Теория на Вероятностите
Упражнения

Емил Каменов, Мирослав Стоенчев

19.07.2018

Съдържание

1 Комбинаторика

1.1 Крайни множества

За всяко крайно множество A с $|A|$ ще означаваме броя на елементите му. Ако $A_1, \dots, A_n$ са крайни множества то с индукция по n получаваме $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1|.|A_2| \dots |A_n|$.

Теорема 1.1. *Принцип за включване и изключване: Нека n е естествено число и $A_1, A_2, \dots, A_n$ са крайни множества. Тогава е в сила равенството:*

$$| \cup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} | \cap_{i=1}^n A_i|.$$

Доказателство: Нека a е произволен елемент на $| \cup_{i=1}^n A_i|$, който се среща точно в $k \geq 1$ от множествата $A_1, \dots, A_n$. Твърдението на теоремата е еквивалентно на това да докажем, че $1 = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^k (-1)^{i-1}\binom{k}{i} = 0 \Longleftrightarrow (1-1)^k = 0$. □

1.2 Пермутации, комбинации и вариации без повторение

Нека n и $k \geq 0$ са естествени числа, а M е множество с n елемента, без ограничение $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Нека A и B са множества, $|B| \leq |A|$ и $\varphi : A \longrightarrow B$ е сюрективно изображение. Тогава φ поражда релация на еквивалентност върху A : два елемента от A са еквивалентни, ако образите им в B чрез φ съвпадат. Следователно A се разбива на класове от еквивалентни елементи, като всеки клас е пълен прообраз на елемент от B. В частния случай когато A и B са крайни множества, ако знаем броя на елементите на B, и броя на елементите на прообраза на всеки елемент от B (т.е. броя на елементите на всеки клас на еквивалентност в A), то можем да намерим броя на елементите на A, тоест $|A| = \sum_{b \in B} |\varphi^{-1}(b)| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid \varphi(a) = b)\}|$.

Дефиниция 1.2. *Пермутация на елементите на M се нарича всяко нареждане на елементите на M в $n-$членна редица. Комбинация от $k-$ти клас на елементите на M е всяко $k-$елементно подмножество на M. Вариация от $k-$ти клас на елементите на M е всяка $k-$членна редица от различни елементи на M.*

Множеството на всички пермутации на $n-$елемента се означава с P_n, а съответно с C_n^k и V_n^k - множествата на всички комбинации и вариации от $k-$клас.
Изображението $P_n \longrightarrow P_{n-1},\ i_1 i_2 \dots i_n \longmapsto\ i'_1 i'_2 \dots i'_{n-1}$ (премахнали сме елемента n) е сюрективно и всеки елемент в P_{n-1} има точно n прообраза. Следователно $|P_n| = n|P_{n-1}| \Longrightarrow |P_n| = n!$.
Изображението $P_n \longrightarrow C_n^k,\ i_1 i_2 \dots i_n \longmapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ е сюрективно и всеки елемент на образа има точно $k!(n-k)!$ прообраза. Следователно $|P_n| = k!(n-k)!|C_n^k| \Longrightarrow |C_n^k| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Изображението $V_n^k \longrightarrow C_n^k,\ i_1 i_2 \dots i_k \longmapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ е сюрективно и всеки елемент на образа има точно $k!$ прообраза. Следователно $|V_n^k| = k!|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$.

1.3 Пермутации, комбинации и вариации с повторение

Нека $n > 0, k, k_1, \dots, k_n$ са неотрицателни цели числа, като $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$.

Дефиниция 1.3. *Пермутация с повторения на елементите на M, от тип $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ се нарича всяко нареждане на елементите на M в $n-$членна редица, удовлетворяваща условието: елемента 1 се среща k_1-пъти,...,елемента n се среща k_n-пъти. Множеството на тези пермутации се означава с $P(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$*
Комбинация с повторение от $k-$ти клас на елементите на M е всяко $k-$елементно мултиподмножество на M. Множеството на тези комбинации ще означаваме с $C(n;k)$
Вариация с повторения от $k-$ти клас на елементите на M е всяка $k-$членна редица от елементи на M. Множеството на тези вариации ще означаваме с $V(n;k)$

Изображението $C(n;k) \longrightarrow C^k_{n+k-1}$, $[i_1, i_2, \dots, i_k] \longmapsto \{i_1, i_2+1, \dots, i_k+k-1\}$, $i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k$ е биекция. Следователно $|C(n;k)| = |C^k_{n+k-1}| = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
Изображението $V(n;k) \longrightarrow V(n;1) \times V(n;1) \times \dots \times V(n;1) = V(n;1)^{\times k}$, $i_1 i_2 \dots i_k \longmapsto (i_1, i_2, \dots, i_k)$ е биекция. Следователно $|V(n;k)| = |V(n;1)^{\times k}| = |V(n;1)|^k = n^k$.
Изображението $P(n; k_1, k_2, \dots, k_n) \longrightarrow C^{k_1}_n$, съпоставящо k_1 позиции на които се намира елемента 1 в пермутацията е сюрективно и всеки елемент на $C^{k_1}_n$ има точно $P(n-k_1; k_2, \dots, k_n)$ прообраза. Така $|P(n-k_1; k_2, \dots, k_n)| = |C^{k_1}_n|.|P(n-k_1; k_2, \dots, k_n)| = \dots =$
$= |C^{k_1}_n|.|C^{k_2}_{n-k_1}| \dots |C^{k_n}_{n-k_1-\dots-k_{n-1}}| = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$. Формулата за пермутациите може да се изведе директно чрез построяване на биекция $P(n; k_1, k_2, \dots, k_n) \longrightarrow C^{k_1}_n \times C^{k_2}_{n-k_1} \times \dots \times C^{k_n}_{n-k_1-\dots-k_{n-1}}$.

1.4 Комбинаторни задачи

Задача 1 Да се докажат тъждествата, като се построят биекции между подходящи множества:

а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, в) $|V^k_n| = |V^k_{n-1}| + k|V^{k-1}_{n-1}|$, г) $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$,
д) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \le m < n \\ n! & \text{за } m = n \end{cases}$.

Задача 2 Нека n и r са естествени числа. Да се намери броя на целите неотрицателни решения на уравнението $x_1 + \dots + x_r = n$.

Задача 3 По колко начина $k-$частици могат да се разпределят в n различими клетки, ако частиците:
а) са различими и всяка клетка може да съдържа не повече от 1 частица
б) са различими и всяка клетка може да съдържа произволен брой частици
в) са неразличими и всяка клетка може да съдържа не повече от 1 частица
г) са неразличими и всяка клетка може да съдържа произволен брой частици.

Задача 4 Нека n и k са естествени числа, $n \ge 2k$. По колко различни начина от $2n$ шахматиста могат да се образуват k-шахматни двойки, за изиграване на k- партии, ако:
а) цветовете на фигурите с които играят шахматистите се взимат в предвид
б) цветовете на фигурите не се взимат в предвид

в) ако $k-$те дъски са номерирани и се взимат в предид при условие а)? А при условие б)?

Задача 5 Нека n и r са естествени числа, и нека $k_1, \dots, k_r$ са естествени числа със сума равна на n. Да се намери броя на начините по които $n-$елементно множество може да се разбие на $r-$подмножества, имащи съответно $k_1, \dots, k_r$ на брой елемента, ако:
а) $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$,
б) $k_1, \dots, k_r$ са произволни.

1.5 Условия на задачите от упражнение 1

Задача 1 Разпределят се k различни частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
в) $k \geq n$ и няма празна клетка.

Задача 2 Разпределят се k неразличими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
в) $k \geq n$ и няма празна клетка.

Задача 3 Десет души се нареждат в редица. Колко са подрежданията, при които три фиксирани лица се намират едно до друго.

Задача 4 Колко четирицифрени числа могат да се напишат от цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако:
а) цифрите участват по веднъж;
б) допуска се повтаряне на цифри;
в) не се допуска повтаряне и числото е нечетно.

Задача 5 Група от 12 студенти трябва да изпрати делегация от четирима свои представители. По колко начина може да се избере състава, ако:
а) няма ограничения за участие в нея;
б) студентите А и В не трябва да участват заедно;
в) студентите С и D могат да участват само заедно.

Задача 6 Пет различни топки се разпределят в три различни кутии А,В,С. Да се намери броя на всички различни разпределения, при които:
а) кутията А е празна;
б) само кутията А е празна;
в) точно една кутия е празна;
г) поне една кутия е празна;
д) няма празна кутия.

Задача 7 Нека Ω е множеството на всички наредени $n-$торки с повторения на цифрите 1,2 и 3. Да се намери броя на елементите на Ω, които:
а) започват с 1;
б) съдържат точно k пъти цифрата 2;
в) съдържат точно k пъти цифрата 1, при което започват и завършват с 1;
г) са съставени от k_1 единици, k_2 двойки, k_3 тройки.

Задача 8 Всяка стена на всяко едно от сто кубчета е или червена, или синя, или зелена. Нека 80 кубчета имат поне една червена стена, 85 кубчета имат поне една синя, 75 кубчета поне една зелена. Какъв е най-малкият брой кубчета, които имат стени и от трите цвята?

Задача 9 Дадено е множеството $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\}$. Колко са подмножествата на Ω, които съдържат поне един елемент a и поне един елемент b?

1.6 Решения на задачите от упражнение 1

Задача 1 Да номерираме клетките с числата от 1 до n, а частиците с числата от 1 до k. Да означим с $i_1, i_2, \ldots, i_k$ номерата на клетките в които попадат съответно 1-та, 2$-$та,...,k-тата частица. Следователно на всяко разпределение на частиците в клетки, съпоставяме редица $i_1, i_2, \ldots, i_k$ от естествени числа между 1 и n. Търсим броя на тези редици.

а) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ са различни, следователно търсеният брой е $|V_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$, при $k \le n$, и 0 при $n < k$.

б) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ могат да съвпадат, следователно търсеният брой е $|V(n;k)| = n^k$.

в) Нека $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ е множеството от всички разпределения, при които i-тата клетка е празна. Означаваме с A множеството на всички разпределения, при които поне една клетка е празна. Следователно $A = \cup_{i=1}^n A_i$ и съгласно 1.1 за $|A|$ намираме:

$$|A| = |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|$$

$$= n(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \binom{n}{3}(n-3)^k + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^k$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Следователно търсеният брой е $|V(n;k) - A| = |V(n;k)| - |A| = n^k + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \binom{n}{j}(n-j)^k =$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Задача 2 Използваме означенията от задача 1. В случая частиците са неразличими, следователно търсим броя на множествата $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ за а), мултимножествата $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ за б).

а) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ са различни, следователно търсеният брой е $|C_n^k|$.

б) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ могат да съвпадат, следователно търсеният брой е $|C(n;k)|$.

в) Нека $U_{n,k}$ и $\widetilde{U}_{n,k}$ са съответно множествата от всички разпределения на k неразличими частици в n различни клетки без ограничения; и аналогично разпределенията без празна клетка:

$$U_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\},$$

$$\widetilde{U}_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\}.$$

В подточка б) построихме биекцията

$$U_{n,k} \longrightarrow C(n;k) \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [\, \underbrace{1, \ldots, 1}_{x_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{x_2}, \ldots, \underbrace{n \ldots, n}_{x_n} \,],$$

където елементът $i,\ 1 \leq i \leq n$ участва точно $x_i \geq 0$ пъти, и указва, че в клетка i има точно x_i на брой частици. Аналогично, изображението

$$\widetilde{U}_{n,k} \longrightarrow U_{n,k-n} \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1)$$

е биекция, следователно $|\widetilde{U}_{n,k}| = |U_{n,k-n}| = |C(n; k-n)| = \binom{k-1}{n-1}$.

Задача 3 Нека a, b, c са трите лица, които стоят едно до друго. Броят на начините по които те са съседи по наредба е $3! = 6$. Търсеният брой е $3!8!$, понеже $8!$ са наредбите на остналите 7 лица и "блокът" abc, и на всяка от тях съответстват $3!$ наредби удовлетворяващи условието за съседство.

Задача 4 Търсеният брой е съответно равен на:

а) $|V_5^4| = 5!$

b) $|V(5;4)| = 5^4$

c) $3 \times |V_4^3| = 72$.

Задача 5 Търсеният брой е съответно равен на:

а) $|C_{12}^4| = \binom{12}{4}$

b) $|C_{10}^4| + 2|C_{10}^3|$

c) $|C_{10}^4| + |C_{10}^2|$.

Задача 6 Търсеният брой е съответно равен на:

a) $|V(2;5)| = 32$

b) $|V(2;5)| - 2 = 30$

c) $3 \times [|V(2;5)| - 2] = 90$

d) $3 \times [|V(2;5)| - 2] + \binom{3}{2} = 93$

e) $|V(3;5)| - \left(3 \times [|V(2;5)| - 2] + \binom{3}{2}\right) = 150$.

Задача 7 Търсеният брой е съответно равен на:

a) $|V(3;n-1)| = 3^{n-1}$

b) $\binom{n}{k}|V(2;n-k)| = 2^{n-k}\binom{n}{k}$

c) $\binom{n-2}{k-2}|V(2;n-k)| = 2^{n-k}\binom{n-2}{k-2}$

d) $|P(n;k_1,k_2,k_3)| = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$.

Задача 8 Да означим с R, B, G множествата на кубчетата, които имат съответно поне една червена, синя, зелена страна. По условие $|R| = 80,\ |B| = 85,\ |G| = 75$, следователно $|R \cap B| \geq 65,\ |B \cap G| \geq 60,\ |G \cap R| \geq 55$. Търсим минимума на $|R \cap B \cap G|$, прилагаме теорема 1.1:

$$|R \cup B \cup G| = |R| + |B| + |G| - |R \cap B| - |B \cap G| - |G \cap R| + |R \cap B \cap G|$$

$$\Rightarrow 100 = 80 + 85 + 75 - |R \cap B| - |B \cap G| - |G \cap R| + |R \cap B \cap G|$$

$$\Rightarrow |R \cap B \cap G| = |R \cap B| + |B \cap G| + |G \cap R| - 140 \geq 40.$$

Равенство се достига при $|R \cap B| = 65,\ |B \cap G| = 60,\ |G \cap R| = 55$.

Задача 9 Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n\},\ B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ и да означим с $\mathfrak{R}^*(\Omega),\ \mathfrak{R}(A)$ съответно множеството от подмножества на Ω със свойството от условието, множеството от подмножества на A. Полагаме $\mathfrak{R}'(A) = \mathfrak{R}(A) - \emptyset$ и $\mathfrak{R}'(B) = \mathfrak{R}(B) - \emptyset$. Тогава $\Omega = A \cup B$ и нека π_A и π_B са съответно изображенията проекции $\mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(A)$ и $\mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(B)$. Изображението $\pi = \pi_A \times \pi_B : \mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(A) \times \mathfrak{R}'(B)$ е биекция, следователно $|\mathfrak{R}^*(\Omega)| = |\mathfrak{R}'(A) \times \mathfrak{R}'(B)| = |\mathfrak{R}'(A)|.|\mathfrak{R}'(B)| = (2^n - 1)(2^k - 1)$.
Второ решение: Броят на подмножествата на Ω, които нямат желаното свойство са три вида: подмножества съдържащи поне един елемент на A и нито един от B, подмножества съдържащи поне един елемент на B и нито един от A, и множеството $\emptyset$. Броят на тези подмножества е съответно равен на $2^n - 1,\ 2^k - 1,\ 1$. Броят на подмножествата на Ω е съответно равен на $|\mathfrak{R}(\Omega)| = 2^{n+k}$. Следователно $|\mathfrak{R}^*(\Omega)| = 2^{n+k} - (2^n - 1) - (2^k - 1) - 1 = (2^n - 1)(2^k - 1)$.

2 Теория на Вероятностите

2.1 Събитие - аксиоми и свойства

Нека Ω е множеството от елементарни изходи на даден експеримент $\mathcal{E}$. Означаваме с $\mathfrak{R}(\Omega)$ множеството от подмножества на Ω. Елементите на $\mathfrak{R}(\Omega)$ се наричат събития. Събитието $A \in \mathfrak{R}(\Omega)$ е настъпило, ако експеримента има за резултат елементарен изход принадлежащ на A. В $\mathfrak{R}(\Omega)$ се въвеждат операциите обединение и сечение на краен брой събития, и допълнение на събитие. Тези операции са идемпотентни, асоциативни, комутативни, съгласувани с частичната наредба в $\mathfrak{R}(\Omega)$ зададена като теоретико-множествено включване, свързани са помежду си с два дистрибутивни закона, и удовлетворяват закона на Де Морган:
1) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad \overline{\overline{A}} = A$, където $\overline{A} = \Omega - A$,
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
3) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$,
4) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$,
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
за всички $A, B, C \in \mathfrak{R}(\Omega)$.

Следователно множеството $\mathfrak{R}(\Omega)$ е снабдено със структура на булова алгебра (тоест е затворено относно операциите допълнение и крайни обединения и сечения) и ще го наричаме пълно пространство от събития на експеримента $\mathcal{E}$.

Дефиниция 2.1. *Пространство от събития на даден експеримент $\mathcal{E}$ е булова подалгебра на $\mathfrak{R}(\Omega)$. Ако Ω и $\mathfrak{A}$ са съответно пространството от елементарни изходи и пространството от събития на $\mathcal{E}$, то двойката $(\Omega, \mathfrak{A})$ се нарича измеримо пространство на $\mathcal{E}$.*

Интерпретация на въведените операции: събитието $A \cup B$ е настъпило, ако поне едно от двете събития A или B е настъпило. Събитието $A \cap B$ е настъпило, ако и двете събития A и B са настъпили. Събитието $\overline{A} = \Omega - A$ е настъпило точно тогава, когато не настъпва A. Дефинираме $A - B = A \cap \overline{B}$, което настъпва точно тогава, когато настъпва A и не настъпва B.
Събитието Ω се нарича достоверно, понеже то настъпва при всеки експеримент, а с $\emptyset$ се означава невъзможното събитие $\overline{\Omega}$.

2.2 Булова алгебра в задачи

Събитията в разглежданите задачи по-долу са от фиксирана булова алгебра.

Задача 1 Да се определи събитието X от равенството $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B$.

Задача 2 Да се докаже, че събитията A и B са еквивалентни, ако:

a) $A \cup C = B \cup C$ и $A \cap C = B \cap C$
b) $A \cup C = B \cup C$ и $A \cup \overline{C} = B \cup \overline{C}$

Задача 3 Казваме, че $A_1, \ldots, A_n$ образуват пълна група от събития, ако $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$, при $i \neq j$. Да се докаже, че събитията A, $\overline{A}B$, $\overline{(A \cup B)}$ са пълна група.

2.3 Класическа вероятност - аксиоми и свойства

Нека $(\Omega, \mathfrak{A})$ е измеримо пространство на експеримента $\mathcal{E}$, като $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Дефиниция 2.2. *Функцията $P : \mathfrak{A} \longrightarrow [0, 1]$ със свойствата :*
1) $P(\Omega) = 1$ *(нормираност),*
2) $P(\{\omega_i\}) > 0, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ *(позитивност),*
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ \ \forall A, B \in \mathfrak{A} : \ A \cap B = \emptyset$ *(адитивност),*
се нарича вероятностна мярка върху измеримото пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$. Тройката $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ се нарича вероятностно пространство на $\mathcal{E}$.

Забележка 2.3. *Класическа вероятност: Нека $(\Omega, \mathfrak{R}(\Omega), P)$ е вероятностно пространство за $\mathcal{E}$, като $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ и $P(\{\omega_1\}) = \cdots = P(\{\omega_n\})$. Тогава са в сила равенствата:*

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad P(\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}) = P(\cup_{k=1}^{m}\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^{m} P(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{m}{n}.$$

Тоест, ако $A \in \mathfrak{R}(\Omega)$, то $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, където с $|A|$ е означен броя на елементарните изходи принадлежащи на събитието A.

Свойства 2.4. *Свойства на вероятностната мярка:*
(1) $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$ *(монотонност)*
(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(4) $P(\cup_{k=1}^{r} A_k) \leq \sum_{k=1}^{r} P(A_k)$
(5) Ако $A_k, \ k = 1, 2, \dots, r$ са две по две непресичащи се, то $P(\cup_{k=1}^{r} A_k) = \sum_{k=1}^{r} P(A_k)$.

Ако $A \subset B$, то $P(B) = P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A) \geq P(A)$, т.е. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$. Пресмятаме $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Впоследствие ще пропускаме знакът $\cap$ за сечение и ще записваме накратко $A \cap B$ като AB. Сумираме равенствата $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ и $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$ и получаваме $P(A) + P(B) = 2P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$. Следователно $P(A) + P(B) - P(AB) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A) + P(\overline{A}B) = P(A \cup \overline{A}B) = P((A \cup \overline{A})(A \cup B)) = P(A \cup B)$. Следващите свойства следват по индукция.

2.4 Приложение в задачи

Задача 1 Да се пресметне вероятността при хвърляне на 2 зара да се падне поне една шестица, ако всички изходи са равновероятни и:
a) заровете са различими
b) заровете са неразличими.
Кой модел отрязява вярно действителността?

Задача 2 Хвърлят се 3 различими зара, като всички изходи са равновероятни. Да се пресметне вероятността сумата на падналите се числа да е:

a) равна на 11
b) равна на 12
c) да е по голяма от 10.

Задача 3 Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат равен брой единици и шестици?

Задача 4 На тенис турнир с 2^n участника се играе по турнирна схема, като по-слабия по рейтинг побеждава по-силния във всяка от срещите и няма играчи с равен рейтинг. Каква е вероятността предпоследния по рейтинг да спечели второ място?

Задача 5 Хвърлят се 3 правилни и различими зара. Каква е вероятността сумата на падналите се числа да е равна на произведението им?

2.5 Условия на задачите от упражнение 2

Задача 1 Куб, на който всички страни са боядисани в различни цветове, е разрязан на 1000 еднакви кубчета. Да се определи вероятността случайно избрано кубче да има точно две боядисани страни.

Задача 2 Да се определи вероятността контролният номер на първата срещната лека кола:
а) да не съдържа еднакви цифри;
б) да има точно две еднакви цифри;
в) да има три еднакви цифри;
г) да има две двойки еднакви цифри;
д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри.

Задача 3 От десет лотарийни билета два са печеливши. Да се определи вероятността, измежду изтеглените по случаен начин пет билета:
а) точно един да бъде печеливш;
б) да има два печеливши;
в) да има поне един печеливш.

Задача 4 При игра на тото 6 от 49 да се пресметна вероятностите за печалба на шестица, петица, четворка, тройка.

Задача 5 С цел намаляване броя на игрaните мачове, $2k$ отбора с жребий се разбиват на две равни по брой групи. Да се определи вероятността двата най-силни отбора да са в различни групи.

Задача 6 Във влак с три вагона по случаен начин се качват седем пътника. Каква е вероятността в първия вагон да се качат четирима.

Задача 7 Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека.

Задача 8 Група от n човека се нарежда около кръгла маса. Каква е вероятността две фиксирани лица да се окажат едно до друго.

Задача 9 От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако:
а) извадката е без връщане;
б) извадката е с връщане.

2.6 Решения на задачите от упражнение 2

Задача 1 Кубчетата с точно две оцветени страни имат точно един ръб, съдържащ се в ръб на големия куб. Броят на ръбовете на кубът е 12 и всеки ръб съдържа точно 8 двуцветни кубчета. Следователно търсената вероятност е $P = \frac{12\times 8}{1000} = 0,096$.

Задача 2 Търсената вероятност е:

a) $P = \frac{|V_{10}^4|}{|V(10;4)|} = 0.504$

b) $P = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{2}|V_9^2|}{|V(10;4)|} = 0.432$

c) $P = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{3}|V_9^1|}{|V(10;4)|} = 0.036$

d) $P = \frac{\binom{10}{2}|P(4;2,2)|}{|V(10;4)|} = 0.018$

e) $P = \frac{10^2+2\sum_{k=1}^{9} k^2}{|V(10;4)|} = 0.067$, тъй като броят на начините по които наредена двойка десетични цифри има сума k е равен на $\left\{ \begin{array}{ll} k+1, & k \in \{0, 1, \ldots, 8\} \\ 19-k, & k \in \{10, 11, \ldots, 18\} \end{array} \right.$

Задача 3 Търсената вероятност е:

a) $P = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9} \approx 0.55$

b) $P = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9} \approx 0.22$

c) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{7}{9} \approx 0.77$

Задача 4 Нека $A_k,\ k = 3, 4, 5, 6$ са съответно събитията - познати са k числа при игра на тото 6 т 49. Тогава $P(A_6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816},\ P(A_5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{54200},\ P(A_4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{1032},\ P(A_3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{56}$.

Задача 5 Да означим с A събитието - при жребий, двата най-силни отбора попадат в различни групи. Броят на различните начини по които най-силният отбор попада в група, която не съдържаща втория по сила е $\binom{2k-2}{k-1}$. Броят на различните начини по които най-силният отбор попада в група без ограничение е $\binom{2k-1}{k-1}$. Следователно $P(A) = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}} = \frac{k}{2k-1}$.

Второ решение: Броят на различните начини по които от $2k$ отбора се определят 2 групи от по k отбора е $\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$. Броят на различните начини при които двата най-силни отбора са в една група е $\binom{2k-2}{k}$. Следователно $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{2k-2}{k}}{\frac{1}{2}\binom{2k}{k}} = \frac{k}{2k-1}$.

Задача 6 Търсената вероятност е $P = \frac{\binom{7}{4}|V(2;3)|}{|V(3;7)|} \approx 0.128$

Задача 7 При $r \leq n-2$ търсената вероятност е $P = \frac{2(n-r-1)[(n-2)!]}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$. Следователно

$$P = \begin{cases} \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}, & r \leq n-2 \\ 0, & r > n-2 \end{cases}$$

Задача 8 Без ограничение, номерираме n-те позиции. При $n \geq 3$ пресмятаме $P = \frac{2n[(n-2)!]}{n!} = \frac{2}{n-1}$. Следователно

$$P = \begin{cases} \frac{2}{n-1}, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}$$

Задача 9 Нека $T_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ и $U_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$.

a) Изображението $T_k \longrightarrow C_n^k \quad (i_1, i_2, \ldots, i_k) \longmapsto \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ е биекция, тогава $|T_k| = |C_n^k|$. Търсената вероятност е $P = \frac{|T_k|}{|V_n^k|} = \frac{1}{k!}$.

b) Изображението $U_k \longrightarrow C(n;k) \quad (i_1, i_2, \ldots, i_k) \longmapsto [i_1, i_2, \ldots, i_k]$ е биекция, тогава $|U_k| = |C(n;k)|$. Търсената вероятност е $P = \frac{|U_k|}{|V(n;k)|} = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}$.

3 Условна вероятност и независимост

3.1 Условна вероятност и независимост

Системата от аксиоми изложена в раздел 2.3 се обобщава по естествен начин: аксиомите за нормираност и адитивност остават непроменени, докато аксиомата за позитивност се заменя с аксиома за неотрицателност. Това обобщение е мотивирано от необходимостта да се разглеждат експерименти с безкрайни пространства от елементарни изходи.
Нека $\mathcal{E}$ е експеримент с вероятностно пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Нека $B \in \mathfrak{A}$, като $P(B) > 0$. Вероятността да настъпи събитие $A \in \mathfrak{A}$ при условие, че е настъпило събитие B се нарича

условна вероятност на A при условие B и се записва чрез $P(A|B)$. Дефиниционното равенство $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ е напълно естествено поради предположението, че $P(A|B)$ и $P(A \cap B)$ трябва да са пропорционални с коефициент зависещ само от B, тоест $P(A|B) = c(B).P(A \cap B)$, като при $A = B$ намираме $c(B) = \frac{1}{P(B)}$.
Ако $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то съгласно дефиницията на условна вероятност получаваме $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. В общност, ако $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ са такива, че $P(\cap_{k=1}^{n-1} A_k) > 0$, то прилагайки дефиницията за условна вероятност намираме

$$P(\cap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

$$= \cdots = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Теорема 3.1. *(Теорема за умножение на вероятностите) Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ са такива, че $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$. Тогава е в сила равенството*

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се наричат независими, ако за всяко $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ е в сила равенството: $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$. В частност при $n = 2$ събитията A и B са независими, ако $P(AB) = P(A)P(B)$. В този случай, при $P(B) > 0$ получаваме $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Забележка 3.2. *Равенството $P(A|B) = P(A)$ изразява връзката между понятията условна вероятност и независимост. Ако $P(B) > 0$, то събитията A и B са независими, тогава и само тогава, когато е в сила $P(A|B) = P(A)$. Ако $P(B) = 0$, то A и B са независими.*

Забележка 3.3. *Ако A и B са несъвместими събития с положителна вероятност, тоест $AB = \emptyset$ и $P(A) > 0,\ P(B) > 0$, то те са зависими, поради $P(AB) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)$.*

Забележка 3.4. *Ако A и B са независими събития, то:*
a) A и $\overline{B}$
b) $\overline{A}$ и $\overline{B}$
също са независими. Твърдението на задачата се обобщава по индукция за $n \geq 3$ събития.

3.2 Условия на задачите от упражнение 3

Задача 1 Вероятността стрелец да улучи мишена е $\frac{2}{3}$, ако улучи той получава право на втори изстрел. Вероятността за улучване и на двете мишени е $\frac{1}{2}$. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път?

Задача 2 Застрахователна компания води статистика за своите клиенти:
- всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;
- 60% посещават повече от веднъж годишно лекар;
- 17% посещават хирург;
- 15% от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург. Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Задача 3 Да се определи вероятността, случайно избрано естествено число, да не се дели:
a) нито на две, нито на три;
b)на две или на три.

Задача 4 Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Задача 5 Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

Задача 6 Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпадат да е по-голяма от 1/2.

Задача 7 Двама играчи последователно хвърлят монета, играта печели този, който първи хвърли герб. Да се намери вероятността за спечелване на играта за всеки от двамата играчи.

Задача 8 А получава информация (0 или 1) и я предава на Б, той я предава на В, той пък на Г. Г съобщава получената информация. Известно е, че всеки от тях казва истина само в един от три случая. Ако излъжат точно двама, отново се получава истина. Каква е вероятността А да не е излъгал, ако е известно, че Г е съобщил "истината"(тоест отговорът на Г съвпада с информацията, която А получава)?

Задача 9 Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се предели вероятността нито едно лице да не получи своето писмо.

Задача 10 Нека $S = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ \mid \ f - \text{биекция}\}$ е множеството на всички биекции $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Да се определи вероятността при случаен избор на елемент от S, той да няма неподвижна точка.

Задача 11 Каква е вероятността да се получи несъкратима дроб, ако числителят и знаменателят са числа, които се избират от редицата на естествените числа по случаен начин и независимо едно от друго.

3.3 Решения на задачите от упражнение 3

Задача 1 Р-е: Нека A_i са събитията - стрелецът улучва $i-$тата мишена. По условие $P(A_1) = \frac{2}{3}$ и $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}$, откъдето $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$.

Задача 2 Р-е: Нека A, B и C са съответно събитията - случайно избран клиент да посещава точно веднъж, повече от веднъж годишно лекар и да посещава хирург. По условие $\overline{A} = B$ и $P(B) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $P(C) = \frac{17}{100}$, $P(C|B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$. Търсим $P(\overline{C}|A)$. Пресмятаме $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B) = \frac{2}{5}$ и $P(\overline{C}|A) = \frac{P(\overline{C} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(CA)}{P(A)} = \frac{P(A) - (P(C) - P(CB))}{P(A)} =$

$\frac{P(A)-P(C)+P(C|B)P(B)}{P(A)} = \frac{4}{5}$.

Задача 3 Р-е: а) Нека A, B и C са съответно събитията - случайно избрано естествено число да не се дели на 2, да не се дели на 3, да е взаимно-просто с 6. Тогава $C = AB$ и търсим $P(AB) = P(C)$. За да приложим в този случай класическа вероятност е необходимо да я додефинираме чрез $P(C) = \lim_{n\to\infty} \frac{|D_n|}{n}$, където $|D_n|$ е броят на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$, взаимно прости с 6. Получаваме $P(C) = P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cup B})) = P(A) + P(B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{3}$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Задача 4 Р-е: Нека A и B са съответно събитията при хвърляне на 2 зара, сумата от падналите се числа е по-малка от 8, сумата е нечетна. Търсим $P(A|B)$. При различими зарове $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{2}{3}$. Събитията A и B са зависими, понеже $P(A)P(B) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = P(AB)$. При неразличимите зарове, пресмятане на $P(A|B)$ с класическа вероятност не е правдоподобно.

Задача 5 Р-е: Нека A е събитието - при сядане на 10 мъже и 10 жени на една пейка, да няма съседи от един и същи пол. Еквивалентна интерпретация на условието е да намерим вероятността при случаен избор (класическа вероятност) на 20 членна редица от елементи на $\{m, w\}$, всеки от които участва точно 10 пъти, да няма два съседни еднакви. Тогава $P(A) = \frac{2}{|P(20;10,10)|} = \frac{2(10!)^2}{20!}$.
Второ решение - чрез определяне позициите на 10-те жени, те могат да бъдат или всичките 10 четни позиции или всички нечетни позиции (ако сме ги номерирали последователно за определеност), т.е. 2(10!) възможности, на всяка от които съответстват 10! възможности за раположението на мъжете. Така $P(A) = \frac{2(10!)^2}{20!}$.
Нека сега разгледаме същата задача, но за кръгла маса. Ще докажем и използваме следното твърдение:

Лема 3.5. *Броя на различните нареждания (различни с точност до ротации, без отражения) на n лица на кръгла маса с n позиции е $(n-1)!$.*

Доказателство: Без ограничение, означаваме n-те позиции и n-те лица с $1, 2, \ldots, n$ и съпоставяме на всяко нареждане, пермутация, чрез съответната биекция задаваща нареждането: $\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ позиция $\longmapsto$ човек. В множеството S_n на пермутаициите въвеждаме следната релация на еквивалентност: $\sigma,\ \tau \in S_n$ са еквивалентни, ако съществува $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} :\ \sigma(i) - \tau(i) \equiv k \mod n,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Еквивалентността на две нареждания с точност до ротация е равносилна на еквивалентност на задаващите ги пермутации. Всеки клас на еквивалентност в S_n се състои от точно n пермутации: класът с представител $\tau \in S_n$ се състои от елементите $\tau_k \equiv \tau + k \mod n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоест, за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ дефинираме $\tau_k(i)$ да е равен на остатъкът при деление на $\tau(i) + k$ на n, ако остатъкът е различен от нула, в противен случай полагаме $\tau_k(i) = n$. Получаваме, че на всяко нареждане съответстват точно n пермутации, и търсеният брой различни нареждания е равен на броя на класовете на еквивалентност в S_n. Следователно търсеният брой е $\frac{|S_n|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. □

Лема 3.6. *Броя на различните нареждания (различни с точност до ротации и отражения) на n лица на кръгла маса с $n \geq 3$ позиции е $\frac{(n-1)!}{2}$.*

Доказателство: Разсъжденията са аналогични на доказателството на предходната лема 3.5, затова ще използваме въведените там означения. В множеството S_n на пермутаициите въвеждаме следната релация на еквивалентност: $\sigma,\ \tau \in S_n$ са еквивалентни, ако е изпълнено едно от следните две условия:
(1) съществува $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}:\ \sigma(i) - \tau(i) \equiv k \mod n,\ \forall i = 1, 2, \dots, n;$
(2) $\sigma(i) + \tau(i) = n + 1,\ \forall i = 1, 2, \dots, n$

Всеки клас на еквивалентност в S_n, при $n \geq 3$, се състои от точно $2n$ пермутации: класът с представител $\tau \in S_n$ се състои от пермутациите $\tau_k \equiv \tau + k \mod n,\ k = 0, 1, \dots, n-1$, както и от пермутациите $\tau'_k(i) = n + 1 - \tau_k(i),\ k = 0, 1, \dots, n-1$. Получаваме, че на всяко нареждане съответстват точно $2n$ пермутации, и търсеният брой различни нареждания е равен на броя на класовете на еквивалентност в S_n. Следователно търсеният брой е $\frac{|S_n|}{2n} = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$. $\square$

Решение на задачата: фиксираме 10 позиции, никои две от които не са съседни и разполагаме по $\frac{10!}{10} = 9!$ начина жените на тези позиции. За мъжете имаме 10! възможни начина на разпределяне. Общия брой разпределения без съседни еднакви е 9!10!. Общия брой разпределения без ограничения е $\frac{20!}{20} = 19!$. Тогава $P(A) = \frac{2(10!)^2}{20!}$.

Задача 6 Р-е: Нека за всяко естествено $n \leq 366$, $A(n)$ е събитието - при случаен избор на n човека, да има поне 2-ма с еднаква рожденна дата. Търсим $\min\{n|\ P(A(n)) > \frac{1}{2}\}$. От $P(A(n)) = 1 - P(\overline{A(n)})$, то $\min\{n|\ P(A(n)) > \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ P(\overline{A(n)}) < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \frac{V_{365}^n}{V(365;n)} < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{k}{365}) < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \exp(-\frac{n(n-1)}{730}) < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ n(n-1) - 730\ln(2) > 0\} = 23$.

Задача 7 Р-е: Нека $A,\ B,\ A_i,\ B_i,\ i = 1, 2, \dots$ са съответно събитията - играта е спечелена от първия, втория играч, при $i-$тото хвърляне на играч 1, 2 се пада лице. Нека за всяко естествено $k,\ A(k)$ е събитието - първия играч печели на $(2k-1)$-ви ход. Следователно

$$A(k) = A_1 B_1 A_2 B_2 \cdots A_{k-1} B_{k-1} \overline{A_k}.$$

Ще считаме, че вероятността за герб е $\frac{1}{2}$, откъдето получаваме:

$$P(A_1) = P(B_1|A_1) = P(A_2|A_1B_1) = P(B_2|A_1B_1A_2) = \cdots = P(B_{k-1}|A_1B_1A_2B_2 \cdots A_{k-1}) =$$

$$= P(\overline{A_k}|A_1B_1A_2B_2 \cdots A_{k-1}B_{k-1}) = \frac{1}{2}.$$

Съгласно теорема 3.1 за вероятността на събитието $A(k)$ намираме

$$P(A(k)) = P(A_1B_1A_2B_2 \cdots A_{k-1}B_{k-1}\overline{A_k})$$

$$= P(A_1)P(B_1|A_1)P(A_2|A_1B_1) \cdots P(\overline{A_k}|A_1B_1A_2B_2 \cdots A_{k-1}B_{k-1}) = \frac{1}{2^{2k-1}},$$

Понеже $A(k) \cap A(l) = \emptyset$ при $k \neq l$ ($A(k)$ и $A(l)$ при $k \neq l$ са различни елементарни изходи), то

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} P(\cup_{k=1}^N A(k)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N P(A(k)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^{2k-1}}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{4^k} = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\frac{1}{4^N}}{2(1-\frac{1}{4})} = \frac{2}{3}.$$

Понеже $A = \overline{B}$, то $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$.

Задача 8 Р-е: Нека A и B са съответно събитията - първия е казал истината (1), четвъртият е казал (1). Търсим $P(A|B)$. Събитието $A \cap B$ се представя като обединение на 2 несъвместими събития - всички кават истината (събитие C), точно двама различни от първия лъжат (казват 0) (събитие D). Следователно $P(AB) = P(C \cup D) = P(C) + P(D) = \frac{1}{3^4} + \binom{3}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 = \frac{13}{81}$. Събитието B се представя като обединение на 3 несъвместими събития - всички казват истината (събитие E), всички лъжат (събитие F), точно двама казват истината (събитие G). Така $P(B) = P(E \cup F \cup G) = P(E)+P(F)+P(G) = \frac{1}{3^4}+\frac{2^4}{3^4}+\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 = \frac{41}{81}$, откъдето $P(A|B) = \frac{13}{41}$.

Задача 9 Р-е: Нека S_n е множеството на всички биекции на $n-$елементно множество. Търсим броя на биекциите без неподвижна точка. Нека $A_k \subset S_n,\ k = 1, \dots, n$ се състои от всички биекции, държащи елемента k неподвижно. Тогава броя на биекциите без неподвижна точка е: $|S_n - \cup_{k=1}^n A_k| = |S_n| - |\cup_{k=1}^n A_k| = n! - (\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|) = n! - (\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Търсената вероятност е

$$P = \frac{|S_n - \cup_{k=1}^n A_k|}{|S_n|} = \frac{n! \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказателство на 3.4 От $P(A) = P(A\Omega) = P(A(B \cup \overline{B})) = P(AB \cup A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$, следва $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$. Тогава A и $\overline{B}$ са независими. От този резултат и смяната $A \longrightarrow \overline{A}$ получаваме, че $\overline{A}$ и $\overline{B}$ също са независими. Обобщение на твърдението се получава чрез индукция по броя n на разглежданите независими събития.

Задача 11 Нека $a, b \in \mathbb{N}$ са случайно избраните естествени числа. Дробта $\frac{a}{b}$ е несъкратима, ако $\gcd(a, b) = 1$. Нека $\mathbb{P}$ е множеството на простите числа и за произволни $l, n \in \mathbb{N}$, дефинираме събитието $A(n, l)$ да бъде - l не дели n. За произволно $p \in \mathbb{P}$ дефинираме $A_p = A(a, p) \cup A(b, p)$ и

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} A_p; \quad A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{P};\ p\le n} A_p.$$

Търсим $\mathbf{P}(A)$, като ще докажем и приложим следните резултати:

- Ако $a, b \in \mathbb{N}$ са различни, то $A(a, p)$ и $A(b, p)$ са независими, като съгласно задача 3:

$$\mathbf{P}(A(a, p)) = \mathbf{P}(A(b, p)) = \frac{p-1}{p};$$

- $\mathbf{P}(A_p) = 1 - \frac{1}{p^2}$;

- Ако $p_1, p_2, \dots, p_r \in \mathbb{P}$ са различни, то $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_r}$ са независими (в съвкупност) събития.

Ще докажем последните две твърдения:

$$\mathbf{P}(A_p) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_p}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(a,p)} \cap \overline{A(b,p)}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(a,p)})\mathbf{P}(\overline{A(b,p)}) = 1 - \frac{1}{p^2}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{p_1} \cap A_{p_2}) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1} \cap A_{p_2}}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cup \overline{A_{p_2}}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) - \mathbf{P}(\overline{A_{p_2}}) + \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cap \overline{A_{p_2}}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) - \mathbf{P}(\overline{A_{p_2}}) + \mathbf{P}(\overline{A_{p_1 p_2}}) \\
&= 1 - \frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \\
&= \mathbf{P}(A_{p_1})\mathbf{P}(A_{p_2}).
\end{aligned}$$

Следователно A_{p_1}, A_{p_2} са независими при $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{P}$. По индукция следва твърдението за независимост на $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \\
= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{P};\ p\leq n} A_p\right) &= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq n} \mathbf{P}(A_p) \\
= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Забележка 3.7.

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4 Формула за пълната вероятност и Формула на Бейс

4.1 Формула на Бейс

Нека $\mathcal{E}$ е експеримент с вероятностно пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $n \geq 2$ е естествено число и $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$. С индукция по n ще докажем формулата:

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^n A_i).$$

При $n = 2$ получаваме равенството $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$, което е в сила предвид свойство 3 от 2.4. Да предположим, че формулата е вярна за n събития и да извършим индуктивната стъпка $n \longrightarrow n+1$:

$$P(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = P((\cup_{i=1}^n A_i) \cup A_{n+1}) = P(\cup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) - P((\cup_{i=1}^n A_i) \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \cdots (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^n A_i) - P(\cup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P(\cap_{i=1}^{n+1} A_i).$$

Дефиниция 4.1. *Събитията $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathfrak{A}$ образуват пълна група от събития в $\mathfrak{A}$, ако: $H_i \cap H_j = \emptyset, \forall i \neq j$ и $\cup_{i=1}^n H_i = \Omega$.*

Ако $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуват пълна група от събития, то $A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^n H_i) = \cup_{i=1}^n (A \cap H_i)$. При условието $P(H_i) > 0 \ \forall i$, получаваме "формулата за пълната вероятност":

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^n (A \cap H_i)) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) P(H_i).$$

Теорема 4.2. *Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуват пълна група от събития в $\mathfrak{A}$, като $P(H_i) > 0$ за всяко $i = 1, 2 \ldots, n$. Тогава за всяко събитие $A \in \mathfrak{A}$ е в сила:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) P(H_i).$$

Ако събитието A е настъпило, то вероятностите $P(H_k|A),\ k = 1, 2, \ldots, n$ се пресмятат чрез формулата на Бейс:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k) P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i) P(H_i)}. \qquad (1)$$

4.2 Условия на задачите от упражнение 4

Задача 1 Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се определи вероятността:
а) всеки да получи своето писмо;
б) точно $n-1$ лица да получат своите писма;
в) нито едно лице да не получи своето писмо.

Задача 2 В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Да се определи вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако:
а) след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;
б) извадените топки не се връщат обратно.

Задача 3 Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието А ще настъпи поне веднъж е равна на 1/2. Да се определи вероятността за настъпване на А при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща.

Задача 4 Известни са вероятностите на събитията А, В и АВ. Да се определят $P(A\overline{B})$ и $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Задача 5 Дадени са две партиди изделия от 12 и 10 броя. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Да се определи вероятността то да е дефектно.

Задача 6 Имаме три нормални зара и един, на който върху всичките страни има шестици. По случаен начин избираме един от тези четири зара и го отделяме, а след това хвърляме останалите три. Да се определи вероятността да се паднат:
а) три шестици;
б) различни цифри;
в) последователни цифри.

Задача 7 Дадени са n урни и във всяка от тях има по m бели и k черни топки. От първата урна се тегли една топка и се прехвърля във втората, след това от втората една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Задача 8 В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират 3 топки, които след игра се връщат обратно в кутията. За втората игра също се избират 3 топки, каква е вероятността те да са нови?

Задача 9 Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно той да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет?

4.3 Решения на задачите от упражнение 4

Задача 1 Р-е: a) $P = \frac{1}{n!}$;
b) $P = 0$, понеже, не съществува пермутация с точно $n-1$ неподвижни точки.
c) това е задача 9 от упражнение 3: $P = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Задача 2 Р-е: Нека A е събитието - бяла топка е извадена преди зелена. Нека броят на белите, зелените и червените топки е съответно m, n и k.

a) Нека N е естествено число и A_N е събитиетието - бяла топка е извадена преди зелена, на позиция не надминаваща N. Нека $A(r)$ е събитието - бяла топка е извадена за първи път при $r-$ти опит, и няма извадени зелени топки. Тогава

$$A_N = \cup_{r=1}^{N} A(r),\ P(A(r)) = \left(\frac{k}{m+n+k}\right)^{r-1} \frac{m}{m+n+k} = q^{r-1}\frac{m}{m+n+k},$$

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} P(A_N) = \lim_{N\to\infty} P(\cup_{r=1}^{N} A(r)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} P(A(r))$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} \frac{m}{m+n+k} q^{r-1} = \frac{m}{m+n+k} \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} q^{r-1}$$

$$= \frac{m}{m+n+k} \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{m}{m+n+k} \times \frac{1}{1-q} = \frac{m}{m+n}.$$

b) Ще използваме означенията от a), като положим $N = k$ и нека $B(r)$ е събитието - зелена топка е извадена за първи път при $r-$ти опит, и няма извадени бели топки. Тогава $A = \cup_{r=1}^{k} A(r)$, $\overline{A} = \cup_{r=1}^{k} B(r)$ и по теорема 3.1 пресмятаме $P(A(r))$ и $P(B(r))$

$$P(A(r)) = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{(m+n+k)(m+n+k-1)\cdots(m+n+k-r+1)} \times \frac{m}{m+n+k-r} =$$

$$= \frac{\binom{k}{r}}{\binom{m+n+k}{r}} \times \frac{m}{m+n+k-r}.$$

$$P(B(r)) = \frac{\binom{k}{r}}{\binom{m+n+k}{r}} \times \frac{n}{m+n+k-r}.$$

$$P(A) = \sum_{r=1}^{k} P(A(r)) = m \sum_{r=1}^{k} \frac{\binom{k}{r}}{(m+n+k-r)\binom{m+n+k}{r}},$$

$$P(\overline{A}) = \sum_{r=1}^{k} P(B(r)) = n \sum_{r=1}^{k} \frac{\binom{k}{r}}{(m+n+k-r)\binom{m+n+k}{r}}.$$

От $1 = P(A) + P(\overline{A}) = P(A) + \frac{n}{m}P(A)$, то $P(A) = \frac{m}{m+n}$.

Задача 3 Нека A_i е събитието - А се случва при $i-$тия опит, $i = 1, 2, 3, 4$. По условие A_i са независими и съгласно 3.4 независими са и събитията $\overline{A_i}$. По условие $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$ и $\frac{1}{2} = P(\cup_{i=1}^4 A_i) = 1 - P(\overline{\cup_{i=1}^4 A_i}) = 1 - P(\cap_{i=1}^4 \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^4 P(\overline{A_i}) = 1 - P(\overline{A_1})^4$, откъдето $P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Задача 4 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$, и $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B}) - P(\overline{B}A)}{P(\overline{A})} = \frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}$.

Задача 5 Р-е: Нека A, B и C са съответно събитията - прехвърления във втората партида детайл е годен, е дефектен; извадения от втората партида детайл е дефектен. Тогава $P(C) = P(C \cap (A \cup B)) = P(CA \cup CB) = P(CA) + P(CB) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{1}{11} \times \frac{11}{12} + \frac{2}{11} \times \frac{1}{12} = \frac{13}{132}$.

Забележка 4.3. *За сбитията A и B в задача 5 е в сила $B = \overline{A}$, следователно A и B образуват пълна група от сбития. По формулата за пълната вероятност 4.2 получаваме $P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B)$.*

Задача 6 Р-е: Нека A е събитието премахнатият зар е обикновен (върху стените му са числата 1,2,...,6).

a) Ако B е събитието - падат се три шестици при хвърляне на 3-те зара, то $P(B) = P(B(A \cup \overline{A})) = P(BA) + P(B\overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = \frac{1}{36} \times \frac{\binom{3}{1}}{4} + \frac{1}{6^3} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{864}$.

b) Ако B е събитието - падат се три различни цифри при хвърляне на 3-те зара, то $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = \frac{|V_5^2|}{|V(6;2)|} \times \frac{3}{4} + \frac{|V_6^3|}{|V(6;3)|} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{9}$.

c) Ако B е събитието - падат се три последователни цифри при хвърляне на 3-те зара, то $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = \frac{2}{|V(6;2)|} \times \frac{3}{4} + \frac{4.(3!)}{|V(6;3)|} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{72}$.

Задача 7 Р-е: Нека $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ е събитието - от $i-$тата урна е извадена бяла топка. Тогава $P(A_1) = \frac{m}{m+k}$ и с индукция по n получаваме $P(A_n) = P(A_n(A_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}})) = P(A_nA_{n-1} \cup A_n\overline{A_{n-1}})) = P(A_nA_{n-1}) + P(A_n\overline{A_{n-1}}) = P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n|\overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}}) = \frac{m+1}{m+k+1} \times \frac{m}{m+k} + \frac{m}{m+k+1} \times \frac{k}{m+k} = \frac{m}{m+k}$.

Задача 8 Р-е: Нека $H_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ са съответно събитията - избрани са i на брой нови топки за първата игра. Нека A е събитието - избрани са 3 нови топки за втората игра. Тогава събитията H_i са пълна група и съгласно теорема (4.2) получаваме $P(A) = \sum_{i=0}^3 P(A|H_i)P(H_i) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \times \frac{1}{\binom{7}{3}} + \frac{1}{\binom{7}{3}} \times \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{16}{1225} \approx 0.01306122$

Задача 9 Р-е: Нека $H_k,\ k = 0, 1, 2$ и A са съответно събитията - има точно k билета, за които студентът не знае нито един от двата въпроса върху тях; и студентът взима изпита. Тогава $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}(\cup_{k=0}^2 H_k)) = 1 - P(\cup_{k=0}^2 \overline{A}H_k) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(\overline{A}H_k) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(\overline{A}|H_k)P(H_k)$. Ще приемем, че избор на въпрос от вече избран билет, става с вероятност $\frac{1}{2}$. Пресмятаме:

$$P(H_0) = \frac{V_{25}^5 \times \frac{P(10;2,\ldots,2)}{10!}}{\frac{P(15;2,\ldots,2)}{15!}} = \frac{\frac{25!}{20!} \times \frac{20!}{10!2^{10}}}{\frac{30!}{15!2^{15}}} = \frac{176}{261}; \quad P(\overline{A}|H_0) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{21};$$

$$P(H_1) = \frac{\binom{5}{2} \times V_{25}^3 \times \frac{P(11;2,\ldots,2)}{11!}}{\frac{P(15;2,\ldots,2)}{15!}} = \frac{160}{261}; \quad P(\overline{A}|H_1) = \frac{1}{15} + \frac{3}{15}\left(\frac{1}{14} + \frac{2}{14} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{105};$$

$$P(H_2) = \frac{\frac{1}{2}\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times 25 \times \frac{P(12;2,\ldots,2)}{12!}}{\frac{P(15;2,\ldots,2)}{15!}} = \frac{5}{261}; \quad P(\overline{A}|H_2) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \times \frac{2}{14} = \frac{1}{7};$$

Следователно $P(A) = 1 - \frac{511}{21 \times 261} = 0.9067688$.

4.4 Условия на задачите от упражнение 5

Задача 3 В компютърен център има три принтера А, Б и В, които работят с различна скорост. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към А, Б или В са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да се задави и да провали печатането е 0.01, 0.05 и 0.04 съответно. Ако печатането на даден документ се прекрати, каква е вероятността това да е по вина на първия принтер?

Задача 4 Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху масата. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна също да е бяла?

Задача 5 Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студентът знае 90% от въпросите, ако не знае верния отговор той налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верния отговор?

Задача 6 Трима умника стрелят по сладолед. Сладоледа е уцелен от един умник. Каква е вероятността точен да е бил първият умник, ако те уцелват с вероятност, съответно 0.2, 0.4 и 0.6.

Задача 7 Прехвърляме последвателно тесте от 52 карти. Ако за първи път видим червено асо на позиция 6, каква е вероятността след това да видим червено асо преди черно асо?

Задача 8 На изпит се явяват 100 студента, 60 момчета и 40 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.5, а момчетата с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Задача 9 Дадени са 3 събития, които са равновероятни, несъвместими, две по две независими. Каква е максималната вероятност на тези събития?

Задача 10 Дадени са $n \geq 3$ събития, които са равновероятни, две по две независими, като всеки три от тях са несъвместими. Каква е максималната вероятност на тези събития?

4.5 Решения на задачите от упражнение 5

Задача 3 Р-е: Нека $H_i,\ i = 1,2,3$ и A са съответно събитията - документа се печата на i-тия принтер, печатането на документа е провалено. По условие $P(H_1) = 0.6;\ P(H_2) = 0.3;\ P(H_3) = 0.1;\ P(A|H_1) = 0.01;\ P(A|H_2) = 0.05;\ P(A|H_3) = 0.04$. Понеже H_i са две по две непресичащи се и $\sum_{i=0}^{3} P(H_i) = 1$, то $H_i,\ i = 1,2,3$ образуват пълна група. Търсим $P(H_1|A)$. Прилагаме формулата на Бейс (1) $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A|H_k)P(H_k)} = \frac{6}{25}$.

Задача 4 Р-е: Нека $H_i,\ i = 0,1,2$ и A са съответно събитията - i на брой бели клетки върху случайно избран жетон измежду дадените, при хвърляне на жетон - горната му страна е бяла. Ще считаме, че при хвърляне на жетон всяка от двете му страни е равновероятна, с вероятност $\frac{1}{2}$. Търсим $P(H_2|A)$. Прилагаме Бейс: $P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{\sum_{i=0}^{2} P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$.

Задача 5 Р-е: Нека H и A са съответно събитията - студентът знае случайно избран въпрос, студентът отговаря правилно на случайно избран въпрос. Търсим $P(\overline{H}|A)$. Прилагаме Бейс: $P(\overline{H}|A) = \frac{P(A|\overline{H})P(\overline{H})}{P(A|\overline{H})P(\overline{H})+P(A|H)P(H)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+1\times\frac{9}{10}} = \frac{1}{37}$.

Задача 6 Р-е: Нека $H_i,\ i = 1,2,3$ и A са съответно събитията - сладоледа е уцелен от $i-$тия умник, и сладоледа е уцелен от точно един умник. Следователно $A = (H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3}) \cup (\overline{H_1} \cap H_2 \cap \overline{H_3}) \cup (\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap H_3)$ и търсим $P((H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3})|A)$. По условие $P(H_1) = 0.2,\ P(H_2) = 0.4,\ P(H_3) = 0.6$ и събитията $H_i,\ i = 1,2,3$ са независими (понеже умниците стрелят едновременно веднъж, и следователно резултатите им са независими). Съгласно 3.4, независими са и събитията $H_1,\ \overline{H_2},\ \overline{H_3};\ \overline{H_1},\ H_2,\ \overline{H_3};\ \overline{H_1},\ \overline{H_2},\ H_3$. Тогава

$$P((H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3})|A) = \frac{P((H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3}) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3})}{P(A)}$$

$$= \frac{P(H_1)P(\overline{H_2})P(\overline{H_3})}{P(H_1)P(\overline{H_2})P(\overline{H_3}) + P(\overline{H_1})P(H_2)P(\overline{H_3}) + P(\overline{H_1})P(\overline{H_2})P(H_3)}$$

$$= \frac{0.2 \times 0.6 \times 0.4}{0.2 \times 0.6 \times 0.4 + 0.8 \times 0.4 \times 0.4 + 0.8 \times 0.6 \times 0.6} = \frac{3}{29}.$$

Задача 7 Р-е: Нека A и B са съответно събитията - първото червено асо е на 6-та позиция; има червено асо на позиция с номер по-голям от 6 и по-малък от позицията на последното черно асо. Търсим $P(B|A)$. Пресмятаме $P(BA) = \frac{2\binom{46}{3}+5\binom{46}{2}}{\binom{52}{4}\times P(2,2)}$ и $P(A) = \frac{46}{\binom{52}{2}}$, следователно $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{309}{490} \approx 0,63$.

Задача 8 Р-е: Нека $H_i,\ i = 0,1,2,3$ и A са съответно събитията - при случаен избор на 3 изпитни работи, точно i от тях са на момичета; при случаен избор на 3 изпитни работи, точно две са успешни. Търсим $P(H_3|A)$. Понеже събитията $H_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ образуват пълна група, то прилагаме Бейс: $P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{\sum_{i=0}^{3} P(A|H_i)P(H_i)}$. Пресмятаме:

$$P(H_0) = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.21162647, \quad P(A|H_0) = 3 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.288;$$

$$P(H_1) = \frac{\binom{40}{1} \times \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}} = 0.43784787, \quad P(A|H_1) = 2 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 = 0.32;$$

$$P(H_2) = \frac{\binom{40}{2} \times \binom{60}{1}}{\binom{100}{3}} = 0.28942486, \quad P(A|H_2) = 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.35;$$

$$P(H_3) = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.0611008, \quad P(A|H_3) = 3 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.375;$$

Следователно $P(H_3|A) \approx 0.07$.

Задача 9 Нека $A_i,\ i = 1, 2, 3$ са събития, удовлетворяващи условията: $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$ при $i \neq j$, $P(A_i) = x$, и $A_1A_2A_3 = \emptyset$. Разглеждаме събитията $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, \overline{A}_1\overline{A}_2$: те са две по две непресичащи се, следователно

$$\begin{aligned} 3x^2 + (1-x)^2 &= P(A_1A_2) + P(A_2A_3) + P(A_3A_1) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= P(A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2) \leq P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Следователно $x \leq 1/2$. Следният пример показва, че $x = 0.5$ се достига. Нека $A_i,\ i = 1, 2$ са събития: при случаен избор на естествено число, то дава остатък i или $i+1$ при деление на 4; A_3 е събитието - случайно избрано естествено число дава остатък 3 или $1 \mod 4$. Тогава събитията $A_i,\ i = 1, 2, 3$ са две по две независими, не могат да настъпят едновременно и $P(A_i) = 1/2$.

Задача 10 Нека $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ са събития, удовлетворяващи условията на задачата, тоест две по две независими и всеки три са несъвместими. Нека $P(A_k) = x \in (0, 1)$. Събитията

$$\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n = \prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k,\ A_iA_j,\ 1 \leq i < j \leq n,$$

са две по две несъвместими, следователно за събитието $A = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n \cup_{1 \leq i < j \leq n} A_iA_j$

$$\begin{aligned} P(A) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n \cup_{1 \leq i < j \leq n} A_iA_j) &= P\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) \\ &= P\left(\overline{\cup_{k=1}^{n} A_k}\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i)P(A_j) \\ &= 1 - P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i)P(A_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i)P(A_j) + 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots$$

$$= \binom{n}{2}x^2 + 1 - nx + \binom{n}{2}x^2 = 1 + nx\left((n-1)x - 1\right).$$

Понеже $P(A) \le 1$, то $x \le \frac{1}{n-1}$. Следният пример показва, че $\max x = \frac{1}{n-1}$.
Да разгледаме следният експеримент $\mathcal{E}_n$: по случаен начин от множеството на първите $(n-1)^2$ естествени числа S се избира число m . Дефинираме редица $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ от събития индуктивно: A_1 е събитието $m = a_{1l}$, където $a_{1l},\ l = 1,\dots,n-1$ са различни елементи на S. Нека $a_{2l},\ l = 1,\dots,n-2$ са различни елементи на S, принадлежащи на

$$S - \{a_{1l} \mid l = 1,\dots,n-1\}.$$

Дефинираме A_2 да бъде събитието $m = a_{11}$ или $m = a_{2l},\ l = 1,2,\dots,n-2$. Аналогично дефинираме $A_3,\dots,A_n$. Получваме $P(A_k) = \frac{n-1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1}$, всеки две събития от редицата $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ са независими и всеки три са несъвместими.

5 Вероятностни пространства - обща дефиниция на вероятност

5.1 Обща дефиниция на вероятност - аксиоми и свойства

Пространство от събития $\mathfrak{A}$ на даден експеримент $\mathcal{E}$ се нарича булова σ алгебра, ако $\mathfrak{A}$ е затворено относно операциите допълнение и изброимите обединения и сечения на елементите си. Нека $\mathfrak{A}$ е булова σ алгебра и $(\Omega, \mathfrak{A})$ е измеримо пространство на експеримента $\mathcal{E}$. Ако $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от събития принадлежащи на $\mathfrak{A}$, то събитията $\liminf A_n$ и $\limsup A_n$ дефинирани чрез

$$\liminf A_n = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \limsup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n, \tag{2}$$

също принадлежат на $\mathfrak{A}$, и се наричат съответно долна и горна граница на редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Събитието $\liminf A_n$ настъпва точно тогава, когато всички събития от разглежданата редица настъпват, евентуално с изключение на краен брой. Събитието $\limsup A_n$ настъпва точно тогава, когато безбройно много от събитията на редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ настъпват. Следователно $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Дефиниция 5.1. *Редицата от събития $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича сходяща, ако е в сила равенството $\liminf A_n = \limsup A_n$.*

Означение $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, където $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ се нарича гранично събитие или граница на $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример 5.2. *В частност, ако $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ и $\cap_{n=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, то $\liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$, следователно $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$. Тоест $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони монотонно към $\emptyset$.*

Дефиниция 5.3. *Функцията $P : \mathfrak{A} \longrightarrow [0,1]$ със свойствата:*
1) $P(\Omega) = 1$,
2) $P(A) \ge 0,\ \forall A \in \mathfrak{A}$,

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ \forall A, B \in \mathfrak{A}: \ A \cap B = \emptyset$*,*
4) за всяка редица $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *от събития, клоняща монотонно към* $\emptyset$*, съответната числова редица* $\{P(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *клони към 0,*
се нарича вероятностна мярка върху измеримото пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$*.*
Тройката $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *се нарича вероятностно пространство на* $\mathcal{E}$*.*

Свойства 5.4. *Свойства на вероятностната мярка:*
(1) $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$ *(монотонност)*
(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(4) $P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$
(5) Ако $A_k,\ k = 1, 2, \ldots$ *са две по две непресичащи се, то* $P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$*.*

5.2 Теорема за продължение на вероятностите

Дефиниция 5.5. *Булова* σ *алгебра. Пораждане на булова* σ *алгебра от булова алгебра.*

Теорема 5.6. *Теорема за продължение на вероятностите:*

6 Геометрична вероятност

6.1 Дефиниция

Нека n е естествено число и $\mathbb{R}^n$ е $n-$мерното евклидово пространство, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е множество от елементарни изходи на даден експеримент. Изображение $\mu : \mathfrak{R}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty)$ със свойството $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),\ \forall A, B \in \mathfrak{R}(\Omega): \ A \cap B = \emptyset$ се нарича адитивна мярка върху $\mathfrak{R}(\Omega)$. Изображението $\mathfrak{R}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \quad A \longmapsto \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ удовлетворява аксиомите за вероятностна мярка върху $\mathfrak{R}(\Omega)$ и се нарича геометрична вероятност асоциирана с мярката μ, която ще означаваме чрез $P: \quad P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.
Ако $\mu(\Omega) = \infty$, то конструираме $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, че $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ и за всяко n да е в сила $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \quad \mu(\Omega_n) < \infty$. Нека $A_n = A \cap \Omega_n$ и додефинираме P чрез равенството:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mu(A_n)}{\mu(\Omega_n)}.$$

Забележка 6.1. *В задачите по-долу ще считаме, че* μ *е Лебегова мярка в* $\mathbb{R}^n$*.*

Пример 6.2. *Нека* $a < b < c < d$ *са реални числа. Каква е вероятността случайно избрано реално число в интервала* (a, d) *да принадлежи на* (b, c)*?*

Пример 6.3. *Точка попада по случаен начин във вътрешността на* $\triangle ABC$*. Каква е вероятността точката да се намира във вътрешността на триъгълникът с върхове в средите на страните на* $\triangle ABC$*?*

6.2 Условия на задачите от упражнение 6

Задача 1 Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка А. През точка А е прекарана хорда перпендикулярна на диаметъра. Да се определи вероятността хордата да бъде по-къса от радиуса.

Задача 2 На плоскост са прекарани два типа успоредни ивици, първите са с ширина 1см, а вторите 2см, разстоянието между ивиците е 1см (плоскостта е на райета). Върху плоскостта се хвърля монета с диаметър 2см. Нека А, В са съответно събитията - монетата застъпва първите, вторите ивици. Да се определи вероятността на събитията: А, В, АВ, $A \cup B$, $A|B$.

Задача 3 Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан. Всеки един от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент на даден ден (24часа). Каква е вероятността параходите да не се изчакват, ако за разтоварването на първия са необходими 6ч, а за втория 4ч.

Задача 4 Автобусите от линия А се движат на интервали от шест минути, а от линия В на четири минути, независимо от автобусите от линия А. Да се пресметне вероятността:
а) автобус от А да дойде преди автобус от Б;
б) пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути.

Задача 5 Дадена е отсечка с дължина К. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от К. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник?

Задача 6 Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от К да може да се построи триъгълник?

Задача 7 Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснат съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

Задача 8 Каква е вероятността сумата на две случайно избрани положителни числа, всяко от които е по-малко от 1, да бъде по-малка от 1, а произведението им по-малко от 2/9.

Задача 9 По случаен начин и независимо едно от друго се избират две числа a и b в интервала $(0,1]$. Каква е вероятността на събитията:

а) $ab \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$?

б) $a + b \leq 1$ и $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$?

в) $ab \geq \frac{2}{5}$ и $a^2 + b^2 \leq 1$?

Задача 10 Върху окръжност по случаен начин са избрани 3 точки. Да се определи вероятността, тригълникът с върхове в избраните точки да бъде остроъгълен.

Задача 11 По случаен начин три точки попадат върху три различни страни на квадрат. Каква е вероятността центърът на квадрата, да се съдържа във вътрешността на триъгълникът с върхове в избраните точки?

6.3 Решения на задачите от упражнение 6

Задача 1 Нека B е събитието - при случаен избор на точка A върху фиксиран диаметър PQ на кръга (с център O), хордата перпендикулярна на диаметъра (да я означим с MN) да има дължина по-малка от R. Тогава $\angle MON < \frac{\pi}{3} \iff |AO| > \frac{\sqrt{3}R}{2}$. Следователно $P(B) = \frac{2(R-\frac{\sqrt{3}R}{2})}{2R} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 2 Нека фиксираме ортогонална координатна система в равнината така, че абсцисата да е успоредна на ивиците и да съвпада с единия край на ивица с дебелина 2см, а другият край на същата ивица да минава през точката с координати (0,2). Нека Ω_N е квадрат с център в началото (0,0) и страни успоредни на координатните оси, с дължини $10N$.Тогава $\Omega = \mathbb{R}^2$ е евклидовата равнина, адитивната мярка е площ и нека A и B са съответно събитията - при хвърляне на монета с диаметър 2см, тя да застъпи ивица с дебелина 1, съответно ивица с дебелина 2. Нека A_N и B_N са съответните събития, но ограничени върху квадрата Ω_N. Нека a_N, b_N са съответно сумата от лицата на тънките ивици, дебелите ивици в квадрата Ω_N. Тогава $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \lim_{N\to\infty} P(\overline{A_N}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{b_N}{\mu(\Omega_N)} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{4N\times 10N}{100N^2} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Аналогично $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \lim_{N\to\infty} P(\overline{B_N}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{a_N}{\mu(\Omega_N)} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, $P(AB) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}-1 = \frac{2}{5}$, $P(A\cup B) = 1$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$.

Задача 3 Нека A е събитието - параходите не се изчакват. Нека x и y са съответно часът в който пристига първия, втория параход на фиксиран ден. Тогава

$$P(A) = P(\{x-y \geq 4\} \cup \{y-x \geq 6\} | \{0 \leq x \leq 24\} \cap \{0 \leq y \leq 24\}) = \frac{\frac{20\times 20}{2} + \frac{18\times 18}{2}}{24^2} = \frac{181}{288}.$$

Задача 4 Нека C и D са съответно събитията - автобус от линия А идва преди автобус от линия В, пътник идващ в случаен момент на спирката, чака не повече от 2 минути до идването на автобус от линия А или линия В. Нека x, y са съответно времето в минути от последното идване на автобус от линия А, съответно линия В. Тогава $0 \leq x < 6$, $0 \leq y < 4$ и $P(C) = P(\{6-x < 4-y\} |\ \{0 \leq x < 6\} \cap \{0 \leq y < 4\}\}) = P(\{x-y > 2\} |\ \{0 \leq x < 6\} \cap \{0 \leq y < 4\}\}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\{x < 4\} \cap \{y < 2\} |\ \{0 \leq x < 6\} \cap \{0 \leq y < 4\}\}) = 1 - \frac{8}{24} = \frac{2}{3}$.

Задача 5 Нека x, y са съответно дължините на другите 2 отсечки. Търсената вероятност е $P = P(\{x+y > K\} |\ \{0 < x, y < K\}) = \frac{\mu(\{x+y>K\}\cap\{0<x,y<K\})}{\mu(\{0<x,y<K\})} = \frac{\frac{K^2}{2}}{K^2} = \frac{1}{2}$.

Задача 6 Нека $0 < x, y, z < K$ са дължините на 3-те случайно избрани отсечки. Търсената вероятност е $P(\{x+y > z\} \cap \{y+z > x\} \cap \{z+x > y\} |\ \{0 < x, y, z < K\}) = \frac{K^3 - 3\times\frac{K^3}{6}}{K^3} = \frac{1}{2}$.

Второ решение: Нека A, H_k, $k = 1, 2, 3$ са съответно събитията: от трите отсечки може да се построи тригълник; максималната по дължина от трите отсечки е x за $k = 1$, y за $k = 2$, z за $k = 3$. Тогава събитията H_k образуват пълна група, $P(H_k) = \frac{1}{3}$ и съгласно предходната задача $P(A|H_k) = \frac{1}{2}$. От теорема 4.2 получаваме $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(A|H_k)P(H_k) = \frac{1}{2}$.

Задача 7 Нека x и y са съответно началните позиции (дължината от началото до съответната позиция в метри) от които започва записът на съобщенията върху двете страни на лентата. Понеже лентата е дълга 100м, а записите са по 20м, то $0 \leq x,\ y \leq 80$. Условието е еквивалентно на $[y,\ y+20] \cup [x,\ x+20]$ е интервал, съдържащ интервала $[25, 50]$. Еквивалентно при $x \geq y$ получаваме $y \leq 25,\ x \leq y+20,\ 50 \leq x+20$, откъдето търсената вероятност е $P = 2P(\{y \leq 25\} \cap \{x-y \leq 20\} \cap \{30 \leq x\}|\ \{0 \leq x,\ y \leq 80\}) = 2 \times \frac{\frac{15^2}{2}}{80^2} = \frac{9}{256}$.

Задача 8 Нека $x,\ y$ са случайно избраните числа от $[0,1]$. Тогава

$$P = P(\{x+y<1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\}|\ \{0 < x,\ y < 1\}) = \frac{\mu(\{x+y<1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\} \cap \{0 < x,\ y < 1\})}{\mu(\{0 < x,\ y < 1\})}$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (1 - x - \frac{2}{9x})dx = \frac{1}{2} - (x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\ln x}{9})|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2\ln 2}{9} \approx 0.487$$

Задача 9 а) Нека Oxy е фиксирана координатна система в $\mathbb{R}^2$ и $H_1:\ xy = \frac{1}{4},\quad H_2:\ xy = \frac{1}{2}$, $g:\ y = 1$. Нека $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid \frac{1}{4} \leq xy \leq \frac{1}{2}\},\quad K = \{(x,y) \in [0,1]^2\}$. Тогава $H_1 \cap g$ е точка с координати $(\frac{1}{4}, 1)$, аналогично $H_2 \cap g$ е точка с координати $(\frac{1}{2}, 1)$. За търсената вероятност P получаваме:

$$P = \frac{\mu(D)}{\mu(K)} = \mu(D) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4x}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x}\right) dx$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\ln x\right)|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\ln x\right)|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4}.$$

Задача 10 Нека Oxy е фиксирана координатна система в равнината, k е единичната окръжност и $\triangle ABC$ е случайният триъгълник вписан в k, като без ограничение $A(1,0)$. Нека $\angle AOB = \phi,\ \angle AOC = \psi$, като без ограничение $\phi \in [0, \pi]$. За пространството от елементарни изходи Ω и за подпространството $S \subset \Omega$, определящо остроъгълен $\triangle ABC$ намираме

$$\Omega = \{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\} = [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

$$S = \{(\phi, \psi) \in \Omega \mid \pi \leq \psi \leq \pi + \phi\}.$$

Търсената вероятност е $P = \frac{\mu(S)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi^2/2}{2\pi^2} = \frac{1}{4}$.

7 Дискретни случайни величини и Биномно разпределение

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$, като $\mathfrak{A}$ е σ-алгебра от събития за $\mathcal{E}$.

Дефиниция 7.1. *Изображението $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяващо условията:*
1) образът на X е изброимо подмножество на $\mathbb{R}$, което ще означим с $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$,
2) за всяко $x \in X(\Omega)$, множеството $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ е елемент на $\mathfrak{A}$,
се нарича дискретна случайна величина във $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Нека $p_i = P(X^{-1}(x_i)) = P(X = x_i)$, то $1 = P(\Omega) = P(\cup_i X^{-1}(x_i)) = \sum_i P(X^{-1}(x_i)) = \sum_i p_i$. Задаването на дискретна случайна величина $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ е еквивалентно на задаване на изброима пълна група от събития върху Ω: това са събитията

$$H_i = X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots$$

Дефиниция 7.2. *Нека X е дискретна случайната величина с множество от стойности $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и нека $p_i = P(X = x_i)$. Ако редът $\sum_i p_i x_i$ е абсолютно сходящ, то сумата му се нарича средна стойност на X (или математическо очакване на X) и се означава с*

$$EX = \sum_i p_i x_i.$$

Забележка 7.3. *Условието за абсолютна сходимост на редът $\sum_i p_i x_i$ дефиниращ математическото очакване на случайна величина X е напълно естествено. Наистина, ако един ред е условно сходящ (тоест сходящ, но не абсолютно), то по теоремата на Риман следва, че съществува пренареждане на членовете на разглеждания ред така, че всяко отнапред фиксирано реално число да бъде граница на новополучения ред. Ако редът е абсолютно сходящ, то разместването на членовете не променя сумата. Следователно условието за абсолютна сходимост е необходимо и достатъчно, за да осигури независимост на числовата характеристика $EX = \sum_i p_i x_i$ от начина, по който сме подредили събираемите.*

Нека $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ е случайна величина. Функцията $X(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto P(X^{-1}(x))$ се нарича теглова функция на X. Задаването на дискретна случайна величина е еквивалентно на задаване на теглова функция: тоест неотрицателна функция с дискретна дефиниционна област(дискретно подмножество на $\mathbb{R}$) и сума на функционалните стойности равна на 1.
Нека n е стествено число, $p \in [0, 1]$.

Дефиниция 7.4. *Ще казваме, че случайната величина X е биномно разпределена с параметри n и p, което ще записваме чрез $X \in Bi(n, p)$, ако $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ и тегловата функция на X има вида $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ за $k = 0, 1, \ldots, n$.*

7.1 Декартово произведение на вероятностни пространства

Дефиниция 7.5. *Схема на Бернули с параметри n и p се нарича последователност от n независими опита, във всеки от които настъпва събитието A или $\overline{A}$, съответно с вероятност p и $q = 1 - p$. Събитията A и $\overline{A}$ се интепретират като успех и неуспех при съответен опит.*

Една възможна интерпретация на биномно разпределена случайна величина с параметри n и p, дава схемата на Бернулии със същите параметри, като вероятността на събитието - да настъпят точно k успеха от n опита - е $P(X = k)$. Функцията $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto (pt + q)^n$ се нарича пораждаща на $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$ поради равенството между $P(X = k)$ и коефициента пред t^k в развитието на бинома $(pt + q)^n$, което мотивира названието "биномно разпределение"за случайна величина X с теглова функция $k \longmapsto \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

7.2 Условия на задачите от упражнение 7

Задача 1 Студент чака своя приятелка, която закъснява. За да разнообрази чакането той решава да се поразходи, като хвърля монета и ако се падне герб прави 10 крачки в една посока, а при лице прави 10 крачки в противоположна посока. На новото място повтаря тази операция и т.н. Каква е вероятността след 100 извършени крачки студентът да се намира:
а) на мястото от където е тръгнал;
б) на разстояние 20 крачки;
в) на разстояние 50 крачки от мястото на срещата.

Задача 2 Игра се провежда при следните правила. Играчът залага 5лв и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100лв, ако хвърли една шестица печели 5лв. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 3 Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от точките е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 4 Първият играч хвърля 3 монети, а вторият 2. Играта печели този, който хвърли повече гербове и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели вторият. Каква е вероятността първият играч да спечели? Ако е спечелил първия каква е вероятността втория да е хвърлил точно един герб? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 5 Извършва се серия от бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки опит равна на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k + r)$-тия опит.

Задача 6 Пушач носи в джоба си две кутии кибрит. Всеки път когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно k клечки, ако първоначално във всяка кутия е имало n клечки.

Задача 7 Подводница стреля n пъти последователно по кораб. Всяко торпедо улучва с вероятност p. Корабът има m отсека, ако торпедо улучи кораба, вероятността да наводни кой да е от тях е една и съща. Каква е вероятността корабът да бъде потопен, ако за това е необходимо да се наводнят поне два отсека?

Задача 8 Нека преди опита съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0: \ p_0 = 1/2$ и $H_1: \ p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха.

Задача 9 Нека $\mathcal{E}$ е експеримент на който са съпоставени вероятностните пространства

$$(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mathbb{P}_2), \ldots, (\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathbb{P}_n),$$

където $|\Omega_k| < \infty$, $\mathfrak{A}_k = \mathcal{P}(\Omega_k)$. Да се докаже, че съществува вероятностно пространство, което се явява декартово произведение на дадените вероятностни пространства.

7.3 Решения на задачите от упражнение 7

Задача 1 Имаме бернулиева схема с 10 независими опита, при всеки от които се хвърлят монета с вероятност за падане на герб p. Нека $X \in \mathrm{Bi}(10, p)$. Тук интерпретираме падането на герб като успех. Нека x и y са съответно брой успехи и неуспехи. Тогава $x + y = 10$ и за търсената вероятност P имаме:
а) $x = y = 5$, следователно $P = P(X = 5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5$
б) $|x - y| = 2$, следователно $x = 6, \ y = 4$ или $x = 4, \ y = 6$. Нека $A, \ B$ са съответно събитията - при 10 бернулиеви опита получаваме 6 успеха; 4 успеха. Тогава A и B са непресичащи се събития, откъдето $P = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 + \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^4 [p^2 + (1-p)^2]$.

Забележка 7.6. *Еквивалентно, за търсената вероятност P намираме:*

$$P = P(\{X = 4\} \cup \{X = 6\}) = P(\{X = 4\}) + P(\{X = 6\}) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 + \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$$

$$= \binom{10}{4} p^4 (1-p)^4 [p^2 + (1-p)^2].$$

в) $|x - y| = 5$ е невъзможно, следователно $P = 0$.

Задача 2 Нека $A_i, \ i = 0, 1, 2$ са събиията - при хвърляне на 2 зара се падат точно i на брой шестици. Нека X е случайна величина с теглова функция: $x_i \longmapsto p_i, \ i = 0, 1, 2$ където $p_0 = P(A_0) = \frac{25}{36}, \ p_1 = P(A_1) = \frac{10}{36}, \ p_2 = P(A_2) = \frac{1}{36}$; $x_0 = -5, \ x_1 = 0, \ x_2 = 95$. Очакваната чиста печалба на играча е $\mathrm{E}X = \sum_{i=0}^{2} p_i x_i = -5 \times \frac{25}{36} + 0 \times \frac{10}{36} + 95 \times \frac{1}{36} = -\frac{5}{6}$ и следователно играта не е справедлива.

Забележка 7.7. *Събитията $A_i, \ i = 0, 1, 2$ образуват пълна група, следователно можем да въведем (за краткост, вместо разглеждане на пълна група от събития) случайна величина Y, дефинирана като брой шестици при хвърляне на 2 зара. Тогава $p_0 = P(Y = 0) = \frac{25}{36}, \ p_1 = P(Y = 1) = \frac{10}{36}, \ p_2 = P(Y = 2) = \frac{1}{36}$.*

Задача 3 Имаме бернулиева схема с 5 независими опита, при всеки от които се хвърлят 2 зара. Нека X е случайната величина - брой хвърляния при които сумата от падналите се числа е равна на 6. Тогава X е биномно разпределена случайна величина: $X \in \mathrm{Bi}(5, \frac{5}{36})$. Търсим $P(X=2) = \binom{5}{2}p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3,\ p = \frac{5}{36}$. Търсеният среден брой е $\mathrm{E}X = 5 \times \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$, понеже по-общо за $X \in \mathrm{Bi}(n,p)$ имаме $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$.

Задача 4 Нека $X,\ Y$ са случайни величини, дефинирани чрез - брой гербове при хвърляне на 3 монети; при хвърляне на 2 монети. Без ограничение, нека вероятността за падане на герб при хвърляне всяка от монетите е $p = \frac{1}{2}$. Тогава $X \in \mathrm{Bi}(3, \frac{1}{2}),\ Y \in \mathrm{Bi}(2, \frac{1}{2})$. Събитието $A = \{X > Y\}$ се представя като обединение на 4 непресичащи се събития: $A = \{X = 3\} \cup \{X = 2,\ Y = 1\} \cup \{X = 2,\ Y = 0\} \cup \{X = 1,\ Y = 0\}$, като събитията $\{X = i\},\ \{Y = j\}$ са независими. Вероятността за победа на първия играч е $P(A) = P(X > Y) = P(X = 3) + P(X = 2,\ Y = 1) + P(X = 2,\ Y = 0) + P(X = 1,\ Y = 0) = P(X = 3) + P(X = 2)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.
Ако е спечелил първия, вероятността втория да е има точно един герб е $P = P(\{Y = 1\}|\{X > Y\}) = \frac{P(\{Y=1\}\cap\{X>Y\})}{P(\{X>Y\})} = \frac{P(X=3,Y=1)+P(X=2,Y=1)}{P(X>Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.
Означаваме с $Z_i,\ i = 1, 2$ печалбата на $i-$тия играч, следователно средната печалба на играчите е $\mathrm{E}Z_1 = 2 \times P(A) + (-3) \times P(\overline{A}) = -\frac{1}{2};\ \ \mathrm{E}Z_2 = \frac{1}{2}$.

Задача 5 Нека A е събитието - r-тия успех настъпва на $(k + r)$-тия бернулиев опит. Нека $X \in \mathrm{Bi}(k + r - 1, p),\ Y \in \mathrm{Bi}(1, p)$. Понеже $A = \{X = r - 1\} \cap \{Y = 1\}$ е сечение на независими събития, то

$$P(A) = P(X = r-1, Y = 1) = P(X = r-1)P(Y = 1) = \binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k.$$

Задача 6 Нека $A_i,\ i = 1, 2$ са съответно събитията - при случаен избор на клечки от кутия 1 и кутия 2, за $(n+1)-$път отваряме кутия i на $(2n-k+1)-$вия ход. Съгласно предходната задача $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2^{2n-k+1}}\binom{2n-k}{n}$. Понеже A_1 и A_2 са несъвместими, то търсената вероятност е

$$P = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 2 \times \frac{1}{2^{2n-k+1}}\binom{2n-k}{n} = \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n}.$$

Задача 7 Ще считаме, че всеки отсек може да бъде наводнен с вероятност $\frac{1}{m}$, и при повторно уцелване не е задължително да се наводни нов отсек. Нека $A,\ B_i,\ C_i\ i = 0, 1, \ldots, n$ са съответно събитията - корабът е потопен; корабът е уцелен i пъти; корабът е уцелен i пъти и е наводнен точно един отсек (при $i \geq 1$). Нека $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$, тогава $B_i = \{X = i\}$. Пресмятаме $P(C_i) = P(C_i \cap B_i) = P(C_i|B_i)P(B_i) = \frac{1}{m^{i-1}} \times \binom{n}{i}p^i q^{n-i}$, при $i \geq 1;\ P(C_0 \cap B_0) = q^n$. Получаваме

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\cup_{i=0}^{n} C_i) = 1 - \sum_{i=0}^{n} P(C_i) = 1 - \left(q^n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m^{i-1}} \times \binom{n}{i}p^i q^{n-i}\right)$$

$$= 1 - \left(q^n + m\sum_{i=1}^{n} \times \binom{n}{i}\left(\frac{p}{m}\right)^i q^{n-i}\right) = 1 - \left(-(m-1)q^n + m\sum_{i=0}^{n} \times \binom{n}{i}\left(\frac{p}{m}\right)^i q^{n-i}\right)$$

$$= 1 - \left(-(m-1)q^n + m\left(\frac{p}{m}+q\right)^n\right) = 1 + (m-1)q^n - m\left(\frac{p}{m}+q\right)^n.$$

Задача 8 Нека A е събитието - от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех в единичен опит p) да имаме 120 успеха. По условие $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$. Трябва да определим кое от числата $P(H_0|A)$ и $P(H_1|A)$ е по-голямо. Нека $X_i \in \mathrm{Bi}(200, p_i),\ i = 0, 1;\ p_0 = \frac{1}{2},\ p_1 = \frac{2}{3}$. Тогава $P(H_0|A) = \frac{P(H_0\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A|H_0)P(H_0)+P(A|H_1)P(H_1)} = \frac{P(A|H_0)}{P(A|H_0)+P(A|H_1)} = \frac{P(X_0=120)}{P(A|H_0)+P(A|H_1)} = \frac{1}{P(A|H_0)+P(A|H_1)} \times \binom{200}{120}2^{-200}$.
$P(H_1|A) = \frac{1}{P(A|H_0)+P(A|H_1)} \times \binom{200}{120}\frac{2^{120}}{3^{200}}$. Следователно $P(H_1|A) = P(H_0|A)\frac{2^{320}}{3^{200}}$
$= P(H_0|A)\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{40} > P(H_0|A)$.

8 Дискретни случайни величини и неравенство на Чебишев

Нека $n,\ M$ и N са естествени числа, $\max(n, M) \le N$, и $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностното пространство на експеримент $\mathcal{E}$.

Дефиниция 8.1. *Ще казваме, че случайната величина X е хипергеометрично разпределена с параметри n, M и N, което ще записваме чрез $X \in HG(n, M, N)$, ако $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, \min(n, M)\}$ и тегловата функция на X има вида $k \longmapsto \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, за $k = 0, 1, \ldots, \min(n, M)$.*

Една възможна интерпретация на хипергеометрично разпределена случайна величина с параметри n, M и N, дава следната схема: дадени са N обекта, като точно M от тях имат фиксирано свойство P. Избираме произволни n обекта измежду дадените N. Вероятността на събитието - точно k измежду избраните n да имат свойство P - се дава чрез функцията $k \longmapsto \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Дефиниция 8.2. *Ще казваме, че случайната величина X е геометрично разпределена с параметър $p \in (0, 1)$, което ще записваме чрез $X \in G(p)$, ако $X(\Omega) = \{1, 2\ldots,\}$ или $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots,\}$ и тегловата функция на X има съответно вида $k \longmapsto (1-p)^{k-1}p$ и $k \longmapsto (1-p)^k p$, $k = 0, 1, \ldots$*

Интерпретация на геометрично разпределена случайна величина с параметър p, дава схемата на Бернули със същия параметър p, като вероятността на събитието - първия успех настъпва на $k-$тия опит - се задава чрез $k \longmapsto (1-p)^{k-1}p$. Аналогично, вероятността на събитието - k неуспеха (брой неуспехи) до първи успех - се дава чрез $k \longmapsto (1-p)^k p$.

Дефиниция 8.3. *Ще казваме, че случайната величина X е Поасоново разпределена с параметър $\lambda \in \mathbb{R}^+$, което ще записваме чрез $X \in Po(\lambda)$, ако $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots,\}$ и тегловата функция на X има вида $k \longmapsto \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$*

Интерпретация на Поасоново разпределена случайна величина с параметър λ ще дадем, когато разгледаме непрекъснати случайни величини, конкретно - експоненциално разпределена случайна величина с параметър λ, и стохастични процеси - поасонов процес. Поасоново разпределение $\mathrm{Po}(\lambda)$ се използва в случаите, когато за дадено събитие A е известено

- средният брой настъпванията на A, за всеки единичен времеви интервал е константа$(= \lambda)$
- всяко настъпване на A е независимо от предходните, тоест предисторията на процеса не влияе на текущото му състояние

В този случай, вероятността събитието A да настъпи точно k пъти за единица време е $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримента $\mathcal{E}$ и $X : \Omega \to \mathbb{R},\ \ Y : \Omega \to \mathbb{R}$ са дискретни случайни величини.

Теорема 8.4. *Сума на краен брой дискретни случайни величини върху Ω е дискретна случайна величина. Произведените на краен брой дискретни случайни величини е дискретна случайна величина. Произведение на дискретна случайна величина с реално число също е дискретна случайна величина. По-общо, ако $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е "произволна"(Борелова) функция, то $g \circ X$ е дискретна случайна величина.*

Доказателство: Нека $Z : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \longmapsto X(w) + Y(w)$. Тогава $\mathfrak{card} Z(\Omega) = \mathfrak{card}[(X+Y)(\Omega)] \leq \mathfrak{card}[X(\Omega) \times Y(\Omega)] = \mathfrak{card} X(\Omega) \mathfrak{card} Y(\Omega) \leq \mathfrak{card}\mathbb{Z}^2 = \mathfrak{card}\mathbb{Z}$. Следователно образът на Z е изброимо подмножество на $\mathbb{R}$. Ако $z \in Z(\Omega)$, то $Z^{-1}(z) = \{\omega \in \Omega |\ X(\omega) + Y(\omega) = z\} = \cup_{x \in (\Omega)} \{\omega \in \Omega |\ X(\omega) = x,\ Y(\omega) = z - x\} = \cup_{x \in (\Omega)} \left(\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) = x\} \cap \{\omega \in \Omega |\ Y(\omega) = z - x\}\right) =$
$\cup_{x \in (\Omega)} \left(X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(z-x)\right)$. Понеже X и Y са случайни величини, то $X^{-1}(x) \in \mathfrak{A}$ и $Y^{-1}(z - x) \in \mathfrak{A}$ и следователно $X^{-1}(x) \cap Y^{-1}(z-x) \in \mathfrak{A}$. Понеже $Z^{-1}(z)$ е изброимо обединение на елементи на $\mathfrak{A}$, то $Z^{-1}(z) \in \mathfrak{A}$. Доказахме, че $Z = X + Y$ е дискретна случайна величина. С индукция по броя на случайните величини се завършва доказателството. Аналогично е доказателството за произведение. $\square$

Директно следствие от теорема 8.4 е, че множеството от дискретните случайни величини върху Ω снабдено с операциите сума и произведение е алгебра , в частност - линейно пространство над $\mathbb{R}$. Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е дискретна случайна величина със средно EX. Изображението $I : \Omega \to \{1\},\ \omega \longmapsto 1$ е дискретна случайна величина, тогава rI също е дискретна случайна величина за всяко $r \in \mathbb{R}$. Така $X - (EX)I$ е дискретна случайна величина, която ще записваме чрез $X - EX$. Ако съществува числото $E((X - EX)^2)$, то се нарича вариация на X и се означава с DX. Понеже математическото очакване E е линеен функционал (теорема 8.5) върху линейното пространство на случайните величини, то $DX = E((X - EX)^2) = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$.
Да означим със $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ алгебрата на дискретните случайни величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Теорема 8.5. *Средната стойност E е линеен функционал върху $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, тоест $E(X+Y) = EX + EY$ и $E(rX) = rEX$ за произволни $X, Y \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и $r \in \mathbb{R}$. Означение: $E \in \mathsf{Hom}(\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P),\ \mathbb{R})$.*

Дефиниция 8.6. *Дискретните случайни величини $X_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ са наричат независими, ако за всяко $l = 2, \ldots, n$ и всеки $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ е в сила $P(X_{k_1} = x_1, \ldots, X_{k_l} = x_l) = P(X_{k_1} = x_1) \times \cdots \times P(X_{k_l} = x_l)$, при всеки $k_1, \ldots, k_l$ такива, че $1 \leq k_1 < \ldots < k_l \leq n$.*

Теорема 8.7. *Нека $X_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ са независими дискретни случайни величини със средни стойности съответно равни на EX_k. Ако съществува средното $E(X_1 X_2 \cdots X_n)$, то $E(X_1 X_2 \cdots X_n) = EX_1 EX_2 \cdots EX_n$.*

Теорема 8.8. *Нека $X_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ са независими дискретни случайни величини с вариации съответно равни на DX_k. Ако съществува вариацията $D(X_1 + \cdots + X_n)$, то $D(X_1 + \cdots + X_n) = DX_1 + \cdots + DX_n$.*

Доказателство: Индукция: при $n = 2$ получаваме $D(X_1 + X_2) = E((X_1 + X_2)^2) - (E(X_1 + X_2))^2 = EX_1^2 + EX_2^2 + 2EX_1X_2 - (EX_1)^2 - (EX_2)^2 - 2EX_1EX_2 = DX_1 + DX_2 + 2EX_1X_2 - 2EX_1EX_2 = DX_1 + DX_2$, поради равенството $EX_1X_2 = EX_1EX_2$, което следва от теорема 8.7. Нека предположим, че твърдението е вярно за $n-1$ и да разгледаме случая на n независими величини. Имаме $D(X_1 + \cdots + X_{n-1} + X_n) = D((X_1 + \cdots + X_{n-1}) + X_n) = D(X_1 + \cdots + X_{n-1}) + D(X_n) = DX_1 + \cdots + DX_{n-1} + DX_n$. □

Теорема 8.9. *Нека X е дискретна случайна величина и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функция. Ако съществува средното $E(g \circ X)$, то е в сила равенството $E(g \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$.*

Теорема 8.10. *Нека X е дискретна случайна величина със средна стойност и вариация съответно равни на EX и DX. Тогава за всяко $\alpha > 0$ е в сила $P(|X - EX| \geq \alpha) \leq \frac{DX}{\alpha^2}$.*

Доказателство:

$$DX = E((X - EX)^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - EX)^2 P(X = x) \geq \sum_{|x - EX| \geq \alpha} (x - EX)^2 P(X = x)$$

$$\geq \sum_{|x - EX| \geq \alpha} \alpha^2 P(X = x) = \alpha^2 \sum_{|x - EX| \geq \alpha} P(X = x) = \alpha^2 P(\cup_{|x - EX| \geq \alpha} \{X = x\})$$

$$= \alpha^2 P(|X - EX| \geq \alpha) \Longleftrightarrow P(|X - EX| \geq \alpha) \leq \frac{DX}{\alpha^2}.$$

□

8.1 Условия на задачите от упражнение 8

Задача 1 Хвърлят се два зара. Нека случайната величина X е сумата от падналите се точки. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на X, ако заровете са:
а) правилни;
б) неправилни с $P(1) = P(6) = 1/4,\ P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/8$.
Ще бъде ли необичайно, ако при хвърлянето на 1000 зара сумата е била повече от 3700?

Задача 2 От урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно, една по една топки докато се появи бяла. Да се намери разпределението на случайната величина - "брой на изтеглените черни топки" и да се пресметне математическото очакване и дисперсията и, при извадка:
а) без връщане;
б) с връщане.
Опитът се повтаря 1000 пъти. Да се оцени вероятността да са извадени повече от 900 черни топки.

Задача 3 Вероятността за улучване на цел при един изстрел е 0,001. За поразяване на са необходими поне две попадения. Каква е вероятността за поразяване на целта, ако са направени

5000 изстрела?

Задача 4 В кутия има 7 лампи от които 3 са дефектни. По случаен начин се избират за проверка 4 лампи. Да се намери разпределението на случайната величина "брой на изпробваните качествени лампи" и да се пресметне нейното очакване.

Задача 5 В Патагония на месец се регистрират средно две слаби земетресения. Каква е вероятността за три месеца да има по-малко от четири слаби земетресения?

Задача 6 80% от принтерите за домашна употреба работят добре при инсталирането им, а останалите имат нужда от допълнителни настройки. Фирма продава 10 принтера за една седмица. Намерете вероятността поне 9 от тях да работят без нужда от допълнителни настройки. Каква е съответната вероятност това да се случи за пет поредни месеца? Каква е вероятността, първата седмица за която това не се случва да е точно 21-та?

Задача 7 Двама умници стрелят по мишена. Първият улучва с вероятност 0.2, а вторият с вероятност 0.3. Умниците стрелят едновременно, ако никой не улучи - стрелят пак. Да се пресметне вероятността първия да улучи, а втория не. Какъв е средния брой изстрели необходими за уцелване на мишената?

Задача 8 A и B играят последователно партии, A печели една партия с вероятност 2/3, а B с вероятност 1/3. Равни партии не са възможни. Играта продължава докато някой спечели две последователни партии. Нека X е случайната величина "брой на изиграните парти". Да се определи разпределението и математическото очакване на X.

8.2 Решения на задачите от упражнение 8

Задача 1 Нека $X_i,\ i = 1, 2$ са случайните величини - брой точки паднали се на $i-$тия зар.

a) Тегловата функция на $X = X_1 + X_2$ е $P(X = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{за} \quad 2 \le k \le 7; \\ \frac{13-k}{36} & \text{за} \quad 8 \le k \le 12. \end{cases}$

$EX = \sum_{k=2}^{12} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{7} \frac{k(k-1)}{36} + \sum_{k=8}^{13} \frac{k(13-k)}{36} = 7$. Имаме $EX_1 = EX_2 = \frac{\sum_{k=1}^{6} k}{6} = 3.5$ От $X = X_1 + X_2$ и по теорема 8.5 получаваме $EX = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 7$. Понеже X_1 и X_2 са независими и $DX_1 = DX_2 = \frac{\sum_{k=1}^{6} k^2}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$, то $DX = D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2 = 2DX_1 = \frac{35}{6}$.

b) Означаваме $p_k = P(X = k),\ k = 2, 3, \dots, 12$. Тогава за разпределението на X получаваме:

$$p_k = p_{14-k}, \quad p_2 = p_3 = \frac{1}{16},\ p_4 = \frac{5}{64},\ p_5 = \frac{3}{32},\ p_6 = \frac{7}{64},\ p_7 = \frac{3}{16}.$$

$EX_1 = EX_2 = \frac{1+6}{4} + \frac{2+3+4+5}{8} = \frac{7}{2}$ и $DX_1 = DX_2 = \frac{1^2+6^2}{4} + \frac{2^2+3^2+4^2+5^2}{8} - 3.5^2 = \frac{15}{4}$, следователно $EX = 7$ и $DX = 7.5$

Нека $X,\ X_i,\ i = 1, 2, \dots 1000$ са случайните величини - сума на падналите се точки при 1 хвърляне на 1000 зара; брой точки паднали се на $i-$тия зар . Тогава $X = \sum_{k=1}^{1000} X_k$ и $EX_1 = \dots = EX_{1000} = 3.5$ откъдето $EX = E\left(\sum_{k=1}^{1000} X_k\right) = \sum_{k=1}^{1000} EX_k = 1000EX_1 = 3500$. Понеже

$X_i,\ i = 1, 2, \dots 1000$ са независими и $DX_1 = \dots = DX_{1000} = \frac{35}{12}$ за a) и $DX_1 = \dots = DX_{1000} = \frac{15}{4}$ за b), то $DX = D\left(\sum_{k=1}^{1000} X_k\right) = \sum_{k=1}^{1000} DX_k = 1000 DX_1 = \begin{cases} 2916.6 & \text{за a);} \\ 3750 & \text{за b).} \end{cases}$

Прилагаме неравенството на Чебишев $P(|X - EX| \geq k) \leq \frac{DX}{k^2}$ за $k = 201:\ P(X > 3700) \leq P(|X - EX| \geq 201) \leq \frac{DX}{201^2} = \begin{cases} 0.07 & \text{за a);} \\ 0.09 & \text{за b),} \end{cases}$

което означава, че е събитито $\{X > 3700\}$ е малко вероятно.

Задача 2 Нека X е случайната величина - брой изтеглени черни топки.

a) Тегловата функция $k \longmapsto p_k$ на X е : $p_0 = \frac{5}{8},\ p_1 = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7},\ p_2 = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6},\ p_3 = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$. Тогава $EX = \sum_{k=0}^{3} kp_k = 1 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + 2 \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} + 3 \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ и $DX = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \sum_{k=0}^{3} k^2 p_k - \frac{1}{4} = \frac{15}{28}$.

b) В случая $X \in \mathrm{Ge}(\frac{5}{8})$ с теглова функция $k \longmapsto (1 - \frac{5}{8})^k \frac{5}{8}$. По-общо, ако $X \in \mathrm{Ge}(p)$, то $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)|_{x=q} = pq \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)|_{x=q} = pq\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)|_{x=q} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}$ и $\mathrm{D}X = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k p - \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = pq^2\left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right) - \frac{q^2}{p^2} = pq^2\left(\frac{d^2}{dx^2}(\sum_{k=1}^{\infty} x^k)|_{x=q} + \frac{1}{q}\frac{d}{dx}(\sum_{k=1}^{\infty} x^k)|_{x=q}\right) - \frac{q^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$. Следователно $\mathrm{E}X = \frac{q}{p} = \frac{3}{5}$, $\mathrm{D}X = \frac{1-p}{p^2} = \frac{24}{25}$.

Нека $X,\ X_i,\ i = 1, 2, \dots 1000$ са случайните величини - брой изтеглени черни топки при 1000 независими опита; брой изтеглени черни топки при $i-$тия опит. Тогава $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$

$$\mathrm{E}X = 1000\mathrm{E}X_1 = \begin{cases} 500 & \text{за a)} \\ 600 & \text{за b)} \end{cases}$$

$$\mathrm{D}X = 1000\mathrm{D}X_1 = \begin{cases} 535.7 & \text{за a)} \\ 960 & \text{за b)} \end{cases}$$

Прилагаме неравенството на Чебишев

$P(X > 900) \leq P(|X - EX| \geq 400) \leq \frac{DX}{400^2} = \frac{535.7}{400^2} = 0.003$ за a),

$P(X > 900) \leq P(|X - EX| \geq 300) \leq \frac{DX}{300^2} = \frac{960}{300^2} = 0.01$ за b).

Задача 3 Нека $X \in \mathrm{Bi}(5000,\ \frac{1}{1000})$, то търсената вероятност е $P = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1 - \frac{1}{1000})^{5000} - \binom{5000}{1}\frac{1}{1000} \times (1 - \frac{1}{1000})^{4999} \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0.959$

Задача 4 Нека X е случайната величина - брой изпробвани качествени лампи. Тогава $X \in HG(n, M, N)$, където $n = M = 4,\ N = 7$, тоест X е с хипегеометрично разпределение и теглова функция $k \longmapsto p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0, 1, \dots, \min(n, M)$. Пресмятаме $\mathrm{E}X = ... = \frac{nM}{N}$ и в частност при $n = M = 4,\ N = 7$ имаме $\mathrm{E}X = \frac{16}{7}$.

Задача 5 Нека $X_i,\ i = 1, 2, 3$ са случайните величини - брой земетресения за $i-$тия месец. По условие $X_i \in \mathrm{Po}(2)$ са независими. Търсим вероятността $P(X_1 + X_2 + X_3 < 4)$. Ще докажем, че ако $Y_j \in Po(\lambda_j),\ j = 1, \dots, n$ са независими, то случайната величина $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ е поасоново разпределена с параметър $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$. При $n = 2$ имаме $P(Y_1 + Y_2 = k) = P(\cup_{j=0}^{k}\{Y_1 = j,\ Y_2 = k - j\}) = \sum_{j=0}^{k} P(\{Y_1 = j,\ Y_2 = k - j\}) = \sum_{j=0}^{k} P(\{Y_1 = j\} \cap \{Y_2 = k - j\}) =$

$\sum_{j=0}^{k} P(Y_1 = j)P(Y_2 = k-j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^j\lambda_2^{k-j}}{j!(k-j)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!} \times \lambda_1^j\lambda_2^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\lambda_1^j\lambda_2^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$ ... (е базата на индукцията)...

В частност $X = X_1 + X_2 + X_3 \in Po(6)$ и $P(X < 4) = \sum_{k=0}^{3}\frac{e^{-6}6^k}{k!} = 61e^{-6} \approx 0.1512$

Задача 6 Нека $X \in \mathrm{Bi}(10, \frac{4}{5})$ и $A_i,\ i = 1, \ldots, 20$ са събитията - поне 9 от 10-те продадени принтера за $i-$тата седмица работят. Тогава $P(A_1) = P(X \geq 9) = P(\{X = 9\} \cup \{X = 10\}) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^9 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0.3758$
Ще приемем, че разглежданите 5 месеца се състоят от точно 20 седмици. Тогава търсената вероятност е $P(\cap_{i=1}^{20}A_i) = \prod_{i=1}^{20}P(A_i) = P(A_1)^{20} \approx 0.3758^{20}$.

Задача 7 Нека $A_k,\ k = 1, 2, \ldots$ са съответно събитията - първия успява (за първи път) на $k-$ти ход, а втория не успява във всичките k хода. Считаме че всички ходове преди k-тия са неуспешни. Нека $X \in \mathrm{Ge}(0.2),\ Y \in \mathrm{Ge}(0.3)$. Тогава $A_k = \{X = k-1,\ Y = k\} = \{X = k-1\} \cap \{Y = k\}$. Вероятността първия да успее, а втория не е $P(\cup_{k=1}^{\infty}A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}P(\{X = k-1\} \cap \{Y = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty}P(\{X = k-1\})P(\{Y = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty}(0.8)^{k-1} \times 0.2 \times (0.7)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(0.56)^{k-1} \times 0.14 = \frac{7}{22} \approx 0.318$
Вероятността за неуспех при един опит (това са 2 хода - един за първия и един за втория) на двамата играчи е $0.8 \times 0.7 = 0.56$ Нека $Z \in \mathrm{Ge}(0.44)$ с теглова функция $k \longmapsto (1-p)^{k-1}p$, тогава очаквания брой ходове е $\mathrm{E}2Z = 2\mathrm{E}Z = 2 \times \frac{1}{p} = 2 \times \frac{1}{0.44} = \frac{50}{11} \approx 4.54$

Задача 8 Нека $A_i,\ A(i),\ i = 1, 2, \ldots$ са събитията - $i-$тата партия е спечелена от първия играч (съответно $\overline{A_i}$ за победа на втория играч); играта е приключила след точно i партии. По условие $P(A_i) = \frac{2}{3},\ P(\overline{A_i}) = \frac{1}{3}$. Събитията $A_1,\ A_2, \ldots, A_n, \ldots$ са независими и

$$A(2k+1) = (A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\ldots A_{2k-1}\overline{A_{2k}})\overline{A_{2k+1}} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\ldots\overline{A_{2k-1}}A_{2k}A_{2k+1},\ k \geq 1$$

$$A(2k+2) = A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\ldots A_{2k-1}\overline{A_{2k}}A_{2k+1}A_{2k+2} \cup (\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\ldots A_{2k}\overline{A_{2k+1}})\overline{A_{2k+2}},\ k \geq 0.$$

Следователно $P(A(2k+1)) = (\frac{2}{9})^k,\ P(A(2k+2)) = \frac{5}{9}(\frac{2}{9})^k$ и тегловата функция $k \longmapsto p_k$ на X има вида $p_1 = 0,\ p_{2k+1} = (\frac{2}{9})^k\ k \geq 1,\ \ p_{2k+2} = \frac{5}{9}(\frac{2}{9})^k\ \ k \geq 0$. Пресмятаме $\mathrm{E}X = \sum_{i\geq 0} ip_i = \sum_{k\geq 1}(2k+1)(\frac{2}{9})^k + \frac{5}{9}\sum_{k\geq 0}(2k+2)(\frac{2}{9})^k = \frac{10}{9} + \frac{19}{9}\sum_{k\geq 1}(\frac{2}{9})^k + \frac{28}{9}\sum_{k\geq 1}k(\frac{2}{9})^k = \frac{20}{7} \approx 2.857$

9 Двумерни дискретни случайни величини

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностното пространство на експеримент $\mathcal{E}$. Нека X и Y са дискретни случайни величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Изображението $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2\ \ \omega \longmapsto (X(w), Y(w))$ се нарича двумерна дискретна случайна величина. Изображението $Z(\Omega) \longrightarrow [0, 1]\ \ z \longmapsto P(\{\omega \in \Omega|\ (X(w), Y(w)) = z\})$ се нарича теглова функция на Z или съвместна теглова функция на X и Y. Понеже X и Y са дискретни, то образът $Z(\Omega)$ на Z е изброим. Задаването на двумерна дискретна случайна величина е еквивалентно на задаване на изброима пълна група от събития върху $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, тези събития са $Z^{-1}(z) = \{\omega \in \Omega|\ (X(w), Y(w)) = z\} := \{Z = z\}$, където z пробягва $Z(\Omega)$. Следователно $\sum_{z\in Z(\Omega)} P(Z = z) = P(\cup_{z\in Z(\Omega)}Z^{-1}(z)) = 1$. Задаването на двумерна дискретна случайна величина е еквивалентно на задаване на двумерна теглова функция, тоест функция с дефиниционна област - дискретно подмножество на $\mathbb{R}^2$ и сума от функционалните стойности равна на 1. Тегловите функции на X и Y се получават от тегловата функция на Z: $P(X = x) = P(\{X = x\} \cap \Omega) = P(\{X = x\} \cap \left(\cup_{y \in Y(\Omega)} \{Y = y\}\right)) = P(\cup_{y \in Y(\Omega)} (\{X = x\} \cap \{Y = y\})) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Z = (x, y))$. Аналогично тегловата функция $y \longmapsto P(Y = y)$ на Y е $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Z = (x, y))$. Същите резултати са в сила и за $n-$мерни случайни величини, $n \geq 3$.

9.1 Условия и решения на задачите от упражнение 9

Задача 1 Нека $\xi,\ \eta$ са независими случайни величини с разпределение $P(\xi = k) = P(\eta = k) = q^k p,\ k = 0, 1, ...,\ p > 0,\ p + q = 1$. Нека $\zeta = \max(\xi, \eta)$.
a) Да се намери разпределението на ζ,
b) Да се намери разпределението на $\tau = (\zeta, \xi)$.

Задача 2 В урна има 3 бели и 2 черни топки. От урната теглим последователно без връщане топки. Нека ξ е номера на опита при който се появява първата бяла топка. След това продължаваме да теглим докато се появи черна топка. Нека η е номера на опита при който се появява черна топка (след първата бяла). Приемаме че $\eta = 6$, ако не се появи черна. Да се определи:
a) Съвместното разпределение на ξ и η;
b) $P(\eta > 2 | \xi = 1)$ и $P(\eta = 3 | \xi < 3)$.

Задача 3 Хвърлят се два червени и един син зар. Нека ξ е броят на шестиците върху червените зарове, а η е броя на двойките върху трите зара. Да се определи:
a) Съвместното разпределение на ξ и η;
b) $P(\xi > 0 | \eta = 1)$.

Задача 4 Нека случайната величина $\zeta = (\xi, \eta)$ има разпределение $P(\zeta = (j, k)) = P(\xi = j, \eta = k) = c\frac{\lambda^j \mu^k \nu^{jk}}{j!k!}$, при $\lambda > 0,\ \mu > 0,\ 0 < \nu \leq 1,\ j, k = 0, 1, ...,$ където c е подходяща константа. Да се определи c и да се намерят разпределенията на ξ и η. Да се докаже, че ξ и η са независими, тогава и само тогава, когато $\nu = 1$. Да се намери $P(\xi = j | \eta = k)$.

Задача 1 Решение: $P(\zeta = 0) = p^2$, при $k \geq 1$ получаваме

$$P(\zeta = k) = P(\max(\xi, \eta) = k) = P(\{\xi < k,\ \eta = k\} \cup \{\xi = k,\ \eta < k\} \cup \{\xi = k,\ \eta = k\})$$

$$= P(\{\xi < k,\ \eta = k\}) + P(\{\xi = k,\ \eta < k\}) + P(\{\xi = k,\ \eta = k\}) = \sum_{i=0}^{k-1} P(\{\xi = i,\ \eta = k\})$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P(\{\xi = k,\ \eta = i\}) + P(\{\xi = k\} \cap \{\eta = k\}) = \sum_{i=0}^{k-1} P(\{\xi = i\} \cap \{\eta = k\})$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P(\{\xi = k\} \cap \{\eta = i\}) + P(\{\xi = k\} \cap \{\eta = k\}) = \sum_{i=0}^{k-1} P(\{\xi = i\}) P(\{\eta = k\})$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1} P(\{\xi=k\})P(\{\eta=i\})+P(\{\xi=k\})P(\{\eta=k\}) = 2pq^k(1-q^k)+p^2q^{2k}, \quad \text{при } k \geq 1.$$

Следователно $P(\zeta = k) = \begin{cases} p^2, & \text{за } k = 0 \\ 2pq^k(1-q^k)+p^2q^{2k}, & \text{за } k \geq 1 \end{cases}$

b) $P(\tau = (k,l)) = P(\zeta = k, \xi = l) = \begin{cases} 0, & \text{за } k < l \\ pq^k(1-q^{k+1}), & \text{за } k = l \\ p^2q^{k+l}, & \text{за } k > l \end{cases}$ При $k = l :\ P(\tau = (k,k)) =$ $P(\zeta = k, \xi = k) = P(\cup_{m=0}^k \{\xi = k, \eta = i\}) = \sum_{i=0}^k P(\{\xi = k, \eta = i\}) = \sum_{i=0}^k P(\{\xi = k\})P(\{\eta = i\}) = pq^k(1-q^{k+1})$.
При $k > l :\ P(\tau = (k,l)) = P(\zeta = k, \xi = l) = P(\eta = k, \xi = l) = P(\eta = k)P(\xi = l) = p^2q^{k+l}$.

Задача 2 $\xi(\Omega) = \{1,2,3\},\ \ \eta(\Omega) = \{2,3,4,5,6\}$. За краткост полагаме $P(\xi = k,\ \eta = l) := P(k,l)$.
a) Тогава $P(1,2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10},\ P(1,3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5},\ P(1,4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10},\ P(1,5) = P(1,6) = 0$. $P(2,2) = P(2,6) = 0,\ P(2,3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10},\ P(2,4) = P(2,5) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10},\ P(3,2) = P(3,3) = P(3,4) = P(3,5) = 0,\ P(3,6) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.
b) $P(\eta > 2|\xi = 1) = \frac{P(\cup_{k\in\{3,4,5,6\}}\{\eta=k,\xi=1\})}{P(\xi=1)} = \frac{P(1,3)+P(1,4)+P(1,5)+P(1,6)}{P(\xi=1)} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$ и
$P(\eta = 3|\xi < 3) = \frac{P(1,3)+P(2,3)}{P(\xi=1)+P(\xi=2)} = \frac{1}{3}$.

10 Числови характеристики на случайните величини

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$. С $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ или $\mathfrak{S}$ означаваме множеството на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, с E и D са означени функционалите - средно и дисперсия - върху $\mathfrak{S}$. Изображението $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ (X,Y) \longmapsto EXY - EXEY$ се нарича ковариация на $X, Y \in \mathfrak{S}$ и се означава с $\mathsf{cov}(X,Y)$. (Директно се проверява, че cov е неизродена, симетрична и билинейна форма, т.е. скаларно прозведение във $\mathfrak{S}$ - да допълня и обясня). Нормировката $\rho(X,Y) = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ на $\mathsf{cov}(X,Y)$ се нарича корелация на X, Y. Ковариацията $\mathsf{cov}(X,Y)$ може да се интерпретира като "мярка" за отклонение от адитивност на дисперсията D върху сумата $X+Y$, поради $D(X+Y) = DX + DY + 2\mathsf{cov}(X,Y)$. Корелацията $\rho(X,Y)$ дава необходимо и достатъчно условие за линейна зависимост на X и Y, тоест $|\rho(X,Y)| = 1 \Longleftrightarrow Y = aX + b,\ a, b \in \mathbb{R}$. Теорема 8.7 показва, че от независимост на случайни величини следва, че ковариацията и корелацията им е нула. Обратното не е вярно.

Нека n, m са естествени числа, $p_1, p_2, ..., p_m$ са положителни числа със сума $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Дефиниция 10.1. *Ще казваме, че $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е полиномно разпределена случайна величина с параметри $(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, което ще записваме чрез $X \in P(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, ако $X(\Omega) = \{(k_1, k_2, ..., k_m) |\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m k_i = n\}$ и тегловата функция на X има вида*

$$(k_1, k_2, ..., k_m) \longmapsto \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$$

Една възможна интерпретация на полиномно разпределена случайна величина с параметри $(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, дава следната схема: провеждат се n Бернулиеви опита, като при всеки опит настъпва точно едно от m несъвместими събития $A_1, ..., A_m$, съответно с вероятности $p_1, ..., p_m$. Вероятността на събитието - A_1 настъпва точно k_1 пъти, ... ,A_m настъпва точно k_m пъти - се дава чрез функцията $(k_1, k_2, ..., k_m) \longmapsto \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$. Функцията

$$f(x_1, ..., x_m) = (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$$

се нарича пораждаща на $X \in \mathrm{P}(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, понеже f поражда тегловата функция на X: коефициента пред $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ е равен на $P(X = (k_1, k_2, ..., k_m))$.

Дефиниция 10.2. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е случайна величина, приемаща цели неотрицателни стойности и нека $p_k = P(X = k),\ k = 0, 1, \ldots$ Функцията*

$$h_X(s) = Es^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| < 1,$$

се нарича пораждаща функция на X.

При предположенията и означенията на горната дефиниция, пресмятаме

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = h'_X(1), \quad DX = h''_X(1) + h'_X(1) - (h'_X(1))^2.$$

Теорема 10.3. *Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{S}$ са независими случайни величини с пораждащи функции $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то за пораждащата функция h на $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ е в сила $h = \prod_{k=1}^n h_k$.*

Пример 10.4. *Да се определи пораждащата функция на случайна величина X, ако*
а) $X \in Ge(p)$;
б) $X \in Po(\lambda)$;
в) $X \in Bi(n, p)$.

Пример 10.5. *Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими случайни величини с Поасоново разпределение, като $X_k \in Po(\lambda_k)$. Да се докаже, че $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \in Po(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$.*

Ако $X, Y \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и знаем, че $Y = y$, то тази информация може да оказва влияние върху числовите характеристики на X. Това мотивира на X да се съпостави случайна величина, отчитаща настъпилото събитие $\{Y = y\}$: тази величина се означава с $(X|Y = y)$ и се задава чрез теглова функция $X(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto P(X = x|Y = y)$. Следователно, при фиксирани $Y \in \mathfrak{S}$ и $y \in Y(\Omega)$ е дефинирано изображение

$$\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P) \longrightarrow \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P) \quad X \longmapsto (X|Y = y),$$

като $(X|Y = y)(\omega) = X(\omega),\ (X|Y = y)(\Omega) = X(\Omega)$. Средната стойност на $(X|Y = y)$ има вида

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x|Y = y).$$

За да се отчете влиянието на Y върху средната стойност на X, се дефинира изображението

$$\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S} \quad (X,Y) \longmapsto E(X|Y),$$

където $E(X|Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \omega \longmapsto E(X|Y = Y(\omega))$. Тегловата функция на $E(X|Y)$ се задава, чрез

$$r \longmapsto \sum_{y \in Y(\Omega),\ E(X|Y=y)=r} P(Y = y).$$

Множеството от тегловите функции на $(X|Y = y)$, при y пробягващ $Y(\Omega)$ се нарича условно разпределение на X, при условие Y. В частност, тегловата функция на $(X|Y = y)$, при фиксиран $y \in Y(\Omega)$, се нарича условно разпределение на X, при условие $Y = y$.
Ако с f означим функцията $Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \;\; y \longmapsto E(X|Y = y)$, то случайната величина $E(X|Y)$ се явява композиция на f с Y, тоест $(f \circ Y)(\omega) = f \circ Y(\omega) = f(Y(\omega)) = E(X|Y = Y(\omega))$. Следователно за средното на $E(X|Y)$ използвайки теорема 8.9 получаваме

$$E(E(X|Y)) = Ef \circ Y = \sum_{y \in Y(\Omega)} f(y)P(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} E(X|Y = y) \times P(Y = y)$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x|Y = y)P(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xP(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = EX.$$

10.1 Условия на задачите от упражнения 10 и 11

Задача 1 От числата 1,2,3,4,5 се избират по случаен начин три числа без повторение. Нека X е случайната величина - средното по големина от избраните три, а Y е случайната величина най-малкото от избраните числа. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;
б) маргиналните разпределения на X и Y;
в) да се провери дали X и Y са независими;
г) ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
д) разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z = X - 2Y$.

Задача 2 Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят гербове паднали се при първите три хвърляния, а Y е броят гербове от последните две. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;
б) условните разпределения на X и Y;
в) $P(X = Y)$, $P(X > 1 \mid Y = 1)$ и $P(X + Y > 2 \mid X = 2)$;
г) разпределението на $E(X|Y)$, $E(Y|X)$.

Задача 3 Четири топки са разпределени случайно в девет кутии, от които две са бели, три зелени и четири червени. Да се пресметнат вероятностите на събитията:

а) в белите кутии има една топка, а в зелените две;
б) в белите кутии има две топки;
в) в белите кутии попадат повече топки отколкото в останалите взети заедно.

Задача 4 Двама стрелци правят по три изстрела в мишена. На всеки изстрел първият може да спечели точки от 7 до 10 с една и съща вероятност. Вторият уцелва 7 или 10 с вероятност 1/8, а 8 или 9 с вероятност по 3/8.
а) За всеки стрелец да се определи вероятността да изкара общо 25 точки.
б) Каква е вероятността двамата да имат равен брой точки?
в) Каква е вероятността първият да има с три точки повече от втория?

Задача 5 Билетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността за случайно избран билет:
а) сумата от цифрите в номера да е равна на 21;
б) да има равна сума от първите три и последните три цифри;
в) сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

10.2 Решения на задачите от упражнения 10 и 11

Задача 1 Имаме $X(\Omega) = \{2, 3, 4\},\ Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Нека $T = (X, Y)$ и $P(X = k,\ Y = l) = p_{k,l}$.

a) Тегловата функция $(k, l) \longmapsto p_{k,l}$ на T има вида: $p_{2,1} = \frac{3}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10},\ p_{3,1} = \frac{1}{5},\ p_{4,1} = \frac{1}{10},\ p_{3,2} = \frac{1}{5},\ p_{4,2} = \frac{1}{10},\ p_{4,3} = \frac{1}{10},\ p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,3} = 0$.

b) Тегловата функция $k \longmapsto P(X = k)$ на X има вида: $P(X = 2) = \sum_{l=1}^{3} p_{2,l} = \frac{3}{10},\ P(X = 3) = \sum_{l=1}^{3} p_{3,l} = \frac{2}{5},\ P(X = 4) = \sum_{l=1}^{3} p_{4,l} = \frac{3}{10}$. Тегловата функция $l \longmapsto P(Y = l)$ на Y има вида: $P(Y = 1) = \sum_{k=2}^{4} p_{k,1} = \frac{3}{5},\ P(Y = 2) = \sum_{k=2}^{4} p_{k,2} = \frac{3}{10},\ P(Y = 3) = \sum_{k=2}^{4} p_{k,3} = \frac{1}{10}$.

c) X и Y са зависими, поради $p_{4,1} = \frac{1}{10} \neq \frac{9}{50} = P(X = 4)P(Y = 1)$.

d) $\mathsf{cov}(X, Y) = E((X-EX)(Y-EY)) = EXY-EXEY = \sum_{k=2}^{4}\sum_{l=1}^{3} klp_{k,l} - (\sum_{k=2}^{4} kP(X = k))(\sum_{l=1}^{3} lP(Y = l)) = \frac{24}{5} - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$. Корелационният коефициент на X и Y е: $\rho(X, Y) = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = \frac{0.3}{\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{9}{20}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$

e) Имаме $Z(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и нека $P(Z = m) = p_m$. Тегловата функция $m \longmapsto p_m$ на Z се задава чрез: $p_{-2} = p_{4,3} = \frac{1}{10},\ p_{-1} = p_{3,2} = \frac{1}{5},\ p_0 = p_{2,1} + p_{4,2} = \frac{2}{5},\ p_1 = p_{3,1} = \frac{1}{5},\ p_2 = p_{4,1} = \frac{1}{10}$. Средното и вариацията: $EZ = E(X - 2Y) = EX - 2EY = 0,\ D(X - 2Y) = DX + 4DY - 4\mathsf{cov}(X, Y) = \frac{3}{5} + 4 \times \frac{9}{20} - 4 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$.

Задача 2 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\},\ Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Нека $Z = (X, Y)$ и $P(X = k,\ Y = l) = p_{k,l}$.

a) Тегловата функция $(k, l) \longmapsto p_{k,l}$ на Z има вида: $p_{0,2} = p_{3,0} = 0,\quad p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,2} = p_{2,0} = p_{3,1} = p_{3,2} = \frac{1}{16},\quad p_{1,1} = p_{2,1} = \frac{3}{16},\quad p_{1,0} = p_{2,2} = \frac{1}{8}$.

b) Нека $P(X=k|\, Y=l)=q_{k,l}$ и $P(Y=l|\, X=k)=r_{l,k}$. Тегловата функция $k\longmapsto P(X=k)$ на X има вида: $P(X=0)=\sum_{l=0}^{2}p_{0,l}=\frac{1}{8},\ P(X=1)=\frac{3}{8},\ P(X=2)=\frac{3}{8},\ P(X=3)=\frac{1}{8}$. Тегловата функция $l\longmapsto P(Y=l)$ на Y има вида: $P(Y=0)=\sum_{k=0}^{3}p_{k,0}=\frac{1}{4},\ P(Y=1)=\frac{1}{2},\ P(Y=2)=\frac{1}{4}$. От $q_{k,l}=\frac{p_{k,l}}{P(Y=l)}$ и $r_{l,k}=\frac{p_{k,l}}{P(X=k)}$, получаваме $q_{0,2}=q_{3,0}=0,\quad q_{0,0}=q_{1,2}=q_{2,0}=q_{3,2}=\frac{1}{4},\ q_{0,1}=q_{3,1}=\frac{1}{8},\ q_{1,1}=q_{2,1}=\frac{3}{8},\ q_{1,0}=q_{2,2}=\frac{1}{2};\ r_{2,0}=r_{0,3}=0,\quad r_{0,0}=r_{2,3}=\frac{1}{2},\ r_{0,2}=r_{2,1}=\frac{1}{6},\ r_{1,0}=r_{1,1}=r_{1,2}=r_{1,3}=\frac{1}{4},\ r_{0,1}=r_{2,2}=\frac{1}{12}$. Следователно тегловата функция на $(X|Y=l)$ има вида $k\longmapsto q_{k,l},\ k\in X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ и $l\in Y(\Omega)=\{0,1,2\}$. Аналогично, условното разпределение на Y при условие $X=k$ се задава чрез тегловата функция на $(Y|X=k):\quad l\longmapsto r_{l,k}$.

c) $P(X=Y)=p_{0,0}+p_{1,1}+p_{2,2}=\frac{3}{8},\quad P(X>1|\, Y=1)=\frac{p_{2,1}+p_{3,1}}{P(Y=1)}=\frac{1}{2},\ P(X+Y>2|\, X=2)=P(Y>0|\, X=2)=\frac{p_{2,1}+p_{2,2}}{P(X=2)}=\frac{5}{6}$.

d) От $E(X|Y=0)=\sum_{k=0}^{3}kq_{k,0}=1,\ E(X|Y=1)=\frac{3}{2},\ E(X|Y=2)=2,\ E(Y|X=0)=\frac{1}{4},\ E(Y|X=1)=\frac{7}{12},\ E(Y|X=2)=\frac{5}{12},\ E(Y|X=3)=\frac{5}{4}$, следва $E(X|Y)(\Omega)=\{1,\frac{3}{2},2\},\ E(Y|X)(\Omega)=\{\frac{1}{4},\frac{7}{12},\frac{5}{12},\frac{5}{4}\}$. Тегловата функция $k\longrightarrow s_k$ на $E(X|Y)$ има вида $s_0=P(Y=0)=\frac{1}{4},\ s_1=P(Y=1)=\frac{1}{2},\ s_2=P(Y=2)=\frac{1}{4}$. Тегловата функция $k\longrightarrow t_k$ на $E(Y|X)$ има вида $t_0=P(X=0)=\frac{1}{8},\ t_1=P(X=1)=\frac{3}{8},\ t_2=P(X=2)=\frac{3}{8},\ \ t_3=P(X=3)=\frac{1}{8}$.

Задача 3 Нека $X_i,\ i=1,2,3$ са съответно случайните величини: брой топки попаднали в бели кутии (при $i=1$), брой топки попаднали в зелени кутии (при $i=2$), брой топки попаднали в червени кутии ($i=3$), при поставянето на 4 топки в общо 9 кутии (2 бели, 3 зелени и 4 червени). Тогава $Y=(X_1,X_2,X_3)$ е тримерна случайна величина с теглова функция: $(k_1,k_2,k_3)\longmapsto\frac{4!}{k_1!k_2!k_3!}(\frac{2}{9})^{k_1}(\frac{1}{3})^{k_2}(\frac{4}{9})^{k_3},\quad k_1+k_2+k_3=4,\ k_i\geq 0$ са цели числа, тоест $Y\in P(4,3;\frac{2}{9},\frac{3}{9},\frac{4}{9})$ има полиномно разпределение.

a) Търсената вероятност е $P(Y=(1,2,1))=\frac{4!}{1!2!1!}(\frac{2}{9})^1(\frac{1}{3})^2(\frac{4}{9})^1=(\frac{2}{3})^5\approx 0.13$

Забележка: Означаваме топките с $1,2,3,4$, а цветовете на кутиите с w,g,r. Нека k-тата топка, отива в кутия с цвят $i_k,\ k=1,2,3,4$. Всяко разпределение на 4 различни топки в разглежданите (3 типа кутии) е еквиалетно на редица $i_1i_2i_3i_4$, която е пермутация с повторение на елементите w,g,r. Броят на тези пермутации за а) е $|P(1,2,1)|=\frac{4!}{1!2!1!}$ и всяка от тях се реализира с вероятност $p=(\frac{2}{9})^1(\frac{1}{3})^2(\frac{4}{9})^1$, откъдето получаваме $P(Y=(1,2,1))\approx 0,13$.

b) Търсената вероятност е $P=\sum_{k_2+k_3=2}P(Y=(2,k_2,k_3))=P(Y=(2,2,0))+P(Y=(2,1,1))+P(Y=(2,0,2))\approx 0.179$

c) Търсената вероятност е $P=P(X_1>X_2+X_3|\, X_1+X_2+X_3=4)=P(Y=(3,1,0))+P(Y=(3,0,1))+P(Y=(4,0,0))\approx 0.0365$

Задача 4 Нека $X,\ Y$ са съответно случайните величини: брой точки получени при три изстрела от първи, втори стрелец. Тогава $X=X_1+X_2+X_3,\ Y=Y_1+Y_2+Y_3$, където $X_i,\ Y_i$ са съответно брой точки при i-тия изстрел, $X_i(\Omega)=Y_i(\Omega)=\{7,8,9,10\}$ и $X,\ Y$ са независими.

a) От $25 = 7+8+10 = 7+9+9 = 8+8+9$, следва $P(X=25) = 3!(\frac{1}{4})^3 + 3(\frac{1}{4})^3 + 3(\frac{1}{4})^3 = \frac{3}{16}$, $P(Y=25) = 3!(\frac{1}{8})^2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{8}(\frac{3}{8})^2 + 3(\frac{3}{8})^3 = \frac{63}{256} \approx 0.246$

b) $P(X=Y) = P(\cup_{k=21}^{30}\{X=Y=k\}) = \sum_{k=21}^{30} P(X=Y=k) = \sum_{k=21}^{30} P(X=k)P(Y=k)$

$$= \sum_{k=0}^{9} P(X=21+k)P(Y=21+k) = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{8^3}\binom{9}{k} \sum_{i+2j=k} \frac{1}{4^3}\binom{3}{i}\binom{3}{j}$$

$$= \frac{1}{32^3}\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\sum_{i+2j=k}\binom{3}{i}\binom{3}{j} = \frac{649}{4096} \approx 0.158$$

c) $P(X-Y=3) = \sum_{k=21}^{27} P(X=k+3)P(Y=k) = \frac{1}{32^3}\sum_{k=0}^{6} P(X=k+24)P(Y=k+21) =$

$$= \frac{1}{32^3}\sum_{k=0}^{6}\binom{9}{k}\sum_{i+2j=k+3}\binom{3}{i}\binom{3}{j} = \frac{2608}{32768} \approx 0.079$$

Използвахме, че пораждащата функция на $X_i,\ i=1,2,3$ е $f(x) = \frac{1}{4}(x^7+x^8+x^9+x^{10}) = \frac{x^7}{4}(1+x)(1+x^2)$. От независимостта на X_1, X_2, X_3 и теорема 17.2 следва, че пораждащата на $X = X_1+X_2+X_3$ е $f(x)^3$. Тогава $P(X=k)$ е равна на коефициента пред x^k в развитието на $f(x)^3$. Аналогично, пораждащата на Y е $g(x) = \frac{x^{21}}{8^3}(1+x)^9$.

Забележка 10.6. *В задача 4, случайните величини X и Y имат полиномно разпределение: $X \in P(3,4,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ и $Y \in P(3,4,\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8})$.*

Задача 5 Нека X, Y, Z са съответно случайните величини: сума от всички цифри, сума от първите три цифри, сума на последните три цифри на случайно избран номер в интервала $[000000, 999999]$.

a) Всяка от цифрите $0, 1, ..., 9$ е еднакво вероятна (с вероятност $\frac{1}{10}$) да участва на всяка от 6-те позиции на разглежданният 6-цифрен номер. Следователно пораждащата функция на X е

$$f(x) = \frac{1}{10^6}\left(\sum_{k=0}^{9} x^k\right)^6 = \frac{1}{10^6}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6 = \frac{1}{10^6}(1-x^{10})^6(1-x)^{-6}$$

$$= \frac{1}{10^6}\left(\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}x^{10k}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\binom{-6}{l}x^l\right) =$$

$$= \frac{1}{10^6}\sum_{k=0}^{6}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{k+l}\binom{6}{k}\binom{-6}{l}x^{10k+l}.$$

Вероятността $P(X=21)$ е равна на коефициента пред x^{21} в развитието на $f(x)$, следователно $P(X=21) = \frac{1}{10^6}\left(-\binom{-6}{21} + \binom{6}{1}\binom{-6}{11} - \binom{6}{2}\binom{-6}{1}\right) \approx 0.039$

b) $P(Y=Z) = P(\cup_{m=0}^{27}\{Y=Z=m\}) = \sum_{m=0}^{27} P(Y=m)P(Z=m) = \sum_{m=0}^{27}[P(Y=m)]^2$

$$= \sum_{m=0}^{27} [\mathsf{coef}(x^m,\ g(x))]^2 = \frac{1}{10^6}\sum_{m=0}^{27}\left(\sum_{0\le k\le 3,\ l\ge 0,\ 10k+l=m} (-1)^k \binom{3}{k}\binom{2+l}{2}\right)^2 = \frac{55252}{10^6} \approx 0.055,$$

където $\mathsf{coef}(x^m,\ g(x))$ е коефициента пред x^m в развитието на $g(x) = \frac{1}{10^3}\left(\sum_{k=0}^{9} x^k\right)^3$.

c) $P(Y-Z=2) = \sum_{m=0}^{25} P(Y=m+2, Z=m) = \sum_{m=0}^{25} P(Y=m+2)P(Z=m) =$

$$= \sum_{m=0}^{25} [\mathsf{coef}(x^{m+2},\ g(x))][\mathsf{coef}(x^m,\ g(x))] =$$

$$= \frac{1}{10^6}\sum_{m=0}^{25}\left(\sum_{0\le k\le 3,\ l\ge 0,\ 10k+l=m+2} (-1)^k \binom{3}{k}\binom{2+l}{2}\right)\left(\sum_{0\le r\le 3,\ s\ge 0,\ 10r+s=m} (-1)^r \binom{3}{r}\binom{2+s}{2}\right)$$

$$= \frac{53262}{10^6} = 0.053262$$

11 Непрекъснати едномерни случайни величини

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$. Следващата дефиниция обобщава понятието дискретна случайна величина.

Дефиниция 11.1. *Функция $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойството: $\{\omega \in \Omega|\ X(w) \le x\} \in \mathfrak{A}\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, се нарича (едномерна) случайна величина върху $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Множеството на случайните величини върху разглежданото вероятностно пространство означаваме със $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ или $\mathfrak{S}$.*

Всяка дискретна случайна величина е случайна величина по отношение на дефиниция 11.1, понеже при дискретна $X \in \mathfrak{S}$ е в сила $\{X \le x\} := \{\omega \in \Omega|\ X(w) \le x\} = \cup_{y\in X(\Omega):\ y\le x}\{X = y\}$, което е изброимо обединение на елементи от $\mathfrak{A}$ и следователно принадлежи на $\mathfrak{A}$.

Дефиниция 11.2. *Функция на разпределение за $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ наричаме функцията $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\ \ x \longmapsto P(X \le x)$, която ще означаваме с F_X.*

Функцията на разпределение на всяка случайна величина е монотонно растяща, с гранични стойности $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, и непрекъсната отдясно. Вярно е и обратното, всяка функция $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ с изброените 3 свойства е функция на разпределение за случайна величина, дефинирана в подходящо вероятностно пространство.
Свойствата монотонност, гранично поведение и непрекъснатост отдясно следват от:

$$x \le y \Rightarrow F_X(x) = P(X \le x) \le P(X \le x) + P(x < X \le y) = P(\{X \le x\} \cup \{x < X \le y\}) = F_X(y),$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty} P(X \le x) = P(X \le \lim_{x\to-\infty} x) = P(\emptyset) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = P(X \le \lim_{x\to+\infty} x) = P(\Omega) = 1,$$

$$\lim_{x\downarrow x_0} F_X(x) = \lim_{x\downarrow x_0} P(X \le x) = \lim_{h\downarrow 0} P(X \le x_0 + h) = \lim_{h\downarrow 0} P(\{X \le x_0\} \cup \{x_0 < X \le x_0 + h\})$$

$$= \lim_{h\downarrow 0}[P(X \le x_0) + P(x_0 < X \le x_0 + h)] = P(X \le x_0) + \lim_{h\downarrow 0} P(x_0 < X \le x_0 + h) = F_X(x_0).$$

От дефиниция 11.1 следва, че вероятността X да принадлежи на интервала $(-\infty, x]$ е равна на $F_X(x)$. Аналогично, вероятността X да принадлежи на крайния интервал $(a, b]$ се изразява чрез F_X: от $P(X \le b) = P(\{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}) = P(\{X \le a\}) + P(\{a < X \le b\})$, получаваме $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$.

Дефиниция 11.3. *Случайната величина $X \in \mathfrak{S}$ се нарича (абсолютно) непрекъсната, ако функцията и на разпределение има вида:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

където f_X е неотрицателна функция. Ако X е непрекъсната, то f_X се нарича плътностна функция на X.

Ако f_X е непрекъсната в $\mathbb{R}$ функция, то по Лайбниц-Нютон получаваме $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$.
В общия случай, полагаме $f_X(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}F_X(x), & \text{ако съществува производната в } x \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$
За непрекъсната X получаваме

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(u)du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u)du = \int_{a}^{b} f_X(u)du.$$

Теорема 11.4. *Ако $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е непрекъсната случайна величина с плътностна функция f_X, то*

$$P(X = x) = 0 \quad \textit{и} \quad P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f_X(u)du.$$

Естествена е съпоставката между плътностната функция на непрекъсната $X \in \mathfrak{S}$ и тегловата функция на дискретна $Y \in \mathfrak{S}$. Свойствата $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ и $\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y = y) = 1$ подсказват аналогия, но тя не е пълна: плътността може да приема стойности по-големи от 1. При малки δx, вероятността X да принадлежи на интервала $[x, x + \delta x]$ по теорема 11.4 е

$$P(x \le X \le x + \delta x) = \int_{x}^{x+\delta x} f_X(u)du \approx f_X(x)\delta x.$$

Следователно естествената аналогия е между формата $f_X(x)dx$ (на плътност за X) и тегловата функция $y \longmapsto P(Y = y)$ на Y.
Всяка функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойствата $f \ge 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ е функция на плътност за подходяща непрекъсната случайна величина, понеже $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ е монотонна, с гранични стойности $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \ \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ и непрекъсната отдясно, тоест $F(x)$ е функция на разпределение. Следователно задаването на непрекъсната случайна величина е еквивалентно на задаване функция на плътност.
В някои частни случаи на функционална зависимост между две непрекъснати случайни величини, можем в явен вид да опишем връзката между плътностните им функции.

Теорема 11.5. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е непрекъсната случайна величина с плътност f_X и $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема и строго монотонна функция, то $Y = g \circ X$ има плътност*

$$f_Y(y) = \pm f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)),$$

като знакът е $+$, ако g е растяща. Тук с g^{-1} е означена обратната функция на g.

Дефиниция 11.6. *Средната стойност и вариацията на непрекъсната $X \in \mathfrak{S}$ се задават чрез равенствата:*

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx, \quad \mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2 \qquad (3)$$

Дефиниция 11.7. *Казваме, че $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е равномерно разпределена случайна величина в интервала (a, b), което ще записваме чрез $X \in \mathcal{U}(a, b)$, ако функцията на плътност f_X на X има вида $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$*

Интерпретация на равномерно разпределена случайна величина $X \in \mathcal{U}(a, b)$ е следната: вероятността X да принадлежи на произволен интервал с фиксирана дължина (например l), съдържащ се в носителя $[a, b]$, е постоянна, равна на $P(c \leq X \leq c + l) = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$.

Дефиниция 11.8. *Казваме, че $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е експоненциално разпределена случайна величина с параметър $\lambda > 0$, което ще записваме чрез $X \in Ex(\lambda)$, ако функцията на плътност f_X на X има вида $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$*

Пример 11.9. *Ако $X \in Ex(\lambda)$, то за средната стойност на X съгласно (3) намираме:*

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d(-\lambda x)$$

$$= -\int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} = -x e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} de^{-\lambda x}$$

$$= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}.$$

Всяка експоненциално разпределена случайна величина е граница (по разпределение) на редица от скалирани геометрично разпределени величини. Нека $\lambda > 0$ и $X \in Ex(\lambda)$ и да разгледаме редицата $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\;Y_n \in \mathrm{Ge}(p_n)$, като $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Ще покажем, че редицата $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\;Z_n = \frac{Y_n}{n}$ е сходяща по разпределение към X. При $z > 0$ пресмятаме: $F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P(Y_n \leq nz) = F_{Y_n}(nz) = \sum_{k=0}^{[nz]} p_n(1-p_n)^k = 1 - (1-p_n)^{[nz]+1} = 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{nz+\delta}$, $\;\delta \in (0, 1]$. При $n \to \infty$ получаваме $F_{Z_n}(z) \longrightarrow 1 - e^{-\lambda z}$, $\;z > 0$ и $F_{Z_n}(z) = 0$ при $z \leq 0$. Следователно $F_{Z_n} \longrightarrow F_X$.

На всяко събитие $A \in \mathfrak{A}$ се съпоставя характеристичната му функция I_A, чрез изображението $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{S}$ $\;A \longmapsto I_A$, като $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Следователно I_A е дискретна случайна величина със средно $EI_A = 0P(I_A = 0) + 1P(I_A = 1) = P(A)$. В частност, ако $X \in \mathfrak{S}$ и $A = \{X < a\}$, то $I_A = I_{\{X<a\}}$ е композиция на функцията $g : X(\Omega) \longrightarrow \{0,1\}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ 0, & x \geq a \end{cases}$ и X, тоест $I_{\{X<a\}} = g \circ X$.

11.1 Условия на задачите от упражнения 12 и 13

Задача 1 Дадена е случайна величина X с плътност $f_X(x) = \begin{cases} c(x^2+2x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$
Намерете:
а) константата c;
б) $EX,\ DX$;
в) вероятността X да е по-малка от математическото си очакване;
г) очакването на случайната величина $X^2 + 3X$.

Задача 2 Върху окръжност $k(O,r)$ е фиксирана точка A, точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на $\triangle AOB$.

Задача 3 Нека $X \in \mathrm{U}(0,7)$ е времето на безотказна работа в години на даден апарат. Съгласно гаранцията на апарата, той ще бъде заменен с нов на петата година, или преди това в случай на дефект. Нека Y е времето до смяната на апарата. Да се определи $P(Y < 4),\ EY$ и DY. Ако са продадени 1000 апарата, колко ще трябва да се подменят преди петата година?

Задача 4 Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Задача 5 В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е екпоненциално разпределена случайна величина с математческо очакване 8мин за първата опашка и 5мин за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 минути. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка?

Задача 6 Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30мин. За преглед има записани двама пациента, първия в 11.00, а втория в 11.30 и двамата пристигат в точно определения час. Ако прегледа на първия не е завършил, вторият ще изчака. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

Задача 7 Нека случайната величина $X \in \mathrm{Ex}(\lambda)$. Да се намерят плътностите на следните случайни величини:
а) $Y = -X$;
б) $Y = 2X - 1$;
в) $Y = \sqrt{X}$;
г) $Y = X^a,\ a > 0$.

Задача 8 Дадена е окръжност $k(A,a)$, като $A(0,a)$. Точка В е равномерно разпределена върху частта от окръжността, разположена в първи квадрант. Нека $C(X,0)$ е пресечната точка на правата АВ с абцисната ос. Да се намери плътността на X.

11.2 Решения на задачите от упражнения 12 и 13

Задача 1 Нека $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ е функцията на разпределение на X.

a) Тогава $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$ и $1 = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = \int_0^1 c(u^2+2u)du = c(\frac{u^3}{3}+u^2)|_0^1 = \frac{4c}{3}$. Следователно $c = \frac{3}{4}$.

b) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} uf_X(u)du = \frac{3}{4}\int_0^1 u(u^2+2u)du = \frac{3}{4}(\frac{u^4}{4}+\frac{2u^3}{3})|_0^1 = \frac{11}{16}$. Дисперсията е $DX = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_X(u)du - (\int_{-\infty}^{+\infty} uf_X(u)du)^2 = \frac{3}{4}\int_0^1 u^2(u^2+2u)du - (\frac{11}{16})^2 = \frac{21}{40} - (\frac{11}{16})^2 \approx 0.052$

c) $P(X < EX) = P(X < \frac{11}{16}) = F_X(\frac{11}{16}) = \int_{-\infty}^{\frac{11}{16}} f_X(u)du = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{11}{16}}(u^2+2u)du = \frac{3}{4}(\frac{u^3}{3}+u^2)|_0^{\frac{11}{16}} \approx 0.435$

d) $E(X^2+3X) = EX^2 + 3EX = \frac{21}{40} + \frac{33}{16} = \frac{207}{80} \approx 2.5875$

Задача 2 Без ограничение, нека в равнината е фиксирана правоъгълна координатна система, като центърът на разглежданата окръжност k е в началото $O(0,0)$ и точка A е с координати $(r,0)$. Нека полярните координати (ρ,ϕ) са $A(r,0)$ и $B(r,\phi)$. Понеже точка B е избрана по-произволен начин, можем да считаме, че ъгълът ϕ е равномерно разпределена случайна величина: $\phi \in \mathcal{U}(0,2\pi)$. Следователно функциите на разпределение и плътност на ϕ имат съответно вида:

$$F_\phi(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < 0 \\ \frac{\phi}{2\pi}, & \phi \in [0,2\pi] \\ 1, & \phi > 2\pi \end{cases} \qquad f_\phi(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \in (-\infty,0)\cup(2\pi,\infty) \\ \frac{1}{2\pi}, & \phi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Ако $g : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \phi \longmapsto \frac{1}{2}r^2|\sin\phi|$, то лицето на $\triangle AOB$ е случайната величина $g\circ\phi$, явяваща се композиция на функцията g със случайната величина ϕ. Търсеното средно е

$$Eg\circ\phi = \int_0^{2\pi} g(u)f_\phi(u)du = \frac{r^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)du - \frac{r^2}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(u)du = \frac{r^2}{2\pi} + \frac{r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{\pi}.$$

Задача 3 Ще сичтаме, че при дефект на апарат, той веднага бива сменен. Следователно

$$Y(w) = \begin{cases} X(w), & X(w) < 5 \\ 5, & X(w) \geq 5 \end{cases}, \text{ тоест } Y = X\mathbf{I}_{\{X<5\}} + 5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}.$$

Пресмятаме: $P(Y<4) = P(X<4) = F_X(4) = \frac{4}{7}$, $EY = E(X\mathbf{I}_{\{X<5\}} + 5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}) = E(X\mathbf{I}_{\{X<5\}}) +$

$$E(5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathbf{I}_{\{X<5\}}(x)dF_X(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} 5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}(x)dF_X(x)$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^5 x\mathbf{I}_{\{X<5\}}(x)dx + \frac{5}{7}\int_5^7 dx = \frac{45}{14},$$

Аналогично, $DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{7}\int_0^5 x^2dx + \frac{25}{7}\int_5^7 dx - (\frac{45}{14})^2 = \frac{275}{21} - (\frac{45}{14})^2 \approx 2.763$

Нека $X_i \in \mathcal{U}(0,7),\ i = 1,2,\ldots,1000$ са съотвено случайните величини: времето на безотказна работа на i-тия апарат в години; $Z = \sum_{i=1}^{1000}\mathbf{I}_{\{X_i<5\}}$. Очакваният брой сменени апарати за 5 години е: $EZ = \sum_{i=1}^{1000} E\mathbf{I}_{\{X_i<5\}} = 1000E\mathbf{I}_{\{X_1<5\}} = 1000P(X_1 < 5) = 1000F_X(5) = 1000 \times \frac{5}{7} = 714.28$

Задача 4 Без ограничение на общността $R = 1$ и нека D е кръг с център O и диаметър 2. Свойството от условието на задачата е еквивалентно на това, точка B да лежи във вътрешността на окръжността с център A, допираща се вътрешно до границата на D. Ако d е функция разстояние в равнината, а μ е Лебегова мярка, то търсената вероятност е

$$P = \frac{\mu(\{(A,B) \in D \times D|\ d(A,B) < 1 - d(A,O)\})}{\mu(D \times D)}$$

$$= \frac{\mu(\{(A,B) \in D \times D|\ d(A,B) < 1 - d(A,O)\})}{[\mu(D)]^2}$$

$$= \frac{\int_0^1 2\pi x[\pi(1-x)^2]dx}{\pi^2} = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Задача 5 Нека X, X_1, X_2 са съответно случайните величини: брой минути за обслужване на фиксиран клиент, брой минути за обслужване на каса 1 и 2. Нека $H_i,\ i = 1,2$ са събитията: клиентът е обслужен на $i-$тата каса. По условие $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2},\ X_1 \in Ex(\frac{1}{8}),\ X_2 \in Ex(\frac{1}{5})$ и търсим $P(H_1|\ \{X < 4\})$. Прилагаме формулата на Бейс 1:

$$P(H_1|\ \{X < 4\}) = \frac{P(\{X < 4\}|\ H_1)P(H_1)}{P(\{X < 4\}|\ H_1)P(H_1) + P(\{X < 4\}|\ H_2)P(H_2)}$$

$$= \frac{P(X_1 < 4)P(H_1)}{P(X_1 < 4)P(H_1) + P(X_2 < 4)P(H_2)} = \frac{F_{X_1}(4)}{F_{X_1}(4) + F_{X_2}(4)} = \frac{1 - e^{-\frac{4}{8}}}{2 - e^{-\frac{4}{5}} - e^{-\frac{4}{8}}} \approx 0.61$$

Задача 6 Нека X и Y са съответно случайните величини: времето за преглед на първия пациент в часове, времето прекарано в поликлиниката от втория пациент. По условие $X \in Ex(2)$ и

$$Y(w) = \begin{cases} X(w), & X(w) \le \frac{1}{2} \\ 2X(w) - \frac{1}{2}, & X(w) > \frac{1}{2} \end{cases},\ \text{тоест}\ \ Y = X\mathbf{I}_{\{X\le\frac{1}{2}\}} + (2X - 0.5)\mathbf{I}_{\{X>\frac{1}{2}\}}.$$

$$EY = E(X\mathbf{I}_{\{X\le\frac{1}{2}\}} + (2X-0.5)\mathbf{I}_{\{X>\frac{1}{2}\}}) = EX\mathbf{I}_{\{X\le\frac{1}{2}\}} + E(2X-0.5)\mathbf{I}_{\{X>\frac{1}{2}\}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathbf{I}_{\{X\le\frac{1}{2}\}}(x)dF_X(x) + \int_{-\infty}^{+\infty}(2x-0.5)\mathbf{I}_{\{X>\frac{1}{2}\}}(x)dF_X(x)$$

$$= \int_0^{0.5} xdF_X(x) + \int_{0.5}^{+\infty}(2x-0.5)dF_X(x)$$

$$= \int_0^{0.5} xd(1-e^{-2x}) + \int_{0.5}^{+\infty}(2x-0.5)d(1-e^{-2x}) = (\frac{1}{2} - e^{-1}) + \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}(1 + e^{-1}).$$

Забележка 11.10. *Пояснение към решението на задача 6: Нека X_1, X_2 и Y са съответно случайните величини: времето за преглед на $i-$тия пациент в часове ($i = 1, 2$), времето прекарано в поликлиниката от втория пациент. По условие X_i са експонециално разпределени със средно $EX_1 = EX_2 = 0.5$, то съгласно 11.9 получаваме $X_i \in Ex(2)$. По условие*

$$Y(w) = \begin{cases} X_2(w), & X_1(w) \le 0.5 \\ X_1(w) - 0.5 + X_2(w), & X_1(w) > 0.5 \end{cases}, \text{т.е. } Y = X_2 \mathbf{I}_{\{X_1 \le 0.5\}} + (X_1 + X_2 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1 > 0.5\}},$$

следователно $Y = X_2\left(\mathbf{I}_{\{X_1\le 0.5\}} + \mathbf{I}_{\{X_1>0.5\}}\right) + (X_1 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1>0.5\}} = X_2 + (X_1 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1>0.5\}}$.

$$EY = EX_2 + E(X_1 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1>0.5\}} = 0.5 + \int_{0.5}^{+\infty} (x - 0.5)2e^{-2x}dx$$
$$= 0.5 - \int_{0.5}^{+\infty} (x - 0.5)de^{-2x} = 0.5 - (x - 0.5)e^{-2x}\Big|_{x=0.5}^{\infty} + \int_{0.5}^{+\infty} e^{-2x}dx$$
$$= 0.5 - 0.5e^{-2x}\Big|_{x=0.5}^{\infty} = 0.5(1 + e^{-1}).$$

Задача 7 По условие $X \in Ex(\lambda)$, следователно $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

a) Функцията $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; x \longmapsto -x$ е намаляваща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = -y$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = -X$ по теорема 11.5 намираме
$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = -f_X(g(y))\frac{d}{dy}(g(y)) = f_X(-y) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y}, & y < 0 \\ 0, & y \ge 0 \end{cases}$

b) Функцията $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; x \longmapsto 2x - 1$ е растяща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = 2X - 1$ по теорема 11.5 намираме
$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = f_X(\frac{y+1}{2})\frac{d}{dy}(\frac{y+1}{2}) = \frac{1}{2}f_X(\frac{y+1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}, & y > -1 \\ 0, & y \le -1 \end{cases}$

c) Функцията $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \;\; x \longmapsto \sqrt{x}$ е растяща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = y^2$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = \sqrt{X}$ по теорема 11.5 намираме
$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = f_X(y^2)\frac{d}{dy}(y^2) = 2yf_X(y^2) = \begin{cases} 2y\lambda e^{-\lambda y^2}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

d) Функцията $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \;\; x \longmapsto x^a,\; a > 0$ е растяща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}}$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = X^a$ по теорема 11.5 намираме
$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = f_X(y^{\frac{1}{a}})\frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{a}}) = \frac{1}{a}y^{\frac{1-a}{a}}f_X(y^{\frac{1}{a}}) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a}y^{\frac{1-a}{a}}e^{-\lambda y^{\frac{1}{a}}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

Задача 8 Нека в равнината е фиксирана ортогонална координатна система с начало O. Окръжността $k(A, a)$ се допира до абсцисата в точка O. Положението на точка B се определя еднозначно от $\angle BAO = \phi$, следователно големината на ъгълът ϕ е равномерно разпределена случайна величина Φ, със $\Phi \in \mathcal{U}(0, \pi)$. Ако $g : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \;\; \phi \longmapsto a\tan\phi$, то $X = g \circ \Phi$. Във всеки от интервалите $[0, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ функцията g е растяща и диференцируема, но не можем да приложим теорема 11.5 (теоремата се прилага за интервал, в случая имаме обединение на непресичащи се интервали с особеност в гранична точка): при $x > 0$ получаваме

$$F_X(x) = P(g \circ \Phi \leq x) = P(a \tan \phi \leq x) = P\left(\tan \phi \leq \frac{x}{a}\right) = P\left(\phi \leq \arctan \frac{x}{a}\right) = F_\Phi\left(\arctan \frac{x}{a}\right) \Rightarrow$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_\Phi\left(\arctan \frac{x}{a}\right) = f_\Phi\left(\arctan \frac{x}{a}\right) \frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

При $x \leq 0$ получаваме $F_X(x) = P(\tan \phi \leq \frac{x}{a}) = P(\frac{\pi}{2} < \phi \leq \pi + \arctan \frac{x}{a}) =$

$$= P\left(\phi \leq \pi + \arctan \frac{x}{a}\right) - P\left(\phi \leq \frac{\pi}{2}\right) = F_\Phi\left(\pi + \arctan \frac{x}{a}\right) - F_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} F_\Phi\left(\pi + \arctan \frac{x}{a}\right)$$

$$= f_\Phi\left(\pi + \arctan \frac{x}{a}\right) \frac{d}{dx}\left(\pi + \arctan \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2},\ x \leq 0.$$

Следователно $f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)},\ x \in \mathbb{R}$.

12 Нормално разпределение

Дефиниция 12.1. *Казваме, че $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е нормално разпределена случайна величина с параметри (μ, σ^2), което ще записваме чрез $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ако функцията на разпределение F_X на X има вида*

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Ако $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то прилагайки (3) получаваме: $EX = \mu,\ DX = \sigma^2$ В частност, при $\mu = 0,\ \sigma = 1$, функцията $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ се нарича стандартна нормална функция на разпределение. Ако $Y \in \mathcal{N}(0, 1)$, то за $X = \sigma Y + \mu$ намираме: $EX = E(\sigma Y + \mu) = \sigma EY + E\mu = \mu$ и $DX = D(\sigma Y + \mu) = \sigma^2 DY + D\mu = \sigma^2$, следователно $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Нека $k, l,\ 0 \leq k < l$ са естествни числа и $p \in (0, 1)$.

Теорема 12.2. *Нека $X \in Bi(n, p)$. При големи стойности на n е в сила апроксимацията*

$$P(k \leq X \leq l) \approx \Phi\left(\frac{l - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

12.1 Условия на задачите от упражнение 14

Задача 1 Напрежението на пробив на диоди произвеждани от машина е нормално разпределена случайна величина с очакване 100 и дисперсия 49. Втора машина произвежда диоди с очакване 90 и дисперсия 25. Диод е годен, ако напрежението му на пробив е по-голямо от 85. Каква е вероятността случайно избран диод да бъде годен?

Задача 2 Височината на прилива е нормално разпределена случайна величина с очакване 6м и стандартно отклонение 1.5м. Дига предпазва от наводнение при височина на прилива до 8м.

а) Каква е вероятността за наводнение;
б) Колко висока трябва да е дигата, така че от 200 прилива най-много при един да има наводнение?

Задача 3 Неправилна монета (вероятността за падане на герб е 3/4) се хвърля 2000 пъти. Каква е вероятността броя на падналите се гербове да е между 1475 и 1535.

12.2 Решения на задачите от упражнение 14

Задача 1 Нека $X_i,\ i = 1, 2$ са съответно случайните величини: напрежение на пробив на диод произведен на i-тата машина. По условие $X_1 \in \mathcal{N}(100, 7^2),\ X_2 \in \mathcal{N}(90, 5^2)$. Нека $A, H_i,\ i = 1, 2$ са съответно събитията: случайно избран диод е годен, избраният диод е произведен от i-тата машина. Ще считаме, че $P(H_1) = P(H_2) = 0.5;\ X \in \mathcal{N}(0, 1)$ и търсим $P(A)$. Следователно $X_1 = 7X + 100,\ X_2 = 5X + 90$. По формулата за пълната вероятност

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{1}{2}[P(X_1 > 85) + P(X_2 > 85)]$$

$$\approx \frac{1}{2}[P(X > -2.142) + P(X > -1)] = \frac{1}{2}[2 - P(X \leq -2.142) - P(X \leq -1)]$$
$$= \frac{1}{2}[2 - F_X(-2.142) - F_X(-1)] = \frac{1}{2}[F_X(2.142) + F_X(1)] \approx 0.91255$$

Задача 2 Ако X е случайната величина - височина на прилива, то по условие $X \in \mathcal{N}(6,\ 1.5^2)$. При $Y \in \mathcal{N}(0, 1)$, то $X = \frac{3}{2}Y + 6$.
а) Ако A е събитието: при един прилив да настъпи наводнение, то $P(A) = P(X > 8) = P(Y > 1.33) = 1 - P(Y \leq 1.33) = 1 - F_Y(1.33) \approx 0.0918$
b) Нека α е най-малката (ако съществува) височина на дигата така, че $P(X > \alpha) \leq \frac{1}{200}$. Получаваме $\min\{\alpha|\ 1 - P(X \leq \alpha) \leq \frac{1}{200}\} = \min\{\alpha|\ P(X \leq \alpha) \geq 0.995\} =$

$$= \{\alpha|\ P(X < \alpha) \leq 0.995 \leq P(X \leq \alpha)\} \Longleftrightarrow 0.995 = F_X(\alpha) = F_Y\left(\frac{2}{3}(\alpha - 6)\right).$$

Понеже F_X е непрекъсната и строго монотонна, то квантилът α съществува и е единствен. Получаваме $\frac{2}{3}(\alpha - 6) \approx 2.58 \Longrightarrow \alpha = 9.87$

Задача 3 Ако $X \in \mathrm{Bi}(2000, \frac{3}{4})$, то по теорема 12.2 получаваме $P(1475 \leq X \leq 1535) \approx \Phi(\frac{1535-1500}{\sqrt{375}}) - \Phi(\frac{1475-1500}{\sqrt{375}}) = \Phi(1.8073) - \Phi(-1.2909) = \Phi(1.8073) + \Phi(1.2909) - 1 = 0.8664$

13 Непрекъснати многомерни случайни величини

Нека n е естествено число, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$, и $X_i \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P),\quad i = 1, 2, \ldots, n$ са едномерни случайни величини. В $\mathbb{R}^n$ се въвежда частична наредба $\leq_{\mathbb{R}^n}$ посредством $(x_1, \ldots, x_n) \leq_{\mathbb{R}^n} (y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$. Впоследствие релацията $\leq_{\mathbb{R}^n}$ ще записваме чрез $\leq$. Следващата дефиниция обобщава понятието n-мерна дискретна случайна величина.

Дефиниция 13.1. *Изображението* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ *със свойството:* $\{\omega \in \Omega | \ X(w) \leq_{\mathbb{R}^n} x\} \in \mathfrak{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, *се нарича* n*-мерна случайна величина върху* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. *Множеството на случайните величини върху разглежданото вероятностно пространство означаваме със* $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *или* $\mathfrak{S}$.

Всяка n-мерна дискретна случайна величина е случайна величина по отношение на дефиниция 13.1, понеже при дискретна $X \in \mathfrak{S}$ и за произволно $x \in \mathbb{R}^n$ е в сила $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega | \ X(w) \leq x\} = \cup_{y \in X(\Omega): \ y \leq x}\{X = y\} = \cup_{y \in X(\Omega): \ y \leq x}(\cap_{i=1}^n \{X_i = y_i\})$, което е изброимо обединение на елементи от $\mathfrak{A}$ и следователно принадлежи на $\mathfrak{A}$.

Дефиниция 13.2. *Функция на разпределение за* n*-мерна* $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *наричаме функцията* $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto P(X \leq x)$, *която ще означаваме с* F_X.

Функцията на разпределение на всяка случайна величина е монотонно растяща, с гранични стойности $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, и непрекъсната отдясно. Вярно е и обратното, всяка функция $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ с изброените 3 свойства е функция на разпределение за случайна величина, дефинирана в подходящо вероятностно пространство. Следователно задаването на случайна величина е равносилно на задаване на функция на разпределение (тоест функция с изброените 3 свойства). Свойствата монотонност, гранично поведение и непрекъснатост отдясно следват по аналогичен на едномерния случай начин.
При фиксирано естествено $k : \ 1 \leq k \leq n$, функцията на разпределение F_{X_k} на X_k се изразява чрез F_X по следния начин: да означим с π_k изображението проектор

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

и да положим $y_k = \pi_k(x)$. При $y_k \longrightarrow +\infty$, тоест при $x_1 \longrightarrow +\infty, \dots, x_{k-1} \longrightarrow +\infty, \ x_{k+1} \longrightarrow +\infty, \dots, x_n \longrightarrow +\infty$, поради непрекъснатостта на вероятностната мярка P получаваме:

$$\lim_{y_k \longrightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{y_k \longrightarrow +\infty} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$= P(\{X_k \leq x_k\} \cap_{1 \leq i \leq n, \ i \neq k} \{X_i \leq \lim_{x_i \to +\infty} x_i\}) = P(\{X_k \leq x_k\} \cap_{1 \leq i \leq n, \ i \neq k} \Omega)$$

$$= P(X_k \leq x_k) = F_{X_k}(x_k) \Rightarrow F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x) \longrightarrow +\infty} F_X(x).$$

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x) \longrightarrow +\infty} F_X(x) \tag{4}$$

Дефиниция 13.3. *Случайните величини* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *наричаме независими, ако за всеки* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ *събитията* $\{X_i \leq x_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$ *са независими.*

Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими, за функцията на разпределение F_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ намираме

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i).$$

Дефиниция 13.4. *Случайната n-мерна величина* $X \in \mathfrak{S}$ *се нарича (абсолютно) непрекъсната, ако функцията и на разпределение има вида:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_1du_2\ldots du_n,$$

където $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ *е интегруема по Лебег функция, която се нарича плътност на* X.

Понеже f_X е интегруема по Лебег, съгласно теоремата на Фубини, редът на интегриране в $n-$кратния интеграл задаващ F_X не е от значение. Ако $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, то прилагайки Лайбниц-Нютон, като редът на диференциране не е от значение понеже редът на интегриране е произволен, получаваме

$$f_X(x) = f_X(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

В общия случай, полагаме $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}F_X(x), & \text{ако съществува производната в } x \\ 0, & \text{в противен случай.}\end{cases}$

Ако $X_1,X_2,\ldots,X_n$ са независими, за функцията на плътност f_X на $X = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$ в точките $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на диференцируемост намираме

$$f_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}F_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}\prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i).$$

Всяка функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойствата $f \geq 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ е функция на плътност за подходяща непрекъсната случайна величина, понеже

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_1du_2\ldots du_n$$

е монотонна, с гранични стойности $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ и непрекъсната отдясно, тоест $F(x)$ е функция на разпределение. Следователно задаването на непрекъсната случайна величина е еквивалентно на задаване функция на плътност.

Теорема 13.5. *Ако* $X \in \mathfrak{S}(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *е непрекъсната n-мерна случайна величина с функция на плътност* f_X*, и* $A \subset \mathbb{R}^n$ *е измеримо по Лебег множество, то* $P(X = x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$ *и*

$$P(X \in A) = \int\cdots\int_{(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in A} f_X(u_1,u_2,\ldots,u_n)du_1du_2\ldots du_n.$$

Естествена е съпоставката между плътностната функция на непрекъсната $X \in \mathfrak{S}$ и тегловата функция на дискретна $Y \in \mathfrak{S}$ в n-мерния случай. Свойствата $\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ и $\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y = y) = 1$ подсказват аналогия, но тя е непълна: плътността може да приема стойности по-големи от 1. При малки $\delta x_i > 0$, вероятността X да принадлежи на паралелепипеда $\Pi(x,\delta x) = [x_1,\ x_1+\delta x_1] \times \cdots \times [x_n,\ x_n+\delta x_n]$ по теорема 13.5 е

$$P(x \leq X \leq x+\delta x) = \int_{\Pi(x,\delta x)} f_X(u)du \approx f_X(x)\delta x = f_X(x_1,x_2,\ldots,x_n)\delta x_1\delta x_2\ldots\delta x_n.$$

Следователно точната аналогия е между формата $f_X(x)dx = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n$ (на плътност за X) и тегловата функция $y \longmapsto P(Y = y)$ на Y.

При фиксирано естествено $k: \ 1 \leq k \leq n$, функцията на плътност f_{X_k} на X_k се изразява чрез f_X по следния начин (f_X удовлетворява условията на теоремата на Фубини и следователно в разглежданият n-мерен интеграл няма значение редът на интегриране. Съгласно (4) намираме

$$f_{X_k}(x_k) = \frac{d}{dx_k}F_{X_k}(x_k) = \frac{d}{dx_k}\left[\lim_{\pi_k(x)\to\infty} F_X(x)\right]$$
$$= \frac{d}{dx_k}\left[\lim_{\pi_k(x)\to\infty}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \ldots, u_n)du_1du_2\ldots du_n\right]$$
$$= \frac{d}{dx_k}\int_{\mathbb{R}^{k-1}\times(-\infty,\ x_k]\times\mathbb{R}^{n-k}} f_X(u)du$$
$$= \frac{d}{dx_k}\int_{-\infty}^{x_k}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u)du_1\ldots du_{k-1}du_{k+1}\ldots du_n\right]du_k$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)du_1\ldots du_{k-1}du_{k+1}\ldots du_n.$$

Ако X и Y са непрекъснати с функции на плътност f_X и f_Y, то за плътността на $Z = X + Y$ намираме:

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz}F_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz}\int\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\leq z} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$
$$= \frac{d}{dz}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)dy\right]dx = \frac{d}{dz}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v))|J_{\Psi^{-1}}(u,v)|dudv$$
$$= \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, v-u)du\right]dv = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, z-u)du.$$

В пресмятанията приложихме теорема 13.7 като направихме гладка смяна на променливите чрез дифеоморфизмът $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \ (x,y) \longmapsto (u,v)$, като $u = x,\ v = x + y$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x = u,\ y = v - u$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1$. В частност, ако X и Y са независими, то $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ и получаваме:

Теорема 13.6. *Ако X и Y са непрекъснати и независими случайни величини, съответно с плътности f_X и f_Y, то за плътността f_{X+Y} на $X + Y$ е в сила:*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u)f_Y(z-u)du.$$

Теорема 13.7. *Нека (X,Y) е двумерна непрекъсната случайна величина, с плътност $f_{X,Y}$ и нека $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x,y) > 0\}$. Ако изображението $\Psi : D \longrightarrow \Psi(D) \ \ (x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$ е дифеоморфизъм, то случайната величина $(U,V) = (u\circ(X,Y),\ v\circ(X,Y))$ е непрекъсната, с плътност*

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v))|J_{\Psi^{-1}}(u,v)|, & (u,v) \in \Psi(D) \\ 0, & (u,v) \notin \Psi(D) \end{cases}$$

Нека $(X,Y) \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е двумерна непрекъсната случайна величина, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$. Ако $Y = y$, то тази информация може да оказва влияние върху числовите характеристики на X. Това мотивира на X да се съпостави случайна величина, отчитаща настъпилото събитие $\{Y = y\}$: тази величина се означава с $(X \mid Y = y)$ и се задава чрез функция на разпределение $F_{X|Y} : X(\Omega) \longrightarrow [0,1] \quad x \longmapsto P(X \leq x \mid Y = y)$. Условната вероятност се дефинира чрез:

$$P(X \leq x \mid Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{P(X \leq x,\ y \leq Y \leq y+h)}{P(y \leq Y \leq y+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,v)du\right] dv}{\int_y^{y+h} f_Y(v)dv} = \frac{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,v)du\right] dv}{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f_Y(v)dv}$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,y)du \Rightarrow F_{X|Y}(x,y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,y)du.$$

Функцията на плътност $f_{X|Y}$ на $(X \mid Y = y)$ е $f_{X|Y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Дефиниция 13.8. *Условна функция на плътност за X при условие $Y = y$, наричаме функцията*

$$f_{X|Y} : \mathbb{R} \times S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \longmapsto \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Теорема 13.9. *Нека $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е непрекъсната случайна величина с плътност f_X, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема по Лебег функция. Тогава $g \circ X$ е едномерна случайна величина със средно $\mathbf{E} g \circ X = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx$, ако интегралът $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| f_X(x) dx$ е сходящ.*

Дефиниция 13.10. *Нека $f_{X|Y}$ е условна функция на плътност за X относно Y, където (X,Y) е непрекъсната случайна величина. При $y \in \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$, за средното на $(X \mid Y = y)$ е в сила*

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x,y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y) dx.$$

13.1 Условия на задачите от упражнение 15

Задача 1 Точка (X,Y) попада по случаен начин в триъгълник с върхове в точките с координати (0,0), (0,2) и (3,0). Да се намери съвместната плътност и функцията на разпределение на X и Y. Да се пресметне коефициента на корелация $\rho_{X,Y}$.

Задача 2 Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че в продължение на 1 час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги огаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = cxy,\ 0 < x < y < 1$. Да се определят:
а) константата c така, че плътността да е добре дефинирана;
б) маргиналните плътности и математическите очаквания;
в) вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10мин;

г) колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15мин;
д) каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20мин.

Задача 3 Нека X е температурата, а Y е времето необходимо за подготовка за запалване на дизелов двигател в минути. Нека $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2000}(x+5y=10), \quad -10^\circ \leq x \leq 30^\circ,\ 0 \leq y \leq 2$. Да се определи:
а) вероятността да е нужна поне 1 минута за запалване;
б) средното време за запалване при 15°;
в) ако двигателят е запалил за 1,5 минути, каква е вероятността температурата да е отрицателна?

Задача 4 Върху страните на квадрат независимо една от друга по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е с дължина a.

Задача 5 Нека случайните величини $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Ex}(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$.

Задача 6 Нека случайните величини $X_1,\ X_2 \in \mathrm{U}(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 7 Нека случайните величини $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Ex}(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина:
а) $Y = \max(X_1,\ X_2)$;
б) $Y = \min(X_1,\ X_2)$.

13.2 Решения на задачите от упражнение 15

Задача 1 Случайните величини X и Y удовлетворяват условията $X \geq 0,\ Y \geq 0,\ 2X+3Y \leq 6$. При $x > 0,\ y > 0$ дефинираме $A(x,y) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq u \leq x,\ 0 \leq v \leq y\} = [0,x] \times [0,y]$ и $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2,\ 2x+3y \leq 6\}$. Функцията $F_{X,Y}$ на разпределение на двумерната случайна величина (X,Y) е

$$F_{X,Y}(x,y) = \left\{ \begin{array}{rc} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0 \\ \frac{\mu(A(x,y)\cap B)}{\mu(B)}, & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{rc} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0 \\ \frac{xy}{3}, & 0 < x,\ 0 < y,\ 2x+3y \leq 6 \\ \frac{12xy-(2x+3y-6)^2}{36}, & 0 < x \leq 3,\ 0 < y \leq 2,\ 2x+3y > 6 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{9}, & 0 < x \leq 3,\ 2 < y \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{4}, & 3 < x,\ 0 < y \leq 2 \\ 1, & 3 \leq x,\ 2 \leq y \end{array} \right\}.$$

Плътността на (X,Y) е $f_{X,Y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3}, & 0 < x < 3,\ 0 < y < 2,\ 2x+3y \leq 6 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{array} \right\}$.
Плътностите на X и Y са съответно $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,v)dv = \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \frac{1}{3}dv = \frac{2}{3}(1-\frac{x}{3}),\ x \in (0,3)$; $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u,y)du = \int_0^{3-\frac{3y}{2}} \frac{1}{3}du = 1 - \frac{y}{2},\ y \in (0,2)$. Пресмятаме:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^3 \frac{2x}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = 1,\ EY = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = \int_0^2 y\left(1-\frac{y}{2}\right)dy = \frac{2}{3}.$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = -1 + \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = -1 + \int_0^3 \frac{2x^2}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = \frac{1}{2},$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = -\frac{4}{9} + \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)dy = -\frac{4}{9} + \int_0^2 y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)dy = \frac{2}{9}.$$

$$EXY = \int\int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{3-\frac{3y}{2}} \frac{xy}{3}dx\right]dy = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DXDY}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 2 Нека $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x < y < 1\}$.

a) Пресмятаме $1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\int_A cxydxdy = c\int_0^1[\int_0^y xydx]dy = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8$. Съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = 8xy$ при $(x,y) \in A$, и $f_{X,Y}(x,y) = 0$ при $(x,y) \notin A$.

b) Пресмятаме $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,v)dv = \int_x^1 8xvdv = 4x(1-x^2),\ x \in (0,1)$;

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u,y)du = \int_0^y 8uydu = 4y^3,\ EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2)dx = \frac{8}{15}.$$

$$EY = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = \int_0^1 4y^4dy = \frac{4}{5}.$$

c) Търсената вероятност е $P = P(X < \frac{3}{4}, Y < X + \frac{1}{6}) = \int_0^{\frac{3}{4}}\int_0^{x+\frac{1}{6}} f_{X,Y}(x,y)dydx =$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}}\left[\int_x^{x+\frac{1}{6}} 8xydy\right]dx = \frac{7}{32}.$$

d) Търсим средната стойност на случайната величина $(Y - X \mid X = \frac{1}{4})$. Ако дефинираме $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ x \longmapsto x - \frac{1}{4}$, то $E(Y - X \mid X = \frac{1}{4}) = E(Y - \frac{1}{4} \mid X = \frac{1}{4}) = E(g \circ Y | X = \frac{1}{4}) = Eg \circ (Y \mid X = \frac{1}{4}) =$

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) f_{Y|X}\left(y \mid x = \frac{1}{4}\right)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{f_{X,Y}(\frac{1}{4},y)}{f_X(\frac{1}{4})}dy = \frac{32}{15}\int_{\frac{1}{4}}^1 \left(y - \frac{1}{4}\right)ydy = \frac{27}{60}\ \text{h} = 27\ \text{min}.$$

e) Нека $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < x < y < 1, \ y - x < \frac{1}{3}\}$, $\ B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < x \leq \frac{2}{3}, \ x < y < x + \frac{1}{3}\}$, $\ B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \frac{2}{3} < x < 1, \ x < y < 1\}$. Следователно $B = B_1 \cup B_2$ и търсената вероятност е

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{2} \int\int_{B_k} f_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\int_x^{x+\frac{1}{3}} 8xydy\right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left[\int_x^1 8xydy\right] dx = 1 - \frac{80}{243} \approx 0.67$$

Задача 3 Нека $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ -10 \leq x \leq 30, \ 0 \leq y \leq 2\}$, като $f_{X,Y}(x,y) = 0$, при $(x,y) \notin A$.

a) Ако $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \geq 1\} \cap A$, то $P(Y \geq 1) = P((X,Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x,y)dxdy =$

$$= 2000^{-1} \int_{-10}^{30} \left[\int_1^2 (x + 5y + 10)dy\right] dx = \frac{11}{20} = 0.55$$

b) Търсим средната стойност на случайната величина $(Y \mid X = 15)$. Пресмятаме

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = 2000^{-1} \int_0^2 (x + 5y + 10)dy = \frac{x + 15}{1000}$$

$$E(Y \mid X = 15) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x = 15)\, dy = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{X,Y}(15, y)}{f_X(15)} dy$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^2 y(y+5)dy = \frac{19}{18} \approx 1.05$$

c) Пресмятаме $f_Y(y) = 2000^{-1} \int_{-10}^{30} (x + 5y + 10)dy = \frac{y+4}{10}$, следователно

$$P(X < 0 \mid Y = 1.5) = \int_{-\infty}^0 f_{X|Y}(x \mid y = 1.5)dx = \int_{-\infty}^0 \frac{f_{X,Y}(x, \ 1.5)}{f_Y(1.5)} dx =$$

$$= 2000^{-1} \int_{-10}^0 \frac{x + 17.5}{0.55} = \frac{5}{44} \approx 0.113$$

Задача 4 Нека $(X,Y) \in [0,a] \times [0,a]$, като $X, Y \in \mathcal{U}(0,a)$ са независими. Тук интерпретираме X като разстоянието от произволно избраната точка върху контура на квадрата до съседният и отляво връх на квадрата, при положителна ориентация на контура (обратна на часовниковата стрелка). Аналогично за Y. Нека Z е случайната величина - квадратът на разстоянието между двете произволно избрани точки върху контура на квадрата. Нека $g_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ са съответно функциите (при $k = 1,2,3,4$): $g_1(x,y) = (x-y)^2$, $\ g_2(x,y) = (a-x)^2 + y^2$, $\ g_3(x,y) = a^2 + (a - x - y)^2$, $\ g_4(x,y) = x^2 + (a-y)^2$. Дефинираните функции изчисляват търсеното квадратично разстояние при възможните разположения на избраните две точки: когато са на една и съща страна ($k = 1$), когато са на съседни страни ($k = 2, 4$), на срещуположни страни ($k = 3$). Всяко от тези взаимни разположения се реализира с вероятност $\frac{1}{4}$, а плътността на (X,Y) е $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{a^2}$ при $(x,y) \in [0,a]^2$, и 0 в противен случай. За търсеното средно EZ намираме:

$$EZ = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} Eg_k \circ (X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \int\int_{[0,a]^2} g_k(x,y)dxdy$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{6} + \frac{2a^2}{3} + \frac{7a^2}{6} + \frac{2a^2}{3}\right) = \frac{2a^2}{3}.$$

Задача 5 За функцията на разпределение F_{X_1,X_2} на (X_1, X_2) намираме:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P(X_1 \le x_1,\ X_2 \le x_2) = P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$
$$= (1-e^{-\lambda x_1})(1-e^{-\lambda x_2}), \quad \text{при } (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Следователно $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, & (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$
Изображението $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times (0,1)$ $(x_1,x_2) \longmapsto (x_1, \frac{x_1}{x_1+x_2})$ е дифеоморфизъм, следователно задава гладка смяна на променливите $(x_1,x_2) \longrightarrow (x,y)$, като $x = x_1,\ y = \frac{x_1}{x_1+x_2}$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x_1 = x,\ x_2 = \frac{x}{y} - x$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(x,y) = \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_2}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial x_2}{\partial x} = -\frac{x}{y^2}$. От теорема 13.7 при $X = X_1,\ x > 0,\ y \in (0,1)$ получаваме

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X_1,X_2}(x_1(x,y), x_2(x,y))|J_{\Psi^{-1}}(x,y)| = \frac{x}{y^2} f_{X_1,X_2}\left(x,\ \frac{x}{y} - x\right) = \frac{\lambda^2 x}{y^2} e^{-\frac{\lambda x}{y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^2 x}{y^2} e^{-\frac{\lambda x}{y}} dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda x}{y} e^{-\frac{\lambda x}{y}} d\left(\frac{\lambda x}{y}\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^+} te^{-t}dt = 1.$$

Следователно $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$, тоест $Y \in \mathcal{U}(0,1)$.

Задача 6 Считаме, че X_1 и X_2 са независими. Плътността f_Y на $Y = X_1 + X_2$ по теорема 13.6 получаваме:

$$f_Y(y) = f_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) f_{X_2}(y-u)du = \int_0^y 1du = y, \text{ при } y \in (0,1)$$

$$f_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) f_{X_2}(y-u)du = \int_{y-1}^1 1du = 2-y, \text{ при } y \in [1,2)$$
$$f_{X_1+X_2}(y) = 0, \text{ при } y \notin (0,2).$$

Следователно $F_{X_1+X_2}(y) = 0$, при $y \le 0$; $F_{X_1+X_2}(y) = \int_0^y udu = \frac{y^2}{2}$, при $y \in (0,1)$; $F_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^y f_{X_1+X_2}(u)du = \int_0^1 udu + \int_1^y (2-u)du = \frac{-y^2+4y-2}{2}$, при $y \in [1,2)$, тоест

$$F_Y(y) = F_{X_1+X_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 < y < 1 \\ \frac{-y^2+4y-2}{2}, & y \in [1,2) \\ 1, & 2 \le y \end{cases}$$

Задача 7 a) При $y > 0$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X_1, X_2\} \leq y) = P(X_1 \leq y,\ X_2 \leq y) =$

$$P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y) = (1 - e^{-\lambda y})^2 \Longrightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda y}), & 0 < y \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

b) При $y > 0$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min\{X_1, X_2\} \leq y) = P(\{X_1 \leq y\} \cup \{X_2 \leq y\}) =$

$$= 1 - P(\overline{\{X_1 \leq y\} \cup \{X_2 \leq y\}}) = 1 - P(\overline{\{X_1 \leq y\}} \cap \overline{\{X_2 \leq y\}})$$

$$= 1 - P(\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\}) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y)$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 \leq y))(1 - P(X_2 \leq y)) = 1 - (1 - F_{X_1}(y))(1 - F_{X_2}(y))$$

$$= 1 - e^{-2\lambda y} \Rightarrow Y \in Ex(2\lambda) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda y}, & 0 < y \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

14 Характеристични функции

Задача 1 Нека ξ и η са независими случайни величини с плътности и характеристични функции съответно равни на $f_\xi, \varphi_\xi, f_\eta, \varphi_\eta$. Да се намерят характеристичните функции на $\xi\eta$, $\frac{\xi}{\eta}$, $\xi g(\eta)$, където $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е интегруема по Лебег функция.

Задача 2 Да се намери характеристичната функция на $\eta = \xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4$, където случайните величини $\xi_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2),\ k = 1, 2, 3, 4$ са независими.

Задача 3 Нека случайната величина $\zeta = (\xi, \eta)$ има плътност

$$f_\zeta(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Да се намерят характеристичните функции на ζ и ξ.

Задача 4 Да се намерят характеристичните функции на ξ и η, ако $\xi \in \Gamma(\alpha, \beta)$ и $\eta \in \chi^2(n)$.

Задача 5 a) Нека ξ и η са независими и непрекъснати случайни величини съответно с функции на разпределение F_ξ, F_η. Да се докаже, че

$$F_{\xi+\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(y - x)dF_\eta(x);$$

b) Нека ξ е непрекъсната, а ζ е дискретна, като те са независими. Да се докаже, че $\xi + \zeta$ е непрекъсната и да се намери плътността и. В частност, ако $\xi \in \mathcal{U}(0, 1)$ и $\zeta \in \mathrm{Po}(\lambda)$, да се определи плътността на $\xi + \zeta$.

15 Решения

Задача 1 Означаваме с $\varphi_{\xi\eta}$ характеристичната функция на $\xi\eta$, и нека съвместната плътност на (ξ, η) е $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Понеже ξ и η са независими, то $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$.

$$\varphi_{\xi\eta}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi\eta} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{itxy} f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{itxy} f_\xi(x)f_\eta(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itxy} f_\xi(x)dx \right) f_\eta(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi(ty)f_\eta(y)dy.$$

Аналогично пресмятаме

$$\varphi_{\xi\eta}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\eta(tx)f_\xi(x)dx,$$

$$\varphi_{\frac{\xi}{\eta}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi\left(\frac{t}{y}\right) f_\eta(y)dy,$$

$$\varphi_{\xi g(\eta)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi(tg(y)) f_\eta(y) dy.$$

Задача 2 Понеже $\xi_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2),\ k = 1,2,3,4$ са независими, то независими са $\xi_1\xi_2$ и $\xi_3\xi_4$. Следователно

$$\varphi_\eta(t) = \mathbf{E}e^{it\eta} = \mathbf{E}e^{it\xi_1\xi_2}e^{-it\xi_3\xi_4} = \mathbf{E}e^{it\xi_1\xi_2}\mathbf{E}e^{-it\xi_3\xi_4} = \varphi_{\xi_1\xi_2}(t)\varphi_{\xi_3\xi_4}(-t).$$

Намираме $\varphi_{\xi_1\xi_2}$ използвайки задача 1 и полагайки за краткост $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^4 t^2 + 1}}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi_1\xi_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\xi_1}(ty) f_{\xi_2}(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2 y^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} dy \\
&= \frac{\alpha}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} dy = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^4 t^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

От равенствата $\varphi_{\xi_1\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_3\xi_4}(t) = \varphi_{\xi_3\xi_4}(-t)$ следва, че $\varphi_\eta(t) = \frac{1}{\sigma^4 t^2 + 1}$.

Задача 3 Нека $\varphi_\zeta(t, s)$ е характеристичната функция на ζ. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\varphi_\zeta(t, s) &= \mathbf{E}e^{i(t\xi + s\eta)} = \iint_{\mathbb{R}} e^{i(tx+sy)} f_\zeta(x, y) dx dy \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{isy}}{1+y^2} dy.
\end{aligned}$$

За пресмятането на интеграли от вида $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$ ще приложим следната теоремата:

Теорема 15.1. *(Пресмятане на интеграли от вида $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx,\ t \in \mathbb{R}$)*
Нека $f(z)$ е холоморфна, с изключение на краен брой полюси, нележащи върху реалната ос. Нека рестрикцията на f върху реалната права е абсолютно интегруема, тоест $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$. Ако $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, то е в сила равенството

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = 2\pi i \operatorname{sign}(t) \sum Res\left(f(z)e^{itz}\right),$$

където сумирането се извършва по всички полюси на f в горната полуравнина $\Im(z) > 0$ при $t > 0$, или по полюсите в $\Im(z) < 0$ при $t < 0$.

Прилагаме теорема 15.1 и получаваме: $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-t},\ t > 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \pi e^{t},\ t \leq 0$. Следователно

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|} \Rightarrow \varphi_\zeta(t, s) = e^{-|t|-|s|},\ \ \varphi_\xi(t) = \varphi_\zeta(t, 0) = e^{-|t|}.$$

16 Общи задачи

Задача 1 Нека $n \geq 3$ е естествено число. Дадени са n събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$, като A_1 и A_k са независими за $k = 2, 3, \ldots, n$, и събитията A_i и A_j са несъвместими за всички $2 \leq i < j \leq n$. Да се докаже, че събитията A_1 и $\cup_{k=2}^{n} A_k$ са независими.

Задача 2 Нека случайната величина X има разпределение на Коши с плътност $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че разпределение на Коши имат и следните случайни величини:

$$Y = X^{-1}, \quad Z = \frac{2X}{1 - X^2}, \quad T = \frac{3X - X^3}{1 - 3X^2}.$$

Задача 3 Каква е вероятността уравнението $x^2 + 2bx + c = 0$ да има два различни реални корена, ако b и c са независими случайни величини с разпределение $\mathrm{Ex}(\lambda)$?

Задача 4 Провеждаме бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки опит, равна на p. Нека ξ_k е случайната величина - брой опити, докато за първи път получим последователност от k успеха. Да се намери $\mathbf{E}\xi_k$.

Задача 5 Нека $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$ и $\eta = \xi^2 - 1$. Да се докаже, че за коефициентът на корелация е в сила $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Задача 6 Нека случайните величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ са независими и еднакво разпределени, като $P(\xi_1 = j) = \frac{1}{m}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Означаваме $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $q_m = P(S_n \leq m)$. Да се намерят пораждащата функция на S_n и функцията $\sum_{m \geq 0} q_m x^m$.

Задача 7 Нека $\xi_1, \xi_2 \ldots$ са независими и еднакво разпределени случайни величини от $\mathrm{Ex}(\lambda)$ и $\tau \in \mathrm{Ge}(p)$. Да се докаже, че $S_\tau = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\tau+1}$ е експоненциално разпределена и да се намери параметърът на разпределението.

Задача 8 Нека $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ са независими случайни величини. Чрез характеристични функции, да се докаже, че случайните величини $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ са независими.

Задача 9 Да се пресметнат характеристичните функции на непрекъснатите едномерни разпределения - експоненциално, равномерно, нормално, Гама разпределение, разпределение на Коши, χ^2-разпределение. В частност да се изведат характеристичните функции на многомерните непрекъснати разпределения.

Задача 10 Нека X е случайна величина, за която случайната величина $Y = \tan X$ има разпределение на Коши с плътност $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че за всяко цяло $k \neq 0$ случайната величина $\tan kX$ има разпределение на Коши.

16.1 Решения

Задача 1 От условие получаваме: $P(A_1A_k) = P(A_1)P(A_k)$ за $k = 2, 3, \ldots, n$, и

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j), \quad i \neq j.$$

Следователно

$$P\left(A_1 \cap (\cup_{k=2}^n A_k)\right) = P\left(\cup_{k=2}^n A_1A_k\right) = \sum_{k=2}^n P(A_1A_k)$$

$$= \sum_{k=2}^n P(A_1)P(A_k) = P(A_1)\sum_{k=2}^n P(A_k) = P(A_1)P(\cup_{k=2}^n A_k).$$

Задача 2 Нека $Y = \arctan X$. Съгласно 16.9 следва, че $Y \in \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Понеже $X = \tan Y$, то

$$X^{-1} = \operatorname{ctg} Y, \quad \frac{2X}{1-X^2} = \frac{2\tan Y}{1-\tan^2 Y} = \tan 2Y, \quad \text{и} \quad \frac{3X - X^3}{1-3X^2} = \frac{3\tan Y - \tan^3 Y}{1 - 3\tan^2 Y} = \tan 3Y.$$

Аналогично на 16.10 доказваме, че $2Y \in \mathcal{U}(-\pi, \pi)$ и $3Y \in \mathcal{U}(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Прилагайки аналог на лема 16.11 получаваме, че $\tan 2Y$ и $\tan 3Y$ имат разпределение на Коши с плътност $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$.

Задача 3 Ще използваме означенията $X = b,\ Y = c$. Понеже X и Y са независими, то съвместната им плътност има вида:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

Уравнението има два различни реални корена, точно тогава, когато $X^2 > Y$. Нека

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x^2 > y\}.$$

Търсената вероятност е

$$P(X^2 > Y) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_D \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty \left(\int_0^{x^2} e^{-\lambda(x+y)}dy \right) dx = -\lambda \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(x+y)}\Big|_{y=0}^{x^2} \right) dx$$

$$= -\lambda \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(x^2+x)} - e^{-\lambda x} \right) dx = \lambda \left(\lambda^{-1} - e^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+1/2)^2} dx \right)$$

$$= \lambda \left(\lambda^{-1} - \frac{e^{\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,(2x+1)\right]^2}{2} \right) d\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,(2x+1)\right] \right)$$

$$= \lambda \left(\lambda^{-1} - \frac{e^{\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda/2}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) = \lambda \left(\lambda^{-1} - \frac{e^{\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda/2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

$$= 1 - e^{\frac{\lambda}{4}}\sqrt{\pi\lambda}.\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right).$$

Задача 4 За всяко естествено число n, означаваме с X_n случайната величина - брой опити докато за първи път получим последователност от n успеха. От $P(X_{n+1} - X_n = 1) = p$ и $P(X_{n+1} - X_n > 1) = 1 - p$ следва, че

$$X_{n+1} = p(X_n + 1) + (1-p)(X_n + 1 + X_{n+1})$$

$$\Longrightarrow pX_{n+1} = 1 + X_n \Longrightarrow X_{n+1} = \frac{1}{p} + \frac{X_n}{p}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{X_{n-1}}{p^2} = \cdots = \sum_{j=1}^{n} p^{-j} + \frac{X_1}{p^n}.$$

Но $X_1 \in \mathrm{Ge}(p)$, следователно $\mathbf{E}X_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} p^{-j} + \frac{\mathbf{E}X_1}{p^n} = \sum_{j=1}^{n+1} p^{-j} = \frac{1-p^{n+1}}{p^{n+1}(1-p)},\ n \geq 0.$

Забележка 16.1. *От $P(X_{n+1} - X_n = 1) = p$ и $P(X_{n+1} - X_n > 1) = 1 - p$ следва, че*

$$\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n) = 1.p + (1 + \mathbf{E}X_{n+1})(1-p)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}X_{n+1} = \frac{1}{p} + \frac{\mathbf{E}X_n}{p^2}.$$

Задача 5 От $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$ следва $\mathbf{E}\xi = 0,\ \mathbf{D}\xi = 1,\ \mathbf{D}\eta = \mathbf{D}(\xi^2 - 1) = \mathbf{D}\xi^2 > 0$. Следователно

$$\mathbf{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi(\xi^2 - 1) = \mathbf{E}\xi^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} u^3 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 0,$$

понеже подинтегралната функция $f(u) = u^3 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ е нечетна. Следователно

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathbf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}} = 0.$$

Задача 6 Нека $G(x)$ е пораждащата функция на S_n, а $g_i(x)$ $i = 1,\ldots,n$, са пораждащите функции на ξ_i. Получаваме

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^{m-1} P(\xi_i = k)x^k = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1 - x^m}{m(1-x)}.$$

Понеже $\xi_1,\ldots,\xi_n$ са независими, от 17.2 следва

$$G(x) = \prod_{i=1}^{n} g_i(x) = \left(\frac{1 - x^m}{m(1-x)}\right)^n.$$

За всяко цяло $k \geq 0$ дефинираме $\eta_k = S_n + k$ и нека $h_k(x)$ е пораждащата функция на η_k:

$$h_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P(S_n + k = l)x^l = \sum_{l=0}^{\infty} P(S_n = l - k)x^l = \sum_{m=0}^{\infty} P(S_n = m)x^{m+k}$$

$$= x^k \sum_{m=0}^{\infty} P(S_n = m)x^m = x^k G(x).$$

Пресмятаме

$$\sum_{m\geq 0} q_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} P(S_n \leq m)x^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P(S_n + k = m)x^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} P(S_n + k = m)x^m = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) = G(x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{(1-x^m)^n}{m^n(1-x)^{n+1}}.$$

Забележка 16.2. *Смяна реда на сумиране в двойни редове: Ако* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ *е абсолютно сходящ, то можем да извършим смяна на редът на сумиране:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}.$$

Прилагайки тази забележка в задача 6, смяната реда на сумиране се обосновава чрез :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |P(S_n + k = m)x^m| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |x|^m = \frac{1}{1-|x|}, \quad |x| < 1.$$

Задача 7

Доказателство: Нека $\varphi_k(t)$ е характеристичната функция на $\xi_k \in \mathrm{Ex}(\lambda)$. Следователно

$$\varphi_k(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_k} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_{\xi_k}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x}\cos tx dx + i\lambda\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x}\sin tx dx = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2} + \frac{i\lambda t}{\lambda^2+t^2} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

За всяко естествено число n, нека $\varphi_{S_n}(t)$ е характеристичната функция на S_n. Понеже ξ_i са независими, то съгласно теорема 16.8 следва

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n.$$

Нека $\varphi(t)$ е характеристичната функция на S_τ. Пресмятаме

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{itS_\tau} = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(e^{itS_\tau} \mid \tau)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}e^{itS_n}P(\tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{S_n}(t)P(\tau = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n p(1-p)^{n-1} = \frac{p\lambda}{\lambda - it}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda(1-p)}{\lambda - it}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{p\lambda}{p\lambda - it}, \quad \text{понеже } \left|\frac{\lambda(1-p)}{\lambda - it}\right| < 1.$$

От теоремата (за биективност на съответствието между разпределенията и характеристичните функции) следва, че $S_\tau \in \mathrm{Ex}(p\lambda)$. $\square$

Забележка 16.3. *В задача 7 използвахме, че: ако* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *е измерима функция(интегруема по Лебег), а* $X, Y \in \mathfrak{S}$ *са случайни величини,* $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots\}$*, то* $f(X, Y)$ *е едномерна случайна величина със средно (прилагаме формулата за пълното математическо очакване):*

$$\mathbf{E}f(X,Y) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(f(X,Y) \mid Y)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left(f(X,Y) \mid Y = n\right) \mathbf{P}(Y = n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}f(X,n)\mathbf{P}(Y = n).$$

Забележка 16.4. *Твърдението на задача 7 е вярно в следните два случая:*
1) $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_\tau, \quad \tau \in Ge(p) : \ k \longmapsto p(1-p)^{k-1}, \ k = 1, 2, \dots;$
2) $S_\tau = \xi_1 + \dots + \xi_{\tau+1}, \quad \tau \in Ge(p) : \ k \longmapsto p(1-p)^{k}, \ k = 0, 1, 2, \dots;$

Задача 8 Нека $\varphi_{\xi_k}(t)$ е характеристичната функция на $\xi_k \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \ k = 1, 2$. Следователно

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_k} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_{\xi_k}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$
$$= e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Полагаме $X = \xi_1 - \xi_2, \ Y = \xi_1 + \xi_2$. Съгласно теорема 16.7 следва, че X и Y са независими, тогава и само тогава, когато $\varphi_{X,Y}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$. Пресмятаме

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}e^{it(\xi_1 - \xi_2)} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}e^{-it\xi_2} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}\mathbf{E}e^{-it\xi_2} = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(-t) = e^{-\sigma^2 t^2}.$$

$$\varphi_Y(s) = \varphi_{\xi_1 + \xi_2}(s) = \varphi_{\xi_1}(s)\varphi_{\xi_2}(s) = e^{2i\mu s - \sigma^2 s^2}.$$

$$\varphi_{X,Y}(t,s) = \mathbf{E}e^{i[(\xi_1 - \xi_2)t + (\xi_1 + \xi_2)s]} = \mathbf{E}e^{i(t+s)\xi_1}e^{i(s-t)\xi_2}$$
$$= \mathbf{E}e^{i(t+s)\xi_1}\mathbf{E}e^{i(s-t)\xi_2} = \varphi_{\xi_1}(t+s)\varphi_{\xi_2}(s-t) = e^{2i\mu s - \sigma^2(t^2+s^2)}.$$

Следователно е в сила равенството $\varphi_{X,Y}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$, откъдето X и Y са независими. По-горе използвахме, че ξ_1 и ξ_2 са независими, откъдето независими са $e^{i(t+s)\xi_1}$ и $e^{i(s-t)\xi_2}$ и съгласно теорема 16.6 получаваме $\mathbf{E}e^{it\xi_1}e^{-it\xi_2} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}\mathbf{E}e^{-it\xi_2}$. За пресмятането на $\varphi_{X,Y}(t,s)$ използвахме следната дефиниция:

Дефиниция 16.5. *Нека* $X = (X_1, \dots, X_n)$ *е* $n-$*мерна случайна величина. Характеристичната функция на* X *се дефинира чрез*

$$\varphi_X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right).$$

Теорема 16.6. *Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими случайни величини от $\mathfrak{S}$. Тогава е в сила равенството*

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} X_k.$$

Теорема 16.7. *Нека $X_1, \ldots, X_n$ са случайни величини от $\mathfrak{S}$ съответно с характеристични функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Необходимо и достатъчно условие $X_1, \ldots, X_n$ да бъдат независими е равенството:*

$$\varphi_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t_k).$$

Теорема 16.8. *Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими случайни величини от $\mathfrak{S}$ съответно с характеристични функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Тогава за характеристичната функция на $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ е в сила равенството:*

$$\varphi_{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t).$$

Задача 10

Доказателство: Без ограничение можем да предполагаме, че $X(\Omega) = [0, \pi]$ и $k \in \mathbb{N}$, понеже функцията tan има период π. Доказателството ще извършим чрез прилагането на три леми:

Лема 16.9. *Ако $X(\Omega) = [0, \pi]$, то $X \in \mathcal{U}[0, \pi]$ тогава и само тогава, когато $Y = \tan X$ има разпределение на Коши с плътност $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$.*

Лема 16.10. *За всяко $k \in \mathbb{N}$ е в сила $X \in \mathcal{U}[0, \pi]$ тогава и само тогава, когато $kX \in \mathcal{U}[0, k\pi]$.*

Лема 16.11. *Ако $X \in \mathcal{U}[0, k\pi]$, то $Y = \tan X$ има разпределение на Коши с плътност $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$.*

От условието на задачата и лема 16.9 получаваме $X \in \mathcal{U}[0, \pi]$. Прилагайки лема 16.10 получаваме $kX \in \mathcal{U}[0, k\pi]$. От лема 16.11 следва $Y = \tan kX$ има разпределение на Коши. Остава да докажем всяка една от използваните леми.

Доказателство на лема 16.10: Нека $Y = kX$, получаваме

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(kX \le y) = P\left(X \le \frac{y}{k}\right) = F_X\left(\frac{y}{k}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y}{k}\right) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{y}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{y}{k}\right).$$

Следователно $X \in \mathcal{U}[0, \pi]$ тогава и само тогава, когато $kX \in \mathcal{U}[0, k\pi]$.

Доказателство на лема 16.11: Нека $Y = \tan X$, получаваме

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\tan X \le y) = P\left(\cup_{j=0}^{k-1} \{j\pi + s(y) \le X \le j\pi + h(y)\}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} P\left(j\pi + s(y) \le X \le j\pi + h(y)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(F_X\left(j\pi + h(y)\right) - F_X\left(j\pi + s(y)\right)\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \sum_{j=0}^{k-1} \left(F_X\left(j\pi + h(y)\right) - F_X\left(j\pi + s(y)\right)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d}{dy} F_X\left(j\pi + h(y)\right) = \frac{1}{1+y^2} \sum_{j=0}^{k-1} f_X(j\pi + h(y))$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Тук сме положили $h(y) = \left\{ \begin{array}{rl} \arctan y, & y \ge 0 \\ \pi + \arctan y, & y < 0 \end{array} \right.$, $\quad s(y) = \left\{ \begin{array}{rl} \arctan y, & y \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0 \end{array} \right.$

Лема 16.9 следва от лема 16.11, полагайки $k = 1$. $\square$

17 Теория и Задачи по Статистика

17.1 5. Пораждащи функции и трансформация на Лаплас-Стилтес

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е множеството на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Дефиниция 17.1. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е случайна величина, приемаща цели неотрицателни стойности и нека $p_k = P(X = k),\ k = 0, 1, \ldots$ Функцията*

$$h_X(s) = \mathbf{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \le 1,$$

се нарича пораждаща функция на X.

Редът дефиниращ $h_X(s)$ е абсолютно и равномерно сходящ в единичния кръг ($s \in \mathbb{C}$), понеже

$$|\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} p_k |s^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

При предположенията и означенията на горната дефиниция, пресмятаме

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = h'_X(1), \quad \mathbf{D}X = h''_X(1) + h'_X(1) - (h'_X(1))^2.$$

Теорема 17.2. *Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{S}$ са независими случайни величини с пораждащи функции $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то за пораждащата функция h на $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ е в сила $h = \prod_{k=1}^{n} h_k$.*

Доказателство: Понеже $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то независими са и $s^{X_1}, s^{X_2}, \ldots, s^{X_n}$, откъдето

$$h(s) = \mathbf{E}s^X = \mathbf{E}s^{X_1}s^{X_2}\cdots s^{X_n} = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}s^{X_k} = \prod_{k=1}^{n}h_k(s).$$

□

Теорема 17.3. *Съществува биективно съответствие между неотрицателните целочислени разпределения и пораждащите им функции.*

Доказателство: Две неотрицателните целочислени разпределения $p_k,\ q_k,\ k = 0, 1, \ldots$ имащи една и съща пораждаща функция съвпадат, понеже $p_k = \frac{h_X^{(k)}(0)}{k!}$. Обратно, ако разпределенията съвпадат, то тривиално пораждащите им функции съвпадат. □

Теорема 17.4. *Съществува непрекъснато съответствие между неотрицателните целочислени разпределения и пораждащите им функции. Тоест, ако $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от неотрицателните целочислени величини със съответни разпределения $\{p_k(n)\}_{n=1,k=0}^{\infty}$ и пораждащи функции $\{h_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$, то условието*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} p_k(n) = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

е еквивалентно на

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} h_n(s) = h(s), \quad \forall s \in [0, 1).$$

Заключение 17.5. *Последните две теореми означават, че относно стандартните топологии в пространствата на пораждащите функции (равномерна сходимост) и неотрицателните целочислени разпределения (поточкова сходимост), тези две пространства са хомеоморфни.*

За произволни неотрицателни случайни величини, вместо пораждащи функции в общия случай се разглежда трансформацията на Лаплас-Стилтес: $\xi \longmapsto \varphi_\xi(\lambda)$, където

$$\varphi_\xi(\lambda) = \mathbf{E}e^{-\lambda\xi} = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x}dF_\xi(x),\ \Re(\lambda) \geq 0.$$

Теорема 17.6. *Съществува непрекъснато биективно съответствие между неотрицателните разпределения и пораждащите им функции.*

Доказателство: Биективност на съответствието се доказва, като се използва *формулата за обръщане*:

$$F_\xi(x) = \lim_{\lambda\longrightarrow\infty}\sum_{k<\lambda x}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\varphi_\xi^{(k)}(\lambda).$$

Непрекъснатост на съотвествието означава, че редица от неотрицателни случайни величини е сходяща, тогава и само тогава, когато редицата от съответни Лаплас-Стилтес трансформации на тези случайни величини е сходяща към трансформацията на граничната случайна величина. □

17.2 5. Характеристични функции

За произволни случайни величини, вместо пораждащи функции и трансформация на Лаплас-Стилтес в общия случай се разглеждат характеристични функции: $\xi \longmapsto \psi_\xi(t)$, където

$$\psi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$e^{it\xi} = \cos t\xi + i \sin t\xi$$

$$\Rightarrow \psi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF_\xi(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF_\xi(x).$$

Забележка 17.7. *Ако ξ неотрицателна целочислена случайна величина, то $\psi_\xi(t) = h_\xi(e^{it})$. Ако $\xi \geq 0$, то $\psi_\xi(t) = \varphi_\xi(-it)$. Ако ξ е дискретна, то*

$$\psi_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Нека $\eta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ има фунцкия на разпределени $F_\eta(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Многомерната характеристична функция на η се дефинира като:

$$\psi_\eta(t) = \psi_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{E}e^{i(t,\eta)}$$

$$= \mathbf{E}e^{i\sum_{k=1}^n t_k \eta_k} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dF_\eta(x).$$

Многомерните характеристични функции имат аналогични свойства, както и едномерните:

1) $|\psi_\eta(t)| \leq 1,\ \forall t \in \mathbb{R}^n$ и $\psi_\eta(0) = 1$;

2) $\psi_\eta(t)$ е равномерно непрекъсната по $t \in \mathbb{R}^n$;

3) Характеристичната функция на $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ при $m < n$ се получава по следния начин: $\psi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m}(t_1, \ldots, t_m) = \psi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0)$.

4) $\psi_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(\tau) = \psi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(\tau, \tau, \ldots, \tau)$;

5) По характеристична функция еднозначно се възтановява функцията на разпределени;

6) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ са независими тогава и само тогава, когато

$$\psi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^n \psi_{\xi_k}(t_k).$$

Теорема 17.8. *(Формула за обръщане) Нека ξ има функция на разпределени $F(x)$ и характеристична функция $\psi(t)$. Тогава във всички точки на непрекъснатост x и y на $F(x)$ е в сила:*

$$F(x) - F(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \psi(t) e^{-\sigma^2 t^2} dt.$$

Теорема 17.9. *(Непрекъснатост) Нека са дадени* $F_n(x) = \mathbf{P}(\xi_n < x)$ *и* $\psi_n(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ *За сходимост по разпределение* $\xi_n \longrightarrow \xi$ *е необходимо и достатъчно* $\psi_n(t) \longrightarrow \psi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *където* $\psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$.

17.3 6. Видове сходимост на редици от случайни величини - теореми и контрапримери

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е алгебрата на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Дефиниция 17.10. *Казваме, че редицата от случайни величини* $\{\xi_n\}$ *е сходяща с вероятност единица (почти сигурно) към величината* ξ, *ако е*

$$\mathbf{P}\{\lim_{n \longrightarrow \infty} \xi_n = \xi\} = 1.$$

(сходимост почти сигурно $\equiv$ *сходимост почти навсякъде)*

Дефиниция 17.11. *Казваме, че редицата от случайни величини* $\{\xi_n\}$ *клони по вероятност към* ξ, *ако за всяко* $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} = 0.$$

(сходимост по вероятност $\equiv$ *това е сходимост по мярка)*

Забележка 17.12. *Необходимо и достатъчно условие за сходимост почти сигурно* $\xi_n \longrightarrow \xi$ *е*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \epsilon\} = 0.$$

Използвайки този резултат получаваме, че от сходимост почти сигурно следва сходимост по вероятност:

$$\omega \in \{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \Rightarrow \omega \in \{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \epsilon\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \leq \mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \epsilon\}.$$

Обратното не е вярно, както показва следният контрапример:

Пример 17.13. *Дефинираме вероятностно пространство* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) : \Omega = [0, 1]$, *и нека* $\mathfrak{A}$ *се състои от бореловите подмножества на [0,1], а* $\mathbf{P}$ *е лебеговата мярка върху* $[0, 1]$ *(дължина). За всяко* $n \in \mathbb{N}$ *дефинираме събитията* $A_{k,n} = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ *и въвеждаме индикаторите на тези събития:* $\xi_{k,n} = \mathbf{I}_{A_{k,n}}$. *Пресмятаме*

$$\mathbf{P}\{\xi_{k,n} = 1\} = \mathbf{P}\{A_{k,n}\} = \frac{1}{n}, \;\; \mathbf{P}\{\xi_{k,n} = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \; k \leq n \in \mathbb{N}.$$

Конструираме редицата $\{\xi_{k,n}\}_{k \leq n}$:

$$\xi_{1,1}, \; \xi_{1,2}, \; \xi_{2,2}, \; \xi_{1,3}, \; \xi_{2,3}, \; \xi_{3,3}, \; \xi_{1,4}, \ldots$$

Тази редица е сходяща към 0 *по вероятност, поради* $\mathbf{P}\{\xi_{k,n} > \epsilon\} = \mathbf{P}\{\xi_{k,n} = 1\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. *Тази редица не е сходяща почти сигурно, понеже има две точки на сгъстяване 0 и 1:*

$$\liminf \xi_{k,n} = 0, \quad \limsup \xi_{k,n} = 1, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Нека $p \geq 1$ е реално число.

Дефиниция 17.14. *Казваме, че редицата от случайни величини $\{\xi_n\}$ удовлетворяваща $\mathbf{E}|\xi_n|^p < \infty$ е сходяща по $\mathbf{L}_p$ норма към ξ с $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty$, ако*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{E}|\xi_n - \xi|^p = 0.$$

Случайните величини $\xi \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ удовлетворяващи $\mathbf{E}|\xi_n|^p < \infty, \ p \geq 1$, образуват нормирано пространство $(\mathbf{L}_p)$ с норма $||\xi||_p = (\mathbf{E}|\xi_n|^p)^{1/p}$.

Забележка 17.15. *От сходимост по $\mathbf{L}_p$ норма следва сходимост по вероятност: прилагаме неравенството на Чебишев*

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^p}{\epsilon^p}.$$

Обратното не е вярно, например нека $\xi \ : \ \mathbf{E}|\xi|^p = \infty$ и $\{\xi_n\} \ : \ \xi_n = \frac{1}{n} + \xi$. Получаваме $\xi_n \longrightarrow \xi$ по вероятност, но не е $\mathbf{L}_p$ сходяща.

Дефиниция 17.16. *Редицата от случайни величини $\{\xi_n\}$ клони по разпределение към ξ, ако*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$$

във всички точки на непрекъснатост на функцията на разпределение $F_\xi(x)$.

Забележка 17.17. *От сходимост по вероятност следва сходимост по разпределение. Обратното не е вярно, както показва следния контрапример:*

Нека $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ са независими и еднакво разпределени. Следователно $\xi_n \longrightarrow \xi$ по разпределение, понеже функциите им на разпределение съвпадат. Пресмятаме:

$$\{\xi < -\frac{\epsilon}{2}, \ \frac{\epsilon}{2} \leq \xi_n\} \subset \{\xi_n - \xi > \epsilon\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}\{\xi_n - \xi > \epsilon\} \geq \mathbf{P}\{\xi < -\frac{\epsilon}{2}, \ \frac{\epsilon}{2} \leq \xi_n\}$$

$$= \mathbf{P}\{\xi < -\frac{\epsilon}{2}\}\mathbf{P}\{\frac{\epsilon}{2} \leq \xi_n\} = F_\xi\left(-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - F_\xi\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right).$$

В частност, ако $\xi_n \in \mathcal{N}(0,1)$ и Φ, то при $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\xi_n - \xi > \epsilon\} \geq \Phi(0).(1 - \Phi(0)) = \frac{1}{4},$$

което показва, че $\mathbf{P}\{\xi_n - \xi > \epsilon\}$ не клони към 0, при $n \to \infty$, т.е. ξ_n не клони по вероятност към ξ.

Забележка 17.18. *В сила са следните импликации относно типовете сходимост на редици от случайни величини:*

сходимост почти сигурно $\Rightarrow$ сходимост по вероятност $\Rightarrow$ сходимост по разпределение

$\mathbf{L}_p$ сходимост $\Rightarrow$ сходимост по вероятност.

18 Закони за големите числа

18.1 Слаби закони

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е алгебрата на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Нека $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ е прозиволна редица от случайни величини, принадлежащи на $\mathfrak{S}$, за която е в сила

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbf{E}\xi_k) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \to \infty \tag{5}$$

Дефиниция 18.1. *Ако е в сила (5), казваме, че редицата $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ удовлетворява слаб закон за големите числа. Ако в (5) сходимостта е почти сигурно, ще казваме, че редицата $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ удовлетворява усилен закон за големите числа.*

Забележка 18.2. *В граничното съотношение (5) не се изисква случайните величини да имат еднакво разпределение. Понеже от сходимост почти сигурно следва сходимост по вероятност, то от УЗГЧ следва СЗГЧ по отношение на $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$.*

Теорема 18.3. *(Markov) Ако*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\mathbf{D}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = 0,$$

то е в сила СЗГЧ.

Доказателство: Полагаме $\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, \; n = 1, 2, \ldots$. Прилагаме неравенството на Чебишев за η_n:

$$\mathbf{P}\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbf{E}\xi_k) > \epsilon\} = \mathbf{P}\{\eta_n - \mathbf{E}\eta_n > n\epsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\eta_n}{n^2\epsilon^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

□

Теорема 18.4. *(Hinchin) Ако $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с $\mathbf{E}\xi_1 = a < \infty$, то е в сила СЗГЧ.*

Доказателство: Нека $\psi_{\xi_1}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_1}$ и $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. От независимостта на $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ следва

$$\psi_n(t) = \mathbf{E}e^{it\eta_n} = \left[\psi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

От 19.2 следва $\psi_{\xi_1}(t) = 1 + iat + o(t)$. Пресмятаме

$$\psi_n(t) = \left[1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \sim \left[1 + \frac{iat}{n}\right]^n \longrightarrow e^{iat}, \; n \to \infty.$$

Характеристичната функция на константата a е

$$\psi_a(t) = \mathbf{E}e^{ita} = e^{ita}.$$

Следователно характеристичната функция на границата на редицата $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ клони към характеристичната функция на константата a. Прилагайки теорема (17.9) за непрекъснатост на съответствието между характеристични функции и разпределения, получаваме

$$F_{\eta_n}(x) = \mathbf{P}\{\eta_n < x\} \longrightarrow F_a(x),\ n \longrightarrow \infty$$

във всички точки на непрекъснатост на $F_a(x)$ (функцията на разпределение на константата a), тоест при $x \neq a$. Но, ако редица от случайни величини клони по разпределение към константа, тя е сходяща към тази константа и по вероятност. Следователно

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} a = \mathbf{E}\xi_1.$$

□

Теорема 18.5. *За редица от случайни величини $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, необходимо и достатъчно условие за СЗГЧ е*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right] = 0, \quad \textit{където } \eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbf{E}\xi_k).$$

18.2 Усилени закони

Теорема 18.6. *(Борел-Кантели)*
Ако за редицата от събития $\{A_n\}_{n\geq 1}$ е изпълнено $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, то

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 0.$$

Ако събитията $\{A_n\}_{n\geq 1}$ са независими и $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, то

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1.$$

Теорема 18.7. *Ако за редицата $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ от независими случайни величини е изпълнено*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}\xi_n}{n^2} < \infty,$$

то е в сила УЗГЧ.

Теорема 18.8. *За редицата $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ от независими и еднакво разпределени случайни величини, необходимо и достатъчно условие за УЗГЧ е съществуването на крайно математическо очакване, тоест $\mathbf{E}\xi_1 < \infty$.*

19 Централна гранична теорема

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е алгебрата на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.Нека $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ е произволна редица от случайни величини, принадлежащи на $\mathfrak{S}$.

Теорема 19.1. *Нека $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ са независими и еднакво разпределени случайни величини, с крайно средно и дисперсия: $\mathbf{E}\xi_n = a,\ \mathbf{D}\xi_n = \sigma^2$. Тогава за всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dx.$$

Доказателство: Полагаме $\eta_k = \frac{\xi_k - a}{\sigma}$ и $\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \eta_k$. Тогава твърдението е еквивалентно на

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta_n < x) = \Phi(x) \Leftrightarrow \zeta_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \zeta \in \mathcal{N}(0,1).$$

Случайните величини $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ са независими и удовелтворяват $\mathbf{E}\eta_k = 0,\ \mathbf{D}\eta_k = 1$.

Въвеждаме характеристичните функции на η_k и ζ_n : $\psi_{\eta_k}(t) = \mathbf{E}e^{it\eta_k},\ \psi_{\zeta_n}(t) = \mathbf{E}e^{it\zeta_n}$. За тейлъровото развитие до втори ред на $\psi_{\eta_k}(t)$ съгласно 19.2 получаваме:

$$\psi_{\eta_k}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

$$\psi_{\zeta_n}(t) = \left[\psi_{\eta_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right]^n \sim \left[1 - \frac{t^2}{2n}\right]^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}},\ n \to \infty.$$

Но характеристичната функция на $\zeta \in \mathcal{N}(0,1)$ е $\psi_\zeta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, следователно горния резултат показва, че $\lim_{n\to\infty}\psi_{\zeta_n}(t) = \psi_\zeta(t)$. Прилагайки теорема (17.9) за непрекъснатост на съответствието между характеристични функции и разпределения, получаваме $\zeta_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \zeta \in \mathcal{N}(0,1)$. $\square$

Забележка 19.2. *Ако $\mathbf{E}|\xi|^n < \infty$, то съществуват всички производни до ред n, като*

$$\psi_\xi^{(k)}(0) = i^k\mathbf{E}\xi^k, \quad 0 \leq k \leq n,$$

и получаваме тейлъровото развитие около $t = 0$ на $\psi_\xi(t)$ до ред n:

$$\psi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\psi_\xi^{(k)}(0)}{k!}t^k + o(t^n) = \sum_{k=0}^n \frac{i^k\mathbf{E}\xi^k}{k!}t^k + o(t^n).$$

Забележка 19.3. *Теорема 19.1 се нарича накратко Централна гранична теорема за независими и еднакво разпределени случайни величини. Ако $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини с крайно средно и дисперсия, на тази редица можем да съпоставим редицата от сумите на елементите на $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, тоест $\{S_n\}_{n\geq 1}\ :\ S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Центрираме и нормираме членовете на новообразуваната редица, и получаваме нова редица, която съгласно ЦГТ е сходяща по разпределение към стандартното нормално разпределение.*

Следващата теорема е достатъчно условие за ЦГТ в общия случай - при нееднакво разпределени случайни величини (Теорема на Линдеберг-Фелър).

Теорема 19.4. *Нека* $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ *са независими случайни величини, с крайно средно и дисперсия:*

$$\mathbf{E}\xi_k = a_k,\ \mathbf{D}\xi_k = \sigma_k^2,\ F_k(x) = \mathbf{P}(\xi_k < x),\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Ако за всяко $\tau > 0$ *е изпълнено*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\mathbf{D}S_n)^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>\tau\mathbf{D}S_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

то е в сила ЦГТ:

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} \zeta \in \mathcal{N}(0,1).$$

19.1 Статистики от нормално разпределени случайни величини

Нека $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ са независими. Дефинираме извадково средно и дисперсия:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \widehat{s}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2. \text{ Дефинираме } \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

В сила са следните твърдения:

$$\frac{X_k - \mu}{\sigma} \in \mathcal{N}(0,1); \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2 \in \chi^2(n);$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \in \mathcal{N}(0,1), \qquad \frac{(n-1)s_n^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1),$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{s_n} \in t(n-1).$$

19.2 Точкови оценки

Разглеждаме генерална съвкупност Ω. Нека $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ е неизвестен вектор характеризиращ даден признак в Ω. В Ω дефинираме случайна величина ξ, която зависи от θ. Считаме, че е получена извадка с обем n от Ω, която се състои от n стойности на $\xi:\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. *Точкова оценка* или *статистика* се нарича всяка фунцкия $t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ на извадката, която приемаме за стойност на дадена функция $r(\theta)$, която също е параметър на генералната съвкупност Ω.

Понеже разпределението на ξ зависи от θ, ще го означаваме с $F(\xi|\theta)$. Плътността на ξ се нарича функция на правдоподобие, която означаваме с $L(x|\theta)$, а средното с $\mathbf{E}_\theta$ или $\mathbf{E}$. За краткост $t_n(\xi) := t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Дефиниция 19.5. *Нека $t_n(\xi)$ е оценка за функцията $r(\theta)$ от неизвестения параметър $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. Оценката се нарича неизместена, ако*

$$\mathbf{E}_\theta t_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} t(x)L(x|\theta)dx = r(\theta), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Забележка 19.6. *Извадковото средно $\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ е неизместена оценка за $\mathbf{E}\xi$. При независими наблюдения $\xi_k,\ k = 1, \dots, n$, извадковата дисперсия $\widehat{s}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi}_n)^2$ е неизместена оценка за $\mathbf{D}\xi$.*

Дефиниция 19.7. *Оценката $t_n(\xi)$ за функцията $r(\theta)$ се нарича състоятелна, когато при $n \longrightarrow \infty$ клони по вероятност към $r(\theta)$, тоест когато е в сила*

$$\mathbf{P}(|t_n(\xi) - r(\theta)| < \epsilon) \longrightarrow 1, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Дефиниция 19.8. *Вероятността $\mathbf{P}(|t_n(\xi) - r(\theta)| < \epsilon)$ се нарича надеждност на оценката с точност ϵ.*

Забележка 19.9. *Определянето на надеждността на оценката при дадено $\epsilon > 0$ изисква да се знае разпределението на оценката. Често това разпределение е асимптотично нормално или друго известно разпределение, което решава задачата приблизително.*

Дефиниция 19.10. *(Достатъчни оценки(статистики))*
Оценката $t_n(\xi)$ се нарича достатъчна за фамилията $\mathcal{F} = \{F(x|\theta) \mid \theta \in \Theta\}$, ако

$$L(x|\theta) = g(t_n, \theta)h(x).$$

19.3 Оценки с минимална дисперсия

Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ са наблюдения над случайна величина ξ, която зависи от неизвестен параметър θ. Нека $t_n(\xi)$ е неизместена оценка за дадена функция $r(\theta)$. Оценката $t_n(\xi)$ се нарича оценка с минимална дисперсия, ако за всяка неизместена оценка $\tilde{t}_n(\xi)$ е изпълнено $\mathbf{D}_\theta \tilde{t}_n(\xi) \geq \mathbf{D}_\theta t_n(\xi)$.

Дефиниция 19.11. *Неизместена оценка с минимална дисперсия се нарича ефективна оценка.*

Забележка 19.12. *Ако съществува ефективна оценка за $r(\theta)$, то тя е единствена.*

В случая когато съществува, ефективната оценка се намира чрез използването на следната теорема:

Теорема 19.13. *Нека $t_n(\xi)$ е неизместена оценка за $r(\theta)$, за която са изпълнени условията:*
1) θ е едномерен параметър във функцията на правдоподобие $L(x|\theta)$,
2) $\ln L(x|\theta)$ е определена в една и съща област от стойности на x, независимо от стойностите на $\theta \in \Theta$,
3) $r(\theta)$ и $L(x|\theta)$ са диференцируеми функции на θ в областта Θ и допускат диференциране под знака на интеграла,
4) Съществува $\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x|\theta) \right)^2$.

Тогава е в сила неравенството

$$\mathbf{D}_\theta t_n(\xi) \geq \frac{r'(\theta)^2}{\mathbf{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x|\theta) \right)^2}.$$

Равенство се достига само когато е възможно представянето

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x|\theta) = g(n, \theta)(t_n(x) - r(\theta)),$$

като в този случай е в сила

$$\mathbf{D}_\theta t_n(\xi) = \left| \frac{r'(\theta)}{g(n, \theta)} \right|.$$

19.4 Метод на максималното правдоподобие

Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ са наблюдения над случайна величина ξ, която зависи от неизвестен параметър $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Търсим оценка за θ: методът на максималното правдоподобие се изразява в избор на оценка $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x)$ така, че плътността $L(x|\theta)$ да приема най-голяма стойност в $x \in \mathbb{R}^n$, тоест при

$$L(x|\tilde{\theta}) = \max_{\theta} L(x|\theta),$$

то $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_k)$ се нарича максимално правдоподобна оценка за θ. Функциите $\tilde{\theta}_1(x), \ldots, \tilde{\theta}_k(x)$ намираме от уравненията (на максимално правдоподобие)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(x|\theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

или от еквивалентните им уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(x|\theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

В случай на проста извадка, тоест на независими наблюдения уравненията имат вида:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_j|\theta)}{\partial \theta_i} \frac{1}{f(x_j|\theta)} = 0, \ i = 1, \ldots, k.$$

Теорема 19.14. *Ако за едномерния параметър θ съществува ефективна оценка $\tilde{\theta}$, то уравнението на максимално правдоподобие има единствено решение $\tilde{\theta}$.*

19.5 Проверка на хипотези

Проверката на хипотези се състои в следното: нужно е да изберем една от две възможни хипотези, като не се знае коя е вярна. Това означава, че имаме две възможни множества от разпределения за вектора на наблюденията $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ над случайна величина, като трябва да решим към кое множество принадлежи разпределението на този вектор. Задачата еквивалентно се свежда до определяне коя от двете хипотези за функцията на правдоподобие $L(x_1, \ldots, x_n)$ е вярна. Например, да разгледаме проста хипотеза срещу проста алтернатива:

$$H_0 \ : \ L = L_0(x_1, \ldots, x_n); \qquad H_1 \ : \ L = L_1(x_1, \ldots, x_n),$$

с ниво на съгласие α. Нивото на съгласие е максималната вероятност, с която може да се отхвърли вярна хипотеза H_0 (грешка от първи род). Налагаме допълнителното условие за минимизиране на вероятността за "грешка от втори род", тоест да приемем невярна хипотеза H_0. Правилото за избор на една от двете хипотези се определя от подмножество $W \subset \mathbb{R}^n$, което се задава чрез условието (нееднозначно и се нарича *критична област* или *критерий*):

$$\mathbf{P}\{\xi \in W \mid H_0\} = \int_W L_0(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \leq \alpha. \tag{6}$$

Ако във фамилията от критични области W_α удовлетворяващи 6, съществува W^*, за която се минимизира грешката от втори род, тоест за всяко $W \in W_\alpha$ да е в сила:

$$\mathbf{P}\{\xi \in \overline{W}^* \mid H_1\} \leq \mathbf{P}\{\xi \in \overline{W} \mid H_1\}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\overline{W}^*} L_1(x) dx \leq \int_{\overline{W}} L_1(x) dx, \tag{7}$$

то W^* се нарича *оптимална критична област*.

Дефиниция 19.15. *Вероятността* $\mathbf{P}\{\xi \in W^* \mid H_1\}$ *се нарича мощност на критерия* W, *тоест*

$$\pi = \int_{W^*} L_1(x)dx.$$

Проверката на хипотези може да се сведе към един от следните видове проверки:

- Проверка на хипотези относно параметри на разпределенията;
- Проверка на хипотези относно класа на закона на разпределение на наблюдаваната величина;
- Проверка за наличие или отсъствие на зависимост между две групи случайни величини.

19.6 Лема на Нейман-Пирсън (проста хипотеза срещу проста алтернатива)

Една хипотезата се нарича *проста*, ако на нея съответства единствена функция на правдоподобие $L_0(x)$, в противен случай се говори за сложна хипотеза.

Теорема 19.16. *Нека имаме проста хипотеза срещу проста алтернатива с ниво на съгласие* α*:*

$$H_0 \ : \ L = L_0(x); \qquad H_1 \ : \ L = L_1(x),$$

като съществува критична област W^* *и константа* $K \in \mathbb{R}^+$ *така, че са изпълнени неравенствата*

$$L_1(x) \geq KL_0(x) \quad \forall x \in W^*,$$

$$L_1(x) \leq KL_0(x) \quad \forall x \notin W^*.$$

Тогава W *е оптимална критична област. Константата* K *се избира с допълнителното условие*

$$\mathbf{P}\{\xi \in W^* \mid H_0\} = \alpha.$$

19.7 Сложна хипотеза срещу сложна алтернатива - критерий с частно на правдоподобия

Нека Θ е множеството на *допустимите хипотези* - това са възможните стойности на $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Ще считаме, че функциите на правдоподобие съответстващи на основната хипотеза H_0 и на алтернативата H_1 принадлежат на една фамилия $\{L(x|\theta) \mid \theta \in \Theta\}$, като за някое $\Theta_0 \subset \Theta$ е в сила:

$$H_0 \ : \ \{L(x|\theta) \mid \theta \in \Theta_0\}$$

$$H_1 \ : \ \{L(x|\theta) \mid \theta \in \Theta - \Theta_0\}.$$

Нивото на съгласие α има следната интерпретация: която и проста хипотеза $h_0 \in H_0$ да е истинска, вероятността за отхвърлянето и да ненадминава α. За построяването на критична област за проверка на сложна хипотеза H_0 срещу сложна алтернатива H_1 с ниво на доверие α, най-често се прилага *критерия с частно на правдоподобия*: предполагаме, че $\sup_{\theta \in \Theta} L(x|\theta) \neq 0$ и дефинираме функцията

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(x|\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(x|\theta)}.$$

Критичната област $W \subset \mathbb{R}^n$ (по-точно W е подмножество на множеството от стойности на вектора на наблюденията $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$) се определя чрез условията:

$$\lambda(x) \leq K, \ \forall x \in W,$$

$$\lambda(x) > K, \ \forall x \notin W.$$

Константата K е най-голямото число в $(0, 1]$, за което е в сила $\mathbf{P}\{\xi \in W \mid H_0\} \leq \alpha$. Ако в резултат на наблюденията се окаже, че $\xi \in W$, то хипотезата H_0 се отхвърля. Ако $\xi \notin W$, то хипотезата H_0 се приема.

Забележка 19.17. *Критерият с частно на правдоподобия се използва и в случая на проста хипотеза срещу сложна алтернатива, когато не съществува равномерно най-мощна критична област.*

Основните етапи при проверка на хипотези са следните:

1) Избираме критерий, по който проверяваме основната хипотеза H_0, като при това:

1.1) при проста хипотеза срещу проста алтернатива, лемата на Нейман-Пирсън дава метод за построяване на оптимална критична област;

1.2) при сложни хипотези има две възможности:

1.2.1) да се търси РНМКО с лемата на Нейман-Пирсън;

1.2.2) да се търси оптимален критерий с частно на правдоподобия;

2) Избраният критерий W предполага да отхвърлим H_0, когато $\lambda(x) \leq K$;

3) Основното препятствие е разпределителният проблем, тоест да се намери разпределението на $\lambda(x)$ при условие, че е вярна H_0, което дава възможност да се определи константата K. Когато при крайни n не може да се определи разпределението на $\lambda(x)$, се доказва и използва асимптотично приближение за разпределението на $\lambda(x)$ и намираме константа K от условието $\mathbf{P}\{\lambda(x) \leq K\} = \alpha$.

19.8 Нормални модели-доверителни интервали и проверка на хипотези

Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ са наблюдения над случайна величина ξ, която зависи от неизвестен едномерен параметър θ, участващ в разпределението на ξ. Нека по наблюденията $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ е намерена статистика $T^\gamma(\overrightarrow{\xi})$, за която е в сила равенството

$$\mathbf{P}_\theta\{T^\gamma(\overrightarrow{\xi}) \geq \theta\} = \gamma,$$

където $\gamma \in (0,1)$ е достатъчно близо до 1. В този случай статистиката T^{γ} се нарича *горна доверителна граница* за θ, с коефициент на доверие γ. В допълнение се изисква:

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1 \Rightarrow T^{\gamma_1}(\overrightarrow{\xi}) < T^{\gamma_2}(\overrightarrow{\xi}).$$

Аналогично дефинираме *долна доверителна граница* за θ, с коефициент на доверие γ чрез

$$\mathbf{P}_{\theta}\{T_{\gamma}(\overrightarrow{\xi}) \leq \theta\} = \gamma.$$

Ако е изпълнено $T_{\gamma}(\overrightarrow{\xi}) \leq T^{\gamma}(\overrightarrow{\xi})$, то за θ имаме *интервална оценка*: $\theta \in [T_{\gamma}(\overrightarrow{\xi}),\ T^{\gamma}(\overrightarrow{\xi})]$. За краткост интервалната оценка ще означаваме чрез $[\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2]$. Коефициента на доверие γ (доверителна вероятност) се интерпретира като: γ е вероятността истинската стойност на θ за наблюдаваната ξ да лежи в $[\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2]$. Доверителния интервал се изменя с изменението на извадката $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, понеже границите $\widehat{\theta}_i$ са функции на $\overrightarrow{\xi}$.

Забележка 19.18. *Конструирането на доверителен интервал за едномерен параметър θ:*

1) Построява се статистика $t(\overrightarrow{\xi};\theta)$, която да има поне асимптотично, (при $n \longrightarrow \infty$) известно независещо от θ разпределение, тоест $F_t(x) = \mathbf{P}\{t(\overrightarrow{\xi};\theta) < x\}$ не зависи от θ.

2) При зададена доверителна вероятност γ се определят граници $t_1(\gamma)$ и $t_2(\gamma)$:

$$\mathbf{P}\{t_1(\gamma) \leq t(\overrightarrow{\xi};\theta) \leq t_2(\gamma)\} = F_t(t_2(\gamma)) - F_t(t_1(\gamma)) = \gamma.$$

3) В повечето случаи неравенствата $t_1(\gamma) \leq t(\overrightarrow{\xi};\theta) \leq t_2(\gamma)$ могат да се решат относно незивестния параметър θ, и тези решения водят до еквивалентни неравенства:

$$\widehat{\theta}_1(\overrightarrow{\xi}) \leq \theta \leq \widehat{\theta}_2(\overrightarrow{\xi}).$$

Понеже първата двойка неравенства имат вероятност γ, то и последните неравенства имат същата вероятност, което означава, че $[\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2]$ е γ доверителен интервал за θ.

19.9 F-критерий на Фишер

Критерият на Фишер се използва за проверка на хипотези отнасящи се до равенство на дисперсии: от две генерални съвкупности са получени извадки:

$$(\xi):\ \xi_1, \ldots, \xi_n$$

$$(\eta):\ \eta_1, \ldots, \eta_m,$$

които са независими наблюдения в съвкупност. Проверява се хипотезата за равенство на дисперсиите

$$H_0\ :\ \mathbf{D}\xi = \mathbf{D}\eta, \quad H_1\ :\ \mathbf{D}\xi \neq \mathbf{D}\eta,$$

чрез въвеждането на показателя

$$\widehat{F} = \frac{\widehat{s}^2_{\xi}}{\widehat{s}^2_{\eta}}.$$

Тук $\widehat{s}_\xi^2$ и $\widehat{s}_\eta^2$ са неизместени оценки на дисперсиите $\mathbf{D}\xi$ и $\mathbf{D}\eta$. Реализацията на F- критерия е в следните стъпки:

1) Когато е вярна хипотезата H_0 и случайните величини ξ, η са нормално разпределени, то показателя $\widehat{F}$ има F-разпределение с $(n-1, m-1)$ степени на свобода, т.е. $\widehat{F} \in F(n-1, m-1)$. Ако хипотезата H_0 не е вярна, то $\widehat{F}$ няма F-разпределение.

2) Критичната област за F-критерия при дадено ниво на съгласие α се дефинира така: определят се числата $F_{1-\alpha/2}$ и $F_{\alpha/2}$ като съответни квантили на $F(n-1, m-1)$-разпределението:

$$\mathbf{P}\{F(n-1, m-1) > F_{1-\alpha/2}\} = \frac{\alpha}{2}, \quad \mathbf{P}\{F(n-1, m-1) < F_{\alpha/2}\} = \frac{\alpha}{2}.$$

3) Хипотезата H_0 се отхвърля, когато $\widehat{F} > F_{1-\alpha/2}$ или $\widehat{F} < F_{\alpha/2}$. В останалите случаи H_0 се приема.

19.10 t-критерий на Стюдънт

Критерият на Стюдънт се използва за проверка на хипотези отнасящи се до равенство на средни: от две генерални съвкупности са получени извадки:

$$(\xi): \ \xi_1, \ldots, \xi_n$$

$$(\eta): \ \eta_1, \ldots, \eta_m,$$

които са независими наблюдения в съвкупност. Проверява се хипотезата за равенство на средните стойности

$$H_0 \ : \ \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta, \qquad H_1 \ : \ \mathbf{E}\xi \neq \mathbf{E}\eta.$$

Реализацията на t- критерия е в следните стъпки:

1) По данните от наблюденията се определят (извадковите??емпиричните) средни и дисперсии $\widehat{\xi}_n, \widehat{\eta}_n, \widehat{s}_\xi^2, \widehat{s}_\eta^2$;

2) Сравняват се дисперсиите σ_ξ^2 и σ_η^2 чрез F-критерия на Фишер. Ако F-критерия потвърди равенството $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2$, общата им дисперсия се дефинира като

$$s = \frac{(n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2}{n+m-2}.$$

3) Критичната област за t-критерия при дадено ниво на съгласие α се дефинира така: определят се числото $t_{\alpha/2}$, чрез $\mathbf{P}\{t(n+m-2) > t_{\alpha/2}\} = \frac{\alpha}{2}$. Критичната област има вида

$$\widehat{t} = \frac{|\overline{\xi}_n - \overline{\eta}_m|}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{\alpha/2}.$$

Когато е вярна хипотезата H_0 и случайните величини ξ, η са нормално разпределени, то $\widehat{t} \in t(n+m-2)$ има разпределение на Стюдънт с $(n+m-2)$ степени на свобода, което мотивира начина на определяне на $t_{\alpha/2}$.

20 Наредени статистики. Непараметрични критерии. Критерии на знаците, Хи, Уилкоксън, Колмогоров

20.1 Наредени статистики

Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ са независими наблюдения над случайна величина ξ, имаща неизвестна функция на разпределение, която ще означим с $F(x) := F_\xi(x)$.

Дефиниция 20.1. *Пренареждането на наблюденията $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в нарастващ ред*

$$\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots, \xi_{(n)}$$

се нарича вариационен ред или наредена статистика за ξ. Величината $\xi_{(k)}$ се нарича k-та поредна статистика.

Към наредената статистика се асоциира емпирична функция на разпределение $F_n(x)$ (на ξ):

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq \xi_{(1)}, \\ \frac{k}{n} & \text{при} \quad \xi_{(k)} < x \leq \xi_{(k+1)}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \xi_{(n)}. \end{cases}$$

Емпиричната функция на разпределение е монотонна и непрекъсната отляво. Вероятността при n независими опита ξ да приеме k стойности, по-малки от $x \in \mathbb{R}$, и $n-k$ стойности по-големи от x е:

$$\mathbf{P}\left\{F_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^k.$$

Следователно F_n може да се разглежда като случайна величина имаща биномно разпределение с параметър $F(x)$. Емпиричната функция на разпределение определя честотата на събитието $\{\xi < x\}$, докато функцията на разпределение определя вероятността му. От теоремата на Бернули следва, че при достатъчно голямо n честота на събитието $\{\xi < x\}$ клони към неговата вероятност. Следователно $F_n(x) \xrightarrow{\mathbf{P}} F(x)$, от което следва сходимост по разпределение, даващо основание да използваме $F_n(x)$ вместо $F(x)$, при големи n.

20.2 Непараметрични критерии

Непараметричните критерии се иползват за установяване на свойства на извадките, които не зависят от разпределенията на наблюдаваните случайни величини. При тях не се правят никакви предположения за разпределенията.

20.2.1 Критерий на знаците

20.2.2 Критерий на Уилкоксън

20.2.3 Критерий χ^2

20.3 Критерий на Колмогоров

Литература

[1] Стоянов, Миразчийски, Игнатов, Танушев, Ръководство по Теория на Вероятностите, СОФТЕХ, 2011.

[2] Боян Димитров, Николай Янев, Вероятности и Статистика, СОФТЕХ, 2011.

[3] Ж. Неве, Математически основи на Теория на Вероятностите. МИР, Москва 1969.

[4] G. Grimmett, D. Welsh, Probability, Second edition, Oxford University Press, 2014.

[5] G. Grimmett, D. Stirzaker, One thousand exercises in Probability, Oxford University Press, 2001.