СЕМ 20/10/23

лек. 3

(+) пмк 1 $\boxed{a}$ пмк 2 $\boxed{b}$ $0 < a < b < \infty$. Има ли стратегия, при която $\mathbb{P}$

Теор: Нека имаме $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, във вер. пр-во $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и нека $\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) > 0$. Тогава

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = \mathbb{P}(A_n \mid \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j) \times \mathbb{P}(A_{n-1} \mid \bigcap_{j=1}^{n-2} A_j) \times \dots \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

Д-во: $\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = \mathbb{P}(A_n \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j) = \mathbb{P}(A_n \mid \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j)$

$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j) = \dots$

(+) $\Omega = \bigotimes_{i=1}^{10001} \Omega_i = \{ n \in \Omega : n = (n^{(1)}, \dots, n^{(10001)}) \}$, $\Omega_i = \{ \omega_1, \dots, \omega_{13983816} \}$

$A = \bigcup_{i=1}^{10000} A_i \rightarrow$ паднали са се поне веднъж едни и същи числа в 2 последователни тиража $\omega^{(i)} \in \Omega_i$

$A_i = \{ \omega \in \Omega : \omega^{i} = \omega^{i+1} \}, 1 \le i \le 10000$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{10000} A_i)$ - принцип за включване и изключване

$A_1, \dots, A_{10000}$ са независими в съвкупност

$A_1^c, \dots, A_{10000}^c$ са независими в съвкупност

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{10000} A_j^c) = 1 - \prod_{j=1}^{10000} \mathbb{P}(A_j^c) \overset{\text{Inдеп}}{=} 1 - (\mathbb{P}(A_1^c))^{10000}$$

$$= 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1))^{10000} \approx 10000\, \mathbb{P}(A_1)$$

$! \; 1 - (1-x)^n \approx nx$

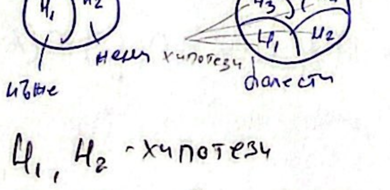
$$\overset{\text{Inдеп}}{=} 1 - \prod_{j=1}^{10000} (1 - \mathbb{P}(A_j))$$

$$= 1 - (1 - 1/13983816)^{10000} \approx 1 - \left(1 - \frac{10000}{13983816}\right)$$

$$= \frac{10000}{13983816} \approx 1/1400$$

→ формула за пълната вероятност. формула на Бейс 23/10/23

$\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}$



H_1, H_2 - хипотези

$H_1 \cap H_2 = \emptyset$

$H_1 \cup H_2 = \Omega$

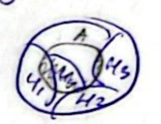
Деф.) Ако $V=(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ е някакво вер. пр-во. Тогава $\mathcal{H}=H_1,\dots,H_n$ се нарича пълна група от събития, ако $H_i\cap H_j\neq\emptyset$, $\forall i\neq j$ и $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} H_j=\Omega$ $\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} H_j=\Omega\right)$. Разбира се $H_j\in\mathcal{A}$, $\forall j$.

$\mathcal{H}$ ще означава пълна група от събития в $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$

или $\mathcal{H}=(H_1,H_2\dots$
или изброимо и
хипотези

Теор.) Нека V е вер. пр-во и $\mathcal{H}$ е някаква пълна група от събития в V.

(ф-ла за пълна вер.) Нека $\forall A\in\mathcal{A}$. Тогава $\mathbb{P}(A)=\sum_j \cancel{\mathbb{P}(A\cap H_j)}=$



$=\sum_j \mathbb{P}(H_j)\,\overset{\mathbb{P}(A|H_j)}{\cancel{\mathbb{P}(A/H_j)}}$ е конвенцията, че

$\mathbb{P}(A|H_j)=0$, ако $\mathbb{P}(H_j)=0$

$\sum_j \to \sum_{j=1}^{n}$, $\to \sum_{j=1}^{\infty}$

Д-во) $A=A\cap\Omega=A\cap\dot{\bigcup}_j H_j=\dot{\bigcup}_j A\cap H_j$

3-та аксиома на $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(A)=\underbrace{\sum_j \mathbb{P}(A\cap H_j)}_{*}=\underbrace{\sum_j \mathbb{P}(H_j)\,\mathbb{P}(A|H_j)}_{**}$

$$\mathbb{P}(A)=\sum_j \mathbb{P}(H_j)\,\mathbb{P}(A|H_j)$$

⊕ $\mathbb{P}(A_i\cap A_{i+1})\overset{?}{=}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_{i+1})$

$H_n=\{\omega^{(i+1)}=\omega_n\}$, $n=1$, $N=13983816$

$\mathbb{P}(A_i^c\cap A_{i+1}^c)=\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}($

$A_i^c=\{\omega^i\neq\omega^{i+1}\}$
$=\{\omega\in\Omega:$
$A_{i+1}^c=\{\omega^{i+1}\neq\omega^{i+2}\}$?

$A_i^c\cap A_j^c$ $\quad |i-j|\geq 2$

$A_j^c=\{\omega$

изгледай лек. дома

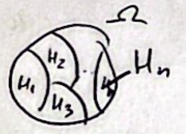
II ⊕ $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(\omega^{(1)}=\omega^{(2)})=\underbrace{\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(\omega^{(1)}=\omega^{(2)};\omega^{(1)}=\omega_j)}_{*}=\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(H_j)\,\mathbb{P}(\omega^{(2)}=\omega_j\,|\,\omega^{(1)}=\omega_j)$

$N=13983816$

$\Omega=\bigcup_{j=1}^{N} H_j \quad H_j=\{\omega_j=\omega^{(1)}\}$

$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(\omega^{(2)}=\omega_j)^{**}$

$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}=\frac{1}{N}$

⊕  A - фатално болен

$\mathbb{P}(A)=\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(H_j)\,\mathbb{P}(A|H_j)$

вер. да е болен от j-та болест

смъртност от j-та болест

⊖ $A=\bigcup_{j=1}^{10000} A_j$

A_j^c за $j=\overline{1,10000}$, $A_i\cap A_j=\emptyset$, $\forall i\neq j$

разбий $\mathbb{P}(A_j^c\cap A_i^c)=\mathbb{P}(A_j^c)\,\mathbb{P}(A_i^c)$

Теор. 1 (ф-ла на Бейс) Нека V е вер. пр-во, а $\mathcal{H}$ е пълна група от събития в него. Нека $A \in \mathcal{A}$ (събитие) и $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогава

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\,\mathbb{P}(A \mid H_k)}{\mathbb{P}(A)} \quad (\forall\, H_k \in \mathcal{H})$$

$$\overset{\text{ф-ла за пълна вероятност}}{=} \frac{\mathbb{P}(H_k)\,\mathbb{P}(A \mid H_k)}{\sum_j \mathbb{P}(H_j)\,\mathbb{P}(A \mid H_j)}$$

A е вярна / е настъпило

Д-во
$$\mathbb{P}(H_k \mid A) \overset{\text{усл. вер.}}{=} \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_k)\,\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H_k)\,\mathbb{P}(A \mid H_k)}{\sum_j \mathbb{P}(H_j)\,\mathbb{P}(A \mid H_j)}$$

(+) $H_1 = \{$честна монета$\}$ $\quad \mathbb{P}(H_1) = 0{,}99$

$H_2 = \{$монетата има вер. за ези $1/3\}$ $\quad \mathbb{P}(H_2) = 0{,}01$

100 хвърляния на монетата; $D = \{$падат се 30 ези$\}$

$$\frac{\mathbb{P}(H_1 \mid D)}{\mathbb{P}(H_2 \mid D)} = \frac{\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(H_2)} \cdot \frac{\mathbb{P}(D \mid H_1)}{\mathbb{P}(D \mid H_2)} = 99 \cdot \frac{\mathbb{P}(D \mid H_1)}{\mathbb{P}(D \mid H_2)}$$

$$\mathbb{P}(D \mid H_1) = \binom{100}{30} \frac{1}{2}^{100}$$

$$\mathbb{P}(D \mid H_2) = 1/30 = \binom{100}{30}\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\left(\frac{2}{3}\right)^{70}$$

Забележка: (пропорция) $A = D$

$$\boxed{\frac{\mathbb{P}(H_k \mid D)}{\mathbb{P}(H_c \mid D)} = \frac{\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(H_c)} \cdot \frac{\mathbb{P}(D \mid H_k)}{\mathbb{P}(D \mid H_c)}}$$

$\mathbb{P}(H_1 \mid D) \approx 0{,}0356 \cdot \mathbb{P}(H_2 \mid D)$

$\quad = 1 - \mathbb{P}(H_2 \mid D)$

$1 - \mathbb{P}(H_2 \mid D) \approx 0{,}0356 \cdot \mathbb{P}(H_2 \mid D)$

$1 \approx 0{,}0356 \cdot \mathbb{P}(H_2 \mid D) + \mathbb{P}(H_2 \mid D)$

$1 \approx \mathbb{P}(H_2 \mid D)\,(0{,}0356 + 1)$

$1{,}0356\, \mathbb{P}(H_2 \mid D) \approx 1$

$$99 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{30} \frac{2^{70}}{3^{70}}} = \frac{99 \cdot 3^{100}}{2^{170}} = 99 \cdot e^{100\ln 3 - 170\ln 2} \approx 0{,}0356$$

$$\mathbb{P}(H_1 \mid D) + (H_2 \mid D) = 1$$

20 стр.

(+) Ковид тест на летище

0,01 инфектирани

I тестът хваща с вероятност 0,99

H тестът връща правилно, че е здрав 0,99

B – тестът реагира, звъни аларма!

$$\underset{\text{заразен при звъннала аларма}}{\mathbb{P}(I \mid B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid I)\,\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid I)\,\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(B \mid I)\,\underset{\text{хипотеза: болен}}{\mathbb{P}(I)} + \underset{\text{хипотеза: здрав}}{\mathbb{P}(H)}\,\mathbb{P}(B \mid H)}$$

$$= \frac{\cancel{0{,}99} \cdot 0{,}01}{\cancel{0{,}99} \cdot 0{,}01 + 0{,}99 \cdot 0{,}01} = 1/2$$

всеки 2-ри случай е фалшива аларма

④

$\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $0<a<b<\infty$

П - печели (~~записва b~~ записва b)

C - сменя плика

A - ~~първия отворен плик съдържа~~ вижда a

B - ~~втория отворен плик съдържа~~ вижда b

~~? $\mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(C|B) > 0$~~

$$\mathbb{P}(П) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C^c)$$
$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C|A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap C)$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(C|A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{P}(C|B)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(C|A)\right)$$

~~1) $\mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(C|B) = 0$~~

~~2) $\mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(C|B) = 1$~~

~~3) $\mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(C|B) -$~~

~~[illegible]!~~

стратегии:

→ не сменяме

$\mathbb{P}(C) = 0$

$\mathbb{P}(П) = 1/2$

→ винаги сменяме

$\mathbb{P}(C) = 1$

$\mathbb{P}(П) = 1/2$

→ сменяме с вероятност $1/2$, независимо какво виждаме

$\mathbb{P}(C) = 1/2$

$\mathbb{P}(П) = 1/2(1 - 1/2 + 1/2) = 1/2$

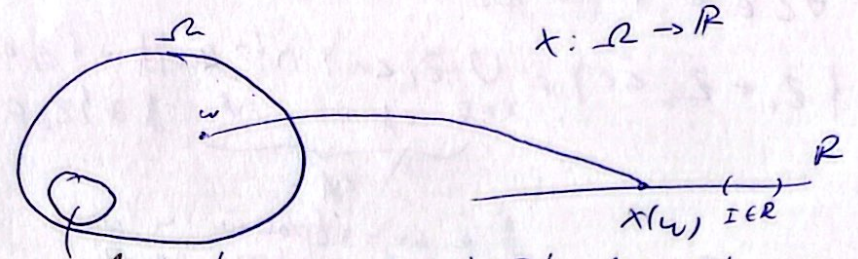
→ виждаме x и в зависимост от това определяме дали сменяме (рандомизирана, но зависи от това какво виждаме)

$\mathbb{P}(C \mid \text{виждаме } x) = e^{-x}$

$\mathbb{P}(П) = 1/2(1 - e^{-b} + e^{-a}) > 1/2$

Случайни величини и техните свойства

$V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *



$I \subseteq \mathbb{R}$

най-често (a,b)

$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} = \{X \in I\}$

$X^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{X = 0\}$

$X^{-1}((a,b]) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} = \{a < X \leq b\}$

Деф. Нека V - вер. пр-во. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е сл. вел., ако за $\forall\, a<b\,;\ a,b \in \mathbb{R}$ е вярно, че $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$
$\{a < X < b\}$

След. работи само с отворени интервали, достатъчно е да се разглеждат $\{X<b\}$ ...

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$A = \{a\}$

$A = [a, b)$

... $((-\infty, b)) \in \mathcal{A}, \forall b$

Тогава $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ з... $I = (a,b]$, $I = [a,b]$, ... $I = [a, \infty)$

$X^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{A}$

... вели-чи.

Теор. Нека V е вер. пр-во и X, Y са сл. ...

Тогава
а) $aX + bY$ е сл. вел. за $\forall a, b \in \mathbb{R}$
б) XY е сл. вел.
в) ако $\mathbb{P}(Y=0) = 0$, то $\frac{X}{Y}$ е сл. вел.

Док-во а) $a \in \mathbb{R}$ и $Z_1 := aX_1$ и ще видим, че Z_1 е сл. вел.

$\{Z_1 < b\} \in \mathcal{A}$
$\emptyset,\ \forall b \leq 0$
$\Omega,\ \forall b > 0$

↳ $a = 0$ е ясен, защото $Z_1 = 0$ и ...

↳ $a < 0 \Rightarrow \{Z < b\} = \{-\infty < Z < b\} \overset{?}{\in} \mathcal{A},\ \forall b \in \mathbb{R}$

... $0 \in (a, b)$ ... Ω, ако $0 \in (a, c)$

$\{Z < b\} = \{cX < b\} = \{X > \frac{b}{c}\} \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

за произв.

$= X^{-1}((\frac{b}{c}, \infty)) \in \mathcal{A}$ (...

$\overset{def}{\Rightarrow} Z$ е сл. вел.

↳ $a > 0$ $\mathcal{A} \ni \{X_1 < b\} = \{aX < b\} = \{$ ...

$\Rightarrow X_1$ е сл. вел. ; $Y_1 = bY$ е сл. вел.

$Z = X_1 + Y_1$ *

* $\cancel{\{X_1 <}$ $\mathcal{A} \overset{?}{\ni} \{Z < b\} = \{X_1 + Y_1 < b\}$

$\overset{?}{=} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{\{X_1 < x\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y_1 < b - x\}}_{\in \mathcal{A}}$

* $\mathcal{A}$ не издържа неизброими мн-ва

проблем, $\mathbb{R}$ е неизброимо

$\overset{?}{=} \underbrace{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{X_1 < q\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y_1 < b - q\}}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}} = \mathcal{L}$ ⇒ ...

$\underline{\text{Д-ва 1}}$ а) $Z_1 = aX$; $Z_2 = bY$

$aX + bY = Z_1 + Z_2$

$\hookrightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \{Z_1 + Z_2 < c\} \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

$\{Z_1 + Z_2 < c\} = \underbrace{\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \underset{\in \mathcal{A}}{\{Z_1 < x\}} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{\{Z_2 < c - x\}}}_{\in \mathcal{A}}$ $\mathcal{A} \ni \{Z_1 < c_1\}\ \forall c_1 \in \mathbb{R}$ $\mathcal{A} \ni \{Z_2 < c_2\}\ \forall c_2 \in \mathbb{R}$

$\mathcal{A}$ е неизброима и няма да сработи за $\mathbb{R}$

$\overset{!!!}{=} \underbrace{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underset{\in \mathcal{A}}{\{Z_1 < q\}} \cap \underset{\in \mathcal{A}}{\{Z_2 < c - q\}}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

** $w \in L \Rightarrow \exists q_0 : X_1(w) < q_0$, $Y_1(w) < b - q_0$ $\Rightarrow X_1(w) + Y_1(w) < b$

$\Rightarrow L \subseteq \{X_1 + Y_1 < b\}$

$b - 2r$, $X_1(w) + Y_1(w)$ $r \in \mathbb{Q}$

$X_1(w) + Y_1(w) < b - 2r$

$q - r < X_1(w) < q + r \Rightarrow X_1(w) < q + r$, $q \in \mathbb{Q}$

$Y_1(w) < b - 2r - X_1(w) < b - 2r - q + r = b - (q + r)$

$\Rightarrow w \in \{X_1 < \underbrace{q + r}_{q'}\} \cap \{Y_1 < b - \underbrace{q - r}_{q'}\}$

$\in \{X_1 < q'\} \cap \{Y_1 < b - q'\} \in L$