Случайни величини

В тези записки няма да привеждаме формалната, аксиоматична дефиниция на понятието случайна величина (сл.в.). По-скоро ще използваме интуитивна представа за случайна величина. За нас това е обект, който може да взима за стойности случайни реални числа с някаква вероятност. За означаване на сл.в. ще използваме главните букви - X, Y и т.н.

Ще разглеждаме два типа случайни величини. Тези, който могат да взимат само краен, или най-много изброим брой стойности, наричаме дискретни сл.в. Такива например са: точките паднали се върху зар, броя опити необходим за да изтеглим асо от тесте карти и т.н.

Тези случайни величини, който взимат стойности в някое неизброимо множество, наричаме непрекъснати сл.в. Такава например е външната температура в момента.

$\square$

1 Дискретни случайни величини

Дефиниция. *Разпределение на случайната величина X, наричаме следната таблица:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

(1.1)

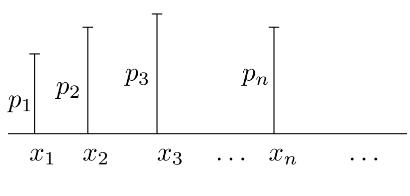
където
x_i са стойностите на сл.в. те могат да бъдат краен или изброим брой;
$p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$ са вероятностите с които сл.в. взема съответните стойности.

За да бъде добре дефинирана случайната величина X трябва да е изпълнено следното условие:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

където сумата може да бъде крайна или безкрайна.

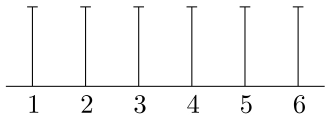
Графически ще представяме разпределението на случайните величини със схема подобна на хистограма. Като височината на i-тото стълбче съответства на вероятността p_i.



Пример 1. *Нека сл.в. X е точките паднали се при хвърлянето на зар. Тогава, разпределението на X има вида:*

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Графически разпределението изглежда по следния начин:



Нека X е дискретна случайна величина, а $g(x)$ е произволна реална функция, тогава $Y = g(X)$ също е случайна величина. Разпределението на Y има вида:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dots$	$g(x_n)$	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Формулата $Y = g(X)$ всъшност задава начин да се преизчислят стойностите на случайната величина. Това действие обикновено се нарича „смяна на променливите“. Разбира се, ако за някой от стойностите $g(x_i) = g(x_j)$, т.е. ако функцията $g(X)$ не е еднозначно обратима, то тези стойности се обединяват, а съответните вероятности се събират.

Пример 2. *Нека X е случайната величина от Пример 1., а $Y = |X - 3|$. За разпределението на Y получаваме:*

X	0	1	2	3
P	1/6	2/6	2/6	1/6

Нека X и Y са произволни случайни величини. Тогава $Z = X + Y$ също е случайна величина. Стойностите на Z са всички възможни суми $x_i + y_j$, Тогава най-общо разпределението на Z има вида:

Z	$x_1 + y_1$	$x_2 + y_1$	$\dots$	$x_n + y_n$	$\dots$
P	$\mathrm{P}(X = x_1, Y = y_1)$	$\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_1)$	$\dots$	$\mathrm{P}(X = x_n, Y = y_n)$	$\dots$

Както по-горе, ако съществуват повтарящи се стойности в първия ред на таблицата те се обединяват, а съответните вероятности се събират. Тогава, съгласно формула за пълна вероятност $\mathrm{P}(Z = z_k) = \sum_{i,j} \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$, където сумата е по всички i и j, такива че $z_k = x_i + y_j$.

По аналогичен начин се дефинират и случайните величини $X - Y$, $X.Y$, X/Y и т.н.

Дефиниция. *Казваме, че дискретните случайните величини X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), ако са независими всички възможни двойки събития породени от тях, т.е.*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j: \ \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\,\mathrm{P}(Y = y_j).$$

Понятието „независимост“ може да се разбира в обичайния смисъл на тази дума. Независимостта на две случайни величини означава, че едната сл.в. не се влияе и не носи информация за другата сл.в. Например, ако се хвърлят два зара точките паднали се върху единия и върху другия зар са независими сл.в.

Пример 3. *Хвърлят се два зара. Нека Z е сумата от падналите се точки. Ще намерим разпределението на случайната величина Z. Ако означим с X и Y съответно точките паднали се върху първия и втория зар, то $Z = X + Y$. Освено това е ясно, че X и Y имат разпределението от Пример 1. Естествено двата зара не се влияят един от друг, тогава случайните величини са независими и следователно е изпълнено $\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j)$. Тогава, за разпределението на Z получаваме:*

Z	2	3	4	...	11	12
P	1/36	2/36	3/36	...	2/36	1/36

1.1 Математическо очакване

Дефиниция. *Математическо очакване на случайната величина X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано по следния начин:*

$$\mathrm{E}X = \sum_i x_i \, \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_i x_i \, p_i. \tag{1.2}$$

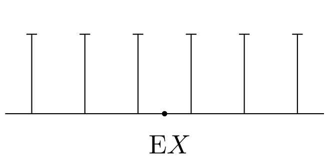
Ако сл.в. X има само краен брой стойности то горната сума е крайна. Тогава математическото очакване $\mathrm{E}X$ задължително съществува и попада в интервала, в който се менят стойностите на случайната величина X.

Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е възможно сумата да е разходяща. Тогава казваме, че не съществува математическо очакване.

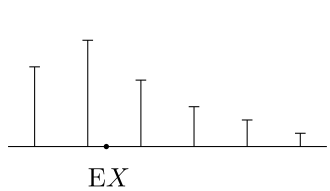
По общо, ако търсим очакването на функция от случайна величина $\mathrm{E}(g(X))$, съгласно формулата за смяна на променливите

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) \, \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_i g(x_i) \, p_i. \tag{1.3}$$

Като синоним на „математическо очакване“ се използва и изразът „средна стойност“. Наистина, намирането на математическото очакване всъщност е пресмятане на средната стойност на случайната величина, като вероятностите p_i играят ролята на тегла. Физическия смисъл на математическото очакването е център на тежестта.



$\mathrm{E}X$



$\mathrm{E}X$

В частния случай, когато всички стойности се падат с една и съща вероятност, т.е. всички p_i са равни, математическото очакване е просто средното аритметично. В противен случай то се измества към по вероятните стойности.

Вероятностния смисъл на математическото очакване се дава от закона за големите числа, който ще бъде доказан по-късно. Съгласно него, ако измервате многократно стойностите на една случайна величина, средното аритметично на тези стойности клони към математическото очакване, т.е. средния резултат от много опити се дава от математическото очакване.

Пример 4. *Ще разгледаме игра на рулетка, в която играчът залага 10 лв само на едно число. Известно е, че числата в рулетката са от 1 до 36, като се добавя и 0 (в американската рулетка освен това има и 00). Ако играчът заложи на едно число и спечели получава печалба 35 пъти по-голяма от залога. Нека сл.в X е чистата печалба на играча от една игра, т.е. включваме и залогът, който той е направил. Разпределението на X е следното:*

X	-10	350
P	36/37	1/37

Съгласно (1.2) за математическото очакване на X получаваме:

$$\mathrm{E}X = -10\,\frac{36}{37} + 350\,\frac{1}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0,27\text{лв.}$$

Математическото очакване е отрицателно, което означава, че играчът губи средно по 0,27 лв. на игра. Съответно казиното печели средно 0,27 лв. на игра. Разбира се X е случайна величина и при малък брой игри е възможно играчът да спечели, както и да загуби, въпрос на късмет. При голям брой игри обаче, печалбата ще клони към математическото очакване. Това важи за казиното, в което на ден има хиляди игри. Така собственикът може да пресметне печалбата си независимо че тя зависи от случайни фактори. Например, при 10000 игри от горния тип печалбата за казиното ще е приблизително 2700 лв.

Игри, в който очакваната печалбата е нула ($\mathrm{E}X = 0$)се наричат справедливи игри (такава би била играта на рулетка, ако в нея няма нула). В справедлива игра, ако играчът играе достатъчно дълго, капиталът му ще се запази на началното ниво, той нито ще спечели, нито ще загуби.

Ще докажем някой по важни свойства на математическото очакване.

E1 Ако $c = const$, то $\mathrm{E}c = c$.

Доказателство. Константите могат да се разглеждат каго случайни величини, който взимат една единствена стойност с вероятност единица $\mathrm{P}(X = c) = 1$, т.е. тяхното разпределение е от типа:

X	C
P	1

Твърдението следва непосредствено от (1.2). □

E2 $\mathrm{E}(cX) = c\,\mathrm{E}X$, където X е произволна сл.в., а $c = const$.

Доказателство.

$$\mathrm{E}(cX) = \sum_i cx_i \,\mathrm{P}(X = x_i) = c \sum_i x_i \,\mathrm{P}(X = x_i) = c\,\mathrm{E}X$$

□

E3. $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$, където X и Y са произволни сл.в.
Доказателство.

$$\mathrm{E}(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_j + y_i)\,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_j \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_i \sum_j y_i \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \tag{1.4}$$

$$= \sum_j x_j \sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_i y_i \sum_j \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$$

Събитията $Y = y_i, i = 1\dots$ образуват пълна група от събития. Тогава съгласно формула за пълна вероятност

$$\sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j).$$

Аналогично се преработва и последната сума в (1.4). Така получаваме:

$$\mathrm{E}(X+Y) = \sum_j x_j \,\mathrm{P}(X = x_j) + \sum_i y_i \,\mathrm{P}(Y = y_i) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$

□

Съгласно своиства **E2** и **E3** математическото очакване е линейно.
E4. Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$ са независими сл.в., тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$.
Доказателство. От независимостта на случайните величини следва, че за всеки i, j е изпълнено $\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i)$. Тогава

$$\mathrm{E}(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_j\, y_i \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_j\, y_i \,\mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i) = \sum_i y_i \,\mathrm{P}(Y = y_i) \left(\sum_j x_j \,\mathrm{P}(X = x_j) \right) =$$

$$= \sum_i y_i \,\mathrm{P}(Y = y_i)\mathrm{E}X = \mathrm{E}X\mathrm{E}Y.$$

□

1.2 Дисперсия

Определение. Дисперсия на случайната величина X наричаме числото:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2$$

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на една случайна величина около нейното математическо очакване.

$\sqrt{\mathrm{D}X}$ наричаме стандартно отклонение.

В началото ще изведем по-лесен начин за пресмятане на дисперсията.

Твърдение 1.

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2.$$

Доказателство. Ще използваме формула за съкратено умножение и ще приложим свойства **E2** и **E3** на математическото очакване.

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = \mathrm{E}\left(X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right) =$$

$$= \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}(2X\,\mathrm{E}X) + \mathrm{E}((\mathrm{E}X)^2)$$

$\mathrm{E}X$ е число, т.е. константа, тогава $(\mathrm{E}X)^2$ също е константа и от свойство **E1** следва $\mathrm{E}((\mathrm{E}X)^2) = (\mathrm{E}X)^2$. Аналогично от свойство **E2** следва $\mathrm{E}(2X\,\mathrm{E}X) = 2(\mathrm{E}X)(\mathrm{E}X)$. По този начин получаваме:

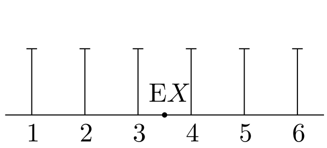
$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - 2(\mathrm{E}X)(\mathrm{E}X) + (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2$$

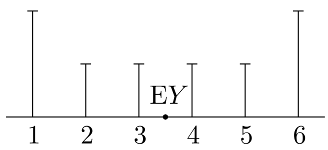
$\square$

Пример 5. *Хвърляме два зара. Първият е правилен, а за вторият вероятностите да се паднат едно и шест са по 1/4, а вероятностите да се падне някоя от останалите цифри са 1/8. Нека X и Y са точките паднали се съответно върху първия и втория зар. Ще пресметнем очакването и дисперсията на X и Y. Съгласно условието разпределениеята на X и Y са съответно:*

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$





$$\mathrm{E}X = \tfrac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}X^2 = \tfrac{1^2}{6} + \tfrac{2^2}{6} + \ldots + \tfrac{6^2}{6} = \tfrac{91}{6}$$

$$\mathrm{D}X = \tfrac{91}{6} - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{35}{12}$$

$$\mathrm{E}Y = \tfrac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}Y^2 = \tfrac{1^2}{4} + \tfrac{2^2}{8} + \ldots + \tfrac{6^2}{4} = 16$$

$$\mathrm{D}Y = 16 - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{15}{4}$$

Математическото очакване в двата случая съвпада. Дисперсията във втория случай е по-голяма, тъй като има по-голяма вероятност случайната величина да е далеч от математическото си очакване, т.е. разсейването е по-голямо.

Ще докажем по-важните свойства на дисперсията.
D1. $\mathrm{D}X \geq 0$.

Доказателство. Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно, т.е. $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. □

D2. $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

Доказателство.

$$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\,(c - \mathrm{E}c)^2 = \mathrm{E}\,(c - c)^2 = \mathrm{E}0 = 0.$$

□

D3. $\mathrm{D}(cX) = c^2\mathrm{D}X$.

Доказателство.

$$\mathrm{D}(cX) = \mathrm{E}\,(cX - \mathrm{E}(cX))^2 = \mathrm{E}\,(cX - c\mathrm{E}X)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left[c^2\,(X - \mathrm{E}X)^2\right] = c^2\mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = c^2\mathrm{D}X$$

□

D4. Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Доказателство. Ще използваме своиство **E3** на математическото очакване.

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{E}\,[X + Y - \mathrm{E}(X + Y)]^2 = \mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X) + (Y - \mathrm{E}Y)]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}\,(Y - \mathrm{E}Y)^2 + 2\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] =$$

$$= \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]$$

За да завършим доказателството е достатъчно да покажем, че последното събираемо е нула. X и Y са независими случайни величини, съгласно **E4** $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$, тогава:

$$\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}\,(XY - Y\mathrm{E}X - X\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\mathrm{E}Y) =$$

$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\mathrm{E}X - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\mathrm{E}X = 0.$$

□

1.3 Пораждащи функции

Дефиниция. *Нека X е случайна величина, чийто стойности са цели положителни числа. Пораждаща функция на X наричаме:*

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k \tag{1.5}$$

Пораждаща функция на X е просто полином, в който пред k-тата степен на s стои вероятността $\mathrm{P}(X = k)$. Ако случайната величина взима само краен брой стойности, то сумата е крайна и пораждащата функция е дефинирана за всяко s. Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е сигурно, че $g_X(1) = 1$, тъй като сумата от вероятностите е равна на единица. От тук следва, че поне за $|s| \leq 1$ пораждащата функция със сигурност е сходяща, т.е. съществува. Това е достатъчно за нашите цели, така че понататък няма да разглеждаме въпроса за сходимостта на Пораждащите функции.

Пример 6. *Ще пресметнем пораждащата функция на сл.в. от пример 1. т.е. X е точките паднали се при хвърлянето на зар с разпределение:*

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогава

$$g_X(s) = \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \ldots + \frac{1}{6}s^6 = \frac{s}{6}\left(1 + s + \ldots + s^5\right) = \frac{s(1 - s^6)}{6(1 - s)}$$

Пораждащите функции улесняват пресмятането на вероятности свързани със случайните величини, както и на техните характеристиките. Ще изведем, някой по-често използвани свойства на пораждащите функции.

За пресмятане на математическото очакване чрез пораждаща функция се използва следната формула:

g1) $\mathrm{E}X = g'_X(1)$.

Доказателство. Ще деференцираме (1.5), след което ще положим $s = 1$.

$$g'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, k\, s^{k-1}\bigg|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{E}X$$

□

Дисперсията на случайна величина също може да бъде пресметната чрез пораждаща функция

g2) $\mathrm{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$.

Доказателство. Ще пресметнем втората производна на $g_X(s)$.

$$g''_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, k(k-1)\, s^{k-2}\bigg|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{E}X(X - 1)$$

В последното равенство използвахме формула (1.3). Сега като използваме

$$g''_X(1) = \mathrm{E}\left(X(X - 1)\right) = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}X$$

Следователно:

$$\mathrm{E}X^2 = g''_X(1) + \mathrm{E}X = g''_X(1) + g'_X(1).$$

□

Пораждащите функциии могат да бъдат използвани за намирането на суми от случайни величини.

g3) Нека X и Y са независими случайни величини, тогава $g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$.

Доказателство. Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пресметнем коефициента пред s^k.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i)s^i \sum_{j=0}^{\infty} P(Y=j)s^j =$$

$$= P(X=0)P(Y=0)s^0 + [P(X=0)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=0)]\, s^1 + \dots$$

$$\dots + \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)s^k + \dots$$

Ще запишем това равенство в затворен вид

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \right) s^k \tag{1.6}$$

X и Y са независими случайни величини, тогава

$$P(X=i)P(Y=k-i) = P(X=i, Y=k-i) = P(X=i, X+Y=k)$$

Ще използваме формула за пълна вероятност за да оценим вътрешната сума в (1.6).

$$\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, X+Y=k) = P(X+Y=k)$$

Замествайки този резултат в (1.6) получаваме търсената пораждаща функция на случайната величина $X+Y$.

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=k)\, s^k = g_{X+Y}(s).$$

□

По индукция този резултат се обобщава за повече от две независими случайни величини

$$g_{X_1+X_2+\dots X_n}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) \dots g_{X_n}(s) \tag{1.7}$$

Пример 7. *Хвърлят се 10 зара. Да се намери вероятността сумата от падналите се точки да бъде точно 19. Директното пресмятане на тази задача е твърде трудоемко. То би означавало да се пресметнат всички начини числото 19 да се представи като сума на 10 цели числа в диапазона от 1 до 6. Затова ще използваме възможностите, който ни дават на пораждащите функции.*

С X_i, $i = 1\dots10$ ще означим точките паднали се върху i-тия зар. В предишния пример изведохме пораждащата функция на тези случайни величини

$$g_{X_i}(s) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}.$$

Нека Y е сумата от падналите се точки, т.е. $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. Точките паднали се върху един зар по никакъв начин не влияят върху точките паднали се върху друг. Следователно, случайните величини X_i са независими. Тогава, съгласно равенство (1.7) Пораждащата функция на Y е произведение от параждащите функции на X_i, $i = 1 \ldots 10$.

$$g_Y(s) = \prod_{i=1}^{10} g_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)} \right) = \frac{s^{10}(1-s^6)^{10}}{6^{10}(1-s)^{10}}$$

Съгласно дефиницията на пораждащата функция търсената вероятност ще бъде коефициента пред 19-тата степен на s в тази функция.

За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s. Ще използваме формулата за бином на Нютон

$$(1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k$$

за да преубразуваме числителя. За знаменателят ще използваме формулата за отрицателен бином:

$$(1-a)^{-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{l} a^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n-1} a^l$$

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (s^6)^k \right] \sum_{l=0}^{\infty} \binom{9+l}{l} s^l =$$

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[1 - \binom{10}{1} s^6 + \binom{10}{2} s^{12} + \ldots \right] \sum_{l=0}^{\infty} \binom{9+l}{l} s^l =$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да веземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Окончателно, за търсената вероятност получаваме

$$\mathrm{P}(Y = 19) = \mathit{coeff}_{s^{19}} \{g_Y(s)\} = \frac{1}{6^{10}} \left[\binom{18}{9} - \binom{10}{1} \binom{12}{3} \right]$$

1.4 Дискретни разпределения

В този раздел ще разгледаме свойствата на някой от най-често срещаните дискретни случайни величини.

1.4.1 Разпределение на Бернули

Това разпределение е кръстено на името на швейцарския математик Якоб Бернули. „Опит на Бернули“ наричаме опит, при който има само две възможности - „успех“ с вероятност p или ’неуспех’ с вероятност $q = 1 - p$. Стандартният пример е хвърляне на една монета. Съответно, случайната величина с разпределение на Бернули може да взима само две стойности - „1“ при успех и „0“ при неуспех, т.е. разпределението и има вида:

X	0	1
P	q	p

Елементарно се пресмятат $\mathrm{E}X = p$ и $\mathrm{D}X = pq$.

1.4.2 Биномно разпределение - $X \in Bi(n, p)$

Биномното разпределение може да се разглежда, като обобщение на разпределението на Бернули.

Извършваме последователни, независими бернулиеви опити, като вероятността за успех - p е една и съща при всеки опит, съответно вероятността за неуспех е q. Нека броят на опитите - n е предварително фиксиран. Случайната величина X равна на броя на успехите, наричаме биномно разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Bi(n, p)$.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & \multicolumn{7}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{X}} \\
 & & * & * & & * & & & * \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
 & q & p & p & & \dots & & &
\end{array}$$

Ясно е, че стойностите на X т.е. броят на успехите е цяло число в интервала от 0 до n. Ще пресметнем вероятността за точно k на брой успеха. Общо са проведени n опита, на k от които има успех. Съществуват C_n^k начина да изберем опитите, на който да има успех. Ако вероятността за успех при всеки опит е p, то вероятността за успех на k фиксирани опита ще бъде p^k, тъй като опитите са независими. Аналогично, вероятността на останалите $n - k$ опита да има неуспех ще бъде $(1 - p)^{n-k}$. Така за вероятността за точно k успеха от n опита, получаваме:

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad (1.8)$$
$$k = 0, 1, \dots n.$$

Биномното разпределение е добре дефинирано, тъй като съгласно формулата за бинома на Нютон е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

От тук идва и самото име на разпределението.

Пример 8. *Нека X е броят на шестиците паднали се при хвърлянето на три зара. Тогава $X \in Bi(3, \frac{1}{6})$. Непосредствено от формула 1.8 се пресмята разпределението на случайната величина X*

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$\square$

За да пресметнем характеристиките на биномно разпределена случайна величина ще я представим като сума от Бернулиеви сл.в.

Нека с X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ означим успеха на i-тия опит, т.е. случайните величини X_i могат да вземат само две стойности 0, или 1. X_i и имат разпределение на Бернули, като $\mathrm{E}X_i = p$ и $\mathrm{D}X_i = pq$. Опитите са независими следователно и случайните величини X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ са независими.

Ясно е, че $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тогава от свойства **E3** и **D4**, съответно за очакването и дисперсията следва:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_n = np,$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}X_2 + \ldots + \mathrm{D}X_n = npq.$$

Ще пресметнем и максималната стойност на вероятността, т.е. ще открием за кое $k = 0, 1, \dots n$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ достига максимум. Намирането на този максимум не е възможно по традиционният начин познат от математическият анализ с намиране на първата производна, тъй като биномният коефициент в (1.8) не може да бъде диференциран. Затова ще разгледаме отношението на вероятностите. Ако е изпълнено неравенството

$$\frac{\mathrm{P}(X = k)}{\mathrm{P}(X = k-1)} > 1$$

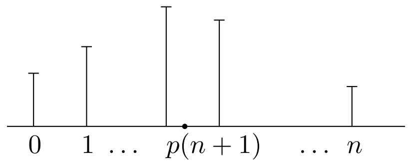
то вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ разглеждана като функция по k е растяща. По този начин ще определим интервалите на растене и намаляване на функцията. Съгласно (1.8) горното неравенство е еквивалентно на:

$$1 < \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n!\,(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!\,n!\,q} = \frac{(n-k+1)\,p}{kq}.$$

Ще решим това неравенство спрямо k

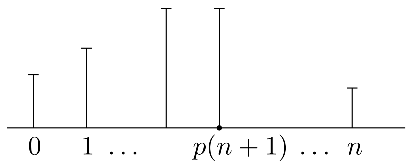
$$p(n+1) > (p+q)k = k. \tag{1.9}$$

Тук p и $n+1$ са известни константи. Следователно за $k < p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е растяща по k. Аналогично, при $k > p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е намаляваща. Знаем, че k взима стойности $0, 1, \dots n$. В началото вероятностите растат, достигат до някаква максимална стойност, след което започват да намаляват. Тогава, разпределението на случайната величина изглежда по следния начин:



Максималната стойност на вероятността се достига за най-голямото цяло число k, което е по-малко от $p(n+1)$, т.е. при k равно на цялата част на $p(n+1)$.

Ако числото $p(n+1)$ се окаже цяло, то неравенство (1.9) се превръща в равенство за някое k. Тогава ще има две максимални стойности за вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ и $\mathrm{P}(X = k-1)$, а разпределението има следния вид:



1.4.3 Геометрично разпределение - $X \in Ge(p)$

Отново ще разглеждаме схема на Бернули, т.е. извършваме последователни независими опити с вероятност за успех на всеки опит p. Случайната величина X равна на броя на неуспехите до достигане на първи успех наричаме геометрично разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Ge(p)$. Броят на опитите не е ограничен, така че стойностите на X могат да варират от 0 до ∞.

Ще пресметнем вероятноста за точно k неуспеха до първия успех, т.е. $\mathrm{P}(X = k)$ за $k = 0, 1, 2, \dots$. Ясно е, че тази вероятност отговаря на събитието - „при първите k опита има неуспех, а на опит $k+1$ успех“.

$$\overbrace{|0|0|0| \quad \dots \quad |0}^{X}|1| \quad \dots$$

Опитите са независими, следователно $\mathrm{P}(X = k) = (1-p)^k p = q^k p$. Тук, както обикновено сме означили вероятността за неуспех с q.

За да се покаже, че това разпределение е добре дефинирано, е достатъчно да се приложи формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Директното пресмятане на математическото очакване и дисперсията на X изисква умения за сумиране на редове. Например

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\, q^k p$$

Пораждащите функции дават възможност за значително опростяване на този процес. Пораждащата функция на X е сума на безкрайна геометрична прогресия

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1-qs}.$$

Съгласно свойство (**g1**) математическото очакване на X е производната на пораждащата функция при $s = 1$.

$$\mathrm{E}X = g'_X(1) = \left.\frac{pq}{(1-qs)^2}\right|_{s=1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

За да пресметнем дисперсията на X ще ни трябва втората производна на пораждащата функция:

$$g''_X(1) = \left.\left(\frac{pq}{(1-qs)^2}\right)'\right|_{s=1} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

Сега, ще използваме свойство **g2**) на пораждащите функций:

$$\mathrm{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

1.4.4 Поасоново разпределение - $X \in Po(\lambda)$

Често се налага да се разглеждат модели, при които се извършват много независими опити, но вероятността за успех при всеки от тях е малка. Като интерес представлява броят на успехите X. Тогава разглеждаме модел, в който случайната величина е биномно разпределена $X \in Bi(n,p)$, но $n \to \infty$, $p \to 0$. Това гранично разпределение е изведено от френския математик Симеон Поасон.

Дефиниция. *Казваме, че случайната величина X е поасоново разпределена, ако тя взима целочислени стойности с вероятност, съответно*

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}, \\ &k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.10}$$

където $\lambda > 0$ е константа.

Поасоновото разпределение се означава съкратено с $X \in Po(\lambda)$.

Разпределението е добре дефинирано, тъй като

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Поасоновото разпределение се използва,за описване на редки събития. Типичният пример е заявки към сървър. Броят на компютрите в мрежата е голям, а вероятността конкретен компютър да потърси връзка е малка. Тогава броят на заявките е поасоново разпределена случайна величина. Поасоново разпределени се оказват и броя на мутиращите клетки при рентгеново обчване, броя на получените писма за определен период от време, головете по време на футболна среща и т.н.

Изобщо поасоновото разпределение се използва когато пресмятаме сбъдванията X на събитие в определен интервал от време, ако сбъдването на събитие не зависи от времето минало от сбъдването на предишното събитие, т.е. събитията са независими и освен това имаме предварителна информация за средния брой сбъдвания, т.е. знаем математическото очакване на X.

Следващата теорема дава условията, при които поасановото разпределение може да се използва като апроксимация за биномното.

Теорема 1. **(Поасон)** *Нека сл.в. $X \in Bi(n, p_n)$, т.е.*

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}. \tag{1.11}$$

Ако $n \to \infty$, $p_n \to 0$, така че $np_n \to \lambda > 0$, то за всяко фиксирано $k = 0, 1, 2, \ldots$ е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}.$$

Доказателство. Най-напред ще преработим биномния коефициент участващ в (1.11)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$$

Ще запишем биномната вероятност $\mathrm{P}(X = k)$ от равенство (1.11) по следния начин:

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k}. \tag{1.12}$$

Сега ще намерим границите при $n \to \infty$ на отделните множители в този израз. За всяко $i = 1, 2, \dots k-1$ при $n \to \infty$ е изпълнено:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = 1.$$

По условие k е фиксирано число, тогава в следното произведението има краен брой, а именно $k-1$ множителя, следователно

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1. \tag{1.13}$$

Знаем, че $np_n \to \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{1.14}$$

От условието $np_n \to \lambda$ следва $p_n \to \lambda/n$.

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Първата граница е добре позната $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$. За втората граница аналогично на (1.13) получаваме единица. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \tag{1.15}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да извършим граничен преход в (1.12) и да заместим (1.13), (1.14) и (1.15). □

За пресмятането на математическото очакване и дисперсията на поасоновото разпределение ще използваме свойствата пораждащите функции. Нека $X \in Po(\lambda)$ за пораждащата функция на X получаваме

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}\, s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Тогава математическото очакване на X е

$$\mathrm{E}X = g_X'(1) = \lambda e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda.$$

За дисперсията на X получаваме

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2 = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

1.4.5 Хипер геометрично разпределение - $X \in HG(N, M, n)$

1.5 Съвместни (двумерни) разпределения

Дефиниция. *Съвместно разпределение на случайните величини X и Y, наричаме следната таблица:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,n}$	$\dots$
y_2	$p_{2,1}$	$\dots$			$\dots$
$\dots$	$\dots$				
y_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	$\dots$	$p_{m,n}$	$\dots$

където
x_i и y_j са съответно стойностите на сл.в. X и Y те могат да бъдат краен или изброим брой;
$p_{j,i} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ са вероятностите с които случайните величини вземат съответните стойности, при това

$$\sum_{i,j} p_{j,i} = 1$$

Пример 9. *Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.*

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$. Аналогично $\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 2(1/6)4/6$ и т.н.

Съвместното разпределение на X и Y има вида

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

□

Ако разполагаме със съвместното разпределение на X и Y не е проблем да се пресметне разпределението само на едната случайна величина. Това разпределение се нарича *маргинално разпределение*. Намирането му става, съгласно формула за пълната вероятност, чрез сумиране по ред или по стълб, т.е.

$$\mathrm{P}(X = x_i) = \sum_j \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Аналогично

$$\mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j), \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Пример 10. *Ще намерим маргиналните разпределения на случайните величини от предходния пример. Маргиналните разпределения често се записват отдолу и отстрани на таблицата със съвместните разпределения*

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

□

По нататък ще въведем две понятия, който се използват като мярка за линейната зависимост между случайните величини X и Y.

Дефиниция. *Ковариация на случайните величини X и Y наричаме числото:*

$$cov(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]. \tag{1.16}$$

Ако $cov(X, Y) = 0$ казваме, че случайните величини са некорелирани.

За пресмятане на ковариацията обикновено се използва представянето дадено в следващото твърдение.

Твърдение 2.

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y \tag{1.17}$$

Доказателство. Ще използваме линейността на математическото очакване.

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}[(XY - Y\,\mathrm{E}X - X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y)] =$$

$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(Y\,\mathrm{E}X) - \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}Y) + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y)$$

$\mathrm{E}X$ е константа, тогава от свойство **E2** следва $\mathrm{E}(Y\,\mathrm{E}X) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. Аналогично $\mathrm{E}(X\,\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. Съгласно **E1** математическото очакване на константа е самата константа, т.е. $\mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. С това доказателстово е завършено. □

Твърдение 3. *Ако случайните величини X и Y са независими, то*

$$cov(X,Y) = 0.$$

Доказателство. Твърдението следва директно от (1.17) и свойство **E4** на математическото очакване.

В общия случай обратното твърдение не е изпълнено. Възможно е $cov(X,Y) = 0$, но случайните величини да бъдат зависими.

Дефиниция. *Коефициент на корелация $\rho_{X,Y}$ на случайните величини X и Y наричаме:*

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} \tag{1.18}$$

Твърдение 4. $|\rho_{X,Y}| \le 1$ *за произволни случайни величини X и Y.*

Доказателство. Ще разгледаме следната случайна величина

$$\left[\frac{X-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y-\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \ge 0 \tag{1.19}$$

Тя е неотрицателна следователно и математическото и очакване е неотрицателно.

$$0 \le \mathrm{E}\left[\frac{X-\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y-\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = \tag{1.20}$$

$$= \frac{\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}Y)^2}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

$$= \frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{D}Y} + 2\rho_{X,Y} = 2 + 2\rho_{X,Y}$$

В последното равенсто приложихме дефинициите на дисперсия и корелация. Сега от $2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0$ елемантарно следва $\rho_{X,Y} \geq -1$.

Аналогично, зада се докаже неравенството $\rho_{X,Y} \leq 1$ се разглежда случайната величина

$$\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} - \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0$$

Твърдение 5. $|\rho_{X,Y}| = 1$ *тогава и само тогава, когато случайните величини* X *и* Y *са линейно зависими.*

Доказателство. Нека X и Y са линейно зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива че $X = aY + b$. Ше докажем че $|\rho_{X,Y}| = 1$. Наистина тогава

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(aY + b) = a\,\mathrm{E}Y + b,$$
$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(aY + b) = \mathrm{D}(aY) + \mathrm{D}b = a^2\mathrm{D}Y.$$

Следователно

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} = \frac{\mathrm{E}[(aY + b - (a\,\mathrm{E}Y + b))(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{a^2\mathrm{D}Y}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

$$= \frac{\mathrm{E}[a(Y - \mathrm{E}Y))(Y - \mathrm{E}Y)]}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a\,\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a}{|a|}$$

Последният израз е равен на ± 1 в зависимост от знака на a. С това твърдението е доказано в едната посока.

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими.

За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$. Отново ще разгледаме случайната величина (1.19). Съгласно равенства (1.20)

$$\mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y} = 0$$

След като очакването на една неотрицателна случайна величина е 0. То и самата случайна величина е равна на нула, т.е.

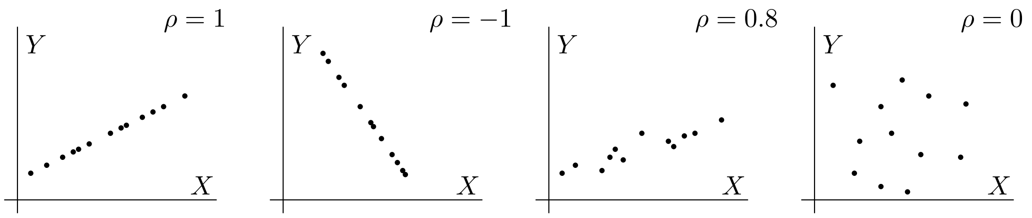
$$\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} = 0$$

Ще напомним, че в това равенство $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$ са константи. Можем да изразим X по следния начин

$$X = \left(-\frac{\sqrt{\mathrm{D}X}}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right)Y + \frac{\sqrt{\mathrm{D}X}\,\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}$$

Което означава линейна зависимост между X и Y. □

Пример 11. *На следващите схеми е показано влиянието на коефициента на корелация върху степента на линейна зависимост между случайните величини X и Y. Всяко наблюдение над случайните величини е представено като точка с координати (X, Y).*



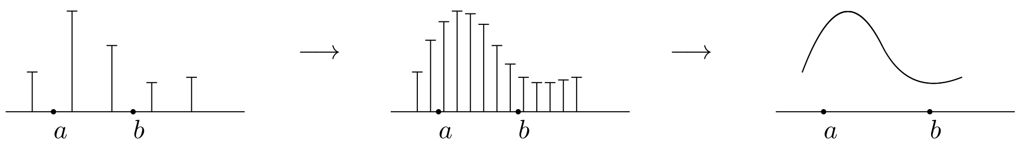
При $\rho = 1$ точките лежат върху растяща права.
При $\rho = -1$ правата е намаляваща.
При $\rho = 0.8$ точките са разположени в околност на права.
При $\rho = 0$ точките са разпръснати.

Не съществува връзка между коефициента на корелация ρ и наклона на правата. Знакът на ρ показва дали правата е растяща или намаляваща. А големината на ρ доколко силна е линейната зависимост. Обърнете внимание, че става дума само за линейна зависимост. Възможно е да съществува друг тип връзка между случайните величини, която няма как да се установи с коефициента на корелация.

2 Непрекъснати случайни величини

До сега разглеждахме дискретни случайни величини, чиито стойности са краен или най-много изброим брой. Това ограничение върху броя на стойностите прави дискретните случайни величини неудобни за описване на редица явления. Например, температурата на въздуха се описва с реално число в интервала $(-45, 52)$, влажността, количеството въглероден двуокис също са реални числа. Затова се налага разглеждането на случайни величини стойностите на които са подмножество на реалните числа, т.е. могат да вземат неизброим брой различни стойности. Такива случайни величини ще наричаме непрекъснати.

За непрекъснатите случайни величини би било безмислено да се въвежда разпределение под формата на таблица като (1.1), тъй като не е възможно описването на всички стойности. Затова, като аналог на разпределенията се използва функция наречена *плътност*, която играе ролята на вероятност. Формално, непрекъснатите случайни величини се дефинират като се извършва граничен преход по дискретните случайни величини. Можем да си представим този процес като вземем една дискретна случайна величина и увеличаваме броят на нейните стойности все повече и повече, докато нейното разпределение се превърне в непрекъснатата функция плътност. Това е илюстрирано в следващата схема.



В този учебник няма да се спираме на формалната (аксиоматична) дефиниция на понятието непрекъсната случайна величина. Вместо това ще дефинираме функцията плътност, а чрез нея и случайната величина.

Дефиниция. *Плътност на непрекъснатата случайната величина X наричаме функцията $f_X(x)$, изпълняваща следните условия:*

$$1)\quad f_X(x) \geq 0 \tag{2.21}$$

$$2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \tag{2.22}$$

$$3)\quad \mathrm{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{2.23}$$

Тази дефиниция е до голяма степен аналогична на дефиницията на разпределение на дискретна случайна величина.

1) отговаря на условието вероятностите да са положителни.

2) означава нормираност, т.е. съответства на условието сумата от всички вероятности в разпределението да бъде едно.

3) дава вероятността за попадане на случайната величина в някакво множество - като се сумират, в случая интегрират, вероятностите на благоприятните случай.

Дефиниция. *Функция на разпределение на случайната величина X наричаме функцията $F_X(x)$, дефинирана за всяко реално число x с равенството:*

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x). \tag{2.24}$$

Съгласно (2.23) функцията на разпределение може да се изрази чрез плътността по следния начин

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \tag{2.25}$$

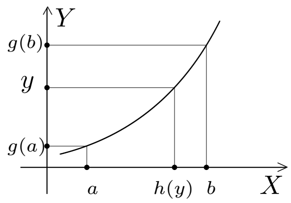
Следователно обратната връзка е от вида

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}. \tag{2.26}$$

2.1 Смяна на променливите

Нека X е произволна непрекъсната случайна величина с известно разпределение, т.е. познаваме плътността и $f_X(x)$. Нека Y е нова случайна величина зададена като функция на X, т.е. $Y = g(X)$. Ще покажем как може да се намери плътността на новата случайна величина $f_Y(y)$.

Най-напред ще разгледаме случая, в който функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно растяща. В този случай съществува обратна функция, която ще означим с $h(y) \equiv g^{-1}(y)$.



Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(a), g(b)]$. Това ни дава възможност да пресметнем функцията на разпределение на Y

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X < h(y)) = F_X(h(y)).$$

Пресмятането на плътността $f_Y(y)$ съгласно (2.26) се свежда до намиране на производна на $F_X(h(y))$. От фомулата за диференциране на сложна функция следва

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_X(h(y))}{\partial y} = f_X(h(y))\, h'(y). \tag{2.27}$$

Нека сега функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Обратната функция $h(y)$ отново съществува.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(b), g(a)]$. За функцията на разпределение на Y получаваме

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X > h(y)) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}(X \leq h(y)) = 1 - F_X(h(y)).$$

В последното равенство използвахме факта, че X е непрекъсната и следователно вероятността да попадне във фиксирана точка е нула, т.е. $\mathrm{P}(X \leq h(y)) = \mathrm{P}(X < h(y))$ Отново ще приложим (2.26) за да определим плътността на Y

$$f_Y(y) = \frac{\partial[1 - F_X(h(y))]}{\partial y} = -f_X(h(y))\, h'(y). \tag{2.28}$$

Тъй като $g(x)$ е намаляваща функция, то и обратната и функция $h(y)$ също е намаляваща, а производната и $h'(y)$ е отрицателна. Следователно намерената плътност е добре дефинирана $f_Y(y) \geq 0$.

Ще обобщим тези два случая на смяна на променливите в следващото твърдение.

Твърдение 6. *Нека X е непрекъсната случайна величина, а $g(x)$ е монотонна и непрекъсната функция. Тогава плътността на случайната величина $Y = g(X)$ се пресмята по формулата*

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|, \tag{2.29}$$

където $h(y)$ е обратната функция на $g(x)$.

Доказателство. Доказателството следва непосредствено от (2.27) и (2.28).

2.2 Математическо очакване

Формално понятието математическо очакване също се дефинира чрез граничен преход. Ние няма да се спираме на този аксиоматичен подход. Ще използваме следният директен начин.

Дефиниция. *Математическо очакване на случайната величина X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано с равенството:*

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx. \tag{2.30}$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че математическото очакване не съществува.

Тази дефиниция на математическото очакване е аналогична на дефиницията (1.2) от дискретния случай. Поради нейзброимия брой стоиности на случайната величина тук сумирането е заменено с интегриране, а конкретните вероятности са заменени с плътността на случайната величина.

По общо математическо очакване на функция от случайна величина може да бъде зададено по следния начин.

Дефиниция. *Нека X е случайна величина, а $g(x)$ произволна функция. Математическото очакване на наричаме числото $\mathrm{E}g(X)$ дефинирано с равенството:*

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx. \tag{2.31}$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че математическото очакване не съществува.

Следващото твърдение дава начина да се пресметне математическото очакване на функция от случайна величина.

Твърдение 7. *Нека X е непрекъсната случайна величина, а $g(x)$ е произволна функция. Тогава, ако съществува математическото очакване $\mathrm{E}g(X)$, то се пресмята по формулата*

$$\mathrm{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

Забележка. Ще направим доказателството само в случая когато $g(x)$ е непрекъсната и монотонна. Твърдението е изпълнено за произволна функция, но доказателството в този случай изисква аксиоматичнто построяване на понятието математическо очакване, което е извън рамките на тези записки.

Доказателство. Ще използваме формулата за смяна на променливите. Нека $Y = g(X)$. Съгласно предходната дефиниция

$$\mathrm{E}g(x) = \mathrm{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\, |h'(y)|dy$$

В последното равенство приложихме (2.29). Сега ще направим и смяна на променливите в интеграла, като ще ползваме същата смяна $y = g(x)$, $x = h(y)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\, |h'(y)|dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))dh(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx$$

□

2.3 Непрекъснати разпределения

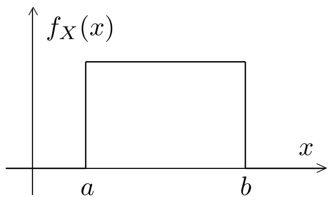
2.3.1 Равномерно разпределение - $X \in U(a,b)$

Нека $[a,b]$ е произволен интервал върху реалната права. Казваме, че случайната величина X е равномерно разпределена в $[a,b]$, ако вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Или казано по друг начин, ако X попада по случаен начин в този интервал. Равномерното разпределение се означава съкратено $X \in U(a,b)$, където $a < b$ са реални числа.

Плътността на равномерно разпределената случайна величина X е константа в $[a,b]$, т.е.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in [a,b] \\ 0 & , \notin \end{cases}$$

Константата е определена от нормиращото условие (2.22), т.е. лицето под функцията да бъде единица.



Ще намерим математическото очакване на X.

$$\mathrm{E}X = \int_a^b x\,\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Както можеше да се предположи, математическото очакване е точно в средата на интервала $[a,b]$.

Ще пресметнем и дисперсията на X

$$\mathrm{E}X^2 = \int_a^b x^2\,\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=a}^{b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

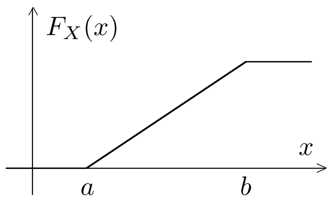
$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ще използваме (2.25) за да определим функцията на разпределение на X. Ясно е, че $F_X(x) = 0$ за $x < a$ и $F_X(x) = 1$ за $x \geq b$. Ще пресметнем съществения случай $a \leq x < b$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{t}{b-a}\bigg|_{t=a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

Окончателно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,a \leq x < b \\ 1 & ,x \geq b \end{cases}$$



2.3.2 Експоненциално разпределение - $X \in \mathcal{E}x(\lambda)$

Дефиниция. *Казваме, че случайна величина X е експоненциално разпределена, ако плътността и има вида*

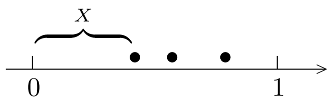
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$$

където $\lambda > 0$ Символичното означаване на експоненциалното разпределение е следното $X \in \mathcal{E}x(\lambda)$.

Не е трудно да се провери, че разпределението е добре дефинирано, т.е. че плътноста му отговаря на условията (2.21) и (2.22). Ясно е, че $f_X(x) \geq 0$ и освен това

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^\infty = 1.$$

Съществува връзка между поасоновото и експоненциалното разпределение. Нека броят на събитията, сбъдващи се в някакъв интервал от време, да бъде поасоново разпределена случайна величина с математическо очакване λ. Тогава времето X до първото сбъдване на събитие е експоненциално разпределена случайна виличина.



За да докажем този факт ще намерим функцията на разпределение X. За определеност ще приемем дължината на интервала за единица. Нека $x \geq 0$

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x) = 1 - \mathrm{P}(X \geq x).$$

За да бъде изпълнено $\{X \geq x\}$ трябва в интервала $[0, x]$ да не се е сбъднало нито едно събитие. Нека с Y означим броя на събитията в този интервала. Трябва да намерим $\mathrm{P}(Y = 0)$. Средният брой събития сбъднали се в $[0, x]$ ще е пропорционален на дължината на този интервал. Тъй като в целия интервал събитията са средно λ, то в $[0, x]$ средният брой сбъднали се събития ще е λx. Следователно, Y е поасонова случайна величина с очакване $\mathrm{E}Y = \lambda x$, тогава $Y \in Po(\lambda x)$. По този начин за $F_X(x)$ получаваме:

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{P}(X \geq x) = 1 - \mathrm{P}(Y = 0) = 1 - \frac{(\lambda x)^0 e^{-\lambda x}}{0!} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Остава да намерим плътността на X. Съгласно (2.26) за $x \geq 0$ е изпълнено:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \lambda e^{-\lambda x},$$

откъдето следва, че X е експоненциално разпределена. $\square$

Ще пресметнем математическото очакване и дисперсията на $X \in \mathcal{E}x(\lambda)$. Прилагаме формулата за интегриране по части

$$\mathrm{E}X = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^\infty x\, de^{-\lambda x} = \tag{2.32}$$

$$= \quad -xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \quad -xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

В последното равенство използвахме известната от математическия анализ граница $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-\lambda x} = 0$ за всяко $n > 0$.

По аналогичен начин се пресмята

$$\mathrm{E}X^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \quad -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx^2 =$$

$$= \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тук приложихме равенство (2.32), за да не се налага отново да пресмятаме интегралът по части.

Сега, за дисперсията на X получаваме

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.3.3 Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Дефиниция. *Казваме, че случайна величина X е нормално разпределена, $X \in N(\mu, \sigma^2)$, ако плътността и има вида*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.33}$$

Тук $\sigma > 0$, а μ е произволно реално число.

Нормално разпределените случайни величини са изключително често срещани, затова изучаването на техните свойства е важна задача в теория на вероятностите.

Както знаете функцията e^{-x^2} няма примитивна, т.е. не може да бъде интегрирана в общия случай. Затова вероятностите, свързани с нормално разпределена случайна величина, не могат да бъдат пресмятани по традиционния начин чрез интегриране, а се вадят от таблици.

Плътността на нормалното разпределение, както всяка плътност отговаря на условие (2.22). За всяко реално μ и $\sigma > 0$ е изпълнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1. \tag{2.34}$$

Няма да се спираме на доказателството на това равенство, ще го използваме наготово.

Забележка.(за по любознателните) Един начин за доказване е следния. Взима се интегралът на квадрат. Представя се като двоен интеграл и се извършва полярна смяна на променливите. □

Ще пресметнем математическото очакване на X.

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu+\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Ще разделим този интеграл на две части. Първата с $x-\mu$, а втората с μ.

В първият интеграл ще извършим смяна на променливите $y = x-\mu$. При тази смяна границите на интеграла се запазват, а $dy = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 0.$$

Този интеграл е равен на нула, тъй като функцията е нечетна, а границите на интегриране са симетрични.

Ще решим втория интеграл, като го сведем до (2.34)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu.$$

Следователно $\mathrm{E}X = \mu$.

Ще намерим дисперсията на X. Няма да използваме традиционния начин с намирането на $\mathrm{E}X^2$, защото това е трудоемка задача. Вместо това ще пресметнем дисперсията директно от нейната дефиниция. Като приложим Твърдение7, получаваме

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Ще интегрираме по части. Като ще вкараме експонентата под знака на диференциала. Предварително ще пресметнем производната на експонентата

$$\left(e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)' = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Следователно

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} d\left(e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= -\sigma^2\, \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

Първото събираемо е равно на нула, тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$. Интегралът във второто събираемо е единица поради (2.34).

Така за нормално разпределената случайна величина $X \in N(\mu, \sigma^2)$ получихме

$$\mathrm{E}X = \mu, \qquad \mathrm{D}X = \sigma^2,$$

т.е. параметрите μ и σ^2, с които се задава случайната величина, са математическото очакване и дисперсията ѝ.

Както отбелязахме, вероятностите свързани с нормално разпределени случайни величини се вадят от таблици. Таблиците се отнасят само за случайни величини с очакване нула и дисперсия едно, т.е.$N(0,1)$. Прието е, тези случайни величини да се наричат „стандартно нормално разпределени“, а процедурата, с която една случайна величина се привежда към този вид - „стандартизиране“. Начина за стандартизиране е даден в следващото твърдение.

Твърдение 8. *Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и нека*

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

тогава $Y \in N(0,1)$.

Доказателство. Ще използваме формулата за смяна на променливите (2.29). В условието е зададена правата трансформация

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Обратната трансформация е

$$x = \sigma y + \mu.$$

Пресмятаме якобиана

$$J = \sigma$$

Сега, от (2.33) и (2.29) за плътността на Y, получаваме

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{2}} \tag{2.35}$$

Тази функция явно е плътност от типа $N(0, 1)$. □

2.3.4 Гама разпределение

Дефиниция. *Казваме, че случайна величина X има гама разпределение, $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$, с параметри $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, ако плътността и има вида*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

където $\Gamma(\alpha)$ е Ойлеровата гама функция, т.е. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Експоненциалното разпределение може да се разглежда, като частен случай на гама разпределение.

Твърдение 9. *Нека случайните величини $X_1 \in \Gamma(\alpha_1, \beta)$ и $X_2 \in \Gamma(\alpha_2, \beta)$ са независими. Тогава $X_1 + X_2 \in \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.*

Доказателство. Най-напред ще намерим съвместната плътност на случайните величини X_1 и X_2. Знаем че те са независими, следователно

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\beta(x_1 + x_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}, \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Съвместната плътност е различна от нула само в първи квадрант.

Ще направим смяна на променливите. Първата случайна величина $Y_1 = X_1 + X_2$ е тази, която ни интересува. Втората случайна величина Y_2 въвеждаме изкуствено с цел да направим смяната обратима. Правата трансформация има вида

$$\left| \begin{array}{ll} Y_1 = & X_1 + X_2 \\ Y_2 = & X_2 \end{array} \right.$$

Съответно, обратната трансформация е

$$\left| \begin{array}{ll} X_1 = & Y_1 - Y_2 \\ X_2 = & Y_2 \end{array} \right.$$

Пресмятаме модула на якобиана на трансформацията

$$|J| = \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = 1$$

За съвместната плътност на новите случайни величини Y_1 и Y_2 получаваме

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}(y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}e^{-\beta y_1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}, \qquad \left| \begin{array}{rl} y_1 - y_2 & \geq 0 \\ y_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

За да завършим доказателството остава да намерим маргиналната плътност на Y_1. За целта трябва да интегрираме съвместната плътност по y_2 Съгласно първото неравенство $y_2 \leq y_1$. Тогава за всяко $y_1 > 0$ е изпълнено

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta y_1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}dy_2 \tag{2.37}$$

За да решим този интеграл ще направим в него смяна на променливите $t = y_2/y_1$. Ще напомним, че от гледна точка на интегрирането y_1 е константа.

$$\int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}dy_2 = y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^{y_1} \left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\alpha_2-1} d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \tag{2.38}$$

$$= y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1}dt = y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{B}(\alpha_2,\alpha_1)$$

В последното равенство $\mathrm{B}(\alpha_2,\alpha_1)$ е бета функция Ойлер, дефинирана с равенството

$$\mathrm{B}(n,k) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{k-1}dt.$$

Сега ще използваме известната връзка между бета и гама функция

$$\mathrm{B}(n,k) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)}.$$

Така за интеграла от равенство (2.38) получаваме:

$$\int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}dy_2 = y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Окончателно, след заместване в (2.37) ще намерим плътността на $Y_1 = X_1 + X_2$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta y_1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}, \qquad y_1 \geq 0.$$

Не е трудно да се съобрази, че това е гама плътност с параметри $\alpha_1 + \alpha_2$ и β. С което твърдението е доказано. $\square$

Този резултат се обобщава по индукция за повече от две случайни величини.

Твърдение 10. *Нека случайните величини* $X_i \in \Gamma(\alpha_i, \beta)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ *са независими в съвкупност. Тогава* $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \in \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \beta)$.

2.3.5 Хи-квадрат разпределение - $X \in \chi^2(n)$

Хи-квадрат разпределението е често използвано в статистиката. При решаването на редица статистически задачи се налага да се изследват суми от квадрати на гаусови случайни величини. Оказва се, че тези суми имат хи-квадрат разпределение. Броят на събираемите n е прието да се нарича „степени на свобода“.

Ние ще въведем хи-квадрат разпределението, като частен случай на гама разпределение

Дефиниция. *Казваме, че случайната величина има хи-квадрат разпределение с* n *„степени на свобода“,* $X \in \chi^2(n)$*, ако* $X \in \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

От равенство (2.36) може да се изрази плътността на хи-квадрат разпределението в явен вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Основното свойство, поради което се използва е формулирано в следващото твърдение.

Твърдение 11. *Нека случайната величини* X *е стандартно нормално разпределена. Тогава* X^2 *има хи-квадрат разпределение с една степен на свобода, т.е.*

$$X \in N(0,1) \qquad \Rightarrow \qquad X^2 \in \chi^2(1)$$

Доказателство. Ще направим смяна на променливите $Y = X^2$. Тази смяна е по-сложна от разглежданите досега, тъи като функцията не е еднозначно обратима. На всяка стойност на Y съответсват две стойности на X.

За функцията на разпределение на Y е изпълнено

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(X < -\sqrt{y}) + \mathrm{P}(X > \sqrt{y})$$

Можем да разгледаме поотделно двата случая $X < 0$ и $X \geq 0$. Във всеки един от тях смяната е обратима.

Твърдение 12. *Нека случайните величини* $X_i \in N(0,1)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ *са независими в съвкупност. Тогава*

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \in \chi^2(n)$$

https://onlinecourses.science.psu.edu/stat414