Това домашно не носи точки, но може да служи като ориентир за някои от видовете аргументи, които ще трябва да правите на изпита по теория. Приятна работа.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Да припомним, че за* $A \subset \Omega$ *бележим* $\overline{A} = \Omega \setminus A$*. За удобство, дефинираме* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задача 1. За $A, B \subset \Omega$ да дефинираме $A\Delta B := (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Изразете $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ чрез индикаторните функции $\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B$ и $\mathbb{1}_C$.

Задача 2. Докажете, че за $A, B \subset \Omega$, т. че $\mathbb{P}(B) \neq 0$, е изпълнено

$$\mathbb{P}(A|B) \geq \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}{\mathbb{P}(B)}.$$

Задача 3. Тестват се за Ковид n души по следната процедура: пробите се събират заедно и ако тестът е отрицателен, всички се декларират здрави, а ако е положителен, всеки се тества отново с индивидуален тест. В популацията има 4 кръвни групи (КГ$_i$, $i = 1, 2, 3, 4$) с равна представителност от $1/4$. Сред КГ$_1$ има 10% заразени, сред КГ$_2$ има 1% заразени, сред КГ$_3$ има 5% заразени и сред КГ$_4$ има 4% заразени. Всеки от $n-$те тествани индивида се допуска, че е с кръвна група, независима от тази на всички останали $n-1$ души и падаща се с вероятността на представителността на кръвната група в популацията.
Цената на общия тест е 1 лев, а цената на всеки индивидуален тест е 1.25 лева.

- Съставете модел, който отразява очакваната цена $p_c(n)$ на един тестван по тази процедура човек.
- Третирайки n като непрекъсната променлива x, изведете уравнение за x (без да го решавате), което ви задава x^*, такова че $p_c(x^*) = \min_{x>0}\{p_c(x)\}$.
- При желание, намерете с помощта на компютър за кое n^* се получава минимална единична цена и нейната стойност.

Задача 4. Нека X е случайна величина със стойности в $\mathbb{N}_0$. Нека $H_X(\lambda) := \mathbb{E}e^{-\lambda X}$ за $\lambda \geq 0$.

- Докажете, че $H_X(\lambda) \leq 1$ и чрез формално диференциране по λ под знака на очакването, изразете $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}X^2$.
- Изразете пораждащата функция на X, т.е. s_X, чрез H_X.
- За $X \sim Bin(n, p)$, намерете $H_X(\lambda)$ и чрез нея $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}X^2$.

Задача 5. Работата на централа за конкретен ден зависи от отклонението от очакването на параметър, моделиран със случайна величина X с $\mathbb{E}X = 1, DX = 0.01$, т.е. от $Y = |X - 1|$. Поради съществуваща екологична опасност при големи отклонения от средното, регулаторен орган налага глоба от $g(n)$ лева, ако $Y \in (n, n+1], n \geq 2$.

- Намерете горна граница за стойностите на $f(a) = \mathbb{P}(Y > a)$.
- Според независими експерти за $g(n) = n^{3/2}$ е вярно, че $\lim_{n\to\infty} g(n)\mathbb{P}(Y \in [n, n+1)) = 0$ и глобите не са достатъчно ефективни. Вярно ли е тяхното твърдение за границата?

Задача 6. Нека $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ са независими случайни величини с Поасоново разпределение. Следователно имаме за $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Чрез тези случайни величини се моделира процес на раждане чрез $Y_n = (1 + X_n)Y_{n-1}, n \geq 1, Y_0 = 1$ и процес на раждане и умиране чрез $Z_n = X_n Z_{n-1}, n \geq 1, Z_0 = 1$.

- Кога казваме, че редица от сл.вел. ξ_n клони почти сигурно към сл. вел. ξ?
- Съществува ли граница на редицата $\frac{1}{n}\log Y_n$ и коя е тя? За какъв тип сходимост става въпрос? Вярно ли е, че $\mathbb{E}Y_n$ расте с експоненциална скорост?
- Пресметнете $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$ и докажете, че Z_n клони към 0 почти сигурно, т.е. процесът изчезва почти сигурно. Вярно ли е, че $\mathbb{E}Z_n$ расте с експоненциална скорост при $\lambda > 1$?

Задача 7. Зар с шест стени се хвърля 3×10^{12} пъти и се образува броя X на падналите се от тези хвърляния единици или тройки. Слаб студент трябва да отговори на следните въпроси:

- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12}$?

- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12} + 10^3$?
- Каква е вероятността (*приблизително*) за $X > 10^{12} + 10^9$?

Студентът не знаел какво да прави и отговарял навсякъде 50 на 50 или 1/2. На колко и на кои въпроси е отговорил правилно? Обосновете математически отговора си.

Задача 8. Времетраенето на придобит към вирус имунитет се моделира с непрекъсната, експоненциално разпределена случайна величина X с параметър λ, а силата на имунитета се измерва от непрекъсната случайна величина Y с плътност $f_Y(y) = \beta y^{\beta-1}, 0 < y \le 1, \beta > 0$. Нека $\overrightarrow{X} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\overrightarrow{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ са n наблюдения върху X и Y. Намерете максимално правдоподобни оценки за λ и β. Състоятелни ли са тези оценки?

Задача 9. Ваксина преминава изпитания на фаза 3, като са тествани $n = 10000$ души, от които 9000 са получили имунитет. Допуска се, че получилите имунитет са $X \sim Bin(10000, p)$. Как бихте конструирали симетрична критична област за тестването на нулевата хипотеза $H_0 : p = 0.9$ с грешка от първи род $\alpha = 0.01$? Имате ли основания да мислите, че тази критична област е близка до оптималната критична област?