Мат. очакване

CE4
лек. 5
3/11/22

$$\mathbb{E}X = \sum_j x_j \underbrace{\mathbb{P}(X = x_j)}_{p_j} \quad (\mathbb{E}|X| = \sum_j |x_j| p_j < \infty)$$

$Y = g(X)$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}g(X) = \sum_j g(x_j) p_j \quad (\mathbb{E}|Y| = \sum_j |g(x_j)| p_j < \infty)$$

$$Z = g(X; Y), \quad \mathbb{E}Z = \sum_{j,k} g(x_j, y_k)\, \mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) = \sum_{j,k} g(x_j, y_k) p_{jk}$$

1) рулетка

X	-1	35
$\mathbb{P}$	$36/37$	$1/37$

* 37 числа
X - win/lose печалба
Y - залог на число

Y	-1	1
$\mathbb{P}$	$19/37$	$18/37$

$\mathbb{E}X = -1 \cdot 36/37 + 35/37 = -1/37$

$\mathbb{E}Y = -19/37 + 18/37 = -1/37$

лек. 5

→ Свойства на мат. очакване

Нека X и Y са ДСВ във U. Нека $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ съществуват.

Теор. 1 (Свойства на мат. очакване)

а) $X \equiv C$, то $\mathbb{E}X = C$ и ако $X = 1_A$ (валг.), то $\mathbb{E}X = \mathbb{P}(A)$

б) $Y = cX$, то $\mathbb{E}Y = c\mathbb{E}X$ (със $g(x) = cx$, то $\mathbb{E}Y = \sum_j (cx_j) p_j = c\mathbb{E}X$)

в) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$, ако $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ съществуват

г) $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$, ако $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ съществуват

д) ако $~~\mathbb{P}~~(X \geq 0)~~=1~~$, то $\mathbb{E}X \geq 0$

Д-во:

а) $X \equiv C$, то $\mathbb{P}(X = C) = 1$

$\mathbb{E}X = C \cdot 1$

$X = 1_A$, то $~~\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X=1)~~$

$\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A)$

в) $g(X, Y) = X + Y$; то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{j,k} (x_j + y_k)\,\mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) \\ &= \sum_{j,k} x_j\,\mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) + \sum_{j,k} y_k\,\mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) \\ &= \sum_j x_j \sum_k \mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) + \sum_k y_k \sum_j \mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) \\ &= \sum_j x_j\,\mathbb{P}(X = x_j) + \sum_k y_k\,\mathbb{P}(Y = y_k) \\ &= \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y\end{aligned}$$

$! \; \mathbb{E}\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j$

интеграл ≈ очакване

Коментар

$\mathbb{E}\,1_{A \cup B} = \mathbb{P}(A \cup B)$

$\mathbb{E}(1_A + 1_B - 1_A 1_B) = \mathbb{E}1_A + \mathbb{E}1_B - \mathbb{E}1_{A \cap B}$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\mathbb{E}\,1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ → принцип на включване и изключване

г) $g(X, Y) = XY$, $\mathbb{E}XY = \sum_{j,k} x_j y_k\, \mathbb{P}(X = x_j, Y = y_k)$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{j,k} x_j y_k\, \mathbb{P}(X = x_j)\,\mathbb{P}(Y = y_k) = \sum_j x_j\,\mathbb{P}(X = x_j) \sum_k y_k\,\mathbb{P}(Y = y_k) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$$

g) $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$

$\Downarrow$

$$\mathbb{E}X = \sum_j \overset{\geq 0}{x_j}\, p_j \geq \sum_j 0\, p_j = 0$$

⊕ рулет

X	-1	1
$\mathbb{P}$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Y	-1	35
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{37}$	$1/37$

$DX = 1$ $\qquad$ $DY \approx 35$

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = -1/37$ $\qquad DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$

$$= \left(-1 + \tfrac{1}{37}\right)^2 \tfrac{19}{37} + \left(1 + 1/37\right)^2 \tfrac{18}{37} \approx 1$$

$$DY = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2 = \left(-1 + 1/37\right)^2 \cdot 36/37 + \left(35 + 1/37\right)^2 1/37$$

$$\approx 35$$

$\sqrt{DX}$ - стандартно отклонение

⊕ $1-p \to$ заразени $\qquad$ смесени тестове за ковид

$p \to$ здрави

n-орки

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{ако никой не е бил заразен} \\ n+1, & \text{ако поне 1 е заразен} \end{cases}$$

X_n	1	$n+1$
$\mathbb{P}$	p^n	$1-p^n$

$$\frac{\mathbb{E}X_n}{n} = \frac{1}{n}\left(1 \cdot p^n + (n+1)(1-p^n)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + p^n$$

оптимиране: $1 + \frac{1}{x} + p^x = f(x)$ с компютър

1000 (5-орки)

нищ:

$p = 0,95$

$\mathbb{E}X_5 = 5 \cdot 0,43$

$= 2,15$

→ Дисперсия (Дискретна) $\qquad$ 6.11.23

Деф Ако X е сл. вел., то $DX := \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$, ако $DX < \infty$ и $\mathbb{E}X < \infty$

⊕ $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ - очаквана средноквадратична грешка $\qquad (g(x) = (x - \mathbb{E}X)^2)$

$\sqrt{DX}$ - стандартно отклонение

⊕ $DX = \inf_{a \in \mathbb{R}} \sum_j (x_j - a)^2 p_j$

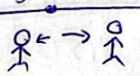
$$= \sum_j (x_j - \mathbb{E}x)^2 p_j$$

$$\mathbb{E}X = \underset{a \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_j (x_j - a)^2 p_j$$

⊕ $2N$! на изпит

студенти, които се ровят на яйце

$x_j = -1 \qquad x_j = 1$



$$x_j = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$$

$$S_{2N} = \sum_{j=1}^{2N} x_j$$

$$Y = \sum_{j=1}^{2N} x_j \to \text{резултатна сила}$$

$$\mathbb{E}Y = \sum_{j=1}^{2N} \mathbb{E}x_j = 0 \;;\; \mathbb{P}(Y = 0) = \binom{2N}{N} 1/2^{2N} \approx \frac{C}{\sqrt{2N}}$$

на $1 \cdot 1/2 - 1 \cdot 1/2 = 0$

никой да не спечели

$$\mathbb{P}(Y \neq 0) \approx 1 - \frac{C}{\sqrt{2N}}$$

$$DY = \sum_{j=1}^{2N} Dx_j = 2N$$

Твърдение $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Д-во: $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\,\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2)$

свойства на мат. очакване

$= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}(-2X\,\mathbb{E}X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2$

и константи излизат

$= \mathbb{E}X^2 - 2\,\mathbb{E}X\,\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2$

$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$X_j = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$

$DX_j = \mathbb{E}X_j^2 - \underset{(\mathbb{E}X_j)^2}{0} = 1$

Не съществува $D < 0$!

Твърдение: X е сл. вел. и Y е сл. вел., т.ч. DX и DY са крайни (съществуват)

а) $DX \geq 0$

б) $D cX = c^2 DX$

в) $X \perp\!\!\!\perp Y$, $D(X+Y) = DX + DY$

г) $X = C$, то $DC = 0$

Д-во $DX \overset{a)}{=} \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$

следствие: $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}X)^2$

$DY \overset{в)}{=} \sum_j^{2N} DX_j = 2N$

~~б) Dc~~

Д-во: а) $DX = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mathbb{E}X}_{\geq 0})^2$

$= \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j \geq 0$

б) $Y = cX$, то $DY = DcX = \sum_j (cx_j - \mathbb{E}cX)^2 p_j$

$= \sum_j (cx_j - c\,\mathbb{E}X)^2 p_j$

$= c^2 DX$

б) $DcX = \mathbb{E}(cX - \mathbb{E}cX)^2$

$= \mathbb{E}c^2(X - \mathbb{E}X)^2$

$= c^2 DX$

в) $D(X+Y) \overset{Тв.}{=} \mathbb{E}(X + Y - \mathbb{E}(X+Y))^2$

$= \mathbb{E}(X + Y - \mathbb{E}X - \mathbb{E}Y)^2$

$= \mathbb{E}((X+Y)^2 - 2(X+Y)\,\mathbb{E}(X+Y) + (\mathbb{E}(X+Y))^2)$

$\overset{Тв.}{=} \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2$

г) $DC = \mathbb{E}(C - \mathbb{E}C)^2$

$= 0$

г) $D(X+Y) \overset{Тв}{=} \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2$

$= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2)$

$- ((\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}Y)^2 + 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

$= \mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}$

$\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)^2$

$\ldots^2 + 2\,\cancel{\mathbb{E}XY} + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}X)^2 - (\mathbb{E}Y)^2 - \cancel{2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y}$

независимост $X \perp\!\!\!\perp Y$ $2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2$

$= DX + DY$

$\langle x+y, x+y\rangle \overset{x\perp y}{=} \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$

→ Пораждаща функция $(X: \Omega \to \{0,1,2,\dots\})$

Деф Нека X е целочислена, неотриц. сл. вел. във вер. пр-во $V=(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, като $X: \Omega \to N = \{0,1,2\dots\}$. Тогава $g_X(s) := \mathbb{E}s^X = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X=n)$, за $|s|\le 1$, се нарича пораждаща функция на X.

! идея за торбичка - събиране на информация за сл. дис. вел.

Свойства а) $\frac{d}{ds} g_X(s) = \frac{d}{ds}\mathbb{E}s^X$ степен на ф-я $\quad \mathbb{E}X = g'_X(1)$

$= \mathbb{E}\frac{d}{ds} s^X$

$= \mathbb{E}\, X s^{X-1}$, ако $s=1$, то $g_X'(1) = \mathbb{E}X$

$\mathbb{E}X = g'_X(1)$

б) $\frac{d^2}{ds^2} g_X(s) = \mathbb{E}\frac{d^2}{ds^2} s^X = \mathbb{E}X(X-1)s^{X-2} = \mathbb{E}X(X-1)$

$DX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 \;||\; \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$g''_X(1) = \frac{d^2}{ds^2} g_X(s)\Big|_{s=1} = \mathbb{E}X(X-1)s^{X-2} = \mathbb{E}X(X-1)$

$= \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X$

$= \mathbb{E}X^2 - g_X'(1)$

$DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$= g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2$

в) $n!\,p_n = g^{(n)}(0)$

$\Rightarrow p_n = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$

док/ ~~$n!\,p$~~ $g_X^{(n)}(s)\Big|_{s=0} = n!\,p_n$

! $\boxed{g_X^{(k)}(0) = k!\,\mathbb{P}(X=k) + 0,\ k \ge 0}$

Тв $(X_i)_{i=1}^{n}$ или $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ казваме, че всички сл. вел. са еднакво разпределени или ако $X_k \overset{d}{=} X_1,\ \forall k \ge 1$ **Тв.** $X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow g_X = g_Y$ ~~вСвб~~

Деф Казваме, че $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ се състои от взаимно независими сл. вел., ако $\forall m \ge 2$ и $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ е вярно, че $(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_m})$ са независими в съвкупност

Тв. Ако във вер. пр-во $V=(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ имаме сл. вел. $(X_j)_{j=1}^{n}$, такива, че $X_j: \Omega \to \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$. Ако $(X_j)_{j=1}^{n}$ са нез. в съвк. и $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$,

$g_Y(s) = \prod_{j=1}^{n} g_{X_j}(s)$. Ако в допълнение $(X_j)_{j=1}^{n}$ са еднакви по разпределение $g_Y(s) = (g_{X_1}(s))^n$

⊕ Ако X и Y са целочислени сл. вел. Тогава $X \stackrel{d}{=} Y \Leftrightarrow g_X = g_Y$

<u>Д-во</u> $g_Y(s) = \mathbb{E} s^{X_1+X_2} = \cancel{\sum_{j,k} s^{x_j+x_k}} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} s^{j+k} \mathbb{P}(X_1=j, X_2=k)$

$Y = X_1 + X_2$

$$\stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} s^j s^k \mathbb{P}(X_1=j)\mathbb{P}(X_2=k)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(X_1=j) \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X_2=k)$$

$$= g_{X_1}(s) g_{X_2}(s)$$

<u>Док-во Тв.</u>: $X_1, \dots, X_n$ са $\perp\!\!\!\perp$ в съвкупност и $h_1, \dots, h_n$ огр. функ. $\Rightarrow \mathbb{E}[h_1(X_1) \cdot h_2(X_2) \cdot \ldots \cdot h_n(X_n)] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(h_j(X_j))$

Ако $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$, то $g_{X_1} = g_{X_2} \Rightarrow g_Y = (g_{X_1})^2$

→ Някои основни дискретни разпределения (сл. вел.)

↳ Схема на Бернули: $(X_j)_{j=1}^{\infty}$, които са независими в съвкупност и еднакво разпределени

X_j	0	1
$\mathbb{P}$	q	p

$p \in [0,1]$, $q + p = 1$

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$
$\mathbb{P}(X_1 = 0) = q$

a) Разпределение на Бернули

$X \sim Be(p)$ $p \in [0,1]$

X	0	1
$\mathbb{P}$	$\underbrace{1-p}_{q}$	p

или X_1 от схемата на Бернули, $1-p=q$

$\mathbb{E}X = p$

$g_X(s) = (1-p)s^0 + ps^1 = ps + q$

$DX = pq$; $g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = p - p^2 = pq$

б) Биномно разпределение

$X \sim Bin(n, p)$

X - броят ~~на~~ успехи от първите n експеримента в схема на Бернули

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ $X_j \sim Be(p)$

(*) $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

<u>Тв.</u> Ако $X \sim Bin(n,p)$ то следва
a) $g_X(s) = (ps+q)^n$
б) $\mathbb{E}X = np$ и $DX = npq$
в)

X	0	1	…	k	…	n
$\mathbb{P}$	q^n			(*)		p^n

т.е. $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

$\underline{D\text{-}6c}$ а) $g_X(s) = (g_{X_1}(s))^n$

$= (ps+q)^n$

$(g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k})$

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \overset{\text{Т6.}}{\Rightarrow} g_X(s) = (g_{X_1}(s))^n$

$= (q+ps)^n$

б) $\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{j=1}^{n} X_j$

$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j$

$= np$

$DX = D\sum_{j=1}^{n} X_j$

$= \sum_{j=1}^{n} DX_j$

$= npq$

$\mathbb{E}X \Rightarrow g_X'(1) = np(q+p)^{n-1} = np$

$DX = D\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} DX_j = npq$

в) $k!\,\mathbb{P}(X=k) = ((q+ps)^n)^{(k)}\Big|_{s=1}$

$= p^k n(n-1)\cdot(n+1-k)(q+ps)^{n-k}\Big|_{s=0}$

$\Rightarrow k!\,\mathbb{P}(X=k) = n(n-1)\ldots(n+1-k)\cdot p^k q^{n-k}$

$\binom{n}{k} \overset{!}{=} \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

Scanned with CamScanner