Вероятности и статистика

Факултет по математика и информатика, Софийски университет
h.sariev@math.bas.bg

Легенда. *Основен материал*: с (*) е видяно в клас, но няма пряко отношение към изпита; с (**) – за по-любознателните. *Задачи*: всичко без (*) се приема за решено в клас; с (*) – допълнителна подготовка; с (**) – трудни задачи.

1 Комбинаторика

Комбинаториката е анализ на крайните множества, напр. $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ за $n \in \mathbb{N}$, като в частност служи за намиране на броя на техните елементи, в случая $|M| = n$, без да се извършва непосредствено преброяване.

Пермутация. *Всяко нареждане на елементите на M в n-членна редица наричаме пермутация на елементите на M, като множеството от пермутации обозначаваме с*

$$\boldsymbol{P}_n = \big\{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) : i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}, i_j \neq i_l, j \neq l\big\}.$$

Дефинирайки $P_n = |\boldsymbol{P}_n|$, имаме

$$P_n = n!$$

Д-во.* Равенството се доказва индуктивно по n. Очевидно, $\mathbf{P}_1 = \{(a_1)\}$ и $\mathbf{P}_2 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, от което следва $P_1 = 1$ и $P_2 = 2$. Нека равенството важи за $n-1$. От всяка пермутация на $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ получаваме n на брой пермутации на $\{a_1, \dots, a_n\}$, като поставяме a_n съответно на първа, втора и т.н. до последна позиция; напр., от $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}})$ за $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n-1\}$ имаме

$$(a_n, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}), (a_{i_1}, a_n, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}), \dots, (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_n).$$

Нека обозначим с B_l множеството от така конструирани пермутации на $\{a_1, \dots, a_n\}$, където индексът $l = 1, \dots, P_{n-1}$ варира измежду всички пермутации на $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. По замисъл, множествата $B_1, \dots, B_{P_{n-1}}$ са две по две непресичащи се. От друга страна, всяка пермутация на $\{a_1, \dots, a_n\}$ дефинира една единствена пермутация на $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ чрез премахване на елемента a_n. Следователно $\mathbf{P}_n = B_1 \cup \dots \cup B_{P_{n-1}}$, откъдето

$$P_n = |B_1 \cup \dots \cup B_{P_{n-1}}| = \sum_{l=1}^{P_{n-1}} |B_l| = n \cdot P_{n-1} = n!$$

□

Забележка (Интерпретация). Започвайки отляво надясно, a_{i_1} можем да изберем по n начина, след което за a_{i_2} остават $(n-1)$ възможности, за a_{i_3} – $(n-2)$ и т.н.

*Забележка*** (Пресмятане). С нарастването на n числата $n!$ растат много бързо и непосредственото им пресмятане става практически невъзможно. Съществува обаче формула (на Стърлинг), която позволява сравнително лесно да се пресмята *приблизително*

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n.$$

Вариация без повторение. *Всяка наредена k-орка от елементи на M без повторение, за $k = 0, 1 \dots, n$, наричаме вариация на елементите на M от клас k без повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{V}_n^k = \big\{(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}, i_j \neq i_l, j \neq l\big\}.$$

Дефинирайки $V_n^k = |\boldsymbol{V}_n^k|$, имаме

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Д-во.* От всяка наредена k-орка $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ получаваме пермутация на M, като към нея добавим в произволен ред останалите елементи, $M\backslash\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$; напр.,

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-k}}),$$

където $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-k}})$ е пермутация на елементите на $M\backslash\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. Нека обозначим с B_l множеството от пермутации на M, получени по описания начин от l-тата вариация, където индексът $l = 1, \ldots, V_n^k$ преминава през всички възможни вариации на M от клас k. По замисъл, множествата $B_1, \ldots, B_{V_n^k}$ са две по две непресичащи се. От друга страна, всяка пермутация $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ на M дефинира една единствена вариация от клас k чрез премахване на последните $n-k$ елементи, т.е. $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$. Следователно $\mathbf{P}_n = B_1 \cup \cdots \cup B_{V_n^k}$, откъдето следва, че

$$P_n = |B_1 \cup \cdots \cup B_{V_n^k}| = \sum_{l=1}^{V_n^k} |B_l| = P_k \cdot V_n^k \qquad \Longrightarrow \qquad V_n^k = \frac{P_n}{P_k}.$$

□

Комбинация без повторение. *Всяко k-елементно подмножество на M, за $k = 0, 1 \ldots, n$, наричаме комбинация на елементите на M от клас k без повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{C}_n^k = \big\{\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\} : i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}, i_j \neq i_l, j \neq l\big\}.$$

Дефинирайки $C_n^k = |\boldsymbol{C}_n^k|$, имаме

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Д-во.* От всяко k-елементно подмножество на M можем да образуваме P_k на брой пермутации. Последните съвпадат с вариациите на M от клас k, откъдето следва, че

$$V_n^k = P_k \cdot C_n^k \qquad \Longrightarrow \qquad C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}.$$

□

Забележка (Интерпретация). За разлика от вариациите от клас k без повторение, подредбата на елементите във всяка комбинация от клас k без повторение е без значение.

Твърдение 1.1 (Свойства). $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

Д-во.* Относно първото свойство, към всяко k-елементно подмножество на $A \subseteq M$ можем да съпоставим неговото допълнение $M - A$, имащо $n-k$ елемента, и обратното, откъдето следва еднозначната обратима връзка между $\mathbf{C}_n^k$ и $\mathbf{C}_n^{n-k}$.

Относно второто свойство, множеството от комбинации на $\{a_1, \ldots, a_n\}$ от клас k се разлага на две непресичащи се множества в зависимост от това дали a_n участва или не. От една страна, това са k-елементните подмножества на $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, т.е. $\mathbf{C}_{n-1}^k$, а от друга – $(k-1)$-елементните подмножества на $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, към всяко от които е добавен елементът a_n.

Последните две свойства следват от биномната формула, където

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

Като алтернатива, $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ следва от принципа за включване-изключване, приложен върху множествата $A_i = \{a\}$, $i = 1, \ldots, n$. Относно първото равенство, $\mathbf{C}_n^0, \mathbf{C}_n^1, \ldots, \mathbf{C}_n^n$ са две по две непресичащи се множества, чието обединение $\mathcal{P}(M) = \mathbf{C}_n^0 \cup \mathbf{C}_n^1 \cup \cdots \cup \mathbf{C}_n^n$ е множеството на всички подмножества, образувани от елементите на M. От друга страна, на всяко подмножество $A \in \mathcal{P}(M)$ можем да съпоставим една и само една n-орка $(e_1, \ldots, e_n) \in \{0, 1\}^n$ от нули и единици, такава че $a_i \in A \Longleftrightarrow e_i = 1$. Тогава

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = \Big| \bigcup_{k=0}^n \mathbf{C}_n^k \Big| = |\mathcal{P}(M)| = |\{0, 1\}|^n = 2^n.$$

□

*Забележка** (Триъгълника на Паскал). Установените свойства на числата C_n^k могат да се илюстрират по-нагледно, ако разположим тези числа в един безкраен, симетричен относно височината си триъгълник, при който по бедрата на триъгълника се разполагат единици, а всеки вътрешен елемент е сбор на двата си съседа от предния ред.

$$\begin{array}{ccc}
C_0^0 & 1 & 2^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 & 1 \quad 1 & 2^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 & 1 \quad 2 \quad 1 & 2^2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & 2^3 \\
C_n^0 \quad C_n^1 \quad \dots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n & \underline{1} \quad \underline{4} \quad \underline{6} \quad \underline{4} \quad \underline{1} & 2^4 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

В n-тия ред сумата на елементите е равна на 2^n, като сумата на елементите на четни позиции е равна на сумата на елементите на нечетни позиции.

Пермутация с повторение. *Всяка k-члена редица, при която елементът a_1 се повтаря k_1 пъти, a_2 – k_2 пъти и т.н., където $k_1 + \dots + k_n = k$, се нарича пермутация на елементите на M с повторение и с дължина k, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{P}(k; k_1, \dots, k_n) = \big\{(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}, \#\{j : a_{i_j} = a_{i_1}\} = k_1, \dots, \#\{j : a_{i_j} = a_{i_n}\} = k_n\big\}.$$

Дефинирайки $P(k; k_1, \dots, k_n) = |\boldsymbol{P}(k; k_1, \dots, k_n)|$, имаме

$$P(k; k_1, k_2, \dots, k_n) \equiv \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}.$$

*Д-во**. Ако $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ е такава k-орка, да означим с $X = \{j \in \{1, \dots, k\} : i_j = 1\}$ множеството от индекси j, за които $a_{i_j} = a_1$. Понеже $|X| = k_1$, подмножеството X можем да избираме по $C_k^{k_1}$ начина. Нека $(a_{i_1^*}, \dots, a_{i_{k-k_1}^*})$ е редицата, получена след премахване на всичките k_1 елемента a_1 от $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$. Тогава $(a_{i_1^*}, \dots, a_{i_{k-k_1}^*})$ представлява пермутация на $\{a_2, \dots, a_n\}$ с повторение и дължина $k - k_1$. Обратно, $(a_{i_1^*}, \dots, a_{i_{k-k_1}^*})$ и X определят еднозначно $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$. Следователно, първо получаваме, че

$$P(k; k_1, \dots, k_n) = C_k^{k_1} \cdot P(k - k_1; k_2, \dots, k_n),$$

откъдето $P(k; k_1, k_2, \dots, k_n) = C_k^{k_1} C_{k-k_1}^{k_2} \cdots C_{k-k_1-\dots-k_{n-1}}^{k_n}$, повтаряйки горния аргумент. $\square$

Забележка (Интерпретация). Елементът a_1 можем да поставим по $\binom{k}{k_1}$ различни начина на k_1 от общо k места в пермутацията. На всеки от тези начини отговарят по $\binom{k-k_1}{k_2}$ различни начина, по които можем да изберем k_2 от останалите $k - k_1$ места, на които да поставим елемента a_2,..., елемента a_n поставяме по $\binom{k-k_1-\dots-k_{n-1}}{k_n} = 1$ начин на последните $k - k_1 - \dots - k_{n-1}$ места.

*Забележка** (Закачка). Колко на брой са разпределенията, при които редът няма значение? Отговор – 1,

$$\{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1-\text{пъти}}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{k_2-\text{пъти}}, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{k_n-\text{пъти}}\}.$$

*Забележка*** (Разлагания на множество). Нека E е k-елементно множество. Всяка n-орка $(X_1, \dots, X_n)$ от две по две непресичащи се подмножества на E такива, че $E = \bigcup_{i=1}^n X_i$, се нарича n-разлагане на E. Да положим $|X_i| = k_i$. Тогава $k_1 + \dots + k_n = k$. За фиксирани $(k_1, \dots, k_n)$, броят на n-разлаганията на E е

$$\binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2} \cdots \binom{k - k_1 - \dots - k_{n-1}}{k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}.$$

Всъщност, за $E = \{1, \dots, k\}$ и фиксирани $(k_1, \dots, k_n)$, съществува еднозначно обратимо съответствие между пермутациите $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ на M с повторение и n-разлаганията $(X_1, \dots, X_n)$ на E от тип $(k_1, \dots, k_n)$, където $a_{i_j} = a_m \Longleftrightarrow i_j \in X_m$, за $m = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, k$. С други думи, X_m съдържа информацията за местата, където е поставен елементът a_m, и знанието на $(X_1, \dots, X_n)$ е достатъчно, за да възпроизведем $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$.

Вариация с повторение. *Всяка наредена k-орка от елементи на M, за k произволно, наричаме вариация на елементите на M от клас k с повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{V}(n,k) = \big\{(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) : i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}\big\}.$$

Дефинирайки $V(n,k) = |\boldsymbol{V}(n,k)|$, имаме

$$V(n,k) = n^k.$$

Д-во.* Не е трудно да се види, че $\mathbf{V}(n,k) = M \times M \times \cdots \times M$ е k-тата декартова степен на M, откъдето следва, че $V(n,k) = |M|^k$. $\square$

*Забележка*** (Разлагания на множество (Продължение)). Нека E е k-елементно множество. Следвайки предходните разсъждения, съществува еднозначно обратимо съответствие между вариациите на M с повторение от клас k и n-разлаганията на E, което означава, че броят на n-разлаганията на E е

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n : k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} = n^k.$$

Комбинация с повторение. *Всяко k-елементно мулти-подмножество на M, за k произволно, наричаме комбинация на елементите на M от клас k с повторение, като множеството обозначаваме с*

$$\boldsymbol{C}(n,k) = \big\{\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\} : i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}\big\}.$$

Дефинирайки $C(n,k) = |\boldsymbol{C}(n,k)|$, имаме

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Д-во.* Допълваме множеството M с $k-1$ нови елемента $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+k-1}$. Получаваме множеството $M^* = \{a_1,\dots,a_{n+k-1}\}$. Нека $\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\} \in \mathbf{C}(n,k)$ е k-елементно мулти-подмножество на M, където $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k$ без загуба на общност. Ако положим $i_j^* = i_j + (j-1)$, $j = 1,\dots,k$, получаваме комбинацията $\{a_{i_1^*},\dots,a_{i_k^*}\}$ от елементи на M^* без повторение от клас k. Така дефинирано, съответствието между $\mathbf{C}(|M|,k)$ и $\mathbf{C}^k_{|M^*|}$ е взаимно еднозначно, от което следва $C(n,k) = C^k_{n+k-1}$.

Ако следвахме логиката при броя на комбинациите без повторение, щяхме да получим следното равенство

$$V(n,k) = \sum_{l=1}^{C(n,k)} \binom{k}{k_{1,l},\dots,k_{n,l}},$$

където $k_{1,l},\dots,k_{n,l}$ са съответно броят пъти, които $a_1,...,a_n$ се срещат в l-тата комбинация на M от клас k с повторение, при дадено подреждане на елементите на $\mathbf{C}(n,k)$, което, обаче, няма явно решение за $C(n,k)$. $\square$

Твърдение 1.2** (Свойства). *$C(n,k) = \sum_{i=0}^{k} C(n-1,i)$, при което $C(n,k) = C(n,k-1) + C(n-1,k)$.*

*Д-во**.* Нека $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-m}},a_n,a_n,\dots,a_n\} \in \mathbf{C}(n,k)$ е k-елементно мулти-подмножество на M, при което a_n се среща m пъти, за някое $m = 0,1,\dots,k$. Тогава $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-m}}\} \in \mathbf{C}(n-1,k-m)$ е комбинация на $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ с повторение, чрез която можем да възстановим първоначалната комбинация, като добавим m пъти a_n. Т.е., съществува еднозначно обратимо съответствие между $\mathbf{C}(n,k)$ и $\bigcup_{i=0}^{k}\mathbf{C}(n-1,i)$. Понеже множествата $\mathbf{C}(n-1,k),\dots,\mathbf{C}(n-1,0)$ са две по две непресичащи се, имаме $|\mathbf{C}(n,k)| = \sum_{i=0}^{k}|\mathbf{C}(n-1,i)|$. $\square$

*Забележка*** (Триъгълника на Паскал). По силата на рекурентната си връзка, числата $C(n,k)$ могат да бъдат разположени в един безкраен триъгълник, при който всеки вътрешен елемент е сбор на двата си съседа от предния ред, а по бедрата на триъгълника са разположени единици.

$$\begin{array}{c} C(1,0) \\ C(2,0) \quad C(1,1) \\ C(3,0) \quad C(2,1) \quad C(1,2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C(m,0) \quad C(m-1,1) \quad \dots \quad C(2,m-2) \quad C(1,m-1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Принцип за включване-изключване. *Нека $A_1,\dots,A_n$. са крайни множества. Тогава*

$$\Big|\bigcup_{i=1}^n A_i\Big| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_n|.$$

Д-во.* Равенството се доказва индуктивно по n. При $n=2$, нека $A_1=\{a_1,\dots,a_n\}$ и $A_2=\{b_1,\dots,b_m\}$ удовлетворяват $A_1\cap A_2=\emptyset$, т.е. $a_i\neq b_j$. Да положим $c_k=a_k$, $k=1,\dots,n$ и $c_k=b_{n-k}$, $k=n+1,\dots,n+m$. Тогава $A\cup B=\{c_1,\dots,c_{n+m}\}$, от което следва, че $|A_1\cup A_2|=n+m=|A_1|+|A_2|$. За произволни A_1,A_2 имаме разложението

$$|A_1\cup A_2| = |A_1\cap A_2^c| + |A_1^c\cap A_2| + |A_1\cap A_2|.$$

Но $|A_1|=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_2^c|$ и $|A_2|=|A_2\cap A_1|+|A_2\cap A_1^c|$, което чрез заместване означава, че

$$|A_1\cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|.$$

Нека равенството важи за $n-1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\Big|\bigcup_{i=1}^n A_i\Big| &= \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big| + |A_n| - \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)\Big| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}|A_i| - \sum_{i<j\le n-1}|A_i\cap A_j| + \dots + (-1)^{n-2}|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}| + |A_n| - \\
&\qquad - \Big(\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n| - \sum_{i<j\le n-1}|A_i\cap A_j\cap A_n| + \dots + (-1)^{n-2}|A_1\cap\dots\cap A_n|\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n|A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_n|.
\end{aligned}$$

*Комбинаторно д-во**.* Нека $x\in\bigcup_{i=1}^n A_i$, като x е общ елемент на k от множествата, да кажем $A_1,\dots,A_k$. Тогава в сумата $\sum_{i=1}^n|A_i|$ елементът x е преброен $\binom{k}{1}$ пъти, в $\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\binom{k}{2}$ пъти,..., в $\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}|-\binom{k}{k}=1$ път. От биномната формула имаме

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\dots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k} = 1-\Big[\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\dots+(-1)^k\binom{k}{k}\Big] = 1-(1-1)^k = 1.$$

□

1.1 Задачи

Задача 1.1. Урна съдържа топки, номерирани с числата $1,2,\dots,n$. Изваждаме последователно k пъти по една топка, като всеки път записваме нейния номер. Полученият резултат наричаме извадка с обем k от n елемента. Да се пресметне броят на всички различни извадки, ако

(а) не връщаме извадените топки и редът на записване на изтеглените номера има значение;
(б) не връщаме извадените топки и редът на записване на изтеглените номера няма значение;
(в) връщаме всяка извадена топка обратно в урната и редът на записване има значение;
(г) връщаме всяка извадена топка обратно в урната и редът на записване няма значение.

Отговори. (а) V_n^k; (б) C_n^k; (в) $V(n,k)$; (г) $C(n,k)$. □

Задача 1.2. Намерете броят на отделните анаграми на думата MISSISSIPPI.

Отговор. $P(11; 1, 4, 4, 2)$ □

Задача 1.3. Намерете броя на възможните начини за разпределяне на k частици в n различими клетки, ако
- (а) частиците са различими/неразличими и всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
- (б) частиците са различими/неразличими (и клетките могат да съдържат произволен брой частици);
- (в) частиците са различими/неразличими и няма празна клетка (за $k \geq n$);
- (г) частиците са различими/неразличими, в клетка 1 има точно s частици, а в останалите клетки – най-много по една частица (за $k \geq s \geq k - n + 1$);
- (д*) частиците са различими/неразличими, клетка 1 побира произволен брой частици, а останалите клетки – най-много по една частица;
- (е*) частиците са различими/неразличими, в клетка 1 има не повече от s частици, а в останалите клетки – най-много по една частица;
- (ж*) частиците са различими/неразличими, в клетка 1 има поне s частици, а в останалите клетки – най-много по една частица.

Решение (Техника). $M = \{1, \ldots, n\}$.
- (а) За *различими*: V_n^k; за *неразличими*: C_n^k.
- (б) За *различими*: $V(n, k)$; за *неразличими*: $C(n, k)$.
- (в) За *различими*: нека $A_i = \{\text{клетка i е празна}\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогава $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{\text{поне една празна}\}$, $|A_i| = (n-1)^k$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)^k$ и т.н. Следователно общият брой разпределения без празна клетка е

$$V(n,k) - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n^k - \left(n \cdot (n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 0\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k;$$

  за *неразличими*: при условие че във всяка клетка има поне една топка, се търси комбинация от вида $\{1, 2, \ldots, n, i_1, \ldots, i_{k-n}\}$ за $i_1, \ldots, i_{k-n} \in M$, т.е. броят на разпределенията е $C(n, k-n) = C_{k-1}^{n-1}$.
- (г) За *различими*: търси се редица $(\ldots, i_1, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, i_{k-s}, \ldots)$, имаща s "1"-ци на места $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, k\}$ и $k - s$ елемента $i_1, \ldots, i_{k-s} \in \{2, \ldots, n\}$ без повторение. Тя се разлага еднозначно на редицата $(i_1, \ldots, i_{k-s})$ и комбинацията $\{j_1, \ldots, j_s\}$, т.е. общият брой е $\binom{k}{s} V_{n-1}^{k-s}$; за *неразличими*: търси се $\{1, \ldots, 1, i_1, \ldots, i_{k-s}\} : i_1, \ldots, i_{k-s} \in \{2, \ldots, n\}, i_j \neq i_l$, т.е. C_{n-1}^{k-s}.
- (д*) За *различими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{k} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$; за *неразличими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{k} C_{n-1}^{k-j}$.
- (е*) За *различими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{\min(s,k)} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$; за *неразличими*: $\sum_{j=\max(0,k-n+1)}^{\min(s,k)} C_{n-1}^{k-j}$.
- (ж*) За *различими*: $\sum_{j=s}^{k} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 \geq k-s$, и $\sum_{j=k-n+1}^{k} \binom{k}{j} V_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 < k-s$; за *неразличими*: $\sum_{j=s}^{k} C_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 \geq k-s$, и $\sum_{j=k-n+1}^{k} C_{n-1}^{k-j}$, ако $n-1 < k-s$.

□

Задача 1.4. Колко решения има уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, ако
- (а) $x_1, \ldots, x_k$ са естествени числа (за $k \leq n$);
- (б) $x_1, \ldots, x_k$ са неотрицателни цели числа.

**Колко на брой са решенията, ако редът на записването на x_i няма значение?

Решение (Техника).
- (а) *Решение 1*: задачата е еквивалентна на разпределянето на n неразличими частици в k клетки, като не остава празна клетка, т.е. броят на решенията е $C(k, n-k)$.
  Решение 2 (stars & bars): всяко решение на задачата може да се визуализира като наредба от n звезди " $*$ " и $k-1$ черти " $|$ ", напр. $**||**|*\cdots|***|$, където $x_1 = \{\text{брой } * \text{ преди първата } |\}$, $x_k = \{\text{брой } * \text{ след последната } |\}$ и $x_i = \{\text{брой } * \text{ между } (i-1)\text{-тата и } i\text{-тата } |\}$, $i = 2, \ldots, k-1$. Т.е., проблемът се свежда до избор на $k-1$ места, на които да поставим " $|$ ", избрани от $n+1$ възможни места в редицата от звезди $**\cdots**$. Понеже $x_i > 0$ в (а), не можем да имаме две последователни черти, нито да започваме или завършваме с " $|$ ". С други думи, търсим $\{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$ за $j_1, \ldots, j_{k-1} \in \{1, \ldots, n-1\} : j_j \neq j_l$, откъдето намираме броя на решенията, C_{n-1}^{k-1}.
- (б) *Решение 1*: задачата е еквивалентна на разпределянето на n неразличими частици в k клетки, т.е. броят на решенията е $C(k, n)$.
  Решение 2: съществува еднозначна обратимост между решенията на $x_1 + \cdots + x_k = n$ и тези на $(x_1 + 1) + \cdots + (x_k + 1) = n + k$; т.е, C_{n+k-1}^{k-1} от (а).

□

Задача 1.5. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако
(а) не се допуска повторение на цифри;
(б) допуска се повторение на цифри;
(в) не се допускат повторения и числото е нечетно.

Отговори. (а) V_5^4; (б) $V(5,4)$; (в) $3 \cdot V_4^3$. □

Задача 1.6. По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако
(а) няма ограничение за участие в нея;
(б) A и B не трябва да участват заедно;
(в) C и D могат да участват само заедно.

Отговори. (а) C_{12}^4; (б) $C_{10}^4 + 2 \cdot C_{10}^3$; (в) $C_{10}^2 + C_{10}^4$. □

Задача 1.7. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A, B и C. Да се намери броят на всички различни разпределения, за които:
(а) кутия A е празна;
(б) само кутия A е празна;
(в) точно една кутия е празна;
(г) поне една кутия е празна;
(д) няма празна кутия.

Отговори. (а) 2^5; (б) $2^5 - 2$; (в) $3(2^5 - 2)$; (г) $3(2^5 - 2) + 3$; (д) $3^5 - (3(2^5 - 2) + 3)$. □

Задача 1.8. Колко е броят на думите с дължина n и съдържащи само символите a, b и c, такива че
(а) започват с a;
(б) съдържат точно k пъти символа a;
(в) съдържат точно k пъти символа a, при което и първият и последният символ е a;
(г) съдържат съответно k_1, k_2 и k_3 пъти, за $k_1 + k_2 + k_3 = n$, от символите a, b и c.

Отговори. (а) 3^{n-1}; (б) $\binom{n}{k}2^{n-k}$; (в) $\binom{n-2}{k-2}2^{n-k}$; (г) $\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$. □

Задача 1.9. Дадено е множеството $M = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$. С A_i (респ. B_i) обозначаваме множеството от комбинациите на M без повторение от клас $k \leq \min\{m, n\}$, които съдържат точно i обекта от типа a (респ. b), за $i = 0, 1, \dots, k$.
(а) Да се пресметнат $|A_i|$ и $|B_i|$.
(б) Да се докаже комбинаторно, че $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.
(в) Колко са на брой комбинациите от клас k, които съдържат поне един обект от типа a и поне един обект от типа b?
(г) Колко са на брой подмножествата на M, които съдържат поне един обект от типа a и поне един обект от типа b?

Решение. (а) $|A_i| = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ и $|B_i| = \binom{m}{k-i}\binom{n}{i}$; (б) множествата $A_0, \dots, A_k$ са две по две непресичащи се и изброяват всички възможни комбинации на M от клас k, т.е. $\bigcup_{i=0}^{k} A_i = \mathbf{C}_{m+n}^k$, от което следва, че $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$; (в) $C_{m+n}^k - |A_k| - |B_k|$; (г)

$$|\mathcal{P}(M)| - |\mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_m\})| - |\mathcal{P}(\{b_1, \dots, b_n\})| + 1 = 2^{m+n} - 2^m - 2^n + 1 = (2^m - 1)(2^n - 1),$$

понеже празното множество е добавено веднъж и извадено два пъти. □

Задача 1.10. Десет души се нареждат на редица. Колко са подрежданията, при които три фиксирани лица се намират едно до друго?

Отговор. $8 \cdot V_3^3 V_7^7$ □

*Задача** 1.11. По колко различни начина от $2n$ шахматиста могат да се образуват k шахматни двойки, за $k \leq n$, ако
(а) цветът на фигурите и номерът на дъските се взимат предвид;
(б) цветът на фигурите се взима предвид, но номерът на дъските няма значение;
(в) цветът на фигурите няма значение, но номерът на дъските се взима предвид;
(г) цветът на фигурите и номерът на дъските нямат значение.

Решение. Нека $M = \{1, \ldots, 2n\}$. (а) Броим $\{((i_1, i_2), \ldots, (i_{2k-1}, i_{2k})) : i_j \in M, i_j \neq i_l\}$, т.е. V_{2n}^{2k}. (б) Броим $\{\{(i_1, i_2), \ldots, (i_{2k-1}, i_{2k})\} : i_j \in M, i_j \neq i_l\}$, т.е. $\frac{1}{k!} V_{2n}^{2k}$. (в) Броим $\{(\{i_1, i_2\}, \ldots, \{i_{2k-1}, i_{2k}\}) : i_j \in M, i_j \neq i_l\}$, т.е. $\prod_{i=0}^{k-1} C_{2n-2i}^2$. (г) Броим $\{\{\{i_1, i_2\}, \ldots, \{i_{2k-1}, i_{2k}\}\} : i_j \in M, i_j \neq i_l\}$, т.е. $\frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} C_{2n-2i}^2$. □

*Задача*** 1.12. Пресметнете броя на траекториите в правоъгълна координатна система, започващи в точка (x_1, y_1) и завършващи в точка (x_2, y_2), ако правим скокове с големина ± 1. А колко на брой са траекториите от (x_1, y_1) до (x_2, y_2), които не докосват хоризонталата $y = r$?

Решение (Техника). Нека обозначим с u и d броя на скоковете, които правим, съответно с големина 1 и -1. За да свържем (x_1, y_1) и (x_2, y_2), трябва да извършим общо $u + d = x_2 - x_1$ скока, като нетната промяна във височината ще бъде $u - d = y_2 - y_1$. Тогава $u = \frac{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}{2}$, от което следва, че проблемът е добре дефиниран тогава и само тогава, когато u е цяло число. В този случай общият брой на траекториите, означен с $N_{x_2-x_1, y_2-y_1}$, е равен на броя на пермутациите на $\{1, -1\}$ с повторение, дължина $u + d$ и честоти (u, d),

$$N_{x_2-x_1,y_2-y_1} = \binom{u+d}{u} = \binom{x_2 - x_1}{\frac{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}{2}}.$$

Що се отнася до втория въпрос, нека първо преброим траекториите, които докосват $y = r$. За всяка такава траектория можем да отразим частта до първия контакт с $y = r$ около $y = r$, и обратното, като отражението на (x_1, y_1) ще бъде в точка $(x_1, r+(r-y_1))$. По този начин определяме обратимо еднозначно съотвествие между траекториите, които свързват (x_1, y_1) и (x_2, y_2) <u>и докосват</u> $y = r$, и тези от $(x_1, -y_1 + 2r)$ до (x_2, y_2) (т.нар. reflection principle). Общият брой на последните е $N_{x_2-x_1, y_2+y_1-2r}$, от което следва, че броят на траекториите, които не докосват $y = r$, е

$$N_{x_2-x_1,y_2-y_1} - N_{x_2-x_1,y_2+y_1-2r} = \binom{x_2 - x_1}{\frac{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}{2}} - \binom{x_2 - x_1}{\frac{(x_2-x_1)+(y_2+y_1)}{2} - r}.$$

□

2 Вероятности

2.1 Елементарни вероятности

Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, за $n \in \mathbb{N}$, е множеството от възможни изходи (елементарни събития) на случаен експеримент, имащ краен брой изходи. Към всяко елементарно събитие ω_i, $i = 1, \ldots, n$ съпоставяме едно число $\mathbb{P}(\omega_i)$, такова че $\mathbb{P}(\omega_i) \geq 0$ и $\mathbb{P}(\omega_1) + \cdots + \mathbb{P}(\omega_n) = 1$. Тогава за вероятността да се случи едно събитие $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, да кажем $A = \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_m}\}$, за $m \leq n$, полагаме

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_{i_1}) + \cdots + \mathbb{P}(\omega_{i_m}).$$

От горната дефиниция следва, че функцията $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ има адитивното свойство $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, за $A, B \in \mathcal{P}(\Omega) : A \cap B = \emptyset$.

Равномерни вероятности. *Нека елементарните събития на Ω са еднакво вероятни, $\mathbb{P}(\omega_1) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}$. Тогава $\mathbb{P}(A)$ е съотношението между броя на благоприятните изходи за събитието A и броя на възможните изходи на експеримента, т.е.*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

....

Задача 2.1. Куб, чиято повърхност е боядисана в червено, е разрязан на 1000 еднакви кубчета, които след това са добре размесени. Каква е вероятността случайно избрано кубче да има точно две червени стени?

Отговор. 0.096. □

Задача 2.2. Да се пресметне вероятността при хвърлянето на четири правилни зара да се падне поне една единица при предположение, че:

(а) заровете са различими и различимите изходи са еднакво вероятни;
(б) заровете са неразличими и различимите изходи са еднакво вероятни.

Описват ли вярно реалната действителност и двете предположения?

Решение. (а) $\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_4) : a_i \in \{1, \ldots, 6\}\big\}$. $\mathbb{P}(\{\text{поне една 1-ца}\}) = 1 - \frac{\text{изходи без единица}}{\text{всички изходи}} = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.517$; (б) $\Omega = \big\{\{a_1, \ldots, a_4\} : a_i \in \{1, \ldots, 6\}\big\}$. $\mathbb{P}(\{\text{поне една 1-ца}\}) = 1 - \frac{C(5,4)}{C(6,4)} \approx 0.444$.

Ако и двете предположения, макар и математически издържани, описваха вярно реалността, щеше да се окаже, че вероятността да се падне поне една единица е съществено по-голяма, когато, например, заровете са оцветени различно. □

Забележка (Парадокс на Дьо Мере). Независимо дали заровете са субективно различни или не, те съществуват като различни реални обекти. Всъщност, дори да смятахме, че заровете са неразличими, не бихме приели елементарните събития в (б) за равновероятни, т.е. (б) не описва вярно експеримента във вероятностно отношение (напр., хвърлянето на $\{1, 6, 6, 6\}$ очакваме да е (четири пъти) по-вероятно от $\{6, 6, 6, 6\}$). Тогава е по-удобно да се приложи моделът с различими зарове, тъй като в този модел елементарните изходи са еднакво вероятни и е в сила формулата за равномерните вероятности.

Задача 2.3. Каква е вероятността случайно избрана плочка от домино да съдържа различни числа на двете си половинки?

Решение (Внимание). Нека $\Omega = \big\{\{a_1, a_2\} : a_1, a_2 \in \{0, \ldots, 6\}\big\}$. Тогава $|\Omega| = C(7, 2)$, т.е. играта се играе с 28 плочки. В този случай, за разлика от задачата със заровете, така описаните елементарни събития са равновероятни, откъдето следва, че $\mathbb{P}(\{\{a_1, a_2\} : a_1 \neq a_2\}) = \frac{C_7^2}{C(7,2)} = \frac{3}{4}$. □

*Задача** 2.4. Урна съдържа M черни и $N - M$ бели топки. Правим случайна ненаредена извадка без връщане с обем $n \leq N$. Да се пресметне вероятността извадката да съдържа точно $k \leq n$ черни топки, където $k \leq M$ и $n - k \leq N - M$.

Решение (Внимание). Ако $\Omega = \big\{\{a_1, \ldots, a_n\} : a_i \in \{\text{ч}, \text{б}\}\big\}$ и допуснем, че елементарните събития са равновероятни, тогава $\mathbb{P}(\{k \text{ черни от } n\}) = \frac{k}{n}$, независимо колко голям е броят на белите топки в урната, което е крайно нереалистично!

Решение 1: $\Omega = \big\{\{a_1, \ldots, a_n\} : a_i \in \{\text{ч}_1, \ldots, \text{ч}_M, \text{б}_1, \ldots, \text{б}_{N-M}\}\big\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(\{k \text{ черни от } n\}) = \frac{\text{брой n-извадки с k черни}}{\text{брой n-извадки от N}} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Решение 2 (Въведение на УВ): $\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_m) : a_i \in \{\text{ч}, \text{б}\}, m = 1, \ldots, n\big\}$. Изглежда справедливо вероятността да изтеглим черна топка да е $\mathbb{P}(\text{ч}) = \frac{M}{N}$ и, съответно, $\mathbb{P}(\text{б}) = \frac{N-M}{N}$. За последователно черна и бяла топка, $\mathbb{P}(\text{ч}, \text{б}) = \mathbb{P}(\text{ч}) \cdot \mathbb{P}(\text{втора б, ако първа ч}) = \frac{M}{N}\frac{N-M}{N-1}$, и т.н. Тогава, за всяка редица с k черни топки, $\omega^{(k)} = (\text{ч}, \text{ч}, \text{б}, \ldots, \text{ч})$, (общо C_n^k на брой такива редици), имаме

$$\mathbb{P}(\text{ч}, \text{ч}, \text{б}, \ldots, \text{ч}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N-2} \cdots \frac{M-k+1}{N-n+1} = \frac{M!(N-M)!(N-n)!}{(M-k)!(N-M-(n-k))!N!},$$

което е инвариантно спрямо реда на изтеглените цветове. Следователно,

$$\mathbb{P}(\{k \text{ черни от } n\}) = \mathbb{P}\big(\{\omega_1^{(k)}, \ldots, \omega_{C_n^k}^{(k)}\}\big) = \binom{n}{k}\frac{M!(N-M)!(N-n)!}{(M-k)!(N-M-(n-k))!N!} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

□

Задача 2.5. Ако номерата на колите са равномерно разпределени, каква е вероятността номерът на случайна лека кола

(а) да не съдържа еднакви цифри;
(б) да има точно две еднакви цифри;
(в) да има точно три еднакви цифри;
(г) да има две двойки еднакви цифри;
(д) сумата на първите две цифри да съвпада със сумата на последните две?

Решение. Нека $\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_4) : a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\big\}$. (а) $\frac{V_{10}^4}{10^4}$. (б)

Решение 1: можем да съставим $(a_1, \ldots, a_4)$ като изберем множеството $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$, за $a_i^* \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_1^* \neq a_2^* \neq a_3^*$, и пермутираме елементите му с повторение и честота една от $(1, 1, 2)/(1, 2, 1)/(2, 1, 1)$, в зависимост от това кое a_i^* повтаряме; т.е., търсената вероятност е $\frac{\binom{10}{3} \cdot 3 \cdot \binom{4}{2,1,1}}{10^4}$.

Решение 2: избираме на кои две места да повторим някоя цифра, след което избираме вариация от клас 3; т.е., $\frac{\binom{4}{2}\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{10^4}$.

(в) $\frac{\binom{10}{2}\cdot 2\cdot\binom{4}{3,1}}{10^4}$ или $\frac{\binom{4}{3}\cdot 10\cdot 9}{10^4}$; (г) $\frac{\binom{10}{2}\cdot 1\cdot\binom{4}{2,2}}{10^4}$ или $\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{2}}{10^4} = \frac{1}{2}\frac{\binom{4}{2}\cdot 10\cdot 9}{10^4}$, като отново избираме на кои две места да повторим една от цифрите, но поради симетрията между двете двойки еднакви цифри броим всички вариации два пъти, което налага деление на две. (д) За (a, b, c, d), двойките $(a, b), (c, d)$ ще приемат различен брой стойности в зависимост от сумата $a + b = c + d$,

сума $a + b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
варианти за (a, b)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
варианти за (a, b, c, d)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1

Следователно, отговорът е $\frac{2\cdot\sum_{i=1}^{9} i^2+10^2}{10^4}$. □

Задача 2.6. Картите от (случайно наредено) стандартно тесте се теглят последователно. Играч 1 печели, ако се обърне седмица спатия, а Играч 2, ако се обърнат общо два аса. Каква е вероятността Играч 1 да спечели? **Какво става, ако играч 2 чака две поредни аса?

Решение 1. $\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_{52}) : a_i \in \{1, \ldots, 52\}\big\}$. Печеливши за играч 1 са пермутациите, в които имаме следните две подредби на асата и $7C$ измежду елементите на $a_1, \ldots, a_{52}$: 7C-A_1-A_2-A_3-A_4 и A_1-7C-A_2-A_3-A_4. Имаме $\binom{52}{5}$ начина да изберем местата на асата и $7C$, на които можем да подредим четирите аса по 4! различни начина, след като вече сме фиксирали $7C$. Другите карти подреждаме по 47! начина на останалите 47 места, откъдето следва

$$\mathbb{P}(\{\text{Играч 1 печели}\}) = \frac{\text{пермутации с 7C-}A_1\text{-}A_2\text{-}A_3\text{-}A_4}{P_{52}} + \frac{\text{пермутации с }A_1\text{-7C-}A_2\text{-}A_3\text{-}A_4}{P_{52}} = 2\frac{\binom{52}{5}4!47!}{52!}.$$

Решение 2 (Внимание): Можем да се абстрахираме от останалите карти и точната подредбата на асата и да вземем $\Omega = \big\{(7, A, A, A, A), \ldots (A, A, A, A, 7)\big\}$, при което

$$\mathbb{P}(\{\text{Играч 1 печели}\}) = \frac{\big|\{(7, A, A, A, A), (A, 7, A, A, A)\}\big|}{|\Omega|} = \frac{2}{5}.$$

□

*Задача** 2.7. От партида изделия, от които n са доброкачествени и m – бракувани, за проверка по случаен начин са взети s изделия. При проверката се оказало, че първите k от проверяваните s изделия са доброкачествени ($k < s$). Да се пресметне вероятността $(k + 1)$-вото изделие да се окаже доброкачествено.

Решение. Абстрахирайки се от първите k и от последните $s - k - 1$ стъпки, $\mathbb{P}(\{\text{бракувано}\}) = \frac{m-k}{n+m-k}$. □

Задача 2.8. Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат равен брой единици и шестици?

Отговор. $\frac{\#\text{1ци}=\#\text{6ци}}{\text{всички вариации}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{\#\text{1ци}=\#\text{6ци}=\text{k}}{\text{всички вариации}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{10}{k}\binom{10-k}{k}4^{10-2k}}{6^{10}} \equiv \sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{10}{2k}\binom{2k}{k,k}4^{10-2k}}{6^{10}}$. □

Задача 2.9. От урна, съдържаща топки с номера $1, \ldots, n$, се вадят последователно k топки ($k \leq n$). Каква е вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако (а) теглим без да връщаме; (б) изтеглените топки се връщат обратно в урната?

Решение (Техника).

(а) Всяка редица $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ еднозначно определя комбинация на $\{1, \ldots, n\}$ от k-ти ред без повторение, именно $\{a_1, \ldots, a_k\}$, и обратното – елементите на всяка комбинация без повторение образуват една единствена растяща редица. От тук следва, че търсената вероятност е $\frac{C_n^k}{V_n^k} = \frac{1}{k!}$.

(б) Между редиците $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ и $a_1^* < a_2^* < \cdots < a_k^*$, за $a_i^* = a_i + (i - 1)$, $i = 1, \ldots, n$, съществува еднозначна обратима връзка, като $a_i^* \in \{1, \ldots, n + k - 1\}$. От (а) търсената вероятност е $\frac{C_{n+k-1}^k}{V(n,k)}$. □

Задача 2.10. Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

Отговор. $\frac{2\cdot 10!\cdot 10!}{20!}$. □

Задача 2.11. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно $r \leq n-2$ човека? А ако се нареждат в кръг?

Решение. $\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \neq a_j\big\}$. Нека фиксирани са $x, y \in \{1, \ldots, n\} : x \neq y$.

Случай 1: за да получим такава $(a_1, \ldots, a_n)$, можем да вмъкнем редицата $(x/y, b_1, \ldots, b_r, y/x)$, за $b_i \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{x, y\}$, на едно от $(n-r-1)$ места в $(c_1, \ldots, c_{n-r-2})$, за $c_i \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{x, y, b_1, \ldots, b_r\}$; т.е., търсената вероятност е

$$\frac{2! \cdot V_{n-2}^r \cdot P_{n-r-2} \cdot (n-r-1)}{n!} = 2 \cdot \frac{n-r-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

С други думи, един от двамата фиксирани индивиди ще седне вляво от групата от r души, като за това има $n-r-1$ възможни места от n. Другият ще седне на точно 1 предварително определено място от общо $n-1$ останали места.

Случай 2: понеже места "n" и "1" са "долепени", в допълнение към пермутациите в случай 1 трябва да разгледаме случаите, когато между x, y има r човека, като вземем предвид хората в двата края на редицата, т.е. $(x/y, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_1, a_2, \ldots y/x)$. Тях можем да конструираме, като разделим редицата $(x/y, b_1, \ldots, b_r, y/x)$ на две и след това построим $(b_{k+1}, \ldots, b_r, y/x, c_1, \ldots, c_{n-r-2}, x/y, b_1, \ldots, b_k)$ за $k = 0, 1, \ldots, r$; т.е., търсената вероятност е

$$\frac{2! \cdot V_{n-2}^r \cdot P_{n-r-2} \cdot (n-r-1)}{n!} + \frac{2! \cdot V_{n-2}^r \cdot P_{n-r-2} \cdot (r+1)}{n!} = \frac{2}{n-1}.$$

Условно, фиксираме позицията на единия човек, като за другия остават 2 възможни места от $n-1$, броейки $r+1$ места по часовниковата стрелка и $r+1$ места обратно на часовниковата стрелка.

□

Задача 2.12. Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n-те различни адреса и изпратила писмата. Каква е вероятността никой да не получи своето писмо?

Решение (Техника). Нека $A_i = \{$човек i е получил своето писмо$\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогава имаме, че $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \{$никой не е получил своето писмо$\}$, $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, $i \neq j$, и т.н., откъдето

$$\mathbb{P}(\{\text{никой не е получил своето писмо}\}) = 1 - \frac{|\bigcup_{i=1}^n A_i|}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

□

*Забележка** (Derangement). Броят на пермутациите на едно множество с n елементи, при които нито един елемент не се появява на първоначалното си място, се нарича n субфакториел и се означава с $!n$. От горната задача следва, че $!n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$, откъдето $\lim_{n\to\infty} \frac{!n}{n!} = e^{-1}$.

*Задача** 2.13. Нека r неразличими частици се разпределят по случаен начин в n различими клетки. Всяка клетка може да побере произволен брой частици. Предполагаме, че всички различими разпределения са равновероятни. Да се определи вероятността:

(а) фиксирана клетка да съдържа точно k частици ($k \leq r$);
(б) точно m клетки да са празни ($m < n$);
(в) във всяка клетка да има поне по две частици ($r \geq 2n$);
(г) във всяка клетка да има най-много по четири частици ($r \leq 4n$).

Решение (Техника). (а) $\frac{C(n-1,r-k)}{C(n,r)}$. (б) $\binom{n}{m}\frac{C(n-m,r)}{C(n,r)}$. (в) $\frac{C(n,r-2n)}{C(n,r)}$. (г) Нека $A_i = \{$клетка i съдържа $\geq 5\}$, т.е. $A_i = \big\{\{i, i, i, i, i, a_1, \ldots, a_{r-5}\}, a_j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$. Тогава $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \{$всяка клетка $\leq 4\}$, $|A_i| = C(n, r-5)$, $|A_i \cap A_j| = C(n, r-10)$, $i \neq j$, и т.н., откъдето

$$\mathbb{P}(\{\text{всяка клетка} \leq 4\}) = \frac{C(n,r) - |\bigcup_{i=1}^n A_i|}{C(n,r)} = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor r/5 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} C(n, r-5k)}{C(n,r)}.$$

□

*Задача** 2.14. Нека r неразличими частици се разпределят по случаен начин в n различими клетки. Всяка клетка може да побере най-много една частица. Предполагаме, че всички различими разпределения са равновероятни. Да се определи вероятността фиксирана клетка да е празна ($r < n$).

Отговор. $\frac{n-r}{n}$. □

*Задача** 2.15. Нека r различими частици се разпределят по случаен начин в n различими клетки. Всяка клетка може да побере произволен брой частици. Предполагаме, че всички различими разпределения са равновероятни. Да се определи вероятността:

(а) първата клетка да съдържа k_1 частици, втората – k_2 частици и т.н, където $k_1 + \cdots + k_n = r$;
(б) при $n = r$ нито една клетка да не остане празна;
(в) при $n = r$ да остане празна точно една клетка;
(г) точно m клетки да са празни ($m < n, r \geq n - m$).

Решение. (а) $\frac{\binom{r}{k_1,\ldots,k_n}}{n^r}$. (б) $\frac{n!}{n^n}$. (в) $\frac{n\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}$, като в една от останалите $n-1$ клетки ще има две топки. (г) Във всяка от останалите $n-m$ клетки, избрани по $\binom{n}{n-m}$ начина, можем да поставим между 1 и $r-(n-m-1)$ топки, откъдето

$$\mathbb{P}(\{\text{точно m клетки са празни}\}) = \frac{\binom{n}{n-m}\sum_{k_i\in\mathbb{N}:k_1+\cdots+k_{n-m}=r}\binom{r}{k_1,\ldots,k_{n-m}}}{n^n} = $$
$$= \frac{\binom{n}{n-m}\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i\binom{n-m}{i}(n-m-i)^r}{n^n},$$

като използваме, че $\sum_{k_i\in\mathbb{N}_0:k_1+\cdots+k_{n-m}=r}\binom{r}{k_1,\ldots,k_{n-m}} = (n-m)^r$ от забележките след дефиницията на $V(n,k)$, и принципа за включване-изключване, за да извадим случаите, в които поне едно $k_i = 0$. □

*Задача** 2.16. Хвърлят се n зара. Да се пресметне вероятността сумата от падналите се точки да бъде равна на: а) n; б) $n+1$; в) дадено число s.

Решение. $\Omega = \big\{(a_1,\ldots,a_n) : a_i \in \{1,\ldots,6\}\big\}$, $|\Omega| = 6^n$. (а) $\frac{1}{6^n}$. (б) $\frac{n}{6^n}$. (в)

Решение 1: търсим вариациите с n_1 единици,..., n_6 шестици, такива че $n_1 + 2n_2 + \cdots + 6n_6 = s$, т.е.

$$\mathbb{P}(\{a_1+\cdots+a_n = s\}) = \frac{1}{6^n}\sum_{n_i\in\mathbb{N}_0:n_1+2n_2+\cdots+6n_6=s}\binom{n}{n_1,\ldots,n_6}.$$

Решение 2: броят на търсените вариации е равен на броя на решенията на $x_1+\cdots+x_n = s$ за $x_i \in \mathbb{N} : x_i \leq 6$. Нека $A_i = \{\text{решения с } x_i \geq 7\}$, така че $\left(\bigcup_{i=1}^n A_k\right)^c = \{\text{решения с } x_1 \leq 6,\ldots,x_n \leq 6\}$. Тогава $|A_i| = C(n, s-n-6)$, $|A_i \cap A_j| = C(n, s-n-12)$, $i \neq j$, и т.н., откъдето

$$\mathbb{P}(\{a_1+\cdots+a_n = s\}) = \frac{C(n,s-n) - |\bigcup_{i=1}^n A_i|}{6^n} = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor(s-n)/6\rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}C(n,s-n-6k)}{6^n}.$$

□

*Задача** 2.17. От n чифта обувки случайно се избират $2r$ обувки ($2r < n$). Да се пресметне вероятността измежду избраните обувки:

(а) да няма нито един чифт;
(б) да има точно един чифт;
(в) да има точно два чифта.

Решение. $\Omega = \big\{(a_1,\ldots,a_{2r}) : a_i \in \{л_1,\ldots,л_n,д_1,\ldots,д_n\}, a_i \neq a_j\big\}$, $|\Omega| = V_{2n}^{2r}$.

(а) $\frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots(2n-4r+2)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2r+1)} = \frac{2^{2r}\cdot V_n^{2r-1}}{V_{2n}^{2r}} = \frac{2^{2r}\cdot\binom{n}{2r}}{\binom{2n}{2r}}$, т.е. без значение подредбата, избираме $2r$ чифта по $\binom{n}{2r}$ начина, след което решаваме да вземем дясна или лява обувка от всеки избран чифт.

(б) $\frac{\binom{2n}{2}\cdot 2\cdot n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots(2n-4r+4)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2r+1)} = \frac{n\cdot 2^{2r-2}\cdot\binom{n-1}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}$, където $\binom{2n}{2}$ са местата, на които по 2 начина поставяме лявата и дясната обувка от един и същи чифт, избран от всички n чифта обувки, т.е. $\binom{2n}{2}\cdot 2\cdot n$ възможни такива случаи.

(в) $\frac{\binom{2r}{2}\cdot 2\cdot n\cdot\binom{2r-2}{2}\cdot 2\cdot(n-1)\cdot(2n-4)\cdot(2n-6)\cdots(2n-4r+6)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-2r+1)} = \frac{\binom{n}{2}\cdot 2^{2r-4}\cdot\binom{n-2}{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}$.

□

*Задача*** 2.18 (Bertrand's Ballot Problem). При провеждане на избори има двама кандидати, като за първия са пуснати в урната n бюлетини, а за втория бюлетини – m. Каква е вероятността при преброяване на бюлетините броят на преброените гласове, подадени за първия кандидат, през цялото време да бъде по-голям от броя на гласовете подадени за втория?

Решение (Техника). За всяко $i = 1, \dots, n+m$, полагаме $x_i = 1$, ако i-тата бюлетина е за кандидат 1, и $x_i = -1$, ако е за кандидат 2. Задачата е еквивалентна на това броят на нетните гласове $s_1 > 0, s_2 > 0 \dots, s_{n+m} = n - m > 0$ да бъде постоянно положителен, където $s_i = x_1 + \dots + x_i$. Геометрично погледнато, последното предполага, че начупената линията, свързваща точките $(0,0), (1, s_1), (2, s_2), \dots, (n+m, n-m)$, не докосва абсцисната ос. Нещо повече, тъй като кандидат 1 е винаги начело, имаме $s_1 = x_1 = 1$ и траекториите, които удовлетворяват условието, са сред всички свързващи $(1,1)$ и $(n+m, n-m)$. От Задача 1.12,

$$\mathbb{P}(\{\text{кандидат 1 е винаги начело}\}) = \frac{\text{от } (1,1) \text{ до } (n+m, n-m) \text{ без да докосва}}{\text{всички от } (0,0) \text{ до } (n+m, n-m)} = \frac{\binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-1}{n}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{n-m}{n+m}.$$

□

2.2 Условни вероятности

Условна вероятност. *Нека $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и $B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B) > 0$. Условната вероятност на събитието $A \in \mathcal{A}$ при условие B дефинираме чрез количеството*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ако в допълнение $\mathbb{P}(A) > 0$, то $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ (формула на Бейс) или

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

По общо, за $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

*Забележка** (Интерпретация). Ако условията на случайния експеримент са се променили така, че възможните изходи ω лежат изцяло в B, тогава има смисъл да се работи с вероятностното пространство $\big(B, \mathcal{A} \cap B, \mathbb{P}(\cdot|B)\big)$, където $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{A} \cap B \to [0,1]$ е добре дефинира вероятностна мярка, такава че $\mathbb{P}(B|B) = 1$. В частност е вярно за $\mathbb{P}(\cdot|B)$, че

$$\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B),$$

и, за $A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B).$$

*Забележка** (Simpson's Paradox). Долната таблица показва истински данни от успеваемостта на две лекарства при лечение на бъбречни камъни.

	Лечение	
Размер на камъните	А	Б
Малки	**93%** (81/87)	87% (234/270)
Големи	**73%** (192/263)	69% (55/80)
Общо	78% (273/350)	**83%** (289/350)

Независимост. *Събитията $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ се наричат независими, ако за кои да е $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ при $k = 2, \dots, n$, имаме*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Ако $n = 2$ и $\mathbb{P}(A_2) > 0$, следва, че A_1 и A_2 са независими тогава и само тогава, когато $\mathbb{P}(A_1|A_2) = \mathbb{P}(A_1)$.

Твърдение 2.1 (Свойства). *Ако $A, B \in \mathcal{A}$ са независими, $A \perp B$, тогава $A \perp B^c$, $A^c \perp B$ и $A^c \perp B^c$.*

Д-во. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$. Останалите твърдение се доказват по аналогичен начин. □

Задача 2.19. Застрахователна компания води статистика за своите клиенти. Известно е, че 1) всички клиенти посещават лекар поне веднъж годишно; 2) 60% посещават лекар повече от веднъж годишно; 3) 17% посещават хирург; 4) 15% от тези, които посещават лекар повече от веднъж годишно, посещават хирург. Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава лекар само веднъж годишно, да не е бил при хирург?

Решение. Нека $A = \{\text{посещава хирург}\}$ и $B = \{\text{на лекар } > 1 \text{ годишно}\}$. От условието, $\mathbb{P}(A) = 0.17$, $\mathbb{P}(B) = 0.6$ и $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = 0.09$, откъдето $\mathbb{P}(A^c|B^c) = \frac{\mathbb{P}((A\cup B)^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)}{1-\mathbb{P}(B)} = 0.80$. $\square$

Задача 2.20. Хвърлят се два зара. Разглеждаме събитията $A_1 = \{\text{на първия зар се пада нечетно число}\}$, $A_2 = \{\text{на втория зар се пада нечетно число}\}$ и $A_3 = \{\text{сумата от падналите се точки е нечетна}\}$. Независими ли са тези събития две по две? Независими ли са в съвкупност?

Решение. $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$. $\square$

Задача 2.21. При всеки опит едно събитие настъпва с вероятност p. Опитите се провеждат последователно до настъпване на събитието. Да се пресметне вероятността събитието да настъпи точно на $(k+1)$-вия опит.

Отговор. $(1-p)^k p$. $\square$

Задача 2.22. Вероятността за излизане на строя на k-тия блок на една машина е равна на p_k, $k = 1, \dots, n$. Да се пресметне вероятността за излизане от строя поне на един от n-те блока на машината, ако работата на всички блокове е взаимно независима.

Отговор. $1 - \prod_{k=1}^n (1-p_k)$. $\square$

Задача 2.23. Трима ловци едновременно стрелят по заек. Заекът е убит от един куршум. Каква е вероятността той да е изстрелян от първия ловец, ако те уцелват с вероятност, съответно p_1, p_2 и p_3?

Решение. Нека $A = \{\text{убит от един куршум}\}$ и $H_i = \{\text{ловец i уцелва}\}$, $i = 1, 2, 3$. Тогава $A = (H_1 \cap H_2^c \cap H_3^c) \cup (H_1^c \cap H_2 \cap H_3^c) \cup (H_1^c \cap H_2^c \cap H_3)$, откъдето $\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap H_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{p_1(1-p_2)(1-p_3)}{p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3}$. $\square$

Задача 2.24 (Birthday Paradox). Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин така, че вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по голяма от $1/2$?

Отговор. $\min\{n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{V_{365}^n}{365^n} > \frac{1}{2}\} = 23$. $\square$

Задача 2.25 (Boy or Girl Paradox). X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета?

Решение 1. Нека $A = \{\text{по-малкото е момиче}\}$ и $B = \{\text{по-старото е момиче}\}$. Предполага се, че $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ и $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$. Тогава $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ и

$$\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Решение 2: Нека $\Omega = \big\{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{m, f\}\big\}$, където елементарните събития са равновероятни. Тогава $\mathbb{P}(\{\text{две момичета}\}) = \mathbb{P}((f, f)) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\text{поне едно момиче}\}) = \mathbb{P}(\{(m, f), (f, m), (f, f)\}) = \frac{3}{4}$ и

$$\mathbb{P}\big(\{\text{две момичета}\}\big|\{\text{поне едно момиче}\}\big) = \frac{1}{3}.$$

$\square$

*Задача** 2.26. Кутия съдържа n билета, от които $m \le n$ печелят, а останалите билети губят. Всеки от n играчи на свой ред избира по един билет. Какви са шансовете за печалба на всеки от играчите? Кога е по-изгодно да се изтегли билет?

Решение. Нека $A_k^0 = \{k\text{-тия играч тегли печеливш билет}\}$ и $A_k^1 = (A_k^0)^c$, $k = 1, \dots, n$. Тогава

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k^0) &= \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}\in\{0,1\}} \mathbb{P}(A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{k-1}^{i_{k-1}} \cap A_k^0) = \sum_{i_1,\dots,i_{k-1}\in\{0,1\}} \mathbb{P}(A_1^{i_1})\mathbb{P}(A_2^{i_2}|A_1^{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_k^0|A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{k-1}^{i_{k-1}}) \\ &= \sum_{i=\max\{0,k-(n-m)\}}^{\min\{m-1,k-1\}} \binom{k-1}{i} \frac{m \cdots (m-i+1) \cdot (m-i) \cdot (n-m) \cdots \big((n-m)-(k-i-1)+1\big)}{n \cdots (n-k+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{m}{n} \sum_{i=\max\{0,k-(n-m)\}}^{\min\{m-1,k-1\}} \frac{\binom{m-1}{i}\binom{(n-1)-(m-1)}{k-i-1}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{m}{n},$$

където $\sum_{i=\max\{0,k-(n-m)\}}^{\min\{m-1,k-1\}} \binom{m-1}{i}\binom{(n-1)-(m-1)}{k-i-1} = \binom{n-1}{k-1}$ изброява начините, по които можем да изберем комбинация от $(k-1)$-ви клас на множество от $n-1$ елементи, състоящо се от $m-1$ печеливши и $(n-1)-(m-1)$ непечеливши такива (виж Задача 1.9). □

*Задача** 2.27. Двама души играят до победа, като за това е необходимо първият да спечели m партии, а вторият – n партии. Първият играч може да спечели всяка отделна партия с вероятност p, а вторият – с вероятност $1-p$. Да се пресметне вероятността първият играч да спечели цялата игра.

Решение. $\mathbb{P}(\{\text{I печели}\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{\text{I печели от } m+k \text{ партии}\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k$, където, за да спечели I от $m+k$ изиграни партии, означава, че I е спечелил последната партия и II е спечелил $k \le n-1$ партии от предходните $m+k-1$ партии. □

. . . .

Формула за пълната вероятност. *Нека* $\{H_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ *образуват пълна група от събития, т.е.* $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$, $H_n \cap H_m = \emptyset$, $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$. *Допускаме, че* $\mathbb{P}(H_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогава, за произволно събитие* $A \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n).$$

Ако в допълнение е изпълнено, че $\mathbb{P}(A) > 0$, *тогава за всяко* n,

$$\mathbb{P}(H_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n)}{\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|H_m)\mathbb{P}(H_m)}.$$

*Забележка** (ФПВ за УВ). За $C \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(C) > 0$ е изпълнено $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B,C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B,C^c)\mathbb{P}(C^c|B)$.

Задача 2.28. Две урни съдържат съответно $б_1$ и $б_2$ бели топки и $ч_1$ и $ч_2$ черни топки. От всяка урна случайно се изважда по една топка, а след това от тези две топки случайно се избира едната. Каква е вероятността тази топка да е бяла?

Решение. Нека $A = \{\text{бяла топка}\}$ и $H_{ij} = \{\text{цветът от първата урна е i, а от втората j}\}$, $i, j \in \{б,ч\}$. Тогава $\mathbb{P}(H_{ij}) = \frac{i_1 j_2}{(б_1+ч_1)(б_2+ч_2)}$, $\mathbb{P}(A|H_{бб}) = 1$, $\mathbb{P}(A|H_{бч}) = \mathbb{P}(A|H_{чб}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A|H_{чч}) = 0$, откъдето

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_{бб})\mathbb{P}(H_{бб}) + \mathbb{P}(A|H_{чб})\mathbb{P}(H_{чб}) + \mathbb{P}(A|H_{бч})\mathbb{P}(H_{бч}) + \mathbb{P}(A|H_{чч})\mathbb{P}(H_{чч}) = \frac{2б_1б_2 + б_1ч_2 + ч_1б_2}{2(б_1+ч_1)(б_2+ч_2)}.$$

□

Задача 2.29. Разполагаме с три стандартни зара и един, чиито страни са само шетици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат а) три шестици; б) различни цифри; в) последователни цифри?

Отговори. а) $\mathbb{P}(6{,}6{,}6) = \frac{1}{4}\frac{1}{6^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{6^2}$; б) $\mathbb{P}(\text{различни}) = \frac{1}{4}\frac{V_6^3}{6^3} + \frac{3}{4}\frac{V_5^2}{6^2} = \frac{V_5^2}{6^2}$; в) $\mathbb{P}(\text{последователни}) = \frac{1}{4}\frac{4 \cdot 3!}{6^3} + \frac{3}{4}\frac{2}{6^2}$. □

Задача 2.30. От урна, която съдържа топки с номера от 1 до n, последователно се изваждат две топки, като първата се връща, ако номерът ѝ не е равен на 1. Да се пресметне вероятността топката с номер 2 да бъде извадена при второто теглене.

Отговор. $\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$. □

Задача 2.31. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също случайно се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови?

Отговор. $\mathbb{P}(\{\text{втора игра с 3 нови}\}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}$. □

Задача 2.32. Всяка от k_1 на брой урни съдържа по $б_1$ бели и $ч_1$ черни топки, а всяка от k_2 на брой урни – по $б_2$ бели и $ч_2$ черни топки. От случайно избрана урна е била изтеглена топка, която се оказва бяла. Каква е вероятността тази топка да е изтеглена от първата група урни?

Решение. Нека $A = \{\text{бяла топка}\}$ и $H_i = \{\text{топката е от i-тата група урни}\}$, $i \in \{1, 2\}$. Тогава $H_2 = H_1^c$, $\mathbb{P}(H_i) = \frac{k_i}{k_1+k_2}$ и $\mathbb{P}(A|H_i) = \frac{б_i}{б_i+ч_i}$, откъдето

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{P(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + P(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{б_1}{б_1+ч_1}}{\frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{б_1}{б_1+ч_1} + \frac{k_2}{k_1+k_2}\frac{б_2}{б_2+ч_2}} = \left[1 + \frac{k_2 б_2(б_1+ч_1)}{k_1 б_1(б_2+ч_2)}\right]^{-1}.$$

□

Задача 2.33. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в 99% от случаите и при заразените (когато трябва да е положителен), и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете че 0.5% от населението има това заболяване, какв е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Отговор. $\approx 34\%$. □

Задача 2.34. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност p_1, а момчетата – с p_2. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Решение. Нека $A = \{\text{2 успешни и 1 неуспешен}\}$ и $H_i = \{\text{избрани i резултата на момичета}\}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Тогава H_0, H_1, H_2, H_3 образуват пълна група и $\mathbb{P}(H_i) = \frac{\binom{45}{i}\binom{55}{3-i}}{\binom{100}{3}}$. Отделно $\mathbb{P}(A|H_0) = 3 \cdot p_2^2(1-p_2)$, $\mathbb{P}(A|H_1) = p_2^2(1-p_1) + 2 \cdot p_1 p_2(1-p_2)$, $\mathbb{P}(A|H_2) = p_1^2(1-p_2) + 2 \cdot p_1 p_2 (1-p_1)$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 3 \cdot p_1^2(1-p_1)$ и решението следва от формулата $\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{j=0}^3 \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}$. □

Задача 2.35. Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна, която не се вижда, също да е бяла?

Решение. Нека $A = \{\text{видяна е бяла страна}\}$ и $H_i = \{\text{монетата има i бели страни}\}$, $i = 0, 1, 2$. Тогава H_0, H_1, H_2 образуват пълна група, $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}$ и $\mathbb{P}(A|H_i) = \frac{i}{2}$, откъдето

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A|H_0)\mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

□

*Задача** 2.36 (Monty Hall Problem). Зад една от три затворени врати има чисто нова кола, а зад другите две няма нищо. Избирате врата, след което водещият отваря една от останалите две врати, зад които няма нищо. Сега трябва да решите – сменяте ли избраната врата или запазвате първоначалния си избор?

Решение. Нека сме избрали врата 1, при което водещият, избирайки между врати 2 и 3, отваря врата 3, зад която няма нищо. Дефинираме $A = \{\text{отваря врата 3}\}$ и $H_i = \{\text{врата i печели}\}$, $i = 1, 2, 3$. Знаем, че $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}$. По условие $\mathbb{P}(A|H_2) = 1$ и $\mathbb{P}(A|H_3) = 0$. Нека обозначим с $\mathbb{P}(A|H_1) = p$ за $p \in [0, 1]$. Тогава

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)} = \frac{p\frac{1}{3}}{p\frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{p}{p+1}.$$

От тук следва, че $\mathbb{P}(H_1|A) = 0$ за $p = 0$, $\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{1}{3}$ за $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{1}{2}$ за $p = 1$. □

*Задача** 2.37. Всички изделия в едната от две партиди са доброкачествени, а в другата 1/4 от изделията са бракувани. Изделие, взето от случайно избрана партида, се оказало доброкачествено, след което е върнато обратно в своята партида. Да се пресметне вероятността второто случайно избрано изделие от същата партида да се окаже бракувано.

Решение. Нека $A = \{$2-ро бракувано$\}$, $B = \{$1-во добро$\}$ и $C = \{$от I-ва партида$\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A\cap B|C^c)\mathbb{P}(C^c)}{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B|C^c)\mathbb{P}(C^c)} = \frac{0\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2}} = \frac{3}{28}.$$

□

Задача 2.38. В урна има n бели, m зелени и l червени топки, които се изваждат по случаен начин една след друга: (а) без връщане; (б) с връщане. В двата случая да се пресметне вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена топка.

Решение (Техника). Нека $H_0 = \{$изтеглени само червени$\}$, $H_k^{\text{б}} = \{$бяла преди зелена на стъпка $k\}$ и $H_k^{\text{з}} = \{$зелена преди бяла на стъпка $k\}$, за $k = 1, 2, \ldots$, и $A = \{$бяла преди зелена$\}$, като в (б) играта може да продължи, докато в урната не остане нито една червена топка $+\ 1$ последен ход.

(а) $H_0, H_1^{\text{б}}, H_1^{\text{з}}, \ldots$ образуват пълна група от събития върху $\Omega = \{\text{б}, \text{з}, \text{чб}, \text{чз}, \text{ччб}, \text{ччз}, \ldots, \text{чччч}\cdots\}$. Тогава $A\cap H_0 = \emptyset$ и $A \cap H_k^{\text{з}} = \emptyset$, за всяко $k = 1, 2, \ldots$, откъдето

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A\cap H_k^{\text{б}}) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(H_k^{\text{б}}) = \frac{n}{n+m+l}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{l}{n+m+l}\Big)^k = \frac{n}{n+m+l}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{n+m+l}} = \frac{n}{n+m}.$$

От друга страна, ако на първия ход няма победител, т.е. е настъпило събитието $G := (H_1^{\text{б}}\cup H_1^{\text{з}})^c$, то играта започва отначало от вероятностна гледна точка. Това може да бъде изведено от

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap H_1^{\text{б}}) + \mathbb{P}(A\cap H_1^{\text{з}}) + \mathbb{P}(A\cap G) = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{n+m+l}\mathbb{P}(A|G),$$

като $\mathbb{P}(A|G) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(H_k^{\text{б}}|G)$. Но $\mathbb{P}(H_1^{\text{б}}|G) = 0$, $\mathbb{P}(H_2^{\text{б}}|G) = \mathbb{P}(H_1^{\text{б}})$, $\mathbb{P}(H_3^{\text{б}}|G) = \mathbb{P}(H_2^{\text{б}})$, т.н., откъдето $\mathbb{P}(A|G) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(H_k^{\text{б}}) \equiv \mathbb{P}(A)$. Следователно $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{n+m+l}\mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+m}$.

(б) В този случай $\Omega = \{\text{б}, \text{з}, \text{чб}, \text{чз}, \text{ччб}, \text{ччз}, \ldots, \text{ччч}\cdots\text{чб}, \text{ччч}\cdots\text{чз}\}$ и $H_1^{\text{б}}, H_1^{\text{з}}, \ldots, H_{l+1}^{\text{б}}, H_{l+1}^{\text{з}}$ образуват пълна група от събития, като $H_0 = \emptyset$ и $A^c = \{$зелена преди бяла$\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{l+1}\mathbb{P}(A\cap H_k^{\text{б}}) = \sum_{k=1}^{l+1}\mathbb{P}(H_k^{\text{б}}) = \frac{n}{n+m+l}\Big[1 + \sum_{k=1}^{l}\frac{l\cdots(l-k+1)}{(n+m+l-1)\cdots(n+m+l-k)}\Big].$$

От друга страна $\mathbb{P}(A^c) = \frac{m}{n+m+l}\big[1+\sum_{k=1}^{l}\frac{l\cdots(l-k+1)}{(n+m+l-1)\cdots(n+m+l-k)}\big]$, откъдето намираме, че $\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{n}{m}$ и, съответно, $\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+m}$ и $\mathbb{P}(A^c) = \frac{m}{n+m}$.

□

Забележка.* Вероятността да няма победител в (а) е $\mathbb{P}(H_0) = \mathbb{P}(\text{ччччч}\cdots) = \lim_{n\to\infty}\big(\frac{l}{n+m+l}\big)^n = 0$. Вероятността да има победител е $\mathbb{P}(H_0^c) = \frac{n+m}{n+m+l}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{l}{n+m+l})^n = 1$.

Задача 2.39. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който пръв хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играта за всеки от играчите? А ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

Решение (Техника). Нека $A = \{$I печели$\}$, $H_0 = \{$никой не печели$\}$, $H_{2n-1} = \{I$ печели на (2n-1)-ти опит$\}$ и $H_{2n} = \{II$ печели на (2n)-ти опит$\}$, за $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно е, че $\mathbb{P}(H_0) = 0$, откъдето $\mathbb{P}(\{II \text{ печели}\}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. От друга страна, $H_0, H_1, H_2, \ldots$ образуват пълна група върху $\Omega = \{E, TE, TTE, \ldots, TTTTTTT\cdots\}$. Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(A\cap H_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(H_{2n-1}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(TTE) + \mathbb{P}(TTTTE) + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Рекурсивно решение: Използвайки същата логика като в Задача 2.38, имаме

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap H_1) + \mathbb{P}(A\cap H_2) + \mathbb{P}(A|(H_1\cup H_2)^c)\mathbb{P}\big((H_1\cup H_2)^c\big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A) \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}.$$

Що се отнася до втория въпрос, ролите на играчите са един вид разменени, като

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(ETT) + \mathbb{P}(TEE) + \mathbb{P}(ETETT) + \mathbb{P}(TETEE) + \cdots = 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

□

*Задача** 2.40. Двама играчи хвърлят зар едновременно. Печели този, който хвърли по-голямо число. Да се пресметне вероятността за печалба на първия играч. А ако двамата продължават да хвърлят, докато не бъде излъчен победител?

Решение. $\mathbb{P}(\{\text{зар I} > \text{зар II}\}) = \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(\{\text{зар I} > \text{зар II}, \text{зар II} = j\}) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}\frac{6-j}{6} = \frac{5}{12}$. От друга страна, вероятността точките да образуват строго намаляваща редица е $\mathbb{P}(\{\text{зар I} > \text{зар II}\}) = \frac{\binom{6}{2}}{6^2} = \frac{5}{12}$. Що се отнася до втория въпрос, резултатът от играта за двамата е симетричен, следователно двамата имат еднакъв шанс да спечелят, $\mathbb{P}(\{\text{I печели}\}) = \frac{1}{2}$, което може да бъде изведено от равенството

$$\mathbb{P}(\{\text{I печ.}\}) = \mathbb{P}(\{\text{I печ. на 1-ви ход}\}) + \mathbb{P}(\{\text{Никой не печ. на 1-ви ход}\}) \cdot \mathbb{P}(\{\text{I печ.}\}) = \frac{15}{36} + \frac{6}{36} \cdot \mathbb{P}(\{\text{I печ.}\}).$$

□

Задача 2.41. Всяка от N урни съдържа по m бели и n черни топки. От първата урна случайно се избира една топка и се прехвърля във втората. След това от втората урна случайно се избира една топка и се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде извадена бяла топка?

Решение (Техника). Нека $A_k = \{\text{от k-тата урна вадим бяла топка}\}$, $k = 1, \ldots, N$. Тогава $\mathbb{P}(A_1) = \frac{m}{m+n}$. Допускаме, че $\mathbb{P}(A_k) = \frac{m}{m+n}$ е изпълнено за някое $k = 1, \ldots, N-1$. Тогава

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1}|A_k)\mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{k+1}|A_k^c)\mathbb{P}(A_k^c) = \frac{m+1}{m+n+1}\frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n+1}\frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n},$$

откъдето по индукция следва, че $\mathbb{P}(A_N) = \frac{m}{m+n}$. □

*Задача*** 2.42 (Задача за разоряване). Последователно се хвърля монета. Ако се падне ези, играчът печели 1 лв., а ако се падне тура – губи 1 лв. В началото на играта играчът има x лв. Играта завършва или когато играчът набере предварително определена сума от a лв., или когато проиграе всичките си пари. Каква е вероятността играчът да се разори? **А какъв е шансът играчът да спечели a лв. на n-ти ход?

Решение (Техника). Нека $A = \{\text{играчът фалира}\}$ и $B = \{\text{играчът печели първото хвърляне}\}$. Дефинираме $p(x) = \mathbb{P}(\{\text{фалит с } x \text{ лв. начален капитал}\})$, $x = 0, 1, \ldots, a$. Тогава $p(0) = 1$, $p(a) = 0$ и

$$p(x) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{2}\big(p(x+1) + p(x-1)\big),$$

откъдето $p(x+1) - p(x) = p(x) - p(x-1) = \cdots = p(1) - p(0) = p(1) - 1$. Но $p(x+1) - p(1) = \sum_{i=1}^{x}(p(i+1) - p(1)) = xp(1) - x$ и, съответно, $p(x+1) = (x+1)p(1) - x$. Следователно $p(x) = xp(1) - (x-1)$ и $p(a) = ap(1) - (a-1)$, откъдето $p(x) = x\frac{p(a)+a-1}{a} - (x-1) = \frac{a-x}{a}$.

Що се отнася до втория въпрос, резултатът следва след преброяване на траекториите от $(0,0)$ до $(n-1, a-x-1)$ (валидно за n, такова че $n+a-x$ е четно), които не докосват хоризонталите $y = -x$ и $y = a-x$, като от условието е ясно, че играчът печели n-тото хвърляне. За по-прегледно, нека положим $n^* = n-1$, $m^* = a-x-1$. От Задача 1.12, броят на траекториите от $(0,0)$ до (n^*, m^*), докосващи $y = -x$ (или $y = a-x$), е N_{n^*, m^*+2x} (или $N_{n^*, m^*-2(a-x)}$). Въпреки това $N_{n^*, m^*+2x} + N_{n^*, m^*-2(a-x)}$ брои по два пъти траекториите от $(0,0)$ до (n^*, m^*), които докосват $y = -x$ и после $y = a-x$, и тези, които докосват $y = a-x$ и после $y = -x$. Техният брой, прилагайки на два пъти принципа на отражението от Задача 1.12, е съответно $N_{n^*, m^*-2(a-x)-2x}$ и $N_{n^*, m^*+2(a-x)+2x}$. Аналогично, в $N_{n^*, m^*+2x} + N_{n^*, m^*-2(a-x)} - N_{n^*, m^*-2(a-x)-2x} - N_{n^*, m^*+2(a-x)+2x}$ са извадени траекториите от $(0,0)$ до (n^*, m^*), които докосват последователно $y = -x$, $y = a-x$ и $y = -x$, и тези, които докосват последователно $y = a-x$, $y = -x$ и $y = a-x$. Нека означим с $N(A_1) = N_{n^*, m^*+2x}$, $N(A_2) = N_{n^*, m^*-2(a-x)-2x}$, $N(A_3)$ броя на траекториите от $(0,0)$ до (n^*, m^*), които докосват последователно $y = -x$, $y = a-x$ и $y = -x$, и т.н., и с $N(B_1) = N_{n^*, m^*-2(a-x)}$, $N(B_2) = N_{n^*, m^*+2(a-x)+2x}$, $N(B_3), \ldots$ броя на траекториите от $(0,0)$ до (n^*, m^*), които докосват последователно $y = a-x$, $y = -x$ и $y = a-x$, и т.н. Лесно се вижда, че за $j = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} N(A_{2j+1}) &= N_{n^*, m^*+2j(a-x)+2(j+1)x}, \qquad & N(A_{2j}) &= N_{n^*, m^*-2j(a-x)-2jx}, \\ N(B_{2j+1}) &= N_{n^*, m^*-2(j+1)(a-x)-2jx}, \qquad & N(B_{2j}) &= N_{n^*, m^*+2j(a-x)+2jx}, \end{aligned}$$

откъдето

$$\mathbb{P}(\{\text{печели а лв. на n-ти ход}\}) = \Big(N_{n^*, m^*} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\big(N(A_j) + N(B_j)\big)\Big)\frac{1}{2^n}.$$

□

3 Източници

Димитров, Б. и Янев, Н. (2007). *Вероятности и статистика*, Софтех, София.

Стоянов, Й., Миразчийски, И., Игнатов, Ц. и Танушев, М. (1976). *Ръководство за упражнения по теория на вероятностите*, Наука и изкуство, София.

Чуканов, В. (1977). *Комбинаторика*, Народна просвета, София.

Grimmett, G. and Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*, 3rd Edition, Oxford University Press, UK.