Максимумът на точките, които можете да получите общо от всички домашни е 50, като това кореспондира с бонус от 0.5 към оценката за упражнения. В това домашно всяка задача носи по 5 точки. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *За удобство, дефинираме* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задача 1.

1. От 10 стандартни тестета от 52 карти се тегли по една карта. Намерете вероятността в получената ръка от 10 карти
   (а) да няма повтарящи се;
   (б) има поне три аса;
   (в) да има четири спатии, три кари, две купи и една пика;
   (г) броят на черните карти да с точно 4 повече от броя на червените, ако е известно, че черните карти са повече от червените.
2. Всички изделия в дадена партида са изправни, а в друга, $1/4$ от изделията са за брак. Изделие, взето от случайно избрана партида, се оказва изправно. Да се пресметне вероятността второ случайно избрано изделие от същата партида да се окаже за брак, ако след проверката на първото изделие, то е било върнато обратно в своята партида.
3. Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0, a, b \in [0, 1]$ да бъдат реални числа?

Задача 2. Дете има в левия си джоб четири монети от 1 лв. и три монети от 2 лв., а в десния си джоб две монети от 1 лв. и една монета от 2 лв. Детето прехвърля две монети от левия си в десния си джоб, след това връща обратно две монети от десния в левия. Накрая, детето вади монета от десния си джоб. Каква е вероятността тя да е от 1 лв.?

Задача 3. По две от страните на правилен зар са оцветени в съответно бяло, зелено и червено. Хвърляме този зар два пъти. Нека X е броят на падналите се бели, а Y - на падналите се червени страни. Да се намерят съвместното разпределение на X и Y, независими ли са, ковариацията им, $\mathbb{P}(X = 1|Y = 1)$ и $\mathbb{P}(X > Y)$.

Задача 4. Нека сл. вел. X приема стойности в $\mathbb{N}_0$ и

$$g_X(s) := \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$$

е пораждащата ѝ функция.

1. Нека $Y := 3X$ и $Z = X_1 + X_2$, където $X_1, X_2 \sim X$ са независими. Изразете чрез g_X, пораждащите функции g_Y и g_Z.
2. Нека $X \sim Ge(p)$, т.е. $P(X = k) = p(1 - p)^k$ за $k \in \mathbb{N}_0$. Пресметнете g_X и чрез нейна помощ намерете $\mathbb{E}(X)$ и $D(X)$.

Задача 5. Нека X и Y са независими сл. вел и

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 2\mathbb{P}(Y = 3) = 2\mathbb{P}(Y = 5) = \frac{1}{2}\,.$$

Нека $Z_1 := 2X + Y + 1$, $Z_2 := XY$ и $Z_3 = X^Y$. Намерете очакванията и дисперсиите им.