Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Да припомним, че рекурентното уравнение $a_n = Aa_{n-1} + B$ *има решение* $a_n = C_1 A^n + C_2$, *където константите* C_1 *и* C_2 *се определят от началните условия.*

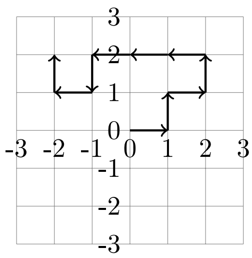
Задача 1. Нека съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cx^2 + 1$ за $x, y \geq 0, x + 2y \leq 1$ и 0 извън тази област, където c е някаква константа. Намерете:

1. (0.5 т.) c, плътността на X и очакването на Y;
2. (0.25 т.) $\mathbb{E}(Y|X = 1/2)$;
3. (0.25 т.) плътността на случайната величина $Z = X + 2Y$.

Задача 2. Магазин работи от 10:00 до 18:00. Нека моделираме времената на пристигане между последователни клиенти под 30 години в него като независими експоненциални величини със средно 5 минути и съответно времената между последователни клиенти над 30 години като независими експоненциални величини със средно 10 минути.

1. (0.5 т.) Каква е вероятността магазинът да бъде посетен от поне 100 клиенти под 30 години за 1 ден?
2. (0.25 т.) Намерете разпределението на времето до първия клиент за деня.
3. (0.25 т.) Можете да приемете, че времената между последователните хора са независими и са разпределени като случайната величина от 2[1]. Каква е вероятността магазинът да бъде посетен от поне 150 души за 1 ден?

Задача 3. Точка започва да се движи от началото на координатната система успоредно на някоя от осите, като всеки път избира равномерно една от посоките и се премества на 1 в съответната посока. На картинката по-долу може да видите примерна реализация на маршрут от 10 стъпки.



1. (0.5 т.) Каква е вероятността след 1000 стъпки x-координатата да бъде по-голяма от 10?
2. (0.5 т.) Намерете очакването[2] на квадрата от разстоянието до центъра след 100 стъпки.

Задача 4. Нека $X_0 \sim Exp(1)$ и $X_n = 2X_{n-1} + \epsilon_n$ за $n \in \mathbb{N}$, където ϵ_n са независими $N(0, 1)$ случайни величини.

1. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}X_n$ и DX_n.
2. (0.25 т.) Нека $S_{n,1} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - 2X_{i-1})^2$ и $S_{n,2} = \sum_{i=1}^{n}|X_i - 2X_{i-1}|$. Намерете $\mathbb{E}S_{n,1}$ и $\mathbb{E}S_{n,2}$.
3. (0.5 т.) Можете ли да отговорите на въпросите от 1. и 2., когато $\epsilon_i \sim N(1, 2)$?

[1] Бонус**: Докажате го.
[2] Бонус***: и дисперсията!