

**Задача 1.** Да се симулира хвърляне на зар и да се намери приближение на вероятността за падане на шестица.

**Задача 2.** В отдел на фирма работят 20 човека. За Коледа те решават да си разменят подаръци. В кутия слагат 20 листчета, на всяко от които има едно име. Всеки тегли листче (без да го връща) и подарява на този, чието име е изтеглил. Каква е вероятността поне един да изтегли своето име?

**Задача 3.** Каква е вероятността в група от 25 човека поне двама да имат рожден ден на един и същи ден от годината?

**Задача 4.** Студент се явява на изпит с конспект от 20 въпроса. От тях не знае само 3 въпроса. На изпита си тегли 2 въпроса от конспекта. Каква е вероятността да знае само един от изтеглените въпроси?

**Задача 5.** Иван има 5 ключа, но не знае кой е за неговата стая. Той пробва последователно с всеки от тях, като помни кой ключ е пробвал. Каква е вероятността да отключи с петия ключ?

**Задача 6.** На всеки от върховете на равностранен триъгълник има една мравка. Всяка мравка избира произволно един от другите два върха и тръгва към него. За единица време всяка мравка изминава разстоянието от един връх до друг. Две мравки могат да се разминат ако тръгнат една срещу друга. Каква е вероятността след единица време да има по една мравка на всеки връх?

**Задача 7.** Имаме 3 карти: първата е бяла от двете страни, втората е черна от двете страни, а третата е бяла от едната и черна от другата страна. Всяка карта е поставена в затворена кутия. Избираме произволна кутия, отваряме я и виждаме, че горната страна на картата в нея е бяла. Каква е вероятността другата страна на картата също да е бяла?

**Задача 8.** В кутия има 5 топки, номерирани от 1 до 5. Вадим произволна топка и я връщаме в кутията. Отново вадим произволна топка. Каква е вероятността да извадим два пъти една и съща топка?

**Задача 9.** В кутия има 3 различни чифта чорапи. Вадим в тъмното 2 чорапа. Каква е вероятността да са чифт?

**Задача 10.** Група от 20 човека, измежду които са Иван и Георги, е подредена по случаен начин в редица. Каква е вероятността Иван и Георги да са един до друг?

**Задача 11.** Тесте от 52 карти е разбъркано и е раздадено на 4 играчи. Каква е вероятността всеки играч да има едно асо?

**Задача 12.** Парола, състояща се от 5 малки букви, е генерирана по случаен начин (буквата на всяка позиция е избрана равновероятно измежду буквите  $a, b, \dots, z$ ). Каква е вероятността всички букви в паролата да са различни?

**Задача 13.** На първия етаж на административна сграда 7 души чакат асансьора. Всеки от тях отива в някой от офисите в сградата. Сградата има 16 етажа и на всеки етаж има равен брой офиси (на първия етаж няма офиси).

а) Каква е вероятността поне двама от чакащите да отиват на един и същи етаж?

б) Ако Вие сте един от седемте, каква е вероятността поне един от останалите 6 да отива на Вашия етаж?

\* \* \*

**Задача 14.** Хвърляме зар 10 пъти. Каква е вероятността да се паднат само 2 шестци? Каква е вероятността да се паднат не повече от 2 шестци? Каква е вероятността да се паднат 2 или повече шестци?

**Задача 15.** Хвърляме зар докато се падне шестца. Каква е вероятността да хвърляме не повече от 10 пъти? Каква е вероятността да хвърляме поне 6 пъти?

**Задача 16.** Хвърляме зар докато се паднат три шестци. Каква е вероятността да хвърляме не повече от 20 пъти?

**Задача 17.** Фенерче работи с 2 батерии. Иван има 8 батерии, от които 5 са нови и 3 са изтощени, но не знае кои точно. Ако пробва с 2 случайно избрани батерии, каква е вероятността фенерчето да проработи?

**Задача 18.** Машинописка прави средно по една грешка на всеки 500 думи. На една страница има 300 думи. Каква е вероятността машинописката да направи не повече от 2 грешки на 5 страници? Каква е вероятността да направи между 1 и 3 грешки (включително) на 5 страници?

**Задача 19.** На студенти е даден тест от 10 въпроса, всеки с по 4 възможни отговора, един от които е верен. Иван се явява на теста без да е учил и огражда произволно отговори. Каква е вероятността да е отговорил вярно на поне 5 от въпросите?

**Задача 20.** За клинично проучване са необходими доброволци имачи определен ген, който се среща с вероятност 0.1. Каква е вероятността да се тестват 5 или повече доброволци до намиране на първия доброволец с въпросния ген? Каква е вероятността да се тестват 50 или повече доброволци до намиране на 10 доброволци с въпросния ген?

**Задача 21.** Средно веднъж на 90 дни в софийското метро възниква технически проблем, който води до спиране на движението на влаковете за поне 20 минути. Каква е вероятността за 360 дни да възникне такъв проблем повече от 3 пъти?

**Задача 22.** Теглим 10 случайно избрани карти от тесте с 52 карти (без връщане). Каква е вероятността да изтеглим поне 2 купи?

**Задача 23.** Теглим 10 пъти по една случайно избрана карта от тесте с 52 карти (с връщане). Каква е вероятността да изтеглим поне 2 купи?

**Задача 24.** Пациент в болница се нуждае от кръводарител с кръвна група АВ. Известно е, че 7% от населението е с кръвна група АВ. Потенциални кръводарители се тестват в болницата за определяне на кръвната им група.

а) Каква е вероятността да се тестват не повече от 10 души до откриване на кръводарител с кръвна група АВ?

б) Каква е вероятността измежду първите 50 тествани да има поне двама с кръвна група АВ?

**Задача 25.** Броят клиенти, които посещават офис на банка за един ден, е Пуасоново разпределен с параметър  $\lambda = 18$ .

а) Каква е вероятността офиса на банката да бъде посетен от поне 20 клиенти за един ден?

б) Каква е вероятността между 15 и 25 клиенти (включително) да посетят офиса на банката за един ден?

\* \* \*

**Задача 26.** Генерирайте 500 случайни числа от равномерно разпределение в интервала  $(2, 3)$ . Начертайте хистограма на генерираните числа и на същата картинка добавете графика на плътността  $f(x)$ . Повторете същото с 5000 случайни числа.

**Задача 27.** Генерирайте 500 случайни числа от експоненциално разпределение с параметър  $\lambda = 1/7$ . Начертайте хистограма на генерираните числа и на същата картинка добавете графика на плътността  $f(x)$ . Повторете същото с 5000 случайни числа.

**Задача 28.** Генерирайте 500 случайни числа от нормално разпределение с параметри  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ . Начертайте хистограма на генерираните числа и на същата картинка добавете графика на плътността  $f(x)$ . Повторете същото с 5000 случайни числа.

**Задача 29.** Количеството (в милилитри) на душ гел в опаковка е равномерно разпределено в интервала  $(248, 255)$ . Каква е вероятността произволно избрана опаковка да съдържа по-малко от 250 мл душ гел? Намерете  $v$ , такова че произволно избрана опаковка съдържа поне  $v$  мл душ гел с вероятност 0.95.

**Задача 30.** Времето на живот (в хиляди часове) на лазерен диод е експоненциално разпределено с параметър  $\lambda = 1/10$ . Каква е вероятността времето на живот на произволно избран лазерен диод да надвишава 10 хиляди часа? Каква е вероятността времето на живот на произволно избран лазерен диод да е между 7 и 11 хиляди часа? Намерете  $t$ , такова че времето на живот на лазерен диод е поне  $t$  с вероятност 0.97.

**Задача 31.** Времето от зареждане до изтощаване на батерия на лаптоп при обичайна работа е нормално разпределено със средно 260 минути и стандартно отклонение 50 минути. Каква е вероятността батерия да се изтощи след повече от 4 часа работа? Каква е вероятността батерия да се изтощи след между 3 и 5 часа работа? Намерете  $t$ , такова че батерия се изтощава след повече от  $t$  минути с вероятност 0.9.

**Задача 32.** Количеството кашкавал, което се изразходва в дадена пицария за една седмица, е нормално разпределено със средно 41 кг и стандартно отклонение 5 кг. Каква е вероятността в произволно избрана седмица пицарията да изразходи над 51 кг кашкавал? Колко кашкавал трябва да има в запас в дадена седмица, така че да е достатъчно с вероятност 0.99?

**Задача 33.** Количеството бира (в литри), което Иван изпива за една седмица, е експоненциално разпределено с параметър  $1/3$ . Каква е вероятността Иван да изпие повече от 10 литра бира за една седмица? Каква е вероятността в най-много 3 от следващите 5 седмици Иван да изпие повече от 10 литра бира? Предполагаме, че количеството изпита бира в дадена седмица е независимо от това в предишните седмици.

**Задача 34.** Обемът течност, който автомат за безалкохолни напитки налива в една чаша, е нормално разпределен със средно 205 мл и стандартно отклонение 2 мл. Каква е вероятността автоматът да налее в една чаша по-малко от 200 мл? Каква е вероятността автоматът да налее в една чаша между 200 и 205 мл?

**Задача 35.** Времето, през което потребител разглежда интернет страница преди да премине на друга страница, е експоненциално разпределено със средно 5 секунди. Каква е вероятността страница да бъде разглеждана от потребител повече от 10 секунди? След колко време 50% от потребителите са преминали на друга страница?

\* \* \*

**Задача 36.** Разгледайте данните [survey](#) от пакета [MASS](#). Представете таблично и графично данните за физическите упражнения ([Exer](#)).

**Задача 37.** (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Представете таблично и графично данните за пушенето ([Smoke](#)).

**Задача 38.** (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).)

- а) Какъв процент от студентите са непушачи?
- б) Колко от студентите са непушачи и правят физически упражнения често?
- в) Какъв процент от студентите са непушачи и правят физически упражнения често?
- г) Какъв процент от непушачите правят физически упражнения често?
- д) Какъв процент от студентите, правещи физически упражнения често, са непушачи?

**Задача 39.** (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Чрез подходящи графики илюстрирайте честотата на пушене в зависимост от честотата на физически упражнения.

**Задача 40.** (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Чрез подходящи графики илюстрирайте честотата на физически упражнения в зависимост от честотата на пушене.

**Задача 41.** (Данни [survey](#) от пакета [MASS](#).) Представете чрез подходящи таблици и графики данните за пулса на студентите ([Pulse](#)).

**Задача 42.** (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Представете чрез подходящи таблици и графики данните за възрастта на студентите (`Age`).

\* \* \*

**Задача 43.** (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Намерете медианата, средната стойност и стандартното отклонение на:

- а) пулса на студентите;
- б) пулса на жените;
- в) пулса на студентите на възраст не повече от 25 години;
- г) пулса на студентите, правещи физически упражнения често;
- д) пулса на студентите, които са непушачи и правят физически упражнения често.

**Задача 44.** (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Чрез подходящи числови характеристики и графики покажете как пулсът се различава в зависимост от честотата на физически упражнения (`Exer`).

**Задача 45.** Във файла `exam_grades.txt` има данни за оценките на студенти от курс по статистика.

- а) Чрез графики и числови характеристики изследвайте зависимостта между:
  - `test1` и `course.grade`;
  - `test2` и `course.grade`;
  - `test3` и `course.grade`.
- б) Чрез графики и числови характеристики покажете как крайната оценка (`course.grade`) се различава в зависимост от пола.
- в) Покажете как крайната оценка варира в зависимост от семестъра.

**Задача 46.** Генерирайте вектор  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{500})$  с 500 случайни числа от:

- а)  $U(3, 7)$ ;
- б)  $\text{Exp}(1/5)$ ;
- в)  $\mathcal{N}(5, 1)$ .

За всеки от векторите постройте кутия с мустаци, ориентирана хоризонтално. Добавете на графиката  $\bar{x}$  и границите на интервала  $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$  като използвате функцията `points`.

**Задача 47.** (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Намерете медианата, средната стойност и стандартното отклонение на:

- а) възрастта на студентите;
- б) възрастта на пушачите;
- в) възрастта на пишещите с дясната ръка;
- г) възрастта на студентите с измерен пулс 70 и повече;
- д) възрастта на студентите, които не правят физически упражнение.

**Задача 48.** (Данни `survey` от пакета `MASS`.) Представете графично височината на студентите. Чрез подходящи числови характеристики и графики сравнете височината на мъжете и жените.

\* \* \*

**Задача 49.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат нормално разпределение  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Намерете оценка на вероятността  $\theta_a = \mathbb{P}(X_i \leq a)$ , като

- (1) използвате, че  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са генерирани от нормално разпределение;
- (2) не използвате, че  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са генерирани от нормално разпределение.

За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $\mu = 5$ ,  $\sigma = 1$  и пресметнете двете оценки на вероятността  $\theta_a$  за  $a = 3.4$  и  $a = 4.5$ . Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

**Задача 50.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат равномерно разпределение  $U(0, b)$ . Оценка на параметъра  $b$  може да се намери по метода на максималното правдоподобие и тази оценка е  $\hat{b} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ . Нека  $M$  е медианата на  $X_i$ , т.е.  $\mathbb{P}(X_i \leq M) = 1/2$ . Не е трудно да се види, че  $M = b/2$ . Ако използваме оценката  $\hat{b} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ , ще получим оценка на медианата  $\hat{b}/2 = \max\{x_1, \dots, x_n\}/2$ . Друга оценка на медианата  $M$  е извадъчната медиана.

За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $b = 8$  и пресметнете двете оценки на медианата. Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

**Задача 51.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат експоненциално разпределение  $\text{Exp}(\lambda)$ . Оценка на параметъра  $\lambda$  може да се намери по метода на максималното правдоподобие и тази оценка е  $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ . Нека  $M$  е медианата на  $X_i$ , т.е.  $\mathbb{P}(X_i \leq M) = 1/2$ . Не е трудно да се види, че  $M = (1/\lambda) \log(2)$ . Ако използваме оценката  $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ , ще получим оценка на медианата  $(1/\hat{\lambda}) \log(2) = \bar{x} \log(2)$ . Друга оценка на медианата  $M$  е извадъчната медиана.

За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $\lambda = 1/5$  и пресметнете двете оценки на медианата. Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

**Задача 52.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат нормално разпределение  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Разглеждаме следните оценки на  $\sigma$ :

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

а) За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $\mu = 3$ ,  $\sigma = 2$  и пресметнете двете оценки на  $\sigma$ . Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

б) Може да разглеждаме  $\hat{\sigma}_1^2$  и  $\hat{\sigma}_2^2$  като оценки на  $\sigma^2$ . За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на  $\sigma^2$  на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

**Задача 53.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат експоненциално разпределение  $\text{Exp}(\lambda)$ . Оценка на дисперсията  $\text{Var}(X_i) = 1/\lambda^2$  може да се намери като се използва оценката  $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ . Друга оценка на дисперсията  $\text{Var}(X_i)$  е  $s^2$ .

За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $\lambda = 1/5$  и пресметнете двете оценки на дисперсията. Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

**Задача 54.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат експоненциално разпределение  $\text{Exp}(\lambda)$ . Намерете оценка на вероятността  $\theta_a = \mathbb{P}(X_i \leq a)$ , като

- (1) използвате, че  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са генерирани от експоненциално разпределение;
- (2) не използвате, че  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са генерирани от експоненциално разпределение.

За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $\lambda = 1/5$  и пресметнете двете оценки на вероятността  $\theta_a$  за  $a = 0.3$  и  $a = 1.8$ . Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

**Задача 55.** Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са наблюдения над случайните величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , които са независими и имат Поасоново разпределение  $\text{Po}(\lambda)$ . Намерете оценка на дисперсията  $\text{Var}(X_i)$ , като

- (1) използвате, че  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са генерирани от Поасоново разпределение;
- (2) не използвате, че  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са генерирани от Поасоново разпределение.

За  $n = 20, 50, 100, 500, 1000$  генерирайте данни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  като вземете  $\lambda = 3$  и пресметнете двете оценки на дисперсията. Повторете 30000 пъти. За всяко  $n$  пресметнете средното и стандартното отклонение на двете оценки на базата на получените 30000 стойности. Визуализирайте получените резултати на подходяща графика.

\* \* \*