Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Домашно 1

Зад. 1. 1. От 10 стандартни тестета от 52 карти се тегли по една карта. Намерете вероятността в получената ръка от 10 карти

а) да няма повтарящи се

б) да има поне 3 аса

в) да има 4 спатии, 3 купи и 1 пика

г) броят на черните карти да с точно 4 повече от броя на червените, ако е известно, че черните карти са повече от червените

- а) Вероятността да няма повтарящи се в получена ръка от 10 тегления по 1 карта от 10 стандартни тестета от 52 карти е $\frac{(52*51*50*49*48*47*45*46*44*43)}{52^{10}}$

- б) Вероятността да има поне 3 аса в получената ръка ще изчислъм с това че ще намерим вероятността да има по-малко от 3 аса в ръката.
  За да намерим вероятността да получим по-малко от 3 аса, като използваме биномното разпределение, можем да получин сумата от вероятността да получим 0, 1 и 2 аса.

  P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)

  X е броят аса, а P(X) е вероятностната на биномното разпределение.

  Вероятнстта да получим точно 0, 1 и 2 аса е:
  P(X = 0) =$\binom{10}{0}\left(\frac{4}{52}\right)^0\left(\frac{48}{52}\right)^{10}$= 0,449
  P(X = 1) = $\binom{10}{1}\left(\frac{4}{52}\right)^1\left(\frac{48}{52}\right)^9$= 0,374
  P(X = 2) = $\binom{10}{2}\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{48}{52}\right)^8$= 0,14
  Така че вероятността да получим по-малко от 3 аса е:
  P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2), или P(X < 3) = 0,963, което означава че вероятността да има поне 3 аса в получената рака е P(X ≥ 3) 1- P(X < 3) = 1 - 0,963 = 0,037

- г) Първо, нека дефинираме някои променливи:

  Нека B е броят на черните карти в получената ръка от 10 карти.
  Нека R е броят на червените карти в получената ръка от 10 карти.
  От условието на задачата знаем, че B > R и че искаме да намерим вероятността B = R + 4 и B + R = 10. От тези уравнения следва:
  B = 7, R = 3

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Вероятността да изтеглиме червена карта е:
26/52 = 1/2

Вероятността да изтеглиме черна карта е:
26/52 = 1/2

P(B, R) = $\frac{10!}{\mathrm{B}! * (10-\mathrm{B})!} * \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{B}} * \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{R}}$

Като се има предвид, че B = 7 и R = 3, можем да заместим тези стойности в горното уравнение:

P(7, 3) = $\frac{10!}{7! * (10-7)!} * \left(\frac{1}{2}\right)^{7} * \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

Вероятността да имаме точно 4 черни карти повече от червени карти в резултатна ръка от 10 карти, където B = R + 4 е 0,117.

3. Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$, a, b ∈ [0, 1] да бъдат реални числа?

- Корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$ са реални тогава и само тогава, когато дискриминантата, е неотрицателна.

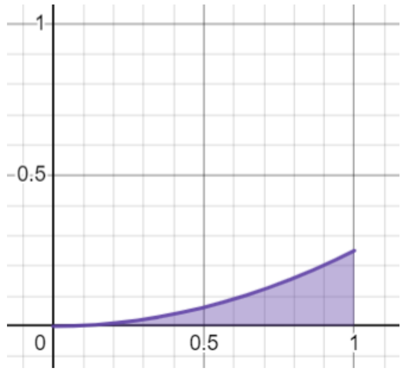
  Квадратната формула е $\mathrm{Ax}^2 + Bx + C$, а дискриминантата получаваме чрез $\mathrm{B}^2 - 4AC$. Дискриминантата в случая се получава $\mathrm{B}^2 - 4AC = \mathrm{a}^2 - 4b$.

  За да бъдат корените реални, дискриминантата $\mathrm{a}^2 - 4b$ трябва да е неотрицателна, така че $\mathrm{a}^2 \geq 4b$.

  За да бъдат стойностите на a и b между 0 и 1, имаме, че b е между 0 и 1 и a е между 0 и 1.

  Неравенството е изпълнено за всички стойности под (или върху) кривата $b = \frac{\mathrm{a}^2}{4}$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352



Ако b<0, ясно е че неравенството е изпълнето за всяка стойност на a. За b≥0, използваме интеграла $\int_0^1 \frac{a^2}{4} da = \frac{1}{12}$.

При положение, че a и b са равномерно разпределени случайни променливи, вероятността двойката (a, b) да попадне в валидния регион е площта на валидния регион, разделена на общата площ, която е $\frac{\frac{1}{12}}{1} = \frac{1}{12}$.

Зад. 3. По две от страните на правилен зар са оцветени в съответно бяло, зелено и червено. върляме този зар два пъти. Нека X е броят на падналите се бели, а Y - на падналите се червени страни. Да се намерят съвместното разпределение на X и Y, независими ли са, ковариацията им, P(X = 1|Y = 1) и P(X > Y).

- Съвместното разпределение на X и Y може да се намери чрез изброяване на всички възможни резултати от хвърляне на зара два пъти и съответните им вероятности. Тъй като зарът е правилен и има две бели страни, две зелени страни и две червени страни, съвместното разпредение изглежда така:

X\Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

P(X=x, Y=y) =
P(X=2, Y=1) = P(X=1, Y=2) = P(X=2, Y=2) = 0
P(X=0, Y=0) = 1/9
P(X=1, Y=0) = 2/9
P(X=2, Y=0) = 1/9
P(X=0, Y=1) = 2/9
P(X=1, Y=1) = 2/9
P(X=0, Y=2) = 1/9; за x, y ϵ {0, 1, 2}

Ковариацията на X и Y може да се изчисли с помощта на формулата Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y), където E(X) и E(Y) са очакваните стойности на X и Y съответно, а E(XY) е очакваната стойност на произведението на X и Y.

E[X] = np = 2(1/3) = 2/3
E[Y] = np = 2(1/3) = 2/3
E[XY] = (n*p)^2 = (2 * (1/3))^2 = 2/9

Така,
Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 2/9 - (2/3)(2/3) = 2/9 - 4/9 = -2/9

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Следователно ковариацията на X и Y е -2/9.

Щом коварияцията не е еднаква на 0, това означава, че X и Y не са независими.

Накрая,

$P(X = 1|Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) / P(Y = 1) = (2/9) / (3/9) = 2/3$

$P(X > Y) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 1/9 + 2/9 = 1/3$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Домашно 2

Зад. 1. 1. Да се докаже комбинаторно, че $\frac{\mathrm{n}!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

- Развиваме двете страни на равенството

$\rightarrow$

$$\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} = \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*2*1}{(n-k-1)*(n-k-2)*(n-k-3)*\ldots*2*1}$$

$$= \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k)*\cancel{(n-k-1)*\ldots*2*1}}{\cancel{(n-k-1)*(n-k-2)*(n-k-3)*\ldots*2*1}}$$

$$= (n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k)$$

$$k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} = k * \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*2*1}{(n-k-1)*(n-k-2)*(n-k-3)*\ldots*2*1}$$

$$= k * \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k+1)*\cancel{(n-k)*\ldots*2*1}}{\cancel{(n-k)*(n-k-1)*(n-k-2)*\ldots*2*1}}$$

$$= k * (n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k+1)$$

$\leftarrow$

$$\frac{\mathrm{n}!}{(n-k)!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*2*1}{(n-k)*(n-k-1)*\ldots*2*1}$$

$$= \frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)*\cancel{(n-k)*\ldots*2*1}}{\cancel{(n-k)*(n-k-1)*\ldots*2*1}}$$

$$= n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)$$

С развиване на равенството получаваме:

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = (n-1)*\ldots*(n-k+1)*(n-k) + k*(n-1)*\ldots*(n-k+1)$$

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = (n-1)*\ldots*(n-k+1)[(n-k)+k]$$

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = (n-1)*\ldots*(n-k+1)[n\cancel{-k+k}]$$

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = n*(n-1)*\ldots*(n-k+1)$$

Тъй като получихме че двете страни на равенството са равни, $\frac{\mathrm{n}!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ е доказано.

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

2. Да се пресметне вероятността при едновременно хвърляне на m зара и n монети да се паднат само шестици и езита, ако заровете и монетите са правилни.

- По условие, че заровете и монетите са правилни и независими един от друг и че резултатът от един зар или хвърляне на монета не влияе на резултата от друг зар или хвърляне на монета.

  Вероятността при хвърляне на зар да се падне 6 е 1/6, а вероятността при хрърляне на монета да се падне ези е 1/2. За да изчислим вероятността m зара и n монети да попаднат съответно на 6 и ези, можем да използваме формулата за вероятността от независими събития:

  P(m зара попадат на 6 и n монети попадат на ези) = (1/6)^m * (1/2)^n

Зад. 3. За даден експеримент се провеждат Y ∼ Poi(λ) независими опита, като всеки от тях може да бъде успешен с вероятност p и неуспешен с вероятност 1 − p. Да се намери разпределението на броя на успешните опити X.

- Провеждат се Y опити на Бернули $X \sim Bin(Y, p)$. Следователно,
$$P(X = k) = \binom{Y}{k} p^k (1-p)^{Y-k}$$
  От $Y \sim Poi(\lambda) \Longrightarrow P(Y = t) = \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$.

  Така,
$$P(X = k|Y = y) = \binom{y}{k} p^k (1-p)^{y-k}$$
$$P(X = k) = \sum_{y=0}^{\infty} P(X = k|Y = y) P(Y = y)$$

$$P(X = k) = \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y}{k} p^k (1-p)^{y-k} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{y=k}^{\infty} \binom{y}{k} \frac{\lambda^y}{y!} (1-p)^y$$

Зад. 4. Нека за случайните величини X и Y е дадено E[X] = 0, E[Y] = −3, D(X) = 1, D(Y) = 4 и

$\rho_{X,Y} = -\sqrt{2}/2$. Да се пресметнат очакването и дисперсията на Z = 3X − 4Y.

- За да изчислим очакването на Z = 3X − 4Y, използваме следната формула:

  E[Z] = E[3X − 4Y] = 3E[X] − 4E[Y] = 0 − 4(−3) = 12

  За изчисляване на дисперсията на Z използваме формулата:

  $D(aX \pm bY + c) = a^2D(X) + b^2D(Y) \pm 2abCov(X, Y)$

  От $\rho_{X,Y}$ получаваме ковариацията на X и Y, тъй като $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

  ⇨ $Cov(X, Y) = \rho_{X,Y} * \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$
  $= -\sqrt{2/2} * \sqrt{1} * \sqrt{2}$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

$= -\sqrt{(2/2)*2} = -\sqrt{2}$

D(Z) = D(3X-4Y)
$= 9D(X)+16D(Y) - 2*3*4*- \sqrt{2}$
$= 9 + 16*4 + 23* \sqrt{2}$
= 106,9

Зад. 5. Урна съдържа 2 бели, 2 черни и 6 зелени топки. Изваждат се една по една с връщане 20 топки. Каква е вероятността да изтеглим с 4 повече бели топки отколкото черни?

- Нека X претставява броя на бели топки изтеглено, а Y броя на черни топки изтеглено.

  Първо ще проверим дали X и Y са независими, чрез тяхната коварияция. Ковариацията на X и Y може да се изчисли с помощта на формулата Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y), където E(X) и E(Y) са очакваните стойности на X и Y съответно, а E(XY) е очакваната стойност на произведението на X и Y.

  Вероятноста да се изтегли бяла топка е 1/5, а черна 1/5.

  E[X] = np = 20(1/5) = 4
  E[Y] = np = 20(1/5) = 4
  E[XY] = (n*p)^2 = (20 * (1/5))^2 = 16

  Така,
  Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 16 – 4*4 = 0

  Следователно ковариацията на X и Y е 0, което означава че двете случайни величини са независими.

  В случай че са независими можем да приложим P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).
  X и Y имат биномно разпределение получаваме вероятностите:
  Търсим вероятностите за y ϵ {0, 1, … , 8}, а от условието че търсим вероятностите да изтеглим 4 повече бели топки отколкото черни x = y+4 => x ϵ {4, 5, … ,12}
  Разпределението за X:

$P(X=4) = \binom{20}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{16} = 0{,}218$

$P(X=5) = \binom{20}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{15} = 0{,}175$

$P(X=6) = \binom{20}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{14} = 0{,}109$

$P(X=7) = \binom{20}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{13} = 0{,}0545$

$P(X=8) = \binom{20}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{12} = 0.022$

$P(X=9) = \binom{20}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\left(\frac{4}{5}\right)^{11} = 0.007$

$P(X=10) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0.002$

$P(X=11) = \binom{20}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11}\left(\frac{4}{5}\right)^{9} = 0.00046$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

$P(X=12) = \binom{20}{12}\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{8} = 0.00009$

$P(Y=0) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{20} = 0{,}011$

$P(Y=1) = \binom{20}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 0{,}058$

$P(Y=2) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{18} = 0{,}137$

$P(Y=3) = \binom{20}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{17} = 0{,}205$

$P(Y=4) = \binom{20}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{16} = 0.218$

$P(Y=5) = \binom{20}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{15} = 0.175$

$P(Y=6) = \binom{20}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{14} = 0.109$

$P(Y=7) = \binom{20}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{13} = 0.0545$

$P(Y=8) = \binom{20}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{12} = 0.022$

От $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$:

$P(X = 4, Y = 0) = P(X = 4)P(Y = 0) = 0{,}002$
$P(X = 5, Y = 1) = P(X = 5)P(Y = 1) = 0{,}01$
$P(X = 6, Y = 2) = P(X = 6)P(Y = 2) = 0{,}15$
$P(X = 7, Y = 3) = P(X = 7)P(Y = 3) = 0{,}011$
$P(X = 8, Y = 4) = P(X = 8)P(Y = 4) = 0{,}0048$
$P(X = 9, Y = 5) = P(X = 9)P(Y = 5) = 0{,}0012$
$P(X = 10, Y = 6) = P(X = 10)P(Y = 6) = 0{,}0002$
$P(X = 11, Y = 7) = P(X = 11)P(Y = 7) = 0{,}000025$
$P(X = 12, Y = 8) = P(X = 12)P(Y = 7) = 0{,}00000198$

Събираме всички вероявности и получаваме

P(теглим 4 повече бели топки отколкото черни) = 0,179

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Домашно 3

Зад. 2. Студенти влизат последователно на изпит, показвайки личната си карта. Преди изпита е обявено, че първият студент, чийто рожден ден съвпада с рождения ден на вече влязъл студент, ще получи единица бонус към оценката си. На кое място трябва да застанете в редицата от студенти, за да имате най-голям шанс да сте печелившия студент?

- Вероятността двама или повече души да имат един и същ рожден ден в група от n души се получава от:

  $$P(n) = 1 - \frac{364^{\mathrm{n}}}{365}$$

  Променяме въпроса в задачата в: за какво n е p(n) − p(n − 1) максимално?
  Разликата между p(n) и p(n-1) се получава от:

  $$\mathrm{P}(n)\ -\ \mathrm{P}(n-1)\ = (364/365)^{(n-1)}\ *\ (364/365)^{n}$$

Разликата нараства с увеличаване на n и достига своя максимум при n=20. Значи най-добрата позиция е 20.

Зад. 4. Нека N ∼ Poi(λ) и X1, X2, · · · ∼ Ber(p) са независими. Нека X = X1 + · · · + XN и Y = N − X. Да се докаже, че X и Y са независими. Обратно, ако разпределението на N е неизвестно и X и Y са независими, то да се докаже, че N е Поасоново разпределена случайна величина.

- Първо, нека докажем, че X и Y са независими, когато N ∼ Poi(λ) и X1, X2, · · · ∼ Ber(p)

  X и Y са зависими от N, но N е независимо от X1, X2, · · · , така че можем да използваме свойството на условна независимост: ако A и B са независими, а C и D са независими, тогава A, B, C и D са независими, ако A и C са независими, или A и D са независими, или B и C са независими, или B и D са независими.

  Можем да видим, че X и Y са независими, защото са независими един от друг, при дадено N, а N е независим от X1, X2, · · ·.

  Сега нека докажем, че ако X и Y са независими и разпределението на N е неизвестно, тогава N ∼ Poi(λ).

  Тъй като X и Y са независими, можем да използваме свойството на независими случайни променливи: X + Y = N, така че разпределението на N е конволюцията на разпределенията на X и Y. Тъй като X1, X2, · · · ∼ Ber(p), разпределението на X е биномно и разпределението на Y също е биномно.

  Конволюцията на биномиално разпределение и друго биномиално разпределение е разпределение на Поасон. Следователно, тъй като N е конволюцията на разпределенията на X и Y, N ∼ Poi(λ).

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Зад. 5. Нека $X1, X2, \ldots, Xn \sim U([0, 1])$ са независими и еднакво разпределени сл.вел. Намерете $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1)$.

- Случайните променливи $X1, X2, \ldots, Xn$ са независими и равномерно разпределени, така че всички следват равномерно разпределение по интервала $[0, 1]$.

  За да намерим $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1)$, можем да разгледаме вероятността сборът от случайните променливи да е по-малък или равен на 1.

  Тъй като всички случайни променливи са независими и имат еднакво равномерно разпределение по $[0, 1]$, сумата от n случайни променливи също ще има равномерно разпределение по $[0, n]$.

  Следователно вероятността сумата от случайните променливи да е по-малка или равна на 1 е:

  $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1) = P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1/n) = 1/n$

  И така, $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1) = 1/n$.