СЕМ лек1 Вероятности СУ

Събития и теми по вероятност и мат

6/10/2…

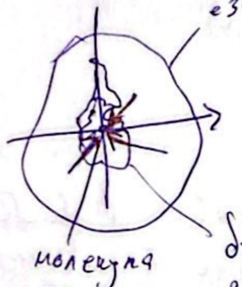
⊕ - пример

оценка важна за август/сеп от сем и практ.

оценяване: средноаритметично от 3-те комп.

1) 06.09.2009 в 2 последователни тиража на тото 2 6/49 → ! Обсъждано в Imperial college

2)



Р. Браун (1827) - придвижение на движение на полена

А. Айнщайн (1905) - хаотично движение на частиците (кинетична теория на молекулите)

Ж. Перон (1927) - придвижава числово на Авогадро!

(?!)

стохастика

3) система Бонус-Малус -

1		5		…	N
0,85	0,9	1	1,2	…	2,5

групи на шофьори

200 × 1,2

годишна застраховка

коефициент като оценка на шофьора

$x_0 = 5 \xrightarrow{\text{без нарушение}} x_1 = 4$

със нарушение

$x_1 = 8$ $\quad f(x_1)$

$E f(x_n) \simeq 1$

среден Бонус-Малус

Деф: Случаен експеримент/опит

- опит, при който изходът не е предетерминиран.
- всеки възможен изход бележим с ω, мн-вото от $\forall$ възможни изходи означаваме с Ω

⊕ а) $\Omega = \{$ези, тура$\}$

$\Omega = \{$мъж, жена$\}$

$\Omega = \{0, 1\}$

б) зар: хвърляне на зар: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\omega_5 = \{5\}$ - хвърляне на 5ца

в) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ — тото 6 бройки

$\omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$N = \binom{49}{6} = 13983816$

Деф. Събитие

елементарно

- всеки възмо… от случаен екс…

може да бъде числа, функции

г) брауново движение

$\Omega = \{ w$ - непрекъснати функции в $\mathbb{R}^2$ с $w(0) = (0,0) \}$

елементарното събитие е функция

д) Бонус-мянус!

Деф. Ако A е някакво мн-во то |A| означаваме неговата кардиналност

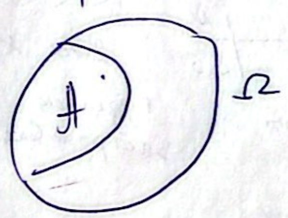
е) история на тото машина има ... изчисля

$\Omega = \bigotimes_{i=1}^{10001} \Omega_i$ $\quad \Omega_i = \Omega$ от в? $\quad w = \{ w^{(1)}, \dots, w^{(10001)} \}$

- $\Omega = R_+ = [0, \infty)$ $\quad w = t \quad w_t = \{t\},\ t \geq 0$ неизброимо много елем. събития

$\Omega = N = \{0, 1, 2, \dots\}$

Деф | Нека Ω е съвк. от ел. събития, тогава $A \subseteq \Omega$ наричаме ~~(колекция от)~~ събитие. Най-често A е мн-во от елем. събития, групирани по някакъв признак

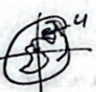


⊕ $\Omega = \{$клиенти$\}$, $A = \{$клиенти, от които са жени$\}$

⊕ $\Omega = R_+$; $A = (a, \infty)$, $a > 0$ / $A = (a, b)$ е събитие стига $0 \leq a < b < \infty$ интервал

⊕ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\} = \{$пада се нечетно число$\}$

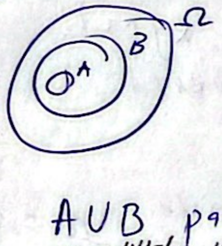
⊕ $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\quad \{w_i\} = A \to$ печелите джакпот



$A = \{ w \in \Omega : w \in U$ за някакъв момент от време$\}$ частицата се намира в U в някакъв момент

Операции с мн-ва (със събития)

- $A \subseteq B \subseteq \Omega$, ако от $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$
- $A = B \Leftrightarrow \forall w \in A \Rightarrow w \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$
  $\forall w \in B \Rightarrow w \in A \quad B \subseteq A$



Деф | ('или') обединение Нека $A, B \subseteq \Omega$, тогава под $A \cup B$ разбираме $\forall w$, т.ч. $w \in A$ или $w \in B$ (съвкупност от 2-те мн-ва на елементарни събития)

-> $A = \{$гласувам за X$\}$ $\quad \Omega = \{$избиратели$\}$

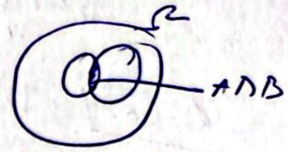
$B = \{$под 30 г$\}$ $\quad A \cup B = \{$избиратели под 30г в съвкупност с избирателите на X$\}$

Scanned with CamScanner

Деф.) 'и' (сечение) Нека $A, B \subseteq \Omega$ $w \in A \cap B$, то $w \in A$ и $w \in B$

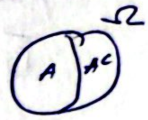
$A \cap B = \{$ всички избиратели под 30г., които са гласували за +Ч

- 2 признака трябва да са удовлетворени



Деф.) 'допълнение' (отрицание) Нека $A \subseteq \Omega$, то $A^c = \Omega \setminus A$

$\forall w \in \Omega$: ~~$w \in A^c$~~, където $w \notin A$



$A^c = \{$ всички над 30 год.$\}$

$A^c = \bar{A}$

→ свойства

- комутативност $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$
- асоциативност $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- дистрибутивност $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- закони на де Морган

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\Big(\bigcup_i A_i\Big)^c &= \bigcap_i A_i^c \\ \Big(\bigcap_i A_i\Big)^c &= \bigcup_i A_i^c\end{aligned}$$

$w \in \left(\bigcup_i A_i\right)^c \Rightarrow w \notin A_i \ \forall i \Rightarrow w \in A_i^c \ \forall i$

$\left(\bigcup_i A_i\right)^c \subseteq \bigcap_i A_i^c \qquad \Rightarrow w \in \bigcap_i A_i^c$

$w \in \bigcap_i A_i^c \Rightarrow w \in A_i^c \ \forall i \Rightarrow w \in A_i \ \forall i$

$\Rightarrow w \notin \bigcup_i A_i$

$A_i \subset \Omega, \ \forall i \geq 1 \qquad \Rightarrow w \in \left(\bigcup_i A_i\right)^c$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i$, за поне едно $i\}$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{w \in \Omega : w \in A_i$, за $\forall i\}$

Деф.) (σ-алгебра) Нека Ω е мн-во от елем. събития, $\mathcal{A}$ е колекция от под-множества на Ω. Казваме, че $\mathcal{A}$ е σ-алгебра, ако

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ (ако можем да измерим вероятност за A, можем и за $\bar{A}$)
3) Ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

В частност: ако $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Следствие: Ако $\mathcal{A}$ е σ-алгебра и $A_i \in \mathcal{A}$ за $\forall i \geq 1$, то

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Д-во: $B \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

Ако $\overline{B} \in \mathcal{A} \xrightarrow{2) \text{ аксиома}} B \in \mathcal{A}$ $\quad (\varnothing)^c = \Omega$, $\in \mathcal{A}$

$$\overline{B} = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \overset{\text{де Морган}}{=\!=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad \underbrace{\big(\underbrace{\bigcup \underbrace{A_i^c}_{\in \mathcal{A} \text{ от } 2)}}_{\in \mathcal{A} \text{ от } 3)}\big)^c}_{\in \mathcal{A} \text{ от } 2)} = \bigcap A_i$$

от $A_i \in \mathcal{A} \overset{2)}{\Rightarrow} A_i^c \in \mathcal{A}$

$$\overset{3)}{\Rightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$$

⊕ $\Omega = \{0,1\} \longrightarrow \mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ $(\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega^c = \varnothing \in \mathcal{A})$

$\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ $\searrow \mathcal{A}_2 = 2^{\Omega} = \{\Omega, \varnothing, \{0\}, \{1\}\}$

$|\mathcal{A}_2| = 2^2 = 4$

~~* нарича~~ * нарича се тривиално мн-во

⊕ $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad \mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$|\mathcal{A}| = 2^n$

⊕ $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

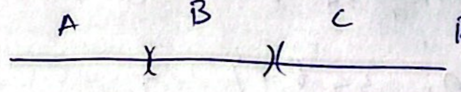
$N = 13983816 = \binom{49}{6}$ $\quad \mathcal{A} = 2^{\Omega} \Rightarrow |\mathcal{A}| = 2^{\binom{49}{6}}$

Деф/ $\mathcal{B}$ е произволна колекция от ~~подмнож~~ подмн-ва на Ω, под $\sigma(\mathcal{B})$ ще разбираме най-малката σ-алгебра, която съдържа $\mathcal{B}$

σ-алгебра има карди-налност
Борелова има кардинал-ност

$\sigma(\mathcal{B}) \subseteq 2^{\Omega}$

⊕ $\Omega = \mathbb{R}$



не може да използваме 2^{Ω}, а се работи с $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, съдържаща всички от борели интервали (борелова)

$C = \{$мн-во от $\forall$ интервали$\}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$: мн-во от всички отворени интервали

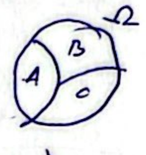
$\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega^{\mathbb{R}}, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$

$x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \overset{?}{\in} \mathcal{B}(\mathbb{R})$

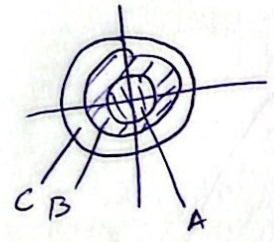
Деф | Нека $A \in \mathcal{A}$ (σ-алгебра). Наричаме A атом, ако от $B \subsetneq A$ (строго подмн-во) и $B \neq \emptyset \Rightarrow B \notin \mathcal{A}$

+ $\{x\}$ е атом в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, B, C, \dots\}$



+



$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$

$A = \{x^2+y^2 \le 1/9\}$

$B = \{x^2+y^2 \le 4/9\} \setminus A$

$C = (A \cup B)^c$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, B, C, A\cup B, A \cup C, B \cup C\}$ вместо да използваме бореловата

+ 10001 тиража до 6.9.2009, 6 от 49, шесторка от тираж

$\Omega = \bigotimes_{i=1}^{10001} \Omega_i ; \quad \omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(10001)}) \quad \omega^{(1)} \in \Omega, \dots, \omega^{(i)} \in \Omega$

всички възможни шесторки $\Omega_i = \{\omega_1, \dots, \omega_{13983816}\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$A = \bigcup_{i=1}^{10000} A_i, \quad A_i = \{\omega \in \Omega : \omega^{i} = \omega^{i+1}\}, \ i \le 10000$

A: ~~вадят шесторки~~ паднали са поне веднъж 2 еднакви наредени 6-орки в 2 последователни тиража

$P(A) \approx ?$

Деф | (Вероятност) Нека Ω е мн-во от елем. събития, $\mathcal{A}$ е σ-алгебра над Ω. Тогава $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност/вероятностна ф-я ако

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) ако $A \in \mathcal{A}$, то $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3) ако $A_i, i \ge 1$ са елементи на $\mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ (непресичащи се мн-ва) за $\forall i \neq j$, то $\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)}_{\sigma\text{-адитивност}}$

$\boxed{\text{Вероятността е мярка}}$

в частност: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Заради 3) ползваме σ-алгебра

ползваме σ-алгебра за да не включваме пресичащи се множества, а 2^{Ω} ги включва

да обясни отново