Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

# Домашно 3

**Зад. 2.** Студенти влизат последователно на изпит, показвайки личната си карта. Преди изпита е обявено, че първият студент, чийто рожден ден съвпада с рождения ден на вече влязъл студент, ще получи единица бонус към оценката си. На кое място трябва да застанете в редицата от студенти, за да имате най-голям шанс да сте печелившия студент?

- Вероятността двама или повече души да имат един и същ рожден ден в група от n души се получава от:

  $$P(n) = 1 - \frac{364^{\mathrm{n}}}{365}$$

  Променяме въпроса в задачата в: за какво n е p(n) − p(n − 1) максимално?
  Разликата между p(n) и p(n-1) се получава от:

  $$\mathrm{P}(n) \; - \; \mathrm{P}(n-1) \; = (364/365)^{(n-1)} \; * \; (364/365)^{n}$$

Разликата нараства с увеличаване на n и достига своя максимум при n=20. Значи най-добрата позиция е 20.

**Зад. 4.** Нека N ∼ Poi(λ) и X1, X2, · · · ∼ Ber(p) са независими. Нека X = X1 + · · · + XN и Y = N − X. Да се докаже, че X и Y са независими. Обратно, ако разпределението на N е неизвестно и X и Y са независими, то да се докаже, че N е Поасоново разпределена случайна величина.

- Първо, нека докажем, че X и Y са независими, когато N ∼ Poi(λ) и X1, X2, · · · ∼ Ber(p)

  X и Y са зависими от N, но N е независимо от X1, X2, · · · , така че можем да използваме свойството на условна независимост: ако A и B са независими, а C и D са независими, тогава A, B, C и D са независими, ако A и C са независими, или A и D са независими, или B и C са независими, или B и D са независими.

  Можем да видим, че X и Y са независими, защото са независими един от друг, при дадено N, а N е независим от X1, X2, · · ·.

  Сега нека докажем, че ако X и Y са независими и разпределението на N е неизвестно, тогава N ∼ Poi(λ).

  Тъй като X и Y са независими, можем да използваме свойството на независими случайни променливи: X + Y = N, така че разпределението на N е конволюцията на разпределенията на X и Y. Тъй като X1, X2, · · · ∼ Ber(p), разпределението на X е биномно и разпределението на Y също е биномно.

  Конволюцията на биномиално разпределение и друго биномиално разпределение е разпределение на Поасон. Следователно, тъй като N е конволюцията на разпределенията на X и Y, N ∼ Poi(λ).

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

**Зад. 5.** Нека $X1, X2, \ldots, Xn \sim U([0, 1])$ са независими и еднакво разпределени сл.вел. Намерете $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1)$.

- Случайните променливи X1, X2, ..., Xn са независими и равномерно разпределени, така че всички следват равномерно разпределение по интервала [0, 1].

  За да намерим $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1)$, можем да разгледаме вероятността сборът от случайните променливи да е по-малък или равен на 1.

  Тъй като всички случайни променливи са независими и имат еднакво равномерно разпределение по [0, 1], сумата от n случайни променливи също ще има равномерно разпределение по [0, n].

  Следователно вероятността сумата от случайните променливи да е по-малка или равна на 1 е:

  $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1) = P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1/n) = 1/n$

  И така, $P(X1 + X2 + \cdots + Xn \leq 1) = 1/n$.