СЕМ 10/11/22

Лек. 6 а) $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ или $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ редица от независими и еднакво разпределени сл. вел. (нерав.) ($X_1 \stackrel{d}{=} X_n, \forall n \geq 1$)

X_1	0	1
$\mathbb{P}$	$1-p$	p

$\uparrow$ q

$X_1 \sim Ber(p)$

или $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1-p$

$\mathbb{P}(X_{13} = 1; X_{46} = 0; X_{12} = 1) = p \cdot q \cdot p$

X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	1	1

б) $X \sim Bin(n, p)$ $\quad X = \sum_{j=1}^{n} X_j$

$g_X(s) = (ps + q)^n$

в) $\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[\text{сл.-ни}]{\text{пораждащи}} \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0) \quad 0 \leq k \leq n$

$= \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) p^k (ps+q)^{n-k} \Big|_{s=0}$

$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

→ Геометрично разпределение

· неуспехи броим неуспехи до първия успех

$X \sim Ge(p)$ (от схема на Бернули)

$X = \min\limits_{k \geq 1} \{ \sum_{j=1}^{k} X_j = 1 \} - 1$ или $\underbrace{0\,0\,0\,1}_{4}$

брой неуспехи до първия успех

* ако включва успеха, тогава махаме ~~-1 от~~ $X + = 1$

<u>Теор.:</u> Нека $X \sim Ge(p)$. Тогава

а)

X	0	1	…	k
$\mathbb{P}$	p	pq		pq^k

или $\mathbb{P}(X = k) = q^k p, \; k \geq 0$

б) $g_X(s) = \frac{p}{1 - qs}$ за $|s| < 1$

Д-во а) $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\underbrace{X_1=0;\dots;X_k=0}_{\text{к неуспеха}};\underbrace{X_{k+1}=1}_{\text{успех}}) = q^k p$

б) $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = \underbrace{p\sum_{k=0}^{\infty} q^k s^k}_{\infty \text{ геомет. прогрес.}} = \frac{p}{1-qs}$

Следст.) Нека $X \sim Ge(p)$. Тогава $\mathbb{E}X = q/p$

$DX = q/p^2$

Д-во: $\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{(-q)p}{(1-qs)^2}\Big|_{s=1}$

$g_X'(s)|_{s=1} = \frac{qp}{(1-q)p^2} = \frac{q}{p}$

$\frac{1}{f(s)^2} \Rightarrow \frac{-2f'(s)}{f^3(s)}$

$DX = g_X''(1) + \cancel{g_X'(1) - (g_X'(1))^2} = g_X''(s)\Big|_{s=1} = pq\frac{d}{ds}\frac{1}{(1-qs)}$

?

$g_X''(1) = g_X''(s)\Big|_{s=1} = pq\frac{d}{ds}\frac{1}{(1-qs)^2}\Big|_{s=1}$

$= \frac{-2q\,pq}{(1-qs)^3}\Big|_{s=1}$

$= \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2q^2}{p^2}$

$DX = \cancel{2}\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p}+1\right)$

$= \frac{q}{p}\left(\frac{p+q}{p}\right) = \frac{q}{p^2}$

⊕ Хвърляне на монета (последователно)

X - брой тура до първо ези

⊕ брой влезли пред границата незаразени

⊕ брой стрелби до първ успех

$\mathbb{P}(X \geq m) = \mathbb{P}(X_1=0;\dots;X_m=0) = q^m$ опашка на X

($\mathbb{P}(X<m)$ е ф-ята на разпределението)

Твърдение) Нека $X \sim Ge(p)$ и $m \geq 0$. Тогава $\mathbb{P}(X \geq n+m \mid X \geq m)$

$\shortparallel$

$\mathbb{P}(X \geq n)$

(безпаметност)

memoryless

$\mathbb{P}(X \geq m+n \mid X \geq m)$

$\shortparallel$

Д-во:) $\frac{\mathbb{P}(X \geq n+m;\ \cancel{X \geq m})}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \frac{q^{n+m}}{q^m} = q^n = \mathbb{P}(X \geq n)$

⊕ рулет

$\mathbb{P}(X \geq 5 \mid X \geq 3) = \mathbb{P}(X \geq 2)$

$= \left(\frac{18}{27}\right)^2$

$\mathbb{P}(X \geq l) = p\sum_{k=l}^{\infty} q^k$

$= pq^l \sum_{k=l}^{\infty} q^{k-l}$

$= \frac{pq^l}{1-q}$

$= q^l$

Scanned with CamScanner

→ отрицателно биномно

$X \sim NB(r,p)$ (от схема на Бернули) $p \in (0,1)$; $r \geq 1$

$X = \min_{n \geq 0} \{ \sum_{i=1}^{n} X_i = r \} - r$ т.е. брой неуспехи до $r^{-ти}$ успех
(# успехи преди r, без 4)

! $r=1$, то $X \sim Ge(p)$
$NB(1,p) = Ge(p)$

$r=3$ $\underbrace{0\,0\,0\,0\,1}\,1\,0\,1$

$x=5$

$\underbrace{0\,0\,0\,0\,1}_{Y_1\,(Ge)}\,\underbrace{1\,0\,0\,1}_{Y_2\,(Ge)}$ $X = Y_1 + Y_2$

<u>Твр. 1</u> Нека $X \sim NB(r,p)$. Тогава $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$, където $(Y_1, \dots, Y_r)$ са независими в съвкупност геометр. сл. вел. $Y_i \sim Ge(p)$

<u>Д-во:</u> $r=2$ $X = \min_{n \geq 0} \{ \sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \} - 2 = Y_1 + Y_2$ и $Y_i \sim Ge(p)$

Остава да проверим, че $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$ и $Y_1 \stackrel{d}{=} Y_2 \sim Ge(p)$

$k \geq 0$; $l \geq 0$

$\mathbb{P}(Y_1 = k; Y_2 = l) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(Y_1 = k)\,\mathbb{P}(Y_2 = l)$

$\mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_k = 0; X_{k+1} = 1; X_{k+2} = 0; \dots; X_{k+l+1} = 0; X_{k+l+2} = 1)$

$= q^k p \, q^l p$

$= \mathbb{P}(Y_1 = k)\,\mathbb{P}(Y_2 = l) \Rightarrow Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$

$\mathbb{P}(Y_2 = l) = q^l p = \mathbb{P}(Y_1 = l) \Rightarrow Y_2 \sim Ge(p)$

<u>Тв: 1</u> $X \sim NB(r,p)$, то

$X = \sum_{j=1}^{r} Y_j$

a) $g_X(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r \Leftarrow g_X(s) = g^r_{Y_j}(s) = \frac{p^r}{(1-qs)^r}$

б) $\mathbb{E}X = \frac{rq}{p}$ $\Leftarrow \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{E}Y_j = r \cdot \frac{q}{p}$

в) $DX = \frac{rq}{p^2}$ $\Leftarrow DX \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{r} DY_j = r\frac{q}{p^2}$

<u>Тв: 1</u> $X \sim NB(r,p)$

X	0	1	...	k
$\mathbb{P}$	p^r	.	...	$\binom{r+k-1}{k} p^r q^k$

<u>Д-во</u> $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0) = \frac{p^r}{k!} \frac{d^k}{ds^k} (1-qs)^{-r} \Big|_{s=0}$

$= \frac{p^r}{k!} (-r)(-r-1)\dots(-r-(k-1))\,(-1)^k q^k (1-qs)^{-r-k} \Big|_{s=0}$

$= \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$

g_{7} Поасоново разпределение или $X \sim Poi(\lambda), \lambda > 0$

Деф: Казваме, че $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, ако $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \geq 0$

$$1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1$$

Тейлър за e^{λ}

⊕ брой катастрофи за единица време, брой катастрофи

⊕ брой голове за ед. време

⊕ население за ед. площ

⊕ брой звезди за ед. участък

Тв. $X \sim Pois(\lambda)$, тогава а) $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

б) $\mathbb{E}X = \mathbb{D}X = \lambda$

Д-во: а) $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{\mathbb{P}(X=k)} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda s} e^{-\lambda}$

б) $\mathbb{E}X = g'_X(1) = \lambda e^{\lambda(s-1)} \Big|_{s=1} = \lambda$

$g''_X(1) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \Big|_{s=1} = \lambda^2$ $\Rightarrow \mathbb{D}X = \lambda^2 + \lambda - (\lambda^2) = \lambda$

λ - интензитет!

Твърдение: Нека $X_1, \dots, X_n$ е редица от целочислени сл. вел. ($\mathbb{N}$) и X също е такава. Тогава $\forall k \geq 0$

Не го спомина

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X=k) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} g_{X_n}(s) = g_X(s), \ \forall |s| \leq 1$$

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(X=k) \ \forall k \geq 0 \Leftrightarrow g_{X_n}(s) \xrightarrow[n \to \infty]{} g_X(s) \ \forall |s| \leq 1$$

Теор. на Поасон: Нека $X_n \sim Bin(n; p_n)$, $n \geq 1$, където $p_n = \frac{\lambda}{n} + \frac{u_n}{n}$ и $\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0$. Тогава $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X=k)$, $k \geq 0$ или $\left(X \sim Pois(\lambda), X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} X\right)$

Вероятността у обратно пропорционално с брой експерименти за const k

⊕ Теоремата се ползва за приближение $Y \sim Bin(n, p)$ и $\lambda = np$.

$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \mathbb{P}(Y=k) \approx \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}$; $\lambda = n \cdot p$

$n = 1000$, $p = \frac{1}{1000}$ $\Rightarrow \lambda = 1$

$\mathbb{P}(Y=5) \approx \frac{1}{5!} e^{-1}$

!! $\lambda = np \leq 20$ и $n \geq 100$ тогава приближението е добр

$\underline{Д\text{-}во:}$ Ще покажем, че $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ е вярно ако $\lim_{n\to\infty} g_{X_n}(s) = g_X(s)$ $\quad g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

$(q_n + p_n s)^n$

$$g_{X_n}(s) = (p_n s + 1 - p_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}s\right)^n$$

$$= \left(= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\lambda(s+1)\right)^n = e^{\lambda(s-1)} = g_X(s)\right.$$

ползване

пораждаща ф-я

дев.

сисп.

$\rightarrow$ Хипергеометрично разпределение

$X \sim HG(\underbrace{N, M, n}_{\text{цели числа}})$

N - броя обекти

M - маркирани обекти : $M \leq N$

n - тези които теглим (изваждаме)

X - измерва броя маркираните от изтеглените с обем n

$\underline{Тв:}$ $X \sim HG(N, M, n)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max\{0, \cancel{M-Nn} \; n-N+M\} \leq k \leq \min\{M, n\}$$

$\underline{Следствие}$ $\quad X \sim HG(N, M, n)$

а) $\mathbb{E}X = n\, M/N$

б) $DX = \frac{nM}{N}\,\frac{N-M}{N}\,\frac{N-n}{N-1}$ $\quad$ • признак, че X_j не са независими; не е линейно

$\underline{Д\text{-}во}$ $\quad$ а) $X_j = \begin{cases} 1 & \text{ако на } j\text{-та поз. има маркирано} \\ 0 & \text{ако няма} \end{cases}$ $\quad X_j \sim Ber\left(\frac{M}{N}\right)$

$\sum_k k\,\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}X$

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = 1)\cdot 1}_{n} = n\frac{M}{N}$$

$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j$

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \frac{M}{N}$$

б) $DX \neq \sum_{j=1}^{n} DX_j$

Съвместно разпределение. Ковариация и корелация
дискретно

(X, Y)

Деф. Нека X и Y са две дискретни сл. вел. във вер. пр-во $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Тогава   маргинално раз. на Y претити от спис

$Y \backslash X$	x_1	…	x_k	…	Y
y_1	p_{11}	…	p_{k1}	…	$\sum_k p_{k1}$
⋮	⋮		⋮		
y_j	p_{1j}	…	p_{kj}	…	$\sum_k p_{k,j}$
⋮					
X	$\sum_j p_{1,j}$		$\sum_j p_{kj}$		

където $p_{k,j} = \mathbb{P}(X = x_k;\ Y = y_j)$ се нарича съвместно разпр. на (X, Y), $p_{k,j} \geq 0$, $\sum_{k,j} p_{kj} = 1$

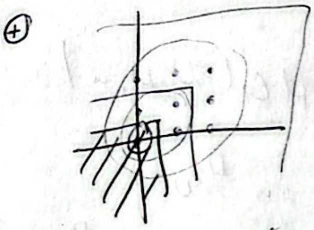
→ маргинално раз. на X

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_j \mathbb{P}(X = x_k,\ Y = y_j)$$

⊕ Хвърляме 2 зара и нека X е броят на 6-ци и Y е брой 1-ци

$Y \backslash X$	0	1	2	Y
0	$\left(\frac{4}{6}\right)^2$	$8/36$	$1/36$	$25/36$
1	$8/36$	$2/36$	0	$10/36$
2	$1/36$	0	0	$1/36$
X	$25/36$	$10/36$	$1/36$	X

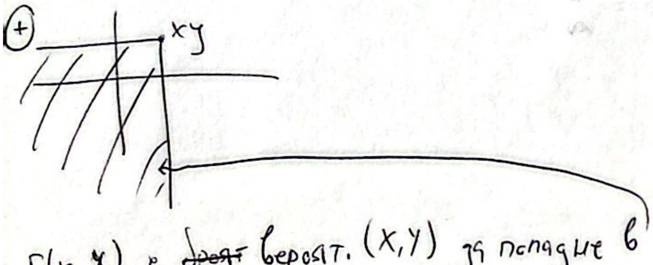
⊕



$F_{X,Y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = ?\ 16/36$ (само $(0,0)$)

Нека X и Y са произволни случайни вел. във V. Тогава ф-ята $F_{X,Y}(x,y) := \mathbb{P}(X \leq x;\ Y \leq y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ се нарича съвместна ф-я на разпределение на (X, Y)

⊕



$F(x, y)$ е ~~броят~~ вероят. (X,Y) да попадне в
(с границите: заради нестроги неравенства)

⊕ $F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x)$ — марг. ф-я на разпр.

$\mathbb{P}(X \leq x;\ \underbrace{Y \leq \infty}_{\mathbb{P}=1})$ $\quad \mathbb{P}(X \leq x)$

все едно го няма
$(\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$, ако $\mathbb{P}(B) = 1)$

⊕ $F_{X,Y}(\infty; y) = F_Y(y)$

⊕ $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$