Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

Домашно 2

Зад. 1. 1. Да се докаже комбинаторно, че $\frac{\mathrm{n}!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

- Развиваме двете страни на равенството

$\rightarrow$

$$\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} = \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*2*1}{(n-k-1)*(n-k-2)*(n-k-3)*\ldots*2*1}$$

$$= \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k)*\cancel{(n-k-1)*\ldots*2*1}}{\cancel{(n-k-1)*(n-k-2)*(n-k-3)*\ldots*2*1}}$$

$$= (n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k)$$

$$k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} = k * \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*2*1}{(n-k-1)*(n-k-2)*(n-k-3)*\ldots*2*1}$$

$$= k * \frac{(n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k+1)*\cancel{(n-k)*\ldots*2*1}}{\cancel{(n-k)*(n-k-1)*(n-k-2)*\ldots*2*1}}$$

$$= k * (n-1)*(n-2)*(n-3)*\ldots*(n-k+1)$$

$\leftarrow$

$$\frac{\mathrm{n}!}{(n-k)!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*2*1}{(n-k)*(n-k-1)*\ldots*2*1}$$

$$= \frac{n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)*\cancel{(n-k)*\ldots*2*1}}{\cancel{(n-k)*(n-k-1)*\ldots*2*1}}$$

$$= n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-k+1)$$

С развиване на равенството получаваме:

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = (n-1)*\ldots*(n-k+1)*(n-k) + k*(n-1)*\ldots*(n-k+1)$$

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = (n-1)*\ldots*(n-k+1)[(n-k)+k]$$

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = (n-1)*\ldots*(n-k+1)[n\cancel{-k+k}]$$

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1) = n*(n-1)*\ldots*(n-k+1)$$

Тъй като получихме че двете страни на равенството са равни, $\frac{\mathrm{n}!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ е доказано.

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

2. Да се пресметне вероятността при едновременно хвърляне на m зара и n монети да се паднат само шестици и езита, ако заровете и монетите са правилни.

- По условие, че заровете и монетите са правилни и независими един от друг и че резултатът от един зар или хвърляне на монета не влияе на резултата от друг зар или хвърляне на монета.

  Вероятността при хвърляне на зар да се падне 6 е 1/6, а вероятността при хрърляне на монета да се падне ези е 1/2. За да изчислим вероятността m зара и n монети да попаднат съответно на 6 и ези, можем да използваме формулата за вероятността от независими събития:

  P(m зара попадат на 6 и n монети попадат на ези) = (1/6)^m * (1/2)^n

Зад. 3. За даден експеримент се провеждат Y ∼ Poi(λ) независими опита, като всеки от тях може да бъде успешен с вероятност p и неуспешен с вероятност 1 − p. Да се намери разпределението на броя на успешните опити X.

- Провеждат се Y опити на Бернули $X \sim Bin(Y, p)$. Следователно,

$$P(X = k) = \binom{Y}{k} p^{k}(1-p)^{Y-k}$$

  От $Y \sim Poi(\lambda) \Longrightarrow P(Y = t) = \frac{\lambda^{t}}{t!} e^{-\lambda}$.

  Така,

$$P(X = k|Y = y) = \binom{y}{k} p^{k}(1-p)^{y-k}$$

$$P(X = k) = \sum_{y=0}^{\infty} P(X = k|Y = y)P(Y = y)$$

$$P(X = k) = \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y}{k} p^{k}(1-p)^{y-k} \frac{\lambda^{y}}{y!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k} \sum_{y=k}^{\infty} \binom{y}{k} \frac{\lambda^{y}}{y!} (1-p)^{y}$$

Зад. 4. Нека за случайните величини X и Y е дадено E[X] = 0, E[Y] = −3, D(X) = 1, D(Y) = 4 и

$\rho_{X,Y}$ = −√2/2. Да се пресметнат очакването и дисперсията на Z = 3X − 4Y.

- За да изчислим очакването на Z = 3X − 4Y, използваме следната формула:

  E[Z] = E[3X − 4Y] = 3E[X] − 4E[Y] = 0 − 4(−3) = 12

  За изчисляване на дисперсията на Z използваме формулата:

  $D(aX \pm bY + c) = a^{2}D(X) + b^{2}D(Y) \pm 2abCov(X, Y)$

  От $\rho_{X,Y}$ получаваме ковариацията на X и Y, тъй като $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

  ⇨ Cov(X, Y) $= \rho_{X,Y} * \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

  $= -\sqrt{2/2} * \sqrt{1} * \sqrt{2}$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

$= -\sqrt{(2/2)*2} = -\sqrt{2}$

D(Z) = D(3X-4Y)
$= 9D(X)+16D(Y) – 2*3*4*-\sqrt{2}$
$= 9 + 16*4 + 23*\sqrt{2}$
= 106,9

Зад. 5. Урна съдържа 2 бели, 2 черни и 6 зелени топки. Изваждат се една по една с връщане 20 топки. Каква е вероятността да изтеглим с 4 повече бели топки отколкото черни?

- Нека X претставява броя на бели топки изтеглено, а Y броя на черни топки изтеглено.

  Първо ще проверим дали X и Y са независими, чрез тяхната коварияция. Ковариацията на X и Y може да се изчисли с помощта на формулата Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y), където E(X) и E(Y) са очакваните стойности на X и Y съответно, а E(XY) е очакваната стойност на произведението на X и Y.

  Вероятноста да се изтегли бяла топка е 1/5, а черна 1/5.

  E[X] = np = 20(1/5) = 4
  E[Y] = np = 20(1/5) = 4
  E[XY] = (n*p)^2 = (20 * (1/5))^2 = 16

  Така,
  Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 16 – 4*4 = 0

  Следователно ковариацията на X и Y е 0, което означава че двете случайни величини са независими.

  В случай че са независими можем да приложим P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).
  X и Y имат биномно разпределение получаваме вероятностите:

  Търсим вероятностите за y ϵ {0, 1, … , 8}, а от условието че търсим вероятностите да изтеглим 4 повече бели топки отколкото черни x = y+4 => x ϵ {4, 5, … ,12}
  Разпределението за X:

$P(X=4) = \binom{20}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^{16} = 0,218$

$P(X=5) = \binom{20}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^{15} = 0,175$

$P(X=6) = \binom{20}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^6\left(\frac{4}{5}\right)^{14} = 0,109$

$P(X=7) = \binom{20}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7\left(\frac{4}{5}\right)^{13} = 0,0545$

$P(X=8) = \binom{20}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^{12} = 0.022$

$P(X=9) = \binom{20}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9\left(\frac{4}{5}\right)^{11} = 0.007$

$P(X=10) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0.002$

$P(X=11) = \binom{20}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11}\left(\frac{4}{5}\right)^{9} = 0.00046$

Анастасия Якимовска
СИ курс 3, гр. 1
фн. 866352

P(X=12) = $\binom{20}{12}\left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{8}$ = 0.00009

P(Y=0) = $\binom{20}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{20}$ = 0,011

P(Y=1) = $\binom{20}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{19}$ = 0,058

P(Y=2) = $\binom{20}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{18}$ = 0,137

P(Y=3) = $\binom{20}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{17}$ = 0,205

P(Y=4) = $\binom{20}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{16}$ = 0.218

P(Y=5) = $\binom{20}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{15}$ = 0.175

P(Y=6) = $\binom{20}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{14}$ = 0.109

P(Y=7) = $\binom{20}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{13}$ = 0.0545

P(Y=8) = $\binom{20}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ = 0.022

От P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y):

P(X = 4, Y = 0) = P(X = 4)P(Y = 0) = 0,002
P(X = 5, Y = 1) = P(X = 5)P(Y = 1) = 0,01
P(X = 6, Y = 2) = P(X = 6)P(Y = 2) = 0,15
P(X = 7, Y = 3) = P(X = 7)P(Y = 3) = 0,011
P(X = 8, Y = 4) = P(X = 8)P(Y = 4) = 0,0048
P(X = 9, Y = 5) = P(X = 9)P(Y = 5) = 0,0012
P(X = 10, Y = 6) = P(X = 10)P(Y = 6) = 0,0002
P(X = 11, Y = 7) = P(X = 11)P(Y = 7) = 0,000025
P(X = 12, Y = 8) = P(X = 12)P(Y = 7) = 0,00000198

Събираме всички вероявности и получаваме

P(теглим 4 повече бели топки отколкото черни) = 0,179