Упражнение 2 CEM - групи 1,2,3

11 октомври 2020 г.

Задача 1. Разпределят се k различими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределян, ако:
a) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
b) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

Решение:

a) Ако $k > n$, то от принципа на Дирихле, поне в една клетка ще има поне две частици, което е противоречие с условието в а), следователно за $k > n$ възможните начини за наредба са 0. Ако $k < n$ ще имаме n възможности за поставяне на първата частица, $n-1$ за втората и т.н., докато стигнем $n-k+1$ възможностри за k-тата частица. Следотателно ще имаме

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = |V_n^k|.$$

b) За всяка една от k-те частици ще имаме n възможни клетки за поставяне. едователно броя тук ще е $\underbrace{n \ldots n}_{k} = n^k = |V(n;k)|$.

Задача 2. Разпределят се k НЕразличими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
a) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
b) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

Решение:

a) Трябва да изберем k елементно подмножество, в което да поставим неразличимите частици (тяхната наредба в това подмножество е без значение, тъй като са неразличими по условие) от n елементно множество. Това може да стане по $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ начина.

b) Този път трябва да изберем k елементно мултимножество. Търсения брой е равен на броя на решения на уравнението $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. Задачата е еквивалентна на поставяне на $n-1$ нули, разделящи редица от $n+k-1$ последователни единици. Трябва да изберем позициите на тези нули от всички елементи, т.е. $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Задача 3. Нека Ω е множеството на всички наредени n-орки с повторения на цифрите $1, 2$ и 3. Да се намери броя на елементите на Ω, които:

a) започват с 1;
b) съдържат точно k пъти цифрата 2;
c) съдържат точно k пъти цифрата 1, при което започват и завършват с 1;
d) са съставени от k_1 единици, k_2 двойки, k_3 тройки.

Решение:

a) На първата позиция има поставена 1-ца. Остават $n-1$ свободни позиции, на които да разпределеим три цифри. Това става по 3^{n-1} начина (по 3 възможности за всяка една от $n-1$ позиции).

b) Разпределени са k двойки и на останалите $n-k$ позиции трябва да разпределим две числа (1 и 3). Тук е добре да отбележим, че ако $k > n$, то търсеният брой е 0. Затова допускаме, че $k < n$. Следователно броят на елементите на търсеното множество е $|T| = |R \times S| = |R| \times |S|$, където R е множеството на всички възможни разпределения на k двойки в n елемента без повторения и без наредба $\Rightarrow |R| = C_n^k$, S е множеството на всички възможни разпределения на два елемента в $n-k$ клетки $\Rightarrow |S| = 2^{n-k}$. Окончателно, $\binom{n}{k} \times 2^{n-k}$ е търсеният брой.

c) Аналогично на с) $\rightarrow$ По колко начина може да разпределим $k-2$ единици в $n-2$ клетки (без повторения и без наредба)? $\rightarrow$ На $\forall$ една от останалите $n-k$ позиции трябва да поставим или двойка или тройка $\Rightarrow$ търсеният брой е $\binom{n-2}{k-2} \times 2^{n-k}$.

d) $\binom{n}{k_1}$ е броя на начините, по които може да изберем k_1 позиции за единиците, $\binom{n-k_1}{k_2}$ е броя на начините, по които може да изберем k_2 позиции за двойките и $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ е броя на начините, по които може да изберем k_3 позиции за тройките. Окончателно $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$.

Задача 4. Дадено е множеството $\Omega = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$. Колко са подмножествата на Ω, които съдържат поне един елемент a и поне един елемент b?

Решение:

Нека $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_k\}$. Броя на подмножествата, които съдържат поне един елемент a е равен на $|\mathscr{P}(A) - \emptyset| = 2^n - 1$, аналогично броя на можествата, които съдържат поне един елемент b е равен на $|\mathscr{P}(B) - \emptyset| = 2^k - 1$. Окончателно отговора е $(2^n-1)(2^k-1)$.

Задача 5. Да се определи вероятността контролният номер на първата срещната лека кола:

a) да не съдържа еднакви цифри;
b) да има точно две еднакви цифри;
c) да има точно три еднакви цифри;
d) да има две двойки еднакви цифри;
e) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри.

Решение:

Цифрите с които разполагаме са $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ – общо 10 на брой. Всички възможни контролни номера са 10^4 (за всяка от четирите позиции имаме десет възможности).

a) За първата позиция имаме 10 възможности и след като поставим избраната цифра – за всяка следваща позиция ще имаме с една възможност по-малко. Следователно ще имаме общо $10.9.8.7 = \prod_{i=0}^{3}(10-i) = |V_{10}^4|$. Окончателно вероятността е $\mathbb{P}(\text{a}) = \dfrac{|V_{10}^4|}{10^4}$.

b) Избираме позициите за двете еднакви цифри $\to C_4^2$. Избираме повтарящата се цифра C_{10}^1. На останалите поцизии разпределяме от останалите девет цифри (без поставеата вече повтаряща се цифра) без повторение $\to 9 \times 8 = |V_9^2|$. Окончателно
$$|C_4^2| \times |C_{10}^1| \times |V_9^2| = 6 \times 10 \times 9 \times 8 = 4320 \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{4320}{10^4}.$$

Или може да подходим и по следния начин: Избираме три (всички, които ще присъстват в записа на числото) от всички цифри $\binom{10}{3}$, след което избираме коя от трите да се повтаря $\to C_3^1 = 3$ (начина), след което ги пермутираме $\to \dfrac{4!}{2!1!1!}$.
Окончателно
$$\binom{10}{3} \times 3 \times \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{2 \times 3} \times 3 \times 3 \times 4 = 6 \times 8 \times 9 \times 10 = 4320$$
и търсената вероятност е
$$\mathbb{P} = \frac{4320}{10^4}.$$

c) Избираме позициите за трите еднакви цифри $\to C_4^3$. Избираме цифрата която ще се повтаря три пъти C_{10}^1. На останалата една позиция разпределяме от останалите девет цифри (без поставената вече цифра, която се среща три пъти) $9 = |V_9^1|$. Окончателно
$$|C_4^3| \times |C_{10}^1| \times |V_9^1| = 4 \times 10 \times 9 = 360 \ \Rightarrow \mathbb{P}(\text{c}) = \frac{360}{10^4}.$$

Или може да подходим и по следния начин: Избираме две (всики, които ще присъстват в записа на числото) от всички цифри $\binom{10}{2}$, след което избираме коя от двете ще се повтаря $2 = C_2^1$ (начина), след което ги пермутираме $\to \dfrac{4!}{3!1!}$.
Окончателно $\dbinom{10}{2} \times 2 \times \dfrac{4!}{3!1!} = \dfrac{10 \times 9}{2} \times 2 \times 4 = 360$ и вероятността е
$$\mathbb{P}(\text{c}) = \frac{360}{10^4}.$$

d) Избираме двете цифри, които ще участват в записа на числото $\to \dbinom{10}{2}$.
Пермутираме цифрите в този запис $\dfrac{4!}{2!2!} \Rightarrow$ това са общо
$$\binom{10}{2} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{10 \times 9}{2} \times 2 \times 3 = 270 \text{ начина и вероятността } \mathbb{P}(\text{д}) = \frac{270}{10^4}.$$

e) $I + II = III + IV$. Всевъзможните валидни суми, които две цифри могат да образуват са първите 19 неотрицателни числа $\{0, 1, 2, \ldots, 17, 18\}$. Нека a_1, a_2, b_1, b_2 са съответно първата, втората, третата и четвъртата цифра от регистрационния номер

на автомобила.
Случай:

1) Сумата е равна на 0: $(a_1, a_2) = (0, 0)$, общо 1 бр.;
2) Сумата е равна на 1: $(a_1, a_2) = (0, 1), (1, 0)$, общо 2 бр.;
3) Сумата е равна на 2: $(a_1, a_2) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$, общо 3 бр.;
4) Сумата е равна на 3: $(a_1, a_2) = (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$, общо 4 бр.;

   …

9) Сумата е равна на 9: $(a_1, a_2) = (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)$, общо 10 бр.;
10) Сумата е равна на 10: $(a_1, a_2) = \cancel{(0, 10)}, (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1), \cancel{(10, 0)}$, общо 9 бр.;
11) Сумата е равна на 11: $(a_1, a_2) = \cancel{(0, 11)}, \cancel{(1, 10)}\ (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2), \cancel{(10, 1)}, \cancel{(11, 0)}$, общо 8 бр.;

   …

18) Сумата е равна на 18: $(a_1, a_2) = (9, 9)$, общо 1 бр.;

[$a_1 + a_2 = k$ има точно $\binom{2+k-1}{2-1} = \binom{k+1}{1} = k+1$ решения, ако няма ограничения за a_1 и a_2 да са едноцифрени.]

Аналогични разсъждения може да се направят и за $b_1 + b_2$.
Следователно има

$$2(1^2 + 2^2 + \ldots + 9^2) + 10^2 = 2\sum_{i=1}^{9} i^2 + 100 = 2 \times \frac{9(9+1)(2\times 9+1)}{6} + 100$$
$$= 3 \times 10 \times 19 + 100 = 670$$

начина от което заключаваме, че вероятността е $\mathbb{P}\big(\text{д}\big) = \dfrac{670}{10^4}$.

Задача 6. Във влак с три вагона по случаен начин се качват 7 пътника. Каква е вероятността в първия вагон да се качат четирима.

Решение:
Всеки един от пътниците може да се качи в първи, втори или трети вагон. Това са общо $3^7 = |V(7;\ 3)|$ възможности. За да сметнем броя на благоприятните събития трябва да изберем четирима от качилите се пътника $\to \binom{7}{4}$ и за останалите два вагона да разпределим останалите трима пътника $\to 2^3$. Следователно, броя на търсените благоприятни събития е общо $\binom{7}{4} \times 2^3 = \dfrac{5.6.7}{2.3} \times 2^3 = 35 \times 8 = 280$. Търсената вероятнос $\mathbb{P}\big(\text{зад. 6.}\big) = \dfrac{280}{3^7} = \dfrac{280}{2187}$.

Задача 7. От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват ненамаляваща редица, ако:
a) извадката е без връшане;
b) извадката е с връшане (ненамаляваща).

Решение:

a) Може да разделим пространството от множеството топки с извадените топки, тъй като вероятността да извадим топки от урната по допускане е 1. Нека $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ са извадените топки от урната. Тогава има точно една от всичките $k!$ наредби, която е в нарастващ ред. Отговора е $\mathbb{P}\big(\text{a)}\big) = \dfrac{1}{k!}$.

b) Забележете, че имаме n^k възможни изхода (всеки път когато топка е извадена се връща обратно, следователно всяко вадене е независимо едно от друго). Имаме биекция между k елементните мулти подмножества от всички n топки и броя на начините, по които може да изпълним условието. Сортираме ги по техния номер. По този начин уникално детерминирахме всяка ненамаляваща редица. Седователно търсената вероятност е

$$\mathbb{P}\big(\text{b)}\big) = \frac{C(n;k)}{n^k} = \frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{n^k}.$$