Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Домашно 1

Зад. 1. 1. От 10 стандартни тестета от 52 карти се тегли по една карта. Намерете вероятността в получената ръка от 10 карти

а) да няма повтарящи се

б) да има поне 3 аса

в) да има 4 спатии, 3 купи и 1 пика

г) броят на черните карти да с точно 4 повече от броя на червените, ако е известно, че черните карти са повече от червените

- а) Вероятността да няма повтарящи се в получена ръка от 10 тегления по 1 карта от 10 стандартни тестета от 52 карти е $\frac{(52*51*50*49*48*47*45*46*44*43)}{52^{10}}$

- б) Вероятността да има поне 3 аса в получената ръка ще изчислъм с това че ще намерим вероятността да има по-малко от 3 аса в ръката.
  За да намерим вероятността да получим по-малко от 3 аса, като използваме биномното разпределение, можем да получин сумата от вероятността да получим 0, 1 и 2 аса.

  P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)

  X е броят аса, а P(X) е вероятностната на биномното разпределение.

  Вероятнстта да получим точно 0, 1 и 2 аса е:
  P(X = 0) =$\binom{10}{0}\left(\frac{4}{52}\right)^0\left(\frac{48}{52}\right)^{10}$= 0,449
  P(X = 1) = $\binom{10}{1}\left(\frac{4}{52}\right)^1\left(\frac{48}{52}\right)^{9}$= 0,374
  P(X = 2) = $\binom{10}{2}\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{48}{52}\right)^{8}$= 0,14
  Така че вероятността да получим по-малко от 3 аса е:
  P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2), или P(X < 3) = 0,963, което означава че вероятността да има поне 3 аса в получената рака е P(X ≥ 3) 1- P(X < 3) = 1 - 0,963 = 0,037

- г) Първо, нека дефинираме някои променливи:

  Нека B е броят на черните карти в получената ръка от 10 карти.
  Нека R е броят на червените карти в получената ръка от 10 карти.
  От условието на задачата знаем, че B > R и че искаме да намерим вероятността B = R + 4 и B + R = 10. От тези уравнения следва:
  B = 7, R = 3

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Вероятността да изтеглиме червена карта е:
26/52 = 1/2

Вероятността да изтеглиме черна карта е:
26/52 = 1/2

P(B, R) = $\frac{10!}{B! * (10- \quad)!} * \left(\frac{1}{2}\right)^{B} * \left(\frac{1}{2}\right)^{R}$

Като се има предвид, че B = 7 и R = 3, можем да заместим тези стойности в горното уравнение:

P(7, 3) = $\frac{10!}{7! * (10-7)!} * \left(\frac{1}{2}\right)^{7} * \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

Вероятността да имаме точно 4 черни карти повече от червени карти в резултатна ръка от 10 карти, където B = R + 4 е 0,117.

3. Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$, a, b ∈ [0, 1] да бъдат реални числа?

- Корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$ са реални тогава и само тогава, когато дискриминантата, е неотрицателна.

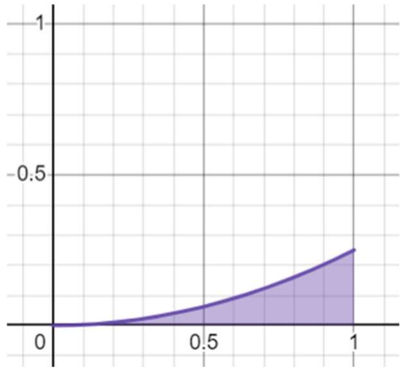
  Квадратната формула е $\mathrm{Ax}^2 + Bx + C$, а дискриминантата получаваме чрез $\mathrm{B}^2 - 4AC$. Дискриминантата в случая се получава $\mathrm{B}^2 - 4AC = \mathrm{a}^2 - 4b$.

  За да бъдат корените реални, дискриминантата $\mathrm{a}^2 - 4b$ трябва да е неотрицателна, така че $\mathrm{a}^2 \geq 4b$.

  За да бъдат стойностите на a и b между 0 и 1, имаме, че b е между 0 и 1 и a е между 0 и 1.

  Неравенството е изпълнено за всички стойности под (или върху) кривата $b = \frac{\mathrm{a}^2}{4}$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352



Ако b<0, ясно е че неравенството е изпълнето за всяка стойност на a. За b≥0, използваме интеграла $\int_0^1 \frac{a^2}{4} da = \frac{1}{12}$.

При положение, че a и b са равномерно разпределени случайни променливи, вероятността двойката (a, b) да попадне в валидния регион е площта на валидния регион, разделена на общата площ, която е $\frac{\frac{1}{12}}{1} = \frac{1}{12}$.

Зад. 3. По две от страните на правилен зар са оцветени в съответно бяло, зелено и червено. върляме този зар два пъти. Нека X е броят на падналите се бели, а Y - на падналите се червени страни. Да се намерят съвместното разпределение на X и Y, независими ли са, ковариацията им, P(X = 1|Y = 1) и P(X > Y).

- Съвместното разпределение на X и Y може да се намери чрез изброяване на всички възможни резултати от хвърляне на зара два пъти и съответните им вероятности. Тъй като заръът е правилен и има две бели страни, две зелени страни и две червени страни, съвместното разпредение изглежда така:

X\Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

P(X=x, Y=y) =
P(X=2, Y=1) = P(X=1, Y=2) = P(X=2, Y=2) = 0
P(X=0, Y=0) = 1/9
P(X=1, Y=0) = 2/9
P(X=2, Y=0) = 1/9
P(X=0, Y=1) = 2/9
P(X=1, Y=1) = 2/9
P(X=0, Y=2) = 1/9; за x, y ϵ {0, 1, 2}

Ковариацията на X и Y може да се изчисли с помощта на формулата Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y), където E(X) и E(Y) са очакваните стойности на X и Y съответно, а E(XY) е очакваната стойност на произведението на X и Y.

E[X] = np = 2(1/3) = 2/3
E[Y] = np = 2(1/3) = 2/3
E[XY] = (n*p)^2 = (2 * (1/3))^2 = 2/9

Така,
Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 2/9 - (2/3)(2/3) = 2/9 - 4/9 = -2/9

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Следователно ковариацията на X и Y е -2/9.

Щом коварияцията не е еднаква на 0, това означава, че X и Y не са независими.

Накрая,

$P(X = 1|Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) / P(Y = 1) = (2/9) / (3/9) = 2/3$

$P(X > Y) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 1/9 + 2/9 = 1/3$