mathcal{P}(M^b)| + 1 = (2^m - 1)(2^n - 1) = \big(|\mathcal{P}(M^a)| - 1\big)\big(|\mathcal{P}(M^b)| - 1\big),$$

където добавяме една единица, понеже празното множество е добавено веднъж и извадено два пъти. □

*Задача** 1.7. По колко различни начина от $2n$ шахматиста могат да се образуват $k \leq n$ шахматни двойки, ако

(а) цветът на фигурите и номерът на дъските се взимат предвид;
(б) цветът на фигурите се взима предвид, но номерът на дъските няма значение;
(в) цветът на фигурите няма значение, но номерът на дъските се взима предвид;
(г) цветът на фигурите и номерът на дъските нямат значение.

Отговори. (а) V_{2n}^{2k}; (б) $\frac{1}{k!} V_{2n}^{2k}$; (в) $\prod_{i=0}^{k-1} C_{2n-2i}^2$; (г) $\frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} C_{2n-2i}^2$. □

*Задача*** 1.8. Пресметнете броя на траекториите в правоъгълна координатна система, започващи в точка (x_1, y_1) и завършващи в точка (x_2, y_2), ако правим скокове с големина ± 1. А колко на брой са траекториите от (x_1, y_1) до (x_2, y_2), които не докосват хоризонталата $y = r$?

Решение (Техника). Нека обозначим с u и d броя на скоковете, които правим, съответно с големина 1 и -1. За да свържем (x_1, y_1) и (x_2, y_2), трябва да извършим общо $u + d = x_2 - x_1$ скока, като нетната промяна във височината ще бъде $u - d = y_2 - y_1$. Тогава $u = \frac{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}{2}$, от което следва, че проблемът е добре дефиниран тогава и само тогава, когато u е цяло число. В този случай общият брой на траекториите, означен с $N_{x_2-x_1,y_2-y_1}$, е равен на броя на пермутациите на $\{1, -1\}$ с повторение, дължина $u + d$ и честоти (u, d),

$$N_{x_2-x_1,y_2-y_1} = \binom{u+d}{u} = \binom{x_2 - x_1}{\frac{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}{2}}.$$

Що се отнася до втория въпрос, нека първо преброим траекториите, които докосват $y = r$. За всяка такава траектория можем да отразим частта до първия контакт с $y = r$ около $y = r$, и обратното, като отражението на (x_1, y_1) ще бъде в точка $(x_1, r + (r - y_1))$. По този начин определяме обратимо еднозначно съответствие между траекториите, които свързват (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и докосват $y = r$, и тези от $(x_1, -y_1 + 2r)$ до (x_2, y_2) (т.нар. *reflection principle*). Общият брой на последните е $N_{x_2-x_1,y_2+y_1-2r}$, от което следва, че броят на траекториите, които не докосват $y = r$, е

$$N_{x_2-x_1,y_2-y_1} - N_{x_2-x_1,y_2+y_1-2r} = \binom{x_2 - x_1}{\frac{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}{2}} - \binom{x_2 - x_1}{\frac{(x_2-x_1)+(y_2+y_1)}{2} - r}.$$

$\square$

2 Вероятности

2.1 Дискретни вероятности

Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ е множеството от възможните изходи (елементарни събития) на даден случаен експеримент, имащ изброимо много на брой изходи. Към всяко елементарно събитие ω_n съотнасяме едно число $p(\omega_n)$, такова че $p(\omega_n) \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p(\omega_n) = 1$. Тогава на всяко събитие $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, да кажем $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots\}$, съпоставяме неотрицателното число

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{m} p(\omega_{i_m}) \equiv \sum_{n: w_n \in A} p(\omega_n).$$

Функцията $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ дефинира вероятностна мярка върху $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, наричана още дискретна, а тройката $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ образува т. нар. дискретно вероятностно пространство.

Равномерни вероятности. *Нека $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ е дискретно вероятностно пространство (в. п.), където $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ е крайно множество. Ако елементарните събития са еднакво вероятни, т.е. $p(\omega_i) = p$, тогава $p = \frac{1}{n}$, от което следва, че за всяко $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\} \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{m} p(\omega_{i_j}) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|};$$

т.е. $\mathbb{P}(A)$ е съотношението между броя на благоприятните изходи за събитието A и броя на възможните изходи на експеримента.

Забележка (Интуиция). Модели на вероятностни пространства, водещи до равномерни вероятности, се използват, когато елементарните събития се намират в едно и също отношение към условията, дефиниращи характера на случайния експеримент, като при пресмятане на самите вероятности широко се използва комбинаториката.

Пример 2.1 (Урна с топки). Урна съдържа M черни и $N - M$ бели топки. Правим случайна ненаредена извадка без връщане с обем $n \leq N$, т.е. $\Omega = \big\{\{a_1, \dots, a_n\} : a_i \in \{ч_1, \dots, ч_M, б_1, \dots, б_{N-M}, a_i \neq a_j, i \neq j\}\big\}$. Ако допуснем, че елементарните събития са еднакво вероятни, то от Задача 1.6 следва, че вероятността извадката да съдържа точно $k \leq n$ черни топки, за $M - (N - n) \leq k \leq M$, е

$$\mathbb{P}(\{k \text{ черни от } n\}) = \frac{\text{брой n-извадки с k черни}}{\text{брой n-извадки от N}} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Забележете също така, че $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{k \text{ черни от } n\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n} = \binom{N}{n} / \binom{N}{n} = 1$.

Задачи

Задача 2.1. Да се пресметне вероятността при хвърлянето на четири правилни зара да се падне поне една единица при предположение, че:

(а) заровете са различими и различните изходи са еднакво вероятни;
(б) заровете са неразличими и различните изходи са еднакво вероятни.

Описват ли вярно реалната действителност и двете предположения?

Решение. (а) $\Omega = \big\{(a_1, \dots, a_4) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\big\}$. $\mathbb{P}(\{\text{поне една 1-ца}\}) = 1 - \frac{\text{изходи без единица}}{\text{всички изходи}} = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.517$; (б) $\Omega = \big\{\{a_1, \dots, a_4\} : a_i \in \{1, \dots, 6\}\big\}$. $\mathbb{P}(\{\text{поне една 1-ца}\}) = 1 - \frac{C(5,4)}{C(6,4)} \approx 0.444$.

Ако и двете предположения, макар и математически издържани, описваха вярно реалността, щеше да се окаже, че вероятността да се падне поне една единица е съществено по-голяма, когато, например, заровете са оцветени различно. □

Забележка (Парадокс на Дьо Мере). Независимо дали заровете са субективно различни или не, те съществуват като различни реални обекти. Всъщност, дори да смятахме, че заровете са неразличими, не бихме приели елементарните събития в (б) за равновероятни, т.е. (б) не описва вярно експеримента във вероятностно отношение (напр., хвърлянето на $\{1, 6, 6, 6\}$ очакваме да е (четири пъти) по-вероятно от $\{6, 6, 6, 6\}$). Тогава е по-удобно да се приложи моделът с различими зарове, тъй като в този модел елементарните изходи са еднакво вероятни и е в сила формулата за равномерните вероятности.

*Задача** 2.2. Каква е вероятността случайно избрана плочка от домино да съдържа различни числа на двете си половинки?

Решение. Нека $\Omega = \big\{\{a_1, a_2\} : a_1, a_2 \in \{0, \dots, 6\}\big\}$. Тогава $|\Omega| = C(7, 2)$, т.е. играта се играе с 28 плочки. В този случай, за разлика от задачата със заровете, така описаните елементарни събития са равновероятни, откъдето следва, че $\mathbb{P}(\{\{a_1, a_2\} : a_1 \neq a_2\}) = C_7^2/C(7, 2) = 0.75$. $\square$

Задача 2.3. Ако номерата на колите са равномерно разпределени, каква е вероятността номерът на случайна лека кола

(а) да не съдържа еднакви цифри;
(б) да има точно две еднакви цифри;
(в) да има точно три еднакви цифри;
(г) да има две двойки еднакви цифри;
(д) сумата на първите две цифри да съвпада със сумата на последните две?

Решение. Нека $\Omega = \big\{(a_1, \dots, a_4) : a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}\big\}$. (а) $V_{10}^4/10^4$. (б)

Решение 1: ще съставим такова $(a_1, \dots, a_4)$ като първо изберем уникалните му цифри $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ и след това пермутираме елементите на $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ с повторение и честота $(1, 1, 2)$ или $(1, 2, 1)$ или $(2, 1, 1)$, в зависимост от това кое a_i^* повтаряме; т.е. търсената вероятност е $\binom{10}{3}\big\{\binom{4}{2,1,1} + \binom{4}{1,2,1} + \binom{4}{1,1,2}\big\}/10^4$.

Решение 2: избираме коя цифра да повторим, на кои две места да я повторим, след което попълваме останалите 2 места; т.е. $10\binom{4}{2}V_9^2/10^4$.

(в) $\binom{10}{2}\big\{\binom{4}{3,1} + \binom{4}{1,3}\big\}/10^4$ или $10\binom{4}{3}V_9^1/10^4$; (г) $\binom{10}{2}\binom{4}{2,2}/10^4$ или $\binom{4}{2}\binom{10}{2}/10^4$; (д) за двойките (a_1, a_2) и (a_3, a_4) има различен брой възможности в зависимост от сумата $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, като

$a_1 + a_2 =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
варианти за (a_1, a_2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
варианти за (a_1, a_2, a_3, a_4)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1

Следователно, отговорът е $\frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{9} i^2 + 10^2}{10^4}$. $\square$

Задача 2.4. Картите от (случайно наредено) стандартно тесте се теглят последователно. Играч 1 печели, ако се обърне седмица спатия, а Играч 2 – ако първо се обърнат две аса. Каква е вероятността Играч 1 да спечели?

Решение (Техника). Можем да си представим, че изплащането на наградите се случва след като се изтеглят всички карти, т.е. $\Omega = \big\{(a_1, \dots, a_{52}) : a_i \in \{1, \dots, 52\}, a_i \neq a_j\big\}$.

Печеливши за Играч 1 са пермутациите, при които наблюдаваме $(\dots, 7\text{C}, \dots, A_1, \dots, A_2, \dots, A_3, \dots, A_4, \dots)$ или $(\dots, A_1, \dots 7\text{C}, \dots, A_2, \dots, A_3, \dots, A_4, \dots)$. Можем да конструираме еднозначно всяка една от тях, като първо изберем позициите на асата и 7С заедно, след това ги подредим по един от описаните начини и накрая запълним останалите места с останалите карти. Тогава

$$\mathbb{P}(\{\text{Играч 1 печели}\}) = \frac{\text{пермутации с 7С-}A_1\text{-}A_2\text{-}A_3\text{-}A_4}{P_{52}} + \frac{\text{пермутации с }A_1\text{-7С-}A_2\text{-}A_3\text{-}A_4}{P_{52}} = 2\frac{\binom{52}{5}4!47!}{52!} = \frac{2}{5}.$$

Всъщност ни интересува само позицията на 7С между четирите аса (независимо от цветовете им), така че за $\Omega^* = \{(7\text{C}, A, A, A, A), \dots (A, A, A, A, 7\text{C})\}$, получаваме отново $\mathbb{P}^*(\{\text{Играч 1 печели}\}) = \frac{2}{5}$. $\square$

*Задача** 2.5. От партида изделия, от които n са доброкачествени и m – бракувани, за проверка по случаен начин са взети s изделия. При проверката се оказало, че първите k от проверяваните s изделия са доброкачествени $(k < s)$. Да се пресметне вероятността $(k + 1)$-вото изделие да се окаже доброкачествено.

Решение. Можем да си представим, че случайният експеримент се провежда след първата проверка, когато партидата вече се състои от $n - k$ доброкачествени и m бракувани изделия. Абстрахирайки се допълнително от проверката на последните $s - k - 1$ изделия, получаваме $\mathbb{P}(\{k + 1\text{-во добро}\}) = \frac{n-k}{n+m-k}$. $\square$

*Задача** 2.6. Хвърлят се 10 зара. Каква е вероятността да се паднат равен брой единици и шестици?

Отговор. $\sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{10}{k}\binom{10-k}{k}4^{10-2k}}{6^{10}} \equiv \sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{10}{2k}\binom{2k}{k,k}4^{10-2k}}{6^{10}}$. $\square$

Задача 2.7. От урна, съдържаща топки с номера $1, \dots, n$, се вадят последователно k топки $(k \leq n)$. Каква е вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако (а) теглим без да връщаме; (б) изтеглените топки се връщат обратно в урната?

Решение (Техника).

(а) $\Omega = \{(a_1, \ldots, a_k) : 1 \leq a_i \leq n, a_i \neq a_j\}$. Нека $A = \{(a_1, \ldots, a_k) : 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n\}$. Всяка редица $a_1 < \cdots < a_k$ определя еднозначно комбинация на $\{1, \ldots, n\}$ от k-ти ред без повторение, именно $\{a_1, \ldots, a_k\}$, и обратно – една единствена подредба на $\{a_1, \ldots, a_k\}$ образува растяща редица. От тук следва съществуването на биекция от A в $\mathbf{C}_n^k$, откъдето $\mathbb{P}(A) = C_n^k / V_n^k = \frac{1}{k!}$.

(б) $\Omega = \{(a_1, \ldots, a_k) : 1 \leq a_i \leq n\}$. Нека $A = \{(a_1, \ldots, a_k) : 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n\}$. От всяка редица $a_1 \leq \cdots \leq a_k$ можем да образуваме строго растяща такава $a_1^* < \cdots < a_k^*$, използвайки трансформацията $a_i^* = a_i + (i-1)$, като тогава $a_i^* \in \{1, \ldots, n+k-1\}$. Понеже тази трансформация е обратима, от (а) следва, че $\mathbb{P}(A) = C(n,k)/V(n,k)$.

□

Задача 2.8 (Occupancy Problem). Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n-те различни адреса и изпратила писмата. Каква е вероятността никой да не получи своето писмо?

Решение (Техника). $\Omega = \{(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq a_i \leq n, a_i \neq a_j\}$. Нека $A = \{$никой не е получил своето писмо$\}$. Дефинираме $B_i := \{(a_1, \ldots, a_{i-1}, i, a_{i+1}, \ldots, a_n) : 1 \leq a_j \leq n, a_j \neq a_l\}$. Тогава $A = \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)^c$, $|B_i| = (n-1)!$, $|B_i \cap B_j| = (n-2)!$, $i \neq j$, и т.н., откъдето

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|\bigcup_{i=1}^n B_i|}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

□

*Забележка*** (Derangement). Броят на пермутациите на едно множество с n елементи, при които нито един елемент не се появява на първоначалното си място, се нарича n *субфакториел* и се означава с $!n$. От горната задача следва, че $!n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$, откъдето $\lim_{n\to\infty} \frac{!n}{n!} = e^{-1}$, т.е. има ненулева, константна вероятност горното събитие да се случи, при $n \to \infty$.

Задача 2.9. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно $r \leq n-2$ човека? А ако се нареждат в кръг и $r < n-2$?

Решение. $\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \neq a_j\big\}$. Нека фиксирани са $x, y \in \{1, \ldots, n\} : x \neq y$.

Случай 1: за да получим крайната подредба $(a_1, \ldots, a_n)$, можем първо да изберем хората между x и y, $(b_1, \ldots, b_r)$, след което заедно с x и y да ги "вмъкнем" между останалите хора, $(c_1, \ldots, c_{n-r-2})$, на една от $(n-r-1)$ възможни позиции, напр. $(c_1, \ldots, c_k, y, b_1, \ldots, b_r, x, c_{k+1}, \ldots, c_{n-r-2})$. Понеже има 2 начина да се подредят x и y, търсената вероятност е

$$\frac{2 \cdot V_{n-2}^r \cdot P_{n-r-2} \cdot (n-r-1)}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Еквивалентно, първият човек ще седне отляво или отдясно на група от $r+1$ души, оставяйки свободно място за другия човек, като има за тази цел $2(n-r-1)$ възможни места от n. Вторият ще седне на точно 1 определено място от $n-1$ оставащи места, за да се изпълни условието.

Случай 2: понеже места "n" и "1" са "долепени", в допълнение към пермутациите в случай 1 трябва да разгледаме случаите, когато между x и y има r човека, като вземем предвид хората в двата края на редицата. Тях можем да конструираме, като разделим редицата $(y, b_1, \ldots, b_r, x)$ на две и след това построим $(b_{k+1}, \ldots, b_r, x, c_1, \ldots, c_{n-r-2}, y, b_1, \ldots, b_k)$ за $k = 0, 1, \ldots, r$; т.е. търсената вероятност е

$$\frac{2 \cdot V_{n-2}^r \cdot P_{n-r-2} \cdot (n-r-1)}{n!} + \frac{2 \cdot V_{n-2}^r \cdot P_{n-r-2} \cdot (r+1)}{n!} = \frac{2}{n-1}.$$

Еквивалентно, първият човек може да седне на всяко едно място, а вторият – на 2 възможни места от $n-1$, броейки $r+1$ места по часовниковата стрелка и $r+1$ места обратно на часовниковата стрелка. Когато $n = r+2$, тогава местата съвпадат и вероятността е $\frac{1}{n-1}$.

□

*Задача** 2.10. Нека k *неразличими* частици се разпределят по случаен начин в n *различими* клетки. Всяка клетка може да побере произволен брой частици. Предполагаме, че всички различими разпределения са равновероятни. Да се определи вероятността:

(а) фиксирана клетка да съдържа точно r частици $(r \leq k)$;

(б) точно m клетки да са празни $(m < n)$;

(в) във всяка клетка да има поне по две частици ($k \geq 2n$);
(г) във всяка клетка да има най-много по четири частици ($k \leq 4n$).

Отговори. (а) $\frac{C(n-1,k-r)}{C(n,k)}$; (б) $\binom{n}{m}\frac{C(n-m,k)}{C(n,k)}$; (в) $\frac{C(n,k-2n)}{C(n,k)}$; (г) $\frac{\sum_{i=0}^{\lfloor k/5 \rfloor}(-1)^i\binom{n}{i}C(n,k-5i)}{C(n,k)}$. □

Задача 2.11.* Нека k *неразличими* частици се разпределят по случаен начин в n *различими* клетки. Всяка клетка може да побере най-много една частица. Предполагаме, че всички различими разпределения са равновероятни. Да се определи вероятността фиксирана клетка да е празна ($k < n$).

Отговор. $\frac{n-k}{n}$. □

Задача 2.12.* Нека k *различими* частици се разпределят по случаен начин в n *различими* клетки. Всяка клетка може да побере произволен брой частици. Предполагаме, че всички различими разпределения са равновероятни. Да се определи вероятността:

(а) първата клетка да съдържа k_1 частици, втората – k_2 частици и т.н, където $k_1 + \cdots + k_n = k$;
(б) при $n = k$ нито една клетка да не остане празна;
(в) при $n = k$ да остане празна точно една клетка;
(г) точно m клетки да са празни ($n - k \leq m < n$).

Отговори. (а) $\frac{\binom{k}{k_1,\dots,k_n}}{n^k}$; (б) $\frac{n!}{n^n}$; (в) $\frac{n\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}$; (г) $\frac{\binom{n}{m}\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i\binom{n-m}{i}(n-m-i)^k}{n^n}$. □

Задача 2.13.* Хвърлят се n зара. Да се пресметне вероятността сумата от падналите се точки да бъде равна на: а) n; б) $n+1$; в) дадено число s.

Отговори. (а) $\frac{1}{6^n}$; (б) $\frac{n}{6^n}$; (в) $\frac{\sum_{k=0}^{\lfloor (s-n)/6 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}C(n,s-n-6k)}{6^n}$. □

Задача 2.14.* От n чифта обувки случайно се избират $2r$ обувки ($2r < n$). Да се пресметне вероятността измежду избраните обувки:

(а) да няма нито един чифт;
(б) да има точно един чифт;
(в) да има точно два чифта.

Решение. $\Omega = \big\{(a_1, \dots, a_{2r}) : a_i \in \{\text{л}_1, \dots, \text{л}_n, \text{д}_1, \dots, \text{д}_n\}, a_i \neq a_j\big\}$, $|\Omega| = V_{2n}^{2r}$.

(а) $\frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots(2n-4r+2)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2r+1)} = \frac{2^{2r}\cdot V_n^{2r-1}}{V_{2n}^{2r}} = \frac{2^{2r}\cdot\binom{n}{2r}}{\binom{2n}{2r}}$, т.е. без значение подредбата, избираме $2r$ чифта по $\binom{n}{2r}$ начина, след което решаваме да вземем дясна или лява обувка от всеки избран чифт.

(б) $\frac{\binom{2n}{2}\cdot 2\cdot n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots(2n-4r+4)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2r+1)} = \frac{n\cdot 2^{2r-2}\cdot\binom{n-1}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}$, където $\binom{2n}{2}$ са местата, на които по 2 начина поставяме лявата и дясната обувка от един и същи чифт, избран от всички n чифта обувки.

(в) $\frac{\binom{2r}{2}\cdot 2\cdot n\cdot\binom{2r-2}{2}\cdot 2\cdot(n-1)\cdot(2n-4)\cdot(2n-6)\cdots(2n-4r+6)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2r+1)} = \frac{\binom{n}{2}\cdot 2^{2r-4}\cdot\binom{n-2}{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}$.

□

*Задача** 2.15* (Bertrand's Ballot Problem). По време на избори за първия от двама кандидати са пуснати n бюлетини, а за втория – m бюлетини. Каква е вероятността при преброяване на бюлетините броят на преброените гласове, подадени за първия кандидат, да бъде по-голям от броя на гласовете, подадени за втория кандидат, през цялото време?

Решение (Техника). За всяко $i = 1, \dots, n+m$, полагаме $x_i = 1$, ако i-тата бюлетина е за кандидат 1, и $x_i = -1$, ако е за кандидат 2. Задачата е еквивалентна на това броят на нетните гласове $s_1 > 0, s_2 > 0 \dots, s_{n+m} = n - m > 0$ да бъде постоянно положителен, където $s_i = x_1 + \cdots + x_i$. Геометрично погледнато, последното предполага, че начупената линията, свързваща точките $(0,0), (1,s_1), (2,s_2), \dots, (n+m, n-m)$, не докосва абсцисната ос. Нещо повече, тъй като кандидат 1 е винаги начело, имаме $s_1 = x_1 = 1$ и траекториите, които удовлетворяват условието, са сред всички свързващи $(1,1)$ и $(n+m, n-m)$. Тогава от Задача 1.8 получаваме

$$\mathbb{P}(\{\text{кандидат 1 е винаги начело}\}) = \frac{\text{от } (1,1) \text{ до } (n+m, n-m) \text{ без да докосва}}{\text{всички от } (0,0) \text{ до } (n+m, n-m)} = \frac{\binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-1}{n}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{n-m}{n+m}.$$

□

2.2 Условни вероятности и независимост на събития

Условна вероятност. *Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство (в. п.) и $B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B) > 0$. Условната вероятност на събитието $A \in \mathcal{A}$ при условие B дефинираме чрез количеството*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

*Ако в допълнение $\mathbb{P}(A) > 0$, то $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ **(формула на Бейс)** или*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

По индукция, за $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, е в сила

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

*Забележка** (Интерпретация). Ако условията на случайния експеримент са се променили така, че възможните изходи ω лежат изцяло в B, тогава има смисъл да ограничим оригиналното в. п. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и да работим върху $\big(B, \mathcal{A} \cap B, \mathbb{P}(\cdot|B)\big)$, където $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{A} \cap B \to [0,1]$ е добре дефинирана вероятностна мярка, за разлика от $\mathbb{P}(\cdot \cap B)$. В частност е вярно за $\mathbb{P}(\cdot|B)$, че $\mathbb{P}(B|B) = 1$,

$$\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B),$$

и, за $A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B).$$

Пример 2.2 (Урна с топки - ctd.). Нека в Пример 2.1 приемем, че топките се теглят една по една, т.е. $\Omega = \{(a_1, \ldots, a_m) : a_i \in \{\text{ч}_1, \ldots, \text{ч}_M, \text{б}_1, \ldots, \text{б}_{N-M}\}, m = 1, \ldots, n\}$. Вероятността да изтеглим черна топка на първи ход е $\mathbb{P}(\text{ч}) = \frac{M}{N}$, а вероятността да изтеглим бяла топка на втори ход при положение, че сме изтеглили черна на първи ход, е $\mathbb{P}(\text{ч}, \text{б}|\text{ч}) = \frac{N-M}{N-1}$, и т.н. Тогава за всяка редица от n топки, k от които са черни (общо C_n^k на брой), напр. $\omega^{(k)} = (\text{ч}, \text{б}, \text{ч}, \ldots, \text{б}, \text{ч})$, имаме

$$\mathbb{P}(\text{ч}, \text{б}, \text{ч}, \ldots, \text{б}, \text{ч}) = \mathbb{P}(\text{ч})\mathbb{P}(\text{ч}, \text{б}|\text{ч}) \cdots \mathbb{P}(\text{ч}, \text{б}, \text{ч}, \ldots, \text{б}, \text{ч}|\text{ч}, \text{б}, \text{ч}, \ldots, \text{б}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N-1} \cdot \frac{M-1}{N-2} \cdots \frac{M-k+1}{N-n+1} = \frac{V_M^k V_{N-m}^{n-k}}{V_N^n},$$

което е инвариантно спрямо реда на изтеглените цветове. Следователно,

$$\mathbb{P}(\{k \text{ черни от } n\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1^{(k)}, \ldots, \omega_{C_n^k}^{(k)}\}) = \binom{n}{k} \frac{V_M^k V_{N-m}^{n-k}}{V_N^n} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Сравнявайки горното решение с това в Пример 2.1, следва, че тегленето на всички n топки наведнъж или една по една е еквивалентно от вероятностна гледна точка.

Независимост. *Събитията $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ се наричат независими в съвкупност, ако за кои да е $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ при $k = 2, \ldots, n$, имаме*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Две събития $A, B \in \mathcal{A}$ са независими, означено с $A \perp\!\!\!\perp B$, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. В допълнение, ако $\mathbb{P}(B) > 0$, то $A \perp\!\!\!\perp B$ тогава и само тогава, когато

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Забележка (Внимание). Две събития $A, B \in \mathcal{A}$ т.ч. $A \cap B = \emptyset$ не са непременно независими. Напротив, от настъпването на кое да е от тях следва, че другото събитие не може да се случи.

Пример 2.3. Хвърлят се два зара. Разглеждаме събитията $A_1 = \{$на първия зар се пада нечетно число$\}$, $A_2 = \{$на втория зар се пада нечетно число$\}$ и $A_3 = \{$сумата от точките е нечетна$\}$. Тогава $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$ и $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$, но $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$; т.е. събитията са две по две независими, но не са независими в съвкупност.

Твърдение 2.1. *Ако $A \perp\!\!\!\perp B$, то $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B$ и $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$.*

Д-во. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$. Останалите твърдение се доказват по аналогичен начин. □

Задачи

Задача 2.16. Застрахователна компания води статистика за своите клиенти. Известно е, че 1) всички клиенти посещават лекар поне веднъж годишно; 2) 60% посещават лекар повече от веднъж годишно; 3) 17% посещават хирург; 4) 15% от тези, които посещават лекар повече от веднъж годишно, посещават хирург. Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава лекар само веднъж годишно, да не е бил при хирург?

Решение. Нека $A = \{\text{посещава хирург}\}$ и $B = \{\text{на лекар } > 1 \text{ годишно}\}$. По условие $\mathbb{P}(A) = 0.17$, $\mathbb{P}(B) = 0.6$ и $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = 0.09$, откъдето $\mathbb{P}(A^c|B^c) = \frac{\mathbb{P}((A\cup B)^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)}{1-\mathbb{P}(B)} = 0.80$. □

Задача 2.17. Трима ловци стрелят едновременно по заек. Заекът е убит от един куршум. Каква е вероятността той да е изстрелян от първия ловец, ако те уцелват с вероятност, съответно 0.2, 0.4 и 0.6?

Решение. Нека $A = \{\text{убит от един куршум}\}$ и $H_i = \{\text{ловец i уцелва}\}$, $i = 1, 2, 3$. Тогава $A = (H_1 \cap H_2^c \cap H_3^c) \cup (H_1^c \cap H_2 \cap H_3^c) \cup (H_1^c \cap H_2^c \cap H_3)$, откъдето $\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap H_1)}{\mathbb{P}(A)} \approx 10\%$. □

Задача 2.18 (Birthday Paradox). Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин така, че вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по голяма от $1/2$?

Отговор. $\min\{n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{V_{365}^n}{365^n} > \frac{1}{2}\} = 23$. □

Задача 2.19 (Boy or Girl Paradox). X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета?

Решение. Нека $\Omega = \big\{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{m, f\}\big\}$, $A = \{\text{по-малкото е момиче}\} \equiv \{(m, f), (f, f)\}$ и $B = \{\text{по-старото е момиче}\} \equiv \{(f, m), (f, f)\}$. Предполага се, че $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ и $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$. Тогава $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4}$, откъдето

$$\mathbb{P}(\text{по-малкото е момиче}|\text{по-старото е момиче}) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(\text{две момичета}|\text{по-старото е момиче}) = \mathbb{P}(A \cap B|A \cup B) = \mathbb{P}\big((f, f)|(f, m), (m, f), (f, f)\big) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{1}{3}.$$

□

*Задача** 2.20. Кутия съдържа n билета, от които $m \le n$ печелят, а останалите билети губят. Всеки от n играчи на свой ред избира по един билет. Какви са шансовете за печалба на всеки от играчите? Кога е по-изгодно да се изтегли билет?

Решение 1. Нека $A_k^0 = \{k\text{-тия играч тегли печеливш билет}\}$ и $A_k^1 = (A_k^0)^c$, $k = 1, \dots, n$. Тогава

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k^0) &= \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}\in\{0,1\}:\max\{0,k-(n-m)\}\le\sum_{j=1}^{k-1} i_j\le\min\{m-1,k-1\}} \mathbb{P}(A_1^{i_1})\mathbb{P}(A_2^{i_2}|A_1^{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_k^0|A_1^{i_1}\cap\cdots\cap A_{k-1}^{i_{k-1}}) \\
&= \sum_{i=\max\{0,k-(n-m)\}}^{\min\{m-1,k-1\}} \binom{k-1}{i} \frac{m\cdots(m-i+1)\cdot(m-i)\cdot(n-m)\cdots\big((n-m)-(k-i-1)+1\big)}{n\cdots(n-k+1)} \\
&= \frac{m}{n} \sum_{i=\max\{0,k-(n-m)\}}^{\min\{m-1,k-1\}} \frac{\binom{m-1}{i}\binom{(n-1)-(m-1)}{k-i-1}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{m}{n},
\end{aligned}$$

където $\sum_{i=\max\{0,k-(n-m)\}}^{\min\{m-1,k-1\}} \binom{m-1}{i}\binom{(n-1)-(m-1)}{k-i-1} = \binom{n-1}{k-1}$ от формулата на Вандермонд (виж Задача 1.6).

Решение 2. Начините за разпределяне на m печеливши билети между n души са $\binom{n}{m}$, от които $\binom{n-1}{m-1}$ са тези, при които печели k-тият играч; т.е. $\mathbb{P}(A_k^0) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{n}$. □

*Задача** 2.21. Двама души играят до победа, като за това е необходимо първият да спечели m партии, а вторият – n партии. Първият играч може да спечели всяка отделна партия с вероятност p, а вторият – с вероятност $1 - p$. Да се пресметне вероятността първият играч да спечели цялата игра.

Отговор. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k-1}{k} p^m (1 - p)^k$. □

Формула за пълната вероятност. *Нека* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ *образуват* ***пълна група от събития****, т.е.* $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$, $H_n \cap H_m = \emptyset$, $n \neq m$, *за* $n, m \in \mathbb{N}$. *Допускаме, че* $\mathbb{P}(H_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогава, за произволно събитие* $A \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap H_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n).$$

Ако в допълнение е изпълнено, че $\mathbb{P}(A) > 0$, *тогава за всяко* n,

$$\mathbb{P}(H_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n)}{\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|H_m)\mathbb{P}(H_m)}.$$

*Забележка** (ФПВ за УВ). Нека $A, B, C \in \mathcal{A}$. Ако $\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(B \cap C), \mathbb{P}(B \cap C^c) > 0$, тогава е изпълнено

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B \cap C^c)} \frac{\mathbb{P}(B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B, C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B, C^c)\mathbb{P}(C^c|B).$$

Пример 2.4. Две урни съдържат съответно $б_1$, $б_2$ бели топки и $ч_1$, $ч_2$ черни топки. От всяка урна случайно се изважда по една топка, а след това от тези две топки случайно се избира едната. Каква е вероятността тази топка да е бяла?

Нека $A = \{\text{бяла топка}\}$ и $H_{ij} = \{\text{цветът от първата урна е i, а от втората – j}\}$, за $i, j \in \{б,ч\}$. Тогава $\mathbb{P}(H_{ij}) = \frac{i}{б_1+ч_1} \frac{j}{б_2+ч_2}$, $\mathbb{P}(A|H_{бб}) = 1$, $\mathbb{P}(A|H_{бч}) = \mathbb{P}(A|H_{чб}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A|H_{чч}) = 0$, откъдето

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i,j \in \{б,ч\}} \mathbb{P}(A|H_{i,j})\mathbb{P}(H_{i,j}) = \frac{2б_1б_2 + б_1ч_2 + ч_1б_2}{2(б_1 + ч_1)(б_2 + ч_2)}.$$

Пример 2.5. Всяка от k_1 на брой урни съдържа по $б_1$ бели и $ч_1$ черни топки, а всяка от k_2 на брой урни – по $б_2$ бели и $ч_2$ черни топки. От случайно избрана урна е била изтеглена топка, която се оказва бяла. Каква е вероятността тази топка да е изтеглена от първата група урни?

Нека $A = \{\text{бяла топка}\}$ и $H_i = \{\text{топката е от i-тата група урни}\}$, $i \in \{1, 2\}$. Тогава $H_2 = H_1^c$, $\mathbb{P}(H_i) = \frac{k_i}{k_1+k_2}$ и $\mathbb{P}(A|H_i) = \frac{б_i}{б_i+ч_i}$, откъдето

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{P(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + P(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{б_1}{б_1+ч_1}}{\frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{б_1}{б_1+ч_1} + \frac{k_2}{k_1+k_2}\frac{б_2}{б_2+ч_2}} = \Big[1 + \frac{k_2б_2(б_1 + ч_1)}{k_1б_1(б_2 + ч_2)}\Big]^{-1}.$$

Задачи

Задача 2.22. Разполагаме с три стандартни зара и един, чиито страни са само шестици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат а) три шестици; б) различни цифри; в) последователни цифри?

Отговори. а) $\frac{1}{4}\frac{1}{6^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{6^2}$; б) $\frac{1}{4}\frac{V_6^3}{6^3} + \frac{3}{4}\frac{V_5^2}{6^2}$; в) $\frac{1}{4}\frac{4\cdot3!}{6^3} + \frac{3}{4}\frac{2}{6^2}$. □

*Задача** 2.23. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също случайно се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови?

Отговор. $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}$. □

Задача 2.24. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в 99% от случаите както при заразените (когато трябва да е положителен), така и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете, че 0.5% от населението има това заболяване, каква е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Отговор. $\approx 34\%$. □

Задача 2.25. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.7, а момчетата – с 0.4. След изпита се избират три резултата. Ако два от тях се оказали успешни, а един неуспешен, каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Решение. Нека $A = \{2 \text{ усп. и } 1 \text{ неусп.}\}$ и $H_i = \{\text{избрани i момичета}\}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Тогава $H_0, \dots, H_3$ образуват пълна група и $\mathbb{P}(H_i) = \frac{\binom{45}{i}\binom{55}{3-i}}{\binom{100}{3}}$. Отделно $\mathbb{P}(A|H_0) = 3 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.4^2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.6$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.7^2 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.3$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3$, откъдето $\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)} \approx 10\%$. □

Задача 2.26 (Bertrand's Box Paradox). Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна също да е бяла?

Решение. Нека $A = \{\text{горна бяла страна}\}$ и $H_i = \{\text{избрана е монета с i бели страни}\}$, $i = 0, 1, 2$. Тогава H_0, H_1, H_2 образуват пълна група, $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}$ и $\mathbb{P}(A|H_i) = \frac{i}{2}$, откъдето $\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)} = \frac{2}{3}$. □

Задача 2.27 (Monty Hall Problem). Зад една от три затворени врати има чисто нова кола, а зад другите две няма нищо. Избирате врата, след което водещият отваря една от останалите две врати, зад които няма нищо. Сега трябва да решите – сменяте ли избраната врата или запазвате първоначалния си избор?

Решение. Нека сме избрали врата 1, при което водещият, избирайки между врати 2 и 3, отваря врата 3, зад която няма нищо. Дефинираме $A = \{\text{отваря врата 3 при избрана врата 1}\}$ и $H_i = \{\text{врата i печели}\}$, $i = 1, 2, 3$. Знаем, че $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}$. По условие $\mathbb{P}(A|H_2) = 1$ и $\mathbb{P}(A|H_3) = 0$. Допускаме $\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{1}{2}$. Тогава $\frac{\mathbb{P}(H_1|A)}{\mathbb{P}(H_2|A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{1}{2}$, т.е. има двойно по-голям шанс колата да се намира зад врата 2. □

Задача 2.28. Всички изделия в едната от две партиди са доброкачествени, а в другата 1/4 от изделията са бракувани. Изделие, взето от случайно избрана партида, се оказало доброкачествено, след което е върнато обратно в своята партида. Да се пресметне вероятността второто случайно избрано изделие от същата партида да се окаже бракувано.

Решение. Нека $A = \{\text{2-ро бракувано}\}$, $B = \{\text{1-во добро}\}$ и $C = \{\text{от I-ва партида}\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B,C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B,C^c)\mathbb{P}(C^c|B) = 0 + \mathbb{P}(A|B,C^c)\frac{\mathbb{P}(B|C^c)\mathbb{P}(C^c)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{28}.$$

□

*Задача** 2.29. Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса и покриват целия конспект от 30 въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно той да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет?

Решение. Нека $A = \{\text{взема изпита}\}$, $H_i = \{\text{отговаря на i въпроси}\}$, $F = \{\text{отговаря на допълнителен въпрос}\}$, за $i = 0, 1, 2$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) = \frac{25 \cdot 24}{30 \cdot 29} + 2\frac{25 \cdot 5}{30 \cdot 29}\mathbb{P}(A|H_1,F)\mathbb{P}(F|H_1) = \frac{25 \cdot 24}{30 \cdot 29} + 2\frac{25 \cdot 5 \cdot 24}{30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 94\%$$

□

Задача 2.30. В урна има n бели, m зелени и l червени топки, които се изваждат по случаен начин една след друга: (а) с връщане; (б) без връщане. В двата случая да се пресметне вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена топка.

Решение (Техника). Нека $A = \{\text{бяла преди зелена}\}$.

(a) $\Omega = \{\text{б}, \text{з}, \text{чб}, \text{чз}, \text{ччб}, \text{ччз}, \dots, \text{чччч}\cdots\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{б}) + \mathbb{P}(\text{чб}) + \mathbb{P}(\text{ччб}) + \cdots = \frac{n}{n+m+l}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{l}{n+m+l}\Big)^k = \frac{n}{n+m+l} \cdot \frac{1}{1 - \frac{l}{n+m+l}} = \frac{n}{n+m}.$$

От друга страна, ако на първия ход няма победител, т.е. е настъпило събитието $\{\text{ч}\} = (\{\text{б}\} \cup \{\text{з}\})^c$, то играта започва отначало от вероятностна гледна точка. Това може да бъде изведено от

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|\text{б})\mathbb{P}(\text{б}) + \mathbb{P}(A|\text{з})\mathbb{P}(\text{з}) + \mathbb{P}(A|\text{ч})\mathbb{P}(\text{ч}) = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{n+m+l}\mathbb{P}(A|\text{ч}),$$

като $\mathbb{P}(A|\text{ч}) = \mathbb{P}(\text{чб}|\text{ч}) + \mathbb{P}(\text{ччб}|\text{ч}) + \cdots$. Но $\mathbb{P}(\text{чб}|\text{ч}) = \mathbb{P}(\text{б})$, $\mathbb{P}(\text{ччб}|\text{ч}) = \mathbb{P}(\text{чб})$, и т.н., откъдето $\mathbb{P}(A|\text{ч}) = \mathbb{P}(A)$. Следователно $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{n+m+l}\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+m}$.

(б) $\Omega = \{\text{б}, \text{з}, \text{чб}, \text{чз}, \text{ччб}, \text{ччз}, \dots, \text{ччч}\cdots\text{чб}, \text{ччч}\cdots\text{чз}\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{б}) + \mathbb{P}(\text{чб}) + \cdots + \mathbb{P}(\text{ччч}\cdots\text{чб}) = \frac{n}{n+m+l}\Big[1 + \sum_{k=1}^{l} \frac{l\cdots(l-k+1)}{(n+m+l-1)\cdots(n+m+l-k)}\Big].$$

От друга страна $A^c = \{\}$ и $\mathbb{P}(A^c) = \frac{m}{n+m+l}\big[1 + \sum_{k=1}^{l} \frac{l\cdots(l-k+1)}{(n+m+l-1)\cdots(n+m+l-k)}\big]$, откъдето намираме, че $\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{n}{m}$ и, съответно, $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+m}$ и $\mathbb{P}(A^c) = \frac{m}{n+m}$.

□

*Забележка**. Вероятността да няма победител в (а) е $\mathbb{P}(\text{ччччч}\cdots) = \lim_{k\to\infty}\big(\frac{l}{n+m+l}\big)^k = 0$.

*Задача** 2.31. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който пръв хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играта за всеки от играчите? А ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

Решение (Техника). Нека $A = \{\text{I печели}\}$ и $\Omega = \{E, TE, TTE, \dots, TTTTTTT\cdots\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(TTE) + \mathbb{P}(TTTTE) + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Рекурсивно решение: Използвайки същата логика като в Задача 2.30, имаме

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|TE)\mathbb{P}(TE) + \mathbb{P}(A|TT)\mathbb{P}(TT) = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A) \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}.$$

Що се отнася до втория въпрос, ролите на играчите са един вид разменени, като

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(ETT) + \mathbb{P}(TEE) + \mathbb{P}(ETETT) + \mathbb{P}(TETEE) + \cdots = 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

□

Задача 2.32. Всяка от N урни съдържа по m бели и n черни топки. От първата урна случайно се избира една топка и се прехвърля във втората. След това от втората урна случайно се избира една топка и се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде извадена бяла топка?

Решение (Техника). Нека $A_k = \{\text{от k-тата урна вадим бяла топка}\}$, $k = 1, \dots, N$. Тогава $\mathbb{P}(A_1) = \frac{m}{m+n}$. Допускаме, че $\mathbb{P}(A_k) = \frac{m}{m+n}$ е изпълнено за някое $k = 1, \dots, N-1$. Тогава

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1}|A_k)\mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{k+1}|A_k^c)\mathbb{P}(A_k^c) = \frac{m+1}{m+n+1}\frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n+1}\frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n},$$

откъдето по индукция следва, че $\mathbb{P}(A_N) = \frac{m}{m+n}$. □

*Задача*** 2.33 (Gambler's Ruin). Последователно се хвърля монета. Ако се падне ези, играчът печели 1 лв., а ако се падне тура – губи 1 лв. В началото на играта играчът има x лв. Играта завършва или когато играчът набере предварително определена сума от a лв., или когато проиграе всичките си пари. Каква е вероятността играчът да спечели? **А какъв е шансът играчът да спечели a лв. на n-ти ход?

Решение (Техника). Нека $A = \{\text{играчът печели}\}$ и $B = \{\text{играчът печели първото хвърляне}\}$. Дефинираме $p(x) = \mathbb{P}(\{\text{печели с } x \text{ лв. начален капитал}\})$, $x = 0, 1, \dots, a$. Тогава $p(0) = 0$, $p(a) = 1$ и

$$p(x) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{2}\big(p(x+1) + p(x-1)\big),$$

откъдето $p(x+1) - p(x) = p(x) - p(x-1) = \cdots = p(1) - p(0) = p(1)$. Но $p(x+1) - p(1) = \sum_{i=1}^{x}[p(i+1) - p(i)] = xp(1)$, т.е. $p(x) = xp(1)$. Следователно $p(a) = ap(1)$, откъдето $p(x) = \frac{x}{a}$.

Що се отнася до втория въпрос, резултатът следва след преброяване на траекториите от $(0,0)$ до $(n-1, a-x-1)$ (валидно за n, такова че $n+a-x$ е четно), които не докосват хоризонталите $y = -x$ и $y = a-x$, като от условието е ясно, че играчът печели n-тото хвърляне.

За по-прегледно, нека положим $n^* = n-1$, $m^* = a-x-1$. От Задача 1.8, броят на траекториите от $(0,0)$ до (n^*, m^*), докосващи $y = -x$ (или $y = a-x$), е N_{n^*, m^*+2x} (или $N_{n^*, m^*-2(a-x)}$). Въпреки това

$N_{n^*,m^*+2x} + N_{n^*,m^*-2(a-x)}$ брои по два пъти траекториите от $(0,0)$ до (n^*,m^*), които докосват $y=-x$ и после $y=a-x$, и тези, които докосват $y=a-x$ и после $y=-x$. Техният брой, прилагайки на два пъти принципа на отражението от Задача 1.8, е съответно $N_{n^*,m^*-2(a-x)-2x}$ и $N_{n^*,m^*+2(a-x)+2x}$.

Аналогично, в $N_{n^*,m^*+2x}+N_{n^*,m^*-2(a-x)}-N_{n^*,m^*-2(a-x)-2x}-N_{n^*,m^*+2(a-x)+2x}$ са извадени траекториите от $(0,0)$ до (n^*,m^*), които докосват последователно $y=-x$, $y=a-x$ и $y=-x$, и тези, които докосват последователно $y=a-x$, $y=-x$ и $y=a-x$.

Нека означим с $N(A_1)=N_{n^*,m^*+2x}$, $N(A_2)=N_{n^*,m^*-2(a-x)-2x}$, $N(A_3)$ броя на траекториите от $(0,0)$ до (n^*,m^*), които докосват последователно $y=-x$, $y=a-x$ и $y=-x$, и т.н., и с $N(B_1)=N_{n^*,m^*-2(a-x)}$, $N(B_2)=N_{n^*,m^*+2(a-x)+2x}$, $N(B_3)$ броя на траекториите от $(0,0)$ до (n^*,m^*), които докосват последователно $y=a-x$, $y=-x$ и $y=a-x$, и т.н. Лесно се вижда, за $j=0,1,2,\ldots$, че

$$\begin{aligned} N(A_{2j+1}) &= N_{n^*,m^*+2j(a-x)+2(j+1)x}, \qquad & N(A_{2j}) &= N_{n^*,m^*-2j(a-x)-2jx}, \\ N(B_{2j+1}) &= N_{n^*,m^*-2(j+1)(a-x)-2jx}, \qquad & N(B_{2j}) &= N_{n^*,m^*+2j(a-x)+2jx}, \end{aligned}$$

откъдето

$$\mathbb{P}(\{\text{печели a лв. на n-ти ход}\}) = \Big(N_{n^*,m^*} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\big[N(A_j)+N(B_j)\big]\Big)\frac{1}{2^n}.$$

$\square$

Забележка (Край на играта). По същия начин се доказва, че $\mathbb{P}(\{\text{играчът фалира}\}) = \frac{a-x}{a}$, откъдето получаваме $\mathbb{P}(\{\text{играе се безкрайно дълго}\}) = 1-\mathbb{P}(\{\text{играчът печели}\})-\mathbb{P}(\{\text{играчът фалира}\}) = 0$.

Забележка (Обобщение). Ако вероятността да се падне ези е p, тогава $p(x)=p\cdot p(x+1)+(1-p)\cdot p(x-1)$, откъдето $p(x+1)-p(x)=\frac{1-p}{p}[p(x)-p(x-1)]=\cdots=\left(\frac{1-p}{p}\right)^x p(1)$ и $p(x+1)=\sum_{i=0}^{x}\left(\frac{1-p}{p}\right)^i p(1)=\frac{1-(\frac{1-p}{p})^{x+1}}{1-\frac{1-p}{p}}p(1)$. Но $1=p(a)=\frac{1-(\frac{1-p}{p})^a}{1-\frac{1-p}{p}}p(1)$, следователно

$$p(x)=\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}.$$