Максимумът на точките, които можете да получите общо от трите домашни през семестъра е 50, като това кореспондира с бонус от 0.5 към оценката за упражнения.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Задача 1. (5 т.) Човек се намира на числовата ос в точката $n \in \mathbb{N}$ и последователно прави стъпка към $(n+1)$ с вероятност $p > 1/2$ и към $(n-1)$ с вер. $(1-p)$. Нека $p_n = \mathbb{P}(\text{човекът достига 0, тръгвайки от } n)$. Изразете p_1, p_2 и p_3 чрез p.

Задача 2. (5 т.) Студенти влизат последователно на изпит, показвайки личната си карта. Преди изпита е обявено, че първият студент, чийто рожден ден съвпада с рождения ден на вече влязъл студент, ще получи единица бонус към оценката си. На кое място трябва да застанете в редицата от студенти, за да имате най-голям шанс да сте печелившия студент?

Задача 3. (5 т.) Заек тръгва от точката 0 на числовата ос и прави независими равномерно разпределени в интервала $[0, 1]$ скокове в положителна посока. Участъкът $[1-x, 1]$ е капан с дължина $x \in [0, 1]$. Каква е вероятността заекът да прескочи капана?

Задача 4. (25 т., Симулации на случайни величини) Предполагаме, че можем да симулираме числа $U(0, 1)$ безпроблемно - тази част е например математическа, ако искаме да конструираме детерминистични редици, които да „изглеждат като" извадка от независими $U(0, 1)$ числа (така наречените псевдо-случайно числа) или чисто технологична - чрез използването на физически феномени.

В тази задача ще разгледаме 3 класически алгоритъма за симулиране на реализация X от конкретно разпределение - чрез използване на обратната функция на F_X, чрез метод на отхърлянето и чрез метода на Бокс и Мюлер.

Метод 1:

1. Нека $U \sim U(0, 1)$. Какво е разпределението на $F_X^{-1}(U)$?, където F_X^{-1} е обратната на F_X функция? [1] Използвайте получения резултат, за да предложите процедура за симулиране на:
   (а) $X \sim Exp(\lambda)$ за $\lambda > 0$;
   (б) $X \sim Cauchy(c)$ за $c > 0$, т.е.
   $$f_X(x) = \frac{c}{\pi(c^2 + x^2)};$$
   (в) $X \sim Pareto(\theta)$ за $\theta > 0$, т.е.
   $$f_X(x) = \frac{\theta}{x^{1+\theta}} \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}.$$
2. За моделиране на какви феномени се използват горните разпределения и защо? Генерирайте извадки от тях и илюстрирайте закона за големите числа и централната гранична теорема в тези 3 случая.
3. Какви са проблемите на този метод, ако искаме да го използваме за нормално или гама разпределение?

Метод 2: Следващият алгоритъм, който ще разгледаме[2] се използва при симулирането на X, която има плътност f_X:

- Намираме подходяща сл. вел. Y, от можем да симулираме лесно, например чрез метод 1, която има има плътност f_Y и $f_X(x)/f_Y(x) \leq c$ за всички x и някаква константа $c > 0$;
- Генерираме представител от Y;
- Генерираме (независимо от Y) $U \sim U(0, 1)$;
- Ако
  $$U \leq \frac{f_X(Y)}{cf_Y(Y)},$$
  приемаме Y като извадка за X, в противен случай го отхвърляме и повтаряме процедурата отначало.

1. Докажете коректността на алгоритъма.

[1] Формално, тъй като F_X може да не е строго растяща, F_X^{-1} може да не е добре дефинирана навсякъде. Затова обикновено се работи с обобщената обратна: $F_X^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq t\}$. За нашите цели може да считате, че работим с нормална обратна.

[2] чийто идеи се свързват с идеи на фон Нойман от 1949-1950

2. Генерирайте $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *(една възможност е след подходяща трансформация да използвате за Y експоненциалното разпределение)*

3. Нека $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$, т.е.
$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$
   (а) Нека $\alpha < 1$ и Y е сл.вел. с плътност
$$f_Y(x) = \frac{\alpha e}{\alpha + e} \left(x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\{0<x<1\}} + e^{-x} \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}} \right).$$
   (б) Докажете, че горното наистина е плътност. Как бихте симулирали Y чрез метод 1?

   (в) Можем ли да използваме метод 2 за генериране на $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ за $\alpha < 1$?

   (г) Как бихте симулирали $\Gamma(\alpha, \beta)$, използвайки горния метод и свойствата на гама разпределнието?

Метод 3:

1. Нека $X^2 \sim Exp(1/2)$ и $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ са независими. Намерете рапределенията на $Z_1 := R\cos\Theta$ и $Z_2 := R\sin\Theta$. Независими ли са?

2. Как бихте използвали горното, за да симулирате n независими $N(\mu, \sigma)$ сл. величини?

Често използвано разпределение (защо?) е лог-нормалното: $X \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$, ако $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma)$. Предложете 3 начина да симулирате от него.