Задача 1. Припомнете принципа за включването и изключването.

Задача 2. Нека M е множество с n елемента (ще пишем $|M| = n$) и $a_1, \ldots, a_k \in M$. Припомнете по колко начина можем изберем

(а) k различни елемента от M, т.е. $\{a_1, \ldots, a_k\}$ (C_n^k);

(б) k-орка от различни елементи на M, т.е. $(a_1, \ldots, a_n), a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ (V_n^k);

(в) k-орка от елементи на M, т.е $(a_1, \ldots, a_n)$.

Задача 3. Колко решения има уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, ако

(а) $x_1, \ldots, x_k$ са естествени числа;

(б) $x_1, \ldots, x_k$ са неотрицателни цели числа?

По колко начина можем да изберем k елемента от множество с n елемента, ако допускаме и повторения, т.е. k-елементно мултиподмножество?

Задача 4. По колко начина можем да разпределим k различими частици в n различни клетки, ако

(а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;

(б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

(в) няма празна клетка?

Отговорете на същите въпроси при положение, че частиците са неразличими.

Задача 5. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако

(а) не се допуска повторение на цифри;

(б) допуска се повторение на цифри;

(в) не се допускат повторения и числото е нечетно?

Задача 6. По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако

(а) няма ограничения за участие в нея;

(б) A и B не трябва да участват заедно;

(в) C и D могат да участват само заедно?

Задача 7. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A,B и C. Да се намери броят на всички различни разпределения, за които:

(а) кутията A е празна;

(б) само кутията A е празна;

(в) точно една кутия е празна;

(г) поне една кутия е празна;

(д) няма празна кутия.

Задача 8. Колко е броят на думите с дължина n и съдържащи само символите a, b и c, такива че

(а) започват с a;

(б) съдържат точно k пъти символа a;

(в) съдържат точно k пъти символа a, при което и първият, и последният символ е a;

(г) съдържат съответно k_1, k_2 и k_3 пъти, $k_1 + k_2 + k_3 = n$, от символите a, b и c.

Задача 9. Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\}$. Колко са подмножествата на A, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

Задача 10. (а) По колко начина можем да стигнем от точката $(0, 0)$ до т. (n, n) в стандартна квадратна решетка, ако правим единични стъпки само надясно и нагоре? А ако трябва да не преминаваме над диагонала, свързващ тези две точки?

(б) По колко коректни начина можем да съставим дума от n откриващи и n закриващи скоби (пример: '(())' е коректна, а '())(' - не)?

Задача 11. Куб, чиято повърхност е боядисана в червено, е разрязан на 1000 еднакви кубчета. Каква е вероятността случайно избрано кубче да има точно две червени страни?

Задача 12. Да предположим, че номерата на колите са равномерно разпределени. Каква е вероятността номерът на случайна лека кола

(а) да не съдържа еднакви цифри;

(б) да има точно две еднакви цифри;

(в) да има три еднакви цифри;

(г) да има две двойки еднакви цифри;

(д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри?

Задача 13. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека. А ако се нареждат в кръг?

Задача 14. Картите от (случайно наредено) стандартно тесте се теглят последователно. А печели, ако се обърне седмица спатия, а B, ако се обърнат общо две аса. Каква е вероятността А да спечели? А ако B чака две поредни аса?

Задача 15. От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \dots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Каква е вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако

(а) извадката е без връщане;

(б) извадката е с връщане?

Задача 16. Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат равен брой единици и шестици?

Задача 17. Вероятността стрелец да улучи мишена е $2/3$. Ако улучи, той получава право да стреля по друга мишена. Вероятността да уцели и двете мишени е $1/2$. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път?

Задача 18. Застрахователна компания води статистика за своите клиенти

- всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;
- 60% посещават повече от веднъж годишно лекар;
- 17% посещават хирург;
- 15% от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург.

Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Задача 19. Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Задача 20. Разполагаме с тесте от 36 карти (т.е. от шестица нагоре). Каква е вероятността да изтеглим дама, а пика? Независими ли са двете събития? А ако колодата е от 52 карти?

Задача 21. Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

Задача 22 (Birthday paradox)**.** Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по-голяма от $1/2$?

Задача 23. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който първи хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играта за всеки от играчите? А ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

Задача 24. Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n-те различни адреса и изпратила писмата. Каква е вероятността никой да не получи своето писмо?

Задача 25. В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Каква е вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако

1. след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;

2. извадените топки не се връщат обратно?

Задача 26 (Monty Hall problem)**.** Зад една от 3 затворени врати има чисто нова кола, а зад другите две няма нищо. Избирате врата, след това водещият отваря една от останалите две врати, зад които няма нищо. Сега трябва да решите - сменяте ли избраната врата или запазвате първоначалния си избор?

Задача 27 (Boy or Girl paradox)**.** X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момче, каква е вероятността и двете да са момчета?

Задача 28 (Reservoir sampling)**.** Да разгледаме масив A с различни елементи, които итерираме последователно. За удобство ще считаме, че А е индексиран от 1. На стъпка k, генерираме (равномерно) случайно естествено число между 1 и k вкл. Ако генерираното число е 1, поставяме k-тия елемент на първа позиция. След пробягването на всички позиции, каква е вероятността $A[1]$ да не се е променил, а да е 3-тия елемент от началния масив, а последния?

Задача 29 (Simpson's Paradox)**.** Долната таблица показва истински данни от успеваемостта на две лекарства при лечение на бъбречни камъни:

Лечение / Размер на камъните	А	Б
Малки	93% (81/87)	87% (234/270)
Големи	73% (192/263)	69% (55/80)
Общо	78% (273/350)	83% (289/350)

Кое лечение е по-добро?

Задача 30. Дадени са две партиди от съответно 12 и 10 изделия. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Каква е вероятността то да е дефектно?

Задача 31. Разполагаме с три стандартни зара и един, чийто страни са само шестици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат

1. три шестици;

2. различни цифри;

3. последователни цифри?

Задача 32. Дадени са n урни, всяка от тях има с m бели и k черни топки. От първата урна се тегли топка и се прехвърля във втората, след това от втората една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Задача 33. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също случайно се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови?

Задача 34. Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса и покриват целия конспект от 30 въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно той да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет?

Задача 35 (Kahneman, Thinking Fast and Slow)**.** В град с две фирми за таксита, синя и зелена, през нощта се случва катастрофа с участието на такси, от която шофьорът на таксито бяга. Разполагате със следните данни:

- 85% от всички таксита са зелени и 15% са сини;

- свидетел дава показания, че таксито е било синьо;

- експертиза установява, че свидетелят определя правилно синьо/зелено в 80% от случаите и греши в останалите 20%.

Каква е вероятността колата наистина да е била синя?

Задача 36. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в 99% от случаите и при заразените (когато трябва да е положителен), и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете, че 0,5% от населението има това заболяване, каква е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Задача 37 (Boy or Girl paradox)**.** X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момче, каква е вероятността и двете да са момчета?

Задача 38. В компютърен център има три принтера A, Б и B. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към A, Б или B са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да провали печатането е съответно 0.01, 0.05 и 0.04. Ако печатането на даден документ е било прекратено, каква е вероятността причината да е грешка в принтера A?

Задача 39. Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна която не се вижда също да е бяла?

Задача 40. Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студент знае 90% от въпросите, а ако не знае верния отговор, налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верният отговор, а да е налучкал?

Задача 41. Трима ловци едновременно стрелят по заек. Заекът е убит от един куршум. Каква е вероятността той да е изстрелян от първия ловец, ако те уцелват с вероятност, съответно 0.2, 0.4 и 0.6?

Задача 42. Раздаваме последователно картите от стандартно тесте карти. Ако за първи път видим червено асо на 6-та позиция, каква е вероятността след това да видим първо червено преди черно асо?

Задача 43. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.7, а момчетата - с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Задача 44. Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка A. През точка A е прекарана хорда перпендикулярна на диаметъра. Каква е вероятността хордата да бъде по-къса от R?

Задача 45. Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан през един и същи ден. Всеки от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент от денонощието. Каква е вероятността параходите да не се засекат, ако за разтоварването на първия са необходими 6, а за втория 4 часа?

Задача 46. Автобусите от линия A се движат на интервали от пет минути, а от линия B на десет минути, независимо от автобусите от линия A. Каква е вероятността

1. автобус от A да дойде преди автобус от Б;
2. пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути?

Задача 47. Дадена е отсечка с дължина K. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от K. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник?

Задача 48. Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от K да може да се построи триъгълник?

Задача 49. Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснат съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

Задача 50. По случаен начин и независимо едно от друго се избират две числа x и y в интервала (0, 1]. Каква е вероятността на събитията

1. $xy \leq 1/4$;
2. $x + y \leq 1$ и $x^2 + y^2 \geq 1/2$;
3. $xy \geq 2/5$ и $x^2 + y^2 \leq 1$?

Задача 51. Разделяме случайно отсечка с дължина 1 на 3 части. Каква е вероятността те да могат да образуват триъгълник?

Задача 52. (Bertrand Paradox) Да разгледаме равностранен триъгълник, вписан в окръжност с радиус 1. Каква е вероятността случайно избрана хорда от тази окръжност да е по-дълга от страната на триъгълника?

Задача 53. Човек хвърля монета и при прави крачка напред, а иначе - назад. Каква е вероятността след 10 хвърляния да се намира:

1. на мястото, откъдето е тръгнал;
2. на разстояние 2 крачки от началната си позиция;
3. на 5 крачки пред началната си позиция?

Задача 54. Играч залага 5 лева и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100 лева, а ако хвърли точно една шестица - 5 лева. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 55.
- Казино предлага следната игра: играч плаща A лева. След това хвърля монета, докато хвърли ези. Ако това се случи на n-тия ход, печели 2^n лева. При какви стойности на A бихте участвали?
- (Martingale strategy) Да разгледаме по-стандартна игра - казино предлага коефициент 2 при игра на ези/тура, т.е. при залог А, бихме спечелили чисто А. Играч залага само на ези, докато спечели, като удвоява залога си всеки път, когато не спечели. Каква е очакваната му печалба? Бихте ли пробвали?

Задача 56. Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от резултатите е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 57. А хвърля 3 монети, а В - 2. Печели този, който хвърли повече езита и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели Б. Каква е вероятността А да спечели? Ако е спечелил А, каква е вероятността В да е хвърлил точно едно ези? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 58. Извършва се серия от независими бернулиеви опити с вероятност за успех на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k+r)$-тия опит. Алтернативна формулировка: Нека $X_1, X_2, \dots \sim Ber(p)$ са независими еднакво разпределени случайни величини (н.е.р.с.в. / iid). Как бихте формулирали въпроса на задачата чрез X_i?

Задача 59. (Banach's matchbox problem) Пушач носи в джоба си две кутии кибрит с по n клечки. Всеки път, когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно $k \leq n$ клечки?

Задача 60. Подводница стреля n пъти последователно по кораб. Всяко торпедо улучва с вероятност p. Корабът има m отсека и ако торпедо улучи кораба, вероятността да наводни кой да е от тях е една и съща. Каква е вероятността корабът да бъде потопен, ако за това е необходимо да се наводнят поне два отсека?

Задача 61. Нека съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0 : p_0 = 1/2$ и $H_1 : p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха?

Задача 62. Хвърлят се два зара. Нека случайната величина X е сумата от падналите се точки. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на X, ако заровете са

1. правилни;
2. $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(6) = 1/4, \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = 1/8$.

Ще бъде ли необичайно, ако при хвърлянето на 1000 зара сумата е била повече от 3700?

Задача 63. От урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно, една по една топки докато се появи бяла. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $X =$ "брой на изтеглените черни топки"при извадка

1. без връщане;
2. с връщане.

Опитът се повтаря 1000 пъти. Да се оцени вероятността да са извадени повече от 900 черни топки.

Задача 64. Вероятността за улучване на цел при един изстрел е равна на 0.001. За поразяване са необходими поне две попадения. Каква е вероятността за поразяване на целта, ако за това са нужни две попадения и са направени 5000 изстрела?

Задача 65. В кутия има 7 лампи, от които 3 са дефектни. По случаен начин се избират за проверка 4 лампи. Да се намери разпределението на случайната величина $X =$ "брой на изпробваните дефектни лампи"и да се пресметне нейното очакване.

Задача 66. В Патагония на месец се регистрират средно две слаби земетресения. Каква е вероятността за три месеца да има по-малко от четири слаби земетресения?

Задача 67. 80% от принтерите за домашна употреба работят добре при инсталирането им, а останалите имат нужда от допълнителни настройки. Фирма продава 10 принтера за една седмица. Намерете вероятността поне 9 от тях да работят без нужда от допълнителни настройки. Каква е съответната вероятност това да се случи за пет поредни месеца? Каква е вероятността, първата седмица, за която това не се случва да е точно 21-та?

Задача 68. A и B стрелят по мишена, като стрелят едновременно, а ако никой не улучи - стрелят отново. A улучва с вероятност 0.2, а B - с 0.3. Каква е вероятността A да улучи, а B - не. Какъв е средният брой изстрели, необходими за уцелване на мишената?

Задача 69. A и B играят последователно партии, като A печели една партия с вероятност 2/3, а B - с 1/3. Равни партии не са възможни. Играта продължава докато някой спечели две последователни партии. Нека X е случайната величина "брой на изиграните партии". Да се определи разпределението и математическото очакване на X.

Задача 70. Нека ξ, η са независими случайни величини с разпределение $P(\xi = k) = P(\eta = k) = q^k p, k = 0, 1, \ldots, p > 0, p + q = 1$. Нека $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

1. Да се намери разпределението на ζ.
2. Да се намери разпределението на $\tau = (\zeta, \xi)$.

Задача 71. В урна има 3 бели и 2 черни топки. От урната теглим последователно без връщане топки. Нека ξ е номерът на тегленето на първата бяла топка. След това продължаваме да теглим, докато се появи черна топка. Нека η е номерът на опита на тегленето на първата черна топка след първата бяла. Дефинираме $\eta = 6$, ако няма такава. Да се определи

- съвместното разпределение на η и ξ;
- $\mathbb{P}(\eta > 2 | \xi = 1)$ и $\mathbb{P}(\eta = 3 | \xi < 3)$.

Задача 72. Хвърляме два червени и един син зар. Нека ξ е броят на шестиците върху червените зарове, а η е броя на двойките върху трите зара. Да се определи

- съвместното разпределение на η и ξ;
- $\mathbb{P}(\xi > 0 | \eta = 1)$.

Задача 73. От числата $1, 2, 3, 4$ и 5 се избират по случаен начин три. Нека случайната величина $X =$ "средното по големина от избраните три", а $Y =$ "най-малкото от избраните числа". Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. маргиналните разпределения на X и Y;
3. да се провери дали X и Y са независими;
4. ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
5. разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z = X - 2Y$.

Задача 74. Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят езита, паднали се при първите три хвърляния, а Y - броят езита от последните две. Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. условните разпределения на X и Y, т.е. $\mathbb{P}(X = k | Y = l)$ и $\mathbb{P}(Y = k | X = l)$ за подходящи k и l;
3. $\mathbb{P}(X = Y), \mathbb{P}(X > 1 | Y = 1)$ и $P(X + Y > 2 | X = 2)$;

4. разпределенията на $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

Задача 75. Билетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността случайно избран билет

1. да има сума от цифрите, равна на 21;
2. да има равна сума от първите три и последните три цифри;
3. сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

Задача 76. Магически квадрат е таблица 3x3, запълнена с числа, така че сборът по всички редове, колони и 2-та главни диагонала е равен.

Петокласник трябва да попълни магическия квадрат по-долу, използвайки числата от 1 до 9 точно по веднъж.

2	7	
	5	
		8

Тъй като няма желание да събира числа, решава да напише програма, която да запълва случайно квадратчетата, докато намери правилната конфигурация.

Една симулация се състои от избора на 5 равномерни числа измежду $\{1, 2, \dots, 9\}$ и поставянето им в квадрата последователно в реда отгоре надолу и отляво надясно.

1. Колко е очакването на броя познати числа при всяка симулация?
2. Колко е очакваният брой симулации до достигането на правилната наредба?
3. Можете ли да предложите число n, такова че с вероятност 99% ще сме уцелили поне веднъж след n симулации?

Можете ли да отговорите на същите въпроси, ако **симулацията се състои от случайна подредба на липсващите числа, т.е. на $(1, 3, 4, 6, 9)$?**

Задача 77. На всяка от страните на празен зар се записва случайно число от 1 до 6. След това този зар се хвърля n пъти. Нека X е сумата от първите $n-1$ хвърляния, а Y - сумата от последните $n-1$ хвърляния. Намерете $Cor(X, Y)$. Как би се променил отговорът, ако избирахме числа числа между 199 и 999?

Задача 78. Да предположим, че всяка секунда стреличка попада в случайно квадратче на решетката по-долу.

- (0.5 т.) Колко е очакваното време докато във всяко квадратче има поне по една стреличка?
- (0.3 т.) Колко е очакваното време до първия момент, в който има две стрелички в някое от квадратчетата?
- (0.2 т.) Можете ли да обобщите, ако решетката е $n \times n$?

Задача 79. Нека $(X_1, \dots, X_n)$ е случайна пермутация на числата от множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ и $S = X_1 + \dots + X_n$.

1. (0.1 т.) Намерете $\mathbb{E}S$ и DS.

2. (0.1 т.) Докажете, че за две случайни величини X и Y е изпълнено $D(X+Y) = DX+DY+2Cov(X,Y)$.

3. (0.4 т.) Изразете $\mathbb{E}S$ чрез $\mathbb{E}X_i$. Намерете $\mathbb{E}X_i$, $\mathbb{E}X_i^2$ и DX_i за всяко i.

4. (0.4 т.) Изразете DS чрез DX_i и $Cov(X_i, X_j)$. Намерете $Cov(X_i, X_j)$ за всеки i, j.

Задача 80. Разглеждме информация, съставена от 8 бита. Поради шум при изпращането между сървъри, всеки бит може да бъде предаден погрешно с вероятност p.

0	1	0	0	0	1	1	1

1. Каква е вероятността съобщението да бъде правилно предадено между два сървъра - A и B, които са свързани директно? Какво е очакването на правилния брой битове в крайното съобщение?

2. Можете ли да отговорите на същите въпроси от от а), ако съобщението минава (точно по веднъж) през $n = 3$ междинни сървъра? *Какви са резултатите при $n \to \infty$?

Задача 81. Дадена е случайна величина X с плътност $f_X(x) = \begin{cases} c(x^2+2x) & ,x \in [0,1] \\ 0 & ,x \notin [0,1] \end{cases}$. Намерете

1. константата c;
2. $\mathbb{E}X$ и DX;
3. вероятността X да е по-малка от математическото си очакване;
4. очакването на случайната величина $X^2 + 3X$.

Задача 82. Върху окръжност $k(O,r)$ е фиксирана точка A, а точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на $\triangle AOB$.

Задача 83. Нека $X \sim U(0,7)$ е времето на безотказна работа в години на даден апарат. Съгласно гаранцията на апарата, той ще бъде заменен с нов на петата година или преди това, в случай на дефект. Нека Y е времето до смяната на апарата. Да се пресметнат $\mathbb{P}(Y < 4)$, $\mathbb{E}Y$ и DY. Ако са продадени 1000 апарата, колко средно ще трябва да се подменят преди петата година?

Задача 84. Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Задача 85. В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8(мин) за първата опашка и 5(мин) за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 минути. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка?

Задача 86. Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30(мин). За преглед има записани двама пациенти - първият за 11:00, а вторият за 11:30, като и двамата пристигат в точно определения час. Ако прегледът на първия не е завършил, вторият изчаква. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

Задача 87. Нека случайната величина $X \sim Exp(\lambda)$. Да се намерят плътностите на случайните величини

- $Y = -X$;
- $Y = 2X - 1$;
- $Y = \sqrt{X}$;
- $Y = X^\alpha$ за $\alpha > 0$.

Задача 88. Лъч (светлина) минава от точката $(0,2)$ към т. $(0,1)$ и се пречупва случайно, сключвайки ъгъл $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$ с Oy. Нека X е точката, в която пречупеният лъч пресича Ox. Да се намери плътността на X.

Задача 89. Монета, за която вероятността за падане на ези е $3/4$ се хвърля 2000 пъти. Каква е вероятността броят на падналите се езита да е между 1475 и 1535?

Задача 90. Точка (X,Y) попада по случаен начин в триъгълник с върхове в точките с координати (0,0), (0,2) и (3,0). Да се намери съвместната плътност, функцията на разпределение и корелацията на X и Y.

Задача 91. Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че през фиксиран час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги угаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = cxy, 0 < x < y < 1.$. Да се намери

1. константата c;
2. маргиналните плътности и математическите очаквания;
3. вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10 минути;
4. колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15-тата минута;
5. каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20 минути?

Задача 92. Върху страните на квадрат, независимо една от друга, по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е a.

Задача 93. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1/(X_1 + X_2)$.

Задача 94. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 95. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина

1. $Y = \max(X_1, X_2)$;
2. $Y = \min(X_1, X_2)$.

Задача 96. Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка P. Правата през P, успоредна на страна на тригълника, пресичат другите му две страни в точките Q и R. Точките S и T лежат върху страна на триъгълника, така че $QRST$ е правоъглълник. Да се намери $\mathbb{E}S_{QRST}$.

Задача 97. Два инструмента се използват за измерването на прахови частици във въздуха. Да допуснем, че реалното количество е $x\ g/m^3$. В такъв случай, първият дава показание, което е с нормално разпределение със средно x и стандартно отклонение (σ) $0.05x$, а резултатът от втория също е с нормално разпределение със средно x, но със стандартно отклонение $0.1x$. Кой апарат бихте използвали? Колко е вероятността за всеки от апаратите да допусне грешка, която е повече от $0.1x$?

Човек решава да използва средното аритметично от двата апарата. Ако измерванията им са независими, каква е вероятността за грешка над $0.1x$ при тази процедура?

Задача 98. Нека ξ и η са независими случайни величини, $\xi \sim Exp(2)$ и $\eta \sim U(0,3)$, т.е.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & ,\text{ако } x > 0 \\ 0 & ,\text{иначе} \end{cases} ; \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ,\text{ако } 0 < x < 3 \\ 0 & ,\text{иначе.} \end{cases}$$

Намерете корелация на ξ и η, $P(\xi < \eta)$ и плътността на ξ/η.

Задача 99. Точка A попада случайно в окръжност $k(O,1)$ с център O и радиус 1. Нека случайната величина X е равна на $|OA|$. Можете ли да предположите колко са модата и медианата? Аргументирайте се. Колко бихте очаквали да е $\mathbb{E}X$? *(Мода на дискретно разпределение наричаме стойността с най-голяма вероятност. В непрекъснатия случай, по аналогия, се интересуваме от стойността, която максимизира f_X. Наричаме a медиана на разпределението на X, ако $\mathbb{P}(X \le a) = \mathbb{P}(X \ge a) = 1/2$.)*

1. Намерете функцията на разпределение, плътността, очакването и дисперсията на X.
2. Нека сега разгледаме 3 точки, A_1, A_2 и A_3, които попадат случайно и независимо една от друга в същата окръжност. Колко е очакването на разстоянието до най- близката до центъра? А до най-отдалечената? *(Бонус: Намерете очакваното разстояние до средната точка. Би ли трябвало то да е равно на $\mathbb{E}X$?)*

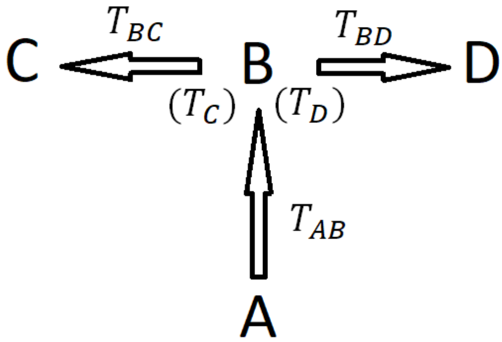
Задача 100. (1 т.) На спирките за градски транспорт се инсталират информационни табла с размери 10×100 диода. Доставени са качествени материали, като можем да моделираме времето на изправност на един диод чрез експоненциална сл. вел. със средно 10 години.

Опитът показва, че ако работят по-малко от 75% от диодите, информацията често е неразбираема и таблото трябва да се ремонтира. Каква е вероятността да трябва да бъде извършен ремонт след 3 години експлоатация?

Задача 101. Да предположим, че можем да моделираме възвръщаемостите на три актива A, B и C като независими нормално разпределени случайни величини $N(3,2), N(3,3), N(1,10)$ и че разполагате с 5 единици за инвестиции.

1. Как бихте разпределили парите си, за да максимизирате очакваната печалба?
2. Между всички възможности от 1., един начин за избор е да предпочетем разпределението с най-малка дисперсия. Кое е то?
3. Рисков инвеститор залага 5-те си единици в независим актив $D \sim N(-2,20)$. Каква е вероятността неговата инвестиция да е по-успешна от тази в 2.?

Задача 102. X и Y пътуват заедно от град A до B. След пристигането си, изчакват съответно автобуси до C и D. Предполагаме, че пътуванията траят съответно $T_{AB} \sim Exp(3), T_{BC} \sim Exp(4)$ и $T_{BD} \sim Exp(5)$, а изчакванията в B са $T_C \sim Exp(1)$ и $T_D \sim Exp(2)$, като така дефинираните времена са независими. Нека ξ и η са времената на пътуване на X и Y.



1. Намерете $\mathbb{P}(T_C + \ln(\mathbb{E}T_D) > 0)$.
2. Намерете $Cor(\xi, \eta)$.

Задача 103. A и B запълват времето си като избират числа $U([0,1])$ (например чрез компютрите си) на рундове - първо и двамата избират по едно число, след това по още едно и т.н. Без особени знания по вероятности, решават да проверят колко често се падат "големи" числа - да кажем по-големи от 0.75. Методите, които са харесали са 2:

1. Всеки от двамата избира по 5 числа и пресмятат каква част от 10-те числа са по-големи от 0.75;
2. Същото като предишното, но всеки симулира по 500 числа;

   Оценете какви са средните отговори, които биха получили при всяка от процедурите. Какви са дисперсиите при различните методи? Кой метод бихте избрали и защо?
3. При голям рундове, в каква част от тях и двете числа ще бъдат по-големи от 0.75? Колко е очакваният брой рундове докато поне едното от двете числа е по-голямо от 0.75?

Ето една примерна реализация:

рунд	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
A	*0.167*	*0.518*	*0.991*	*0.364*	*0.496*
B	*0.296*	*0.840*	*0.755*	*0.143*	*0.646*

В нея пропорцията от 1. е 3/10, тази от 3. е 1/5, а броят рундове докато поне едно число е по-голямо от 0.75 - 2.

Задача 104. Застрахователната компания „Инс 1” моделира размера на исковете, които изплаща чрез независими експоненциални сл. вел. със средно 100 лв. „Инс 1” сключва презастраховка на цена от $x > 0$ лв с „Инс 2”, която гласи, че ако постъпи иск над 300 лв към „Инс 1”, „Инс 2” ще покрие 200 лв от тях.

1. (0.25 т.) Каква е вероятността „Инс 1” да трябва да плати от своя бюджет по-малко от 200 лв за един иск?
2. (0.25 т.) Ако „Инс 2” желаят да има средна печалба от 10 лв на иск, каква е стойността на x?
3. (0.5 т.) Ако „Инс 1” желаят да има средна печалба от 10 лв на иск, колко би трябвало да е цената на полицата, която предлагат? Каква би била цената, ако не сключваха презастраховка с „Инс 2”? Защо „Инс 1” биха искали да сключат такава презастраховка при положение, че средната печалба е еднаква?